4. Polynomfunktionen

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

Die höchste Potenz bestimmt den Grad der Polynomfunktion. Das absolute Glied gibt stets den Schnitt mit der y-Achse an.

$n = 0$: $f(x) = a$ (konstante Funktion)

$n = 1$: $f(x) = ax + b$ (lineare Funktion)

$n = 2$: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (quadratische Funktion)

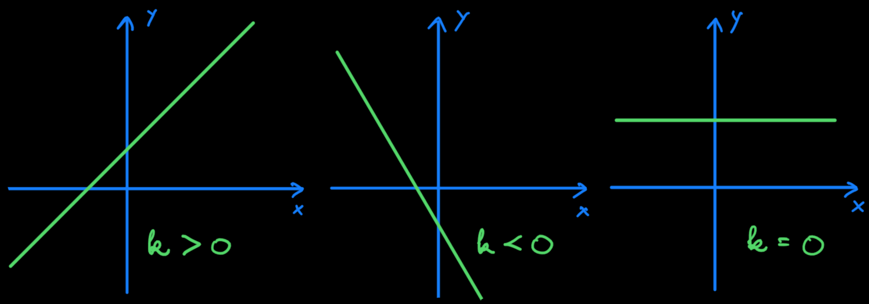
$n = 3$: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (kubische Funktion)

$n = 4$: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (Funktion vierten Grades)

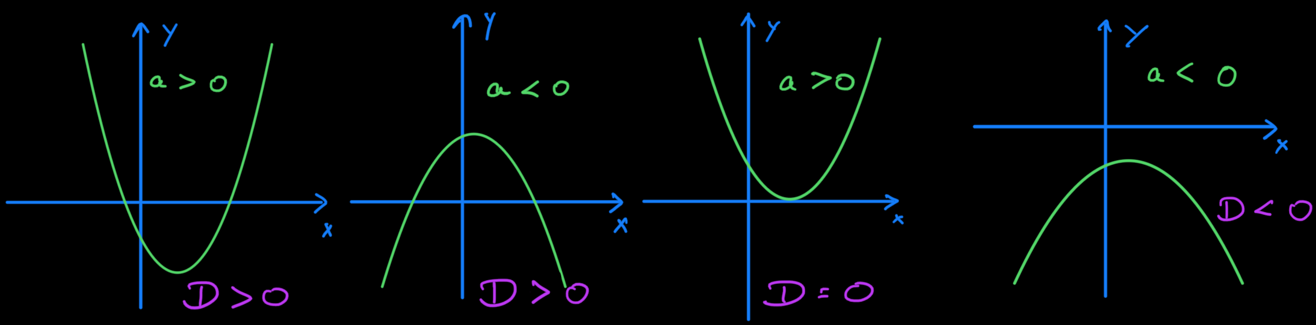
...usw.

4.1 Schaubilder von Funktionsgraphen

n=1: Gerade (lineare Funktion)



n=2: Parabel (quadratische Funktion)



2 Nullstellen	2 Nullstellen	1 Nullstelle	keine Nullstelle
1 Extrempunkt	1 Extrempunkt	1 Extrempunkt	1 Extrempunkt
keine Wendestelle	keine Wendestelle	keine Wendestelle	keine Wendestelle

Bemerkung:

Nullstellen werden ermittelt, indem man $f(x) = 0$ setzt. Somit hat man eine quadratische Gleichung zu lösen. Die Lösungen der quadratischen Gleichung entsprechen den Nullstellen. Eine quadratische Gleichung hat zwei, eine oder keine reelle Lösung, je nach Vorzeichen der Diskriminante (=Ausdruck unter der Wurzel). Somit hat eine quadratische Funktion zwei, eine oder keine Nullstelle.

Für $D > 0$ besitzt die quadratische Funktion zwei Nullstellen.

Für $D = 0$ besitzt die quadratische Funktion eine Nullstelle.

Für $D < 0$ besitzt die quadratische Funktion keine Nullstellen.

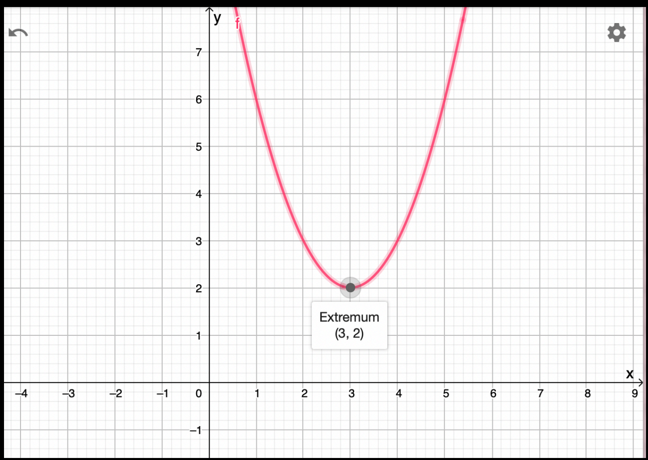
Eine quadratische Funktion hat immer einen Scheitelpunkt (Hoch- oder Tiefpunkt) und die quadratische Funktion ist immer einheitlich gekrümmt. Sie ist entweder im gesamten Definitionsbereich negativ ($a < 0$) oder im gesamten Definitionsbereich positiv ($a > 0$) gekrümmt. Ist sie negativ gekrümmt, so ist sie nach unten offen, ist sie hingegen positiv gekrümmt, so ist sie nach oben offen.

Scheitelpunktform der quadratischen Funktion

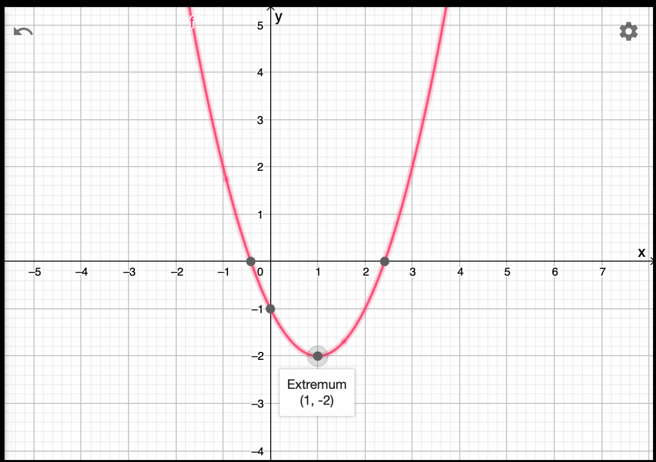
$$f(x) = (x + m)^2 + n$$

$$S(-m/n)$$

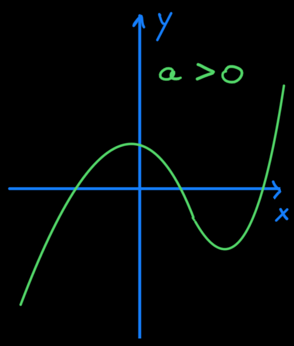
Bsp.: $f(x) = (x - 3)^2 + 2$



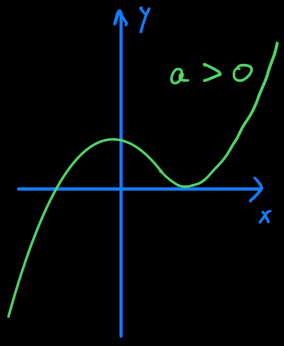
Bsp.: $f(x) = (x - 1)^2 - 2$



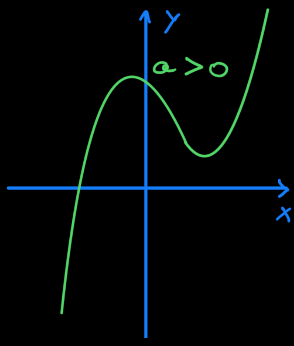
n=3: S-Kurve (kubische Funktion, Funktion dritten Grades)



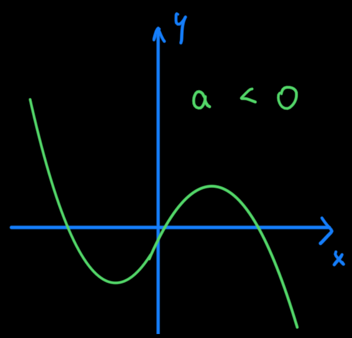
3 Nullstellen
2 Extrempunkte
1 Wendestelle



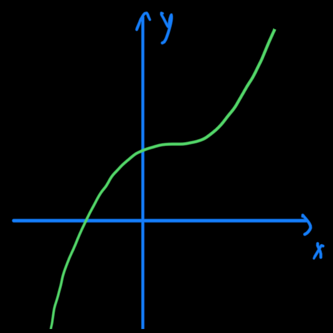
2 Nullstellen
2 Extremstellen
1 Wendestelle



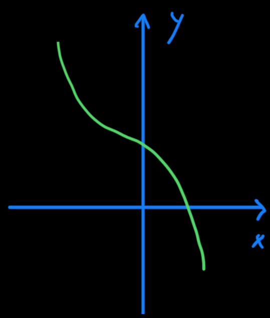
1 Nullstelle
2 Extremstellen
1 Wendestelle



3 Nullstellen
2 Extrempunkte
1 Wendestelle



1 Nullstelle
KEINE Extrempunkte
1 Wendestelle
SATTELPUNKT

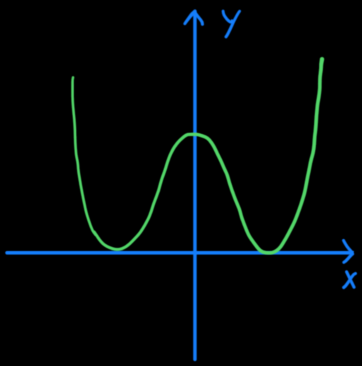


1 Nullstelle
KEINE Extrempunkte
1 Wendestelle

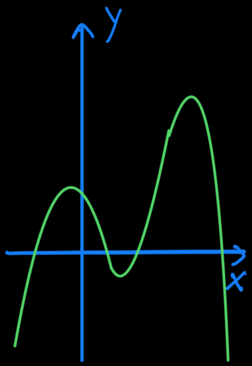
Bemerkung:
Für $a > 0$ kommt die S-Kurve von unten.
Für $a < 0$ kommt die S-Kurve von oben.

Eine Funktion dritten Grades hat höchstens drei und mindestens eine Nullstelle.
Sie hat immer einen Wendepunkt.
Sie besitzt nicht immer einen Extrempunkt.
Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit Steigung null.

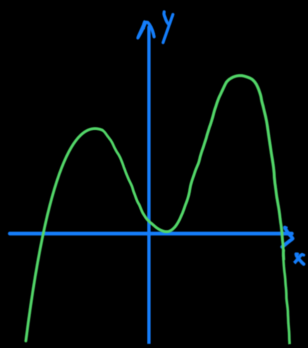
n=4: Funktion vierten Grades



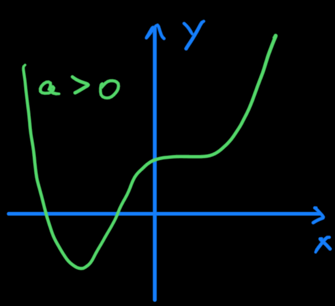
2 Nullstellen
3 Extremstellen
2 Wendestellen



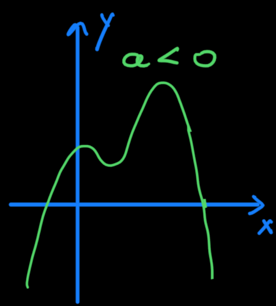
4 Nullstellen
3 Extremstellen
2 Wendestellen



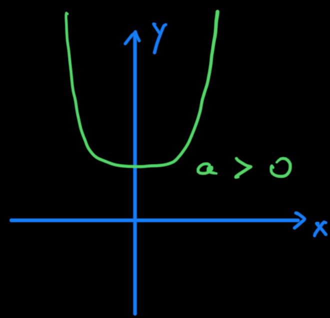
3 Nullstellen
3 Extremstellen
2 Wendestellen



2 Nullstellen
1 Extremstelle
2 Wendestellen



2 Nullstellen
3 Extremstellen
2 Wendepunkte



KEINE Nullstelle
1 Extremstelle
KEINE Wendestelle

Bemerkung:
Für $a > 0$ kommt die Kurve von oben.
Für $a < 0$ kommt die Kurve von unten.

Eine Funktion vierten Grades hat höchstens vier Nullstellen und es kann sein, dass sie keine Nullstelle besitzt.
Eine Funktion vierten Grades hat höchstens drei und mindestens eine Extremstelle.
Eine Funktion vierten Grades kann höchstens zwei Wendestelle besitzen, das bedeutet, es ist möglich, dass sie gar keine Wendestelle hat.

Man erkennt einen Zusammenhang zwischen Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen:

Eine Polynomfunktion *n*-ten Grades hat

- höchstens *n* Nullstellen
- höchstens *n-1* Extremstellen
- höchstens *n-2* Wendestellen