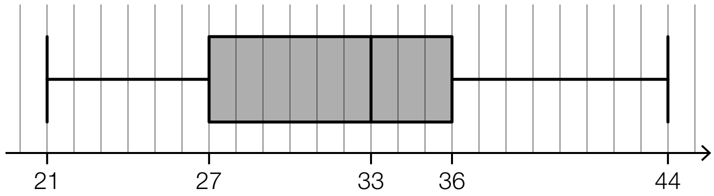
Vergleich zweier Diagramme

In den nachstehenden Abbildungen ist die Datenliste A in einem Stängel-Blatt-Diagramm und die Datenliste B als Boxplot dargestellt.

2	1 7 7 9
3	1 3 6 6
4	3



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden statistischen Kennzahlen an, bei denen sich die Datenlisten A und B unterscheiden. *[2 aus 5]*

1. Quartil	☐
Spannweite	☐
3. Quartil	☐
Minimum	☐
Median	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Spannweite	☒
Median	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Stängel-Blatt-Diagramm

Nachstehend sind Daten in einem Stängel-Blatt-Diagramm dargestellt.

1	2 2 5 5 6
2	2 3 7 7
3	1 1 1 2 2 2 2
4	1 2 7 7 9 9

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier angegebenen Werten jeweils die entsprechende statistische Kennzahl aus A bis F zu.

31	
32	
37	
49	

A	Median
B	Modus
C	arithmetisches Mittel
D	Spannweite
E	Standardabweichung
F	Maximum

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

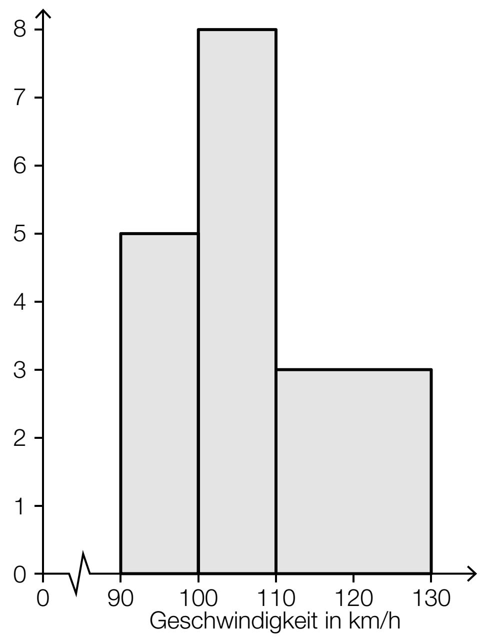
31	A
32	B
37	D
49	F

A	Median
B	Modus
C	arithmetisches Mittel
D	Spannweite
E	Standardabweichung
F	Maximum

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Geschwindigkeitskontrolle

Auf einem Autobahnabschnitt wurden die Geschwindigkeiten von Fahrzeugen gemessen und anschließend wurde das nachstehende Histogramm erstellt. Der Flächeninhalt eines Rechtecks entspricht dabei der absoluten Häufigkeit der Geschwindigkeiten in der jeweiligen Klasse.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Anzahl derjenigen Fahrzeuge, die für die Erstellung des Histogramms herangezogen wurden.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

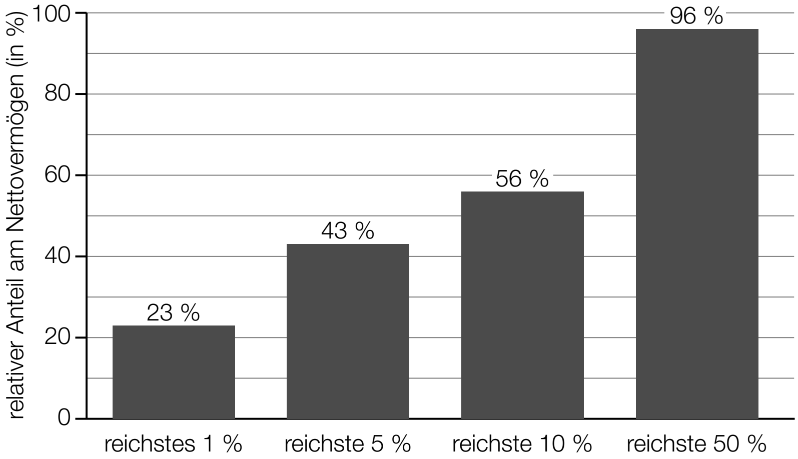
$50 + 80 + 60 = 190$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Anzahl der Fahrzeuge.

Grundkompetenz: WS 1.1

Vermögensverteilung

Die nachstehende Abbildung zeigt, welche relativen Anteile am österreichischen Nettovermögen die reichsten Teile der Bevölkerung im Jahr 2017 besaßen.



Datenquellen: https://awblog.at/vermoegensverteilung-oesterreich/ [04.05.2020],
https://www.vienna.at/vermoegensverteilung-in-oesterreich-arm-und-reich-wird-meist-vererbt/6468838 [30.05.2020].

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Im Jahr 2017 besaßen die ___①___ der Bevölkerung insgesamt ___②___ des österreichischen Nettovermögens.

①	
ärmsten 50 %	☐
reichsten 6 %	☐
ärmsten 95 %	☐

②	
43 %	☐
mehr als 60 %	☐
4 %	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

①	
ärmsten 50 %	☒

②	
4 %	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Stängel-Blatt-Diagramme*

Aufgabennummer: 1_584	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Die nachstehenden Stängel-Blatt-Diagramme zeigen die Anzahl der Kinobesucher/innen je Vorstellung der Filme *A* und *B* im Lauf einer Woche. In diesen Diagrammen ist die Einheit des Stängels 10, die des Blattes 1.

Film *A*	
2	0, 3, 8
3	6, 7
4	1, 1, 5, 6
5	2, 6, 8, 9
6	1, 8

Film *B*	
2	1
3	1, 4, 5
4	4, 5, 8
5	0, 5, 7, 7
6	1, 2
7	0

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die bezogen auf die dargestellten Stängel-Blatt-Diagramme mit Sicherheit zutreffen.

Es gab in dieser Woche mehr Vorstellungen des Films *A* als des Films *B*.	☐
Der Median der Anzahl der Kinobesucher/innen ist bei Film *A* größer als bei Film *B*.	☐
Die Spannweite der Anzahl der Kinobesucher/innen ist bei Film *B* kleiner als bei Film *A*.	☐
Die Gesamtanzahl der Kinobesucher/innen in dieser Woche war bei Film *B* größer als bei Film *A*.	☐
In einer Vorstellung des Films *B* waren mehr Kinobesucher/innen als in jeder einzelnen Vorstellung des Films *A*.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017, adaptiert

Lösungserwartung

Es gab in dieser Woche mehr Vorstellungen des Films *A* als des Films *B*.	☒
In einer Vorstellung des Films *B* waren mehr Kinobesucher/innen als in jeder einzelnen Vorstellung des Films *A*.	☒

Lösungsschlüssel

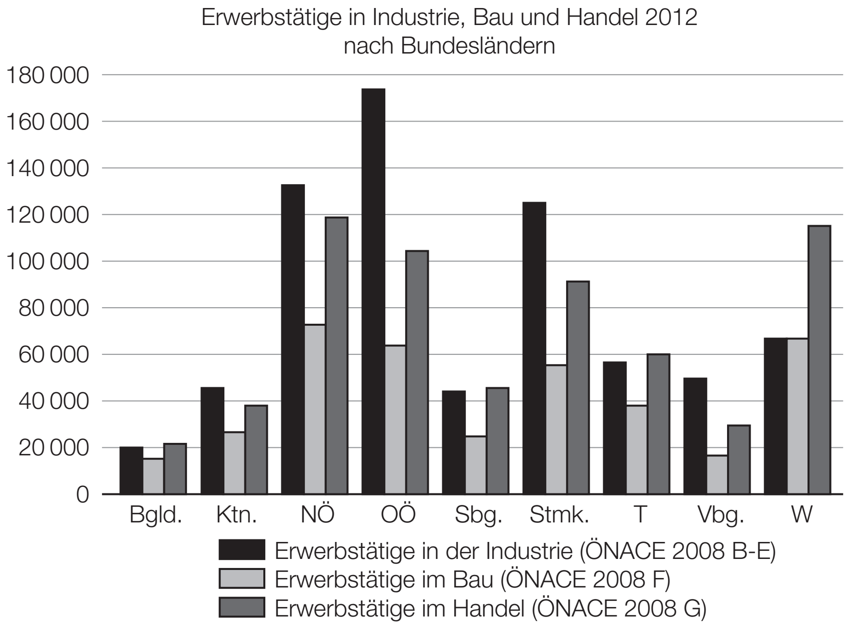
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Erwerbstätige*

Aufgabennummer: 1_680	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)

Die nachstehende Grafik zeigt die Anzahl der im Jahr 2012 in Österreich Erwerbstätigen in drei Bereichen. Die Grafik weist die Daten nach Bundesländern getrennt aus.



Quelle: STATISTIK AUSTRIA, Mikrozensus-Arbeitskräfteerhebung 2012. Erstellt am 22.05.2013.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die sich aus der Grafik ableiten lassen.

In jedem Bundesland gab es mehr Erwerbstätige im Handel als im Bau.	☐
In der Industrie hatte Oberösterreich (OÖ) mehr Erwerbstätige als jedes andere Bundesland.	☐
Wien (W) hatte mehr Erwerbstätige im Handel als in Industrie und Bau zusammen.	☐
Vorarlberg (Vbg.) hatte in allen drei Bereichen zusammen mehr Erwerbstätige als die Steiermark (Stmk.) alleine in der Industrie.	☐
Im Handel hatte Burgenland (Bgld.) mehr Erwerbstätige als jedes andere Bundesland.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019, adaptiert

Lösungserwartung

In jedem Bundesland gab es mehr Erwerbstätige im Handel als im Bau.	☒
In der Industrie hatte Oberösterreich (OÖ) mehr Erwerbstätige als jedes andere Bundesland.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Boxplot und statistische Kennzahlen*

Aufgabennummer: 1_824	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

Aus einem Boxplot (Kastenschaubild) können bestimmte statistische Kennzahlen ermittelt werden.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden statistischen Kennzahlen an, die aus einem Boxplot im Allgemeinen <u>nicht</u> ermittelt werden können.

Median	☐
arithmetisches Mittel	☐
Modus	☐
Spannweite	☐
Maximum	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

arithmetisches Mittel	☒
Modus	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen statistischen Kennzahlen angekreuzt sind.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

BIP 2018*

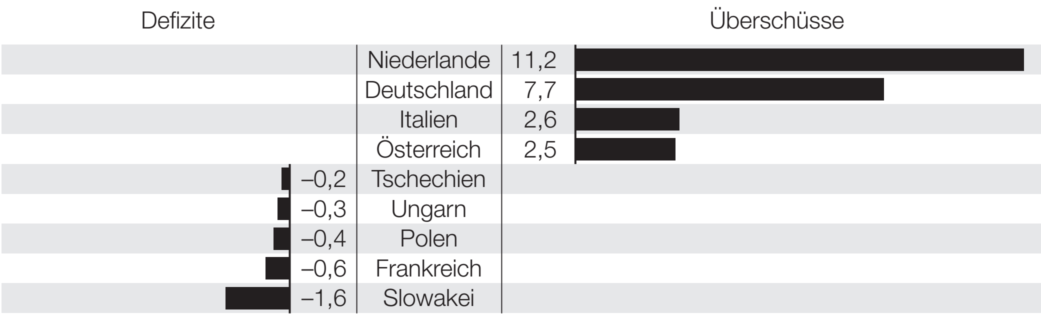
Aufgabennummer: 1_776	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 1.1

Im Jahr 2018 betrug das Bruttoinlandsprodukt (BIP) von Österreich rund 385,71 Milliarden Euro.

Datenquelle: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/14390/umfrage/bruttoinlandsprodukt-in-oesterreich/ [21.11.2019].

Übersteigen die Einnahmen aus Exporten die Ausgaben aus Importen, so spricht man von einem Leistungsbilanzüberschuss, andernfalls von einem Leistungsbilanzdefizit. In der nachstehenden Abbildung sind für einige Länder diese Überschüsse bzw. Defizite als Leistungsbilanzsalden in Prozent des jeweiligen BIP für das Jahr 2018 angeführt.

Leistungsbilanzsalden 2018 in % des BIP



Datenquelle: https://www.oenb.at/isaweb/report.do?report=10.18 [21.11.2019].

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Leistungsbilanzüberschuss (in Milliarden Euro) von Österreich im Jahr 2018.

Leistungsbilanzüberschuss: ________________________ Milliarden Euro

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$385{,}71 \cdot 0{,}025 = 9{,}642... \approx 9{,}64$

Leistungsbilanzüberschuss: 9,64 Milliarden Euro

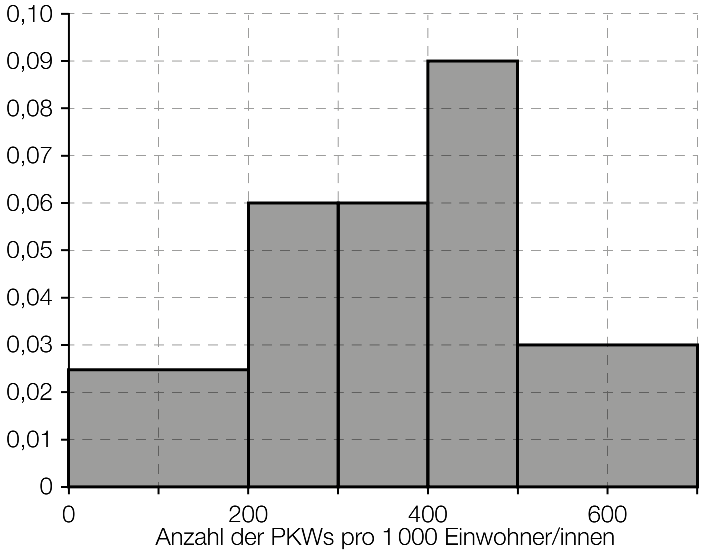
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

PKW-Dichte*

Aufgabennummer: 1_728	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 1.1

In 32 europäischen Ländern wurde die Anzahl der Personenkraftwagen (PKWs) pro 1 000 Einwohner/innen erhoben. Aus diesen Daten ist das nachstehende Histogramm erstellt worden. Dabei sind die absoluten Häufigkeiten der Länder als Flächeninhalte von Rechtecken dargestellt.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, in wie vielen Ländern die Anzahl der PKWs pro 1 000 Einwohner/innen zwischen 500 und 700 PKWs liegt.

Anzahl der Länder = ________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung
Anzahl der Länder = 6

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für die richtige Lösung.

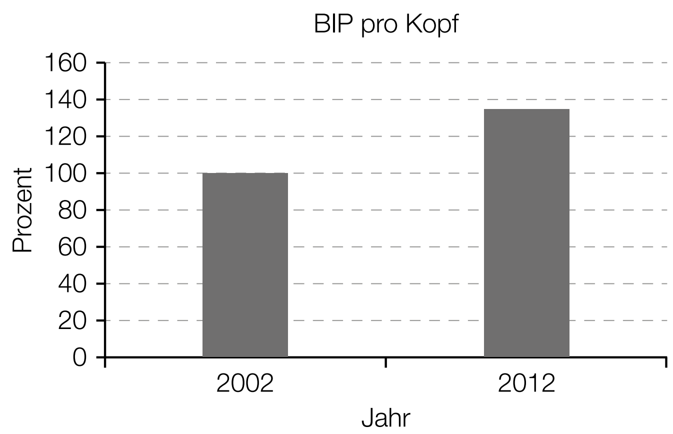
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bruttoinlandsprodukt*

Aufgabennummer: 1_656	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.1

Das *nominale Bruttoinlandsprodukt* gibt den Gesamtwert aller Güter, die während eines Jahres innerhalb der Landesgrenzen einer Volkswirtschaft hergestellt wurden, in aktuellen Marktpreisen an.
Dividiert man das nominale Bruttoinlandsprodukt einer Volkswirtschaft durch die Einwohnerzahl, dann erhält man das sogenannte *BIP pro Kopf*.

Die nachstehende Grafik zeigt die relative Veränderung des BIP pro Kopf in Österreich von 2012 bezogen auf 2002.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob ausschließlich anhand der Daten in der gegebenen Grafik der Wert der relativen Änderung des nominalen Bruttoinlandsprodukts in Österreich von 2012 bezogen auf 2002 ermittelt werden kann, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

Die relative Änderung des (nominalen) Bruttoinlandsprodukts in Österreich kann ausschließlich anhand der gegebenen Daten nicht ermittelt werden, da die Einwohnerzahlen Österreichs der Jahre 2002 und 2012 nicht angegeben sind.

Lösungsschlüssel

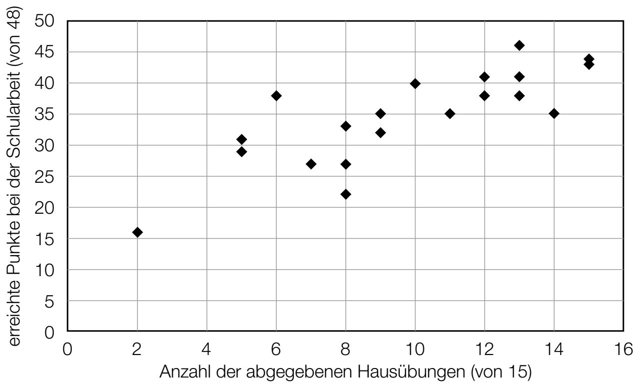
Ein Punkt für die Angabe, dass die gefragte relative Änderung nicht ermittelt werden kann, und eine (singemäß) korrekte Begründung.

Hausübungen und Schularbeit*

Aufgabennummer: 1_632	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

In einer Klasse, in der ausschließlich Mädchen sind, waren bis zu einer Schularbeit 15 Hausübungen abzugeben. Bei der Schularbeit waren maximal 48 Punkte zu erreichen.

Im nachstehenden Punktwolkendiagramm werden für jede der insgesamt 20 Schülerinnen dieser Klasse die Anzahl der abgegebenen Hausübungen und die Anzahl der bei der Schularbeit erreichten Punkte dargestellt.



Aufgabenstellung:

Zwei der nachstehenden fünf Aussagen interpretieren das dargestellte Punktwolkendiagramm korrekt. Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Nur Schülerinnen, die mehr als 10 Hausübungen abgegeben haben, konnten mehr als 35 Punkte bei der Schularbeit erzielen.	☐
Die Schülerin mit der geringsten Punkteanzahl bei der Schularbeit hat die wenigsten Hausübungen abgegeben.	☐
Die Schülerin mit den meisten Punkten bei der Schularbeit hat alle Hausübungen abgegeben.	☐
Schülerinnen mit mindestens 10 abgegebenen Hausübungen haben bei der Schularbeit im Durchschnitt mehr Punkte erzielt als jene mit weniger als 10 abgegebenen Hausübungen.	☐
Aus der Anzahl der bei der Schularbeit erreichten Punkte kann man eindeutig auf die Anzahl der abgegebenen Hausübungen schließen.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Die Schülerin mit der geringsten Punkteanzahl bei der Schularbeit hat die wenigsten Hausübungen abgegeben.	☒
Schülerinnen mit mindestens 10 abgegebenen Hausübungen haben bei der Schularbeit im Durchschnitt mehr Punkte erzielt als jene mit weniger als 10 abgegebenen Hausübungen.	☒

Lösungsschlüssel

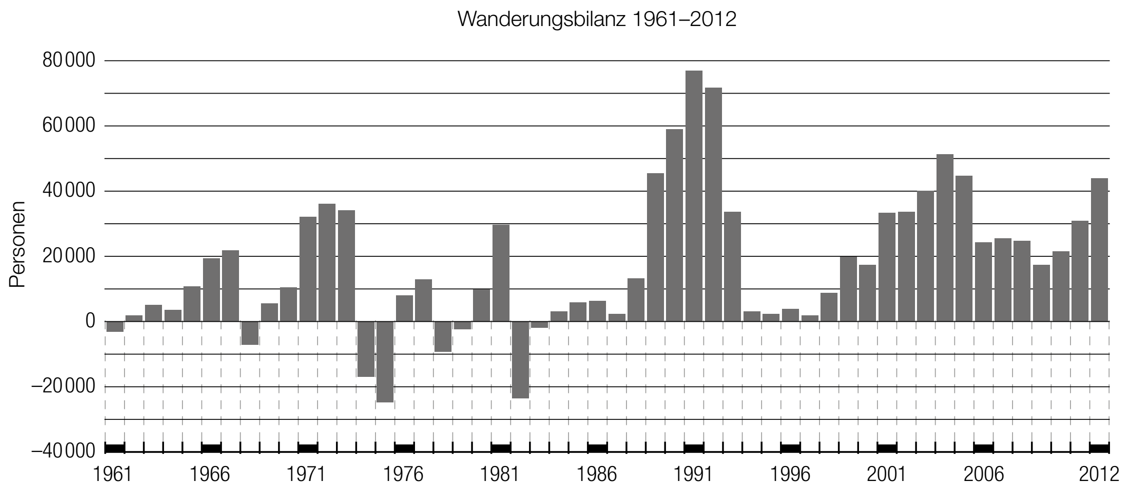
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Wanderungsbilanz für Österreich*

Aufgabennummer: 1_547	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

Die Differenz aus der Anzahl der in einem bestimmten Zeitraum in ein Land zugewanderten Personen und der Anzahl der in diesem Zeitraum aus diesem Land abgewanderten Personen bezeichnet man als *Wanderungsbilanz*.

In der nachstehenden Grafik ist die jährliche Wanderungsbilanz für Österreich in den Jahren von 1961 bis 2012 dargestellt.



Quelle: STATISTIK AUSTRIA, Errechnete Wanderungsbilanz 1961–1995; Wanderungsstatistik 1996–2012; 2007–2011: revidierte Daten. Wanderungsbilanz: Zuzüge aus dem Ausland minus Wegzüge in das Ausland (adaptiert).

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die eine korrekte Interpretation der Grafik darstellen!

Aus dem angegebenen Wert für das Jahr 2003 kann man ablesen, dass in diesem Jahr um ca. 40000 Personen mehr zugewandert als abgewandert sind.	☐
Der Zuwachs der Wanderungsbilanz vom Jahr 2003 auf das Jahr 2004 beträgt ca. 50 %.	☐
Im Zeitraum 1961 bis 2012 gibt es acht Jahre, in denen die Anzahl der Zuwanderungen geringer als die Anzahl der Abwanderungen war.	☐
Im Zeitraum 1961 bis 2012 gibt es drei Jahre, in denen die Anzahl der Zuwanderungen gleich der Anzahl der Abwanderungen war.	☐
Die Wanderungsbilanz des Jahres 1981 ist annähernd doppelt so groß wie die des Jahres 1970.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

Aus dem angegebenen Wert für das Jahr 2003 kann man ablesen, dass in diesem Jahr um ca. 40 000 Personen mehr zugewandert als abgewandert sind.	☒
Im Zeitraum 1961 bis 2012 gibt es acht Jahre, in denen die Anzahl der Zuwanderungen geringer als die Anzahl der Abwanderungen war.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Verurteilungen Jugendlicher*

Aufgabennummer: 1_499	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 1.1

Jugendliche sind laut Jugendschutzgesetz 1988 (Fassung vom 23.3.2016) Personen, die das 14. Lebensjahr, aber noch nicht das 18. Lebensjahr vollendet haben. Die nachstehende Grafik zeigt für den Zeitraum von 1950 bis 2010 sowohl die absolute Anzahl der Verurteilungen Jugendlicher als auch die Anzahl der Verurteilungen Jugendlicher bezogen auf 100 000 Jugendliche.

Datenquelle: http://derstandard.at/1371171382188/Jugendkriminalitaet-auf-Rekordtief [04.07.2013].

Aufgabenstellung:

Wie viele Jugendliche insgesamt gab es in Österreich in etwa im Jahr 2010?
Kreuzen Sie die zutreffende Anzahl an!

792 000	☐
3 063 000	☐
3 863 000	☐
387 000	☐
258 000	☐
2 580 000	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

387 000	☒

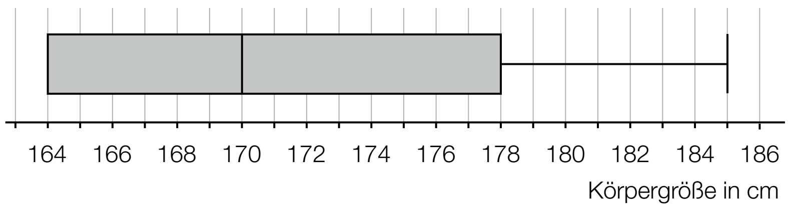
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Anzahl angekreuzt ist.

Körpergrößen*

Aufgabennummer: 1_451	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

Die Körpergrößen der 450 Schüler/innen einer Schulstufe einer Gemeinde wurden in Zentimetern gemessen und deren Verteilung wurde in einem Kastenschaubild (Boxplot) grafisch dargestellt.



Aufgabenstellung:

Zur Interpretation dieses Kastenschaubilds werden verschiedene Aussagen getätigt. Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

60 % der Schüler/innen sind genau 172 cm groß.	☐
Mindestens eine Schülerin bzw. ein Schüler ist genau 185 cm groß.	☐
Höchstens 50 % der Schüler/innen sind kleiner als 170 cm.	☐
Mindestens 75 % der Schüler/innen sind größer als 178 cm.	☐
Höchstens 50 % der Schüler/innen sind mindestens 164 cm und höchstens 178 cm groß.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

Mindestens eine Schülerin bzw. ein Schüler ist genau 185 cm groß.	☒
Höchstens 50 % der Schüler/innen sind kleiner als 170 cm.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Entwicklung der Landwirtschaft in Österreich*

Aufgabennummer: 1_427	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

Der Website der Statistik Austria kann man folgende Tabelle über die Entwicklung der Agrarstruktur in Österreich entnehmen:

Jahr	1995	1999	2010
Anzahl der land- und forstwirtschaftlichen Betriebe insgesamt	239099	217508	173317
durchschnittliche Betriebsgröße in Hektar	31,5	34,6	42,4

Datenquelle: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/land_und_forstwirtschaft/index.html [25.08.2013].

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Anzahl der land- und forstwirtschaftlichen Betriebe ist im Zeitraum von 1995 bis 2010 in jedem Jahr um die gleiche Zahl gesunken.	☐
Die durchschnittliche Betriebsgröße hat von 1995 bis 1999 im Jahresdurchschnitt um mehr Hektar zugenommen als von 1999 bis 2010.	☐
Die durchschnittliche Betriebsgröße hat von 1995 bis 1999 um durchschnittlich 0,5 ha pro Jahr abgenommen.	☐
Die Gesamtgröße der land- und forstwirtschaftlich genutzten Fläche hat von 1995 bis 2010 abgenommen.	☐
Die Anzahl der land- und forstwirtschaftlichen Betriebe ist im Zeitraum von 1995 bis 2010 um mehr als ein Drittel gesunken.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

Die durchschnittliche Betriebsgröße hat von 1995 bis 1999 im Jahresdurchschnitt um mehr Hektar zugenommen als von 1999 bis 2010.	☒
Die Gesamtgröße der land- und forstwirtschaftlich genutzten Fläche hat von 1995 bis 2010 abgenommen.	☒

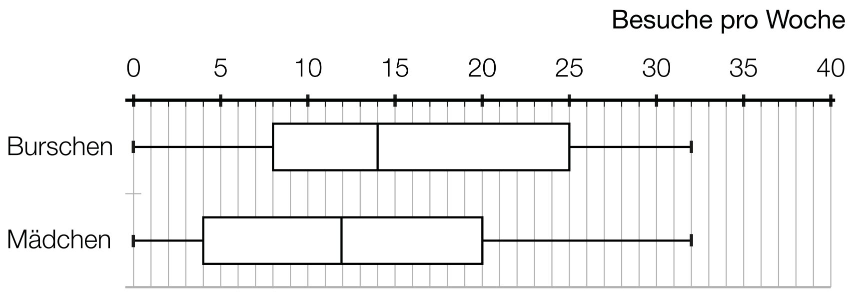
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Internetplattform*

Aufgabennummer: 1_403	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

Die Nutzung einer bestimmten Internetplattform durch Jugendliche wird für Mädchen und Burschen getrennt untersucht. Dabei wird erfasst, wie oft die befragten Jugendlichen diese Plattform pro Woche besuchen. Die nachstehenden Kastenschaubilder (Boxplots) zeigen das Ergebnis der Untersuchung.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der Median der Anzahl von Besuchen pro Woche ist bei den Burschen etwas höher als bei den Mädchen.	☐
Die Spannweite der wöchentlichen Nutzung der Plattform ist bei den Burschen größer als bei den Mädchen.	☐
Aus der Grafik kann man ablesen, dass genauso viele Mädchen wie Burschen die Plattform wöchentlich besuchen.	☐
Der Anteil der Burschen, die mehr als 20-mal pro Woche die Plattform nützen, ist zumindest gleich groß oder größer als jener der Mädchen.	☐
Ca. 80 % der Mädchen und ca. 75 % der Burschen nützen die Plattform genau 25-mal pro Woche.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

Der Median der Anzahl von Besuchen pro Woche ist bei den Burschen etwas höher als bei den Mädchen.	☒
Der Anteil der Burschen, die mehr als 20-mal pro Woche die Plattform nützen, ist zumindest gleich groß oder größer als jener der Mädchen.	☒

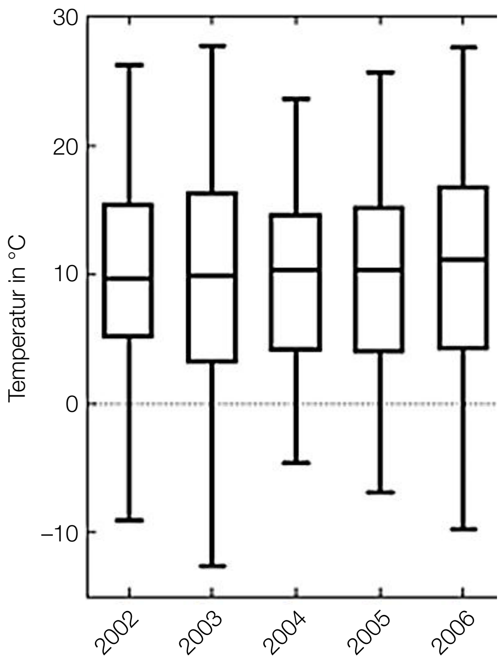
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Temperaturaufzeichnungen von Braunschweig*

Aufgabennummer: 1_379	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

Die nachstehende Grafik veranschaulicht die jährlichen Temperaturaufzeichnungen der Tagesmitteltemperaturen von Braunschweig (Deutschland) im Zeitraum 2002–2006 mithilfe von Kastenschaubildern (Boxplots).



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Im Zeitraum 2002–2006 lag der Median der jeweiligen Tagesmitteltemperaturen jeweils im Intervall [7 °C; 13 °C].	☐
Im Jahr 2006 lagen mehr als 25 % der Tagesmitteltemperaturen unter 0 °C.	☐
Das Jahr 2002 wies den größten Median der Tagesmitteltemperaturen auf.	☐
Das Jahr 2003 wies die größte Spannweite der Tagesmitteltemperaturen auf.	☐
Im Jahr 2004 betrug die Spannweite der Tagesmitteltemperaturen 10 °C.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

Im Zeitraum 2002 – 2006 lag der Median der jeweiligen Tagesmitteltemperaturen jeweils im Intervall [7 °C; 13 °C].	☒
Das Jahr 2003 wies die größte Spannweite der Tagesmitteltemperaturen auf.	☒

Lösungsschlüssel

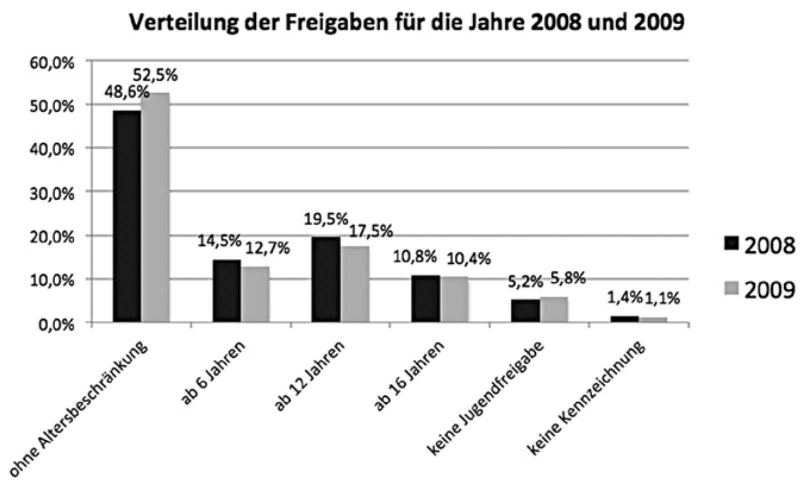
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Computer- und Videospiele*

Aufgabennummer: 1_355	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

Computer- und Videospiele müssen vor ihrer Markteinführung ein Einstufungsverfahren durchlaufen, bei dem festgelegt wird, welches Mindestalter für den Erwerb des Spiels erreicht sein muss. Im Jahr 2009 wurden 3 100 Spiele dieser Einstufung unterzogen. Im Jahr 2008 waren es um 114 Spiele weniger. Die nachstehende Graphik stellt die Ergebnisse der Auswertungen dar.



Datenquelle: http://www.usk.de/pruefverfahren/statistik/jahresbilanz-2009/ [21.05.2014].

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Anzahl der im Jahr 2009 ohne Altersbeschränkung freigegebenen Spiele hat sich im Vergleich zum Jahr 2008 um etwa 10 % verringert.	☐
Die Anzahl der in der Kategorie „freigegeben ab 16 Jahren“ eingestuften Spiele ist in den beiden Jahren 2008 und 2009 nahezu gleich.	☐
Im Jahr 2008 wurde annähernd jedes dritte Spiel für Kinder ab 6 Jahren freigegeben.	☐
Im Jahr 2009 wurden weniger als 500 Spiele der Kategorie „freigegeben ab 12 Jahren“ zugeordnet.	☐
Im Jahr 2008 erhielt etwa jedes zwanzigste Spiel keine Jugendfreigabe.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

Die Anzahl der in der Kategorie „freigegeben ab 16 Jahren“ eingestuften Spiele ist in den beiden Jahren 2008 und 2009 nahezu gleich.	☒
Im Jahr 2008 erhielt etwa jedes zwanzigste Spiel keine Jugendfreigabe.	☒

Lösungsschlüssel

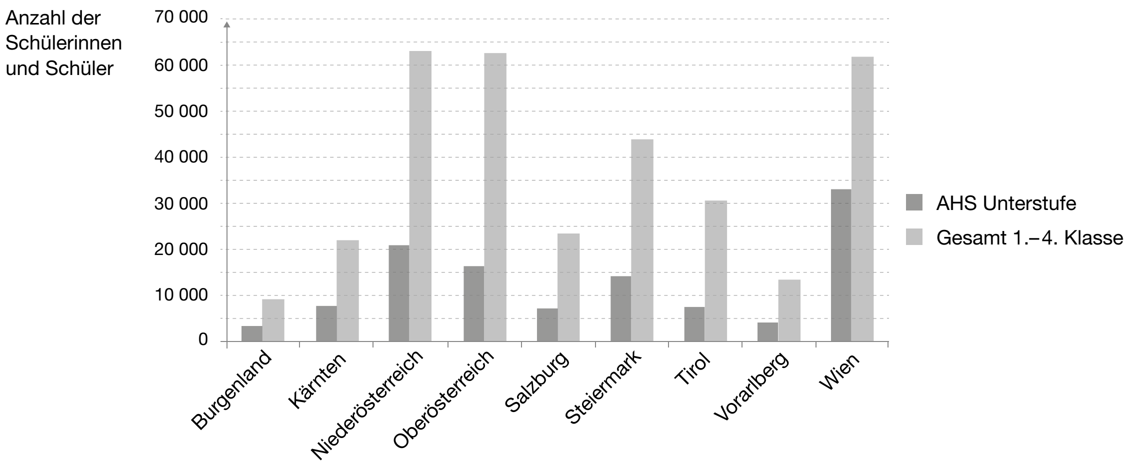
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Schulstatistik*

Aufgabennummer: 1_331	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.1

Das nachstehende Diagramm stellt für das Schuljahr 2009/10 folgende Daten dar:

- die Anzahl der Schüler/innen nur aus der AHS-Unterstufe
- die Gesamtanzahl der Schüler/innen der 1.–4. Klasse (Hauptschule und AHS-Unterstufe)



Quelle: http://www.bmukk.gv.at/schulstatistik

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die aus dem Diagramm gefolgert werden können!

In Kärnten ist der Anteil an AHS-Schülerinnen und -Schülern größer als in Tirol.	☐
In Wien gibt es die meisten Schüler/innen in den 1.–4. Klassen.	☐
Der Anteil an AHS-Schülerinnen und -Schülern ist in Wien höher als in allen anderen Bundesländern.	☐
Es gehen in Salzburg mehr Schüler/innen in die AHS als im Burgenland in die 1.–4. Klasse insgesamt.	☐
In Niederösterreich gehen ca. 3-mal so viele Schüler/innen in die Hauptschule wie in die AHS.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

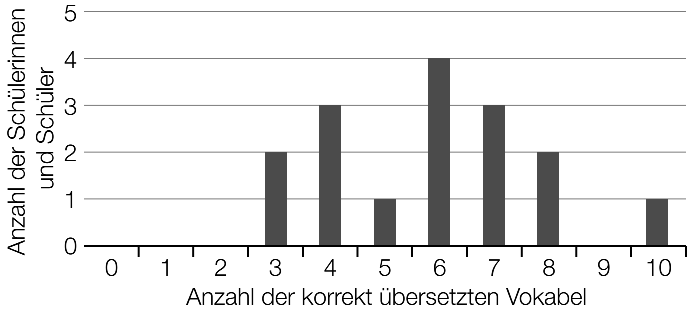
In Kärnten ist der Anteil an AHS-Schülerinnen und -Schülern größer als in Tirol.	☒
Der Anteil an AHS-Schülerinnen und -Schülern ist in Wien höher als in allen anderen Bundesländern.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Vokabeltest

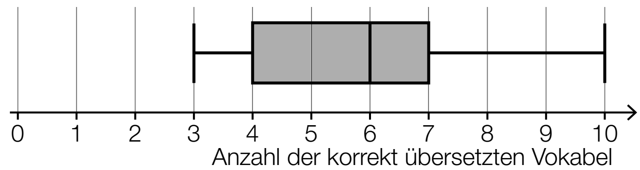
Bei einem Test sollen 16 Schülerinnen und Schüler jeweils 10 Vokabel übersetzen.
Das nebenstehende Säulendiagramm stellt das Ergebnis dieses Tests dar.



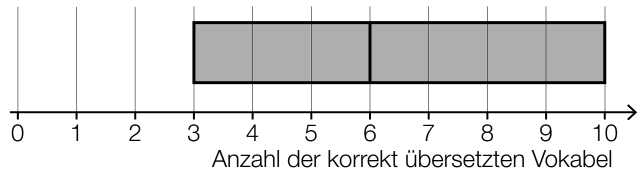
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie denjenigen Boxplot an, der die Daten aus dem Säulendiagramm passend wiedergibt.

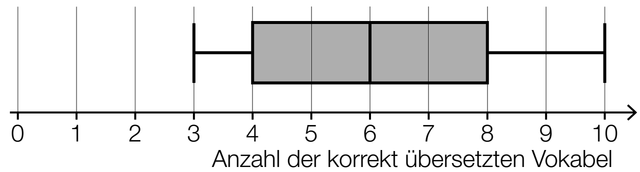
[1 aus 6]



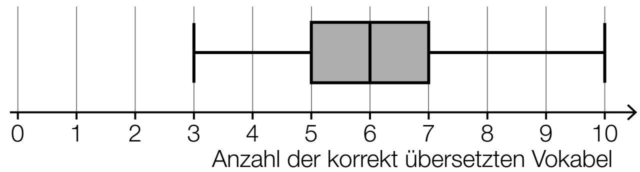
☐



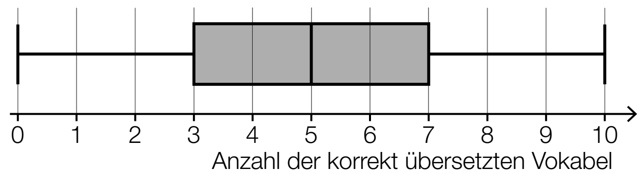
☐



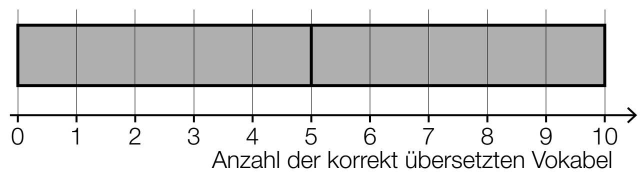
☐



☐



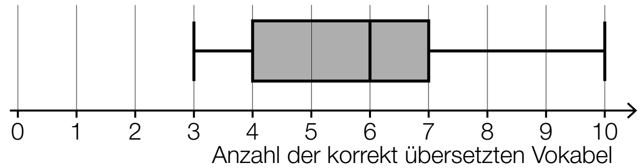
☐



☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

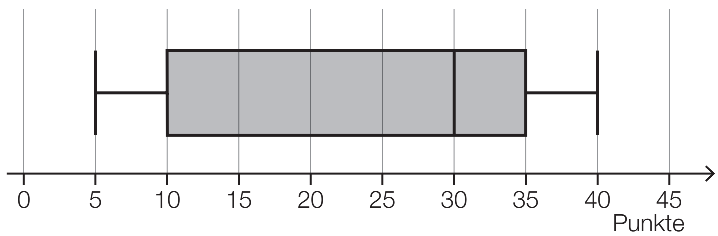
	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Ergebnisse einer Mathematikschularbeit*

Aufgabennummer: 1_872	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Bei einer bestimmten Mathematikschularbeit, bei der 30 Schüler/innen teilnahmen, konnten maximal 48 Punkte erreicht werden.
Die Ergebnisse dieser Mathematikschularbeit sind nachstehend in einem Boxplot und in einem Stängel-Blatt-Diagramm dargestellt.



Zehnerziffer	Einerziffer
0	a, 6, 6, 7, 7, 8, 8
1	0, 1, 5, 5, 9
2	1, 5, 8
3	b, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 7, 8, 8, 9
4	0, 0

Aufgabenstellung:

Geben Sie a und b an.

a = ___________

b = ___________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$a = 5$
$b = 2$

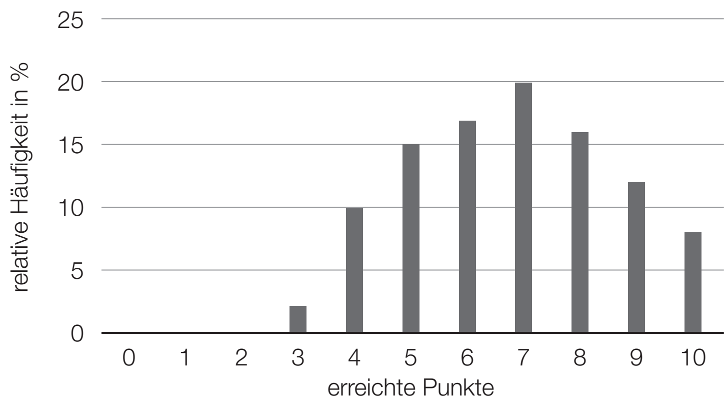
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

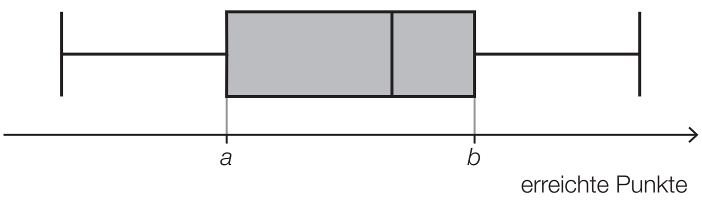
Aufnahmetest*

Aufgabennummer: 1_848	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Bei einem bestimmten Aufnahmetest konnten maximal 10 Punkte erreicht werden. Das nachstehende Säulendiagramm zeigt die relativen Häufigkeiten der erreichten Punkte in Prozent.



Die bei diesem Aufnahmetest erreichten Punkte sind im nachstehenden Boxplot dargestellt.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie *a* und *b*.

a = ______________________________

b = ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$a = 5$
$b = 8$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Bestimmen der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Histogramm*

Aufgabennummer: 1_752	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: WS 1.2

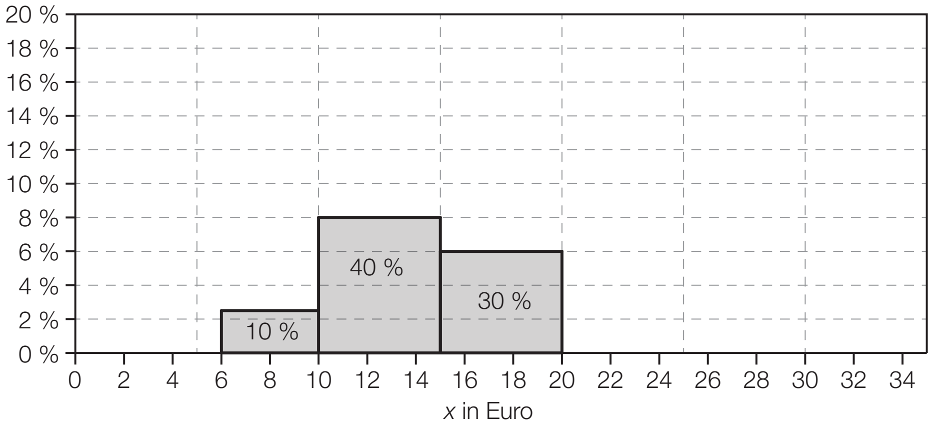
Ein Betrieb hat insgesamt 200 Beschäftigte. In der nachstehenden Tabelle sind die Stundenlöhne dieser Beschäftigten in Klassen zusammengefasst.

Stundenlohn x in Euro	Anzahl der Beschäftigten
$6 \leq x < 10$	20
$10 \leq x < 15$	80
$15 \leq x < 20$	60
$20 \leq x \leq 30$	40

Der Flächeninhalt eines Rechtecks im unten stehenden Histogramm ist der relative Anteil der Beschäftigten in der jeweiligen Klasse.

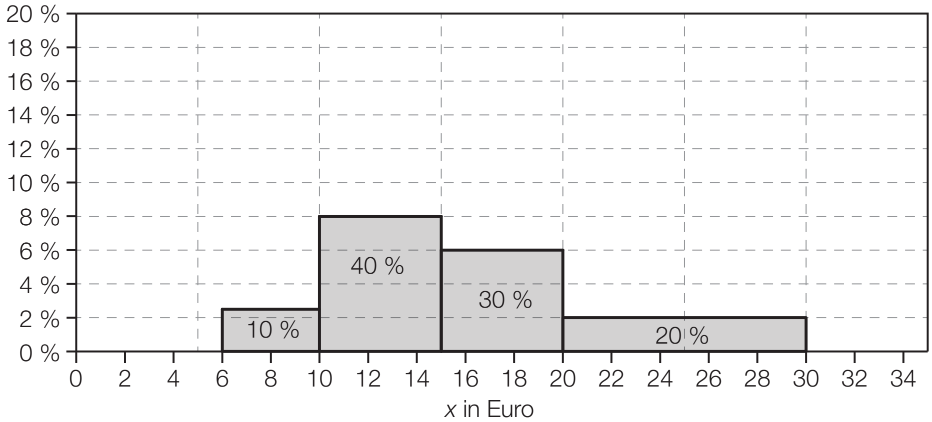
Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie im nachstehenden Histogramm die fehlende Säule so, dass die obigen Daten dargestellt sind.



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Ergänzung der fehlenden Säule, wobei die Beschriftung „20 %“ nicht angegeben sein muss.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Statistische Darstellungen*

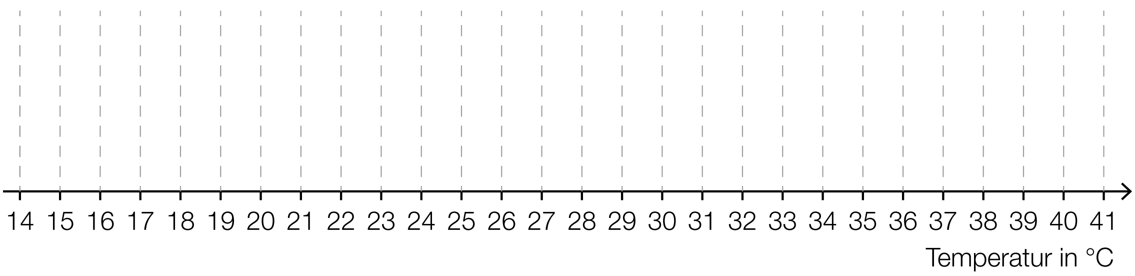
Aufgabennummer: 1_608	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: WS 1.2

Bei einer meteorologischen Messstelle wurden die Tageshöchsttemperaturen für den Zeitraum von einem Monat in einem sehr heißen Sommer aufgezeichnet. Die Messwerte in Grad Celsius können dem nachstehenden Stängel-Blatt-Diagramm entnommen werden.

1	9
2	2 2 3 3 3
2	5 6 6 6 6 7 7 7 7 7 7 7
3	1 1 1 2 3 3 3 4 4 4
3	8
4	0 0

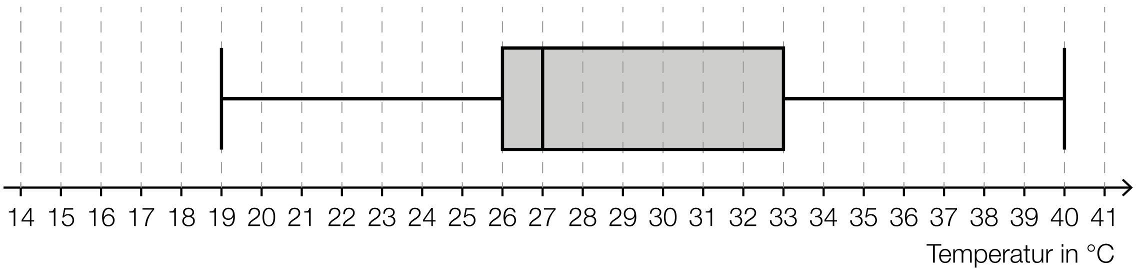
Aufgabenstellung:

Stellen Sie die aufgezeichneten Tageshöchsttemperaturen in einem Kastenschaubild (Boxplot) dar!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für ein korrekt dargestelltes Kastenschaubild.

Beladung von LKWs*

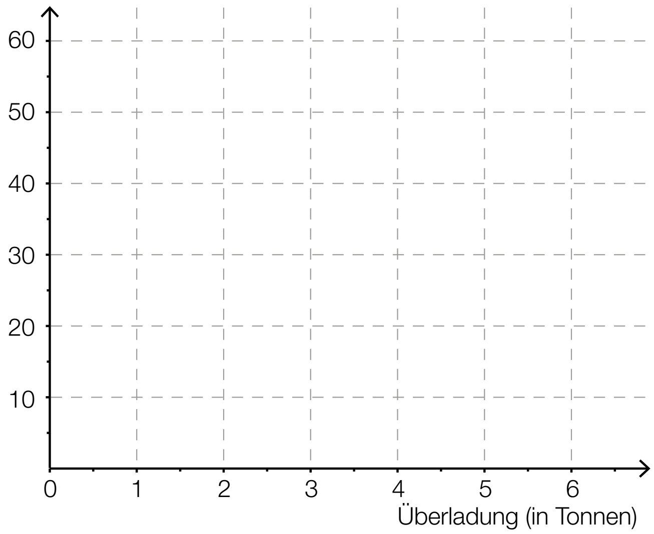
Aufgabennummer: 1_475	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: WS 1.2

Bei einer Verkehrskontrolle wurde die Beladung von LKWs überprüft. 140 der überprüften LKWs waren überladen. Details der Kontrolle sind in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst.

Überladung $Ü$ in Tonnen	$Ü < 1\,t$	$1\,t \leq Ü < 3\,t$	$3\,t \leq Ü < 6\,t$
Anzahl der LKWs	30	50	60

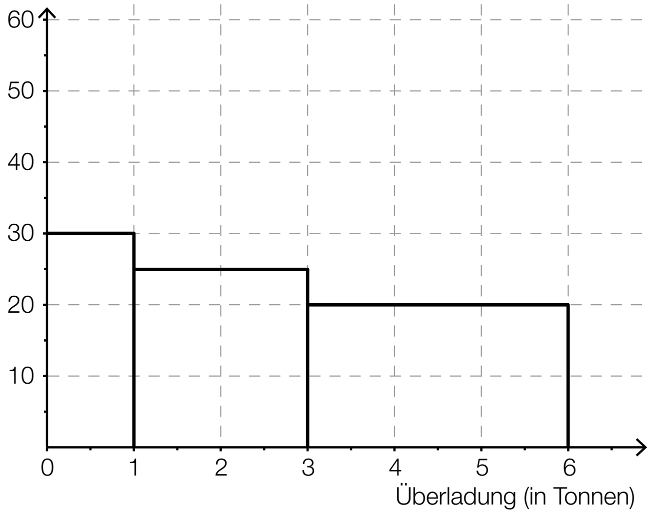
Aufgabenstellung:

Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle durch ein Histogramm dar! Dabei sollen die absoluten Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken abgebildet werden.



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für ein korrekt dargestelltes Diagramm.

Arithmetisches Mittel

Eine bestimmte Datenliste enthält 20 Werte und hat das arithmetische Mittel $\bar{x} = 15{,}5$.

Aus dieser Datenliste werden die Werte 4, 6, 13 und 27 entfernt. Die verbleibende Datenliste mit 16 Werten hat das arithmetische Mittel $\bar{x}_1$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}_1$.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\overline{x}_1 = \frac{15{,}5 \cdot 20 - 4 - 6 - 13 - 27}{16} = \frac{260}{16} = 16{,}25$

Ein Punkt für das richtige Berechnen des arithmetischen Mittels $\overline{x}_1$.

Grundkompetenz: WS 1.3

Vorzeichen statistischer Kennzahlen

Gegeben ist eine Datenliste mit den Werten $x_1 < ... < x_n$ mit $x_1 < 0$ und $x_n > 0$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden statistischen Kennzahlen an, die bei der oben beschriebenen Datenliste jedenfalls positiv sind. *[2 aus 5]*

Spannweite	☐
arithmetisches Mittel	☐
Standardabweichung	☐
Minimum	☐
Median	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Spannweite	☒
Standardabweichung	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Datenliste

Gegeben ist eine Datenliste mit n natürlichen Zahlen ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass jedenfalls eine richtige Aussage entsteht.

Wenn alle Werte der Datenliste um a ($a \in \mathbb{R}^+$) erhöht werden, erhöht sich auch ___①___ um a, während ___②___ unverändert bleibt.

①	
die Spannweite	☐
der Median	☐
die Varianz	☐

②	
das arithmetische Mittel	☐
der Modus	☐
die Standardabweichung	☐

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

①	
der Median	☒

②	
die Standardabweichung	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

Monatsgehälter

Ein bestimmtes Unternehmen hat zwei Abteilungen.

In der ersten Abteilung gibt es 14 Angestellte und in der zweiten Abteilung gibt es 26 Angestellte.

Über die Monatsgehälter der Angestellten ist Folgendes bekannt:

- Das arithmetische Mittel der Monatsgehälter aller 40 Angestellten beträgt € 2.280,50.
- Das arithmetische Mittel der Monatsgehälter der Angestellten der zweiten Abteilung beträgt € 2.200,00.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der Monatsgehälter der Angestellten der ersten Abteilung.

$\bar{x}$ = ______________________ €

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\overline{x} = 2.430{,}00$ €

Ein Punkt für das richtige Berechnen von $\overline{x}$.

Kursbesuche

Im Zeitraum von 2015 bis 2020 wurde an einer Bildungseinrichtung jedes Jahr ein bestimmter Kurs angeboten. Die nachstehende Tabelle zeigt für jedes Jahr in diesem Zeitraum die Anzahl der Kursbesucher/innen. Die Anzahl der Kursbesucher/innen im Jahr 2016 wird mit x bezeichnet.

Jahr	Anzahl der Kursbesucher/innen
2015	12
2016	x
2017	11
2018	12
2019	12
2020	15

Das arithmetische Mittel der Anzahl der Kursbesucher/innen im Zeitraum von 2015 bis 2020 beträgt 12.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie x.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$\frac{12 + x + 11 + 12 + 12 + 15}{6} = 12$$

$x = 10$

Ein Punkt für das richtige Berechnen von x.

Grundkompetenz: WS 1.3

Schularbeitspunkte

Sophie hat in der Unterstufe im Unterrichtsgegenstand Mathematik 16 Schularbeiten geschrieben. Bei jeder dieser Mathematik-Schularbeiten waren 48 Punkte zu erreichen. Das arithmetische Mittel der von Sophie insgesamt erreichten Punkte lag bei 38,5 Punkten.

Bei den ersten beiden Mathematik-Schularbeiten der Oberstufe hat Sophie einmal 41 Punkte und einmal 47 Punkte von jeweils 48 maximal erreichbaren Punkten erreicht.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der von Sophie bei allen 18 Mathematik-Schularbeiten erreichten Punkte.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\overline{x} = \frac{38{,}5 \cdot 16 + 41 + 47}{18} = 39{,}11...$

Ein Punkt für das richtige Berechnen des arithmetischen Mittels $\overline{x}$.

Grundkompetenz: WS 1.3

Durchschnittseinkommen

Von allen Beschäftigten eines bestimmten Unternehmens arbeiten 40 % im Vertrieb und 52 % in der Produktion. Die übrigen Beschäftigten arbeiten in der Verwaltung.

Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über die durchschnittlichen Nettojahreseinkommen im Jahr 2018.

	durchschnittliches Nettojahreseinkommen 2018 pro Person (in Euro)
Vertrieb	26 376
Produktion	28 511
Verwaltung	23 427

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie für dieses Unternehmen das durchschnittliche Nettojahreseinkommen pro Person im Jahr 2018.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$0{,}4 \cdot 26\,376 + 0{,}52 \cdot 28\,511 + 0{,}08 \cdot 23\,427 = 27\,250{,}28$

Das durchschnittliche Nettojahreseinkommen pro Person beträgt € 27.250,28.

Ein Punkt für das richtige Berechnen des durchschnittlichen Nettojahreseinkommens.

Grundkompetenz: WS 1.3

Feuerwehreinsatz

Die Feuerwehren in Niederösterreich veröffentlichten im Jahr 2017 folgende Daten über die Anzahl der Einsätze:

Gesamtzahl	65 270
Davon werden besonders erwähnt:	
Menschenrettung	2 395
Brandeinsatz	4 026
Brandsicherheitswache	12 708
Fehl- und Täuschungsalarm	5 283

Datenquelle: https://www.noen.at/niederoesterreich/chronik-gericht/bilanz-noe-feuerwehren-mussten-im-vorjahr-65-000-mal-ausruecken-bilanz-feuerwehr-noe-feuerwehreinsaetze-79417723 [23.09.2019].

Aufgabenstellung:

Geben Sie anhand der angeführten Daten die relative Häufigkeit h dafür an, dass es sich bei einem Feuerwehreinsatz um einen Brandeinsatz handelt.

h = ______________________________

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$h = \frac{4\,026}{65\,270} = \frac{33}{535} = 0{,}0616...$$

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes von *h*.

Veränderung von Zahlen*

Aufgabennummer: 1_873	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Eine bestimmte Datenliste besteht aus 100 Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$. Das arithmetische Mittel der Datenliste beträgt 86, deren Minimum 29 und deren Maximum 103.

Eine zweite Datenliste besteht ebenfalls aus 100 Zahlen. Sie entsteht dadurch, dass jede Zahl der ursprünglichen Datenliste um 20 verkleinert wird.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für die zweite Datenliste das arithmetische Mittel und die Spannweite an.

arithmetisches Mittel: ____

Spannweite: ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

arithmetisches Mittel: 66
Spannweite: 74

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Änderung statistischer Kennzahlen*

Aufgabennummer: 1_378	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	

Gegeben ist eine geordnete Liste mit neun Werten $a_1, a_2, \dots, a_9$.

Der Wert a_1 wird um 5 vergrößert, der Wert a_9 wird um 5 verkleinert, die restlichen Werte der Liste bleiben unverändert. Durch die Abänderung der beiden Werte a_1 und a_9 kann sich eine neue, nicht geordnete Liste ergeben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige statistische Kennzahl an, die sich durch die genannte Änderung in keinem Fall verändert.

arithmetisches Mittel	☐
Median	☐
Modus	☐
Spannweite	☐
Standardabweichung	☐
erstes Quartil	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015, adaptiert

Lösungserwartung

arithmetisches Mittel	☒

Lösungsschlüssel

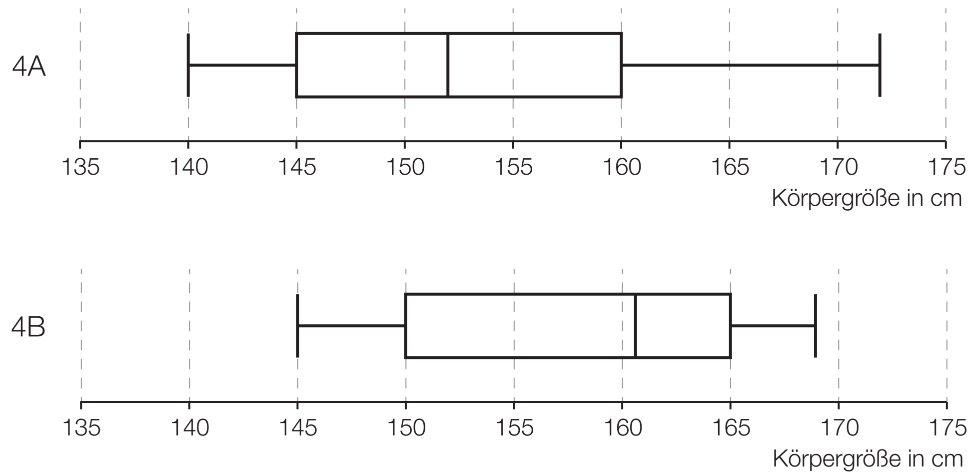
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Boxplots von Körpergrößen*

Aufgabennummer: 1_800	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.3

Die nachstehenden Boxplots (Kastenschaubilder) stellen für zwei Klassen (4A und 4B) die Verteilung der Körpergröße der Schulkinder der jeweiligen Klasse dar. Beide Klassen werden von gleich vielen Schulkindern besucht.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jeden Fall zutreffen.

In der 4A ist mehr als die Hälfte der Schulkinder kleiner als 150 cm.	☐
In der 4B sind mehr Schulkinder größer als 160 cm als in der 4A.	☐
Die Spannweite der Körpergröße ist in der 4A größer als in der 4B.	☐
Das größte Schulkind der beiden Klassen besucht die 4B.	☐
In der 4A ist 160 cm die häufigste Körpergröße.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

In der 4B sind mehr Schulkinder größer als 160 cm als in der 4A.	☒
Die Spannweite der Körpergröße ist in der 4A größer als in der 4B.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Statistische Kennzahlen*

Aufgabennummer: 1_753	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.3

Eine Datenliste wird um genau einen Datenwert ergänzt, der größer als alle bisher erfassten Datenwerte ist. Zwei der unten stehenden statistischen Kennzahlen werden dadurch jedenfalls größer.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden statistischen Kennzahlen an.

Spannweite	☐
Modus	☐
Median	☐
3. Quartil	☐
arithmetisches Mittel	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

Spannweite	☒
arithmetisches Mittel	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen statistischen Kennzahlen angekreuzt sind.

Datenliste*

Aufgabennummer: 1_729	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 1.3

Gegeben ist die nachstehende geordnete Datenliste. Einer der Werte ist k mit $k \in \mathbb{R}$.

1	2	3	5	k	8	8	8	9	10

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert k so an, dass das arithmetische Mittel der gesamten Datenliste den Wert 6 annimmt.

$k =$ ________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$k = 6$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Freizeitverhalten von Jugendlichen*

Aufgabennummer: 1_704	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 1.3

Es wurden 400 Jugendliche zu ihrem Freizeitverhalten befragt. Von allen Befragten gaben 330 an, Mitglied in einem Sportverein zu sein, 146 gaben an, ein Instrument zu spielen, und 98 gaben an, sowohl Mitglied in einem Sportverein zu sein als auch ein Instrument zu spielen.

Das Ergebnis dieser Befragung ist in der nachstehenden Tabelle eingetragen.

	spielt Instrument	spielt kein Instrument	gesamt
Mitglied in Sportverein	98		330
kein Mitglied in Sportverein			
gesamt	146		400

Aufgabenstellung:

Geben Sie die relative Häufigkeit h der befragten Jugendlichen an, die weder Mitglied in einem Sportverein sind noch ein Instrument spielen!

h = ___________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

	spielt Instrument	spielt kein Instrument	gesamt
Mitglied in Sportverein	98	232	330
kein Mitglied in Sportverein	48	22	70
gesamt	146	254	400

Es haben 22 Jugendliche angegeben, dass sie weder Mitglied in einem Sportverein sind noch ein Instrument spielen.

$h = \frac{22}{400} = 0{,}055$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten. Die angeführte Tabelle muss nicht ausgefüllt sein.
Toleranzintervall: [0,05; 0,06] bzw. [5 %; 6 %]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Median von Klassenschülerzahlen*

Aufgabennummer: 1_681	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.3

In einem Gymnasium wurden in den 24 Unterstufenklassen folgende Klassenschülerzahlen erhoben:

Klassenschülerzahl	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Anzahl Klassen	1	2	1	2	3	2	4	6	3

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Median der Klassenschülerzahlen in der Unterstufe dieses Gymnasiums!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Median: 26

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Spenden*

Aufgabennummer: 1_633	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: WS 1.3

Für einen guten Zweck spenden 20 Personen Geld, wobei jede Person einen anderen Betrag spendet. Diese 20 Geldbeträge (in Euro) bilden den Datensatz $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$. Von diesem Datensatz ermittelt man Minimum, Maximum, arithmetisches Mittel, Median sowie unteres (erstes) und oberes (drittes) Quartil.

Frau Müller ist eine dieser 20 Personen und spendet 50 Euro.

Aufgabenstellung:

Jede der vier Fragen in der linken Tabelle kann unter Kenntnis einer der statistischen Kennzahlen aus der rechten Tabelle korrekt beantwortet werden.

Ordnen Sie den vier Fragen jeweils die entsprechende statistische Kennzahl (aus A bis F) zu!

Ist die Spende von Frau Müller eine der fünf größten Spenden?	
Ist die Spende von Frau Müller eine der zehn größten Spenden?	
Ist die Spende von Frau Müller die kleinste Spende?	
Wie viel Euro spenden die 20 Personen insgesamt?	

A	Minimum
B	Maximum
C	arithmetisches Mittel
D	Median
E	unteres Quartil
F	oberes Quartil

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Ist die Spende von Frau Müller eine der fünf größten Spenden?	F
Ist die Spende von Frau Müller eine der zehn größten Spenden?	D
Ist die Spende von Frau Müller die kleinste Spende?	A
Wie viel Euro spenden die 20 Personen insgesamt?	C

A	Minimum
B	Maximum
C	arithmetisches Mittel
D	Median
E	unteres Quartil
F	oberes Quartil

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Fragen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Arithmetisches Mittel*

Aufgabennummer: 1_609	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.3

In einer Klasse sind 25 Schüler/innen, von denen eine Schülerin als außerordentliche Schülerin geführt wird.

Bei einem Test beträgt das arithmetische Mittel der von allen 25 Schülerinnen und Schülern erreichten Punkte 12,6. Das arithmetische Mittel der von den nicht als außerordentlich geführten Schülerinnen und Schülern erreichten Punkte beträgt 12,5.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie, wie viele Punkte die als außerordentlich geführte Schülerin bei diesem Test erreicht hat!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$25 \cdot 12{,}6 - 24 \cdot 12{,}5 = 15$

Die als außerordentlich geführte Schülerin hat 15 Punkte erreicht.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Mittlere Fehlstundenanzahl*

Aufgabennummer: 1_523	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.3

In einer Schule gibt es vier Sportklassen: $S1$, $S2$, $S3$ und $S4$. Die nachstehende Tabelle gibt eine Übersicht über die Anzahl der Schüler/innen pro Klasse sowie das jeweilige arithmetische Mittel der während des ersten Semesters eines Schuljahres versäumten Unterrichtsstunden.

Klasse	Anzahl der Schüler/innen	arithmetisches Mittel der versäumten Stunden
$S1$	18	45,5
$S2$	20	63,2
$S3$	16	70,5
$S4$	15	54,6

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}_{ges}$ der versäumten Unterrichtsstunden aller Schüler/innen der vier Sportklassen für den angegebenen Zeitraum!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

$$\overline{x}_{ges} = \frac{18 \cdot 45{,}5 + 20 \cdot 63{,}2 + 16 \cdot 70{,}5 + 15 \cdot 54{,}6}{18 + 20 + 16 + 15} = 58{,}405\ldots$$

$\overline{x}_{ges} \approx 58{,}4$ h

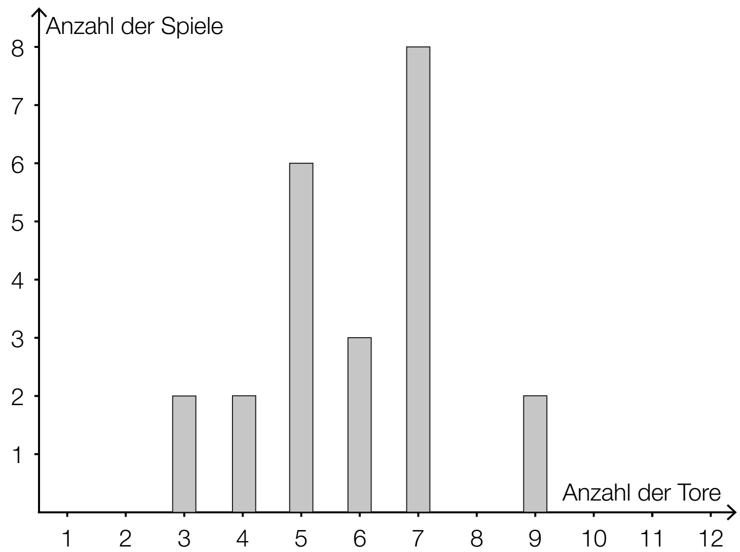
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h" nicht angegeben sein muss.
Lösungsintervall: [58 h; 60 h]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Eishockeytore*

Aufgabennummer: 1_474	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.3

In der österreichischen Eishockeyliga werden die Ergebnisse aller Spiele statistisch ausgewertet. In der Saison 2012/13 wurde über einen bestimmten Zeitraum erfasst, in wie vielen Spielen jeweils eine bestimmte Anzahl an Toren erzielt wurde. Das nachstehende Säulendiagramm stellt das Ergebnis dieser Auswertung dar.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Median der Datenliste, die dem Säulendiagramm zugrunde liegt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

Der Median der Datenliste ist 6.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Median und Modus*

Aufgabennummer: 1_450	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 1.3

Gegeben ist eine ungeordnete Liste von 19 natürlichen Zahlen:

5, 15, 14, 2, 5, 13, 11, 9, 7, 16, 15, 9, 10, 14, 3, 14, 5, 15, 14

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Median und den Modus dieser Liste an!

Median: ____

Modus: ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

Median: 11
Modus: 14

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Kennzahlen.

Statistische Kennzahlen*

Aufgabennummer: 1_426	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.3

Gegeben ist eine Liste mit n natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Aufgabenstellung:

Welche statistischen Kennzahlen der Liste bleiben gleich, wenn jeder Wert der Liste um 1 erhöht wird? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

arithmetisches Mittel	☐
Standardabweichung	☐
Spannweite	☐
Median	☐
Modus	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

Standardabweichung	☒
Spannweite	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Nettojahreseinkommen*

Aufgabennummer: 1_402	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.3

Im Jahre 2012 gab es in Österreich unter den etwas mehr als 4 Millionen unselbstständig Erwerbstätigen (ohne Lehrlinge) 40 % Arbeiterinnen und Arbeiter, 47 % Angestellte, 8 % Vertragsbedienstete und 5 % Beamtinnen und Beamte (Prozentzahlen gerundet).

Die nachstehende Tabelle zeigt deren durchschnittliches Nettojahreseinkommen (arithmetisches Mittel).

	arithmetisches Mittel der Nettojahreseinkommen 2012 (in Euro)
Arbeiterinnen und Arbeiter	14 062
Angestellte	24 141
Vertragsbedienstete	22 853
Beamtinnen und Beamte	35 708

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015.* Wien: Verlag Österreich 2014, S. 246.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie das durchschnittliche Nettojahreseinkommen (arithmetisches Mittel) aller in Österreich unselbstständig Erwerbstätigen (ohne Lehrlinge)!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

$14\,062 \cdot 0{,}4 + 24\,141 \cdot 0{,}47 + 22\,853 \cdot 0{,}08 + 35\,708 \cdot 0{,}05 = 20\,584{,}71$

Das durchschnittliche Nettojahreseinkommen beträgt € 20.584,71.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Euro" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [20 580; 20 590]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Statistische Kennzahlen*

Aufgabennummer: 1_354	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.3

Um Aussagen über die Daten einer statistischen Erhebung treffen zu können, gibt es bestimmte statistische Kennzahlen.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden statistischen Kennzahlen geben Auskunft darüber, wie stark die erhobenen Daten streuen? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Kennzahlen an!

Median	☐
Spannweite	☐
Modus	☐
empirische Varianz	☐
arithmetisches Mittel	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

Spannweite	☒
empirische Varianz	☒

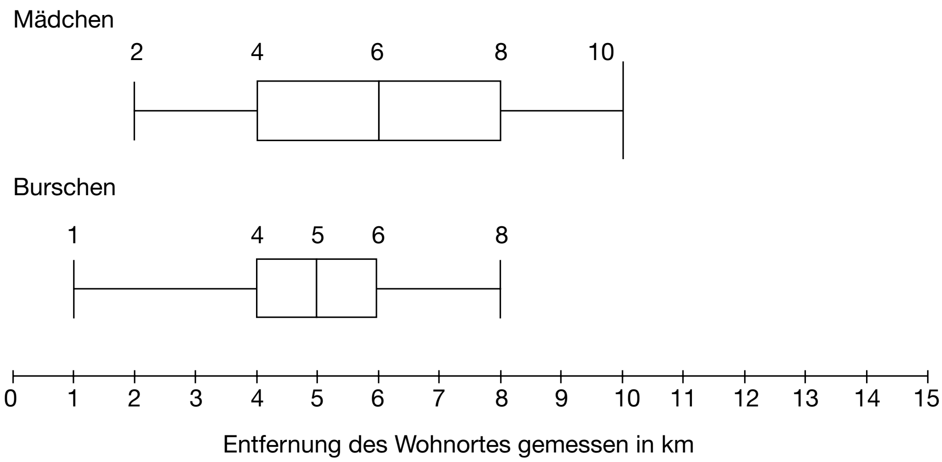
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Kennzahlen angekreuzt sind.

Boxplot-Analyse*

Aufgabennummer: 1_330	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.3

Alle Mädchen und Burschen einer Schulklasse wurden über die Länge ihres Schulweges befragt. Die beiden Kastenschaubilder (Boxplots) geben Auskunft über ihre Antworten.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Mehr als 60 % der befragten Mädchen haben einen Schulweg von mindestens 4 km.	☐
Der Median der erhobenen Daten ist bei Burschen und Mädchen gleich.	☐
Mindestens 50 % der Mädchen und mindestens 75 % der Burschen haben einen Schulweg, der kleiner oder gleich 6 km ist.	☐
Höchstens 40 % der befragten Burschen haben einen Schulweg zwischen 4 km und 8 km.	☐
Die Spannweite ist bei den Umfragedaten der Burschen genauso groß wie bei den Umfragedaten der Mädchen.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

Mehr als 60 % der befragten Mädchen haben einen Schulweg von mindestens 4 km.	☒
Mindestens 50 % der Mädchen und mindestens 75 % der Burschen haben einen Schulweg, der kleiner oder gleich 6 km ist.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Geordnete Urliste*

Aufgabennummer: 1_162	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

9 Kinder wurden dahingehend befragt, wie viele Stunden sie am Wochenende fernsehen. Die nachstehende Tabelle gibt ihre Antworten wieder.

Kind	Fernsehstunden
Fritz	2
Susi	2
Michael	3
Martin	3
Angelika	4
Paula	5
Max	5
Hubert	5
Lisa	8

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der Median würde sich erhöhen, wenn Fritz um eine Stunde mehr fernsehen würde.	☐
Der Median ist kleiner als das arithmetische Mittel der Fernsehstunden.	☐
Die Spannweite der Fernsehstunden beträgt 3.	☐
Das arithmetische Mittel würde sich erhöhen, wenn Lisa anstelle von 8 Stunden 10 Stunden fernsehen würde.	☐
Der Modus ist 8.	☐

* Diese Aufgabe wurde der im Mai 2013 publizierten Probeklausur (vgl. https://www.bifie.at/node/2231) entnommen.

Lösungsweg

Der Median ist kleiner als das arithmetische Mittel der Fernsehstunden.	☒
Das arithmetische Mittel würde sich erhöhen, wenn Lisa anstelle von 8 Stunden 10 Stunden fernsehen würde.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Aussagen angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Lösungszeiten für Sudoku

Bei einem Online-Sudoku werden 6 Spiele durchgeführt. In der nachstehenden Tabelle sind die Lösungszeiten der ersten 5 Spiele gegeben.

Spiel	Lösungszeit in s
1	356
2	321
3	378
4	450
5	298
6	t

Der Median aller 6 Lösungszeiten beträgt 350 s.

Aufgabenstellung:

Geben Sie t an.

t = ____________________ s

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$\frac{356 + t}{2} = 350$$

$t = 344$ s

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes von t.

Geburtenzahl

In einer Regionalzeitung ist folgender Satz über einen bestimmten Bezirk zu lesen:
„Im Jahr 2019 lag die Anzahl der Geburten im Bezirk über dem durchschnittlichen Wert des 4-jährigen Zeitraums von 2015 bis 2018.“

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die unter Verwendung des obigen Satzes jedenfalls getroffen werden können. *[2 aus 5]*

Die Anzahl der Geburten war im Jahr 2019 höher als in jedem Jahr des Zeitraums von 2015 bis 2018.	☐
Die Gesamtzahl der Geburten im Zeitraum von 2015 bis 2018 war niedriger als die vierfache Anzahl der Geburten im Jahr 2019.	☐
Die Anzahl der Geburten war in mindestens einem Jahr des Zeitraums von 2015 bis 2018 höher als im Jahr 2019.	☐
Die Anzahl der Geburten war in höchstens drei Jahren des Zeitraums von 2015 bis 2018 höher als im Jahr 2019.	☐
Die Anzahl der Geburten war in mindestens zwei Jahren des Zeitraums von 2015 bis 2018 niedriger als im Jahr 2019.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Gesamtzahl der Geburten im Zeitraum von 2015 bis 2018 war niedriger als die vierfache Anzahl der Geburten im Jahr 2019.	☒
Die Anzahl der Geburten war in höchstens drei Jahren des Zeitraums von 2015 bis 2018 höher als im Jahr 2019.	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen.

Median und arithmetisches Mittel

Für eine bestimmte Gruppe von 11 Personen gilt: Das arithmetische Mittel ihrer Bruttoeinkommen beträgt € 5.690, der Median ihrer Bruttoeinkommen beträgt € 3.200.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden auf jeden Fall zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Mindestens 1 Person dieser Gruppe hat ein Bruttoeinkommen von genau € 3.200.	☐
Mindestens 1 Person dieser Gruppe hat ein Bruttoeinkommen von genau € 5.690.	☐
Mindestens 6 Personen dieser Gruppe haben ein Bruttoeinkommen von höchstens € 3.200.	☐
Höchstens 1 Person dieser Gruppe hat ein Bruttoeinkommen von mehr als € 5.690.	☐
Mindestens 5 Personen dieser Gruppe haben ein Bruttoeinkommen von mehr als € 5.690.	☐

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Mindestens 1 Person dieser Gruppe hat ein Bruttoeinkommen von genau € 3.200.	☒
Mindestens 6 Personen dieser Gruppe haben ein Bruttoeinkommen von höchstens € 3.200.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Ergänzung von Werten

Eine Datenliste enthält folgende Werte:

17, 20, 22, 25, 27, 28, 30, 31

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Datenliste um zwei ganzzahlige Werte a und b so, dass der Median $m = 26$ und das arithmetische Mittel $\bar{x} = 25$ gleich bleiben.

a = ____

b = ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$a = 16$
$b = 34$

Ein Punkt für das Ergänzen der richtigen Werte von a und b, wobei auch zwei andere ganzzahlige Werte, deren Summe 50 ergibt und die sich vom arithmetischen Mittel $\bar{x} = 25$ um mindestens 2 unterscheiden, als richtig zu werten sind.

Gehälter*

Aufgabennummer: 1_849	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	

In einem kleinen Betrieb arbeiten sieben Personen. Nachstehend sind deren monatliche Gehälter angegeben: € 1.500, € 2.300, € 1.500, € 1.400, € 4.500, € 2.200, € 1.300.

Es wird eine weitere Person eingestellt, wodurch sich der Median der Gehälter nicht verändert.

Aufgabenstellung:

Geben Sie unter dieser Voraussetzung das höchstmögliche Gehalt dieser weiteren Person an.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

höchstmögliches Gehalt: € 1.500

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Gehalts.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zahlenliste*

Aufgabennummer: 1_777	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 1.4

Gegeben ist eine Liste der Zahlen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{40}$, für die $x_1 < x_2 < \dots < x_{40}$ gilt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Zahl an, die zu obiger Liste jedenfalls hinzugefügt werden kann, ohne dass sich der Median der Liste ändert.

$\frac{x_1 + x_{20}}{2}$	☐
$\frac{x_1 + x_{40}}{2}$	☐
$\frac{x_{20} + x_{21}}{2}$	☐
$\frac{x_{20} + x_{40}}{2}$	☐
x_{20}	☐
x_{21}	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$\frac{x_{20} + x_{21}}{2}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Zahl angekreuzt ist.

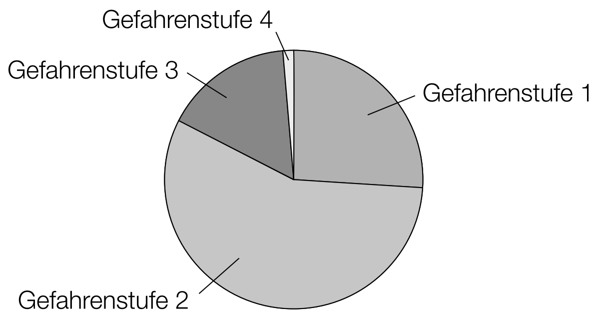
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Lawinengefahr*

Aufgabennummer: 1_705	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.4

In den Wintermonaten wird täglich vom Lawinenwarndienst der sogenannte *Lawinenlagebericht* veröffentlicht. Dieser enthält unter anderem eine Einschätzung der Lawinengefahr entsprechend den fünf Gefahrenstufen.

In einer bestimmten Region wurden im Winter 2013/14 Aufzeichnungen über die Gefahrenstufen geführt. Die Aufzeichnungen listen in einer Datenliste alle Tage auf, an denen eine der Gefahrenstufen 1 bis 4 galt. (Für die Gefahrenstufe 5 gibt es in dieser Datenliste keinen Eintrag, da diese Gefahrenstufe im betrachteten Zeitraum nicht auftrat.)
Die nachstehende Abbildung zeigt den relativen Anteil der Tage mit einer entsprechenden Gefahrenstufe.



Aufgabenstellung:

Begründen Sie, warum die Gefahrenstufe 2 der Median der Datenliste (die der obigen Abbildung zugrunde liegt) sein muss!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

mögliche Begründung:

Der Zentriwinkel des Sektors für „Gefahrenstufe 2" ist größer als 180°. Das bedeutet, dass mehr als 50 % der Einträge in der zugrunde liegenden Datenliste Tage mit „Gefahrenstufe 2" sind. Daher beträgt der Median 2.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Begründung. Andere richtige Begründungen (z. B. grafische Begründungen) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Änderung einer Datenliste*

Aufgabennummer: 1_657	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.4

Gegeben ist eine Datenliste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit n Werten und dem arithmetischen Mittel a. Diese Datenliste wird um zwei Werte x_{n+1} und x_{n+2} ergänzt, wobei das arithmetische Mittel der neuen Datenliste $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ ebenfalls a ist.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für diesen Fall einen Zusammenhang zwischen x_{n+1}, x_{n+2} und a mithilfe einer Formel an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

$a = \frac{x_{n+1} + x_{n+2}}{2}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Eigenschaften des arithmetischen Mittels*

Aufgabennummer: 1_140	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 1.4

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist das arithmetische Mittel $\bar{x}$ von Messwerten.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Eigenschaften treffen für das arithmetische Mittel zu?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

Das arithmetische Mittel teilt die geordnete Liste der Messwerte immer in eine untere und eine obere Teilliste mit jeweils gleich vielen Messwerten.	☐
Das arithmetische Mittel kann durch Ausreißer stark beeinflusst werden.	☐
Das arithmetische Mittel kann für alle Arten von Daten sinnvoll berechnet werden.	☐
Das arithmetische Mittel ist immer gleich einem der Messwerte.	☐
Multipliziert man das arithmetische Mittel mit der Anzahl der Messwerte, so erhält man immer die Summe aller Messwerte.	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Lösungsweg

Das arithmetische Mittel kann durch Ausreißer stark beeinflusst werden.	☒
Multipliziert man das arithmetische Mittel mit der Anzahl der Messwerte, so erhält man immer die Summe aller Messwerte.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn genau zwei Antworten angekreuzt sind und beide Kreuze richtig gesetzt sind.

Arithmetisches Mittel*

Aufgabennummer: 1_329	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 1.4

Neun Athleten eines Sportvereins absolvieren einen Test. Das arithmetische Mittel der neun Testergebnisse $x_1, x_2, \ldots, x_9$ ist $\bar{x} = 8$. Ein zehnter Sportler war während der ersten Testdurchführung abwesend. Er holt den Test nach, sein Testergebnis ist $x_{10} = 4$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel der ergänzten Liste $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung
$\overline{x}_{neu} = 7{,}6$

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für die richtige Lösung.

Kopf oder Zahl

Eine Münze hat eine Kopfseite K und eine Zahlseite Z.

Diese Münze wird 3-mal geworfen. Dabei ist zum Beispiel ZKK ein möglicher Ausgang dieses Zufallsversuchs.

Dabei bedeutet der 1. Buchstabe das Ergebnis des 1. Wurfes, der 2. Buchstabe das Ergebnis des 2. Wurfes und der 3. Buchstabe das Ergebnis des 3. Wurfes.

Mit E wird das Ereignis bezeichnet, dass der 2. Wurf das Ergebnis Z hat.

Aufgabenstellung:

Geben Sie das Ereignis E als Teilmenge des zugehörigen Grundraums dieses Zufallsversuchs an.

$E = \{$ ______________________________________ $\}$

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$E = \{KZK, KZZ, ZZK, ZZZ\}$

Ein Punkt für das Angeben der richtigen Teilmenge.

Zufallsversuch

Bei einem bestimmten Zufallsversuch tritt als Ergebnis entweder „Erfolg“ oder „Misserfolg“ ein. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft „Erfolg“ eintritt, wenn dieser Zufallsversuch 7-mal durchgeführt wird.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Wahrscheinlichkeiten jeweils die jedenfalls gleich große Wahrscheinlichkeit aus A bis F zu.

$P(X < 3)$	
$P(X \leq 3)$	
$P(X \geq 3)$	
$P(X > 3)$	

A	$P(X > 2)$
B	$1 - P(X \leq 4)$
C	$P(X \leq 2)$
D	$P(X = 3) + P(X > 4)$
E	$P(X = 4) + P(X \geq 5)$
F	$1 - P(X > 3)$

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$P(X < 3)$	C
$P(X \leq 3)$	F
$P(X \geq 3)$	A
$P(X > 3)$	E

A	$P(X > 2)$
B	$1 - P(X \leq 4)$
C	$P(X \leq 2)$
D	$P(X = 3) + P(X > 4)$
E	$P(X = 4) + P(X \geq 5)$
F	$1 - P(X > 3)$

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Erfolg und Misserfolg

Ein bestimmtes Zufallsexperiment besteht aus n unabhängigen Durchführungen eines Versuchs ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$). Bei jedem Versuch tritt „Erfolg“ mit der Wahrscheinlichkeit p ein, ansonsten „Misserfolg“.

Aufgabenstellung:

Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E bei diesem Zufallsexperiment, das mit der Wahrscheinlichkeit $1 - (1 - p)^n$ eintritt.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

E ... „es tritt (bei *n*-maliger Durchführung des Versuchs) mindestens 1-mal ‚Erfolg' ein"

Ein Punkt für das richtige Beschreiben von *E*.

Grundkompetenz: WS 2.1

Münzwurf*

Aufgabennummer: 1_522	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.1

Bei einem Zufallsversuch wird eine Münze, die auf einer Seite eine Zahl und auf der anderen Seite ein Wappen zeigt, zweimal geworfen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie alle möglichen Ausfälle (Ausgänge) dieses Zufallsversuchs an! *Wappen* kann dabei mit *W*, *Zahl* mit *Z* abgekürzt werden.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

mögliche Ausfälle (Ausgänge): $\{(W, W), (W, Z), (Z, W), (Z, Z)\}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe aller möglichen Ausfälle (Ausgänge).

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Augensumme*

Aufgabennummer: 1_449	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.1

Zwei unterscheidbare, faire Spielwürfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 werden geworfen und die Augensumme wird ermittelt. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Aufgabenstellung:

Jemand behauptet, dass die Ereignisse „Augensumme 5“ und „Augensumme 9“ gleichwahrscheinlich sind. Geben Sie an, ob es sich hierbei um eine wahre oder eine falsche Aussage handelt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:

Augensumme 5: (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1) $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten

Augensumme 9: (3; 6), (4; 5), (5; 4), (6; 3) $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten

$P(\text{„Augensumme 5“}) = \frac{4}{36}$

$P(\text{„Augensumme 9“}) = \frac{4}{36}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Beurteilung der Aussage und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Rote und blaue Kugeln*

Aufgabennummer: 1_425	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: WS 2.1

In einem Behälter befinden sich 15 rote Kugeln und 18 blaue Kugeln. Die Kugeln sind bis auf ihre Farbe nicht unterscheidbar. Es sollen nun in einem Zufallsexperiment zwei Kugeln nacheinander gezogen werden, wobei die erste Kugel nach dem Ziehen nicht zurückgelegt wird und es auf die Reihenfolge der Ziehung ankommt.

Die Buchstaben r und b haben folgende Bedeutung:

r ... das Ziehen einer roten Kugel
b ... das Ziehen einer blauen Kugel

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Ein Grundraum G für dieses Zufallsexperiment lautet ____①____, und ____②____ ist ein Ereignis.

①	
$G = \{r, b\}$	☐
$G = \{(r, r), (r, b), (b, b)\}$	☐
$G = \{(r, r), (r, b), (b, r), (b, b)\}$	☐

②	
die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine blaue Kugel gezogen wird,	☐
jede Teilmenge des Grundraumes	☐
b	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

①	
$G = \{(r, r), (r, b), (b, r), (b, b)\}$	☒

②	
jede Teilmenge des Grundraumes	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Grundraum eines Zufallsversuchs*

Aufgabennummer: 1_377	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.1

In einer Urne befinden sich zwei Kugeln, die mit den Zahlen 0 bzw. 1 beschriftet sind. Die Kugeln sind – abgesehen von ihrer Beschriftung – nicht unterscheidbar. Aus dieser Urne wird dreimal zufällig eine Kugel gezogen, wobei diese nach jedem Zug wieder in die Urne zurückgelegt wird.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Grundraum dieses Zufallsversuchs vollständig durch Zahlentripel (x; y; z) an! x, y und z nehmen dabei jeweils die Werte 0 oder 1 an.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

Ω = {(0; 0; 0), (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0), (1; 1; 0), (1; 0; 1), (0; 1; 1), (1; 1; 1)}

Lösungsschlüssel

Die Lösung ist dann als richtig zu werten, wenn die in der Lösungserwartung angegebenen Zahlentripel korrekt angeführt sind. Die Trennzeichensetzung zwischen den Zahlen 0 und 1 kann beliebig erfolgen. Die Beschriftung der Menge mit „Ω =“ ist nicht notwendig. Die Reihenfolge der Tripel ist nicht vorgegeben.

Weihnachtsgeschenke

Laut einer Umfrage kaufen 87 % der österreichischen Bevölkerung Weihnachtsgeschenke.
In dieser Bevölkerungsgruppe sind 3 % „Last-Minute-Shopper", die erst wenige Tage vor Weihnachten mit dem Kauf beginnen.

Datenquelle: https://ooe.orf.at/stories/3020487/ [07.11.2019].

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie mithilfe der Daten aus dieser Umfrage den Anteil p der „Last-Minute-Shopper" an der österreichischen Bevölkerung in Prozent.

p = ____________________ %

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$0{,}87 \cdot 0{,}03 = 0{,}0261$

$p = 2{,}61~\%$

Ein Punkt für das richtige Berechnen des Anteils p.

Neugeborene

In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Neugeborenen in Österreich hinsichtlich ihres Geburtsgewichts (Masse unmittelbar nach der Geburt) für das Jahr 2018 angegeben.

Geburtsgewicht	Anzahl der Neugeborenen
weniger als 2500 g	5282
mindestens 2500 g und weniger als 3500 g	47152
mindestens 3500 g	32370

Datenquelle: https://www.statistik.at/wcm/idc/idcplg?IdcService=GET_PDF_FILE&RevisionSelectionMethod=LatestReleased&dDocName=110630 [10.04.2020].

Bei einem Geburtsgewicht von weniger als 2500 g wird ein Neugeborenes als „untergewichtig" eingestuft.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie für das Jahr 2018 den relativen Anteil der Neugeborenen in Österreich, die als „untergewichtig" eingestuft worden sind.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$\frac{5\,282}{5\,282 + 47\,152 + 32\,370} = 0{,}06228...$$

Ein Punkt für das richtige Berechnen des relativen Anteils.

Grundkompetenz: WS 2.2

Schätzwert*

Aufgabennummer: 1_825	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 2.2

Bei einem bestimmten Zufallsversuch tritt das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ auf.
Im Rahmen einer Versuchsreihe wird dieser Zufallsversuch a-mal durchgeführt ($a \in \mathbb{N}$ und $a > 1$). Dabei tritt das Ereignis E insgesamt b-mal auf ($b \in \mathbb{N}$).
Für die unbekannte Wahrscheinlichkeit $P(E)$ soll ein Schätzwert p bestimmt werden.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, mit der p unter Verwendung von a und b berechnet werden kann.

p = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

$p = \frac{b}{a}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Formel.

Schätzwert für eine Wahrscheinlichkeit*

Aufgabennummer: 1_801	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 2.2

Bei einem Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 ist eine Ecke beschädigt. Deswegen wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Augenzahl zu werfen, nicht für alle Augenzahlen gleich hoch ist.
Jemand hat mit dem Würfel zwei Wurfserien mit jeweils 50 Würfen durchgeführt und die absoluten Häufigkeiten der auftretenden Augenzahlen aufgezeichnet. In der nachstehenden Tabelle sind diese Aufzeichnungen zusammengefasst.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit in Wurfserie 1	7	8	7	10	8	10
Häufigkeit in Wurfserie 2	6	9	7	9	10	9

Aufgabenstellung:

Geben Sie anhand der Ergebnisse der beiden Wurfserien einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit p (in %) an, mit diesem Würfel die Augenzahl 6 zu werfen.

p = ____ %

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

p = 19 %

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Grippe in Österreich*

Aufgabennummer: 1_754	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.2

Die Medizinische Universität Wien hat die Daten einer Grippe-Virusinfektion für eine bestimmte Woche veröffentlicht. Dazu wurden Blutproben von Personen, die in dieser Woche an Grippe erkrankt waren, untersucht. Von den 1954 untersuchten Blutproben waren 547 Blutproben mit dem Virus *A(H1N1)*, 117 Blutproben mit dem Virus *A(H3N2)* und die restlichen Blutproben mit dem Virus *Influenza B* infiziert.

Aufgabenstellung:

Verwenden Sie die obigen Häufigkeitsangaben als Wahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte an Grippe erkrankte Person mit dem Virus *Influenza B* infiziert ist.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

$\frac{1\,290}{1\,954} = 0{,}66018... \approx 0{,}6602$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,660; 0,661]

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Schätzwert für eine Wahrscheinlichkeit*

Aufgabennummer: 1_585	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 2.2

In einer Fabrik wird mithilfe einer Maschine ein Produkt erzeugt, von dem jeweils 100 Stück in eine Packung kommen.

Im Anschluss an eine Neueinstellung der Maschine werden drei Packungen erzeugt. Diese Packungen werden kontrolliert und es wird die jeweilige Anzahl darin enthaltener defekter Stücke ermittelt. Die Ergebnisse dieser Kontrollen sind in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst.

in der ersten Packung	6 defekte Stücke
in der zweiten Packung	3 defekte Stücke
in der dritten Packung	4 defekte Stücke

Die Fabriksleitung benötigt einen auf dem vorliegenden Datenmaterial basierenden Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit p, dass ein von der neu eingestellten Maschine erzeugtes Stück fehlerhaft ist.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen möglichst zuverlässigen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit p an, dass ein von der neu eingestellten Maschine erzeugtes Stück fehlerhaft ist!

p = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$p = \frac{13}{300} = 0{,}04\dot{3}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,04; 0,05] bzw. [4 %; 5 %]

Online-Glücksspiel*

Aufgabennummer: 1_521	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 2.2

Ein Mann spielt über einen längeren Zeitraum regelmäßig dasselbe Online-Glücksspiel mit konstanter Gewinnwahrscheinlichkeit. Von 768 Spielen gewinnt er 162.

Aufgabenstellung:

Mit welcher ungefähren Wahrscheinlichkeit wird er das nächste Spiel gewinnen? Kreuzen Sie den zutreffenden Schätzwert für diese Wahrscheinlichkeit an!

0,162 %	☐
4,74 %	☐
16,2 %	☐
21,1 %	☐
7,68 %	☐
76,6 %	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

21,1 %	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Schätzwert angekreuzt ist.

Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt*

Aufgabennummer: 1_498	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.2

Im Jahr 2014 wurden in Österreich 42 162 Buben und 39 560 Mädchen geboren.

Aufgabenstellung:

Geben Sie anhand dieser Daten einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit an, dass ein in Österreich geborenes Kind ein Mädchen ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

$$\frac{39\,560}{42\,162 + 39\,560} \approx 0{,}484$$

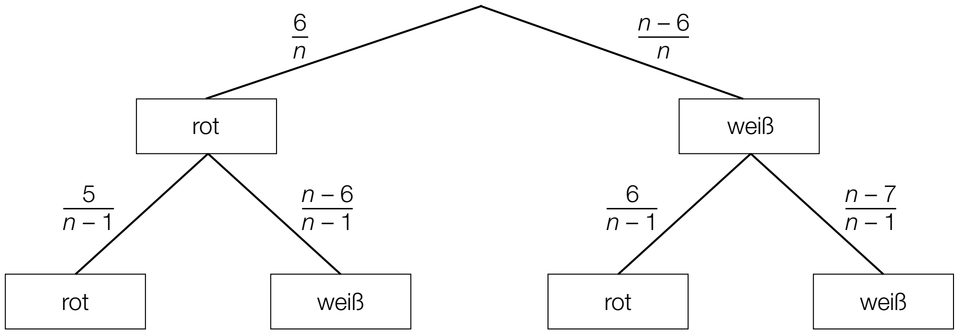
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Ziehen von Kugeln

In einer Urne befinden sich n Kugeln. Von den n Kugeln sind 6 Kugeln rot, die restlichen Kugeln sind weiß. Aus dieser Urne werden nach dem Zufallsprinzip hintereinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind im nachstehenden Baumdiagramm dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln rot sind, beträgt p.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie unter Verwendung von n eine Gleichung zur Berechnung von p auf.

$p =$ ____________________

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$p = \frac{6}{n} \cdot \frac{5}{n-1}$$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

Kugeln

In einem Gefäß befinden sich 5 rote und n grüne Kugeln ($n \geq 2$).

Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen aus dem Gefäß gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 grüne Kugeln gezogen werden, wird mit p bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 6]*

$p = \frac{n}{n+5} \cdot \frac{n-1}{n+5} \cdot \frac{5}{n+5} \cdot 3$	☐
$p = \left(\frac{n}{n+5}\right)^2 \cdot \frac{5}{n+5}$	☐
$p = \frac{n}{n+5} \cdot \frac{n-1}{n+4} \cdot \frac{5}{n+3} \cdot 3$	☐
$p = \frac{5}{n+5} \cdot \left(\frac{n}{n+5}\right)^2 \cdot 3$	☐
$p = \frac{5}{n+5} \cdot \frac{n}{n+4} \cdot \frac{n-1}{n+3}$	☐
$p = \frac{5}{n+5} \cdot \frac{n}{n+5} \cdot \frac{n-1}{n+5}$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$p = \frac{n}{n+5} \cdot \frac{n-1}{n+4} \cdot \frac{5}{n+3} \cdot 3$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Glücksspiel

Die Wahrscheinlichkeit, 1 Runde eines bestimmten Glücksspiels zu gewinnen, hat den Wert p.
Die Wahrscheinlichkeit, 2 aufeinanderfolgende Runden dieses Glücksspiels zu gewinnen, hat den Wert p_1.
Aufeinanderfolgende Runden sind voneinander unabhängig.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf das oben beschriebene Glücksspiel jedenfalls zutreffen. *[2 aus 5]*

$p_1 = 2 \cdot p$	☐
$p_1 = (1 - p)^2$	☐
$p_1 = p \cdot (1 - p)$	☐
$p_1 \leq p$	☐
$p_1 = p^2$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$p_1 \leq p$	☒
$p_1 = p^2$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Kartenspiel

Für die 8 Karten eines Kartenspiels gilt:

- 3 Karten sind mit „1" beschriftet.
- 3 Karten sind mit „2" beschriftet.
- 2 Karten sind mit „3" beschriftet.

Diese 8 Karten werden gemischt. Anschließend werden 2 Karten aufgedeckt.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 1 der 2 aufgedeckten Karten mit einer ungeraden Zahl beschriftet ist.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{25}{28} = 0{,}8928...$

Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Grundkompetenz: WS 2.3

Münzwurf

Ein Zufallsexperiment besteht aus dem mehrmaligen Werfen einer Münze. Die Münze zeigt nach einem Wurf entweder „Kopf“ oder „Zahl“. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze „Kopf“ zeigt, ist bei jedem Wurf genauso hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass sie „Zahl“ zeigt. Die Ergebnisse der Würfe sind voneinander unabhängig. Die Münze wird so oft geworfen, bis sie zum zweiten Mal „Kopf“ oder zum zweiten Mal „Zahl“ zeigt.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der dafür benötigten Münzwürfe.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$P(X = 3) = 0,5$

Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Grundkompetenz: WS 2.3

Sektoren eines Glücksrads

Ein bestimmtes Glücksrad hat drei unterschiedlich große Sektoren. Einer dieser Sektoren ist grün markiert, einer ist rot markiert und einer ist gelb markiert.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger des Glücksrads nach einer Drehung auf den gelben Sektor zeigt, beträgt für jede Drehung des Glücksrads (unabhängig von den vorangegangenen Drehungen) konstant p.

Aufgabenstellung:

Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit durch $(1 - p)^3$ berechnet werden kann.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Mit $(1 - p)^3$ kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass bei 3-maligem Drehen nach keiner dieser Drehungen der Zeiger des Glücksrads auf den gelben Sektor zeigt.

Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.

Grundkompetenz: WS 2.3

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

Münzwurf*

Aufgabennummer: 1_850	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	

Eine Münze zeigt nach einem Wurf entweder „Kopf“ oder „Zahl“. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze „Kopf“ zeigt, ist bei jedem Wurf genauso hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass sie „Zahl“ zeigt. Die Ergebnisse der Würfe sind voneinander unabhängig.

Bei einem Zufallsversuch wird die Münze 4-mal geworfen.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Zufallsversuch „Kopf“ häufiger als „Zahl“ auftritt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

oder:

$$\binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}3125$$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Testaufgaben*

Aufgabennummer: 1_802	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Für eine internationale Vergleichsstudie wird eine große Anzahl an Testaufgaben erstellt. Erfahrungsgemäß werden in einem ersten Begutachtungsverfahren aus formalen Gründen 20 % der Aufgaben verworfen. Die restlichen Aufgaben durchlaufen ein zweites Begutachtungsverfahren. Erfahrungsgemäß werden dabei aus inhaltlichen Gründen 10 % der Aufgaben verworfen.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine erstellte Aufgabe verworfen wird.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}28$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Lieblingsfach*

Aufgabennummer: 1_778	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Alle Schulkinder der 1. und der 2. Klassen einer Schule wurden nach ihrem Lieblingsfach befragt. Bei dieser Befragung war genau ein Lieblingsfach anzugeben. Die nachstehende Tabelle fasst die erhobenen Daten zusammen.

	Lieblingsfach Mathematik	anderes Lieblingsfach
Schulkinder der 1. Klassen	47	241
Schulkinder der 2. Klassen	33	287
gesamt	80	528

Ein Schulkind der 1. Klassen wird zufällig ausgewählt. (Dabei haben alle Schulkinder der 1. Klassen die gleiche Wahrscheinlichkeit, ausgewählt zu werden.)

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Schulkind Mathematik als Lieblingsfach angegeben hat.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$$\frac{47}{47 + 241} = \frac{47}{288} = 0{,}1631\ldots \approx 0{,}163$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Schulkind Mathematik als Lieblingsfach angegeben hat, beträgt ca. 16,3 %.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Basketball*

Aufgabennummer: 1_755	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Martin und Sebastian werfen beim Basketball nacheinander je einmal in Richtung des Korbes. Martin trifft mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 in den Korb und Sebastian trifft mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 (unabhängig davon, ob Martin getroffen hat) in den Korb.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau einer der beiden Spieler in den Korb trifft.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

$0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}38$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ziehungswahrscheinlichkeit*

Aufgabennummer: 1_730	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln. Zwei Kugeln werden nacheinander ohne Zurücklegen gezogen (dabei wird angenommen, dass jede Ziehung von zwei Kugeln die gleiche Wahrscheinlichkeit hat). Zwei der fünf Kugeln im Behälter sind blau, die anderen Kugeln sind rot. Mit p wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, beim zweiten Zug eine blaue Kugel zu ziehen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p an.

p = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$p = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Spielwürfel*

Aufgabennummer: 1_706	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Bei einem Spiel kommt ein Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zum Einsatz. Der Würfel wird dreimal geworfen. Für jeden Wurf gilt: Jede der Augenzahlen tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf wie jede der anderen Augenzahlen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit p dafür an, dass man beim dritten Wurf eine durch 3 teilbare Augenzahl würfelt!

p = ________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

$p = \frac{1}{3}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,330; 0,334] bzw. [33,0 %; 33,4 %]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Jetons*

Aufgabennummer: 1_682	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

In zwei Schachteln befindet sich Spielgeld.
In Schachtel I sind fünf 2-Euro-Jetons und zwei 1-Euro-Jetons.
In Schachtel II sind vier 2-Euro-Jetons und fünf 1-Euro-Jetons.
Aus jeder der beiden Schachteln wird unabhängig voneinander je ein Jeton entnommen.
Dabei hat pro Schachtel jeder Jeton die gleiche Wahrscheinlichkeit, entnommen zu werden.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach der Entnahme der beiden Jetons in beiden Schachteln der gleiche Geldbetrag vorhanden ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{9} \approx 0{,}127$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach der Entnahme der beiden Jetons in beiden Schachteln der gleiche Geldbetrag (11 Euro) vorhanden ist, beträgt ca. 12,7 %.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,12; 0,13]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Rot-Grün-Sehschwäche*

Aufgabennummer: 1_658	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Eine der bekanntesten Farbfehlsichtigkeiten ist die Rot-Grün-Sehschwäche. Wenn jemand davon betroffen ist, dann ist diese Fehlsichtigkeit immer angeboren und verstärkt oder vermindert sich nicht im Laufe der Zeit. Von ihr sind weltweit etwa 9 % aller Männer und etwa 0,8 % aller Frauen betroffen. Der Anteil von Frauen an der Weltbevölkerung liegt bei 50,5 %.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass eine nach dem Zufallsprinzip ausgewählte Person eine Rot-Grün-Sehschwäche hat!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}495 \cdot 0{,}09 + 0{,}505 \cdot 0{,}008 \approx 0{,}049$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,04; 0,05]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Gummibären*

Aufgabennummer: 1_634	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

In einer Packung befinden sich 50 Gummibären. Von diesen sind 20 rot, 16 weiß und 14 grün. Ein Kind entnimmt mit einem Griff drei Gummibären, ohne dabei auf die Farbe zu achten.

Aufgabenstellung:

Geben Sie unter der Voraussetzung, dass jeder Gummibär mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entnommen wird, die Wahrscheinlichkeit an, dass mindestens einer der drei entnommenen Gummibären rot ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$$1 - \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{28}{48} = \frac{111}{140} \approx 79{,}3\ \%$$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,79; 0,80] bzw. [79 %; 80 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

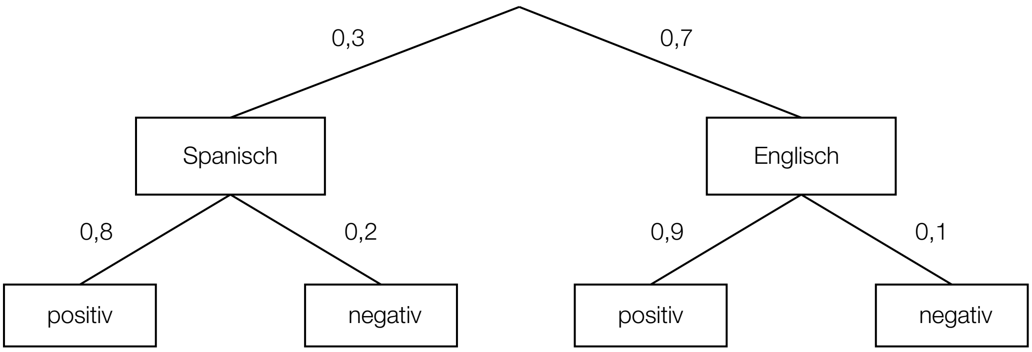
BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Prüfung*

Aufgabennummer: 1_610	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Um ein Stipendium für einen Auslandsaufenthalt zu erhalten, mussten Studierende entweder in Spanisch oder in Englisch eine Prüfung ablegen.

Im nachstehenden Baumdiagramm sind die Anteile der Studierenden, die sich dieser Prüfung in der jeweiligen Sprache unterzogen haben, angeführt. Zudem gibt das Baumdiagramm Auskunft über die Anteile der positiven bzw. negativen Prüfungsergebnisse.



Aufgabenstellung:

Der Prüfungsakt einer/eines angetretenen Studierenden wird zufällig ausgewählt.

Deuten Sie den Ausdruck $0,7 \cdot 0,9 + (1 - 0,7) \cdot 0,8$ im gegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

Der Ausdruck beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass der zufällig ausgewählte Prüfungsakt ein positives Prüfungsergebnis aufweist.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung.

Mensch ärgere Dich nicht*

Aufgabennummer: 1_586	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Um beim Spiel *Mensch ärgere Dich nicht* zu Beginn des Spiels eine Figur auf das Spielfeld setzen zu dürfen, muss mit einem fairen Spielwürfel ein Sechser geworfen werden. (Ein Würfel ist „fair", wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Die Anzahl der Versuche, einen Sechser zu werfen, ist laut Spielanleitung auf drei Versuche beschränkt, bevor die nächste Spielerin / der nächste Spieler an die Reihe kommt.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Spielfigur nach maximal drei Versuchen, einen Sechser zu werfen, auf das Spielfeld gesetzt werden darf!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}42$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Spielfigur nach maximal drei Versuchen auf das Spielfeld setzen zu dürfen, beträgt ca. 42 %.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,4; 0,45] bzw. [40 %; 45 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Alarmanlagen*

Aufgabennummer: 1_546	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Eine bestimmte Alarmanlage löst jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 im Einbruchsfall Alarm aus.
Eine Familie lässt zwei dieser Anlagen in ihr Haus so einbauen, dass sie unabhängig voneinander Alarm auslösen.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im Einbruchsfall mindestens eine der beiden Anlagen Alarm auslöst!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$1 - 0{,}1^2 = 0{,}99$

Die Wahrscheinlichkeit, dass im Einbruchsfall mindestens eine der beiden Anlagen Alarm auslöst, liegt bei 0,99.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Weiche und harte Eier*

Aufgabennummer: 1_520	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Beim Frühstücksbuffet eines Hotels befinden sich in einem Körbchen zehn äußerlich nicht unterscheidbare Eier. Bei der Vorbereitung wurde versehentlich ein hart gekochtes Ei zu neun weich gekochten Eiern gelegt.

Aufgabenstellung:

Eine Dame entnimmt aus dem noch vollen Körbchen ein Ei, das sie zufällig auswählt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass der nächste Gast bei zufälliger Wahl eines Eies das harte Ei entnimmt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

$\frac{1}{10}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (in Prozent oder Dezimalschreibweise) sind ebenfalls als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Einlasskontrolle*

Aufgabennummer: 1_497	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Beim Einlass zu einer Sportveranstaltung führt eine Person *P* einen unerlaubten Gegenstand mit sich. Bei einer Sicherheitskontrolle wird ein unerlaubter Gegenstand mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 entdeckt. Da es sich bei dieser Sportveranstaltung um eine Veranstaltung mit besonders hohem Risiko handelt, muss jede Person zwei derartige voneinander unabhängige Sicherheitskontrollen durchlaufen.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Person *P* im Zuge der beiden Sicherheitskontrollen der unerlaubte Gegenstand entdeckt wird!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}99$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium für Bildung

Zollkontrolle*

Aufgabennummer: 1_473	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Eine Gruppe von zehn Personen überquert eine Grenze zwischen zwei Staaten. Zwei Personen führen Schmuggelware mit sich. Beim Grenzübertritt werden drei Personen vom Zoll zufällig ausgewählt und kontrolliert.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den drei kontrollierten Personen die beiden Schmuggler der Gruppe sind!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

$\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{15}$

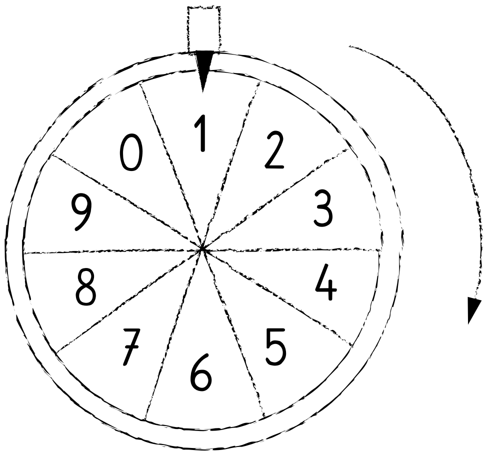
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Dezimalzahl oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,066; 0,07] bzw. [6,6 %; 7 %]

Maturaball-Glücksspiele*

Aufgabennummer: 1_448	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Bei einem Maturaball werden zwei verschiedene Glücksspiele angeboten: ein Glücksrad und eine Tombola, bei der 1 000 Lose verkauft werden. Das Glücksrad ist in zehn gleich große Sektoren unterteilt, die alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten können. Man gewinnt, wenn der Zeiger nach Stillstand des Rades auf das Feld der „1" oder jenes der „6" zeigt.



Aufgabenstellung:

Max hat das Glücksrad einmal gedreht und als Erster ein Los der Tombola gekauft. In beiden Fällen hat er gewonnen. Die Maturazeitung berichtet darüber: „Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis beträgt 3 %." Berechnen Sie die Anzahl der Gewinn-Lose!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{x}{1\,000} = 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad x = 150$$

Es gibt 150 Gewinnlose.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Augensumme beim Würfeln*

Aufgabennummer: 1_424	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Zwei unterscheidbare, faire Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 werden gleichzeitig geworfen und die Augensumme wird ermittelt. Das Ereignis, dass die Augensumme durch 5 teilbar ist, wird mit E bezeichnet. (Ein Würfel ist „fair", wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E!

$P(E) =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

$P(E) = \frac{7}{36}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Dezimalzahl oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervalle: [0,19; 0,20] bzw. [19 %; 20 %]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Mehrere Wahrscheinlichkeiten*

Aufgabennummer: 1_401	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 2.3

In einer Unterrichtsstunde sind 15 Schülerinnen und 10 Schüler anwesend. Die Lehrperson wählt für Überprüfungen nacheinander zufällig drei verschiedene Personen aus dieser Schulklasse aus. Jeder Prüfling wird nur einmal befragt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson drei Schülerinnen auswählt, kann mittels $\frac{15}{25} \cdot \frac{14}{25} \cdot \frac{13}{25}$ berechnet werden.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson als erste Person einen Schüler auswählt, ist $\frac{10}{25}$.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson bei der Wahl von drei Prüflingen als zweite Person eine Schülerin auswählt, ist $\frac{24}{25}$.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson drei Schüler auswählt, kann mittels $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{8}{23}$ berechnet werden.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den von der Lehrperson ausgewählten Personen genau zwei Schülerinnen befinden, kann mittels $\frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24} \cdot \frac{23}{23}$ berechnet werden.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson als erste Person einen Schüler auswählt, ist $\frac{10}{25}$.	☒
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrperson drei Schüler auswählt, kann mittels $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{8}{23}$ berechnet werden.	☒

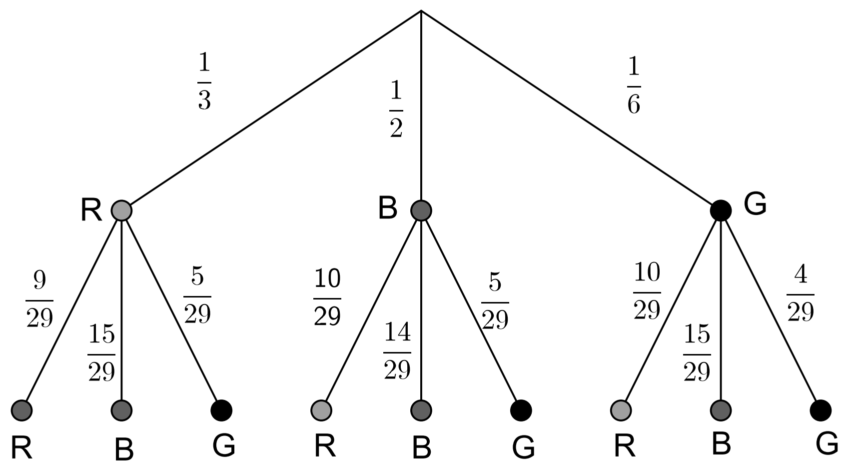
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Baumdiagramm*

Aufgabennummer: 1_376	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

In einem Gefäß befinden sich rote, blaue und grüne Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen. Das folgende Baumdiagramm veranschaulicht die möglichen Ergebnisse des Zufallsversuchs:



Quelle: http://www.mathe-online.at/mathint/wstat1/grafiken/baumdiagramm2.gif [18.12.2014] (adaptiert).

R = rote Kugel
B = blaue Kugel
G = grüne Kugel

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Kugeln gleicher Farbe gezogen werden!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{29} + \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{29} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{29} = \frac{32}{87} \approx 0{,}3678 = 36{,}78\ \%$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Lösung gilt als richtig, wenn die Wahrscheinlichkeit in einer der angegebenen Schreibweisen des Intervalls richtig angegeben ist.

Lösungsintervall in Dezimalschreibweise: [0,36; 0,37]

Lösungsintervall in Prozentschreibweise: [36 %; 37 %]

Lösung als Bruch: $\frac{32}{87}$

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Adventkalender*	
Aufgabennummer: 1_353	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

In einem Adventkalender wurden versehentlich 4 der 24 vorhandenen Fenster nicht befüllt.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie beim Öffnen des dritten Fensters das erste leere Fenster vorfinden!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

$\frac{20}{24} \cdot \frac{19}{23} \cdot \frac{4}{22} = \frac{95}{759} \approx 0{,}1252 \approx 12{,}5\ \%$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede der angeführten Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch, Dezimalzahl oder in Prozenten) ist als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,12; 0,13] bzw. [12 %; 13 %]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Hausübungskontrolle*	
Aufgabennummer: 1_328	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.3

Eine Lehrerin wählt am Beginn der Mathematikstunde nach dem Zufallsprinzip 3 Schüler/innen aus, die an der Tafel die Lösungsansätze der Hausübungsaufgaben erklären müssen. Es sind 12 Burschen und 8 Mädchen anwesend.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass für das Erklären der Lösungsansätze 2 Burschen und 1 Mädchen ausgewählt werden!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

$P(\text{„2 Burschen, 1 Mädchen“}) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{8}{18} \cdot 3 = \frac{44}{95} \approx 0{,}46 = 46\ \%$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede der angeführten Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch, Dezimalzahl oder in Prozenten) ist als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,46; 0,47] bzw. [46 %; 47 %]
Sollte als Lösungsmethode die hypergeometrische Verteilung gewählt werden, ist dies auch als richtig zu werten:

$$P(E) = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{20}{3}}$$

Würfeln*

Aufgabennummer: 1_144	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: WS 2.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Ein idealer sechsseitiger Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 wird einmal geworfen.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den Fragestellungen in der linken Spalte die passenden Wahrscheinlichkeiten in der rechten Spalte zu!

Fragestellung	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird?	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 4 gewürfelt wird?	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl kleiner als 2 gewürfelt wird.	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 1 und kleiner als 6 gewürfelt wird?	

Wahrscheinlichkeit	
A	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{6}$
C	$\frac{1}{2}$
D	1
E	$\frac{5}{6}$
F	$\frac{2}{3}$

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2013 publizierten Kompetenzcheck (vgl. https://www.bifie.at/node/2389) entnommen.

Möglicher Lösungsweg

Fragestellung	
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird?	C
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 4 gewürfelt wird?	A
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl kleiner als 2 gewürfelt wird.	B
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl größer als 1 und kleiner als 6 gewürfelt wird?	F

Wahrscheinlichkeit	
A	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{6}$
C	$\frac{1}{2}$
D	1
E	$\frac{5}{6}$
F	$\frac{2}{3}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist nur dann zu geben, wenn alle vier Buchstaben richtig zugeordnet sind.

Eissalon

In einem Eissalon werden 24 verschiedene Eissorten angeboten.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, aus den 24 angebotenen Eissorten 3 verschiedene Eissorten auszuwählen. (Dabei spielt die Reihenfolge der Auswahl keine Rolle.)

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\binom{24}{3} = 2\,024$

Es gibt 2 024 verschiedene Möglichkeiten.

Ein Punkt für das Angeben der richtigen Anzahl.

Grundkompetenz: WS 2.4

Bit-Kombinationen

Ein Computer rechnet mit sogenannten *Bits*. Ein Bit kann entweder den Wert 0 oder den Wert 1 annehmen. Eine beliebige Abfolge aus acht Bits wird *Byte* genannt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Interpretation an, die im gegebenen Sachzusammenhang für $\binom{8}{3}$ zutrifft.
[1 aus 6]

$\binom{8}{3}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass in einem Byte die ersten drei Bit 1er sind.	☐
$\binom{8}{3}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass in einem Byte genau drei 1er hintereinander auftreten.	☐
$\binom{8}{3}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass in einem Byte genau drei 1er enthalten sind.	☐
$\binom{8}{3}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, dass in einem Byte genau drei 1er enthalten sind.	☐
$\binom{8}{3}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, dass in einem Byte genau drei 1er hintereinander auftreten.	☐
$\binom{8}{3}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, dass in einem Byte die ersten drei Bit 1er sind.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\binom{8}{3}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, dass in einem Byte genau drei 1er enthalten sind.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Binomialkoeffizient

Gegeben ist der Binomialkoeffizient $\binom{10}{2}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Anzahlen an, die mit dem Binomialkoeffizienten $\binom{10}{2}$ übereinstimmen.
[2 aus 5]

die Anzahl der zweielementigen Teilmengen einer zehnelementigen Menge	☐
die Anzahl derjenigen Zahlen, die mit zwei Ziffern gebildet werden können	☐
die Anzahl der Möglichkeiten, zwei Personen aus einer Gruppe von zehn Personen auszuwählen	☐
die Anzahl der möglichen Versuchsausgänge beim zehnmaligen Werfen einer Münze	☐
die Anzahl der möglichen Versuchsausgänge beim Werfen zweier Würfel, die jeweils zehn mit den Ziffern 1 bis 10 beschriftete Seitenflächen haben	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

die Anzahl der zweielementigen Teilmengen einer zehnelementigen Menge	☒
die Anzahl der Möglichkeiten, zwei Personen aus einer Gruppe von zehn Personen auszuwählen	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Binomialkoeffizienten

Gegeben sind die zwei natürlichen Zahlen a und b mit $0 \leq a < b \leq 9$.

Für zwei Binomialkoeffizienten gilt:
$\binom{9}{a} = \binom{9}{b}$

Aufgabenstellung:

Geben Sie a in Abhängigkeit von b an.

a = ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$a = 9 - b$

Ein Punkt für das richtige Angeben von a in Abhängigkeit von b.

Sportwettbewerb

An einem Sportwettbewerb nehmen 20 Personen teil. Diese werden in Gruppen eingeteilt.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie $\binom{20}{4} = 4\,845$ im gegebenen Sachzusammenhang.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Es gibt 4845 Möglichkeiten für die Auswahl einer Vierergruppe.

oder:

Es gibt 4845 Möglichkeiten, aus den 20 Personen eine Gruppe von 4 Personen auszuwählen.

Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Grundkompetenz: WS 2.4

Auswahlmöglichkeiten*

Aufgabennummer: 1_875	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Bei einem bestimmten Preisausschreiben kann man Jahrestickets für den Zoo gewinnen.
Bei diesem Preisausschreiben haben 1 000 Personen jeweils 1-mal teilgenommen.
Als Gewinner/innen werden 2 Personen nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Anzahl der Möglichkeiten an, diese 2 Personen aus den 1 000 Teilnehmerinnen und Teilnehmern nach dem Zufallsprinzip auszuwählen.

Die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten beträgt: ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

Die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten beträgt: $\binom{1\,000}{2} = 499\,500$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Angeben der richtigen Anzahl, wobei auch die Angabe des Binomialkoeffizienten als richtig zu werten ist.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Binomialkoeffizient*

Aufgabennummer: 1_803	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: WS 2.4

Eine Gruppe besteht aus 12 Schülerinnen.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Der Binomialkoeffizient $\binom{12}{2}$ hat den Wert ___①___; er kann dazu verwendet werden, die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, ___②___, zu berechnen.

①	
24	☐
66	☐
144	☐

②	
2 Schülerinnen dieser Gruppe auszuwählen, die gemeinsam ein Referat halten sollen	☐
2 Schülerinnen dieser Gruppe 2 unterschiedliche Preise zu verleihen	☐
die Schülerinnen in 2 Gruppen zu je 6 Schülerinnen einzuteilen	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

①	
66	☒

②	
2 Schülerinnen dieser Gruppe auszuwählen, die gemeinsam ein Referat halten sollen	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist. Ist nur für eine der beiden Lücken der richtige Satzteil angekreuzt, ist ein halber Punkt zu geben.

Anzahl an Möglichkeiten*

Aufgabennummer: 1_659	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 2.4

Eine Mannschaft besteht aus n Spielerinnen. Aus diesen wählt die Trainerin an einem Tag sechs Spielerinnen, an einem anderen Tag acht Spielerinnen aus, wobei es auf die Reihenfolge der Auswahl der Spielerinnen jeweils nicht ankommt. In beiden Fällen ist die Anzahl der Möglichkeiten, die Auswahl zu treffen, gleich groß.

Aufgabenstellung:

Geben Sie n (die Anzahl der Spielerinnen dieser Mannschaft) an!

n = ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung
$n = 14$

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für die richtige Lösung.

Jugendgruppe*

Aufgabennummer: 1_545	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: WS 2.4

Eine Jugendgruppe besteht aus 21 Jugendlichen. Für ein Spiel sollen Teams gebildet werden.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Der Binomialkoeffizient $\binom{21}{3}$ gibt an, _____①_____; sein Wert beträgt _____②_____.

①	
wie viele der 21 Jugendlichen in einem Team sind, wenn man drei gleich große Teams bildet	☐
wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, aus den 21 Jugendlichen ein Dreierteam auszuwählen	☐
auf wie viele Arten drei unterschiedliche Aufgaben auf drei Mitglieder der Jugendgruppe aufgeteilt werden können	☐

②	
7	☐
1 330	☐
7 980	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

①		②	
wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, aus den 21 Jugendlichen ein Dreierteam auszuwählen	☒	1 330	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Elfmeterschießen*	
Aufgabennummer: 1_400	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 2.4

In einer Fußballmannschaft stehen elf Spieler als Elfmeterschützen zur Verfügung.

Aufgabenstellung:

Deuten Sie den Ausdruck $\binom{11}{5}$ im gegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

$\binom{11}{5}$ gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, von den elf Spielern fünf Schützen für das Elfmeterschießen – unabhängig von der Reihenfolge ihres Antretens – auszuwählen.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung, wobei die Unabhängigkeit der Reihenfolge des Antretens nicht angeführt sein muss.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Binomialkoeffizient*

Aufgabennummer: 1_352	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 2.4

Betrachtet wird der Binomialkoeffizient $\binom{6}{2}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aufgabenstellungen an, die mit der Rechnung $\binom{6}{2} = 15$ gelöst werden können!

Gegeben sind sechs verschiedene Punkte einer Ebene, von denen nie mehr als zwei auf einer Geraden liegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Punkte auszuwählen, um jeweils eine Gerade durchzulegen?	☐
An einem Wettrennen nehmen sechs Personen teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es für den Zieleinlauf, wenn nur die ersten beiden Plätze relevant sind?	☐
Von sechs Kugeln sind vier rot und zwei blau. Sie unterscheiden sich nur durch ihre Farbe. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe anzuordnen?	☐
Sechs Mädchen einer Schulklasse kandidieren für das Amt der Klassensprecherin. Die Siegerin der Wahl soll Klassensprecherin werden, die Zweitplatzierte deren Stellvertreterin. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Vergabe der beiden Ämter?	☐
Wie viele sechsstellige Zahlen können aus den Ziffern 6 und 2 gebildet werden?	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

Gegeben sind sechs verschiedene Punkte einer Ebene, von denen nie mehr als zwei auf einer Geraden liegen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Punkte auszuwählen, um jeweils eine Gerade durchzulegen?	☒
Von sechs Kugeln sind vier rot und zwei blau. Sie unterscheiden sich nur durch ihre Farbe. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Kugeln in einer Reihe anzuordnen?	☒

Lösungsschlüssel

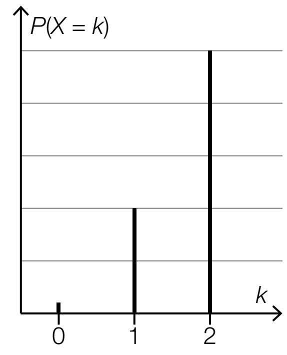
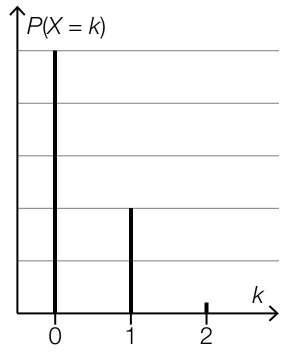
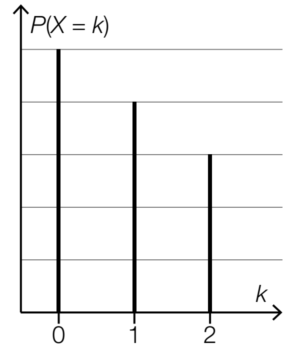
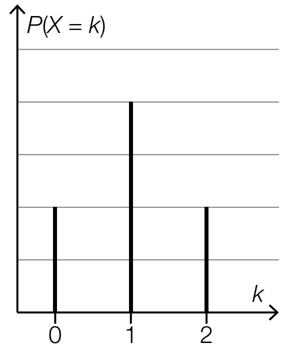
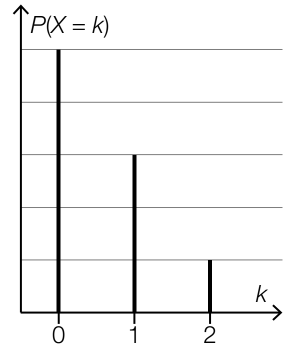
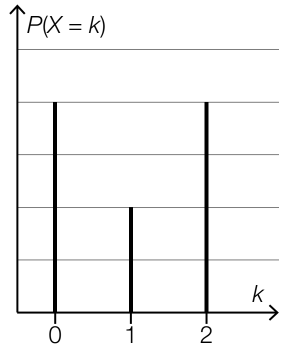
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aufgabenstellungen angekreuzt sind.

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ein fairer 6-seitiger Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 wird 2-mal geworfen.
Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft bei diesen 2 Würfen die Augenzahl 6 auftritt.

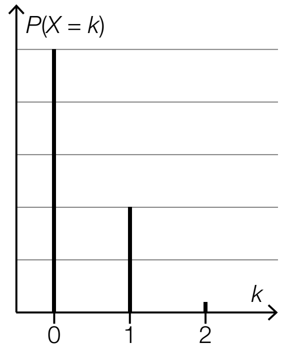
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X richtig darstellt.
[1 aus 6]

	☐		☐
	☐		☐
	☐		☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Elfmetertraining

Johanna trainiert regelmäßig mit ihrer Fußballmannschaft Elfmeterschießen.
Sie hat 5 Versuche. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der dabei erzielten Tore k an.

In der nachstehenden Tabelle ist die auf Erfahrungswerten basierende Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0,001	0,008	0,131	0,310	0,372	$P(X = 5)$

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Johanna bei 5 Versuchen mehr als 3 Tore erzielt.

$P(X > 3) =$ ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$P(X > 3) = 1 - (0{,}001 + 0{,}008 + 0{,}131 + 0{,}31) = 0{,}55$

Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

Ein Zufallsexperiment wird n-mal durchgeführt ($n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 12$).

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft ein bestimmtes Ereignis bei diesen n Durchführungen eintritt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis mindestens 10-mal eintritt, beträgt 35 %.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die jedenfalls zutreffen. *[2 aus 5]*

$P(X = 0) = 0$	☐
$P(X \leq 10) = 0{,}35$	☐
$P(X < 9) \leq 0{,}65$	☐
$P(X \geq 10) = 0{,}35$	☐
$P(X > 11) > 0{,}4$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

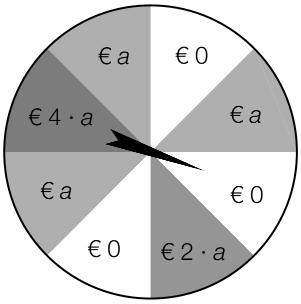
$P(X < 9) \leq 0{,}65$	☒
$P(X \geq 10) = 0{,}35$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Glücksrad

In der Mitte des unten abgebildeten Glücksrads ist ein Zeiger montiert. Für jede Drehung des Zeigers gilt:
Der Zeiger bleibt in jedem Sektor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ stehen.

Die Gewinne, die ausbezahlt werden, wenn der Zeiger im entsprechenden Sektor stehen bleibt, sind auf dem nachstehend abgebildeten Glücksrad angeschrieben ($a \in \mathbb{R}^+$).



Der Zeiger wird 1-mal gedreht.

Die Zufallsvariable X gibt dabei die Höhe des ausbezahlten Gewinns an.
Für den Erwartungswert in Euro gilt: $E(X) = 4{,}5$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie a.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$4{,}5 = a \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot a \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot a \cdot \frac{1}{8}$

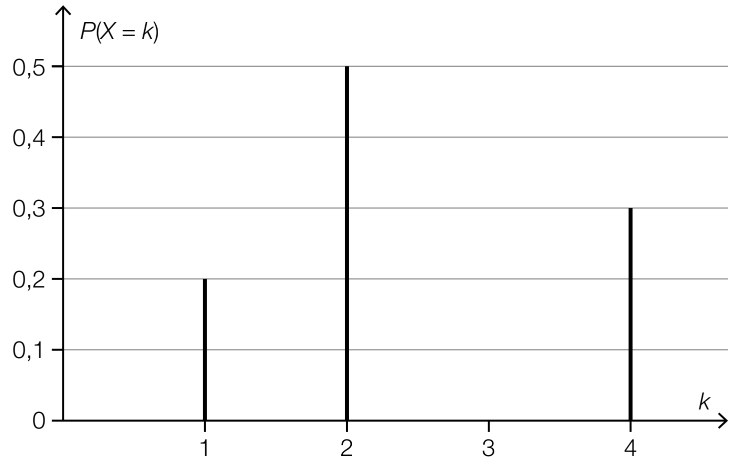
$a = 4$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln von a.

Grundkompetenz: WS 3.1

Wahrscheinlichkeitsverteilung

In der nachstehenden Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X dargestellt.



Die Zufallsvariable X nimmt nur die Werte 1, 2 und 4 mit einer positiven Wahrscheinlichkeit an.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

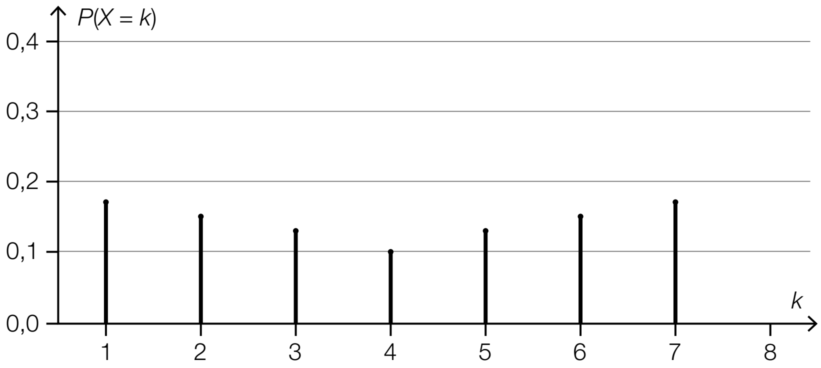
$E(X) = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}3 = 2{,}4$

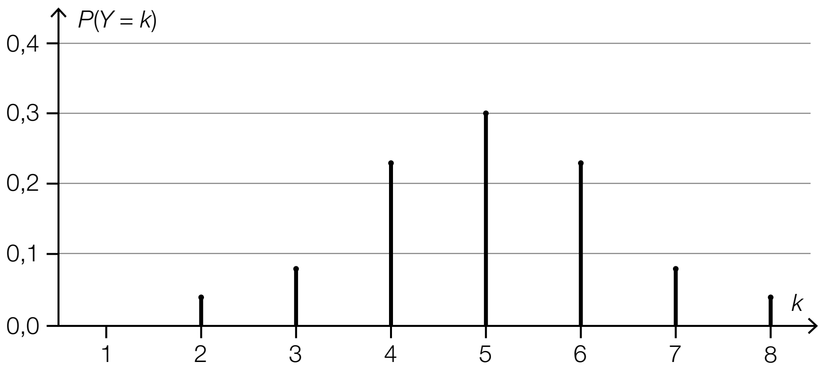
Ein Punkt für das richtige Ermitteln von $E(X)$.

Grundkompetenz: WS 3.1

Erwartungswerte und Standardabweichungen

Gegeben sind die zwei Zufallsvariablen X und Y, die jeweils genau 7 ganzzahlige Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen. Nachstehend sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für X und Y dargestellt.





Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Für die Erwartungswerte $E(X)$ und $E(Y)$ gilt ____①____;
für die Standardabweichungen $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ gilt ____②____.

①	
$E(X) < E(Y)$	☐
$E(X) = E(Y)$	☐
$E(X) > E(Y)$	☐

②	
$\sigma(X) < \sigma(Y)$	☐
$\sigma(X) = \sigma(Y)$	☐
$\sigma(X) > \sigma(Y)$	☐

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungweg

①	
$E(X) < E(Y)$	☒

②	
$\sigma(X) > \sigma(Y)$	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

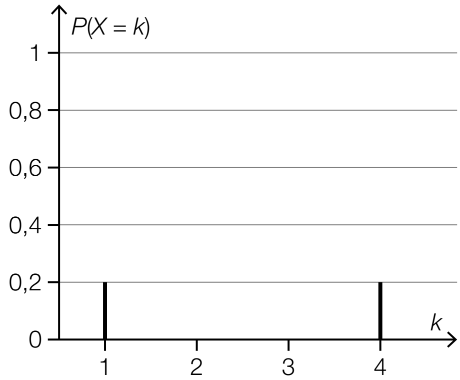
Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

Gegeben ist die Zufallsvariable X, die nur 1, 2, 3 oder 4 als Wert annehmen kann.

Es gilt: $P(X = 2)$ ist doppelt so groß wie $P(X = 1)$.

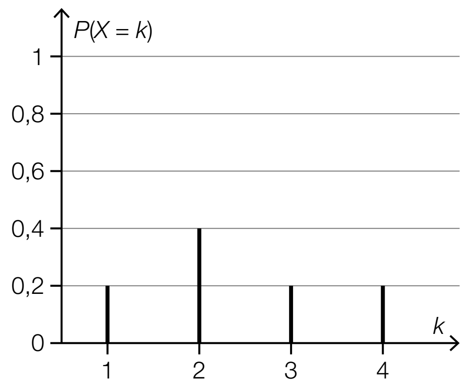
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X die fehlenden Werte $P(X = 2)$ und $P(X = 3)$ ein.



[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg



Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der fehlenden Werte.

Gewinnspiel

Auf dem Etikett einer Getränkeflasche ist ein Code für ein Gewinnspiel aufgedruckt.

- Die Wahrscheinlichkeit, mit diesem Code einen Gewinn von € 10 zu erzielen, beträgt 1 %.
- Die Wahrscheinlichkeit, mit diesem Code einen Gewinn von € 2 zu erzielen, beträgt 4 %.

Es gibt keine weiteren Gewinne.

Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn (in €) für einen Code an.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$0{,}01 \cdot 10 + 0{,}04 \cdot 2 = 0{,}18$
$E(X) = 0{,}18$ €

Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts $E(X)$.

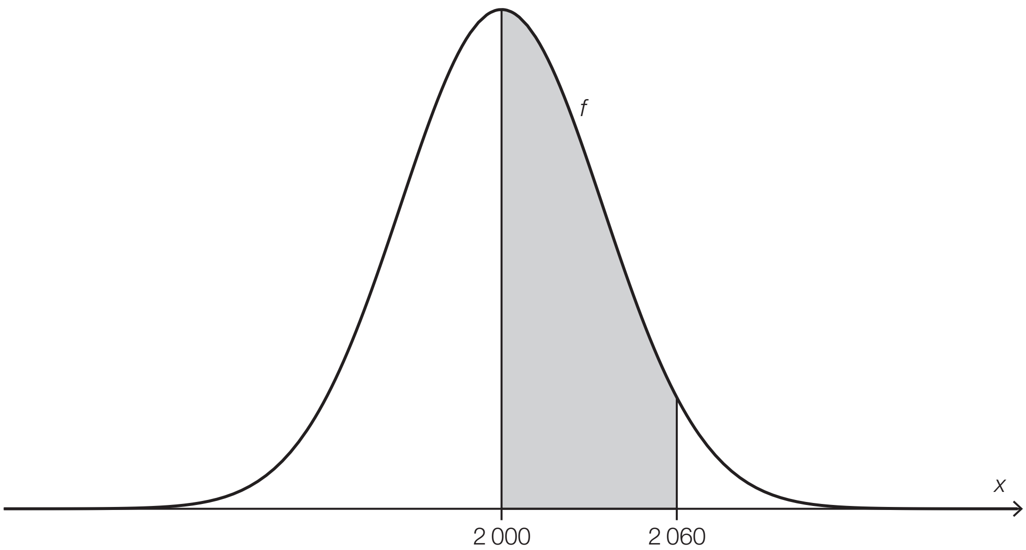
Grundkompetenz: WS 3.1

Kurzsichtigkeit*

Aufgabennummer: 1_876	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: halboffenes Format

Die annähernd normalverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der kurzsichtigen Personen in einer Stichprobe. Die Funktion f ist die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X und hat an der Stelle $x = 2\,000$ ihr Maximum. Der Graph von f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Der Inhalt des grau markierten Flächenstücks beträgt 0,46.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sich unter den Personen in dieser Stichprobe mindestens 2 060 kurzsichtige Personen befinden.

P(„mindestens 2 060 kurzsichtige Personen") = ____________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

P(„mindestens 2 060 kurzsichtige Personen“) = 0,04

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Angeben der richtigen Wahrscheinlichkeit.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wahrscheinlichkeiten einer Zufallsvariablen*

Aufgabennummer: 1_851	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Eine bestimmte Zufallsvariable X kann nur den Wert –4, den Wert 0 oder den Wert 2 annehmen.

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt:

$P(X = -4) = 0{,}3$
$P(X = 0) = a$
$P(X = 2) = b$

Dabei sind a und b positive reelle Zahlen.

Der Erwartungswert von X ist null, also $E(X) = 0$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie a und b an.

a = ____________________________________

b = ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$a = 0{,}1$
$b = 0{,}6$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Wahrscheinlichkeiten*

Aufgabennummer: 1_826	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.1

Die Zufallsvariable X kann ausschließlich die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen.
Es gilt: $P(X = 1) = 0{,}1$ und $P(X > 1) = 0{,}6$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

$P(X \leq 2) = 0{,}3$	☐
$P(X < 2) = 0{,}4$	☐
$P(X = 0) = 0$	☐
$P(X \geq 0) = 0{,}9$	☐
$P(X \geq 1) = 0{,}7$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

$P(X < 2) = 0{,}4$	☒
$P(X \geq 1) = 0{,}7$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Wahrscheinlichkeitsverteilung*

Aufgabennummer: 1_779	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.1

In einer Urne befinden sich ausschließlich weiße und schwarze Kugeln. Drei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der gezogenen weißen Kugeln an.

Durch die nachstehende Tabelle ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X gegeben.

x	1	2	3
$P(X = x)$	0,3	0,6	0,1

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens zwei weiße Kugeln zu ziehen, ist 0,9.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine weiße Kugel zu ziehen, ist 0,3.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, mehr als eine weiße Kugel zu ziehen, ist 0,6.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, genau zwei schwarze Kugeln und eine weiße Kugel zu ziehen, ist 0,1.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen, ist 0,9.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens zwei weiße Kugeln zu ziehen, ist 0,9.	☒
Die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen, ist 0,9.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Spielkarten*

Aufgabennummer: 1_731	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

Fünf Spielkarten (drei Könige und zwei Damen) werden gemischt und verdeckt auf einen Tisch gelegt. Laura dreht während eines Spieldurchgangs nacheinander die Karten einzeln um und lässt sie aufgedeckt liegen, bis die erste Dame aufgedeckt ist.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der am Ende eines Spieldurchgangs aufgedeckten Spielkarten an.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

$E(X)$ = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$E(X) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + 3 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = 2$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Häufigkeit von Nebenwirkungen*

Aufgabennummer: 1_707	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

Pharmaunternehmen sind verpflichtet, alle bekannt gewordenen Nebenwirkungen eines Medikaments im Beipackzettel anzugeben. Die Häufigkeitsangaben zu Nebenwirkungen basieren auf folgenden Kategorien:

Häufigkeitsangabe	Auftreten von Nebenwirkungen
sehr häufig	Nebenwirkungen treten bei mehr als 1 von 10 Behandelten auf.
häufig	Nebenwirkungen treten bei 1 bis 10 Behandelten von 100 auf.
gelegentlich	Nebenwirkungen treten bei 1 bis 10 Behandelten von 1 000 auf.
selten	Nebenwirkungen treten bei 1 bis 10 Behandelten von 10 000 auf.
sehr selten	Nebenwirkungen treten bei weniger als 1 von 10 000 Behandelten auf.
nicht bekannt	Die Häufigkeit von Nebenwirkungen ist auf Grundlage der verfügbaren Daten nicht abschätzbar.

Eine bestimmte Nebenwirkung ist im Beipackzettel eines Medikaments mit der Häufigkeitsangabe „selten" kategorisiert.
Es werden 50 000 Personen unabhängig voneinander mit diesem Medikament behandelt.
Bei einer gewissen Anzahl dieser Personen tritt diese Nebenwirkung auf.

Aufgabenstellung:

Verwenden Sie die obigen Häufigkeitsangaben als Wahrscheinlichkeiten und bestimmen Sie unter dieser Voraussetzung, wie groß die erwartete Anzahl an von dieser Nebenwirkung betroffenen Personen mindestens ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 08. Mai 2019

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl an von dieser Nebenwirkung betroffenen Personen.

$n = 50\,000$
$p = 0{,}0001$
$E(X) = n \cdot p = 50\,000 \cdot 0{,}0001 = 5$

Die erwartete Anzahl an von dieser Nebenwirkung betroffenen Personen ist mindestens 5.

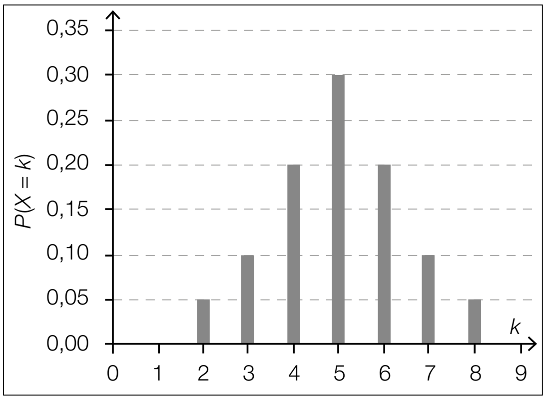
Lösungsschlüssel

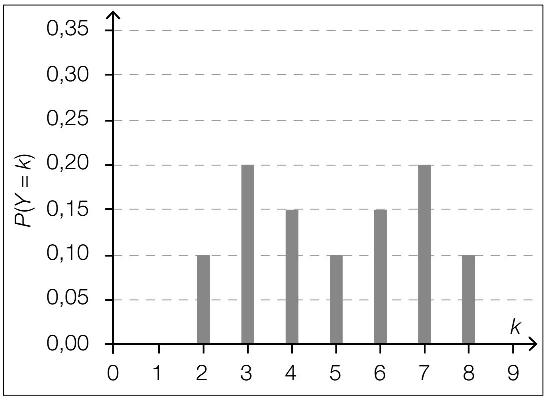
Ein Punkt für die richtige Lösung.

Vergleich zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen*

Aufgabennummer: 1_635	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.1

In den nachstehenden Diagrammen sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen zweier Zufallsvariablen X und Y dargestellt. Die Erwartungswerte der Zufallsvariablen werden mit $E(X)$ und $E(Y)$, die Standardabweichungen mit $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ bezeichnet.





Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$E(X) = E(Y)$	☐
$\sigma(X) > \sigma(Y)$	☐
$P(X \leq 3) < P(Y \leq 3)$	☐
$P(3 \leq X \leq 7) = P(3 \leq Y \leq 7)$	☐
$P(X \leq 5) = 0{,}3$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

$E(X) = E(Y)$	☒
$P(X \leq 3) < P(Y \leq 3)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Wahrscheinlichkeit*

Aufgabennummer: 1_611	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

Die Zufallsvariable X hat den Wertebereich $\{0, 1, \ldots, 9, 10\}$.
Gegeben sind die beiden Wahrscheinlichkeiten $P(X = 0) = 0{,}35$ und $P(X = 1) = 0{,}38$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$!

$P(X \geq 2) =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 0{,}27$

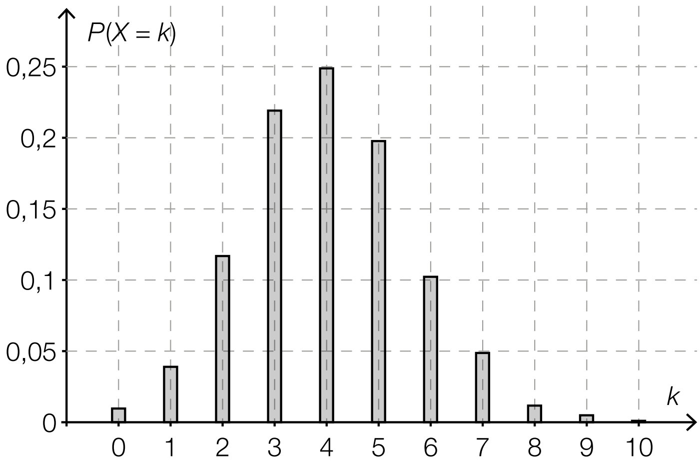
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Wahrscheinlichkeit bestimmen*

Aufgabennummer: 1_587	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

Die nachstehende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X.



Aufgabenstellung:

Geben Sie mithilfe dieser Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(4 \leq X < 7)$ an!

$P(4 \leq X < 7) \approx$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$P(4 \leq X < 7) \approx 0{,}55$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,54; 0,56] bzw. [54 %; 56 %]

Aussagen zu einer Zufallsvariablen*

Aufgabennummer: 1_544	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.1

Die Zufallsvariable X kann nur die Werte 10, 20 und 30 annehmen. Die nachstehende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an, wobei a und b positive reelle Zahlen sind.

k	10	20	30
$P(X = k)$	a	b	a

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der Erwartungswert von X ist 20.	☐
Die Standardabweichung von X ist 20.	☐
$a + b = 1$	☐
$P(10 \leq X \leq 30) = 1$	☐
$P(X \leq 10) = P(X \geq 10)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

Der Erwartungswert von X ist 20.	☒
$P(10 \leq X \leq 30) = 1$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Zufallsexperiment*

Aufgabennummer: 1_519	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.1

Bei einem Zufallsexperiment, das 25-mal wiederholt wird, gibt es die Ausgänge „günstig" und „ungünstig". Die Zufallsvariable X beschreibt, wie oft dabei das Ergebnis „günstig" eingetreten ist.
X ist binomialverteilt mit dem Erwartungswert 10.

Aufgabenstellung:

Zwei der nachstehenden Aussagen lassen sich aus diesen Informationen ableiten. Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$P(X = 25) = 10$	☐
Wenn man das Zufallsexperiment 25-mal durchführt, werden mit Sicherheit genau 10 Ergebnisse „günstig" sein.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Zufallsexperiment „günstig" ausgeht, ist 40 %.	☐
Wenn man das Zufallsexperiment 50-mal durchführt, dann ist der Erwartungswert für die Anzahl der „günstigen" Ergebnisse 20.	☐
$P(X > 10) > P(X > 8)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelnes Zufallsexperiment „günstig“ ausgeht, ist 40 %.	☒
Wenn man das Zufallsexperiment 50-mal durchführt, dann ist der Erwartungswert für die Anzahl der „günstigen“ Ergebnisse 20.	☒

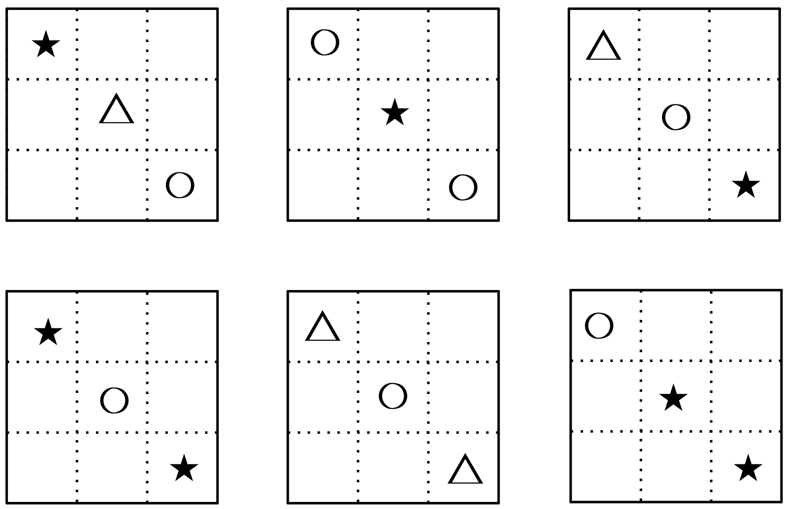
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Zufallsvariable*	
Aufgabennummer: 1_496	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

Nachstehend sind die sechs Seitenflächen eines fairen Spielwürfels abgebildet. Auf jeder Seitenfläche sind drei Symbole dargestellt. (Ein Würfel ist „fair“, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach einem Wurf nach oben zu zeigen, für alle sechs Seitenflächen gleich groß ist.)



Aufgabenstellung:

Bei einem Zufallsversuch wird der Würfel einmal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Sterne auf der nach oben zeigenden Seitenfläche.
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an, d. h. die möglichen Werte von X samt zugehöriger Wahrscheinlichkeiten!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Die Zufallsvariable X kann die Werte $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ annehmen.

Es gilt:
$P(X = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X = 1) = \frac{3}{6}$, $P(X = 2) = \frac{2}{6}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die korrekte Angabe aller möglichen Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann, und der jeweils zugehörigen Wahrscheinlichkeit. Andere Schreibweisen der Ergebnisse sind ebenfalls als richtig zu werten. Eine korrekte grafische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist ebenfalls als richtig zu werten.

Wahrscheinlichkeitsverteilung*

Aufgabennummer: 1_472	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

Der Wertebereich einer Zufallsvariablen X besteht aus den Werten x_1, x_2, x_3.
Man kennt die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_1) = 0{,}4$. Außerdem weiß man, dass x_3 doppelt so wahrscheinlich wie x_2 ist.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie $P(X = x_2)$ und $P(X = x_3)$!

$P(X = x_2)$ = ________________________________

$P(X = x_3)$ = ________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

$P(X = x_2) = 0{,}2$
$P(X = x_3) = 0{,}4$

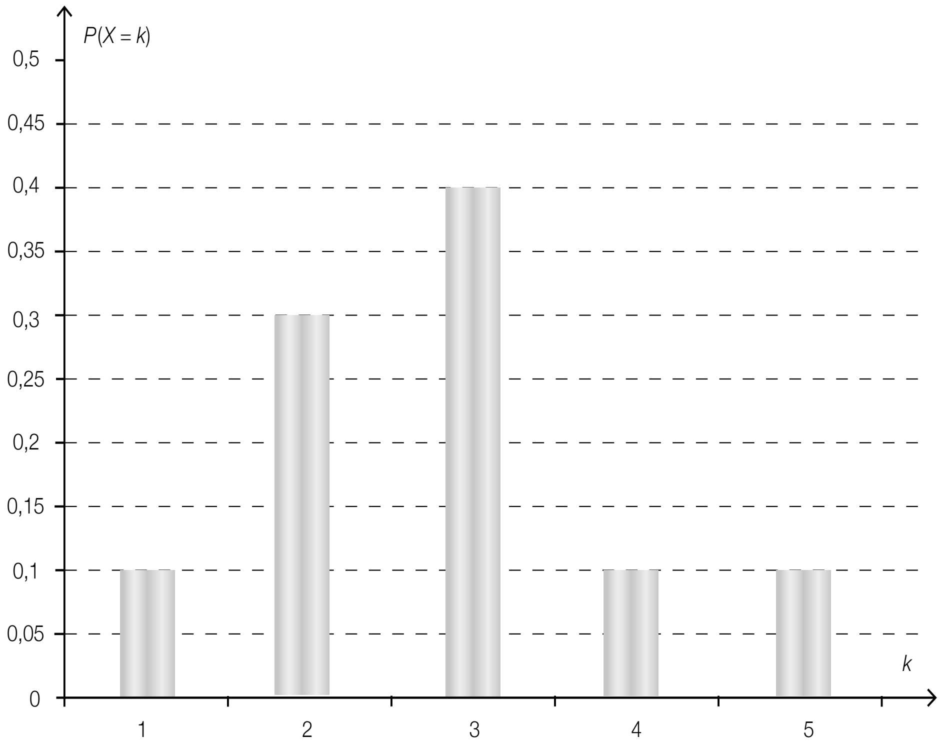
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der korrekten Werte beider Wahrscheinlichkeiten. Andere Schreibweisen der Ergebnisse (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Erwartungswert*

Aufgabennummer: 1_447	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

Die nachstehende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X, die die Werte $k = 1, 2, 3, 4, 5$ annehmen kann.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$E(X) = 2{,}8$

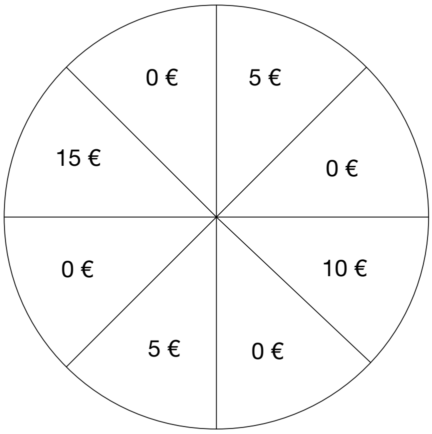
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [2,65; 2,95]

Gewinn beim Glücksrad*

Aufgabennummer: 1_423	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

Das unten abgebildete Glücksrad ist in acht gleich große Sektoren unterteilt, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Für einmaliges Drehen des Glücksrades muss ein Einsatz von 5 € gezahlt werden. Die Gewinne, die ausbezahlt werden, wenn das Glücksrad im entsprechenden Sektor stehen bleibt, sind auf dem Glücksrad abgebildet.



Aufgabenstellung:

Das Glücksrad wird einmal gedreht. Berechnen Sie den entsprechenden Erwartungswert des Reingewinns *G* (in Euro) aus der Sicht des Betreibers des Glücksrades! Der Reingewinn ist die Differenz aus Einsatz und Auszahlungsbetrag.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

$G = 5 - \left(\frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{8} \cdot 10 + \frac{1}{8} \cdot 15\right) = \frac{5}{8} \quad \Rightarrow \quad G \approx 0{,}63$ €

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,62; 0,63]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Erwartungswert des Gewinns*

Aufgabennummer: 1_399	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

Bei einem Gewinnspiel gibt es 100 Lose. Der Lospreis beträgt € 5. Für den Haupttreffer werden € 100 ausgezahlt, für zwei weitere Treffer werden je € 50 ausgezahlt und für fünf weitere Treffer werden je € 20 ausgezahlt. Für alle weiteren Lose wird nichts ausgezahlt. Unter *Gewinn* versteht man *Auszahlung minus Lospreis*.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns aus der Sicht einer Person, die ein Los kauft!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

$E = \frac{1}{100} \cdot 100 + \frac{2}{100} \cdot 50 + \frac{5}{100} \cdot 20 - 5 = -2$

oder:

$E = \frac{92}{100} \cdot (-5) + \frac{5}{100} \cdot 15 + \frac{2}{100} \cdot 45 + \frac{1}{100} \cdot 95 = -2$

Der Erwartungswert des Gewinns beträgt € –2.

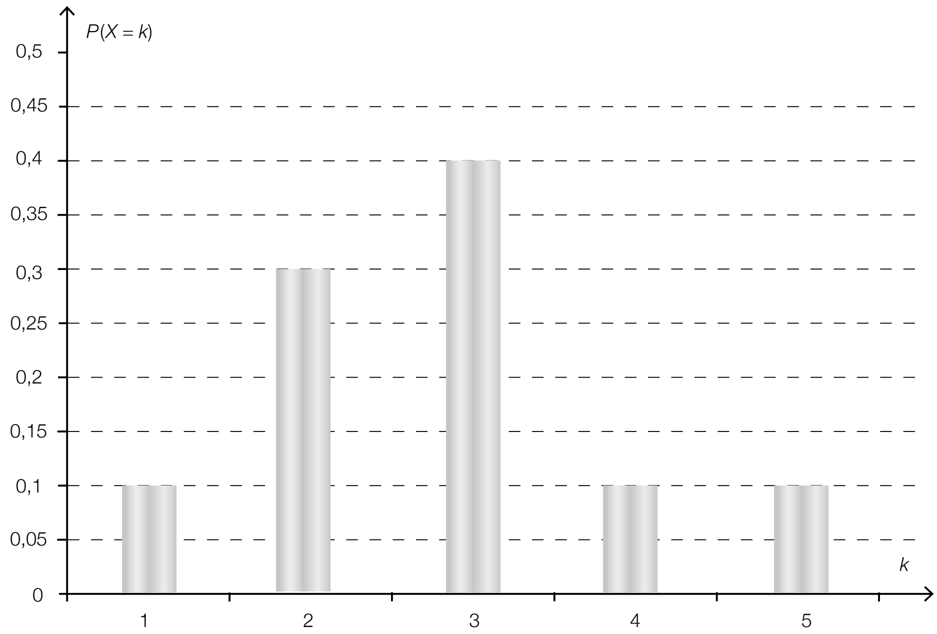
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Euro“ nicht angeführt sein muss.
Der Wert $E = 2$ ist nur dann als richtig zu werten, wenn aus der Antwort klar hervorgeht, dass es sich dabei um einen Verlust von € 2 aus Sicht der Person, die ein Los kauft, handelt.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Erwartungswert*

Aufgabennummer: 1_375	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.1

Die nachstehende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen X, bei der jedem Wert k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ zugeordnet wird.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariablen X!

Lösungserwartung

$E(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}1 = \frac{14}{5} = 2{,}8$

Lösungsschlüssel

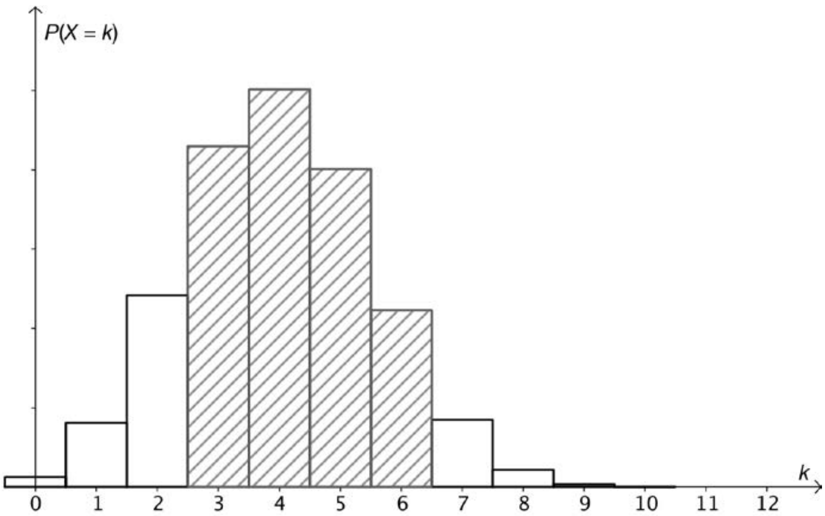
Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede der angeführten Schreibweisen (als Bruch oder Dezimalzahl) ist als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Diskrete Zufallsvariable*

Aufgabennummer: 1_327	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 3.1

Die unten stehende Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen X.



Aufgabenstellung:

Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt die Wahrscheinlichkeit, die dem Inhalt der schraffierten Fläche entspricht?
Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck an!

$1 - P(X \leq 2)$	☐
$P(X \leq 6) - P(X \leq 3)$	☐
$P(X \geq 3) + P(X \leq 6)$	☐
$P(3 \leq X \leq 6)$	☐
$P(X \leq 6) - P(X < 2)$	☐
$P(3 < X < 6)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

$P(3 \leq X \leq 6)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

Computerspiel

Ein bestimmtes Computerspiel besteht aus mehreren Spielrunden.
Bei einer Spielrunde gibt es jeweils 5 Fragen mit jeweils 4 Antwortmöglichkeiten, von denen immer nur 1 Antwortmöglichkeit richtig ist.
Eine Spielrunde gilt als gewonnen, wenn mehr als die Hälfte der Fragen richtig beantwortet wird.
Die 4 Antwortmöglichkeiten sind bei jeder Frage nach dem Zufallsprinzip angeordnet.

Gerhard wählt, ohne die Fragen zu lesen, bei einer bestimmten Spielrunde jedes Mal die erste Antwortmöglichkeit aus.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Gerhard diese Spielrunde gewinnt.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = 0{,}25$

X ... Anzahl der richtigen Antworten

$P(X \geq 3) = 0{,}10351...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Gerhard diese Spielrunde gewinnt, beträgt rund 10,35 %.

Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Grundkompetenz: WS 3.2

Therapie

Die Anwendung einer bestimmten Therapie ist bei 90 % der Personen erfolgreich.
Ein Facharzt wendet diese Therapie bei 30 Personen an.
Die als binomialverteilt angenommene Zufallsvariable X gibt die Anzahl derjenigen Personen an, bei denen die Therapie erfolgreich ist.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl derjenigen Personen, bei denen die Therapie erfolgreich ist, größer als der Erwartungswert $E(X)$ ist.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 30$ und $p = 0,9$:

$E(X) = 27$
$P(X \geq 28) = 0,4113...$

Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Grundkompetenz: WS 3.2

Qualitätssicherung

Im Zuge der Qualitätssicherung bei der Produktion von Porzellanfiguren werden diese nach ihrer Fertigstellung auf Fehler hin überprüft. Erfahrungsgemäß weiß man, dass 2 % der Porzellanfiguren fehlerhaft sind.

Es wird eine Zufallsstichprobe von n Porzellanfiguren entnommen ($n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$). Die Anzahl an fehlerhaften Porzellanfiguren wird als binomialverteilt angenommen.
Das Ereignis, dass mindestens 1 der n Porzellanfiguren fehlerhaft ist, wird mit E bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie mithilfe von n eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ auf.

$P(E) =$ ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$P(E) = 1 - 0{,}98^n$

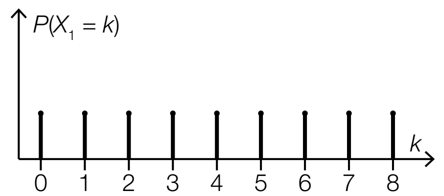
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Binomialverteilung

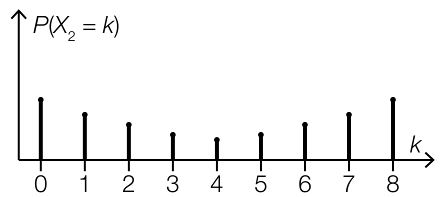
Gegeben sind die fünf Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, X_4 und X_5, die nur ganzzahlige Werte von 0 bis 8 annehmen. Deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind in den unten stehenden Abbildungen dargestellt.

Aufgabenstellung:

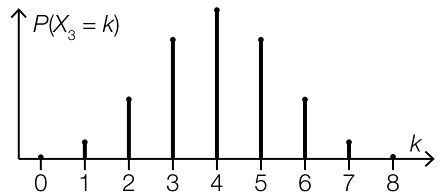
Kreuzen Sie die beiden Abbildungen an, die einer Binomialverteilung entsprechen können.
[2 aus 5]



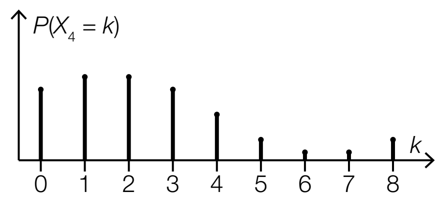
☐



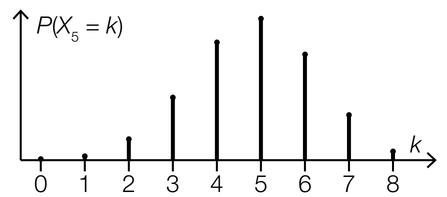
☐



☐



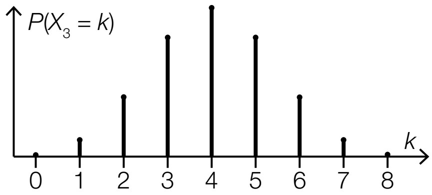
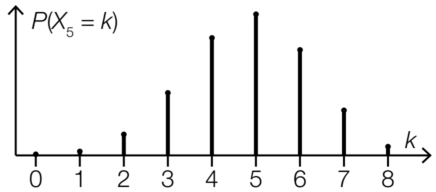
☐



☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

	☒
	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Glücksrad

Bei einem Gewinnspiel wird ein Glücksrad gedreht, das in 24 gleich große Sektoren unterteilt ist. Zwei der Sektoren sind grün, alle anderen rot.

Für jede Drehung gilt:

- Der Zeiger des Glücksrads zeigt auf jeden Sektor mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.
- Zeigt der Zeiger nach der Drehung auf einen grünen Sektor, gewinnt man einen Preis.
- Zeigt der Zeiger nach der Drehung auf einen roten Sektor, gewinnt man keinen Preis.

Das Glücksrad wird n-mal gedreht. Die Ergebnisse der Drehungen sind voneinander unabhängig.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Erwartungswert für die Anzahl der gewonnenen Preise in Abhängigkeit von n an.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$n \cdot \frac{1}{12}$

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Erwartungswerts.

Grundkompetenz: WS 3.2

Binomialverteilte Zufallsvariable

Bei einem bestimmten Zufallsversuch tritt entweder „Erfolg“ oder „Misserfolg“ ein. Dieser Zufallsversuch wird 30-mal durchgeführt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt an, wie oft dabei „Erfolg“ eintritt. Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = 12$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(18 \leq X \leq 20)$.

$P(18 \leq X \leq 20) =$ ___________________________________

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$p = \frac{12}{30} = 0{,}4$

$P(18 \leq X \leq 20) = 0{,}0203...$

Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Binomialverteilte Zufallsvariable*

Aufgabennummer: 1_877	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Ein bestimmter Zufallsversuch mit der unbekannten Erfolgswahrscheinlichkeit p wird 400-mal durchgeführt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt dabei die Anzahl der Erfolge. Für den Erwartungswert gilt: $\mu = 80$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Erfolgswahrscheinlichkeit p sowie die Standardabweichung σ der Zufallsvariablen X.

p = ____________________________________

σ = ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$p = \frac{80}{400} = 0{,}2$

$\sigma = \sqrt{80 \cdot 0{,}8} = 8$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Berechnen der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Rauchverhalten*

Aufgabennummer: 1_852	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	

Laut einer Studie wollen 34 % aller Raucher/innen mit dem Rauchen aufhören.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie den nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang.

$\binom{200}{57} \cdot 0{,}34^{57} \cdot 0{,}66^{143}$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

Der Ausdruck gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass unter 200 zufällig ausgewählten Personen, die rauchen, 57 Personen mit dem Rauchen aufhören wollen.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Würfeln*

Aufgabennummer: 1_374	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Ein fairer Würfel wird zehnmal geworfen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten an, die durch
$1 - \left[\binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \frac{5}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^{10}\right]$ angegeben werden können.

Wahrscheinlichkeit, höchstens acht Sechser zu werfen	☐
Wahrscheinlichkeit, mehr als zweimal keinen Sechser zu werfen	☐
Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal keinen Sechser zu werfen	☐
Wahrscheinlichkeit, weniger als neun Sechser zu werfen	☐
Wahrscheinlichkeit, mehr als acht Sechser zu werfen	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015, adaptiert

Lösungserwartung

Wahrscheinlichkeit, höchstens acht Sechser zu werfen	☒
Wahrscheinlichkeit, weniger als neun Sechser zu werfen	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Berechnen Sie den Umfang n der Zufallsstichprobe.

$n =$ ______________________________

Wurf einer Münze*

Aufgabennummer: 1_804	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Eine Münze zeigt nach einem Wurf entweder *Kopf* oder *Zahl*. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze *Kopf* zeigt, ist bei jedem Wurf genauso hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass sie *Zahl* zeigt. Die Ergebnisse der Würfe sind voneinander unabhängig. Die Münze wird 20-mal geworfen.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesen 20 Würfen die Münze genau 12-mal *Kopf* zeigt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

Die mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Würfe der Münze, bei denen *Kopf* geworfen wird.

$n = 20$
$p = 0{,}5$
$P(X = 12) = \binom{20}{12} \cdot 0{,}5^{12} \cdot 0{,}5^{8} = 0{,}120... \approx 0{,}12$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Zimmerbuchung*

Aufgabennummer: 1_780	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Ein Hotelmanager geht aufgrund langjähriger Erfahrung davon aus, dass jede Zimmerbuchung, die unabhängig von anderen Zimmerbuchungen erfolgte, mit 10%iger Wahrscheinlichkeit storniert wird. Er nimmt für einen bestimmten Termin 40 voneinander unabhängige Zimmerbuchungen an.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an diesem Termin von den 40 Zimmerbuchungen höchstens 5 % storniert werden.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

X ... Anzahl der Zimmerbuchungen (von den 40 Zimmerbuchungen), die storniert werden

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 40$ und $p = 0{,}1$.

$P(X \leq 2) = 0{,}2228... \approx 22{,}3\ \%$

Die Wahrscheinlichkeit, dass an diesem Termin von den 40 Zimmerbuchungen höchstens 5 % storniert werden, beträgt ca. 22,3 %.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Drei Würfe mit einem Kegel*

Aufgabennummer: 1_756	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Wirft man einen Kegel, kann dieser entweder auf der Mantelfläche oder auf der Grundfläche zu liegen kommen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Kegel auf der Grundfläche zu liegen kommt, beträgt bei jedem Wurf unabhängig von den anderen Würfen 30 %.

Der Kegel wird im Zuge eines Zufallsexperiments dreimal geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibt, wie oft der Kegel dabei auf der Grundfläche zu liegen kommt.

Die unten stehende Tabelle soll die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X angeben.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die fehlenden Werte.

X	Wahrscheinlichkeit (gerundet)
0	0,343
1	0,441
2	
3	

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

X	Wahrscheinlichkeit (gerundet)
0	0,343
1	0,441
2	**0,189**
3	**0,027**

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für den ersten Wert: [0,18; 0,19]
Toleranzintervall für den zweiten Wert: [0,02; 0,03]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Pasch*

Aufgabennummer: 1_732	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Bei einem Spiel werden in jeder Spielrunde zwei Würfel geworfen. Zeigen nach einem Wurf beide Würfel die gleiche Augenzahl, spricht man von einem *Pasch*. Die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu werfen, beträgt $\frac{1}{6}$.

Bildquelle: BMBWF

Aufgabenstellung:

Es werden acht Runden (unabhängig voneinander) gespielt. Die Zufallsvariable X bezeichnet dabei die Anzahl der geworfenen Pasche.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass die Anzahl X der geworfenen Pasche unter dem Erwartungswert $E(X)$ liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$\mu = n \cdot p = 8 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$

$P\left(X \leq \frac{4}{3}\right) = P(X \leq 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^8 + 8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0{,}6047$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,6; 0,61]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Trefferwahrscheinlichkeit*

Aufgabennummer: 1_708	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: WS 3.2

Bei einem Training wirft eine Basketballspielerin einen Ball sechsmal hintereinander zum Korb. Fällt der Ball in den Korb, spricht man von einem Treffer. Die Trefferwahrscheinlichkeit dieser Spielerin beträgt bei jedem Wurf 0,85 (unabhängig von den anderen Würfen).

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Ereignissen jeweils denjenigen Term (aus A bis F) zu, der die Wahrscheinlichkeit des Eintretens dieses Ereignisses beschreibt!

Die Spielerin trifft genau einmal.	
Die Spielerin trifft höchstens einmal.	
Die Spielerin trifft mindestens einmal.	
Die Spielerin trifft genau zweimal.	

A	$1 - 0{,}85^6$
B	$0{,}15^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}85^1 \cdot 0{,}15^5$
C	$1 - 0{,}15^6$
D	$0{,}85^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}85^5 \cdot 0{,}15^1$
E	$6 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15^5$
F	$\binom{6}{2} \cdot 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^4$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

Die Spielerin trifft genau einmal.	E
Die Spielerin trifft höchstens einmal.	B
Die Spielerin trifft mindestens einmal.	C
Die Spielerin trifft genau zweimal.	F

A	$1 - 0{,}85^6$
B	$0{,}15^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}85^1 \cdot 0{,}15^5$
C	$1 - 0{,}15^6$
D	$0{,}85^6 + \binom{6}{1} \cdot 0{,}85^5 \cdot 0{,}15^1$
E	$6 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15^5$
F	$\binom{6}{2} \cdot 0{,}85^2 \cdot 0{,}15^4$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Ereignisse ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist. Bei zwei oder drei richtigen Zuordnungen ist ein halber Punkt zu geben.

Computerchips*

Aufgabennummer: 1_683	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Ein Unternehmen stellt Computerchips her. Jeder produzierte Computerchip ist unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 97 % funktionsfähig.
Das Unternehmen produziert an einem bestimmten Tag 500 Computerchips.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl der funktionsfähigen Computerchips, die an diesem bestimmten Tag produziert werden!

Erwartungswert: ____

Standardabweichung: ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Erwartungswert: $500 \cdot 0{,}97 = 485$

Standardabweichung: $\sqrt{500 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}03} \approx 3{,}81$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für die Standardabweichung: [3,8; 3,82]

Binomialverteilung*

Aufgabennummer: 1_660	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: WS 3.2

Der relative Anteil der österreichischen Bevölkerung mit der Blutgruppe „AB Rhesusfaktor negativ" (AB–) ist bekannt und wird mit *p* bezeichnet.
In einer Zufallsstichprobe von 100 Personen soll ermittelt werden, wie viele dieser zufällig ausgewählten Personen die genannte Blutgruppe haben.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier angeführten Ereignissen jeweils denjenigen Term (aus A bis F) zu, der die diesem Ereignis entsprechende Wahrscheinlichkeit angibt!

Genau eine Person hat die Blutgruppe AB–.	
Mindestens eine Person hat die Blutgruppe AB–.	
Höchstens eine Person hat die Blutgruppe AB–.	
Keine Person hat die Blutgruppe AB–.	

A	$1 - p^{100}$
B	$p \cdot (1 - p)^{99}$
C	$1 - (1 - p)^{100}$
D	$(1 - p)^{100}$
E	$p \cdot (1 - p)^{99} \cdot 100$
F	$(1 - p)^{100} + p \cdot (1 - p)^{99} \cdot 100$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

Genau eine Person hat die Blutgruppe AB–.	E
Mindestens eine Person hat die Blutgruppe AB–.	C
Höchstens eine Person hat die Blutgruppe AB–.	F
Keine Person hat die Blutgruppe AB–.	D

A	$1 - p^{100}$
B	$p \cdot (1 - p)^{99}$
C	$1 - (1 - p)^{100}$
D	$(1 - p)^{100}$
E	$p \cdot (1 - p)^{99} \cdot 100$
F	$(1 - p)^{100} + p \cdot (1 - p)^{99} \cdot 100$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Ereignisse ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Massenproduktion*

Aufgabennummer: 1_636	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Bei der Massenproduktion eines bestimmten Produkts werden Packungen zu 100 Stück erzeugt. In einer solchen Packung ist jedes einzelne Stück (unabhängig von den anderen) mit einer Wahrscheinlichkeit von 6 % mangelhaft.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in dieser Packung höchstens zwei mangelhafte Stücke zu finden sind!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

Die (binomialverteilte) Zufallsvariable X (mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}06$) beschreibt die Anzahl der mangelhaften Stücke in dieser Packung.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0{,}057$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Rosenstöcke*

Aufgabennummer: 1_612	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Ein bestimmter Prozentsatz der Stöcke einer Rosensorte bringt gelbe Blüten hervor.
In einem Beet wird eine gewisse Anzahl an Rosenstöcken dieser Sorte gepflanzt. Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt und gibt die Anzahl der gelbblühenden Rosenstöcke an. Dabei beträgt der Erwartungswert für die Anzahl X der gelbblühenden Rosenstöcke 32, und die Standardabweichung hat den Wert 4.

Es wird folgender Vergleich angestellt:
„Die Wahrscheinlichkeit, dass sich in diesem Beet mindestens 28 und höchstens 36 gelbblühende Rosenstöcke befinden, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 32 gelbblühende Rosenstöcke vorhanden sind."

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob dieser Vergleich zutrifft, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

Der Vergleich trifft zu.

Mögliche Begründung:

Erwartungswert: $\mu = 32$, Standardabweichung: $\sigma = 4$

unter Einbeziehung der Wahrscheinlichkeiten für σ-Umgebungen (bei Approximation durch die normalverteilte Zufallsvariable Y):

$P(28 \leq X \leq 36) \approx P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683$

$P(X > 32) \approx P(Y > \mu) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad P(28 \leq X \leq 36) > P(X > 32)$

Weitere Begründungsvarianten:

n … Anzahl der Rosenstöcke

p … Wahrscheinlichkeit für einen gelbblühenden Rosenstock

$\mu = 32 = n \cdot p,\ \sigma^2 = 16 = n \cdot p \cdot (1 - p) \quad \Rightarrow \quad n = 64,\ p = 0{,}5$

- mittels Binomialverteilung:
  $P(28 \leq X \leq 36) \approx 0{,}7396$
  $P(X > 32) \approx 0{,}4503 \quad \Rightarrow \quad P(28 \leq X \leq 36) > P(X > 32)$
- mittels Approximation mit Stetigkeitskorrektur durch die normalverteilte Zufallsvariable Y:
  $P(28 \leq X \leq 36) \approx P(27{,}5 \leq Y \leq 36{,}5) \approx 0{,}7394$
  $P(X > 32) \approx P(Y > 32{,}5) \approx 0{,}4503 \quad \Rightarrow \quad P(28 \leq X \leq 36) > P(X > 32)$
- mittels Approximation ohne Stetigkeitskorrektur durch die normalverteilte Zufallsvariable Y:
  $P(28 \leq X \leq 36) \approx P(28 \leq Y \leq 36) \approx 0{,}6827$
  $P(X > 32) \approx P(Y > 32) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad P(28 \leq X \leq 36) > P(X > 32)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe, dass der Vergleich zutrifft, und eine korrekte Begründung.

Reifen*

Aufgabennummer: 1_588	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein neuer Autoreifen einer bestimmten Marke innerhalb der ersten 10 000 Kilometer Fahrt durch einen Materialfehler defekt wird, liegt bei p %.

Eine Zufallsstichprobe von 80 neuen Reifen dieser Marke wird getestet.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem man die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer dieser Reifen innerhalb der ersten 10 000 Kilometer Fahrt durch einen Materialfehler defekt wird, berechnen kann!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$$1 - \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{80}$$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen korrekten Ausdruck. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Parameter einer Binomialverteilung*

Aufgabennummer: 1_495	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Ein Zufallsexperiment wird durch eine binomialverteilte Zufallsvariable X beschrieben. Diese hat die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}36$ und die Standardabweichung $\sigma = 7{,}2$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den zugehörigen Parameter n (Anzahl der Versuche)!

n = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$n \cdot 0{,}36 \cdot (1 - 0{,}36) = 7{,}2^2$

$n = 225$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Verschiedenfärbige Kugeln*

Aufgabennummer: 1_471	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: WS 3.2

Auf einem Tisch steht eine Schachtel mit drei roten und zwölf schwarzen Kugeln. Nach dem Zufallsprinzip werden nacheinander drei Kugeln aus der Schachtel gezogen, wobei die gezogene Kugel jeweils wieder zurückgelegt wird.

Aufgabenstellung:

Gegeben ist der folgende Ausdruck:

$3 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2$

Kreuzen Sie dasjenige Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch diesen Ausdruck berechnet wird!

Es wird höchstens eine schwarze Kugel gezogen.	☐
Es werden genau zwei schwarze Kugeln gezogen.	☐
Es werden zwei rote Kugeln und eine schwarze Kugel gezogen.	☐
Es werden nur rote Kugeln gezogen.	☐
Es wird mindestens eine rote Kugel gezogen.	☐
Es wird keine rote Kugel gezogen.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

Es werden genau zwei schwarze Kugeln gezogen.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Aussage angekreuzt ist.

Sammelwahrscheinlichkeit bei Überraschungseiern*

Aufgabennummer: 1_422	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Ein italienischer Süßwarenhersteller stellt Überraschungseier her. Das Ei besteht aus Schokolade. Im Inneren des Eies befindet sich in einer gelben Kapsel ein Spielzeug oder eine Sammelfigur. Der Hersteller wirbt für die Star-Wars-Sammelfiguren mit dem Slogan „Wir sind jetzt mit dabei, in jedem 7. Ei!“.

Bildquelle: http://www.eierlei.de/images/news/main_news/strawars_0294968706.jpg [26.05.2015].

Aufgabenstellung:

Peter kauft in einem Geschäft zehn Überraschungseier aus dieser Serie. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Peter mindestens eine Star-Wars-Sammelfigur erhält!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

$1 - \left(\frac{6}{7}\right)^{10}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Dezimalzahl, in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervalle: [0,78; 0,79] bzw. [78 %; 79 %]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Tennisspiel*	
Aufgabennummer: 1_398	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Stefan und Helmut spielen im Training 5 Sätze Tennis. Stefan hat eine konstante Gewinnwahrscheinlichkeit von 60 % für jeden gespielten Satz.

Aufgabenstellung:

Es wird folgender Wert berechnet:

$$\binom{5}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}2304$$

Geben Sie an, was dieser Wert im Zusammenhang mit der Angabe aussagt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

Dieser Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der Helmut 3 von 5 Sätzen im Training gewinnt.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

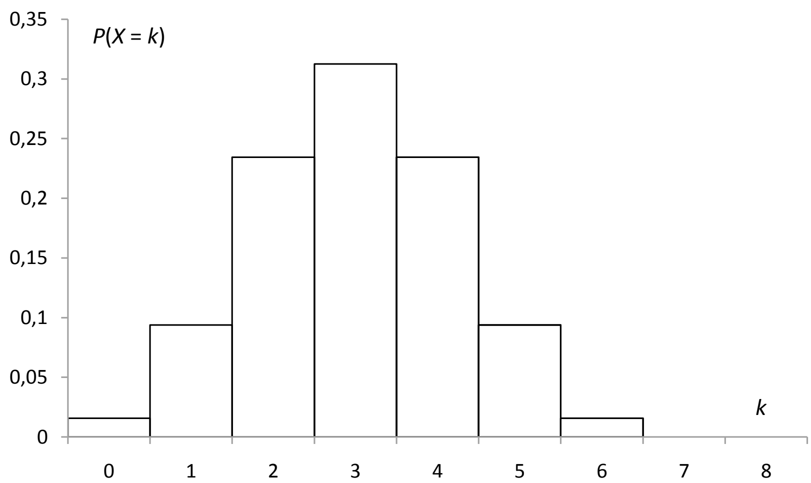
Binomialverteilung*

Aufgabennummer: 1_351	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: WS 3.2

In der untenstehenden Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsvariablen X mit den Parametern $n = 6$ und $p = 0{,}5$ durch ein Säulendiagramm (Säulenbreite = 1) dargestellt. μ bezeichnet den Erwartungswert von X.

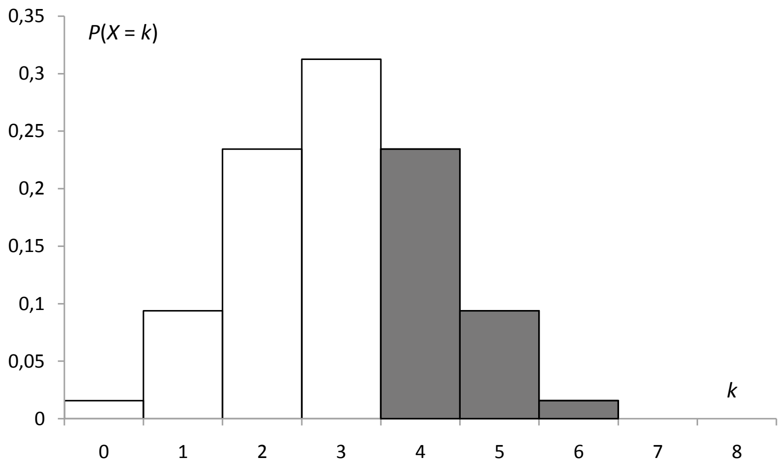
Aufgabenstellung:

Schraffieren Sie diejenigen Rechtecksflächen, die $P(X > \mu)$ veranschaulichen!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede Lösung, die den Bereich $P(X > 3)$ farbig hervorhebt oder deutlich kennzeichnet, ist als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Multiple-Choice-Antwort*

Aufgabennummer: 1_326	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: WS 3.2

Bei einer schriftlichen Prüfung werden der Kandidatin / dem Kandidaten fünf Fragen mit je vier Antwortmöglichkeiten vorgelegt. Genau eine der Antworten ist jeweils richtig.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kandidatin / der Kandidat bei zufälligem Ankreuzen mindestens viermal die richtige Antwort kennzeichnet!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

X ... Anzahl der richtigen Antworten

$$W(X \geq 4) = 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{64} \approx 0{,}02 = 2\ \%$$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede der angeführten Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch, Dezimalzahl oder in Prozenten) ist als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,015; 0,02] bzw. [1,5 %; 2 %]

BMB
Bundesministerium für Bildung

Binomialverteilte Zufallsvariable*

Aufgabennummer: 1_350	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: WS 3.3

In einer Urne befinden sich sieben weiße und drei rote Kugeln, die gleich groß und durch Tasten nicht unterscheidbar sind. Jemand nimmt, ohne hinzusehen, Kugeln aus der Urne.

Aufgabenstellung:

In welchen der folgenden Fälle ist die Zufallsvariable X binomialverteilt?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

X beschreibt die Anzahl der roten Kugeln bei dreimaligem Ziehen, wenn jede entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird.	☐
X beschreibt die Anzahl der weißen Kugeln bei viermaligem Ziehen, wenn die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.	☐
X beschreibt die Anzahl der weißen Kugeln bei fünfmaligem Ziehen, wenn jede entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird.	☐
X beschreibt die Anzahl der Züge, bis die erste rote Kugel gezogen wird, wenn jede entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird.	☐
X beschreibt die Anzahl der Züge, bis alle weißen Kugeln gezogen wurden, wenn die entnommenen Kugeln nicht zurückgelegt werden.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

X beschreibt die Anzahl der roten Kugeln bei dreimaligem Ziehen, wenn jede entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird.	☒
X beschreibt die Anzahl der weißen Kugeln bei fünfmaligem Ziehen, wenn jede entnommene Kugel wieder zurückgelegt wird.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Bienenhaltung in Österreich

Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über die Anzahl der Imker/innen und ihrer Bienenvölker in Österreich im Zeitraum von 2015 bis 2019.

Jahr	Anzahl der Imker/innen	Anzahl der Bienenvölker
2015	26 063	347 128
2016	26 609	354 080
2017	27 580	353 267
2018	28 432	373 412
2019	30 237	390 607

Quelle: https://www.biene-oesterreich.at/daten-und-zahlen+2500++1000247 [10.08.2020].

Aufgabenstellung:

a) Maja führt mit Werten aus der obigen Tabelle die folgende Berechnung durch:

$$\frac{353\,267}{27\,580} \approx 13$$

1) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.
[0/1 P.]

b) Die Anzahl der Imker/innen in Österreich wird in Abhängigkeit von der Zeit t durch die quadratische Funktion f der Form $f(t) = c \cdot t^2 + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ modelliert (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2015).
Die entsprechenden Funktionswerte von f stimmen für die Jahre 2015 und 2019 mit den Werten aus der obigen Tabelle überein.

1) Berechnen Sie c und d. *[0/1 P.]*

c) Niedrige Temperaturen führen zu einer Wintersterblichkeit von Bienenvölkern. Die Anzahl der Bienenvölker würde ohne eine erneute Aufzucht durch die Imker/innen jährlich um durchschnittlich 16 % abnehmen.

Die Anzahl der Bienenvölker in Österreich, die es ohne eine erneute Aufzucht geben würde, wird durch die Exponentialfunktion g beschrieben.

Es gilt:

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2015
$g(t)$ ... Anzahl der Bienenvölker in Österreich zur Zeit t

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von g auf.

$g(t) =$ ____ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeitdauer sich die Anzahl der Bienenvölker in Österreich gemäß der Exponentialfunktion g halbiert. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Im Jahr 2017 betrug die durchschnittliche Anzahl der Bienenvölker pro Imker/in (in Österreich) rund 13.

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) I: $f(0) = 26\,063 = d$
II: $f(4) = 30\,237$

$16 \cdot c + 26\,063 = 30\,237$
$c = 260{,}875$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von c und d.

c1) $g(t) = 347\,128 \cdot 0{,}84^t$

c2) $0{,}5 = 0{,}84^t$
$t = 3{,}9...$

Die Zeitdauer beträgt rund 4 Jahre.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von g.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.

Flugreisen

An den österreichischen Flughäfen werden die Anzahl der Flüge, die Anzahl der Fluggäste sowie die Flugstrecken der Reisenden erfasst.

Datenquelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/verkehr/luftfahrt/personenverkehr/index.html [19.12.2020].

Aufgabenstellung:

a) Die jährliche Anzahl aller Fluggäste in Österreich ist von 0,14 Millionen im Jahr 1955 auf 28,95 Millionen im Jahr 2017 gestiegen.

Diese zeitliche Entwicklung der Anzahl der Fluggäste in Österreich kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion $N\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $N(t) = a \cdot b^t$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1955, $N(t)$ in Millionen Fluggästen).

1) Berechnen Sie a und b. *[0/1 P.]*

Im Jahr 2018 gab es in Österreich 31,73 Millionen Fluggäste.

2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die mit N ermittelte Anzahl der Fluggäste für das Jahr 2018 um weniger als 1 % von der tatsächlichen Anzahl der Fluggäste abweicht. *[0/1 P.]*

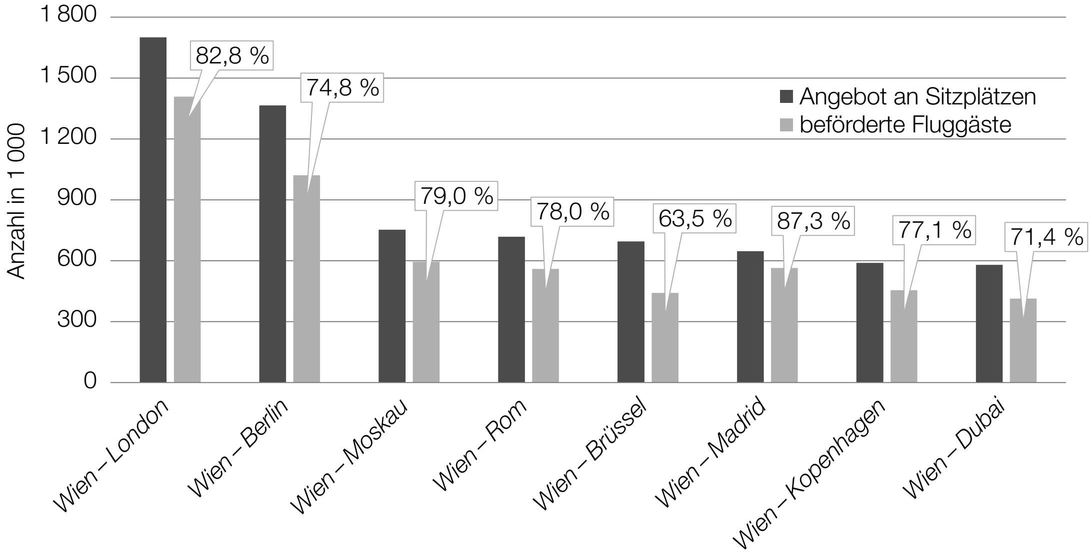
b) Die Anzahl der Flüge bzw. Fluggäste in Österreich ist für die Jahre 2018 und 2019 in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Anzahl der Flüge	Anzahl der Fluggäste
2018	296 852	31 725 019
2019	319 945	36 206 642

Die durchschnittliche Anzahl der Fluggäste pro Flug ist von 2018 auf 2019 um n gestiegen.

1) Berechnen Sie n. *[0/1 P.]*

c) Die unten stehende Abbildung zeigt für das Jahr 2019 die Anzahl der angebotenen Sitzplätze sowie die Anzahl der Fluggäste für Flüge von bzw. nach Wien. Die Prozentsätze geben jeweils den relativen Anteil der durch die Fluggäste besetzten Sitzplätze an.



1) Ordnen Sie den vier Aussagen für das Jahr 2019 jeweils die passende Flugstrecke aus A bis F zu. *[0/½/1 P.]*

Auf dieser Flugstrecke wurden mehr als doppelt so viele Fluggäste befördert wie auf der Flugstrecke *Wien – Moskau*.	
Auf dieser Flugstrecke war die Anzahl der unbesetzten Sitzplätze am kleinsten.	
Auf dieser Flugstrecke war die Anzahl der beförderten Fluggäste größer als 650 000 und kleiner als 1,1 Millionen.	
Auf dieser Flugstrecke war mehr als ein Drittel der angebotenen Sitzplätze unbesetzt.	

A	*Wien – Berlin*
B	*Wien – Madrid*
C	*Wien – Brüssel*
D	*Wien – Kopenhagen*
E	*Wien – London*
F	*Wien – Rom*

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = 0{,}14$

$b = \sqrt[62]{\frac{28{,}95}{0{,}14}} = 1{,}089...$

a2) $\frac{31{,}73 - N(63)}{31{,}73} = 0{,}0056... = 0{,}56...\ \%$

Die mit N ermittelte Anzahl der Fluggäste für das Jahr 2018 weicht um weniger als 1 % von der tatsächlichen Anzahl der Fluggäste ab.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a und b.
a2) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.

b1) $n = \frac{36\,206\,642}{319\,945} - \frac{31\,725\,019}{296\,852} = 6{,}29...$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n.

c1)

Auf dieser Flugstrecke wurden mehr als doppelt so viele Fluggäste befördert wie auf der Flugstrecke *Wien – Moskau*.	E
Auf dieser Flugstrecke war die Anzahl der unbesetzten Sitzplätze am kleinsten.	B
Auf dieser Flugstrecke war die Anzahl der beförderten Fluggäste größer als 650 000 und kleiner als 1,1 Millionen.	A
Auf dieser Flugstrecke war mehr als ein Drittel der angebotenen Sitzplätze unbesetzt.	C

A	*Wien – Berlin*
B	*Wien – Madrid*
C	*Wien – Brüssel*
D	*Wien – Kopenhagen*
E	*Wien – London*
F	*Wien – Rom*

c1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

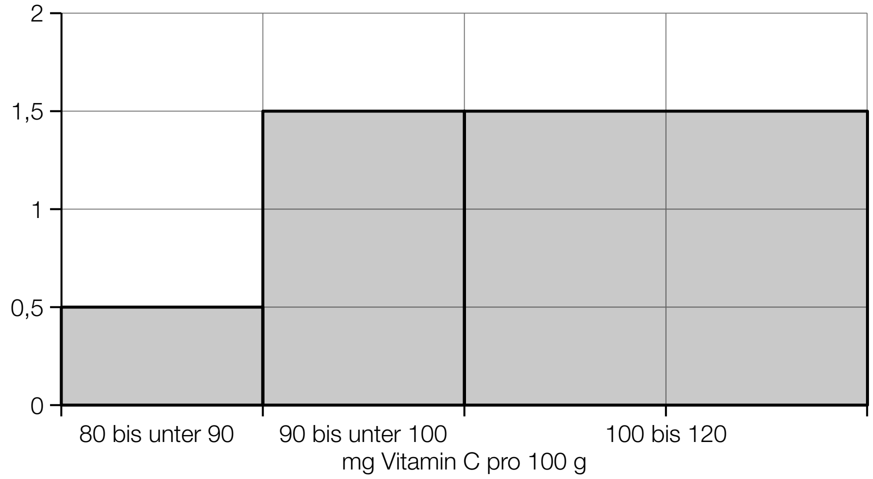
Vitamin C

Vitamin C erfüllt viele wichtige Aufgaben im menschlichen Körper.

Aufgabenstellung:

a) Brokkoli enthält durchschnittlich 100 mg Vitamin C pro 100 g.

Bei einem Gemüsegroßhändler wird eine Zufallsstichprobe von 50 Portionen frischem Brokkoli entnommen und für jede Portion der Vitamin-C-Gehalt pro 100 g gemessen.
Der Flächeninhalt eines Rechtecks im nachstehenden Histogramm entspricht der absoluten Häufigkeit der Portionen dieser Stichprobe im jeweiligen Bereich.



1) Ermitteln Sie die Anzahl der Portionen in der Zufallsstichprobe, die 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g aufweisen. *[0/1 P.]*

Von der Zufallsstichprobe werden 3 Portionen ohne Zurücklegen entnommen.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 dieser Portionen 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g aufweisen. *[0/1 P.]*

b) Ein Getränkehersteller möchte Fruchtsaft so in Flaschen abfüllen, dass jede Flasche 100 mg Vitamin C enthält.

Es stehen zur Verfügung:

- Birnensaft mit 20 mg Vitamin C pro 100 ml
- Orangensaft mit 35 mg Vitamin C pro 100 ml
- Mischungen aus diesen beiden Säften

Emine behauptet, dass der Vitamin-C-Gehalt von 100 mg bei Flaschen mit einem Fassungsvermögen von 250 ml nicht erreicht werden kann.

1) Begründen Sie, warum Emines Behauptung richtig ist. *[0/1 P.]*

Die zur Verfügung stehenden Fruchtsäfte werden so gemischt, dass 350 ml Saft genau 100 mg Vitamin C enthalten.

2) Ermitteln Sie, wie viele Milliliter Birnensaft mit wie vielen Millilitern Orangensaft dafür gemischt werden müssen. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $20 \cdot 1{,}5 = 30$

30 Portionen weisen 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g auf.

a2) $1 - \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{28}{48} = 0{,}7928...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 79,3 %.

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Anzahl.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) 250 ml Orangensaft enthalten nur 87,5 mg Vitamin C und somit weniger als 100 mg.

b2) x ... Menge an Birnensaft in einer Flasche in ml
y ... Menge an Orangensaft in einer Flasche in ml

I: $0{,}2 \cdot x + 0{,}35 \cdot y = 100$
II: $x + y = 350$

$x = 150$
$y = 200$

Es müssen 150 ml Birnensaft mit 200 ml Orangensaft gemischt werden.

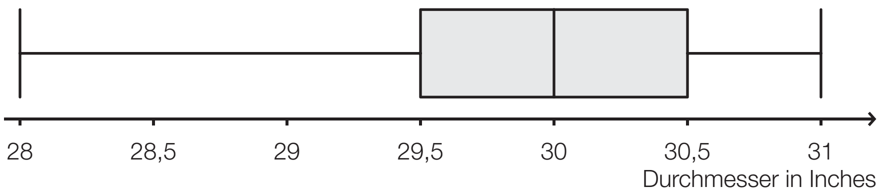
b1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte.

Riesenpizza

Aufgabennummer: 2_085	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 3.3, WS 1.1, WS 1.2	

In den USA wird die Größe einer Pizza durch ihren Durchmesser (in Inches) angegeben. Im Folgenden werden Pizzen immer als kreisrund angenommen.

a) Bei 30-Inch-Pizzen verschiedener Lieferanten wurde der tatsächliche Durchmesser bestimmt. Die Messergebnisse sind im folgenden Boxplot zusammengefasst:



1) Lesen Sie die Spannweite ab.

Der Interquartilsabstand ist die Differenz von 3. und 1. Quartil.

In der Fachliteratur wird ein Wert oft als „Ausreißer nach oben" bezeichnet, wenn dieser Wert weiter als das 1,5-Fache des Interquartilsabstands rechts vom 3. Quartil liegt. Solche Ausreißer sind im obigen Boxplot nicht berücksichtigt.

2) Geben Sie an, ab welchem Durchmesser eine Pizza als „Ausreißer nach oben" bezeichnet wird.

b) 1) Zeigen Sie allgemein, dass der Flächeninhalt einer (kreisrunden) Pizza vervierfacht wird, wenn ihr Durchmesser verdoppelt wird.

c) Für eine bestimmte Pizzasorte wird der Preis pro Flächeneinheit in Abhängigkeit vom Durchmesser modellhaft durch folgende quadratische Funktion P beschrieben:

$P(d) = 0{,}0003 \cdot d^2 - 0{,}015 \cdot d + 0{,}2619$ mit $8 \leq d \leq 30$

d ... Durchmesser der Pizza in Inches
$P(d)$ ... Preis pro Flächeneinheit einer Pizza mit Durchmesser d in US-Dollar

1) Ermitteln Sie, für welchen Durchmesser der Preis pro Flächeneinheit am niedrigsten ist.

Lösungserwartung

a1) Spannweite: 3 Inch

a2) Interquartilsabstand: 30,5 – 29,5 = 1
3. Quartil: 30,5
30,5 + 1,5 · 1 = 32
Eine Pizza wird ab einem Durchmesser von mehr als 32 Inch als „Ausreißer nach oben" bezeichnet.

b1) Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser d: $A_d = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$
Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser $2d$: $A_{2d} = \frac{4d^2}{4} \cdot \pi = d^2 \cdot \pi = 4 \cdot A_d$

Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.

c1) $P'(d) = 0{,}0006 \cdot d - 0{,}015$
$P'(d) = 0 \Rightarrow d = 25$

Die Pizza mit dem niedrigsten Preis pro Flächeneinheit hat einen Durchmesser von 25 Inch.

Tennis

Aufgabennummer: 2_087	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.5, WS 1.1	

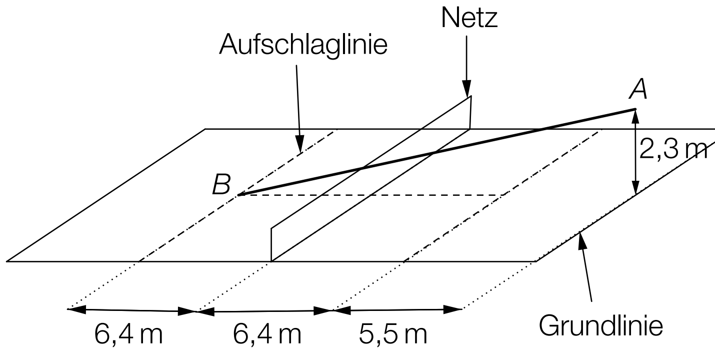
Im Rahmen der Nachwuchsförderung wurden die Leistungen der Teilnehmer eines Tennisturniers genauer beobachtet.

a) Für die Auswertung der Daten der Aufschlaggeschwindigkeit der Teilnehmer wurde der nachstehende Boxplot erstellt.

1) Lesen Sie diejenige Aufschlaggeschwindigkeit ab, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde.

2) Lesen Sie den Quartilsabstand ab.

b) Ein Spieler trifft beim Aufschlag den Ball in einer Höhe von 2,3 m im Punkt *A* genau über der Mitte der Grundlinie. Er visiert den Punkt *B* (Mitte der Aufschlaglinie) an. Um nicht ins Netz zu gehen, muss der Ball das Netz in einer Höhe von mindestens 1 Meter (über dem Boden) überqueren.
Die Flugbahn des Tennisballs beim Aufschlag kann modellhaft mittels einer Gerade beschrieben werden.



1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Aufschlag über das Netz geht.

c) Mithilfe einer Videoanalyse wird ein Grundlinienschlag modelliert.
Die Flugbahn zwischen dem Abschlagpunkt und dem Punkt, in dem der Ball auf dem Boden aufkommt, kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x + \frac{21}{50} \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung zum Abschlagpunkt in Metern (m)
$f(x)$ ... Höhe des Balles an der Stelle x über dem Boden in m

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der obigen Zahl $\frac{21}{50}$ für die Flugbahn.

Lösungserwartung

a1) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde:
120 km/h

a2) Quartilsabstand: 30 km/h

b1) Argumentation mit ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots \text{ m} \approx 0{,}8 \text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

Eine Argumentation mit einer linearen Funktion oder mit Steigungswinkeln ist ebenfalls möglich.

c1) Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

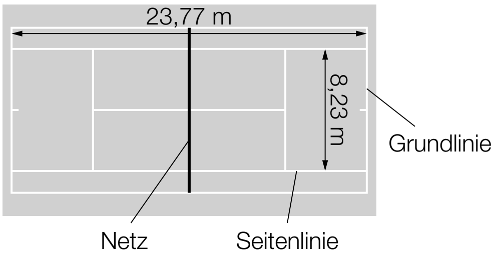
Tennis*

Aufgabennummer: 2_058	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 4.3, WS 1.1

Tennis ist ein Rückschlagspiel zwischen zwei oder vier Personen, bei dem ein Tennisball über ein Netz geschlagen werden muss. Das Spielfeld ist rechteckig und wird durch ein Netz in zwei Hälften geteilt (siehe Abbildung 1). Für ein Spiel zwischen zwei Personen ist der Platz 23,77 m lang und 8,23 m breit. Das Spielfeld wird durch die Grundlinien und die Seitenlinien begrenzt. Das Netz weist eine maximale Höhe von 1,07 m auf.

Abbildung 1:



Aufgabenstellung:

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -0{,}0007 \cdot x^3 + 0{,}005 \cdot x^2 + 0{,}2 \cdot x + 0{,}4$ beschreibt eine Bahnkurve eines Tennisballs bis zu derjenigen Stelle, an der der Tennisball erstmals den Boden berührt. Dabei gibt x die waagrechte Entfernung des Tennisballs vom Abschlagpunkt und $f(x)$ die Flughöhe des Tennisballs über dem Boden an (x und $f(x)$ in m). Die Flugbahn des Tennisballs startet zwischen den Seitenlinien an der Grundlinie und die Ebene, in der die Flugbahn liegt, verläuft parallel zur Seitenlinie des Tennisfelds.

1) Geben Sie an, in welcher waagrechten Entfernung vom Abschlagpunkt der Tennisball seine maximale Höhe erreicht.

   waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ____________________ m

2) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Tennisball im gegnerischen Spielfeld oder hinter der Grundlinie landet.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

b) Fällt ein Tennisball lotrecht (ohne Drehung) auf den Boden, so springt er wieder lotrecht zurück. Der Restitutionskoeffizient r ist ein Maß für die Sprungfähigkeit des Tennisballs.

Es gilt: $r = \frac{v_2}{v_1}$, wobei v_1 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs vor und v_2 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs nach dem Aufprall ist.

Die Differenz der vertikalen Geschwindigkeiten unmittelbar vor und nach dem Aufprall ist aufgrund der unterschiedlichen Bewegungsrichtungen des Tennisballs definiert durch: $\Delta v = v_2 - (-v_1)$.

1) Geben Sie Δv in Abhängigkeit von v_1 und r an.

$\Delta v =$ ____

Ein Tennisball trifft mit $v_1 = 4{,}4$ m/s lotrecht auf dem Boden auf. Der Restitutionskoeffizient beträgt für diesen Tennisball $r = 0{,}6$. Die Kontaktzeit mit dem Boden beträgt 0,01 s.

2) Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung a (in m/s²) des Tennisballs in vertikaler Richtung beim Aufprall (während der Kontaktzeit).

$a =$ ____ m/s²

c) Bei einem Fünf-Satz-Tennismatch gewinnt ein Spieler, sobald er drei Sätze gewonnen hat. Für einen Satzgewinn müssen in der Regel sechs Games gewonnen werden, wobei es für jedes gewonnene Game einen Punkt gibt.

Für unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p für ein gewonnenes Game wurden die daraus resultierenden Wahrscheinlichkeiten m für einen Matchgewinn bei einem Fünf-Satz-Match ermittelt. In der nachstehenden Tabelle sind diese Wahrscheinlichkeiten angeführt.

p	m
0,5	0,5
0,51	0,6302
0,55	0,9512
0,6	0,9995
0,7	1,000

Für ein bestimmtes Fünf-Satz-Match gilt:
Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Game gewinnt, ist um 2 Prozentpunkte höher als die Wahrscheinlichkeit, dass sein Gegenspieler B ein Game gewinnt.

1) Geben Sie an, um wie viel Prozentpunkte die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A dieses Fünf-Satz-Match gewinnt, höher ist als jene für seinen Gegenspieler B.

Gegenüber einem anderen, schwächeren Gegenspieler C hat Spieler A einen Vorteil von 10 Prozentpunkten, ein Game zu gewinnen.

2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Fünf-Satz-Match gegen Gegenspieler C gewinnt, um 50,94 Prozent höher ist als beim Fünf-Satz-Match gegen B.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = 0$

$-0{,}0021 \cdot x^2 + 0{,}01 \cdot x + 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 12{,}42... \quad (x_2 = -7{,}66...)$

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ca. 12,4 m

a2) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 21{,}597... \quad (x_2 = -2{,}15..., x_3 = -12{,}30...)$

Die einzige positive Nullstelle von f ist $x_1 \approx 21{,}6$.

Da das Spielfeld 23,77 m lang ist, landet der Tennisball im gegnerischen Spielfeld.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $\Delta v = r \cdot v_1 + v_1$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$\Delta v = v_1 \cdot (1 + r) = 4{,}4 \cdot (1 + 0{,}6) = 7{,}04$

$a = 7{,}04 : 0{,}01 = 704$

$a = 704 \text{ m/s}^2$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $0{,}6302 - 0{,}3698 = 0{,}2604$

Diese Wahrscheinlichkeit ist um ca. 26 Prozentpunkte höher.

c2) Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Fünf-Satz-Match gegen Spieler C gewinnt: 0,9512

Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Fünf-Satz-Match gegen Spieler B gewinnt: 0,6302

$\frac{0{,}9512}{0{,}6302} = 1{,}50936... \approx 1{,}5094$

$\Rightarrow$ 0,9512 ist um ca. 50,94 Prozent höher als 0,6302.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [12,4 m; 12,5 m]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
a2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für a: [700 m/s^2; 710 m/s^2]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [26; 26,1]
c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wings for Life World Run*

Aufgabennummer: 2_048	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 5.3, AN 1.1, AN 4.3, WS 1.1	

Der *Wings for Life World Run* ist ein in vielen Ländern zur gleichen Zeit stattfindender Volkslauf. Eine Besonderheit dieses Laufs ist, dass keine vorgegebene Distanz zurückgelegt werden muss.

Es starten alle Läufer/innen weltweit gleichzeitig um 11:00 UTC (koordinierte Weltzeit). Vom jeweiligen Startpunkt startet 30 Minuten später ein Auto, das sogenannte *Catcher-Car*, und fährt die Strecke ab. Dabei erhöht sich die Geschwindigkeit des Autos nach einem vorgegebenen Zeitplan. Für jede teilnehmende Person endet der Lauf, wenn sie vom Catcher-Car überholt wird. Das Ergebnis für eine teilnehmende Person ist die Länge derjenigen Strecke, die diese Person bis zum Zeitpunkt des Überholens durch das Catcher-Car zurückgelegt hat.

Für die Geschwindigkeiten des Catcher-Cars wurden bis zum Jahr 2018 folgende Werte vorgegeben (diese dienen modellhaft als Grundlage für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenstellungen):

Uhrzeit	Geschwindigkeit
von 11:30 bis 12:30	15 km/h
von 12:30 bis 13:30	16 km/h
von 13:30 bis 14:30	17 km/h
von 14:30 bis 15:30	20 km/h
von 15:30 bis 16:30	20 km/h
ab 16:30	35 km/h

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Eine Person läuft mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie vom Catcher-Car überholt wird. Diese Person wird während der 15-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Die Laufzeit t der Person hängt von der Geschwindigkeit v der Person ab.

Geben Sie einen Term an, mit dem t bei Kenntnis von v berechnet werden kann (mit t in h und v in km/h)!

t = ____

Im Jahr 2016 betrug die (konstante) Geschwindigkeit einer Person bei diesem Lauf 9 km/h. Ein Jahr später war ihre (konstante) Geschwindigkeit bei diesem Lauf um 10 % höher.

Geben Sie an, um wie viel Prozent sich dadurch die Streckenlänge erhöhte, die diese Person zurücklegte, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde!

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. _______________ %.

b) Eine bestimmte gut trainierte Person läuft während der ersten Stunde mit einer konstanten Geschwindigkeit und benötigt dabei pro Kilometer 5 Minuten. Anschließend wird sie langsamer. Ab diesem Zeitpunkt (also für $t \geq 1$) kann ihre Geschwindigkeit mithilfe der Funktion v in Abhängigkeit von der gelaufenen Zeit modelliert werden. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ gilt:

$v(t) = 12 \cdot 0{,}7^{t-1}$ mit t in h und $v(t)$ in km/h

Deuten Sie den Ausdruck $12 + \int_1^b v(t)\,\mathrm{d}t$ mit $b \geq 1$ im gegebenen Kontext!

Diese Person wird während der 16-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der das Catcher-Car diese Person überholt!

Uhrzeit: __ __ : __ __ UTC

c) Ein Läufer wird während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Juri schließt aus dieser Information, dass dieser Läufer nicht weniger als 40 km und nicht mehr als 88 km zurückgelegt hat, bis er vom Catcher-Car überholt wurde. Leo meint zu dieser Behauptung: „Deine Aussage ist wahr, aber ich könnte ein kleineres Intervall nennen, das ebenso zutrifft."

Geben Sie an, ob die Behauptung von Leo stimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

In Wien legte 2017 die schnellste Teilnehmerin eine Strecke von 51,72 km zurück, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde.

Berechnen Sie ihre durchschnittliche Geschwindigkeit $\overline{v}$!

$\overline{v}$ = ____ km/h

Lösungserwartung

a) möglicher Term:

$v \cdot t = 15 \cdot (t - 0{,}5) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7{,}5}{15 - v}$

mögliche Vorgehensweise:

$s = v \cdot t$

$s = v \cdot \frac{7{,}5}{15 - v}$

$v = 9$ km/h: $s = 11{,}25$ km

$v = 9{,}9$ km/h: $s \approx 14{,}559$ km

$\frac{14{,}559}{11{,}25} \approx 1{,}294$

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. 29,4 %.

b) mögliche Deutung:

Der Ausdruck beschreibt die Streckenlänge, die die Person bis zum Zeitpunkt $t = b$ zurücklegt.

mögliche Vorgehensweise:

$12 + \int_1^b v(t)\,dt = 15 + 16 \cdot (b - 1{,}5) \quad \Rightarrow \quad b \approx 1{,}878$

Die Laufzeit der Person bis zum Zeitpunkt des Überholens beträgt ca. 1 h 53 min.
Uhrzeit: 12:53 UTC

c) Die Behauptung von Leo stimmt.

mögliche Begründung:

Das Catcher-Car legt bis zum Beginn der 20-km/h-Phase 48 km zurück, daher muss der Läufer zumindest 48 km zurückgelegt haben. Das Catcher-Car legt innerhalb der 20-km/h-Phase weitere 40 km zurück, bevor es die 35-km/h-Phase startet. Daher legt der Läufer höchstens 88 km zurück, wenn er in dieser Phase überholt wird. Somit ist es Leo möglich, ein kleineres Intervall anzugeben. (Das kleinstmögliche Intervall beträgt [48 km; 88 km].)

Die Teilnehmerin wurde während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

$t = 3{,}5 + \frac{3{,}72}{20} = 3{,}686$ h

$\bar{v} = \frac{51{,}72}{3{,}686} \approx 14{,}03$ km/h

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [29 %; 30 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für eine richtige Deutung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch 12:52 UTC als richtig zu werten ist.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Behauptung von Leo stimmt, und eine richtige Begründung. Die Begründung ist ausreichend, wenn aus ihr klar hervorgeht, dass die Breite des Intervalls durch Vergrößerung der linken Intervallgrenze verringert werden kann, die Angabe eines konkreten Intervalls ist dafür nicht erforderlich.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [13,5; 14,5]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

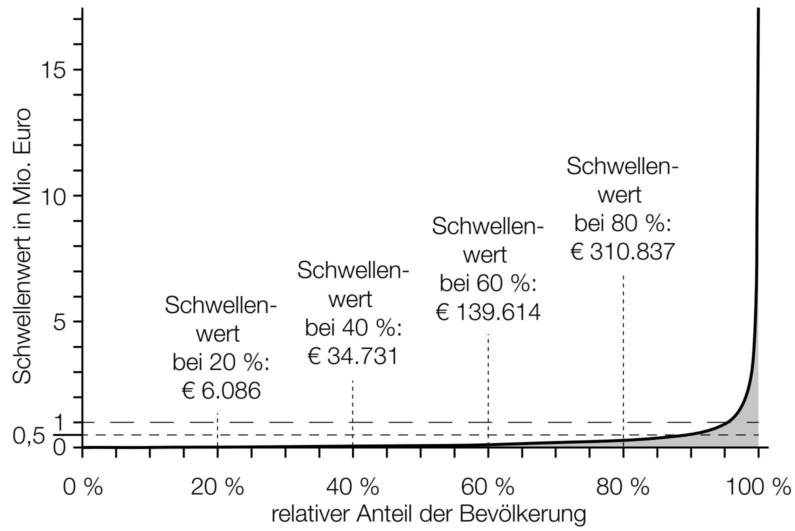
Vermögensverteilung*

Aufgabennummer: 2_043	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 4.3, WS 1.1	

Das gesamte Vermögen eines Landes ist häufig sehr ungleich auf die Bevölkerung verteilt. Eine im Jahr 2012 durchgeführte Erhebung der Europäischen Zentralbank (EZB) lieferte Daten für eine Abschätzung, welcher Anteil der österreichischen Bevölkerung über welches Vermögen (in Millionen Euro) verfügt. Die Ergebnisse der darauf basierenden Studie sind in Abbildung 1 dargestellt. Beispielsweise bedeutet der Schwellenwert bei 20 %, dass die vermögensschwächsten 20 % der österreichischen Bevölkerung ein Vermögen von maximal € 6.086 besitzen.
Im Jahr 2012 betrug die Bevölkerungszahl von Österreich ca. 8,45 Millionen Einwohner/innen.

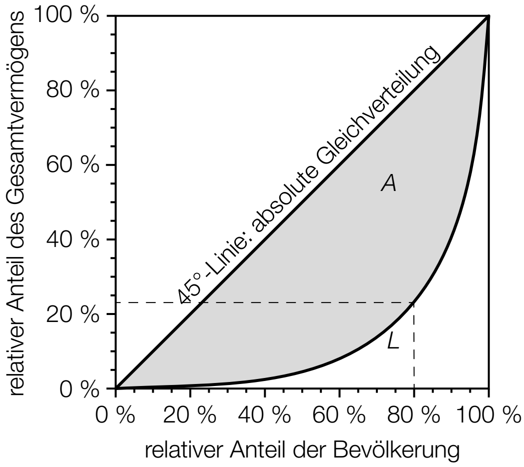
Die sogenannte *Lorenz-Kurve L* (vgl. Abbildung 2) veranschaulicht, welcher relative Anteil der Bevölkerung welchen relativen Anteil des Gesamtvermögens besitzt. So besitzen laut der EZB-Studie die vermögensschwächsten 80 % der österreichischen Bevölkerung nur ca. 23 % des gesamten Vermögens.

Abbildung 1:



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Abbildung 2:



Quelle: Eckerstorfer, Paul, Johannes Halak et al.: *Vermögen in Österreich. Bericht zum Forschungsprojekt „Reichtum im Wandel“.* Linz: Johannes-Kepler-Universität Linz 2013, S. 12 – 13. http://media.arbeiterkammer.at/PDF/Vermoegen_in_Oesterreich.pdf [17.10.2014] (adaptiert).

Der Gini-Koeffizient ist ein Maß für die Ungleichverteilung des Vermögens in einem Land. Er entspricht dem Quotienten aus dem Inhalt der markierten Fläche A (zwischen der 45°-Linie und der Lorenz-Kurve L) und dem Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, das durch die Eckpunkte (0 %|0 %), (100 %|0 %) und (100 %|100 %) festgelegt ist.
Laut EZB-Studie hatte der Gini-Koeffizient für Österreich für das Jahr 2012 den Wert 0,76.

Aufgabenstellung:

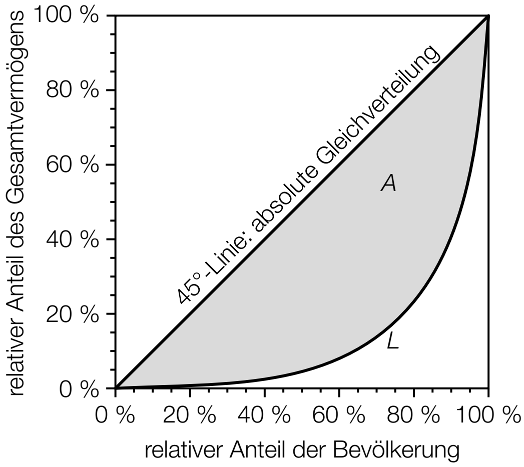
a) Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1, wie viele Personen in Österreich im Jahr 2012 ein Vermögen von mindestens einer Million Euro besaßen!

Berechnen Sie unter der vereinfachenden Annahme, dass die Schwellenwerte im Intervall [20 %; 40 %] annähernd linear zunehmen, einen Näherungswert des Schwellenwerts bei 25 %!

b) Ermitteln Sie, welchen relativen Anteil am Gesamtvermögen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen!

Laut einer Studie der Universität Linz aus dem Jahr 2013 besitzen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung einen deutlich größeren relativen Anteil am Gesamtvermögen, als es in der EZB-Studie behauptet wurde.

Unter Berücksichtigung der Studie der Universität Linz erhält man eine andere Lorenz-Kurve L^* als die abgebildete Lorenz-Kurve L. Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung einen möglichen Verlauf einer solchen Lorenz-Kurve L^*!



c) Die Lorenz-Kurve wird im Intervall [0; 1] durch eine reelle Funktion in Abhängigkeit von x modelliert, wobei x den relativen Anteil der Bevölkerung angibt.

Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten für ein Land S, dessen Lorenz-Kurve für das Jahr 2012 durch die Funktion L_1 mit $L_1(x) = 0{,}9 \cdot x^5 + 0{,}08 \cdot x^2 + 0{,}02 \cdot x$ im Intervall [0; 1] beschrieben werden kann!

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Gini-Koeffizienten für Österreich für das Jahr 2012 und geben Sie an, ob das Gesamtvermögen in diesem Jahr in Österreich oder im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war!

Lösungserwartung

a) Im Jahr 2012 hatten in Österreich ca. 422 500 Personen (laut Abbildung 1: ca. 5 % der Bevölkerung) ein Vermögen von mindestens einer Million Euro.

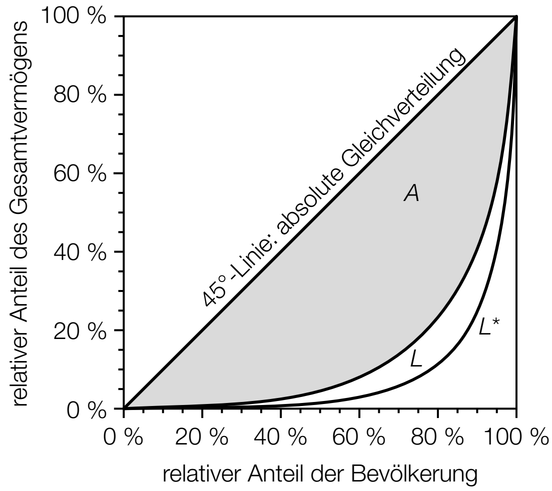
Mögliche Vorgehensweise:

$$6\,086 + \frac{34\,731 - 6\,086}{4} = 13\,247{,}25$$

Der Näherungswert für den Schwellenwert bei 25 % liegt bei ca. € 13.247.

b) Die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen ca. 60 % des Vermögens.

Möglicher Verlauf von L^*:



c) Mögliche Vorgehensweise:

$$0{,}5 - \int_0^1 L_1(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}31\dot{3}$$

$$\frac{0{,}31\dot{3}}{0{,}5} \approx 0{,}63$$

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 hatte für das Land S etwa den Wert 0,63.

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 war für das Land S niedriger als jener für Österreich. Das bedeutet, dass in diesem Jahr das Gesamtvermögen im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war als in Österreich.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch die Angabe des richtigen relativen Anteils als richtig zu werten ist.
Toleranzintervalle: [338 000; 507 000] bzw. [4 %; 6 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [€ 13.200; € 13.325]

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [58 %; 62 %]
– Ein Punkt für einen richtig eingezeichneten Verlauf einer möglichen Lorenz-Kurve L^*, wobei der Funktionswert an der Stelle 90 % kleiner als 42 % sein muss und die Funktion monoton steigend sein muss.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,62; 0,63]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für einen korrekten Vergleich und eine (sinngemäß) richtige Deutung.

Lachsbestand*

Aufgabennummer: 2_039	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.4, FA 1.6, AN 3.3, WS 1.1	

Der kanadische Wissenschaftler W. E. Ricker untersuchte die Nachkommenanzahl von Fischen in Flüssen Nordamerikas in Abhängigkeit von der Anzahl der Fische der Elterngeneration. Er veröffentlichte 1954 das nach ihm benannte Ricker-Modell.
Der zu erwartende Bestand $R(n)$ einer Nachfolgegeneration kann näherungsweise anhand der sogenannten Reproduktionsfunktion R mit $R(n) = a \cdot n \cdot e^{-b \cdot n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ aus dem Bestand n der jeweiligen Elterngeneration ermittelt werden.
Lachse kehren spätestens vier Jahre nach dem Schlüpfen aus dem Meer an ihren „Geburtsort" zurück, um dort zu laichen, d. h., die Fischeier abzulegen. Nach dem Laichen stirbt der Großteil der Lachse.
Ricker untersuchte unter anderem die Rotlachspopulation im Skeena River in Kanada. Die nachstehende Tabelle gibt die dortigen Lachsbestände in den Jahren von 1908 bis 1923 an, wobei die angeführten Bestände Mittelwerte der beobachteten Bestände jeweils vier aufeinanderfolgender Jahre sind.

Zeitraum	beobachteter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1908–31.12.1911	1 098
01.01.1912–31.12.1915	740
01.01.1916–31.12.1919	714
01.01.1920–31.12.1923	615

Datenquelle: http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/s00/math121/lectures/product_rule/product.html [01.02.2018] (adaptiert).

Anhand dieser Daten für den Lachsbestand im Skeena River wurden für die Reproduktionsfunktion R die Parameterwerte $a = 1{,}535$ und $b = 0{,}000783$ ermittelt ($R(n)$ und n in tausend Lachsen).

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie für die Lachspopulation im Skeena River für $n > 0$ mithilfe der Reproduktionsfunktion die Lösung n_0 der Gleichung $R(n) = n$ in tausend Lachsen!

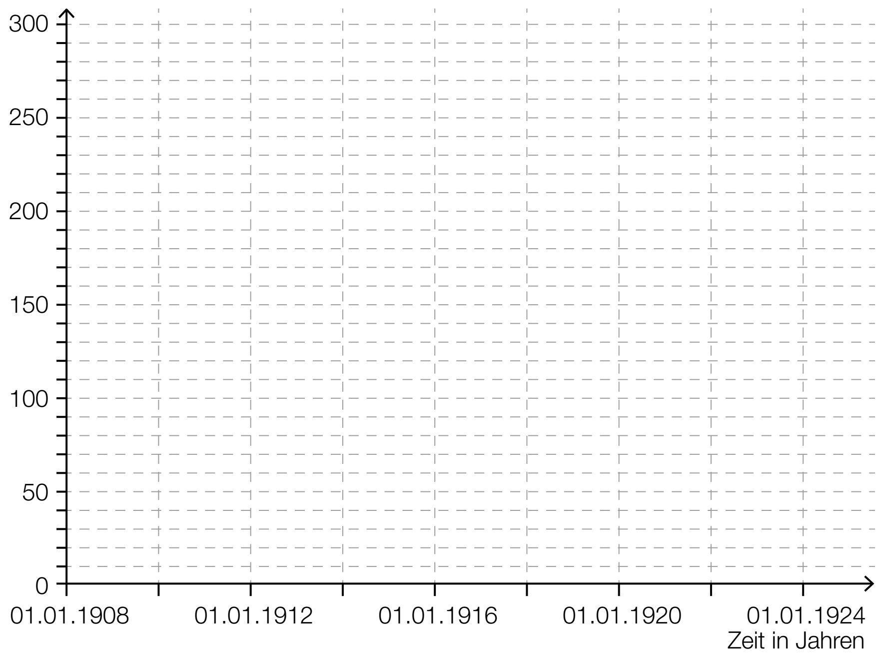
Interpretieren Sie n_0 im gegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extrempunkts $E = (n_E | R(n_E))$ der Reproduktionsfunktion R in Abhängigkeit von a und b und zeigen Sie, dass n_E für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ eine Stelle eines lokalen Maximums ist!

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a der Bestand $R(n_E)$ der Nachfolgegeneration stets größer als der vorherige Bestand n_E ist!

c) Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle der beobachteten Lachsbestände (in tausend Lachsen) durch ein Histogramm dar, wobei die absoluten Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken abgebildet werden sollen!



Das von Ricker entwickelte Modell zählt zu den Standardmodellen zur Beschreibung von Populationsentwicklungen. Dennoch können die mithilfe der Reproduktionsfunktion berechneten Werte mehr oder weniger stark von den beobachteten Werten abweichen.

Nehmen Sie den beobachteten durchschnittlichen Lachsbestand von 1 098 (im Zeitraum von 1908 bis 1911) als Ausgangswert, berechnen Sie damit für die jeweils vierjährigen Zeiträume von 1912 bis 1923 die laut Reproduktionsfunktion zu erwartenden durchschnittlichen Lachsbestände im Skeena River und tragen Sie die Werte in die nachstehende Tabelle ein!

Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912 – 31.12.1915	
01.01.1916 – 31.12.1919	
01.01.1920 – 31.12.1923	

Lösungserwartung

a) $n_0 \approx 547$

Mögliche Interpretation:

Im gegebenen Kontext gibt n_0 denjenigen Lachsbestand an, bei dem die Anzahl der Lachse der Nachfolgegeneration unverändert bleibt.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$R'(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad n_E = \frac{1}{b}$

$R\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b \cdot e}$

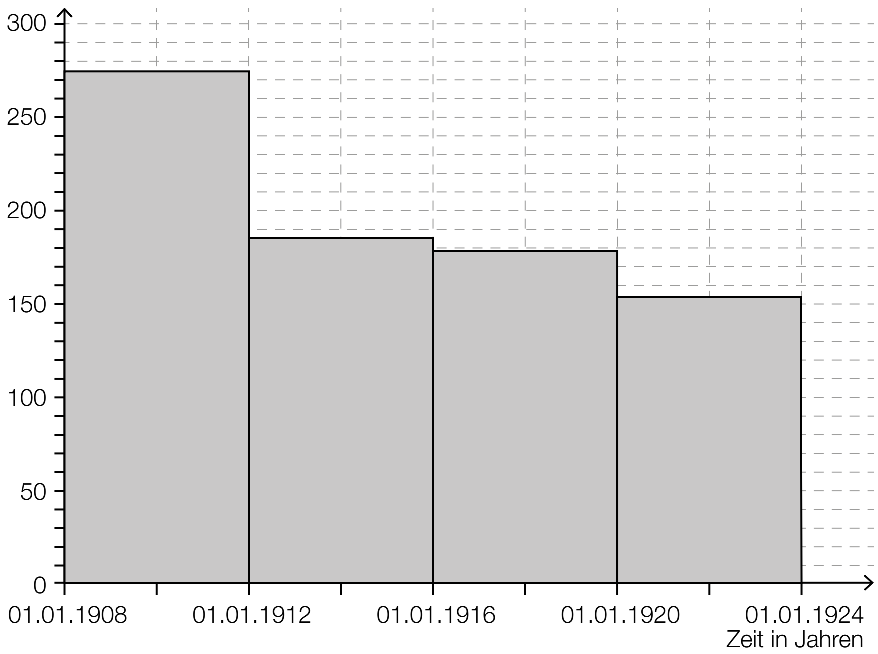
$\Rightarrow \quad E = \left(\frac{1}{b} \middle| \frac{a}{b \cdot e}\right)$

Möglicher Nachweis:

$R''\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{a \cdot b}{e} < 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad$ Maximumstelle

$\frac{a}{b \cdot e} > \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a > e$

c)



Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	713
01.01.1916–31.12.1919	626
01.01.1920–31.12.1923	589

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für den Lachsbestand: [547; 548]
– Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von *E* und einen korrekten Nachweis.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) – Ein Punkt für ein korrektes Histogramm.
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte in der Tabelle.

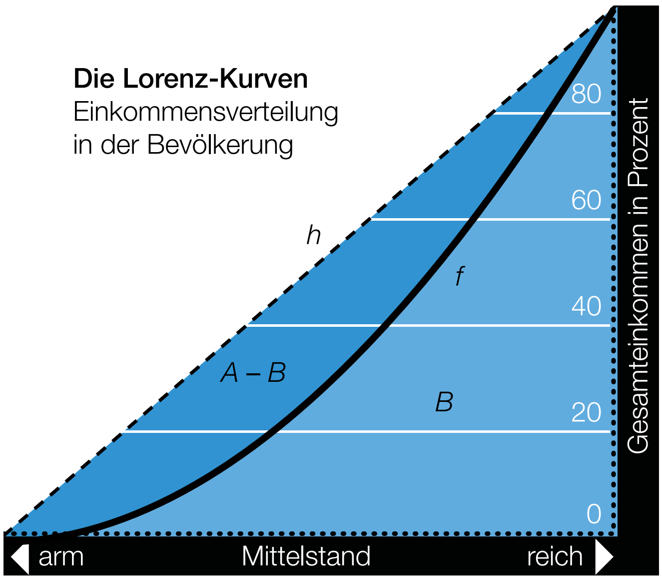
Einkommensverteilung

Aufgabennummer: 2_031	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.4, AN 4.2, AN 4.3, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.2, FA 4.1, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2

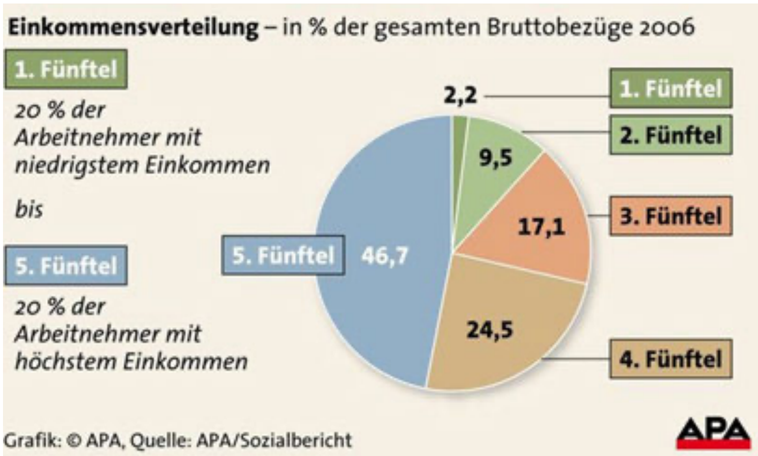
Der Statistiker Max Lorenz beschrieb bereits im Jahr 1905 statistische Verteilungen mithilfe der nach ihm benannten Lorenz-Kurve. Eine Lorenz-Kurve *f* kann z. B. zur Beschreibung der Einkommensverteilung in einem Staat herangezogen werden. Je ausgeprägter ihr „Bauch" ist, desto größer ist der Einkommensunterschied zwischen niedrigem und hohem Einkommen. Die Lorenz-Kurve der Einkommensverteilung eines Staates, in dem alle Personen bis auf eine Person nichts verdienen und diese eine Person alles bekommt, wird in der nachstehenden Grafik durch die punktierten Linien (Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks) dargestellt. Das andere Extrem ist ein Staat, in dem alle Personen gleich viel verdienen. In diesem Fall wird die Lorenz-Kurve zu einer Geraden *h*, welche durch die strichlierte Linie dargestellt ist. Zwischen den beiden Extremen verläuft die Lorenz-Kurve *f* eines Staates.

Jeder Punkt $P = (x \mid f(x))$ auf der Kurve *f* steht für folgende Aussage: „Die einkommensschwächsten x % aller Haushalte beziehen $f(x)$ % des Gesamteinkommens."



Der Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks wird mit A bezeichnet. Der Graph der Lorenz-Kurve f schließt mit den beiden Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks eine Fläche mit Inhalt B ein. Setzt man den Inhalt der Fläche zwischen der Lorenz-Kurve f und der Geraden h mit der Dreiecksfläche A in Bezug, erhält man den Gini-Ungleichheitskoeffizienten $GUK = \frac{A - B}{A}$, eine Zahl zwischen null und eins. Je kleiner der GUK ist, desto gleichmäßiger ist das Gesamteinkommen auf die Bevölkerung verteilt.

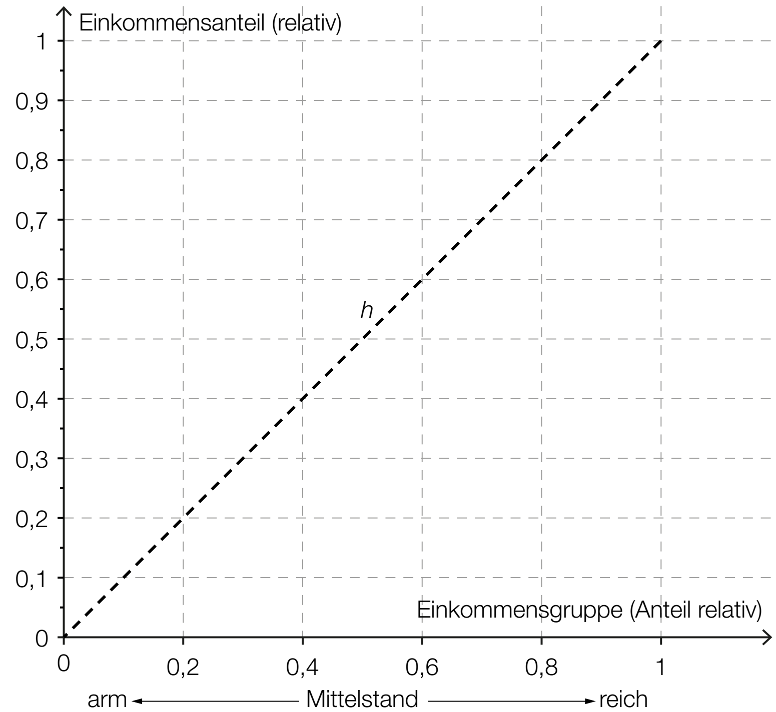
In der nachstehenden Grafik ist die Einkommensverteilung in Österreich in Prozent der gesamten Bruttobezüge im Jahre 2006 dargestellt. Daraus ist z. B. abzulesen, dass jene 20 % der Bevölkerung mit den niedrigsten Bruttoeinkommen nur 2,2 % des Gesamtbruttoeinkommens erhalten haben.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [04.05.2017].

Aufgabenstellung:

a) Zeichnen Sie die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung der Bruttobezüge in Österreich im Jahr 2006 in der nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!



Berechnen Sie mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttobezüge in Österreich für das Jahr 2006!

b) Die Verteilung der Bruttoeinkommen in Österreich im Jahre 2006 soll durch eine Polynomfunktion p so modelliert werden, dass alle Daten, die aus dem Kreisdiagramm aus der Einleitung abgelesen werden können, mit Funktionswerten dieser Polynomfunktion übereinstimmen.

Begründen Sie, welchen Grad die Polynomfunktion p bei konkreter Berechnung (maximal) hat!

Begründen Sie, warum eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht für die Modellierung einer Lorenz-Kurve geeignet ist!

c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}245 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2 + 0{,}155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen GUK!

Geben Sie mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" und die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen" im Vergleich zu den Bruttobezügen im Jahr 2006 in Österreich ändern würden!

d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

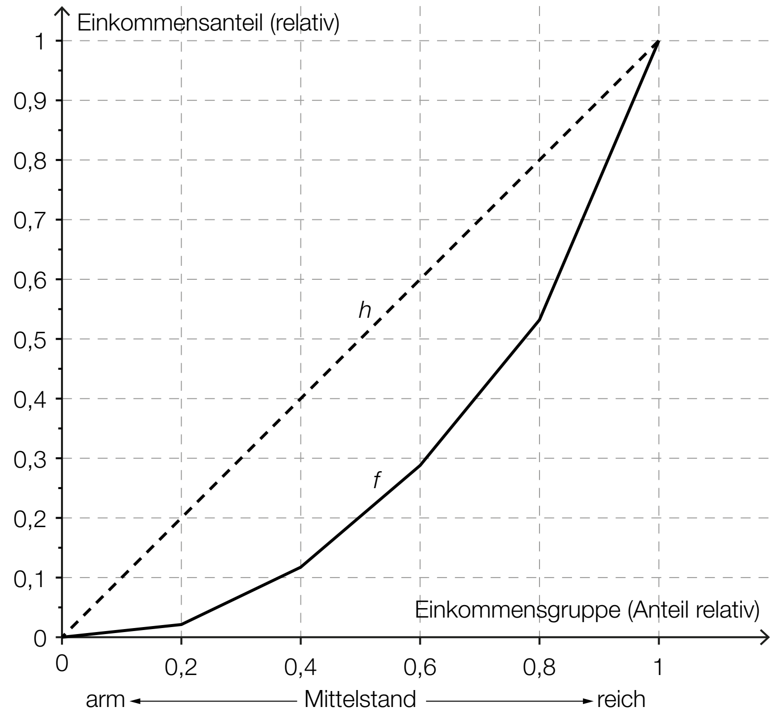
Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Geben Sie an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründen Sie Ihre Wahl!

Geben Sie eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermitteln Sie für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Inhalt der Fläche zwischen dem Polygonzug *f* und der Strecke *h* beträgt 0,208 Flächeneinheiten (die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen der waagrechten Achse und dem Streckenzug kann z. B. aus zwei Dreiecksflächen und drei Trapezflächen erfolgen).

$\Rightarrow \; GUK = \dfrac{0{,}208}{0{,}5} = 0{,}416$

b) Aus den Daten des Kreisdiagramms ergeben sich (für die Argumente $x = 0$, $x = 0{,}2$, $x = 0{,}4$, $x = 0{,}6$, $x = 0{,}8$, $x = 1$) sechs Funktionswerte von p und somit sechs „Bedingungen" für die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Eine Polynomfunktion fünften Grades hat sechs Koeffizienten und ist daher geeignet.
(Anmerkung: Bei „besonderer" Lage der Punkte kann auch ein Grad kleiner als fünf ausreichend sein.)

Jede Lorenz-Kurve verläuft durch den Punkt $(0|0)$. Da eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, ist sie nicht für die Modellierung geeignet.

c) $GUK = \frac{0{,}5 - \int_0^1 \left(0{,}245x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}155x\right) \mathrm{d}x}{0{,}5} = 0{,}3225$

$g(0{,}2) \approx 0{,}057$
$g(0{,}8) \approx 0{,}633$

Der Einkommensanteil der „20 % mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" würde (um ca. 3,5 Prozentpunkte) von 2,2 % auf ca. 5,7 % steigen.

Der Einkommensanteil der „20 % mit den höchsten Bruttoeinkommen" würde (um ca. 10 Prozentpunkte) von 46,7 % auf 36,7 % sinken.

d) $b = 0$, da der Graph durch den Punkt $(0|0)$ verlaufen muss
$a = 1$, da der Graph durch den Punkt $(1|1)$ verlaufen muss

$\frac{0{,}5 - \int_0^1 x^z \, \mathrm{d}x}{0{,}5} < 0{,}26$

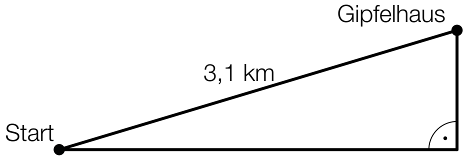
$z \in \left(1; \frac{63}{37}\right)$

Fitnessuhren

Fitnessuhren sind Armbanduhren, die bei sportlichen Aktivitäten verwendet werden können.

Aufgabenstellung:

a) Eine 3,1 km lange Bergtour führt vom Start auf 680 m Seehöhe zu einem Gipfelhaus auf 1 820 m Seehöhe. Der dabei zurückgelegte Weg wird modellhaft als geradlinig mit konstanter Steigung angenommen und ist in der nachstehenden Skizze (nicht maßstabgetreu) dargestellt.



1) Ermitteln Sie die Steigung des Weges.

Steigung: ____________________ % *[0/1 P.]*

b) Die Fitnessuhr *Sporty* ist besonders beliebt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person in Österreich eine Fitnessuhr *Sporty* besitzt, beträgt p.

Im Rahmen einer Studie werden 160 zufällig ausgewählte Personen in Österreich befragt.

Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl derjenigen Personen unter den 160 Befragten an, die eine Fitnessuhr *Sporty* besitzen.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass jedenfalls eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Die Wahrscheinlichkeit, dass von den 160 Befragten niemand eine Fitnessuhr *Sporty* besitzt, beträgt ______①______; mit ______②______ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass von den 160 Befragten mindestens 2 eine Fitnessuhr *Sporty* besitzen.

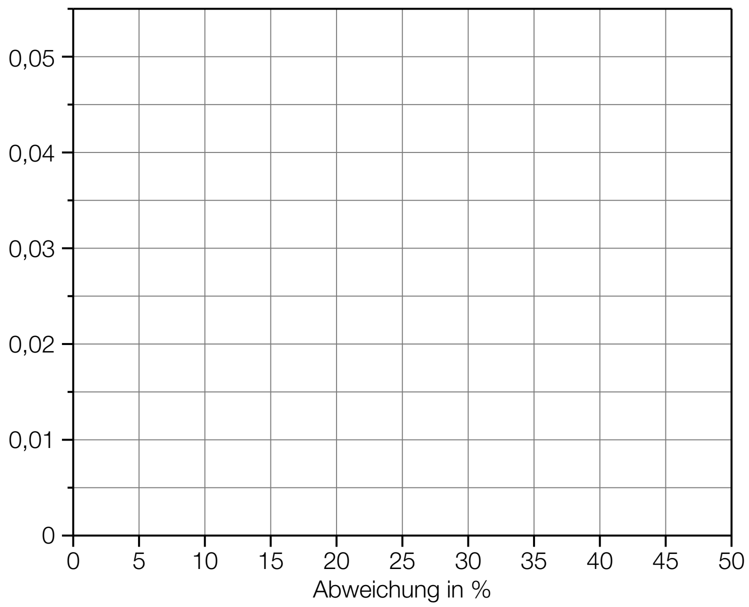
①	
$1 - p$	☐
p^{160}	☐
$(1 - p)^{160}$	☐

②	
$1 - \left[\binom{160}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{160} + \binom{160}{1} \cdot p \cdot (1-p)^{159}\right]$	☐
$\binom{160}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{160} + \binom{160}{1} \cdot p \cdot (1-p)^{159}$	☐
$\binom{160}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{158}$	☐

c) Fitnessuhren zeigen unter anderem den Kalorienverbrauch bei einer sportlichen Aktivität an.
Im Rahmen einer Studie wird bei 60 Personen die prozentuelle Abweichung des tatsächlichen Kalorienverbrauchs bei einer sportlichen Aktivität vom jeweiligen Messergebnis ihrer Fitnessuhren untersucht.
Diese Abweichungen mit den jeweils zugehörigen absoluten Häufigkeiten sind in der nachstehenden Tabelle nach Klassen zusammengefasst.

Abweichung in %	absolute Häufigkeit
[0; 20)	24
[20; 30)	30
[30; 50]	6

1) Erstellen Sie ein Histogramm, in dem für die drei oben angegebenen Klassen die relativen Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken dargestellt sind. *[0/1 P.]*



2) Begründen Sie, warum der Median der Datenliste (die der obigen Tabelle zugrunde liegt) im Intervall [20; 30) liegen muss. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\sqrt{3\,100^2 - 1\,140^2} = 2\,882{,}7...$

$\frac{1\,140}{2\,882{,}7...} = 0{,}395...$

Steigung: 39,5... %

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von a.

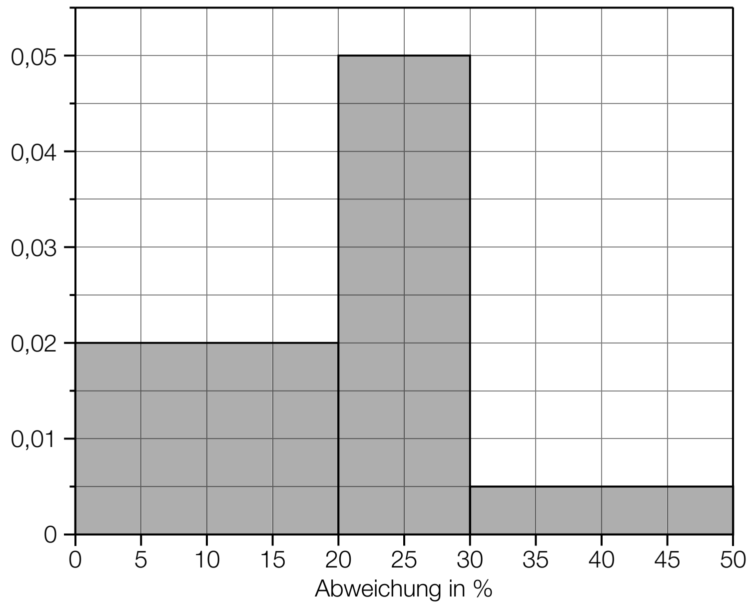
b1)

①	
$(1-p)^{160}$	☒

②	
$1 - \left[\binom{160}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{160} + \binom{160}{1} \cdot p \cdot (1-p)^{159}\right]$	☒

b1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

c1)



c2) Sortiert man die zugrunde liegende Datenliste aufsteigend, dann ist der Median das arithmetische Mittel des 30. und 31. Wertes. Da beide im Intervall [20; 30) liegen, liegt auch das arithmetische Mittel dieser beiden Werte in diesem Intervall.

c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Histogramms.
c2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

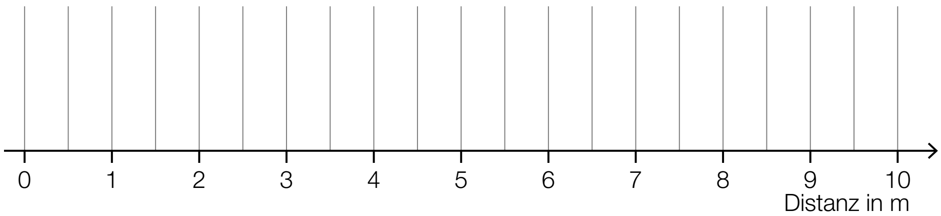
Schwimmkurs

Aufgabenstellung:

a) Eine Schwimmlehrerin notiert bei einem ihrer Kinder-Schwimmkurse die Distanzen, die jedes Kind beim ersten freien Schwimmen zurücklegt. Sie ermittelt daraus die folgenden Werte:

Minimum: 1,5 m
Median: 3 m
3. Quartil: 4 m
Spannweite: 5,5 m
Interquartilsabstand (Differenz von 3. und 1. Quartil): 2 m

1) Erstellen Sie in der nachstehenden Abbildung den dadurch festgelegten Boxplot. *[0/1 P.]*



Bei einem anderen Kinder-Schwimmkurs wurden die geschwommenen Distanzen für 17 Kinder notiert.
Der Median dieser geschwommenen Distanzen beträgt 12 m.

Jemand behauptet, dass 10 Kinder eine Distanz von weniger als 12 m geschwommen sind.

2) Begründen Sie, warum diese Behauptung <u>nicht</u> richtig ist. *[0/1 P.]*

b) Man kann die Kinder einer bestimmten Schwimmgruppe hinsichtlich ihres Verhaltens beim ersten Versuch eines Sprunges vom Beckenrand ins Wasser in 3 Kategorien einteilen:

	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
Kinder, die sofort springen	20	
Kinder, die zögerlich springen		0,4
Kinder, die das Springen verweigern	10	

1) Ergänzen Sie in der obigen Tabelle die 3 fehlenden Werte. *[0/1 P.]*

c) In einer Kiste befinden sich 12 rote, 10 gelbe und 8 blaue Schwimmscheiben. Ein Schwimmlehrer zieht zufällig und ohne Zurücklegen nacheinander 3 Schwimmscheiben aus dieser Kiste. (Bei jeder Ziehung hat jede Schwimmscheibe, die sich noch in der Kiste befindet, die gleiche Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden.)

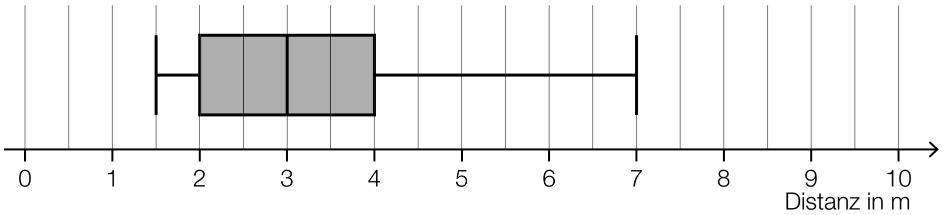
Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass der Schwimmlehrer dabei Schwimmscheiben in 3 unterschiedlichen Farben zieht.

1) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der gleich der Wahrscheinlichkeit ist, die berechnet werden soll. *[1 aus 6]* *[0/1 P.]*

$\frac{12}{30} \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{8}{30}$	☐
$\frac{12}{30} \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{8}{30} \cdot 3$	☐
$\frac{12}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{8}{28}$	☐
$\frac{12}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{8}{28} \cdot 3$	☐
$\frac{12}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{8}{28} \cdot 6$	☐
$\left(\frac{12}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{8}{28}\right)^3$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) Da der Median der geschwommenen Distanzen 12 m beträgt, müssen (bei 17 notierten Distanzen) mindestens 9 Kinder mindestens 12 m geschwommen sein. Daraus folgt, dass höchstens 8 Kinder weniger als 12 m geschwommen sind.

a1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Boxplots.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1)

	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
Kinder, die sofort springen	20	**0,4**
Kinder, die zögerlich springen	**20**	0,4
Kinder, die das Springen verweigern	10	**0,2**

b1) Ein Punkt für das richtige Ergänzen der 3 fehlenden Werte.

c1)

$\frac{12}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{8}{28} \cdot 6$	☒

c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Mathematikwettbewerb

Aufgabennummer: 2_091	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 1.1, WS 1.2, WS 1.3	

Eine Schülergruppe hat an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen.

a) Die 12 Burschen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

32; 38; 40; 52; 53; 54; 56; 60; 61; 64; 66; 84

Nun sollen die Ergebnisse übersichtlich dargestellt werden. Dazu wird die folgende Klasseneinteilung verwendet:

A	30 bis 39
B	40 bis 49
C	50 bis 59
D	60 bis 69
E	70 bis 79
F	80 bis 89

1) Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm, in welchem die Häufigkeiten der jeweiligen Klassen *A* bis *F* dargestellt sind.

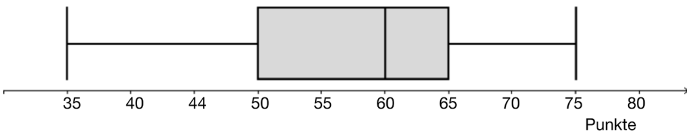
b) Das arithmetische Mittel und der Median für die Punktezahlen der Burschen betragen 55 Punkte.
Die 12 Mädchen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

37; 38; 44; 53; 54; 57; 59; 60; 61; 62; 63; 65

Die Mädchen behaupten, dass sie sowohl beim arithmetischen Mittel als auch beim Median eine größere Punktezahl als die Burschen erreicht haben.

1) Überprüfen Sie nachvollziehbar, ob diese Behauptung richtig ist.

c) Die Punkteverteilung einer anderen Schülergruppe ist in dem nachstehenden Boxplot dargestellt.

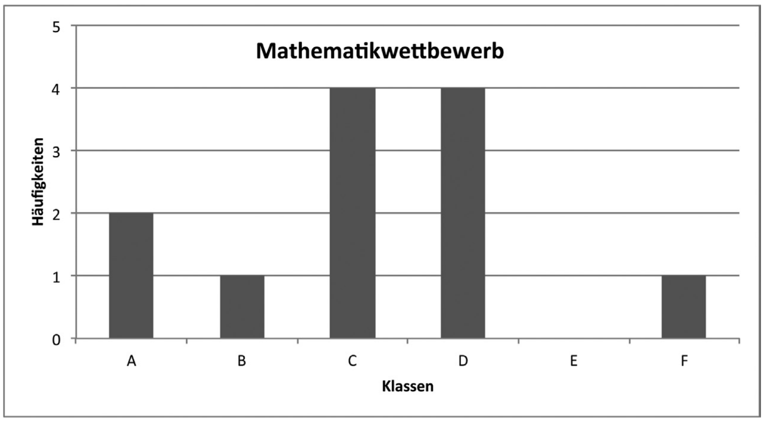


1) Lesen Sie ab, wie viel Prozent der Schüler/innen mindestens 50 Punkte erreicht haben.

2) Ermitteln Sie die Spannweite der Punktezahlen.

Lösungserwartung

a1)



b1) Punktezahlen der Mädchen:
- arithmetisches Mittel: 54,4 Punkte
- Median: 58 Punkte

Die Behauptung ist also falsch.

c1) Die Punktezahl 50 ist das 1. Quartil. Das heißt: Mindestens 75 % der Schüler/innen haben mindestens 50 Punkte erreicht.

c2) Spannweite: 75 – 35 = 40.
Die Spannweite beträgt 40 Punkte.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bevölkerungswachstum in Afrika*

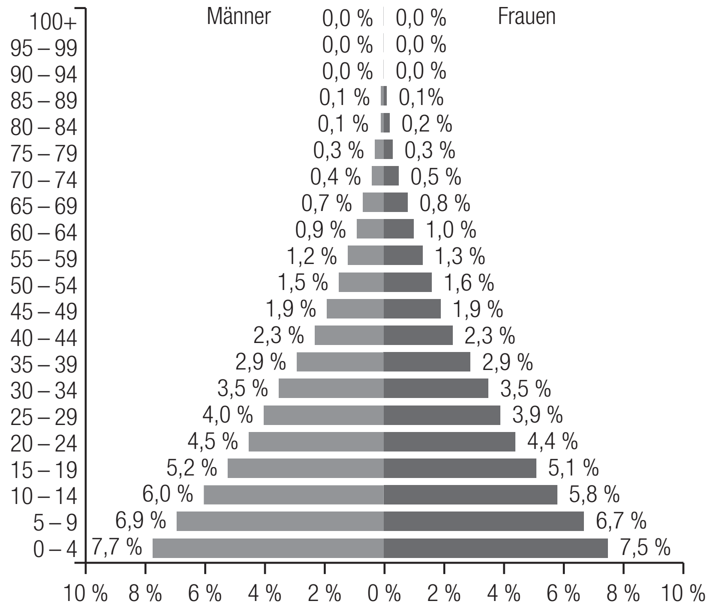
Aufgabennummer: 2_083	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 5.1, FA 5.5, AN 1.1, AN 1.3, WS 1.1, WS 1.3	

Afrika hatte Ende 2018 eine Bevölkerung von ca. 1,3 Milliarden Menschen und verzeichnet derzeit das stärkste Bevölkerungswachstum aller Kontinente.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Aufgabenstellung:

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Alterspyramide der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018.
Der Alterspyramide ist z. B. zu entnehmen, dass im Kalenderjahr 2018 galt: 4,5 % der afrikanischen Bevölkerung sind Männer mit einem Lebensalter von 20 bis 24 Jahren und 4,4 % der afrikanischen Bevölkerung sind Frauen mit einem Lebensalter von 20 bis 24 Jahren. Unter *Lebensalter* versteht man die Anzahl vollendeter Lebensjahre.



Datenquelle: https://www.populationpyramid.net/de/afrika/2018 [10.05.2019].

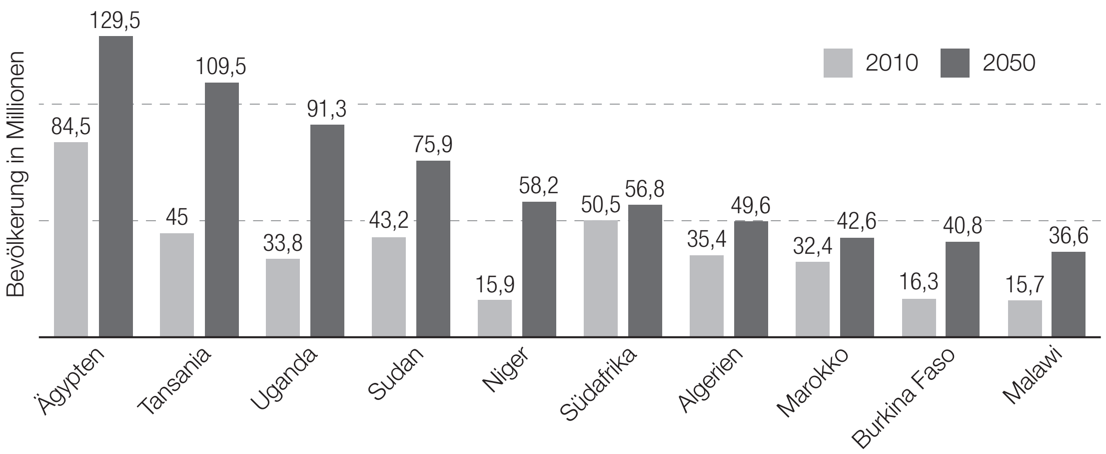
Nehmen Sie modellhaft an, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten.

1) Bestimmen Sie anhand der Alterspyramide den Median m des Lebensalters der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018.

m = ________________________________ Jahre

2) Geben Sie die Anzahl an Afrikanerinnen und Afrikanern an, die im Kalenderjahr 2018 jünger als m Jahre waren.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die prognostizierte Bevölkerungsentwicklung (Angaben in Millionen) im Zeitraum von 2010 bis 2050 in ausgewählten afrikanischen Ländern.



Datenquelle: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/159204/umfrage/prognose-zur-bevoelkerungsentwicklung-in-afrika-bis-2050/ [10.05.2019].

1) Geben Sie von den zehn angeführten Ländern dasjenige Land an, das laut Prognose im Zeitraum von 2010 bis 2050 am stärksten zum absoluten Bevölkerungswachstum in Afrika beitragen wird.

2) Geben Sie von den zehn angeführten Ländern dasjenige Land an, in dem laut Prognose im Zeitraum von 2010 bis 2050 das stärkste relative Bevölkerungswachstum erfolgt.

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung in Nigeria im Zeitraum von 1980 bis 2010.

Kalenderjahr	1980	1990	2000	2010
Bevölkerungszahl in Millionen	73,5	95,3	122,4	158,6

1) Zeigen Sie anhand der Tabelle, dass die Bevölkerungszahl im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd exponentiell zugenommen hat.

Nehmen Sie an, dass die Bevölkerungszahl von Nigeria weiterhin in dieser Art exponentiell wachsen wird.

2) Geben Sie unter Verwendung der Daten aus den beiden Kalenderjahren 2000 und 2010 an, in welchem Kalenderjahr die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen wird.

d) Die nachstehende Tabelle zeigt, wie sich die durchschnittliche Lebenserwartung der afrikanischen Bevölkerung seit 1953 entwickelt hat.

Kalenderjahr	durchschnittliche Lebenserwartung in Jahren
1953	37,5
1958	40,0
1963	42,3
1968	44,4
1973	46,6
1978	48,7
1983	50,5
1988	51,7
1993	51,7
1998	52,3
2003	53,7
2008	57,0
2013	60,2
2018	62,4

1) Berechnen Sie die mittlere jährliche Zunahme k der durchschnittlichen Lebenserwartung im Zeitraum von 1953 bis 2018.

Es wird angenommen, dass die durchschnittliche Lebenserwartung in Afrika nach dem Kalenderjahr 2018 konstant pro Jahr um den berechneten Wert k zunimmt.
Im Kalenderjahr 2018 betrug die durchschnittliche Lebenserwartung in Europa 78,5 Jahre.

2) Geben Sie an, in welchem Kalenderjahr die durchschnittliche Lebenserwartung in Afrika unter dieser Annahme den Wert für Europa im Kalenderjahr 2018 erreichen würde.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) m = 19 Jahre

a2) Aufgrund der Annahme, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten, sind 4,16 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Männer im Alter von 15 bis 18 Jahren und 4,08 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Frauen im Alter von 15 bis 18 Jahren.
7,7 % + 7,5 % + 6,9 % + 6,7 % + 6,0 % + 5,8 % + 4,16 % + 4,08 % = 48,84 %
$1{,}3 \cdot 10^9 \cdot 0{,}4884 = 6{,}3492 \cdot 10^8 \approx$ 635 Millionen Menschen

b) **Lösungserwartung:**

b1) Tansania

b2) Niger

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Begründungen:
Die (mittleren) jährlichen Wachstumsraten sind im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd konstant:
1980 bis 1990: ca. 2,6 %
1990 bis 2000: ca. 2,5 %
2000 bis 2010: ca. 2,6 %

oder:

Die prozentuellen Wachstumsraten sind in den 10-Jahres-Zeiträumen von 1980 bis 2010 annähernd konstant:
1980 bis 1990: ca. 30 %
1990 bis 2000: ca. 28 %
2000 bis 2010: ca. 30 %

oder:

Die gegebenen Daten können gut mit einer Exponentialfunktion N mit der Gleichung $N(t) = N_0 \cdot 1{,}026^t$ beschrieben werden. Die Funktionswerte weichen nur geringfügig von den Tabellenwerten ab.

c2) $360 = 122{,}4 \cdot 1{,}0262...^t \quad \Rightarrow \quad t = 41{,}6... \approx 42$
Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2042 die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen.

d) **Lösungserwartung:**

d1) $k = \frac{62{,}4 - 37{,}5}{65} = 0{,}3830\ldots \quad \Rightarrow \quad k \approx 0{,}383$ Lebensjahre pro Kalenderjahr

d2) $62{,}4 + t \cdot 0{,}3830\ldots = 78{,}5$
$t = 42{,}028\ldots \approx 42{,}03$
Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2060 in Afrika die durchschnittliche Lebenserwartung den Wert 78,5 Jahre erreichen.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.
b2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.

c1) Ein Punkt für eine richtige Begründung.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch das Kalenderjahr 2041 als richtig zu werten ist.

d1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Lebensjahre pro Kalenderjahr" nicht angegeben sein muss.
d2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Kalenderjahrs, wobei auch die Kalenderjahre 2058, 2059 und 2061 als richtig zu werten sind.

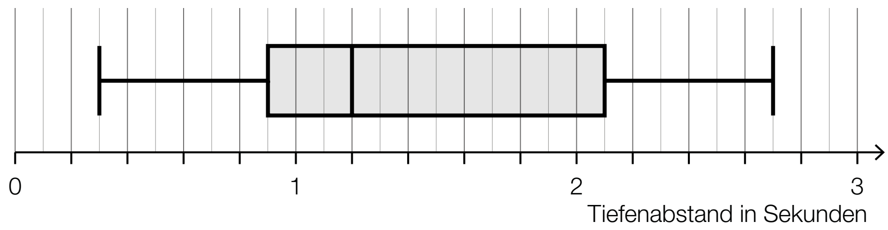
Abstandsmessung*

Aufgabennummer: 2_035	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, FA 2.1, WS 1.1, WS 1.3, WS 1.4, WS 3.2	

Im Rahmen der polizeilichen Kontrollmaßnahmen des öffentlichen Verkehrs werden Abstandsmessungen vorgenommen. Im Folgenden beschreibt der Begriff *Abstand* eine Streckenlänge und der Begriff *Tiefenabstand* eine Zeitspanne.

Beträgt der Abstand zwischen dem hinteren Ende des voranfahrenden Fahrzeugs und dem vorderen Ende des nachfahrenden Fahrzeugs Δs Meter, so versteht man unter dem Tiefenabstand diejenige Zeit t in Sekunden, in der das nachfahrende Fahrzeug die Strecke der Länge Δs zurücklegt.

Nachstehend sind Tiefenabstände, die im Rahmen einer Schwerpunktkontrolle von 1 000 Fahrzeugen ermittelt wurden, in einem Kastenschaubild (Boxplot) dargestellt. Alle kontrollierten Fahrzeuge waren mit einer Geschwindigkeit von ca. 130 km/h unterwegs.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie das erste Quartil q_1 und das dritte Quartil q_3 der Tiefenabstände an und deuten Sie den Bereich von q_1 bis q_3 im gegebenen Kontext!

Nach den Erfahrungswerten eines österreichischen Autofahrerclubs halten ungefähr drei Viertel der Kraftfahrer/innen bei einer mittleren Fahrgeschwindigkeit von ca. 130 km/h einen Abstand von mindestens 30 Metern zum voranfahrenden Fahrzeug ein. Geben Sie an, ob die im Kastenschaubild dargestellten Daten in etwa diese Erfahrungswerte bestätigen oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

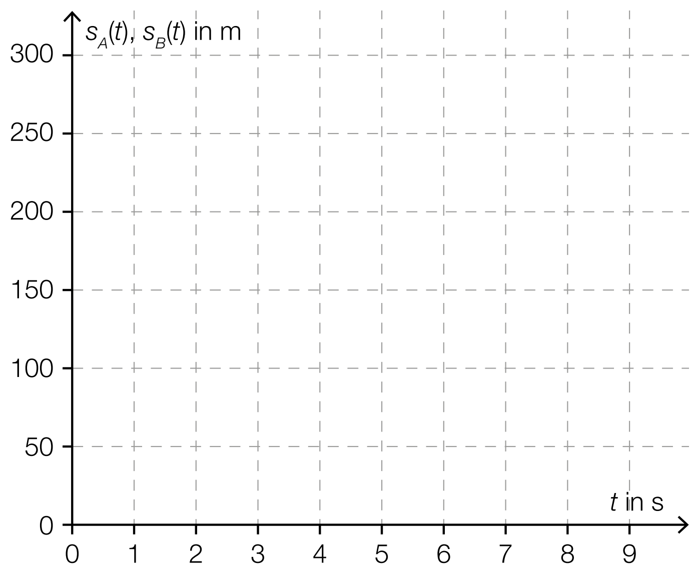
b) Einer üblichen Faustregel zufolge wird auf Autobahnen generell ein Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden empfohlen. Jemand behauptet, dass aus dem dargestellten Kastenschaubild ablesbar ist, dass mindestens 20 % der Kraftfahrer/innen diesen Tiefenabstand eingehalten haben. Geben Sie einen größeren Prozentsatz an, der aus dem Kastenschaubild mit Sicherheit abgelesen werden kann, und begründen Sie Ihre Wahl!

Nehmen Sie den von Ihnen ermittelten Prozentsatz als Wahrscheinlichkeit an, dass der empfohlene Tiefenabstand eingehalten wird.
Geben Sie an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zehn zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Messungen dieser Schwerpunktkontrolle zumindest sechs Mal der empfohlene Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden eingehalten wurde!

c) Bei einer anderen Abstandsmessung wird ein kontrolliertes Fahrzeug auf den letzten 300 Metern vor der Messung zusätzlich gefilmt, damit die Messung nicht verfälscht wird, wenn sich ein anderes Fahrzeug vor das kontrollierte Fahrzeug drängt.

Fahrzeug A fährt während des Messvorgangs mit konstanter Geschwindigkeit und benötigt für die gefilmten 300 Meter eine Zeit von neun Sekunden. Stellen Sie den zurückgelegten Weg $s_A(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t im unten stehenden Zeit-Weg-Diagramm dar ($s_A(t)$ in Metern, t in Sekunden) und geben Sie an, mit welcher Geschwindigkeit in km/h das Fahrzeug unterwegs ist!

Ein Fahrzeug B legt die 300 Meter ebenfalls in neun Sekunden zurück, verringert dabei aber kontinuierlich seine Geschwindigkeit. Skizzieren Sie ausgehend vom Ursprung einen möglichen Graphen der entsprechenden Zeit-Weg-Funktion s_B in das unten stehende Zeit-Weg-Diagramm!



Lösungserwartung

a) $q_1 = 0{,}9$
$q_3 = 2{,}1$
Etwa die Hälfte der kontrollierten Fahrzeuge halten einen Tiefenabstand von mindestens 0,9 Sekunden und höchstens 2,1 Sekunden ein.

Die im Kastenschaubild dargestellten Daten bestätigen in etwa diese Erfahrungswerte.

Mögliche Begründung:

130 km/h = $36{,}\dot{1}$ m/s
$36{,}\dot{1}$ m/s · 0,9 s = 32,5 m ⇒ Mindestens drei Viertel der Kraftfahrer/innen halten einen Abstand von 30 m und mehr ein.

b) ein möglicher größerer Prozentsatz: 25 %

Mögliche Begründung:

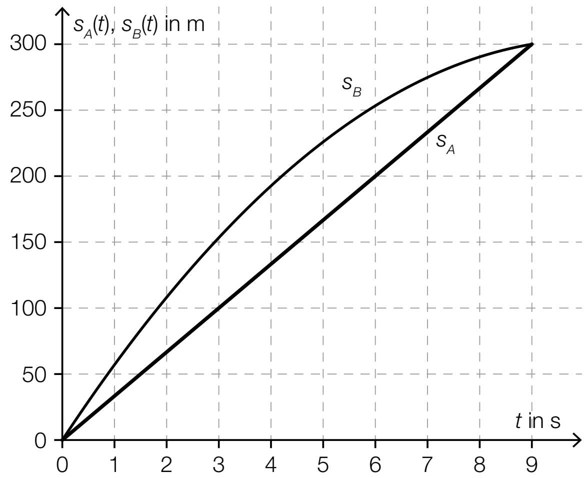
Der Tiefenabstand von zwei Sekunden liegt zwischen dem Median und dem dritten Quartil.

Mögliche Vorgehensweise:

Zufallsvariable X = Anzahl der Kraftfahrlenker/innen, die den empfohlenen Mindestabstand eingehalten haben

$p = 0{,}25$ ... Wahrscheinlichkeit, dass der empfohlene Mindestabstand eingehalten wurde
$n = 10$ ... Anzahl der ausgewählten Messungen
$P(X \geq 6) \approx 0{,}0197$

c) Fahrzeug A fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.



Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
   – Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine korrekte Begründung.
   Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

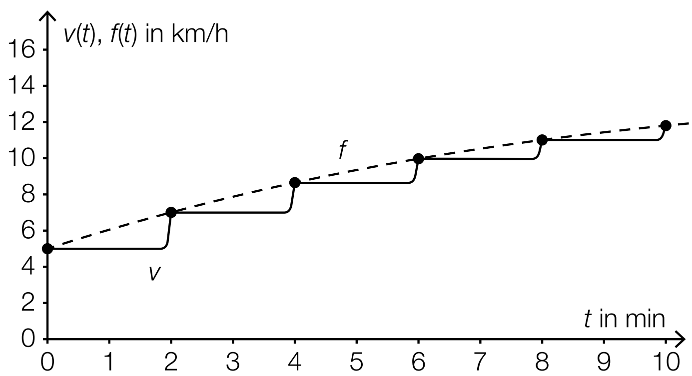
b) – Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Wertes und eine korrekte Begründung.
   Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
   Toleranzintervall: (20 %; 25 %]
   – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung für den von der Kandidatin/vom Kandidaten gewählten Wert richtig sein muss. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Darstellung von s_A.
   – Ein Punkt für eine korrekte Skizze eines möglichen Graphen von s_B.

Laufband

Aufgabennummer: 2_029	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3	

Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können.
Bei einem individuell erstellten, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbandgeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbandgeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit
$f(t) = 0{,}0008 \cdot t^3 - 0{,}05 \cdot t^2 + 1{,}1 \cdot t + 5$.
Die Laufbandgeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnungen wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.
Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbandgeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

Begründen Sie, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht!
Berechnen Sie unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

b) Geben Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

v_{min} = ______________________________ km/h

v_{max} = ______________________________ km/h

Begründen Sie, warum zu den Zeitpunkten t_{min} und t_{max}, zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minütigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{min}) \neq 0$ und $f'(t_{max}) \neq 0$ gilt!

c) Geben Sie den Wert von $v'(1)$ an und interpretieren Sie diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$v'(1)$ = ______________________________

Beschreiben Sie anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall [0; 30] verlaufen müsste!

d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.
Berechnen Sie diesen Näherungswert und erläutern Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Geben Sie die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).
Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h .

	t = 15 min	t = 30 min	t = 45 min	t = 60 min
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeigen Sie anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k!

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo" in min/km umschrieben.
Berechnen Sie für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + \ldots + f(28)) \approx 11{,}57$

Das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h.

Das arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), \ldots, v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: 0,5 h · 11,57 km/h = 5,785 km

b) $v_{min} = 5$ km/h
$v_{max} = 14{,}16$ km/h

t_{min} und t_{max} sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f, weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

c) $v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt 0 m/s².

oder:

Das Laufband (die Läuferin / der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt $t = 1$ min gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen ($t = 2$, $t = 4$, $t = 6$, ...) sehr hohe Werte annehmen.

d) $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 1{,}506$

zurückgelegte Weglänge: ca. 1,51 km

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind (1 h = 60 min).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:
$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1{,}388$ km

⇒ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. 118 m vom exakten Wert ab.

e) $194 = k \cdot 80 \cdot 2{,}5$
$k = 0{,}97$

Bei der doppelten/dreifachen/vierfachen Laufzeit wird die doppelte/dreifache/vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt/dreimal/viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8

Flugreisen

Aufgabenstellung:

a) In Österreich waren im Jahr 2018 die Parkgebühren in der Nähe der unten angeführten Flughäfen unterschiedlich hoch.

Flughafen	Parkgebühren pro Woche in Euro
Klagenfurt	K
Salzburg	54
Linz	L
Graz	G
Wien-Schwechat	W
Innsbruck	147

Quelle: https://www.derstandard.at/story/2000079383984/ranking-wo-das-parken-teurer-ist-als-der-flug [09.08.2022].

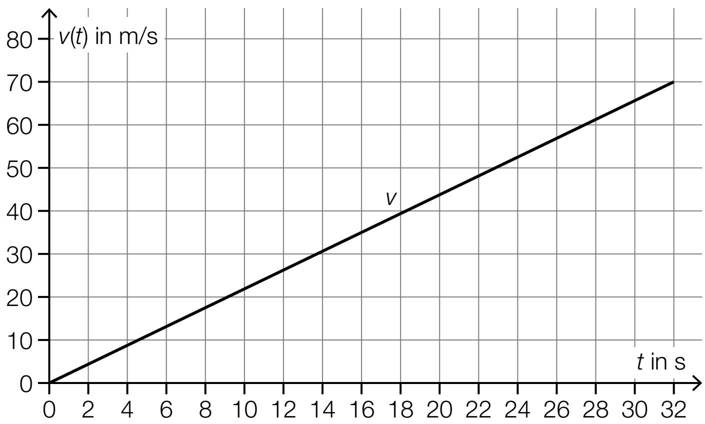
1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Parkgebühren pro Woche am Flughafen Innsbruck höher als am Flughafen Salzburg waren. *[0/1 P.]*

Das arithmetische Mittel dieser 6 Parkgebühren beträgt D (in Euro).

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Parkgebühren G am Flughafen Graz auf. Verwenden Sie dabei D und die Einträge der obigen Tabelle.

$G =$ ________________________________ *[0/1 P.]*

b) Ein Flugzeug beschleunigt auf der Startbahn und hebt nach 32 s ab. Die Geschwindigkeit des Flugzeugs wird als lineare Funktion v in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion v dargestellt.



1) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den das Flugzeug bis zum Abheben zurücklegt, in Metern. *[0/1 P.]*

c) Für einen bestimmten Flug haben 124 Personen jeweils einen Platz gebucht.

Modellhaft wird angenommen: Die für einen Flug gebuchten Plätze werden unabhängig voneinander jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p in Anspruch genommen.

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E gilt:

$$P(E) = 1 - \binom{124}{123} \cdot p^{123} \cdot (1 - p) - \binom{124}{124} \cdot p^{124}$$

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass jedenfalls eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Das Ereignis E ist: „Es werden ______①______ ______②______ der gebuchten Plätze in Anspruch genommen."

①	
höchstens	☐
genau	☐
mindestens	☐

②	
122	☐
123	☐
124	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{147 - 54}{54} = 1{,}7\dot{2}$

Die Parkgebühren am Flughafen Innsbruck waren um rund 172 % höher als die Parkgebühren am Flughafen Salzburg.

a2) $G = 6 \cdot D - K - 54 - L - W - 147$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel für G.

b1) $32 \cdot \frac{70}{2} = 1\,120$

Die Länge des bis zum Abheben zurückgelegten Weges beträgt 1 120 m.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge des zurückgelegten Weges.

c1)

①	
höchstens	☒

②	
122	☒

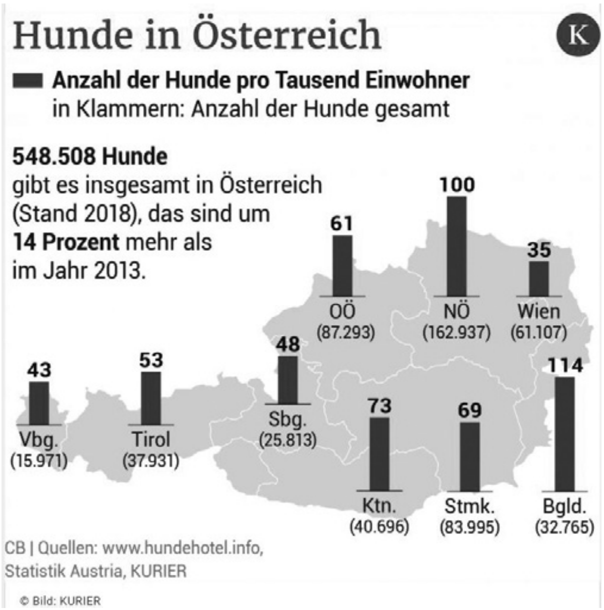
c1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Hunde in Österreich

Hunde sind in Österreich als Haustiere sehr beliebt.

Aufgabenstellung:

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Verteilung der Anzahl der Hunde in Österreich im Jahr 2018 nach Bundesländern.

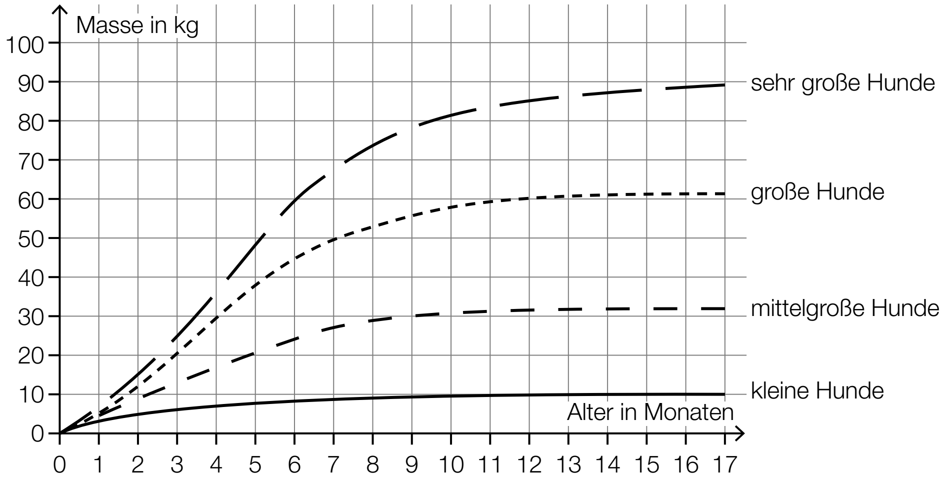


Bildquelle: https://kurier.at/chronik/oesterreich/plus-14-prozent-hunde-liegen-voll-im-trend/400573877 [16.03.2021].

Der Median der Anzahl der Hunde pro tausend Einwohner/innen in den 9 Bundesländern ist gleich der Anzahl der Hunde pro tausend Einwohner/innen in einem bestimmten Bundesland.

1) Ermitteln Sie dieses Bundesland. *[0/1 P.]*

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Entwicklung der Masse von Hunden verschiedener Größe in den ersten 17 Lebensmonaten.



Quelle: https://www.dasgesundetier.de/magazin/artikel/welpenerziehung-teil-2 [15.03.2021] (adaptiert).

1) Vervollständigen Sie die zwei nachstehenden Sätze mithilfe der Daten aus der obigen Abbildung so, dass richtige Aussagen entstehen. *[0/½/1 P.]*

„Große Hunde“ haben im Alter von 4 Monaten eine Masse von rund __________ kg.

„Sehr große Hunde“ haben im Alter von rund __________ Monaten eine Masse von 80 kg.

c) Der *Labrador* ist eine Hunderasse.

Als *minimale Masse* wird die Masse bezeichnet, die eine gesunde Labradorhündin abhängig von ihrem Alter mindestens haben soll.

Die nachstehende Tabelle zeigt die minimale Masse von Labradorhündinnen in Abhängigkeit vom Alter.

Alter in Monaten	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
minimale Masse in kg	10	13	16	18	20	22	22	23	24	24

Datenquelle: https://tierpal.de/labrador-wachstum/ [06.09.2022].

Es wird angenommen, dass sich die minimale Masse von Labradorhündinnen im Alter von 1 bis 5 Monaten linear entwickelt.

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die minimale Masse von Labradorhündinnen im Alter von 2 bis 3 Monaten zunimmt. *[0/1 P.]*

Die minimale Masse von Labradorhündinnen kann für das Alter von 7 bis 15 Monaten durch die Funktion $m: [7; 15] \to \mathbb{R}^+$ modelliert werden.

$m(t) = 25 - 24{,}7 \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$

t ... Alter in Monaten
$m(t)$ ... minimale Masse im Alter t in kg

Für das Alter von 7 Monaten stimmt der Wert der Funktion m mit dem entsprechenden Wert in der Tabelle überein.

Für das Alter von 12 Monaten weicht der Wert der Funktion m vom entsprechenden Wert in der Tabelle ab.

2) Berechnen Sie diese Abweichung in kg. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Oberösterreich

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Bundeslands.

b1) „Große Hunde" haben im Alter von 4 Monaten eine Masse von rund 30 kg.
Toleranzintervall: [28 kg; 31 kg]

„Sehr große Hunde" haben im Alter von rund 9,5 Monaten eine Masse von 80 kg.
Toleranzintervall: [9 Monate; 10 Monate]

b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der beiden Sätze, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

c1) minimale Masse im Alter von 2 Monaten: 7 kg
$\frac{3}{7} = 0{,}428... = 42{,}8...\ \%$
Die minimale Masse von Labradorhündinnen im Alter von 2 bis 3 Monaten nimmt um rund 43 % zu.

c2) $m(7) = 20$
$k = 0{,}228...$
$m(12) = 23{,}40...$
$24 - m(12) = 0{,}59...$
Die Abweichung beträgt rund 0,6 kg.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Abweichung, wobei –0,6 ebenfalls richtig ist.

CO2 und Klimaschutz*

Aufgabennummer: 2_102	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

In den letzten Jahrzehnten hat der CO_2-Gehalt in der Erdatmosphäre unter anderem durch den Straßenverkehr zugenommen.

Aufgabenstellung:

a) Für jeden PKW mit Benzinantrieb wird angenommen, dass pro Liter verbrauchten Benzins 2,32 kg CO_2 ausgestoßen werden.

PKW *A* fährt eine Strecke von *s* km mit einem durchschnittlichen Benzinverbrauch von 7,9 Litern pro 100 km.

Um dessen CO_2-Ausstoß auszugleichen, sollen *b* Bäume gepflanzt werden. Dabei nimmt man an, dass jeder dieser Bäume in seiner gesamten Lebenszeit 500 kg CO_2 aufnimmt.

1) Stellen Sie unter Verwendung von *s* eine Formel zur Berechnung der Anzahl *b* der zu pflanzenden Bäume auf.

$b =$ ____________________________________

PKW *B* legt eine Strecke von 15 000 km zurück. Um dessen CO_2-Ausstoß auszugleichen, werden 5 Bäume gepflanzt.

2) Berechnen Sie den durchschnittlichen Benzinverbrauch (in Litern pro 100 km) von PKW *B* auf dieser Strecke.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

b) Neben CO_2 verstärken auch andere Gase die Klimaerwärmung. Die Emission von diesen Gasen wird in sogenannte *CO_2-Äquivalente* umgerechnet.

Die nachstehende Tabelle gibt für einige Staaten der EU Auskunft über die jeweilige Einwohnerzahl (in Millionen) im Jahr 2015 und die zugehörigen CO_2-Äquivalente (in Tonnen pro Person).

	Einwohnerzahl in Millionen	CO_2-Äquivalente in Tonnen pro Person
Belgien	11,2	11,9
Frankreich	66,4	6,8
Italien	60,8	7,0
Luxemburg	0,6	18,5
Niederlande	16,9	12,3

Datenquellen: https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Population_and_population_change_statistics/de&oldid=320539 [24.07.2020],
https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Länder_nach_Treibhausgas-Emissionen [24.07.2020].

1) Berechnen Sie die durchschnittlichen CO_2-Äquivalente $\overline{e}$ (in Tonnen pro Person) für den gesamten in der obigen Tabelle angeführten Teil der EU.

$\overline{e}$ = ____ Tonnen pro Person

Lukas sind nur die in der obigen Tabelle angeführten Werte der CO_2-Äquivalente der einzelnen Staaten bekannt, <u>nicht</u> aber die jeweils zugehörige Einwohnerzahl.
Er berechnet das arithmetische Mittel $\overline{x}$ der CO_2-Äquivalente: $\overline{x} = 11{,}3$.

2) Erklären Sie ohne Verwendung des berechneten Wertes von $\overline{e}$, warum $\overline{x}$ größer als $\overline{e}$ sein muss.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $b = \frac{7{,}9 \cdot 2{,}32 \cdot s}{100 \cdot 500}$

a2) $5 = \frac{x \cdot 2{,}32 \cdot 15\,000}{100 \cdot 500}$

$\Rightarrow \quad x = 7{,}18...$

durchschnittlicher Benzinverbrauch: rund 7,18 Liter pro 100 km

b) Lösungserwartung:

b1) $\overline{e} = 7{,}8...$ Tonnen pro Person

b2) Das arithmetische Mittel $\overline{x}$ ist größer, weil die für die einzelnen Staaten angegebenen Werte der CO_2-Äquivalente für Staaten mit einer geringeren Einwohnerzahl größer sind als für jene mit einer höheren Einwohnerzahl.

oder:

Wenn man die jeweilige Einwohnerzahl der einzelnen Staaten beim Übergang vom ungewichteten zum gewichteten arithmetischen Mittel berücksichtigt, erhöht sich das Gewicht jedes Staates mit einem Wert der CO_2-Äquivalente kleiner als $\overline{x}$ und verringert sich das Gewicht jedes Staates mit einem Wert der CO_2-Äquivalente größer als $\overline{x}$.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des durchschnittlichen Benzinverbrauchs.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen.
b2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schularbeiten

Aufgabennummer: 2_005	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Professor Huber hat in der Oberstufe pro Semester jeweils 2 Schularbeiten geplant. Verpasst eine Schülerin / ein Schüler eine Schularbeit, so muss sie/er diese nachholen.
Auf Basis seiner langjährigen Erfahrung hat Professor Huber die unten stehende Tabelle erstellt. Dabei beschreibt $h(n)$ die relative Häufigkeit, dass bei einer Schularbeit insgesamt n Schüler/innen fehlen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	> 7
$h(n)$	0,15	0,15	0,2	0,3	0,1	0,05	0,03	0,02	0

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie, wie viele fehlende Schüler/innen Professor Huber bei jeder Schularbeit zu erwarten hat.

Lisa behauptet: „Aus dem Durchschnittswert kann man schließen, dass bei jeder Schularbeit mindestens eine Schülerin oder ein Schüler fehlt.

2) Begründen Sie, warum Lisas Behauptung falsch ist.

b) Die von Professor Huber berechneten relativen Häufigkeiten werden modellhaft als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Im Durchschnitt fehlt bei drei von vier Schularbeiten im Jahr mindestens eine Schülerin oder ein Schüler.	☐
Im Durchschnitt sind bei einer von vier Schularbeiten pro Jahr alle Schüler/innen anwesend.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Schularbeit niemand fehlt, ist gleich hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin oder ein Schüler fehlt.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Schüler/innen bei einer Schularbeit fehlen, ist höher als die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Schüler/innen fehlen.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Schularbeit mindestens eine Schülerin oder ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	☐

In einer bestimmten Klasse werden bei Professor Huber 4 Schularbeiten geschrieben. Es wird modellhaft angenommen, dass Schüler/innen zufällig und unabhängig voneinander fehlen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Schularbeiten, bei denen mindestens eine Schülerin oder ein Schüler fehlt.

2) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeitsverteilung für X berechnet werden kann.

$P(X = k) =$ ________________________________

mit $k \in \{$ ________________________________ $\}$

Lösungserwartung

a1) $0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}03 + 7 \cdot 0{,}02 = 2{,}42$
Professor Huber hat bei jeder Schularbeit 2,42 fehlende Schüler/innen zu erwarten.

a2) Da der Durchschnittswert keine konkrete Aussage über einzelne Schularbeiten erlaubt, ist Lisas Behauptung falsch.

b1)

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Schularbeit niemand fehlt, ist gleich hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin oder ein Schüler fehlt.	☒
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Schularbeit mindestens eine Schülerin oder ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	☒

b2) $P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot 0{,}85^k \cdot 0{,}15^{4-k}$
mit $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Terms und der richtigen Werte von k, ein halber Punkt für nur eine richtige Angabe.

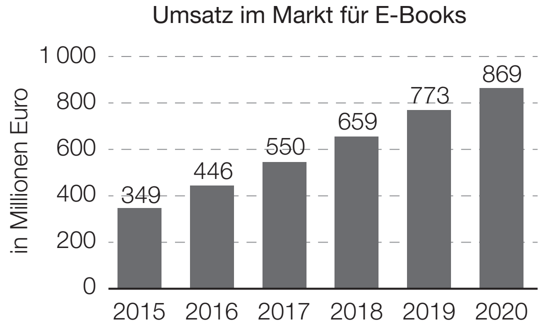
E-Book*

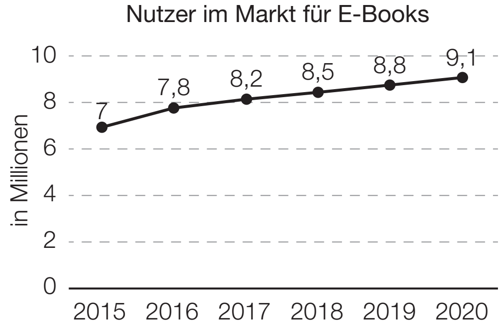
Aufgabennummer: 2_060	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 5.2, WS 2.2, WS 3.2

Ein Buch in digitaler Form wird als *E-Book* (von engl. *electronic book*) bezeichnet.

Die beiden folgenden auf Deutschland bezogenen Grafiken stellen Schätzwerte für die Entwicklung des Markts für E-Books dar:





Quelle: http://www.e-book-news.de/20-prozent-wachstum-pro-jahr-statista-sieht-deutschen-e-book-markt-im-aufwind/ [19.06.2019] (adaptiert).

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie für den geschätzten Umsatz pro Nutzer in Deutschland die absolute und die relative Änderung für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

absolute Änderung: € ____________________

relative Änderung: ____________________

2) Berechnen Sie den Differenzenquotienten des geschätzten Umsatzes pro Nutzer in Deutschland für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

b) Die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wird in der oben angeführten Quelle wie folgt beschrieben:

„20 Prozent Wachstum pro Jahr"

1) Geben Sie an, wie die Umsatzschätzung $U(2017)$ für das Jahr 2017 hätte lauten müssen, wenn der Umsatz ausgehend vom Schätzwert von 2015 tatsächlich jährlich um 20 % zugenommen hätte.

$U(2017)$ = ____________________ Millionen Euro

Jemand beschreibt die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wie folgt:

„a Millionen Euro Wachstum pro Jahr"

2) Berechnen Sie a.

c) Im Jahr 2015 betrug die Einwohnerzahl von Deutschland ungefähr 82,18 Millionen, jene von Österreich ungefähr 8,58 Millionen. Jemand stellt sich die folgende Frage: „Wie groß ist die Anzahl der Personen aus Österreich, die im Jahr 2015 schon E-Book-Nutzer waren?"

1) Beantworten Sie diese Frage unter der Annahme, dass Österreich im Jahr 2015 den gleichen (geschätzten) Anteil an E-Book-Nutzern wie Deutschland hatte.

Anzahl: ____ Personen

Im Jahr 2020 werden 500 Personen aus Österreich zufällig ausgewählt.
Die als binomialverteilt angenommene Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Personen aus dieser Auswahl an, die E-Book-Nutzer sind. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person E-Book-Nutzer ist, mit 12 % angenommen.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 50 E-Book-Nutzer in dieser Auswahl sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) Umsatz pro Nutzer 2015: rund € 49,86
Umsatz pro Nutzer 2020: rund € 95,49

absolute Änderung: € 45,63
relative Änderung: 0,9155

a2) Differenzenquotient für das Intervall [2015; 2020]: rund € 9,13 pro Jahr

b) Lösungserwartung:

b1) $U(2017) = U(2015) \cdot 1{,}2^2$
$U(2017) = 502{,}56$ Millionen Euro

b2) $a = \frac{869 - 349}{5} = 104$

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:
$8{,}58 \cdot \frac{7}{82{,}18} = 0{,}7308347... \approx 0{,}730835$
Anzahl: 730835 Personen

c2) mögliche Vorgehensweise:
$n = 500;\ p = 0{,}12$
$P(X \geq 50) = 0{,}9287... \approx 0{,}929$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte. Andere Schreibweisen der Lösungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die absolute Änderung: [44; 47]
Toleranzintervall für die relative Änderung: [0,88; 0,95]

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [8,90; 9,40]

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [502 Millionen Euro; 503 Millionen Euro]

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [720 000; 780 000]

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,90; 0,95]

Bogenschießen

Auf dem Gelände einer bestimmten 3-D-Bogenschießanlage wird mit Pfeil und Bogen auf Figuren geschossen.

Aufgabenstellung:

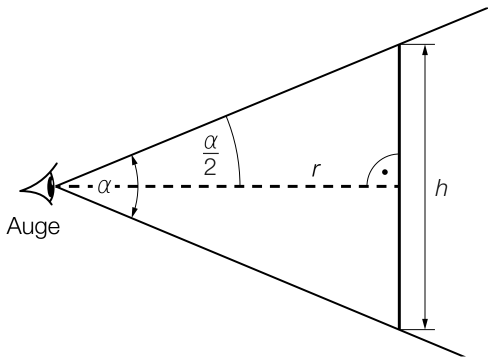
a) Paul schießt einen Pfeil auf eine Figur. Die Flugbahn der Pfeilspitze vom Start im Punkt S zum Ziel im Punkt Z kann durch die Gerade g modelliert werden.

Es gilt: $S = (0|0|1{,}8)$, $Z = (-5|7|8{,}5)$

1) Stellen Sie eine Gleichung von g in Parameterdarstellung auf.

$g: X =$ ____ *[0/1 P.]*

b) Lara sieht eine bestimmte Figur unter dem Sehwinkel α. In der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist der Zusammenhang zwischen dem Sehwinkel α, der Entfernung r und der Größe h dargestellt.



1) Stellen Sie unter Verwendung von α und r eine Formel zur Berechnung von h auf.

$h =$ ____ *[0/1 P.]*

c) Paul schießt beim Training auf die 3 Ziele A, B und C. Er trifft diese bei jedem Schuss unabhängig von jedem anderen Schuss mit den in der nachstehenden Tabelle angeführten Wahrscheinlichkeiten.

Ziel	A	B	C
Wahrscheinlichkeit	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{4}$

Paul schießt nacheinander jeweils 1-mal auf die 3 Ziele A, B und C.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Paul mindestens 1 dieser 3 Ziele trifft. *[0/1 P.]*

Paul schießt 10-mal auf das Ziel A. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt dabei die Anzahl der Treffer an.

2) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $g: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 6{,}7 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Die Angabe von „$t \in \mathbb{R}$“ ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von g.

b1) $h = 2 \cdot r \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel zur Berechnung von h.

c1) $P(\text{„Paul trifft mindestens 1 dieser 3 Ziele“}) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{4} = 0{,}865$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Paul mindestens 1 dieser 3 Ziele trifft, beträgt 86,5 %.

c2) $E(X) = 10 \cdot \frac{2}{5} = 4$

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von $E(X)$.

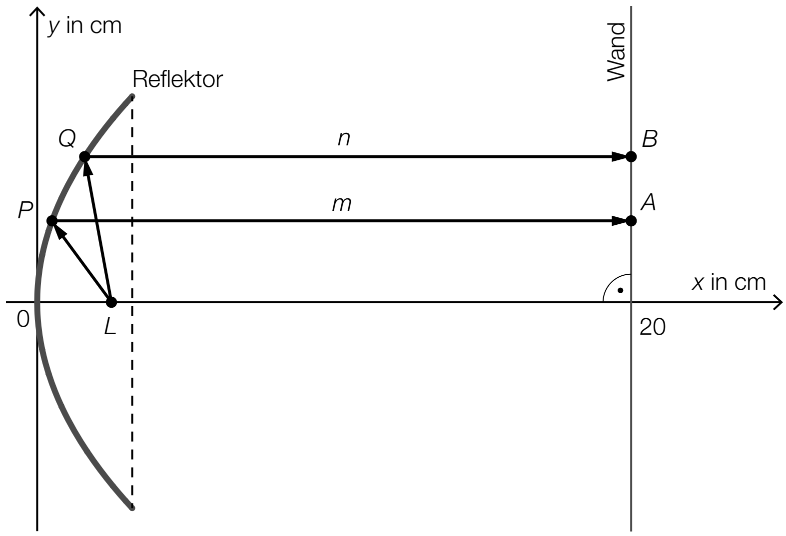
Taschenlampen

Ein Betrieb produziert und verkauft Taschenlampen.

Aufgabenstellung:

a) Der vordere Teil einer bestimmten Taschenlampe besteht aus der punktförmigen Lichtquelle L und einem Reflektor, der die Lichtquelle umgibt.

Der Querschnitt des vorderen Teiles dieser Taschenlampe ist in der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung in einem Koordinatensystem modellhaft dargestellt.



Zwei geradlinige Lichtstrahlen gehen von der Lichtquelle L aus und werden in den Punkten P und Q vom Reflektor parallel zur x-Achse auf eine Wand umgelenkt. Dort treffen sie in den Punkten A und B auf.

$L = (2,5|0)$
$\overline{LP} = 3$ cm und $\overline{LQ} = 4,1$ cm
$A = (20|y_A)$ und $B = (20|y_B)$
$m = 19,5$ cm

Es gilt: $\overline{LP} + m = \overline{LQ} + n$

1) Berechnen Sie y_B. *[0/1 P.]*

b) Bei der Kontrolle einer Lieferung werden Taschenlampen auf die Fehler F_1, F_2 und F_3 hin überprüft. Diese 3 Fehler treten unabhängig voneinander auf.

In der nachstehenden Tabelle sind diese Fehler und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten angegeben.

Fehler	Beschreibung	Wahrscheinlichkeit
F_1	Die Taschenlampe ist defekt.	p_1
F_2	Die Taschenlampe hat die falsche Farbe.	0,02
F_3	Die Taschenlampe hat keine Aufbewahrungstasche.	0,01

Eine Taschenlampe wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt und überprüft.

1) Ordnen Sie den vier Ereignissen jeweils die auf jeden Fall zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis F zu. *[0/½/1 P.]*

Die Taschenlampe ist defekt und hat die falsche Farbe.	☐
Die Taschenlampe hat die richtige Farbe.	☐
Die Taschenlampe ist nicht defekt, sie hat die richtige Farbe und sie hat keine Aufbewahrungstasche.	☐
Die Taschenlampe weist mindestens 1 dieser 3 Fehler auf.	☐

A	0,98
B	$1 - (1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99$
C	$p_1 \cdot 0{,}02$
D	$1 - p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
E	$p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
F	$(1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}01$

c) Die Gesamtkosten für die Herstellung der Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x können durch die differenzierbare Kostenfunktion K modelliert werden.

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' hat die Funktionsgleichung
$K'(x) = 0{,}33 \cdot x^2 - 1{,}8 \cdot x + 3$.

Es gilt: $K(1) = 44{,}21$

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

$K(x) =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Im Folgenden wird angenommen, dass jede produzierte Taschenlampe auch verkauft wird.

Der Erlös aus dem Verkauf dieser Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x kann durch die Funktion E modelliert werden.

$E(x) = a \cdot x$

x ... Produktionsmenge in ME
$E(x)$ ... Erlös bei der Produktionsmenge x in GE
a ... Preis in GE/ME

Der Gewinn wird durch die Gewinnfunktion G modelliert (x in ME, $G(x)$ in GE).

Das Betriebsziel ist, bei einer Produktion und einem Verkauf von 5 ME Taschenlampen einen Gewinn von mindestens 100 GE zu erzielen.

2) Berechnen Sie den kleinstmöglichen Preis, mit dem dieses Betriebsziel erreicht wird.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $3 + 19{,}5 = 4{,}1 + n$
$n = 18{,}4$
$y_B = \sqrt{4{,}1^2 - (18{,}4 - 17{,}5)^2} = 4$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von y_B.

b1)

Die Taschenlampe ist defekt und hat die falsche Farbe.	C
Die Taschenlampe hat die richtige Farbe.	A
Die Taschenlampe ist nicht defekt, sie hat die richtige Farbe und sie hat keine Aufbewahrungstasche.	F
Die Taschenlampe weist mindestens 1 dieser 3 Fehler auf.	B

A	0,98
B	$1 - (1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99$
C	$p_1 \cdot 0{,}02$
D	$1 - p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
E	$p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
F	$(1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}01$

b1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

c1) $K(x) = 0{,}11 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 42$

c2) $G(x) = a \cdot x - (0{,}11 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 42)$
$G(5) \geq 100$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a \geq 29{,}65$

Der kleinstmögliche Preis beträgt 29,65 GE/ME.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von K.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

Passwörter

Passwörter bestehen aus Zeichen, die in einer festgelegten Reihenfolge angeordnet sind. Es ist erlaubt, dass in einem Passwort Zeichen mehrfach vorkommen.

Die Anzahl der Stellen eines Passworts wird als Passwortlänge k bezeichnet ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$).
Für jede dieser Stellen wird ein Zeichen aus jeweils n verschiedenen Zeichen gewählt ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Die Anzahl A aller möglichen Passwörter kann mithilfe der Formel $A = n^k$ berechnet werden.

Aufgabenstellung:

a) Ein bestimmter Computer kann 1 Milliarde Passwörter pro Sekunde überprüfen.
Für die Überprüfung von n^k Passwörtern benötigt der Computer t Stunden.

1) Stellen Sie mithilfe von k und n eine Formel zur Berechnung von t auf.

$t =$ ____________________________________ *[0/1 P.]*

Diese Formel zur Berechnung von t kann als Funktion in Abhängigkeit von k und n aufgefasst werden.

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Ist k konstant, so ist t in Abhängigkeit von n eine ______①______; ist n konstant, so ist t in Abhängigkeit von k eine ______②______.

①	
lineare Funktion	☐
Potenzfunktion	☐
Exponentialfunktion	☐

②	
lineare Funktion	☐
Potenzfunktion	☐
Exponentialfunktion	☐

b) Das Passwort für den Zugang auf eine bestimmte Website wird automatisch von einem Zufallsgenerator erzeugt. Der Zufallsgenerator wählt jedes Zeichen unabhängig von den anderen Zeichen und mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus 26 Buchstaben und 10 Ziffern aus ($n = 36$). Die Passwortlänge beträgt 8 Zeichen ($k = 8$).

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht.

[0/1 P.]

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $t = \frac{n^k}{60 \cdot 60 \cdot 10^9} \quad \left(= \frac{n^k}{3{,}6 \cdot 10^{12}}\right)$

a2)

①	
Potenzfunktion	☒

②	
Exponentialfunktion	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) $\left(\frac{26}{36}\right)^8 = 0{,}0740...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht, beträgt rund 7,4 %.

b2) $\left(\frac{26}{36}\right)^8 + 8 \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^7 \cdot \frac{10}{36} = 0{,}3017...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält, beträgt rund 30,2 %.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält.

„Mensch ärgere Dich nicht“

„Mensch ärgere Dich nicht“ ist ein Brettspiel für mindestens zwei Personen. Ziel des Spieles ist es, die eigenen 4 gleichfarbigen Spielfiguren möglichst schnell von den Startfeldern zu den Zielfeldern zu bewegen.

Aufgabenstellung:

a) In einem Stoffsäckchen befinden sich 4 rote, 4 gelbe und 4 blaue Spielfiguren eines „Mensch ärgere Dich nicht“-Spieles. Isabella zieht zufällig und ohne Zurücklegen 4 Spielfiguren.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 gezogenen Spielfiguren rot sind.

[0/1 P.]

Isabella hat alle roten Spielfiguren entnommen. Das Stoffsäckchen enthält also nur mehr die 4 gelben und die 4 blauen Spielfiguren.
Nun zieht Fatima so oft ohne Zurücklegen je 1 Spielfigur, bis sie alle 4 gelben Spielfiguren gezogen hat.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Züge k, die Fatima benötigt, bis sie alle 4 gelben Spielfiguren gezogen hat. Durch die nachstehende Tabelle ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X gegeben.

k	4	5	6	7	8
$P(X = k)$	$\frac{1}{70}$	u	$\frac{10}{70}$	$\frac{20}{70}$	v

2) Berechnen Sie u und v.

u = ______________________

v = ______________________ *[0/1 P.]*

b) Isabella gewinnt gegen ihre Freundin Fatima durchschnittlich 3 von 5 Partien „Mensch ärgere Dich nicht". In den bevorstehenden Sommerferien werden die beiden Mädchen n Partien gegeneinander spielen (n gerade, $n > 2$).
Die binomialverteilte Zufallsvariable Y gibt an, wie viele der n Partien von Isabella gewonnen werden.

Gegeben sind vier Wahrscheinlichkeiten und sechs Ereignisse.

1) Ordnen Sie den vier Wahrscheinlichkeiten jeweils das mit dieser Wahrscheinlichkeit eintretende Ereignis aus A bis F zu. *[0/½/1 P.]*

$\binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}6^{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}4^{\frac{n}{2}}$	
$1 - 0{,}4^n - n \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^{n-1}$	
$1 - 0{,}6^n$	
$n \cdot 0{,}6^{n-1} \cdot 0{,}4$	

A	Isabella gewinnt genau die Hälfte der n Partien.
B	Isabella gewinnt mindestens 2 der n Partien.
C	Isabella verliert mehr als die Hälfte der n Partien.
D	Isabella verliert genau 1 der n Partien.
E	Isabella verliert mindestens 1 der n Partien.
F	Isabella gewinnt höchstens 1 der n Partien.

Der Erwartungswert von Y wird mit μ, die Standardabweichung von Y mit σ bezeichnet.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - \sigma < Y < \mu + \sigma)$ für $n = 14$. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{495} = 0{,}0020...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 gezogenen Spielfiguren rot sind, beträgt rund 0,2 %.

a2) $u = \frac{4}{70} = \frac{2}{35}$

$v = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 gezogenen Spielfiguren rot sind.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *u* und *v*.

b1)

$\binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}6^{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}4^{\frac{n}{2}}$	A
$1 - 0{,}4^n - n \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^{n-1}$	B
$1 - 0{,}6^n$	E
$n \cdot 0{,}6^{n-1} \cdot 0{,}4$	D

A	Isabella gewinnt genau die Hälfte der *n* Partien.
B	Isabella gewinnt mindestens 2 der *n* Partien.
C	Isabella verliert mehr als die Hälfte der *n* Partien.
D	Isabella verliert genau 1 der *n* Partien.
E	Isabella verliert mindestens 1 der *n* Partien.
F	Isabella gewinnt höchstens 1 der *n* Partien.

b2) $p = 0{,}6 \quad n = 14$

$\mu = 8{,}4$

$\sigma = 1{,}83...$

$[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = [6{,}56...; 10{,}23...]$

$P(7 \leq Y \leq 10) = 0{,}7255...$

b1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Speichermedien*

Aufgabennummer: 2_108	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

In den letzten Jahrzehnten wurden verschiedene Speichermedien, wie zum Beispiel Speicherkarten, USB-Sticks oder DVDs, für die Sicherung von Daten verwendet.

Aufgabenstellung:

a) Die Speicherkapazität eines Speichermediums kann unter anderem in Kilobyte, Megabyte bzw. Gigabyte angegeben werden. Die Vorsilben *Kilo-*, *Mega-*, *Giga-* werden dabei wie folgt verwendet:
1 Megabyte = 1 024 Kilobyte
1 Gigabyte = 1 024 Megabyte

Eine bestimmte Speicherkarte mit einer Speicherkapazität von 16 Gigabyte wird zum Speichern von Fotos verwendet. Modellhaft wird angenommen, dass alle gespeicherten Fotos den gleichen Bedarf an Speicherplatz haben.
Die Funktion $N: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ordnet dem Bedarf an Speicherplatz F für ein Foto die größtmögliche Anzahl $N(F)$ der auf dieser Speicherkarte speicherbaren Fotos zu (F in Kilobyte).

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von N auf.

$N(F) =$ ____

b) Michael hat 4 USB-Sticks mit den Bezeichnungen A, B, C und D.

- Auf USB-Stick A speichert er alle seine Fotos ab.
- Auf den 3 anderen USB-Sticks, B, C und D, speichert er zur Sicherung jeweils genau ein Drittel seiner Fotos so ab, dass jedes Foto zusätzlich auf genau 1 dieser 3 USB-Sticks gespeichert ist.

Für jeden der 4 USB-Sticks ist (jeweils unabhängig voneinander) die Wahrscheinlichkeit 75 %, dass er 5 Jahre lang funktionstüchtig bleibt.

Es wird vereinfacht angenommen, dass ein USB-Stick entweder vollständig funktionstüchtig ist oder gar nicht funktioniert.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach 5 Jahren noch jedes von Michaels Fotos auf mindestens 1 USB-Stick verfügbar ist.

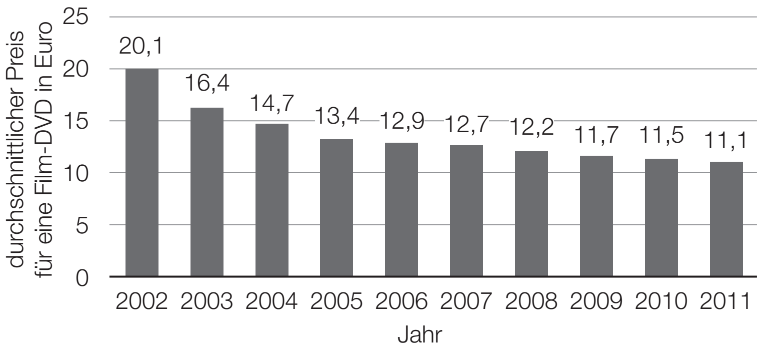
* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Michael stellt nach 5 Jahren fest, dass USB-Stick A nicht mehr funktionstüchtig ist.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest 2 der 3 USB-Sticks B, C und D funktionstüchtig sind.

c) Ein beliebtes Speichermedium für Filme ist die DVD.

Seit Anfang des 21. Jahrhunderts hat der durchschnittliche Preis für Film-DVDs abgenommen, wie das nachstehende Diagramm zeigt.



Datenquelle: https://www.mkdiscpress.de/ratgeber/chronik-der-speichermedien/ [20.11.2019].

Der durchschnittliche Preis für eine Film-DVD wird durch die Funktion P in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert.

$P(t) = a \cdot b^t + 11$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2002
$P(t)$ ... durchschnittlicher Preis für eine Film-DVD zur Zeit t in Euro

1) Ermitteln Sie a und b so, dass P für die Jahre 2002 und 2011 den durchschnittlichen Preis für eine Film-DVD im jeweiligen Jahr laut obigem Diagramm ergibt.

a = ______________________________

b = ______________________________

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $N(F) = \frac{16 \cdot 1\,024 \cdot 1\,024}{F} = \frac{16\,777\,216}{F}$

b) Lösungserwartung:

b1) $0{,}75 + 0{,}25 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}855...$

b2) $0{,}75^3 + 3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}843...$

c) Lösungserwartung:

c1) $P(0) = 20{,}1 \quad \Rightarrow \quad a + 11 = 20{,}1$
$P(9) = 11{,}1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b^9 + 11 = 11{,}1$
$a = 9{,}1$
$b = \sqrt[9]{\frac{0{,}1}{9{,}1}} = 0{,}60579...$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von N, wobei auch jeder Hinweis auf das Abrunden von $N(F)$ auf die nächstkleinere ganze Zahl als richtig zu werten ist.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

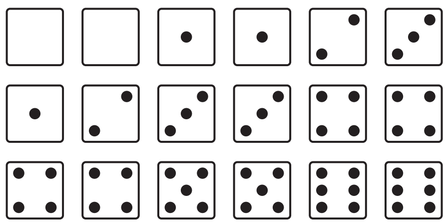
Würfelspiel*

Aufgabennummer: 2_104	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Bei einem Würfelspiel werden verschiedene Würfel mit jeweils 6 Seitenflächen verwendet. Bei allen verwendeten Würfeln tritt bei jedem Wurf jede Seitenfläche mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wie jede der anderen Seitenflächen auf. Die Ergebnisse verschiedener Würfe sind voneinander unabhängig.

Es werden die 3 Würfeltypen *A*, *B* und *C* verwendet. In der nachstehenden Abbildung sind deren Seitenflächen dargestellt.

Seitenflächen von Typ *A*
Seitenflächen von Typ *B*
Seitenflächen von Typ *C*



Aufgabenstellung:

a) Ein Spieler würfelt 1-mal gleichzeitig mit einem Würfel vom Typ *B* und einem Würfel vom Typ *C*.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gewürfelten Augenzahlen 8 beträgt.

b) Die Zufallsvariable X_A bzw. X_B bzw. X_C gibt die Augenzahl beim Wurf eines Würfels vom Typ *A* bzw. *B* bzw. *C* an. Eine dieser drei Zufallsvariablen hat einen ganzzahligen Erwartungswert.

1) Geben Sie diesen ganzzahligen Erwartungswert an.

Die beiden anderen Zufallsvariablen haben die gleiche Standardabweichung.

2) Berechnen Sie diese Standardabweichung.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

c) Mit einem Würfel vom Typ C wird n-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable Y_n gibt an, bei wie vielen von diesen n Würfen mit einem Würfel vom Typ C eine ungerade Augenzahl auftritt ($n \in \mathbb{N}$). Mit μ_n wird der Erwartungswert und mit σ_n die Standardabweichung von Y_n bezeichnet.

1) Geben Sie μ_n und σ_n in Abhängigkeit von n an.

$\mu_n =$ ____________________

$\sigma_n =$ ____________________

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) Kombinationen der Augenzahlen: „2 und 6“ oder „3 und 5“ oder „4 und 4“
$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18} = 0{,}2\dot{7}$

a2) $36 + 12 \cdot 4 - \int_0^{10} 0{,}12 \cdot t^2 \, \mathrm{d}t = 44$
Die Strecke ist um 44 m länger.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $E(X_C) = 5$

b2) $\sigma(X_A) = \sigma(X_B) = 1{,}067...$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $\mu_n = n \cdot \frac{1}{3}$
$\sigma_n = \sqrt{n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Erwartungswerts.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung.

c1) Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zehnkampf

Aufgabennummer: 2_FT003	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Beim Zehnkampf der Männer in der Leichtathletik erhält jeder Athlet in jeder der zehn Disziplinen Punkte, die jeweils nach einer eigenen Formel berechnet werden.
Für den Weitsprung gilt:

$P = 0{,}14354 \cdot (x - 220)^{1{,}4}$

x … Sprungweite in cm
P … Punkte

Für die Punktevergabe wird P nach der Berechnung auf Ganze gerundet.

Aufgabenstellung:

a) Der Weltrekord im Zehnkampf wurde vom Franzosen Kevin Mayer 2018 aufgestellt und liegt bei 9126 Punkten. Seine Weitsprungleistung betrug 780 cm.

1) Berechnen Sie, wie viele Punkte Kevin Mayer mehr erhalten hätte, wenn er die Weltrekordweite von 895 cm gesprungen wäre.

2) Geben Sie an, welche Sprungweite ein Athlet übertreffen muss, um Punkte zu bekommen.

Die Sprungweite muss größer als ______________________ cm sein.

b) Steigt die Sprungweite um 115 cm, so ist der durchschnittliche Punktezuwachs nicht für jeden Ausgangswert gleich.

1) Weisen Sie diese Aussage für die beiden Intervalle [500 cm; 615 cm] und [780 cm; 895 cm] rechnerisch nach.

Steigt die Sprungweite um den gleichen Wert, so ist der Punktezuwachs umso höher, je größer die Sprungweite ist, von der man ausgeht.

2) Begründen Sie diese Aussage.

c) Bei einem Zehnkampf sind 3 Sprünge erlaubt. Der weiteste fehlerfreie Sprung wird gewertet. Erfahrungsgemäß ist 1 von 20 Sprüngen ein Fehlversuch, weil er nicht korrekt durchgeführt wird.

   1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet bei einem Zehnkampf keinen Fehlversuch im Weitsprung hat.

Lösungserwartung

a1) $0{,}14354 \cdot (780 - 220)^{1{,}4} = 1\,010{,}2\ldots \approx 1\,010$
$0{,}14354 \cdot (895 - 220)^{1{,}4} = 1\,312{,}1\ldots \approx 1\,312$

Kevin Mayer hätte 302 Punkte mehr erzielt.

a2) Die Sprungweite muss größer als 220 cm sein.

b1) Intervall [500 cm; 615 cm]: $\frac{620 - 383}{615 - 500} = 2{,}06\ldots$

Intervall [780 cm; 895 cm]: $\frac{1\,312 - 1\,010}{895 - 780} = 2{,}62\ldots$

b2) P kann als Funktion in Abhängigkeit von der Sprungweite x modelliert werden. Diese verläuft streng monoton wachsend und linksgekrümmt (positiv gekrümmt). Dadurch ist der Punktezuwachs umso höher, je größer die Sprungweite ist, von der man ausgeht.

c1) $\left(\frac{19}{20}\right)^3 = 0{,}8573\ldots \approx 85{,}7\ \%$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
a2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.
b2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gewitter

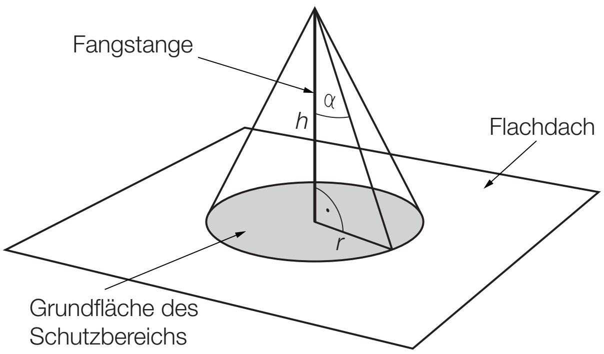
Aufgabennummer: 2_065	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AN 4.3, WS 2.3	

a) In drei verschiedenen Städten – *A*, *B* und *C* – werden am Nachmittag laut Wetterprognose unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten Gewitter auftreten:

Stadt	*A*	*B*	*C*
Wahrscheinlichkeit für ein Gewitter	50 %	80 %	80 %

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftreten wird.

b) Um Gebäude vor Blitzeinschlägen zu schützen, werden Blitzableiter verwendet. Dabei wird eine Metallstange, die sogenannte *Fangstange*, auf dem Gebäude senkrecht montiert. Der höchste Punkt einer solchen Fangstange kann als Spitze eines drehkegelförmigen Schutzbereichs angesehen werden. Alle Objekte, die sich vollständig innerhalb dieses Schutzbereichs befinden, sind vor direkten Blitzeinschlägen geschützt.



h … Höhe der Fangstange
α … Schutzwinkel
r … Radius der Grundfläche des Schutzbereichs

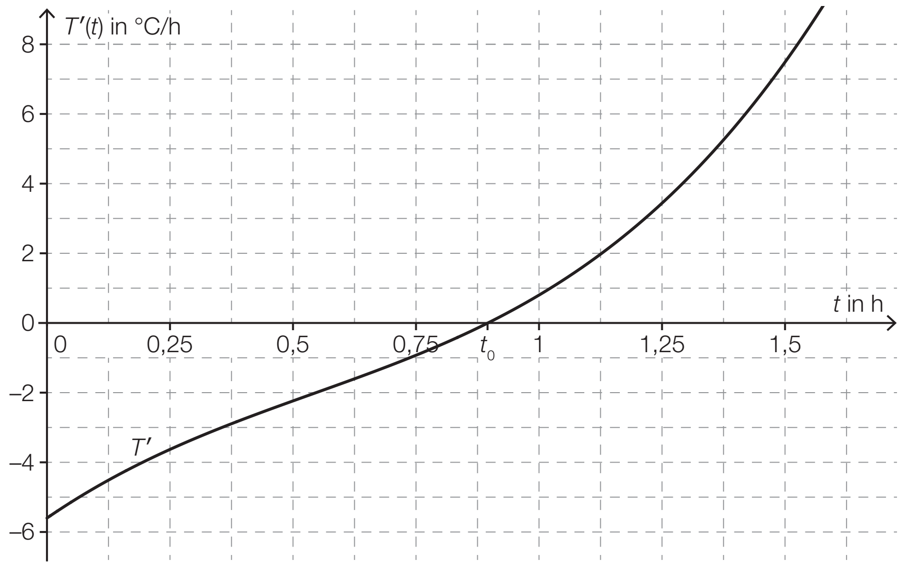
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Radius r aus α und h.

$r =$ ____

Auf einem Flachdach ist eine 2 m hohe Fangstange senkrecht montiert. 3 m vom Fußpunkt der Fangstange entfernt steht eine 1,2 m hohe Antenne senkrecht auf dem Flachdach. Der Schutzwinkel beträgt 77°.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich diese Antenne vollständig innerhalb des Schutzbereichs befindet.

c) Während eines Nachmittags, an dem es ein Gewitter gab, wurde die Veränderung der Temperatur ermittelt. Die Funktion T' beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



t … Zeit seit Beginn der Messung in h
$T'(t)$ … momentane Änderungsrate der Temperatur zur Zeit t in °C/h

Die absolute Temperaturänderung in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ kann durch das Integral $\int_{t_1}^{t_2} T'(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.

1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5].

Lösungserwartung

a1) $1 - 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}68$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftritt, beträgt 68 %.

b1) $r = h \cdot \tan(\alpha)$

b2) $\frac{3}{\tan(77°)} = 0{,}69...$

$2 - 0{,}69... = 1{,}30...$

In einer Entfernung von 3 m von der Fangstange hat der Schutzbereich eine Höhe von rund 1,3 m.
Die 1,2 m hohe Antenne befindet sich daher zur Gänze im Schutzbereich.

Auch eine Überprüfung mithilfe einer exakten Zeichnung ist als richtig zu werten.

c1) Die dem Integral $\int_{1,25}^{1,5} T'(t)\,dt$ entsprechende Fläche wird von rund 10,5 Kästchen mit einem Flächeninhalt von jeweils 0,125 überdeckt.
Gesamtflächeninhalt: $10{,}5 \cdot 0{,}125 \approx 1{,}3$

Die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5] beträgt rund 1,3 °C.
Toleranzintervall: [1,2 °C; 1,45 °C]

Buntes Spielzeug

Aufgabennummer: 2_078	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 1.3, WS 2.3	

Spielzeugteile werden von einer Maschine in den Farben Rot, Gelb und Blau eingefärbt.

a) Die 3 zur Produktion notwendigen Farbdüsen arbeiten (unabhängig voneinander) jeweils mit unterschiedlicher Qualität. Die Farbe Rot wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 96,8 %, die Farbe Gelb mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,3 % und die Farbe Blau mit einer Wahrscheinlichkeit von 97,2 % so auf die Teile aufgetragen, dass diese die Qualitätskontrolle bestehen.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau die Qualitätskontrolle besteht.

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang für ein zweifärbiges Spielzeugteil, dessen Wahrscheinlichkeit durch $P(E) = 1 - (0{,}968 \cdot 0{,}983)$ berechnet wird.

b) Die einfärbigen Spielzeugteile einer Produktion werden vermessen und ihre jeweiligen Längen werden tabellarisch erfasst.

rote Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
4,5	20
5,6	10
6,0	20
6,5	15
25,3	5

gelbe Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
5,5	25
10,0	7
14,5	13

blaue Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
7,0	70

1) Ermitteln Sie den Median der Längen der gelben Spielzeugteile.

2) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Längen der blauen Spielzeugteile gleich groß ist wie das arithmetische Mittel der Längen der roten Spielzeugteile.

Lösungserwartung

a1) E ... zweifärbiger Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau besteht die Kontrolle

$P(E) = 0{,}968 \cdot 0{,}972 = 0{,}9408...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 94,1 %.

a2) E steht in diesem Sachzusammenhang für das Ereignis, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Gelb die Kontrolle nicht besteht.

b1) Median der Längen der gelben Spielzeugteile: $\tilde{x} = 5{,}5$ cm

b2) $\bar{x}_{\text{rot}} = \frac{20 \cdot 4{,}5\text{ cm} + 10 \cdot 5{,}6\text{ cm} + 20 \cdot 6{,}0\text{ cm} + 15 \cdot 6{,}5\text{ cm} + 5 \cdot 25{,}3\text{ cm}}{70} = 7{,}0\text{ cm}$

$\bar{x}_{\text{blau}} = 7{,}0$ cm

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Münzen

Aufgabennummer: 2_067	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, WS 2.3, WS 3.2	

Susi und Markus spielen mit fairen Münzen. Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf" und „Zahl" jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Susi hat eine Schachtel mit 3 Ein-Euro-Münzen und 5 Zwei-Euro-Münzen.
Markus hat eine Schachtel mit 2 Ein-Euro-Münzen und 3 Zwei-Euro-Münzen.
Beide ziehen aus ihrer Schachtel zufällig jeweils 1 Münze.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass durch die beiden Ziehungen ein Gesamtwert von € 3 erzielt wird.

b) Markus will eine Zwei-Euro-Münze 10-mal werfen.
Susi stellt die Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir mindestens 3-mal ‚Zahl'?"

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen mindestens 3-mal „Zahl" geworfen wird.

c) Susi und Markus beschäftigen sich mit der Wahrscheinlichkeit, mit der „Zahl" beim wiederholten Werfen einer Münze auftritt. Dabei stoßen sie auf folgende Gleichung:

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}5^n = 0{,}9375$

X ... Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Zahl"

1) Berechnen Sie n.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes n in diesem Zusammenhang.

Lösungserwartung

a1) $P(S = 1 \text{ und } M = 2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}$

$P(S = 2 \text{ und } M = 1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist die gesuchte Lösung:

$\frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40} = 47{,}5\ \%$

b1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung: $n = 10$ und $p = 0{,}5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9453... \approx 94{,}5\ \%$

c1) $n = \frac{\ln(0{,}0625)}{\ln(0{,}5)} = 4$

c2) Der Wert n gibt an, wie oft man die Münze werfen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 93,75 % mindestens 1-mal „Zahl“ geworfen wird.

Sicherheitskontrolle*

Aufgabennummer: 2_096	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 2.3, WS 3.1, WS 3.2, FA 1.5, AN 4.3	

Beim Einlass in ein bestimmtes Stadion findet bei einer Veranstaltung eine maximal dreistufige Sicherheitskontrolle bei Personen statt, um mitgeführte Gegenstände zu kontrollieren und unzulässige Gegenstände zu erfassen. Liefert die erste Stufe dieser Sicherheitskontrolle kein eindeutiges Ergebnis, dann wird die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle durchgeführt. Liegt dann noch immer kein eindeutiges Ergebnis vor, kommt die dritte Stufe der Sicherheitskontrolle zum Einsatz.

Die erste und die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle dauern jeweils 15 s, die dritte Stufe dauert 300 s. Ein eindeutiges Ergebnis liefert dabei die erste Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, die zweite Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.

Aufgabenstellung:

a) Die Zufallsvariable X beschreibt die Dauer d (in s) der Sicherheitskontrolle bei einer Person. Wartezeiten, die eventuell auftreten können, werden nicht berücksichtigt.

1) Ergänzen Sie in der nachstehenden Tabelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X.

d			
$P(X = d)$			

2) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

b) Der Wert p gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person einen unzulässigen Gegenstand mit sich führt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen beide einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen, beträgt 10 %.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen mindestens 5 Personen einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert), Maturatermin: 16. September 2020

c) Die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion kann mithilfe der Funktion A mit $A(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $0 \leq t \leq 90$ in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden, wobei zum Zeitpunkt $t = 0$ der Einlass ins Stadion beginnt (t in Minuten, $A(t)$ in Personen pro Minute).

Zu Beginn des Einlasses ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion gleich 0.
45 min nach Beginn des Einlasses ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion maximal. Zu diesem Zeitpunkt beträgt sie 15 Personen pro Minute.

1) Berechnen Sie die Werte von a, b und c.

2) Geben Sie die Anzahl der Personen an, die insgesamt bis zum Zeitpunkt $t = 90$ ins Stadion gekommen sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1)

d	15	30	330
$P(X = d)$	0,9	$0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06$	$0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$

a2) $E(X) = 15 \cdot 0{,}9 + 30 \cdot 0{,}06 + 330 \cdot 0{,}04 = 28{,}5$

b) Lösungserwartung:

b1) $p^2 = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}31622... \approx 0{,}3162$

b2) Y ... Anzahl der Personen, die einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen
Y ist binomialverteilt mit $n = 10$, $p = 0{,}31622...$
$P(Y \geq 5) = 0{,}1794... \approx 0{,}179$

c) Lösungserwartung:

c1) $A(0) = 0,\ A(45) = 15,\ A'(45) = 0$

$a = -\frac{1}{135},\ b = \frac{2}{3},\ c = 0$

c2) $\int_0^{90} A(t)\,\mathrm{d}t = 900$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Ergänzung der richtigen Werte in der Tabelle.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für die Angabe der drei richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zuverlässigkeit eines Systems*

Aufgabennummer: 2_045	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1, AN 3.3, WS 2.3	

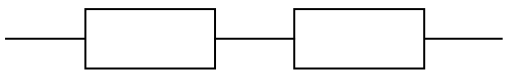
Ein System ist im Folgenden eine Maschine, die aus mehreren Bauteilen besteht. Jedes Bauteil dieses Systems kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit korrekt funktionieren oder ausfallen. Wenn einzelne Bauteile eines Systems ausfallen, hängt es von der Bauart des Systems ab, ob das gesamte System weiter funktioniert oder ob es ausfällt.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Bauteils* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. Das gilt jeweils für eine bestimmte Zeitdauer und unter bestimmten Bedingungen.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Systems* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. (Es wird modellhaft angenommen, dass Ausfälle von Bauteilen voneinander unabhängig sind.) Die entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit heißt Ausfallwahrscheinlichkeit.

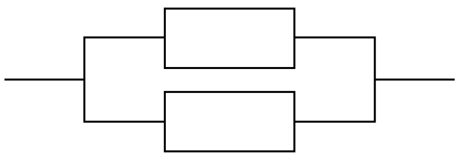
Man unterscheidet zwei einfache Typen von Systemen:

- Seriensysteme:



  Ein Seriensystem funktioniert genau dann, wenn alle Bauteile funktionieren.

- Parallelsysteme:

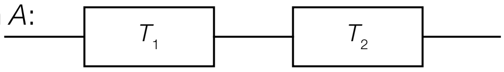


  Ein Parallelsystem funktioniert genau dann, wenn mindestens ein Bauteil funktioniert.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist das System A:



Das Bauteil T_1 hat die Zuverlässigkeit p_1 und das Bauteil T_2 hat die Zuverlässigkeit p_2.

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems A als Funktion z_A von p_1 und p_2.

Geben Sie $z_A(p_1, p_2)$ an!

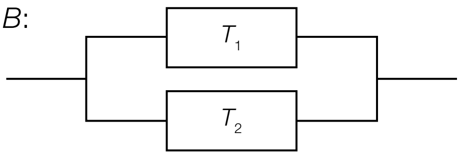
$z_A(p_1, p_2) =$ ____

Bei einem anderen System gleicher Bauart haben die Bauteile jeweils die gleiche Zuverlässigkeit $p_1 = p_2 = 0{,}7$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit dieses Systems soll auf ein Viertel der aktuellen Ausfallwahrscheinlichkeit gesenkt werden.

Geben Sie an, welchen Wert die Zuverlässigkeit p_{neu} (für jedes der beiden Bauteile) annehmen muss!

$p_{\text{neu}} =$ ____

b) Gegeben ist das System B:



Die beiden Bauteile T_1 und T_2 haben jeweils die gleiche Zuverlässigkeit p.

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems B als Funktion z_B von p.

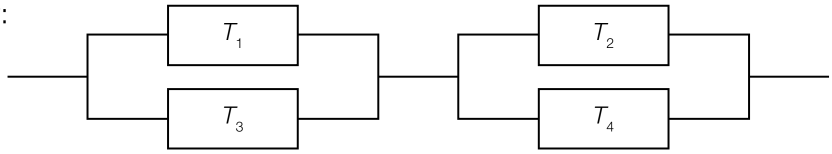
Geben Sie $z_B(p)$ an!

$z_B(p) =$ ____

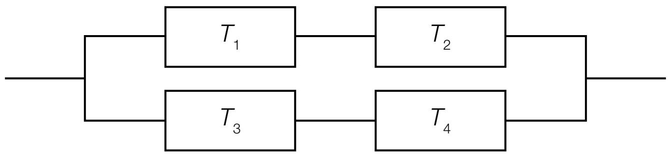
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion z_B auf dem Intervall (0; 1) streng monoton steigend ist!

c) Gegeben sind die Systeme C und D:

System C:



System D:



Jedes der Bauteile T_1, T_2, T_3 und T_4 hat die gleiche Zuverlässigkeit p.

Die Zuverlässigkeit z_C des Systems C ist eine Funktion von p und wird durch die Funktionsgleichung $z_C(p) = p^4 - 4 \cdot p^3 + 4 \cdot p^2$ beschrieben.

Ermitteln Sie den Quotienten $\frac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)}$ und interpretieren Sie diesen Wert für das System C!

Die Zuverlässigkeit z_D des Systems D ist eine Funktion von p.

Begründen Sie, warum $z_C(p) > z_D(p)$ für alle $p \in (0; 1)$ gilt!
Verwenden Sie dazu entweder eine Funktionsgleichung von z_D oder begründen Sie anhand der Bauart der Systeme C und D.

Lösungserwartung

a) $z_A(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2$

mögliche Vorgehensweise:

$1 - p_{neu}^2 = \frac{1 - 0{,}7^2}{4}$

$p_{neu} = \sqrt{0{,}8725} \approx 0{,}934$

b) $z_B(p) = 1 - (1 - p)^2$

mögliche Vorgehensweisen:

Der Funktionsterm $1 - (1 - p)^2 = -(p - 1)^2 + 1$ ist dahingehend zu deuten, dass die durch $f(x) = x^2$ beschriebene Grundparabel durch Einsetzen von $x = (p - 1)$ um eine Einheit nach rechts verschoben wird, wegen des Minus vor der Klammer an der horizontalen Achse gespiegelt und durch die Addition von 1 um eine Einheit nach oben geschoben wird.
Damit liegt der Scheitelpunkt bei $(1|1)$ und z_B ist im Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend.

oder:

$z_B'(p) = 2 \cdot (1 - p) > 0$ für alle $p \in (0; 1)$

oder:

$z_B = 1 - (1 - p)^2$
$(1 - p)$ ist für $p \in (0; 1)$ positiv und streng monoton fallend, daher auch $(1 - p)^2$.
Damit ist $1 - (1 - p)^2$ für $p \in (0; 1)$ streng monoton steigend.

c) $\frac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)} \approx 0{,}254$

mögliche Interpretation:
Bei Erhöhung der Zuverlässigkeit der Bauteile von 0,8 auf 0,9 sinkt die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems auf etwa ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

mögliche Begründungen:

$z_D(p) = 2 \cdot p^2 \cdot (1 - p^2) + p^4$
$z_D(p) = 2 \cdot p^2 - p^4$

Der Graph der Funktion z_C verläuft für alle $p \in (0; 1)$ oberhalb des Graphen der Funktion z_D.

oder:

Bei allen Kombinationen, bei denen System *D* funktioniert, funktioniert auch System *C*. Außerdem funktioniert System *C* auch dann, wenn nur T_1 und T_4 bzw. nur T_2 und T_3 funktionieren.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen richtigen Term für z_A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,93; 0,94] bzw. [93 %; 94 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für einen richtigen Nachweis. Andere richtige Nachweise (z. B. grafische Nachweise) sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für den richtigen Wert des Quotienten und eine richtige Interpretation.
Toleranzintervall: [0,25; 0,26] bzw. [25 %; 26 %]
– Ein Punkt für eine richtige Begründung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Roulette*

Aufgabennummer: 2_040	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 2.3, WS 3.1, WS 3.2	

Roulette ist ein Glücksspiel, bei dem mittels einer Kugel eine natürliche Zahl aus dem Zahlenbereich von 0 bis 36 zufällig ausgewählt wird, wobei jede der 37 Zahlen bei jedem der voneinander unabhängigen Spieldurchgänge mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Das Spielfeld mit der Zahl Null ist grün gefärbt, die Hälfte der restlichen Zahlenfelder ist rot, die andere Hälfte schwarz gefärbt.
Die nachstehende Tabelle zeigt eine Auswahl von Setzmöglichkeiten und die im Erfolgsfall ausbezahlten Gewinne. „35-facher Gewinn" bedeutet zum Beispiel, dass bei einem gewonnenen Spiel der Einsatz und zusätzlich der 35-fache Einsatz (also insgesamt der 36-fache Einsatz) ausbezahlt wird.

Einzelzahl (von 0 bis 36)	35-facher Gewinn
Rot/Schwarz	1-facher Gewinn
Ungerade/Gerade (ohne Null)	1-facher Gewinn

Eine der bekanntesten Spielstrategien ist das Martingale-System. Man setzt dabei stets auf dieselbe „einfache Chance" (z. B. auf „Rot" oder „Gerade"). Falls man verliert, verdoppelt man den Einsatz im darauffolgenden Spiel. Sollte man auch dieses Spiel verlieren, verdoppelt man den Einsatz noch einmal für das nächstfolgende Spiel und setzt diese Strategie von Spiel zu Spiel fort. Sobald man ein Spiel gewinnt, endet diese Spielserie, und man hat mit dieser Strategie den Einsatz des ersten Spiels dieser Spielserie (Starteinsatz) als Gewinn erzielt.

Aufgabenstellung:

a) Die Zufallsvariable X beschreibt, wie oft die Kugel bei 80 Spielen auf eine bestimmte Zahl fällt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel bei 80 Spielen mindestens viermal auf eine bestimmte Zahl fällt!

   Ein Spieler möchte seine Gewinnchancen erhöhen und handelt wie folgt: Er notiert während einer Serie von z. B. 37 Spielen, auf welche Zahlen die Kugel fällt. Weiters geht er davon aus, dass die Kugel in den nachfolgenden Spielen auf die dabei nicht notierten Zahlen fällt, und setzt auf diese Zahlen.

   Geben Sie an, ob der Spieler mit dieser Strategie die Gewinnchancen erhöhen kann, und begründen Sie Ihre Antwort!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

b) Eine Spielerin wendet das Martingale-System an und setzt immer auf „Rot“. Die Spielserie endet, sobald die Spielerin gewinnt bzw. wenn der vom Casino festgelegte Höchsteinsatz von € 10.000 keine weitere Verdoppelung des Spieleinsatzes mehr erlaubt.

Die nachstehende Tabelle zeigt, wie schnell die Einsätze ausgehend von einem Starteinsatz von € 10 bei einer Martingale-Spielserie im Falle einer „Pechsträhne“ ansteigen können.

Spielrunde	Einsatz in €
1	10
2	20
3	40
4	80
5	160
6	320
7	640
8	1 280
9	2 560
10	5 120

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielerin bei dieser Martingale-Spielserie alle zehn Spiele verliert!

Zeigen Sie durch die Berechnung des Erwartungswerts für den Gewinn, dass trotz der sehr geringen Wahrscheinlichkeit, zehn aufeinanderfolgende Spiele zu verlieren, das beschriebene Martingale-System ungünstig für die Spielerin ist!

Lösungserwartung

a) $P(X \geq 4) \approx 0{,}171$

Da die Spieldurchgänge voneinander unabhängig sind und somit die Ergebnisse der vorherigen Spielrunden keine Auswirkungen auf die nachfolgenden Spielrunden haben, kann der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht beeinflussen.

b) $\left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx 0{,}00128$

Mögliche Vorgehensweise:

Bei zehn aufeinanderfolgenden verlorenen Spielrunden beträgt der Verlust € 10.230.
Endet die Spielserie mit einem Gewinn, so beträgt dieser € 10.
Erwartungswert für einen Gewinn: $(1 - 0{,}00128) \cdot 10 - 0{,}00128 \cdot 10\,230 \approx -3{,}11$
Ein negativer Erwartungswert zeigt, dass dieses Spiel langfristig gesehen für die Spielerin ungünstig ist.

Lösungsschlüssel

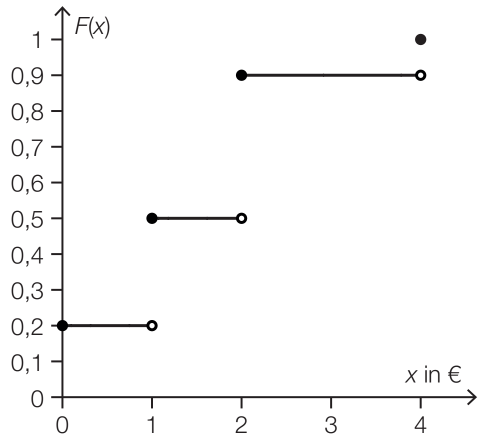
a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für $P(X \geq 4)$: [0,1; 0,2] bzw. [10 %; 20 %]
– Ein Punkt für die Angabe, dass der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht erhöhen kann, und eine korrekte Begründung.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,0012; 0,0013]
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

Glücksrad

Aufgabennummer: 2_007	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Bei einem Glücksspiel werden nach dem Drehen eines Glücksrads € 0, € 1, € 2 oder € 4 ausbezahlt. Jedes Mal, bevor das Rad gedreht wird, ist eine Spielgebühr von e € zu bezahlen.
Die Zufallsvariable X gibt die Höhe des ausbezahlten Betrags an.
Nachstehend ist der Graph der Verteilungsfunktion F in Abhängigkeit vom ausbezahlten Betrag x (in €) mit $F(x) = P(X \leq x)$ angegeben.



Aufgabenstellung:

a) 1) Tragen Sie die entsprechenden Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in die nachstehende Tabelle ein.

ausbezahlter Betrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$				

2) Begründen Sie, warum jede Verteilungsfunktion monoton steigend ist und warum das Maximum jeder Verteilungsfunktion 1 sein muss.

b) 1) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

2) Interpretieren Sie den Erwartungswert von X für den Spielbetreiber in Bezug auf die Spielgebühr e.

c) Die Zufallsvariable Y gibt die Höhe des (tatsächlichen) Gewinns aus der Sicht der Spielerin / des Spielers an.

Gewinn y in €				
$P(Y = y)$				

1) Tragen Sie die Werte für den Gewinn y in Abhängigkeit von der Spielgebühr e in die obige Tabelle ein.

2) Tragen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y in Abhängigkeit von e in die obige Tabelle ein.

Lösungserwartung

a1)

ausbezahlter Betrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,4	0,1

a2) Die Verteilungsfunktion entsteht durch Summenbildung der Einzelwahrscheinlichkeiten. Da diese stets größer oder gleich 0 sind, ist jede Verteilungsfunktion monoton steigend. Da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten einer Verteilungsfunktion 1 ist, muss ihr Maximum ebenfalls 1 sein.

b1) $E(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$

b2) Der Mindestbetrag der Spielgebühr e muss mehr als € 1,50 betragen, um langfristig Gewinn zu machen.

c1 und c2)

Gewinn y in €	$0 - e$	$1 - e$	$2 - e$	$4 - e$
$P(Y = y)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Werte.

Müsliriegel*

Aufgabennummer: 2_100	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.2, AN 1.1, WS 3.1, WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3	

Ein neuer Müsliriegel steht vor der Markteinführung. Der Hersteller dieses Müsliriegels produziert 100 000 Stück davon.

Auf allen Verpackungen der Müsliriegel wird die Möglichkeit von Sofortgewinnen angekündigt. Die jeweilige Höhe des Sofortgewinns kann man nach dem Öffnen der Verpackung auf deren Innenseite ablesen. Der Hersteller des Müsliriegels gibt an:

Es werden

- 9 000 Sofortgewinne zu je € 2
- 900 Sofortgewinne zu je € 5
- 100 Sofortgewinne zu je € 65

ausgezahlt.

Alle produzierten Müsliriegel werden an Geschäfte geliefert. Die Verteilung der Müsliriegel erfolgt nach dem Zufallsprinzip.

Aufgabenstellung:

a) Unter Berücksichtigung aller Produktionskosten kostet jeder der 100 000 Müsliriegel in der Produktion durchschnittlich € 1.

Der Verkaufspreis eines Müsliriegels soll so festgelegt werden, dass für den Hersteller ein Gewinn von mindestens € 80.000 erzielt wird, wenn nach dem Verkauf aller Müsliriegel alle Sofortgewinne ausgezahlt werden müssen.
Alle Müsliriegel haben den gleichen Verkaufspreis.

1) Ermitteln Sie den unter diesen Voraussetzungen kleinstmöglichen Verkaufspreis p des Müsliriegels.

2) Geben Sie an, um wie viel Prozent der kleinstmögliche Verkaufspreis p gesenkt werden kann, wenn man die Müsliriegel ohne Gewinnspiel verkauft und der Gewinn trotzdem mindestens € 80.000 ausmachen soll.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

b) Die Zufallsvariable X beschreibt die Höhe des ausgezahlten Sofortgewinns pro gekauften Müsliriegel.

1) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Ein Kunde kauft 4 Müsliriegel.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Kunde mindestens einen Sofortgewinn erzielt.

c) Aus Erfahrung weiß man, dass 95 % der Müsliriegel eine vorgegebene Mindestmasse haben.

Eine Zufallsstichprobe von 1 000 Müsliriegeln wird ausgewählt. Die binomialverteilte Zufallsvariable Y beschreibt dabei die Anzahl der Müsliriegel in dieser Zufallsstichprobe, die die vorgegebene Mindestmasse haben.

1) Ermitteln Sie die Standardabweichung $\sigma(Y)$ der Zufallsvariablen Y.

$\sigma(Y)$ = ____

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Kontext.

$P(Y \geq 933) \approx 0{,}99$

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$G(x)$ ... Gewinn bei einer Produktion von x Müsliriegeln
$G(100\,000) = p \cdot 100\,000 - 100\,000 - (9\,000 \cdot 2 + 900 \cdot 5 + 100 \cdot 65)$
$G(100\,000) = 80\,000 \quad \Rightarrow \quad p = € \; 2{,}09$

a2) $p_1 \cdot 100\,000 - 100\,000 = 80\,000 \quad \Rightarrow \quad p_1 = € \; 1{,}80$
$\frac{0{,}29}{2{,}09} = 0{,}1387... \approx 13{,}9\,\%$

b) **Lösungserwartung:**

b1) $E(X) = 0{,}09 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot 5 + 0{,}001 \cdot 65$
$E(X) = € \; 0{,}29$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$1 - \frac{90\,000}{100\,000} \cdot \frac{89\,999}{99\,999} \cdot \frac{89\,998}{99\,998} \cdot \frac{89\,997}{99\,997} = 0{,}3439...$$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $\sigma(Y) = \sqrt{1\,000 \cdot 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}95)} = 6{,}892...$

c2) mögliche Interpretation:

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 933 Müsliriegel die vorgegebene Mindestmasse haben, beträgt ca. 99 %.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die näherungsweise Berechnung mit $1 - 0{,}9^4$ ebenfalls als richtig zu werten ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
c2) Ein Punkt für eine richtige Interpretation..

Würfelspiel

Bei einem Würfelspiel werden fünf sechsflächige Würfel gleichzeitig geworfen. Bei jedem der Würfel treten die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Die fünf Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. Die Ergebnisse der Würfe sind voneinander unabhängig.

Nachstehend sind drei mögliche Ereignisse beschrieben.

Grande	Eine beliebige Augenzahl tritt fünfmal auf, z. B. 4, 4, 4, 4, 4.
Full House	Eine beliebige Augenzahl tritt genau dreimal auf. Eine andere beliebige Augenzahl tritt genau zweimal auf, z. B. 1, 1, 1, 4, 4.
Straße	Die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 2, 3, 4, 5, 6 treten jeweils genau einmal auf.

Aufgabenstellung:

a) 1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für ein *Grande*, wenn die fünf Würfel einmal geworfen werden. *[0/1 P.]*

Es wurden die Augenzahlen 2, 2, 2, 4 und 5 geworfen. Bei einem zweiten Wurf werden nur die beiden Würfel mit den Augenzahlen 4 und 5 erneut geworfen, die anderen drei Würfel bleiben liegen.
Die Wahrscheinlichkeit, mit diesem zweiten Wurf ein *Grande* zu erhalten, beträgt p_1.
Die Wahrscheinlichkeit, mit diesem zweiten Wurf ein *Full House* zu erhalten, beträgt p_2.

2) Ermitteln Sie die zwei Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2.

p_1 = ______________________________

p_2 = ______________________________ *[0/½/1 P.]*

b) Für die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E bei einem Wurf mit fünf Würfeln gilt:

$$P(E) = 6 \cdot \left[\binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{5}{6}\right]$$

1) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

c) Die Wahrscheinlichkeit für eine *Straße* liegt bei einem Wurf mit den fünf Würfeln bei rund 3,09 %. Die Wahrscheinlichkeit für ein *Full House* liegt bei einem Wurf mit den fünf Würfeln bei rund 3,86 %.

Franz würfelt einmal mit allen fünf Würfeln. Anna gibt Franz 40 Euro, wenn er eine *Straße* oder ein *Full House* erhält. In allen anderen Fällen bekommt Anna von Franz x Euro.

1) Ermitteln Sie x so, dass die zu erwartenden Beträge, die Anna und Franz einander auszahlen, annähernd gleich sind. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{1\,296} = 0{,}0007...$

oder:

$6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{1\,296} = 0{,}0007...$

a2) $p_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0{,}0277...$

$p_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} = 0{,}1388...$

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit für ein *Grande*.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der zwei Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2, ein halber Punkt für nur eine richtige Wahrscheinlichkeit.

b1) E ... „beim Wurf der fünf Würfel tritt eine (beliebige) Augenzahl genau viermal auf“

b1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang.

c1) P(„Franz bekommt 40 Euro“) = 0,0309 + 0,0386 = 0,0695
P(„Anna bekommt x Euro“) = 1 – P(„Franz bekommt 40 Euro“) = 0,9305
40 · P(„Franz bekommt 40 Euro“) = x · P(„Anna bekommt x Euro“)

x = 2,987... Euro

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von x.

Krankenstände

Die durchschnittliche Dauer der Krankenstände von Angestellten in einem bestimmten Betrieb ist in den letzten Jahren gesunken.

Aufgabenstellung:

a) In der nachstehenden Tabelle ist für das Jahr 2000 und für das Jahr 2015 jeweils die durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Tagen angegeben.

Jahr	durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Tagen
2000	12,6
2015	9,9

Mithilfe dieser Daten soll eine lineare Funktion K erstellt werden, die die durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Abhängigkeit von der Zeit t ab dem Jahr 2000 beschreibt.

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion K auf. *[0/1 P.]*

$K(t) =$ ____________________________________

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2000
$K(t)$ ... durchschnittliche Dauer der Krankenstände zur Zeit t in Tagen

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{9{,}9 - 12{,}6}{12{,}6} \approx -0{,}214$$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass im Winter der Angestellte A mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % und der Angestellte B mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % erkrankt.

Dabei wird modellhaft angenommen, dass alle Erkrankungen unabhängig voneinander erfolgen.

1) Beschreiben Sie ein im gegebenen Sachzusammenhang mögliches Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$P(E) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}7$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Angestellte A in höchstens 1 von 5 Wintern erkrankt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $K(t) = -0{,}18 \cdot t + 12{,}6$

a2) Die durchschnittliche Dauer der Krankenstände hat im Zeitraum von 2000 bis 2015 um rund 21,4 % abgenommen.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion *K*.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) *E* ... „mindestens 1 der beiden Angestellten erkrankt in einem Winter"

b2) *X* ... Anzahl der Winter mit Erkrankungen des Angestellten *A*
X ist binomialverteilt mit $n = 5$, $p = 0{,}2$.

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}8^5 + 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}73728$

b1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben von *E* im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Auslastung von Flügen

Für Fluggesellschaften ist eine hohe Auslastung ihrer Flüge wichtig.

Aufgabenstellung:

a) Häufig werden bei Flügen nicht alle verkauften Tickets in Anspruch genommen. Daher werden üblicherweise mehr Tickets verkauft, als Plätze zur Verfügung stehen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person (unabhängig von den anderen Personen) ihr Ticket in Anspruch nimmt, beträgt 90 %.
Für einen bestimmten Flug werden 6 % mehr Tickets verkauft, als Plätze zur Verfügung stehen.

Es stehen m Plätze zur Verfügung.
Es werden n Tickets verkauft.
Bei n verkauften Tickets beträgt der Erwartungswert für die in Anspruch genommenen Tickets 477.

1) Berechnen Sie n und m.

n = ____

m = ____ *[0/1 P.]*

Folgendes Ereignis E wird betrachtet:
E ... „für mindestens 1 Person, die ihr Ticket in Anspruch nehmen möchte, steht kein Platz zur Verfügung"

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E)$. *[0/1 P.]*

b) Für einen bestimmten Flug eines voll besetzten Flugzeugs kann der Zusammenhang zwischen der Flugdistanz s und dem Treibstoffverbrauch $V(s)$ näherungsweise durch die Funktion V: $[2\,000; 10\,000] \to \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

$$V(s) = 4 + \left(\frac{s}{128\,000} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{s}{1\,000} \cdot e^{-\frac{s}{4\,000}} \quad \text{mit} \quad 2\,000 \leq s \leq 10\,000$$

s ... Flugdistanz in km
$V(s)$ ... Treibstoffverbrauch bei der Flugdistanz s in Litern pro Fluggast pro 100 km

1) Ermitteln Sie die Flugdistanz d (in km), bei der der Treibstoffverbrauch am geringsten ist. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Menge an Treibstoff (in L), die dieses Flugzeug für die Flugdistanz d benötigt, wenn es mit 271 Fluggästen voll besetzt ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $n = \frac{477}{0{,}9} = 530$

$m = \frac{530}{1{,}06} = 500$

a2) X ... Anzahl der Personen, die ihr Ticket in Anspruch nehmen
Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 530$ und $p = 0{,}9$.

$P(X \geq 501) = 0{,}00012...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n und m.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) $V'(d) = 0$
$d = 3\,507{,}5...$ km
$(V''(3\,507{,}5...) > 0)$

b2) $V(3\,507{,}5...) = 3{,}67...$
$3{,}67... \cdot 271 \cdot 35{,}0... = 34\,934{,}1...$
Die benötigte Menge an Treibstoff beträgt rund 34 934 L.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Flugdistanz d.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Menge an Treibstoff.

Hurrikans – tropische Wirbelstürme

Die *Saffir-Simpson-Hurrikan-Skala* teilt Hurrikans anhand ihrer Windgeschwindigkeit in fünf Kategorien – von Kategorie 1 (schwach) bis Kategorie 5 (verwüstend) – ein.

Aufgabenstellung:

a) Den einzelnen Hurrikan-Kategorien dieser Skala sind unterschiedliche Schadenspotenziale zugeordnet, die den verursachten Schaden beschreiben:

Hurrikan-Kategorie	1	2	3	4	5
Schadenspotenzial	1	10	50	250	500

Datenquelle: Pielke Jr., Roger A. und Christopher W. Landsea: Normalized Hurricane Damages in the United States: 1925–95. In: *Weather and Forecasting* 13(3) (1998), S. 621–631.

1) Weisen Sie unter Verwendung der Werte aus der Tabelle nach, dass der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial nicht linear und auch nicht exponentiell ist. *[0/½/1 P.]*

b) Im 45-jährigen Zeitraum von 1972 bis 2016 traten 110 *Große Hurrikans* auf (das sind Hurrikans, die auf der Saffir-Simpson-Hurrikan-Skala in eine der Kategorien 3, 4 und 5 fallen).

Für den Zeitraum von 1972 bis 2016 wird die Anzahl aller Hurrikans pro Jahr untersucht.

$\bar{x}$ ... arithmetisches Mittel der Anzahl aller Hurrikans pro Jahr
h ... relativer Anteil der Großen Hurrikans an der Gesamtzahl aller Hurrikans von 1972 bis 2016

1) Stellen Sie unter Verwendung von $\bar{x}$ eine Formel zur Berechnung von h auf.

$h =$ ________________________________ *[0/1 P.]*

Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick über die Anzahl aller Hurrikans pro Jahr für den Zeitraum von 1972 bis 2016.

Anzahl aller Hurrikans pro Jahr	Anzahl der Jahre
0 bis 2	2
3 bis 5	20
6 bis 8	14
9 bis 11	7
12 bis 14	1
15 bis 17	1

Datenquelle: Landsea, Christopher W., Gabriel A. Vecchi et al.: Impact of Duration Thresholds on Atlantic Tropical Cyclone Counts. In: *Journal of Climate* 23(10) (2010), S. 2508–2519.

Eine exakte Berechnung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ der Anzahl aller Hurrikans pro Jahr ist anhand der in der obigen Tabelle zusammengefassten Daten nicht möglich. Mithilfe der Klassenmitten aus der linken Spalte kann jedoch ein Näherungswert für $\bar{x}$ berechnet werden. Dabei wird z. B. für „9 bis 11" als Klassenmitte der Wert 10 verwendet.

2) Berechnen Sie diesen Näherungswert für $\bar{x}$.

Näherungswert für $\bar{x}$: ________________________________ *[0/1 P.]*

c) Windgeschwindigkeiten werden oft in Kilometern pro Stunde (km/h) oder Knoten (kn) angegeben.
Es gilt:
1 kn = 1,852 km/h

Zwischen der Windgeschwindigkeit v (in km/h) und der Windgeschwindigkeit v_k (in kn) besteht ein direkt proportionaler Zusammenhang.

1) Stellen Sie eine Gleichung auf, die diesen Zusammenhang beschreibt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) S_i ... Schadenspotenzial bei der Hurrikan-Kategorie i
$S_2 = S_1 + 9,\ \ S_3 = S_2 + 40$
Die absolute Änderung des Schadenspotenzials für zwei aufeinanderfolgende Kategorien ist nicht konstant.
Der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial ist nicht linear.

$S_2 = S_1 \cdot 10,\ \ S_3 = S_2 \cdot 5$
Die relative Änderung des Schadenspotenzials für zwei aufeinanderfolgende Kategorien ist nicht konstant.
Der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial ist nicht exponentiell.

a1) Ein Punkt für das richtige Nachweisen bei beiden Zusammenhängen, ein halber Punkt bei nur einem richtig nachgewiesenen Zusammenhang.

b1) $h = \frac{110}{45 \cdot \overline{x}}$

b2) Näherungswert für $\overline{x}$: $\frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 20 + 7 \cdot 14 + 10 \cdot 7 + 13 \cdot 1 + 16 \cdot 1}{45} = 6{,}2$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Näherungswerts für $\overline{x}$.

c1) $v = 1{,}852 \cdot v_{\text{k}}$

oder:

$v_{\text{k}} = 0{,}539... \cdot v$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

Maturaball*

Aufgabennummer: 2_105	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Aufgabenstellung:

a) Für einen Maturaball werden Karten im Vorverkauf und an der Abendkassa angeboten. Im Vorverkauf kostet jede Karte € 20. An der Abendkassa kostet jede Karte um 10 % mehr.

Insgesamt wurden 640 Karten um einen Gesamtpreis von € 13.240 verkauft.

Es werden folgende Bezeichnungen gewählt:

x ... Anzahl der im Vorverkauf verkauften Karten
y ... Anzahl der an der Abendkassa verkauften Karten

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung von x und y.

b) Zur Unterhaltung wird das Spiel *Glücksrad* angeboten. Die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, beträgt bei jedem Spiel konstant und unabhängig voneinander 25 %.

Katja spielt dieses Spiel 3-mal.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Katja dabei genau 2-mal gewinnt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

c) Weiters wird das Spiel *Entenspiel* angeboten.
Von insgesamt 50 Badeenten sind 5 an ihrer Unterseite markiert.

Bei diesem Spiel wählt eine teilnehmende Person 2 der 50 Badeenten zufällig und ohne Zurücklegen aus. Jede markierte Badeente, die dabei ausgewählt wird, führt zu einem Gewinn.

Die Zufallsvariable X gibt dabei an, wie viele der beiden ausgewählten Badeenten markiert sind. Die Wahrscheinlichkeit für ein in diesem Sachzusammenhang mögliches Ereignis wird mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet.

$$P(X = \boxed{}) = \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49}$$

1) Tragen Sie die fehlende Zahl im dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Martin behauptet: „Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt.“

2) Begründen Sie, warum Martins Behauptung falsch ist.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) I: $20 \cdot x + 22 \cdot y = 13\,240$
II: $x + y = 640$

b) **Lösungserwartung:**

b1) X ... Anzahl der Gewinne
X ist binomialverteilt mit $n = 3$, $p = 0{,}25$.
$P(X = 2) = 3 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 = 0{,}140625$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $P(X = \boxed{1}) = \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49}$

c2) Martins Behauptung ist falsch, weil die Wahrscheinlichkeit, dass eine markierte Badeente ausgewählt wird, nicht konstant bleibt.

oder:

Martins Behauptung ist falsch, weil es sich beim gegebenen Sachzusammenhang um ein Ziehen ohne Zurücklegen handelt.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems mit zwei Gleichungen, ein halber Punkt für nur eine richtige Gleichung.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
c2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Lieblingsfarbe

Aufgabennummer: 2_068	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 1.2, WS 2.1, WS 3.2	

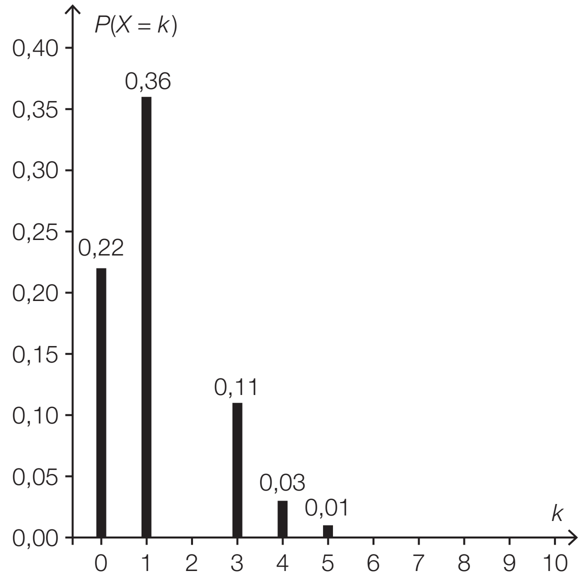
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Rosa als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 13 %.
25 zufällig ausgewählte Personen werden nach ihrer Lieblingsfarbe gefragt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 der 25 Personen Rosa als Lieblingsfarbe nennen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Orange als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 7 %.
Unter n befragten Personen soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 1 Person sein, die Orange als Lieblingsfarbe nennt.

1) Berechnen Sie die Anzahl n derjenigen Personen, die dafür mindestens befragt werden müssen.

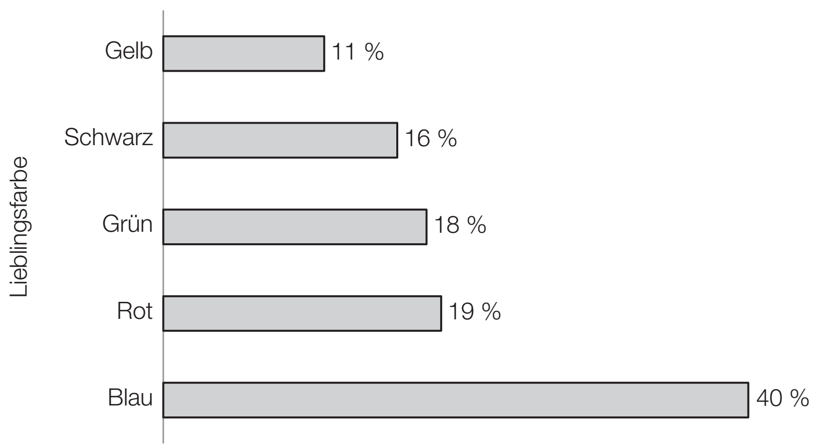
c) Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Personen unter 10 Befragten, die Lila als Lieblingsfarbe nennen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsvariablen ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 Befragten maximal 3 Befragte Lila als Lieblingsfarbe nennen, beträgt 96 %.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Säule für $P(X = 2)$ ein.

d) Die Schüler/innen einer Schule wurden nach ihren Lieblingsfarben gefragt. In der nachstehenden Abbildung ist dargestellt, wie viel Prozent der Befragten die jeweilige Farbe als Lieblingsfarbe genannt haben.



1) Beschreiben Sie, woran man erkennen kann, dass man auch mehr als eine Lieblingsfarbe nennen durfte.

Lösungserwartung

a1) X … Anzahl derjenigen Personen, die Rosa als Lieblingsfarbe nennen

Binomialverteilung mit $n = 25$ und $p = 0{,}13$:
$P(X = 3) = 0{,}2360\ldots$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 23,6 % nennen genau 3 der 25 befragten Personen Rosa als Lieblingsfarbe.

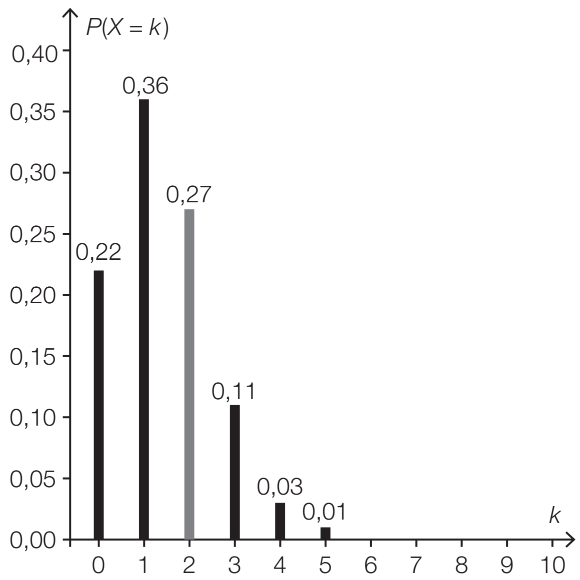
b1) X … Anzahl derjenigen Personen, die Orange als Lieblingsfarbe nennen

Binomialverteilung mit $p = 0{,}07$:
$P(X \geq 1) = 0{,}9$
$1 - P(X = 0) = 0{,}9$
$1 - 0{,}93^n = 0{,}9$

$n = 31{,}7...$

Es müssen mindestens 32 Personen befragt werden.

c1) $P(X = 2) = 0{,}96 - (0{,}22 + 0{,}36 + 0{,}11) = 0{,}27$



Toleranzintervall für die Höhe der Säule: [0,25; 0,30]

Es ist nicht erforderlich, den Wert von P(X = 2) *anzugeben.*

d1) Addiert man die Prozentsätze für alle Lieblingsfarben, so erhält man ein Ergebnis, das größer als 100 % ist.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Pauschalreisen

Aufgabennummer: 2_071	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, WS 3.2	

Ein Reisebüro vermittelt Plätze für Pauschalreisen nach Kroatien.

a) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Alle 100 zur Verfügung stehenden Plätze werden vermittelt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 4 der vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen werden.

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet werden kann:
$\binom{100}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^{95}$

b) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Es werden 102 Plätze vermittelt, obwohl nur 100 Plätze zur Verfügung stehen.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Plätze unter diesen Voraussetzungen nicht ausreicht.

c) Pro Reisetermin stehen jeweils 100 Plätze zur Verfügung.
Für jeden gebuchten Platz erzielt das Reisebüro einen Gewinn von a Euro.
Für jeden nicht gebuchten Platz macht das Reisebüro einen Verlust von 120 Euro.
Den Gesamtgewinn erhält man, indem man vom Gewinn für alle gebuchten Plätze den Verlust für alle nicht gebuchten Plätze abzieht.

Bei einem bestimmten Reisetermin werden nur x Plätze gebucht. Der Gesamtgewinn für diesen Termin beträgt G Euro.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus a und G.

$x =$ ____________________________________

Lösungserwartung

a1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}05$

$P(X \leq 4) = 0{,}4359...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 43,6 %.

a2) Es werden 5 der 100 vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen.

b1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 102$ und $p = 0{,}05$

$P(X \leq 1) = 0{,}0340...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 3,4 %.

c1) $G = x \cdot a - (100 - x) \cdot 120 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{G + 12\,000}{a + 120}$

Aufnahmetest

Aufgabennummer: 2_002	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Bei einem Aufnahmetest werden 10 Multiple-Choice-Fragen gestellt. Für jede Frage sind 4 Antwortmöglichkeiten angegeben, wobei nur eine davon richtig ist.
Kandidat K nimmt an diesem Aufnahmetest teil. Er kreuzt alle Antworten zufällig und unabhängig voneinander an.

Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie zwei Gründe an, warum die Anzahl der richtig beantworteten Fragen unter den vorliegenden Annahmen binomialverteilt ist.

b) Beantwortet man mindestens 7 Fragen richtig, so gilt der Aufnahmetest als bestanden. Beantwortet man alle 10 Fragen richtig, so erhält man zusätzlich ein Leistungsstipendium.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K nicht aufgenommen wird.

2) Interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeit $0{,}25^{10}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) 1) Berechnen Sie den Erwartungswert der von Kandidat K zufällig richtig beantworteten Fragen.

Lösungserwartung

a1) Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist unter den vorliegenden Annahmen binomialverteilt, weil:

- es nur die beiden Ausgänge „richtig beantwortet“ und „falsch beantwortet“ gibt,
- das Experiment unabhängig mit $n = 10$ Mal wiederholt wird,
- die Erfolgswahrscheinlichkeit dabei konstant bleibt.

b1) $1 - P(X \geq 7) = 1 - 0{,}0035... = 0{,}9964...$

b2) $0{,}25^{10}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass Kandidat K ein Leistungsstipendium erhält.

c1) $10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben von zwei richtigen Gründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Teilchenbeschleuniger

Aufgabennummer: 2_084	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, WS 3.2, WS 3.3	

Am Forschungsinstitut CERN wird mithilfe moderner Teilchenbeschleuniger physikalische Grundlagenforschung betrieben. In einem Teilchenbeschleuniger werden elektrisch geladene Teilchen auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt.

a) Die Teilchen bewegen sich in einem ringförmigen Tunnel nahezu mit Lichtgeschwindigkeit. Sie machen dabei in einer Sekunde *a* Umläufe und legen in dieser Zeit rund $3 \cdot 10^8$ m zurück.

1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Länge *u* eines Umlaufs in Kilometern.

$u =$ ____

b) Wenn Teilchen im Teilchenbeschleuniger kollidieren, können neue Teilchen entstehen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kollision ein Teilchen eines bestimmten Typs entsteht, beträgt 3,4 %.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird mit $P(E) = \binom{500}{2} \cdot 0{,}034^2 \cdot (1 - 0{,}034)^{498}$ berechnet.

1) Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird.

2) Berechnen Sie, wie viele dieser Teilchen im Mittel entstehen, wenn 1 000 Kollisionen stattfinden.

c) Im Zentrum eines Atoms befindet sich der Atomkern. Vereinfacht können sowohl der Atomkern als auch das gesamte Atom als kugelförmig angenommen werden.
In einer Broschüre wird beschrieben, wie klein ein Atomkern im Vergleich zum gesamten Atom ist: „Hätte ein Atomkern 1 cm Durchmesser, so wäre der Durchmesser des gesamten Atoms 100 m."

1) Berechnen Sie den Durchmesser eines Atoms, wenn der Durchmesser des Atomkerns 10^{-14} m beträgt.

Lösungserwartung

a1) $u = \frac{3 \cdot 10^8}{a \cdot 10^3}$

b1) Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei 500 Kollisionen genau 2 Teilchen dieses Typs entstehen.

b2) $1\,000 \cdot 0{,}034 = 34$

Bei 1 000 Kollisionen entstehen im Mittel 34 Teilchen dieses Typs.

c1) $\frac{100}{0{,}01} = \frac{d}{10^{-14}} \Rightarrow d = 10^{-10}$

Der Durchmesser des Atoms beträgt 10^{-10} m.