Süßwarenproduktion

Ein Unternehmen produziert Süßwaren.

a) Eine bestimmte Sorte von Schokoriegeln wird im Werk A und im Werk B produziert. Aufgrund unterschiedlicher Produktionsbedingungen sind die Kostenfunktionen für die Produktion in den beiden Werken unterschiedlich.

x … Produktionsmenge in ME
$K_A(x)$ … Gesamtkosten im Werk A bei der Produktionsmenge x in GE
$K_B(x)$ … Gesamtkosten im Werk B bei der Produktionsmenge x in GE

Bei der Produktionsmenge x_1 sind die jeweiligen Gesamtkosten in beiden Werken gleich hoch.

1) Argumentieren Sie, dass bei der Produktionsmenge x_1 auch die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch sind. *[0/1 P.]*

Für K_A gilt:
$K_A(x) = 0{,}0001 \cdot x^2 + 0{,}17 \cdot x + 200$

Für K_B gilt:
K_B ist eine lineare Funktion. Die Fixkosten betragen 260 GE, die variablen Stückkosten betragen 0,3 GE/ME.

2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion K_B auf. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch sind. *[0/1 P.]*

b) Die Gesamtkosten bei der Produktion von Waffelschnitten können durch die lineare Kostenfunktion K beschrieben werden.

$K(x) = a \cdot x + b$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

In Abbildung 1 sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K' und der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ dargestellt.

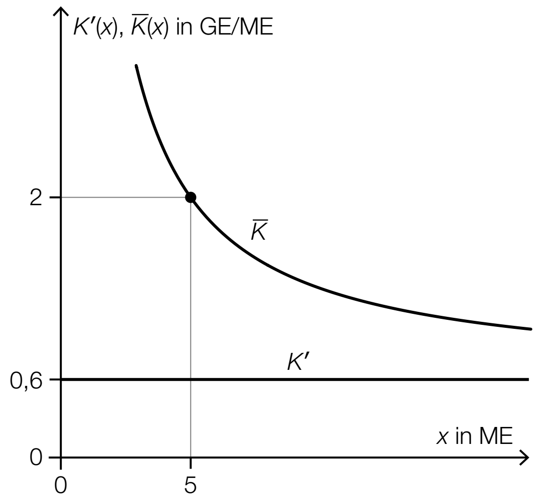


Abbildung 1

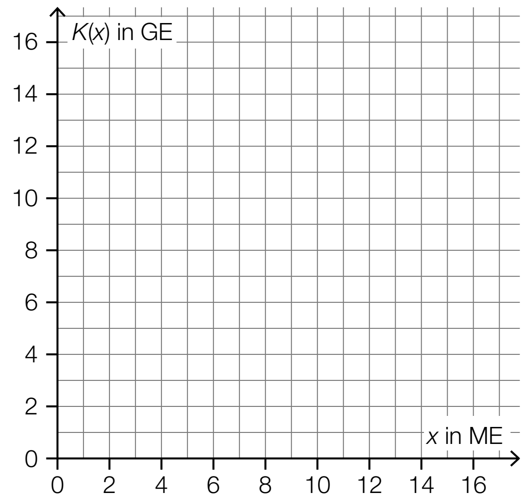


Abbildung 2

1) Geben Sie die Steigung a der Kostenfunktion K an.

$a =$ __________ GE/ME *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in Abbildung 2 den Graphen der Kostenfunktion K ein. *[0/1 P.]*

c) Für die Produktion von Schokolinsen sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$K(x) = 0{,}0003 \cdot x^3 - 0{,}017 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 40$
$E(x) = 1{,}5 \cdot x$

x … produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. *[0/1 P.]*

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}0003 \cdot x^2 - 0{,}017 \cdot x + 0{,}4 + \frac{40}{x}$$

$$0{,}0006 \cdot x - 0{,}017 - \frac{40}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \approx 52{,}5$$

3) Interpretieren Sie die Zahl 52,5 im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

Süßwarenproduktion

a1) Wenn $K_A(x_1) = K_B(x_1)$ gilt, dann gilt auch $\frac{K_A(x_1)}{x_1} = \frac{K_B(x_1)}{x_1}$, daher sind die jeweiligen Durchschnittskosten in beiden Werken gleich hoch.

a2) $K_B(x) = 0{,}3 \cdot x + 260$

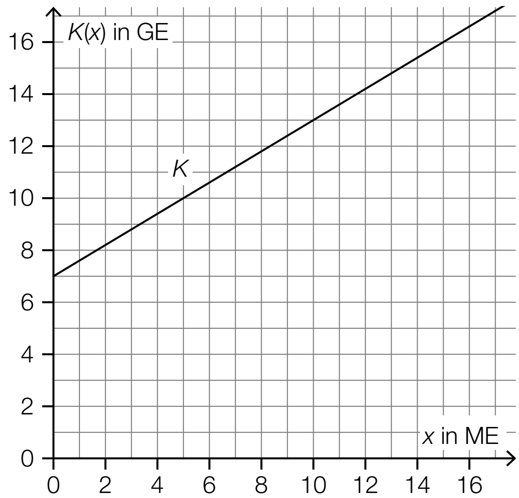
a3) $K_A'(x) = K_B'(x)$ *oder* $0{,}0002 \cdot x + 0{,}17 = 0{,}3$
$x = 650$

Bei einer Produktion von 650 ME sind die jeweiligen Grenzkosten in beiden Werken gleich hoch.

a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von K_B.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Produktionsmenge.

b1) $a = 0{,}6$ GE/ME

b2)



b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes von a.
b2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion K.

c1) $G(x) = E(x) - K(x)$
$G(x) = -0{,}0003 \cdot x^3 + 0{,}017 \cdot x^2 + 1{,}1 \cdot x - 40$

c2) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}0009 \cdot x^2 + 0{,}034 \cdot x + 1{,}1 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 58{,}62\ldots \quad (x_2 = -20{,}84\ldots)$
$G(58{,}62\ldots) = 22{,}46\ldots$

Der maximale Gewinn beträgt rund 22,5 GE.

c3) Das Betriebsoptimum bei der Produktion von Schokolinsen liegt bei rund 52,5 ME.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *G*.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des maximalen Gewinns.
c3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Werkzeugproduktion

In einer Fabrik werden Werkzeuge hergestellt. Der Fabrik ist auch ein Shop für den Direktverkauf angeschlossen.

a) Im Shop ist der Erlös aus dem Verkauf eines bestimmten Schraubenziehers, der zu einem fixen Preis verkauft wird, erfasst worden:

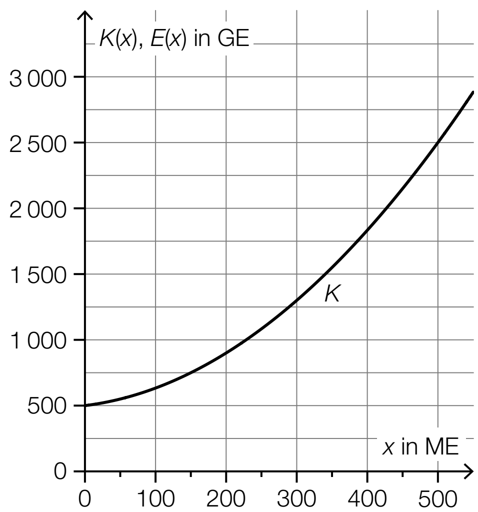
verkaufte Menge in ME	Erlös in GE
50	250
110	605

Die Daten in der obigen Wertetabelle sind allerdings fehlerhaft.

1) Weisen Sie nach, dass die obige Wertetabelle nicht zur Erlösfunktion des Schraubenziehers passen kann. *[0/1 P.]*

Es stellt sich heraus, dass nur der Erlös aus dem Verkauf von 50 ME korrekt erfasst wurde.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion E ein. *[0/1 P.]*



x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE
$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in GE

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinngrenzen ab.

untere Gewinngrenze: ____________________ ME

obere Gewinngrenze: ____________________ ME *[0/1 P.]*

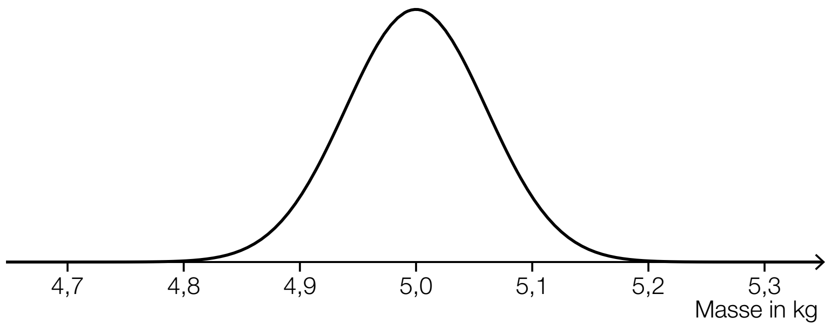
4) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass für die Funktionen E und K eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Wenn für eine Menge x_0 der Zusammenhang ___①___ gilt, dann ist ___②___.

①	
$E(x_0) = K(x_0)$	☐
$E'(x_0) = K'(x_0)$	☐
$E(x_0) > K(x_0)$	☐

②	
x_0 kleiner als der Break-even-Point	☐
$x_0 = 0$	☐
x_0 diejenige Menge, bei der der Gewinn maximal ist	☐

b) Für die Produktion eines bestimmten Werkzeugs wird ein Rohstoff in Packungen angeliefert. Die Masse dieser Packungen ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 5 kg. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse einer zufällig ausgewählten Packung um höchstens 0,1 kg vom Erwartungswert abweicht, beträgt 90 %.

1) Veranschaulichen Sie diese Wahrscheinlichkeit in der obigen Abbildung. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. *[0/1 P.]*

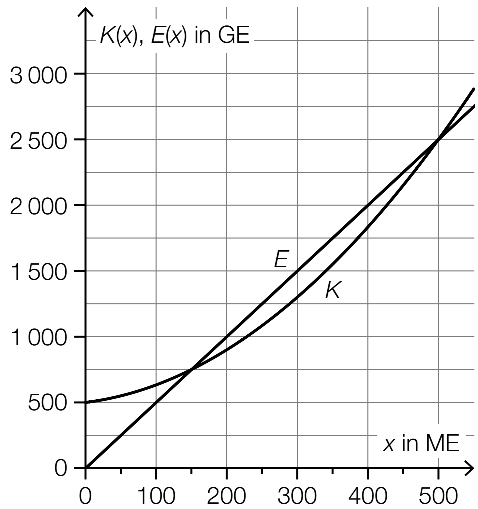
Möglicher Lösungsweg

a1) $p = \frac{250\text{ GE}}{50\text{ ME}} = 5\text{ GE/ME}$

$p = \frac{605\text{ GE}}{110\text{ ME}} = 5{,}5\text{ GE/ME}$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass der Schraubenzieher zu einem fixen Preis verkauft wird.

a2)



a3) untere Gewinngrenze: 150 ME
obere Gewinngrenze: 500 ME

Toleranzbereich: jeweils ±25 ME

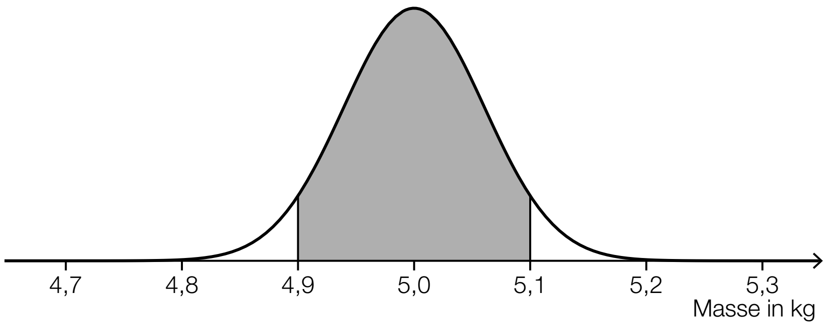
a4)

①	
$E'(x_0) = K'(x_0)$	☒

②	
x_0 diejenige Menge, bei der der Gewinn maximal ist	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion *E*.
a3) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Gewinngrenzen.
a4) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

b1)



b2) X ... Masse in kg

$P(X \leq 4{,}9) = 0{,}05$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\sigma = 0{,}060...$ kg

b1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung.

Pumpenproduktion

Aufgabennummer: B_169

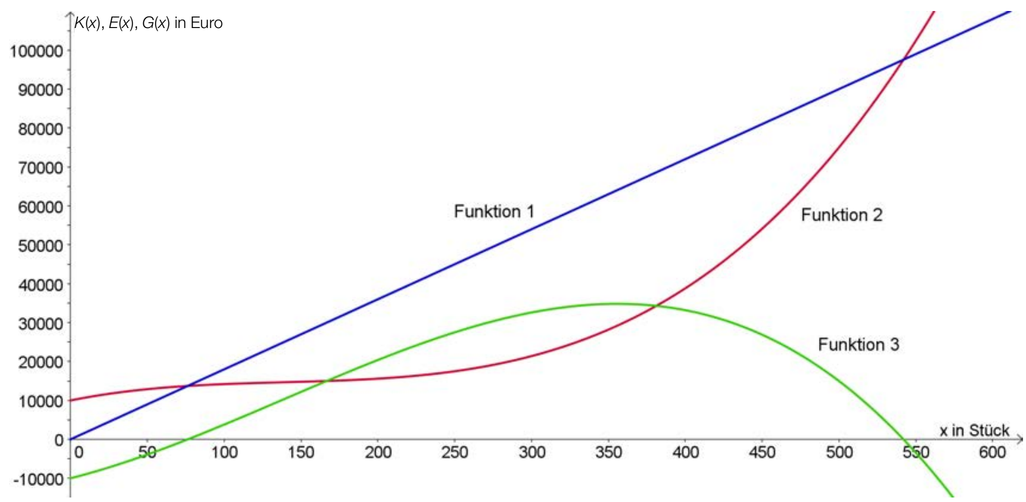
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Produktion von Schmutzwasserpumpen wird ein bestimmtes Modell hergestellt. Für die Kostenfunktion K bei der Herstellung dieses Modells gilt:

$$K(x) = 0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000$$

x … Stückzahl produzierter Schmutzwasserpumpen
$K(x)$ … Kosten bei der Produktion von x Schmutzwasserpumpen in Euro (€)

a) Die unten stehende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen
- der Kostenfunktion K
- der Erlösfunktion E
- der Gewinnfunktion G



– Begründen Sie, warum der Graph von Funktion 3 den Verlauf der Gewinnfunktion beschreibt.

b) – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Kosten, wenn die Produktion von 100 auf 101 Stück erhöht wird.
– Berechnen Sie die Grenzkosten für 100 Stück mithilfe der Grenzkostenfunktion.
– Begründen Sie, warum die Ergebnisse dieser Berechnungen unterschiedlich sind.

c) Die Schmutzwasserpumpen werden zu einem Preis von € 200 pro Stück verkauft.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gewinnfunktion G auf.
– Berechnen Sie, bei wie vielen verkauften Schmutzwasserpumpen der Gewinn maximal ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Funktion 3 stellt die Gewinnfunktion dar.
Der Funktionsgraph der Gewinnfunktion schneidet die vertikale Achse bei € –10.000 (Fixkosten).
Die Nullstellen der Gewinnfunktion liegen direkt unterhalb der Schnittpunkte der Kosten- und der Erlösfunktion.
Zwischen den Gewinngrenzen ist der Gewinn positiv, weil dort der Graph der Erlösfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft.

Alle richtigen Begründungen, die eine klare Entscheidung ermöglichen, sind zu akzeptieren.

b) $\frac{K(101)-K(100)}{1} = 15{,}861 \approx 15{,}86$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund € 15,86/Stück.

$K'(x) = 0{,}0036 \cdot x^2 - x + 80 \;\Rightarrow\; K'(100) = 16$

Die Grenzkosten bei 100 Stück betragen € 16/Stück.

Die Ergebnisse sind unterschiedlich, weil der Differenzenquotient die exakte Kostensteigerung angibt, während hingegen der Differenzialquotient einen Näherungswert für die Änderung der Kosten bei der Steigerung um ein Stück angibt.

c) Gewinn = Erlös – Kosten
$G(x) = 200 \cdot x - (0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000)$
$G(x) = -0{,}0012 \cdot x^3 + 0{,}5 \cdot x^2 + 120 \cdot x - 10\,000$
$G'(x) = -0{,}0036 \cdot x^2 + x + 120$
$-0{,}0036 \cdot x^2 + x + 120 = 0$ Berechnung mittels Technologieeinsatz: $x \approx 368{,}29$
Der maximale Gewinn wird bei 368 Stück erzielt.

Auch andere korrekte Berechnungswege sind als richtig zu werten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Niedrigzinsphase

Infolge der Finanzmarktkrise 2008 entstand eine über Jahre andauernde Phase niedriger Zinsen.

a) Für einen Kredit mit jährlich nachschüssigen Annuitäten in Höhe von je € 12.000 wurde in der Zeit vor der Niedrigzinsphase ein fixer Jahreszinssatz i vereinbart.
Die Zeile des Tilgungsplans für das Jahr 7 ist gegeben:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
7	€ 3.628,87	€ 8.371,13	€ 12.000,00	€ 78.030,55

1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz i. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Höhe des Kredits. *[0/1 P.]*

Nach dem Jahr 7 wird mit der Bank über einen neuen Zinssatz verhandelt. Mit dem ursprünglichen Zinssatz ergibt sich im Tilgungsplan folgende Zeile für das Jahr 8:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
8	Z_8	T_8	€ 12.000,00	K_8

Mit dem neuen, niedrigeren Zinssatz ergibt sich im Tilgungsplan folgende Zeile für das Jahr 8:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
8	Z_{neu}	T_{neu}	€ 12.000,00	K_{neu}

Diese beiden Zeilen für das Jahr 8 werden verglichen.

3) Tragen Sie jeweils das richtige Zeichen („<“ oder „>“) ein.

Z_{neu} ______ Z_8 T_{neu} ______ T_8 K_{neu} ______ K_8 *[0/1 P.]*

b) Bei Tilgungsplänen können verschiedene Sonderfälle auftreten.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D so zu, dass zutreffende Aussagen entstehen. *[0/1 P.]*

Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr gleich 0 ist,	
Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr negativ ist,	

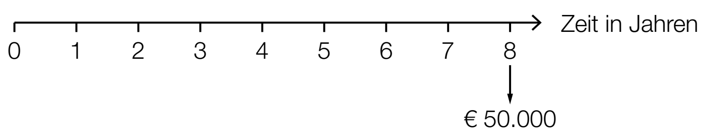
A	so wird die Restschuld in diesem Jahr vollständig beglichen.
B	so ist die Restschuld in diesem Jahr niedriger als im vorhergehenden Jahr.
C	so werden in diesem Jahr nur die anfallenden Zinsen beglichen.
D	so wird in diesem Jahr weniger als die anfallenden Zinsen zurückgezahlt.

c) In 8 Jahren sollen € 50.000 angespart werden. Die nachstehende Gleichung beschreibt den Ansparplan für einen positiven Jahreszinssatz.

$$R \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} \cdot q^5 + 20000 \cdot q^2 = 50000$$

R ... Rate
q ... jährlicher Aufzinsungsfaktor

1) Tragen Sie alle Raten R und den Betrag in Höhe von € 20.000 auf der nachstehenden Zeitachse ein. *[0/1/2 P.]*



2) Berechnen Sie die Höhe der Rate R für den Fall, dass der Zinssatz 0 % p. a. ist. *[0/1 P.]*

d) Die Europäische Zentralbank legt einen sogenannten *Leitzinssatz* fest. Seit der Finanzmarktkrise 2008 ist der Leitzinssatz gesunken (siehe nachstehende Tabelle):

Zeit ab 1.1.2008 in Jahren	0	1	2	3	4	5	6	7
Leitzinssatz in Prozent	4,00	2,50	1,00	1,00	1,00	0,75	0,25	0,05

Datenquelle: https://www.finanzen.net/leitzins/@historisch [21.10.2020].

Die zeitliche Entwicklung des Leitzinssatzes soll mithilfe von exponentieller Regression durch die Funktion L modelliert werden.

$L(t) = a \cdot b^t$

t ... Zeit ab 1.1.2008 in Jahren
$L(t)$ ... Leitzinssatz zur Zeit t in Prozent

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Funktion L auf. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem sich der Leitzinssatz gemäß der Funktion L jeweils halbiert. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $K_6 = 78\,030{,}55 + 8\,371{,}13 = 86\,401{,}68$

$i = \frac{3\,628{,}87}{86\,401{,}68} = 0{,}0419...$

Der Zinssatz beträgt rund 4,2 % p. a.

a2) $K_0 \cdot 1{,}042^7 = 12\,000 \cdot \frac{1{,}042^7 - 1}{0{,}042} + 78\,030{,}55$

$K_0 = 130\,000{,}001...$

Die Höhe des Kredits betrug € 130.000.

a3) $Z_{neu} < Z_8$ $\quad T_{neu} > T_8$ $\quad K_{neu} < K_8$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Jahreszinssatzes *i*.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe des Kredits.
a3) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zeichen.

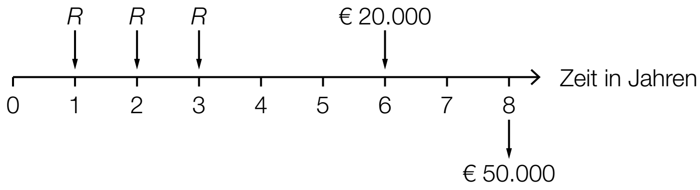
b1)

Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr gleich 0 ist,	C
Wenn der Tilgungsanteil in einem bestimmten Jahr negativ ist,	D

A	so wird die Restschuld in diesem Jahr vollständig beglichen.
B	so ist die Restschuld in diesem Jahr niedriger als im vorhergehenden Jahr.
C	so werden in diesem Jahr nur die anfallenden Zinsen beglichen.
D	so wird in diesem Jahr weniger als die anfallenden Zinsen zurückgezahlt.

b1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1)



c2) $R \cdot 3 + 20000 = 50000$

$R = € 10.000$

c1) Ein Punkt für das richtige Eintragen der Raten.
Ein Punkt für das richtige Eintragen des Betrags in Höhe von € 20.000.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von R.

d1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$L(t) = 4{,}472 \cdot 0{,}599^t$ *(Parameter gerundet)*

d2) $0{,}5 = 0{,}599^t$

$t = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}599)} = 1{,}352...$

Der Leitzinssatz halbiert sich gemäß der Funktion L jeweils in einem Zeitraum von rund 1,35 Jahren.

d1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion L.
d2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Zeitraums.

Porzellan*

Aufgabennummer: B_514		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

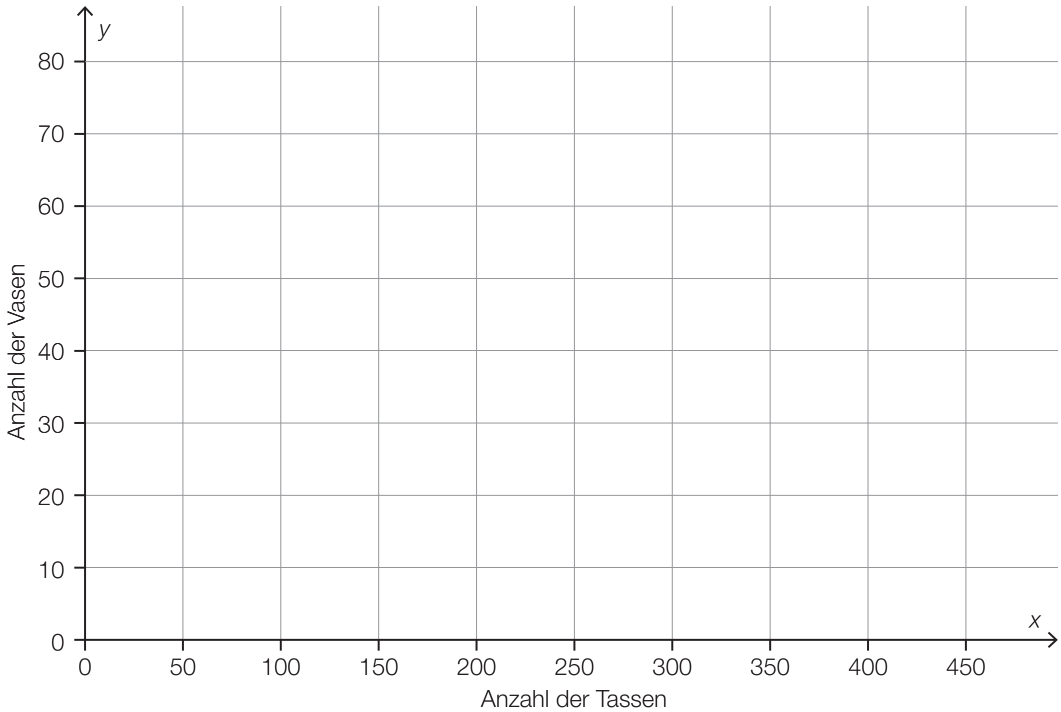
Ein Betrieb stellt Tassen und Vasen aus Porzellan her.

a) Am Standort *A* des Betriebs gelten folgende Produktionseinschränkungen:

Für die Produktion einer Tasse werden 0,2 kg Porzellanmasse benötigt.
Für die Produktion einer Vase wird 1 kg Porzellanmasse benötigt.
Insgesamt können maximal 80 kg Porzellanmasse verarbeitet werden.
Es können maximal 300 Tassen und maximal 50 Vasen produziert werden.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das die Produktionseinschränkungen für x Tassen und y Vasen beschreibt.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems ein.

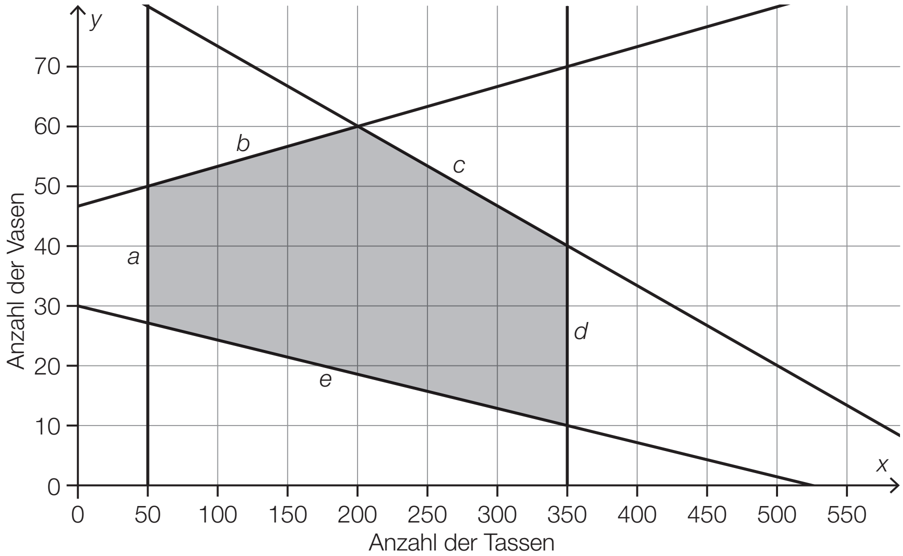


Jemand behauptet: „Wenn 90 kg Porzellanmasse verarbeitet werden, ist es möglich, 250 Tassen und 40 Vasen zu produzieren."

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Produktionseinschränkungen am Standort *B* des Betriebs sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung der Geraden *e* durch Eintragen der fehlenden Zahlen.

$y = \boxed{} \cdot x + \boxed{}$

2) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die entsprechende Gerade zu.

Eine Gleichung der Geraden ist gegeben durch: $-x + 15 \cdot y = 700$	
Die zugehörige Ungleichung beschreibt die Mindestproduktionsmenge für eines der beiden Produkte.	

A	*a*
B	*b*
C	*c*
D	*d*

Der Verkaufspreis für eine Tasse beträgt € 8, jener für eine Vase € 12.
Der Erlös soll maximiert werden.

3) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion *E* für den Erlös auf.

$E(x, y) =$ ____

4) Ermitteln Sie die optimalen Produktionsmengen für den Standort *B*.

Möglicher Lösungsweg

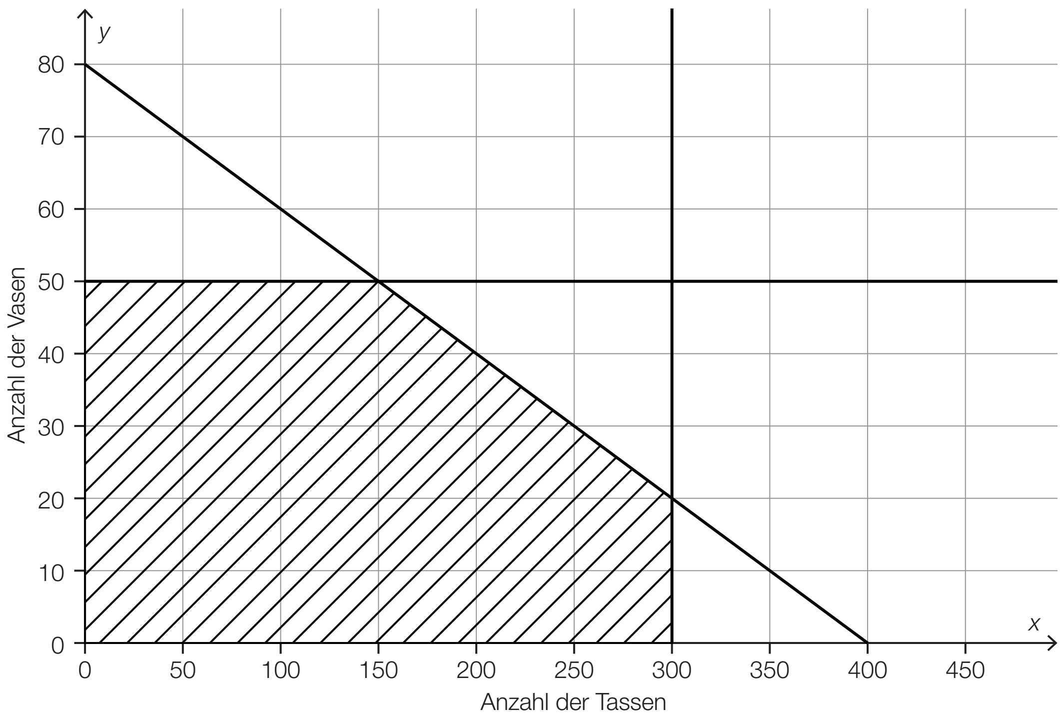
a1) I: $0{,}2 \cdot x + y \leq 80$

II: $x \leq 300$

III: $y \leq 50$

Die Nichtnegativitätsbedingungen $x \geq 0$ *und* $y \geq 0$ *sind für die Punktevergabe nicht relevant.*

a2)



a3) $0{,}2 \cdot 250 + 40 = 90$

Mit 90 kg Porzellanmasse ist es möglich, 250 Tassen und 40 Vasen zu produzieren.

Für die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, zu überprüfen, ob die Ungleichungen II *und* III *erfüllt sind.*

b1) $y = \boxed{-\frac{2}{35}} \cdot x + \boxed{30}$

b2)

Eine Gleichung der Geraden ist gegeben durch: $-x + 15 \cdot y = 700$	B
Die zugehörige Ungleichung beschreibt die Mindestproduktionsmenge für eines der beiden Produkte.	A

A	*a*
B	*b*
C	*c*
D	*d*

b3) $E(x, y) = 8 \cdot x + 12 \cdot y$

b4) $E(200, 60) = 2320$
$E(350, 40) = 3280$
Es müssen 350 Tassen und 40 Vasen produziert werden.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung I (Einschränkung bezüglich Porzellanmasse).
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichungen II und III (Einschränkung bezüglich der Maximalanzahl an Tassen und an Vasen).
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Lösungsbereichs.
a3) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Gleichung der Geraden *e*.
b2) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
b3) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion *E*.
b4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der optimalen Produktionsmengen.

Smartphone-Akkus

a) Max notiert zu verschiedenen Zeitpunkten den Ladestand seines Smartphones.

Zeit nach Beendigung des Ladevorgangs in Stunden	2,5	4	5,5	6,5	8	10
Ladestand des Smartphones in Prozent	74	66	52	41	22	12

Die Zeit nach Beendigung des Ladevorgangs wird mit t bezeichnet. Der Ladestand des Smartphones soll in Abhängigkeit von t näherungsweise durch die lineare Funktion L beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion L auf. *[0/1 P.]*

Das Smartphone gibt eine Warnung aus, wenn der Ladestand auf 15 % gesunken ist.

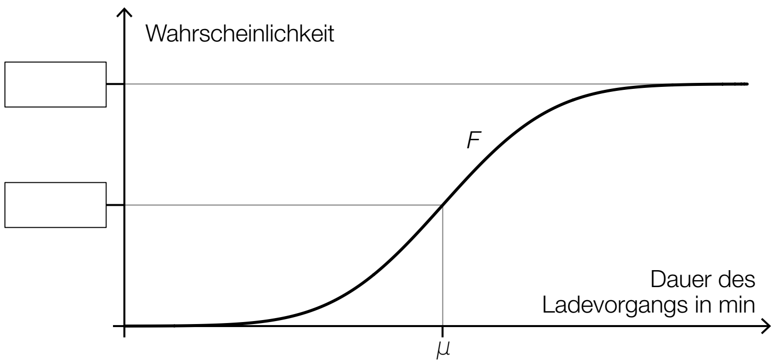
2) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit dies gemäß der Funktion L der Fall ist. *[0/1 P.]*

b) Die Dauer eines Ladevorgangs bei einem bestimmten Akkutyp kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden.

1) Geben Sie mithilfe von μ und σ dasjenige Intervall an, in dem die Dichtefunktion negativ gekrümmt ist.

] ______ ; ______ [*[0/1 P.]*

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Verteilungsfunktion F dargestellt.



2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

Es gilt: $\mu = 92$ min und $F(86) = 0{,}12$

3) Berechnen Sie die Standardabweichung σ. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$L(t) = -8{,}90 \cdot t + 98{,}6$ *(Koeffizienten gerundet)*

a2) $L(t) = 15$ *oder* $-8{,}90 \cdot t + 98{,}6 = 15$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

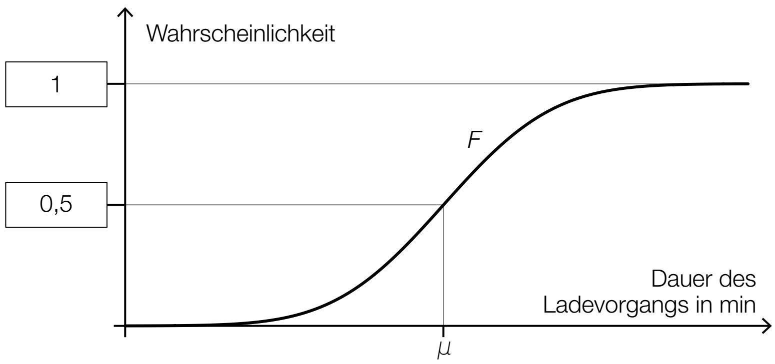
$t = 9{,}39...$

Gemäß der Funktion L gibt das Smartphone etwa 9,4 h nach Beendigung des Ladevorgangs eine Warnung aus.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion L.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Zeit.

b1) $]\mu - \sigma; \mu + \sigma[$

b2)



b3) X ... Dauer des Ladevorgangs in min
$F(86) = P(X \leq 86) = 0{,}12$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\sigma = 5{,}106...$ min

b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Intervalls.
b2) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung σ.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

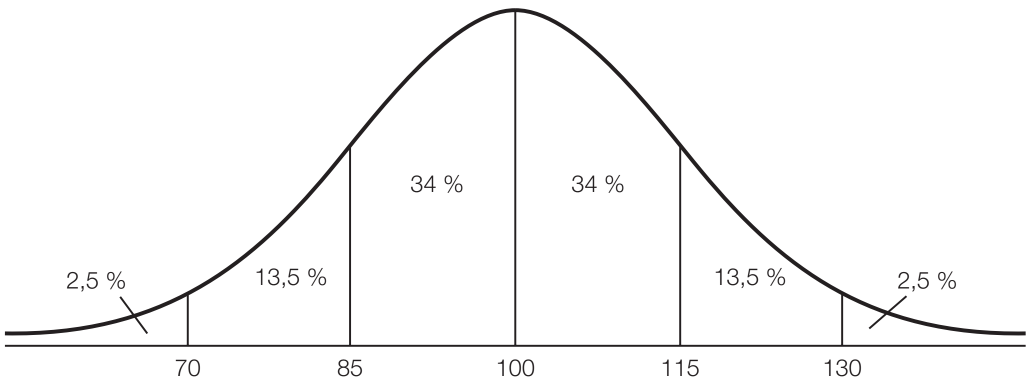
Intelligenzquotient

Aufgabennummer: B_236

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine Kenngröße zur Bewertung des allgemeinen intellektuellen Leistungsvermögens (Intelligenz) eines Menschen. Er vergleicht die Intelligenz eines Menschen mit der mittleren Intelligenz der Gesamtbevölkerung im selben Zeitraum und im vergleichbaren Alter.

a) Interpretieren Sie den IQ als normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mu = 100$:
- Lesen Sie den ungefähren Wert der Standardabweichung aus der unten stehenden Grafik ab.
- Lesen Sie die IQ-Untergrenze der intelligentesten 16 % ab.
- Schätzen Sie aus der Grafik ab, wie viel Prozent der Personen einen höheren IQ als 90 haben.



b) Bei einem IQ-Test erreichte eine Gruppe von 5 Schülerinnen und Schülern Werte von 90, 95, 100, 105 und 110 IQ-Punkten, eine andere Gruppe 85, 90, 95, 105 und 125 IQ-Punkte.

- Berechnen Sie die arithmetischen Mittel sowie die Streuungsmaße *Spannweite* und *Standardabweichung* (auf eine Dezimalstelle gerundet) der beiden Stichproben.
- Interpretieren Sie die Unterschiede.

c) Eine Gruppe von 10 Schülerinnen und Schülern machte einen Intelligenztest. Dieselben Schüler/innen füllten einen Fragebogen aus, der Aufschluss über das Selbstbewusstsein gibt (je höher die Punktezahl, desto größer das Selbstbewusstsein). Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

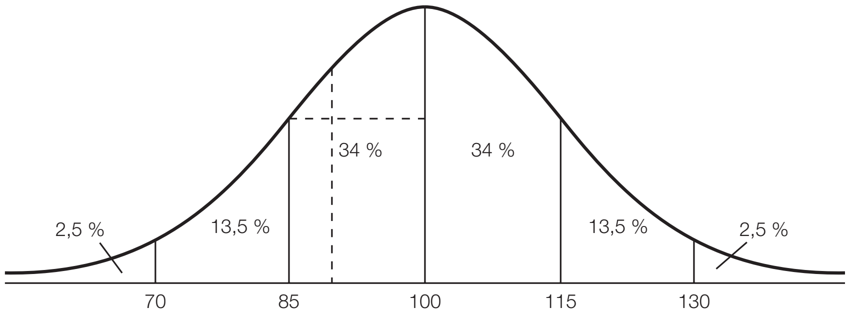
IQ-Punkte x	101	96	120	105	103	90	107	98	110	103
Selbstbewusstsein y	3	1	4	3	4	2	5	2	4	2

- Ermitteln Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
- Stellen Sie die Punktwolke und die Regressionsgerade grafisch dar.
- Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Selbstbewusstsein eines Schülers oder einer Schülerin mit einem IQ von 110.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Standardabweichung $\sigma \approx 15$ IQ-Punkte
Die IQ-Untergrenze der intelligentesten 16 % liegt bei 115 IQ-Punkten.



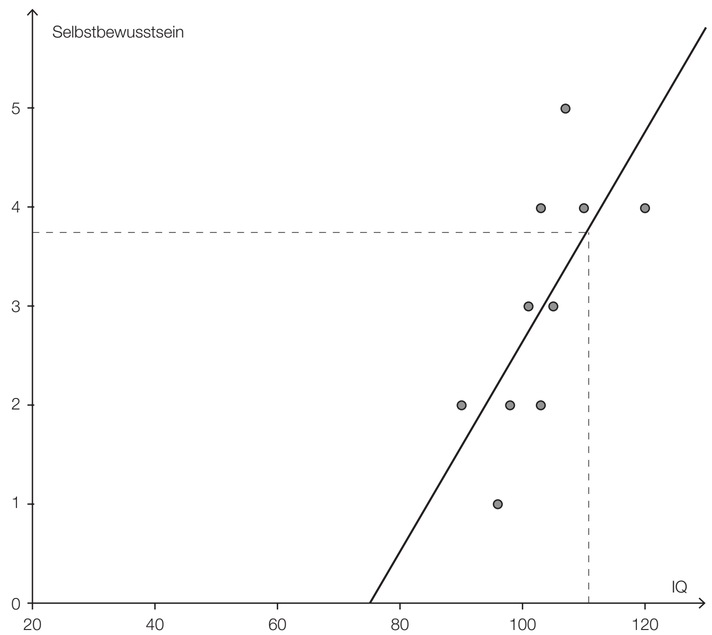
Abschätzen z. B. durch Aufteilen der Fläche unterhalb der Kurve:
Ca. $\frac{1}{4}$ der Fläche zwischen den Grenzen 85 und 100 liegt links von der strichlierten Linie.
$\frac{3}{4}$ von 34 % ≈ 25 %
Etwa 75 % haben einen höheren IQ als 90.

b)

	Gruppe 1	Gruppe 2
arithmetisches Mittel in IQ-Punkten	100	100
Spannweite in IQ-Punkten	20	40
Standardabweichung in IQ-Punkten	7,905… ≈ 7,9	15,811… ≈ 15,8

Das arithmetische Mittel ist bei beiden Gruppen gleich.
Die Spannweite und die Standardabweichung sind bei Gruppe 2 doppelt so groß wie bei Gruppe 1.
Die Testergebnisse der Gruppe 2 (2. Stichprobe) sind um das arithmetische Mittel breiter gestreut. Sie liegen weniger dicht beisammen.

c) Gleichung der Regressionsgeraden:
$-640x + 6\,041y = -47$
bzw. $y = 0{,}106x - 7{,}944$ (auf 3 Dezimalstellen gerundet)
(mit GeoGebra ermittelt – kann bei anderer Technologie geringfügig abweichen)



Bei Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners reicht eine Handskizze.

Ein Schüler oder eine Schülerin mit einem IQ von 110 erreicht auf der Skala für das Selbstbewusstsein einen Wert von etwa 3,8.

Ableseungenauigkeiten (vor allem bei Handzeichnung) sind zu tolerieren.
Auch eine Berechnung mithilfe der Gleichung ist möglich.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Psychologie

Quelle: http://www.dezimmer.net/HTML/1974iq5-korrelation.htm

Großtrappen

Aufgabennummer: B_131

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein LIFE-Projekt in Ostösterreich widmet sich dem Schutz der Großtrappen, einer gefährdeten Vogelart. Zu Beginn des Beobachtungszeitraums wurden in Niederösterreich und im Burgenland 140 Tiere gezählt. 5 Jahre später waren es bereits 244.

a) – Argumentieren Sie, warum ein lineares bzw. ein unbegrenztes exponentielles Wachstumsmodell die Entwicklung der Tierpopulation zwar beschreibt, dies aber langfristig gesehen nicht der Realität entspricht.

b) Nehmen Sie ein begrenztes exponentielles Wachstum mit einer Obergrenze von $G = 1\,000$ an. Es gilt folgende Funktion:

$$y(t) = G - c \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

t … Zeitdauer in Jahren (a)
$y(t)$ … Anzahl der Tiere nach t Jahren
c … Anzahl der Tiere, um die der Anfangsbestand bis zur Obergrenze zunehmen kann

– Berechnen Sie den Stand der Population nach 20 Jahren unter der Voraussetzung, dass die Entwicklung der Vogelpopulation diesem Modell folgt.

c) In der Realität wird das Wachstum der Großtrappen-Population besser durch die folgende logistische Funktion beschrieben:

$$y(t) = \frac{1\,000}{1 + 6{,}143 \cdot e^{-0{,}1369 \cdot t}}$$

t … Zeitdauer in Jahren (a)
$y(t)$ … Anzahl der Tiere nach t Jahren

– Stellen Sie diese Funktion grafisch dar.
– Lesen Sie aus der Grafik ungefähr ab, wann sich der Bestand seit dem Beginn der Beobachtungszeit auf 280 Tiere verdoppelt hat.
– Überprüfen Sie durch Ablesung des Zeitraums bis zur nächsten Verdopplung, ob die Zeitdauer, in der sich der jeweilige Bestand an Tieren verdoppelt, in diesem Modell konstant bleibt.

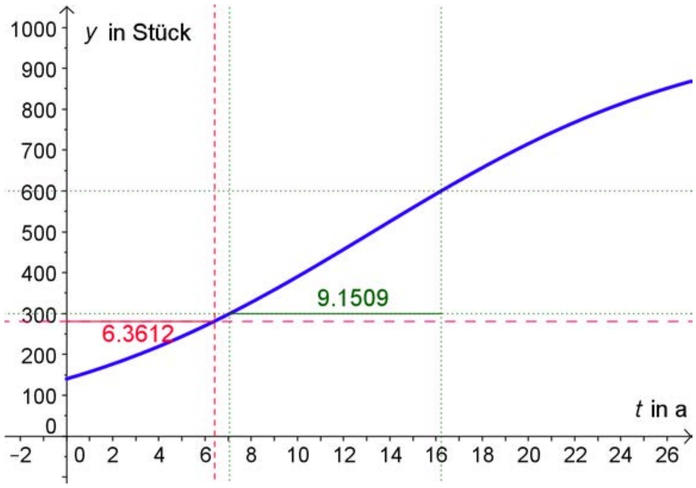
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Wachstum hängt vom Lebensraum und den darin vorhandenen Lebensbedingungen für Großtrappen ab. Langfristig gesehen wird das räumlich begrenzte Schutzgebiet zwar die Vermehrung der Tiere fördern, aber auch nach oben hin einschränken.
Daher kann die Zahl der Vögel zwar anfänglich möglicherweise nach einem linearen oder einem unbegrenzten exponentiellen Wachstum verlaufen, aber nicht unendlich steigen, wie es bei diesen beiden Wachstumsmodellen der Fall wäre.

b) $140 = 1\,000 - c \cdot e^0 \rightarrow c = 860$
$244 = 1\,000 - c \cdot e^{5 \cdot \lambda} \rightarrow \lambda = -0{,}02577\ldots \approx -0{,}0258$
Funktionsgleichung: $y(t) = 1\,000 - 860 \cdot e^{-0{,}0258 \cdot t}$
Prognose $t = 20$ Jahre → rund 486 Tiere

c)



– Die Verdopplung vom Anfangsbestand von 140 auf 280 Tiere benötigt etwas mehr als 6 Jahre.
– Die Verdopplung von 300 auf 600 Tiere benötigt nach diesem Modell einen Zeitraum von etwas mehr als 9 Jahren.
Bei diesem Modell ist die Dauer, in der sich ein Bestand verdoppelt, nicht konstant.

Ableseungenauigkeiten werden toleriert, insbesondere bei Grafikrechnern und Handskizzen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 4
c) 3

Thema: Biologie

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Bakterien

Aufgabennummer: B_172

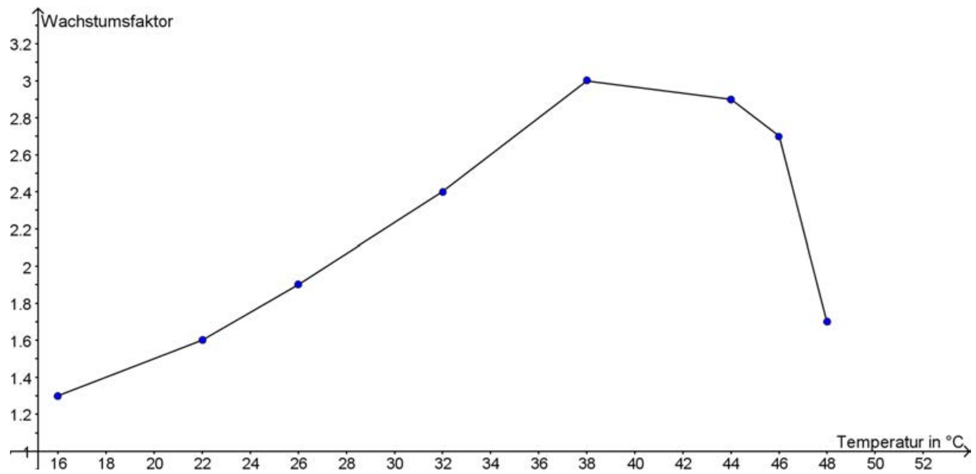
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Milchsäurebakterien haben Stäbchenform (sie sind also annähernd zylindrisch) und vermehren sich durch Zellteilung. Sie haben eine Länge von ca. 2 Mikrometern (μm) und einen Durchmesser von ca. 0,9 μm.

In sauer gewordener Milch wurden in 1 Milliliter (ml) Milch ca. 1 Million Bakterien gemessen.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent des Gesamtvolumens der Milch die Bakterien einnehmen.

b) *Escherichia-coli*-Bakterien im Wasser sind gefährlich für die Gesundheit.
In einem Labor wird deren Anzahl stündlich gemessen. Die Bakterien vermehren sich exponentiell, wobei der Wachstumsfaktor temperaturabhängig ist.
In der nachstehenden Grafik ist der Wachstumsfaktor in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt.

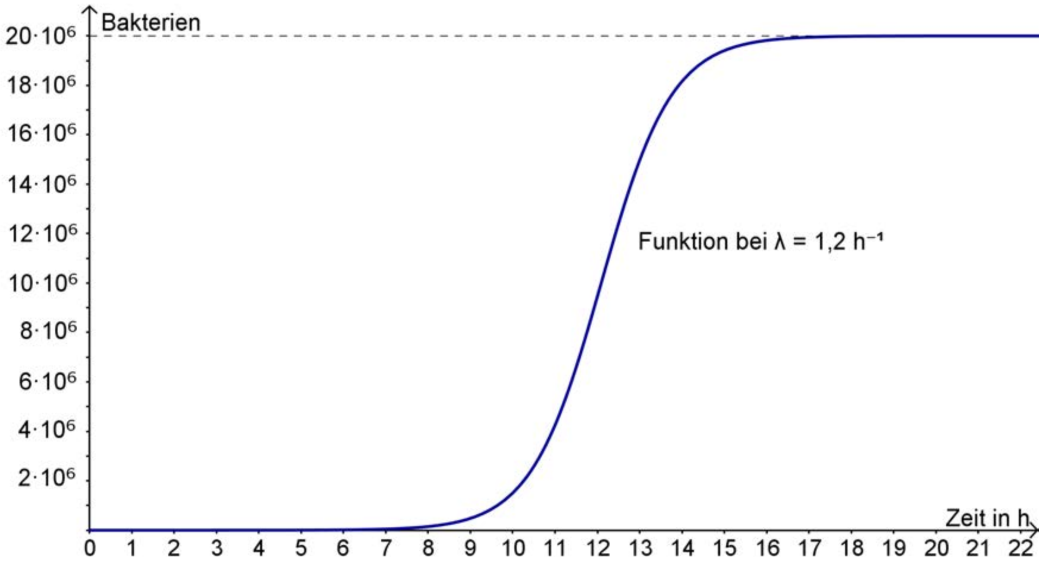


– Lesen Sie den Wachstumsfaktor bei 32 °C warmem Wasser ab.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anzahl von Stunden t, die es dauert, bis sich die *Escherichia-coli*-Bakterien in 32 °C warmem Wasser von einer ursprünglichen Anzahl N_0 auf eine kritische Anzahl K vermehren.

N_0 … ursprüngliche Anzahl der Bakterien vor dem Vermehrungsprozess
K … kritische Anzahl an Bakterien
t … Anzahl der Stunden des Vermehrungsprozesses

– Lösen Sie die erstellte Formel nach t auf.

c) Ein Bakterienwachstum verläuft nicht unbeschränkt exponentiell, sondern erreicht wegen der begrenzten Ressourcen eine Sättigungsmenge.



Die obenstehende Grafik zeigt das Wachstum einer Bakterienpopulation mit folgender Funktion N:

$$N(t) = \frac{20 \cdot 10^6}{1 + 20 \cdot 10^5 \cdot e^{-\lambda \cdot t}} \quad \text{mit} \quad \lambda = 1{,}2\ \text{h}^{-1}$$

t … Zeit in Stunden (h)
$N(t)$ … Anzahl der Bakterien nach t Stunden
λ … Wachstumsparameter in h^{-1}

– Skizzieren Sie in der Grafik den Verlauf der Kurve für $\lambda = 1{,}5\ \text{h}^{-1}$.

Betrachten Sie den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ des Nenners der Funktion N.

– Erklären Sie, welchen Einfluss eine Veränderung von $\lambda = 1{,}2\ \text{h}^{-1}$ auf $\lambda = 1{,}5\ \text{h}^{-1}$ auf den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ hat.
– Erklären Sie, welchen Einfluss die Veränderung im Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ auf die gesamte Funktion N hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $1\text{ ml} = 10^{-3}\text{ L} = 10^{-3}\text{ dm}^3 = 1\text{ cm}^3$
$2 \cdot 0{,}45^2 \cdot \pi \approx 1{,}27$
Das Volumen eines Bakteriums beträgt ungefähr 1,27 µm³.
$1{,}27\text{ µm}^3 = 1{,}27 \cdot 10^{-12}\text{ cm}^3$
1 Million Bakterien haben ein Volumen von $1{,}27 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6\text{ cm}^3 = 1{,}27 \cdot 10^{-6}\text{ cm}^3$
1 cm^3 sind 100 %. → $1{,}27 \cdot 10^{-6}\text{ cm}^3$ sind $\underline{1{,}27 \cdot 10^{-4}\ \%}$.
Die Bakterien nehmen ca. $1{,}27 \cdot 10^{-4}$ % des Gesamtvolumens ein.

(Umrechnungen mit anderen korrekten Maßeinheiten sind ebenfalls zu akzeptieren.)

b) Bei 32 °C vermehren sich die Bakterien pro Stunde mit einem Wachstumsfaktor von 2,4.

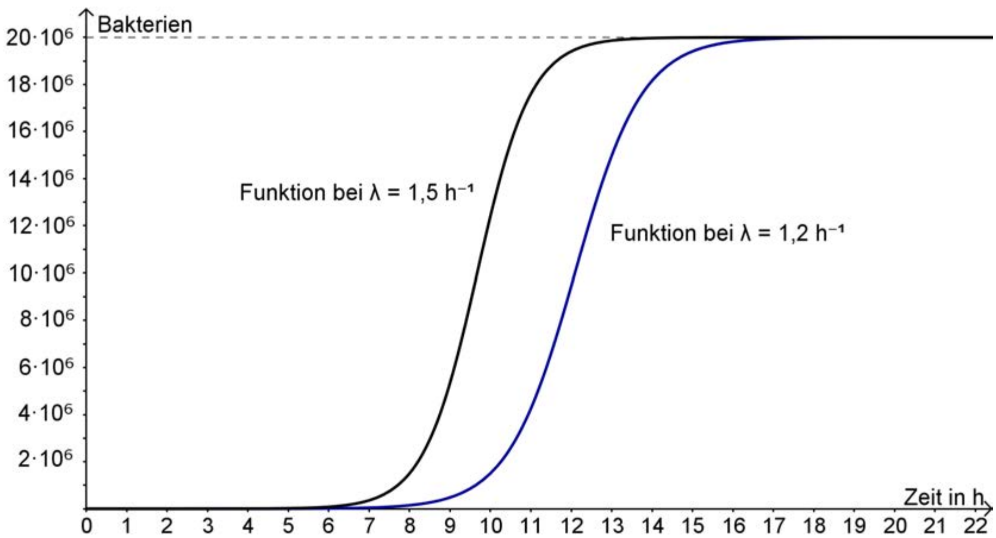
$K = N_0 \cdot 2{,}4^t$

$\frac{K}{N_0} = 2{,}4^t$

$t = \frac{\log\left(\frac{K}{N_0}\right)}{\log(2{,}4)}$

(*Welcher Logarithmus verwendet wird, ist gleichgültig.*)

c)



Die Exponentialfunktion $e^{-\lambda \cdot t}$ fällt für $\lambda = 1{,}5\text{ h}^{-1}$ schneller als für $\lambda = 1{,}2\text{ h}^{-1}$. Ihr Wert nähert sich schneller null.
Fällt die Exponentialfunktion $e^{-\lambda \cdot t}$ schneller, nähert sich der Wert des Nenners schneller dem Wert 1.
Wird der Nenner kleiner, wird der gesamte Bruch größer.
Der Grenzwert von $20 \cdot 10^6$ Bakterien wird bei $\lambda = 1{,}5\text{ h}^{-1}$ daher schneller angenähert.

(Alle richtigen Erklärungen sind zu akzeptieren.)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 3
c) schwer	c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Beleuchtungskörper

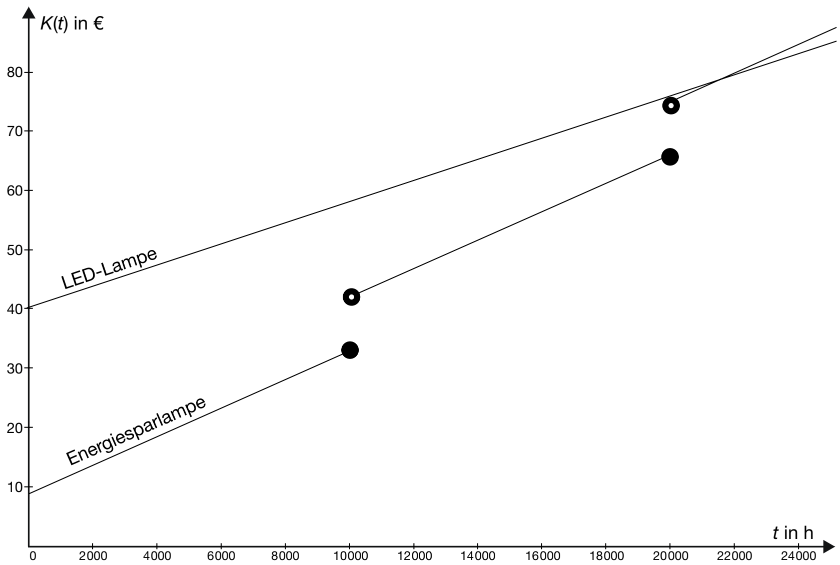
Aufgabennummer: B_226

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Aus Gründen des Klimaschutzes ist man bemüht, energiesparende Beleuchtungskörper zu verwenden. Um unterschiedliche Lichtquellen vergleichen zu können, muss man nicht nur ihre Leistung in Watt (W), sondern auch ihren abgestrahlten Lichtstrom in Lumen (lm) kennen.

a) Eine 12-Watt-Energiesparlampe und eine 9-Watt-LED-Lampe haben den gleichen Lichtstrom.
Die Graphen stellen die Kosten für diese beiden Lampen abhängig von der Betriebsdauer dar.
– Vergleichen Sie die Graphen hinsichtlich Anschaffungskosten, durchschnittlicher Lebensdauer und Betriebskosten.
– Lesen Sie aus der Grafik ab, ab welcher Betriebsdauer sich die Anschaffung einer LED-Lampe auszahlt.

$K(t)$ … Kosten in Euro (€) nach t Betriebsstunden
t … Betriebsdauer in Stunden (h)



b) Für Kindergarten-Gruppenräume schreibt die europäische Beleuchtungsnorm als Mindest-Beleuchtungsstärke 300 Lumen pro Quadratmeter (lm/m²) vor.
Ein Kindergarten mit einer auszuleuchtenden Fläche von 740 m² soll mit einer neuen Beleuchtung ausgestattet werden.
Gehen Sie bei den folgenden Berechnungen von einem Strompreis von € 0,18 pro Kilowattstunde aus und nehmen Sie an, dass in 1 Jahr 1 200 Betriebsstunden anfallen. (Hinweis: Energie = Leistung × Zeit.)

Es stehen 2 Systeme zur Wahl:

	Anschaffungspreis	angegebene Leistung	Lichtstrom
Gehäuse mit 4 Leuchtstoffröhren	€ 80,50	56 W	4 800 lm
LED-Lichtpaneel	€ 275,00	45 W	4 500 lm

– Berechnen Sie für beide Varianten die Anschaffungskosten und die Energiekosten für 1 Jahr.

Hinweis zur Aufgabe:
Geben Sie die Ergebnisse so an, dass sie klar nachvollziehbar sind und der Aufgabenstellung entsprechen.

Möglicher Lösungsweg

a) <u>LED-Lampe:</u>
Anschaffungskosten: ca. € 40
lange Lebensdauer – mehr als 24 000 Betriebsstunden
Betriebskosten: geringer als Energiesparlampe, weil Steigung kleiner

<u>Energiesparlampe:</u>
Anschaffungskosten: ca. € 10
Lebensdauer ca. 10 000 Betriebsstunden, dann muss eine neue gekauft werden (→ Sprungstelle)
Betriebskosten: größer als LED-Lampe

Bis ca. 22 000 Betriebsstunden ist die Energiesparlampe billiger, darüber lohnt sich die Anschaffung einer LED-Lampe.

Es sind auch andere Lösungen richtig, z. B.:

Anschaffungskosten: Eine LED-Lampe ist etwa 4-mal so teuer wie eine Energiesparlampe.
Lebensdauer: Eine LED-Lampe hält ca. 2,5-mal so lange wie eine Energiesparlampe.
Betriebskosten: LED: ca. € 17/10 000 h; Energiesparlampe: ca. € 22/10 000 h
Ab ca. 22 000 h zahlt sich die Anschaffung einer LED-Lampe aus.

b) Vorgabe: mindestens 300 lm/m²
bei 740 m² Fläche: $300 \cdot 740 = 222\,000$ lm

<u>Leuchtstoffröhren:</u>
Ein Gehäuse mit 4 Leuchtstoffröhren hat 4 800 lm, daher werden 222 000 : 4 800 = 47 Stück (aufgerundet auf Ganze) gebraucht.

Anschaffungskosten:	$47 \cdot 80{,}50 =$ € 3.783,50
Leistung:	$47 \cdot 56\text{ W} = 2\,632\text{ W} = 2{,}632\text{ kW}$
Energie:	$2{,}632\text{ kW} \cdot 1\,200\text{ h} = 3\,158{,}4\text{ kWh}$
Energiekosten:	$3\,158{,}4 \cdot 0{,}18 =$ € 568,51

<u>LED-Lichtpaneele:</u>
Ein Lichtpaneel hat 4 500 lm, daher werden 222 000 : 4 500 = 50 Stück (aufgerundet auf Ganze) gebraucht.

Anschaffungskosten:	$50 \cdot 275 =$ € 13.750,00
Leistung:	$50 \cdot 45\text{ W} = 2\,250\text{ W} = 2{,}25\text{ kW}$
Energie:	$2{,}25\text{ kW} \cdot 1\,200\text{ h} = 2\,700\text{ kWh}$
Energiekosten:	$2\,700 \cdot 0{,}18 =$ € 486,00

Leuchtstoffröhren haben Anschaffungskosten von € 3.783,50 und jährliche Energiekosten von € 568,51.
LED-Paneele haben Anschaffungskosten von € 13.750,00 und jährliche Energiekosten von € 486,00.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 4

Thema: Alltag

Quellen: –

Elektronikhersteller

Aufgabennummer: B-C6_23

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Elektronikhersteller erzeugt Spielkonsolen und Gamecontroller.

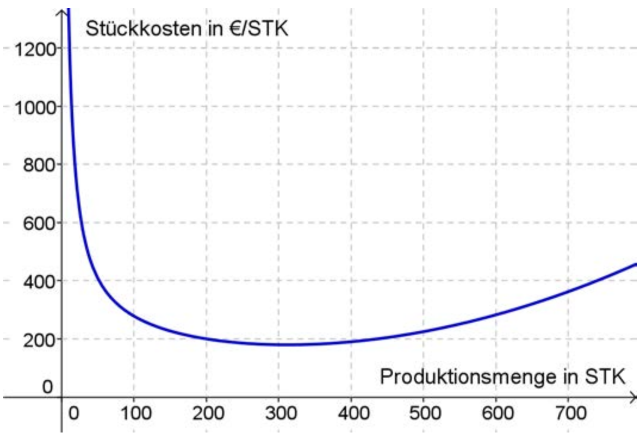
a) Die folgende Tabelle gibt die Grenzkosten $K'(x)$ in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x von Spielkonsolen an:

x	100	150	200	250	300	350	400
$K'(x)$	125	105	102	114	141	184	242

x … Produktionsmenge in Stück (STK)
$K'(x)$ … Grenzkosten in Euro pro Stück (€/STK)

– Erstellen Sie mithilfe einer Regression eine passende quadratische Grenzkostenfunktion.
– Erklären Sie, wie man hier die Kostenkehre berechnet.
– Erklären Sie die Bedeutung der Kostenkehre.
– Berechnen Sie die Gleichung der Gesamtkostenfunktion bei Fixkosten von € 11.200.

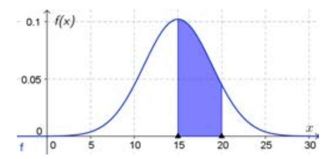
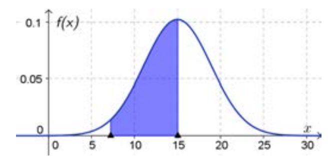
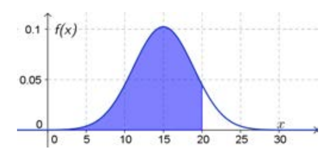
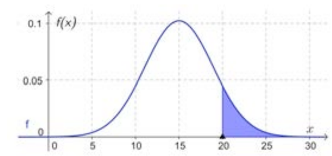
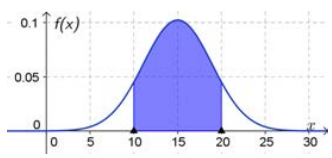
b) Die nachstehende Grafik zeigt die Stückkosten in Abhängigkeit von der erzeugten Menge an Spielkonsolen.



– Lesen Sie die langfristige Preisuntergrenze ab.
– Erklären Sie, welcher Erlös zu erwarten ist, wenn man die dem Betriebsoptimum entsprechende Menge an Spielkonsolen produziert und alle zum Preis der langfristigen Preisuntergrenze verkauft.
– Lesen Sie aus der Grafik die Stückkosten bei der Herstellung von 450 Konsolen ab.
– Ermitteln Sie den Marktpreis, mit dem eine Konsole verkauft werden muss, wenn 450 Konsolen hergestellt und mit einen Gewinn von € 20.000 verkauft werden sollen.

c) Die umfangreiche Produktion der Gamecontroller weist eine annähernd normalverteilte Menge von defekten Geräten auf. Pro Tag beträgt der Erwartungswert in der gesamten Großproduktion 15 Mengeneinheiten (ME) defekter Controller mit einer Standardabweichung von 3, 9 ME. Der Geschäftsführer möchte wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit höchstens 20 ME einer Tagesproduktion defekt sind.

– Kreuzen Sie diejenige Skizze an, deren farbig unterlegter Bereich diesen Sachverhalt darstellt. *[1 aus 5]*
– Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit.

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Werte eingeben und mit Technologie die quadratische Regression bestimmen:
$K'(x) = 0{,}0031x^2 - 1{,}1562x + 209{,}36$

Zur Berechnung der Kostenkehre leitet man die Grenzkostenfunktion nochmals ab und setzt die so erhaltene Gleichung null.
Löst man die Gleichung auf, erhält man die Kostenkehre.

Die Kostenkehre ist diejenige Stelle, bei der der degressive Kostenverlauf in den progressiven Kostenverlauf wechselt. (Der Betrieb hat bei dieser Produktionsmenge minimale Grenzkosten.)

$K(x)$ erhält man durch unbestimmtes Integrieren. Die Fixkosten ergeben die Integrationskonstante:
$K(x) = 0{,}00103x^3 - 0{,}578x^2 + 209{,}36\,x + 11\,200$

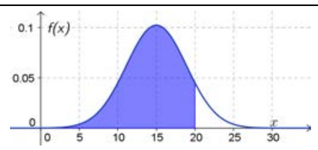
b) Die langfristige Preisuntergrenze beträgt ca. € 180/Stück.
Ablesetoleranz: Optimum: [290; 330], Preisuntergrenze [170; 190]

Verkauft man die Konsolen um diesen Stückpreis, so entspricht der Erlös genau den Herstellungskosten, der Betrieb arbeitet kostendeckend.

Ablesen der Stückkosten bei 450 ME: ca. € 200/Stück
Ablesetoleranz: ± € 10/Stück

Gewinn: € 20.000
$20\,000 = (p - 200) \cdot 450 \;\Rightarrow\; p = € \, 244{,}44$/Stück

c)

[...]	
[...]	
	☒
[...]	
[...]	

[Die Begründung ist nicht verlangt, Folgendes sollte beim Ankreuzen aber bewusst sein:
Die Gauß'sche Glockenkurve hat ihr Maximum beim Erwartungswert der Normalverteilung (15 ME).
Die Fläche unterhalb der Kurve in [a; b] entspricht der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{a \leq X \leq b\}$. In der Fragestellung wird nach $P(X \leq 20)$ gesucht, die entsprechende Fläche ist in Grafik 3 dargestellt.]

$P(X \leq 20) = 0{,}900... \approx 90\,\%$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 4
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Hotelrenovierung (2)

Aufgabennummer: B_180

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Hotel wird renoviert.

a) Ein Viertel aller Hotelzimmer wird als Raucherzimmer angeboten. Bei der Renovierung wurden zwei Drittel aller Raucherzimmer und 40 % aller Nichtraucherzimmer erneuert.

– Erstellen Sie ein Baumdiagramm mit allen gegebenen Daten.
– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewähltes Zimmer renoviert wurde.

b) Für weitere Renovierungsarbeiten benötigt der Hotelbesitzer einen Kredit in Höhe von € 80.000. Seine Hausbank bietet ihm an, dass er den Kreditbetrag innerhalb von 5 Jahren in Form von nachschüssigen Jahresraten in Höhe von € 17.900 begleichen kann.

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz, der diesem Kredit zugrunde liegt.

Der Hotelbesitzer möchte anstelle der Jahresraten den Kredit bei gleicher Laufzeit durch nachschüssige Semesterraten in Höhe von € 8.950 begleichen.

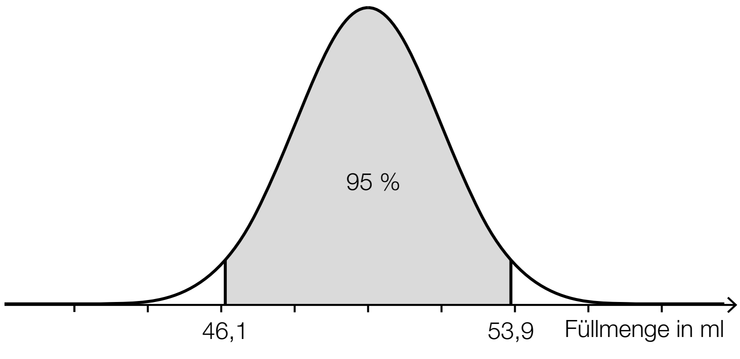
– Argumentieren Sie, warum sich bei dieser Zahlungsvariante ein höherer effektiver Jahreszinssatz ergibt.

c) Während der Renovierungsarbeiten möchte der Hotelbesitzer eine Reisegruppe einquartieren. Leider stehen dafür 2 Zimmer zu wenig zur Verfügung. Aus Erfahrung weiß man, dass im Schnitt 12 % aller Buchungen wieder kurzfristig storniert werden. Das Hotel nimmt daher die Buchung der Reisegruppe an. Dabei wird angenommen, dass Einzelstornierungen voneinander unabhängig sind.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit der die Wahrscheinlichkeit berechnet wird, dass bei der Annahme von 50 Buchungen mindestens 2 storniert werden. *[1 aus 5]*

$1 - \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^{49} - \binom{50}{2} \cdot 0{,}12^2 \cdot 0{,}88^{48}$	☐
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^{49}$	☐
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^{50} - \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^{49}$	☐
$1 - \binom{50}{1} \cdot 0{,}88^1 \cdot 0{,}12^{49} + \binom{50}{2} \cdot 0{,}88^2 \cdot 0{,}12^{48}$	☐
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}88^0 \cdot 0{,}12^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}88^1 \cdot 0{,}12^{49}$	☐

d) Im Zuge der Renovierung wurden neue Shampoo-Fläschchen bestellt. Die Füllmenge der Fläschchen kann als annähernd normalverteilte Zufallsvariable angenommen werden. Die Füllmenge von 95 % aller Fläschchen liegt im unten dargestellten symmetrischen Intervall um den Erwartungswert.

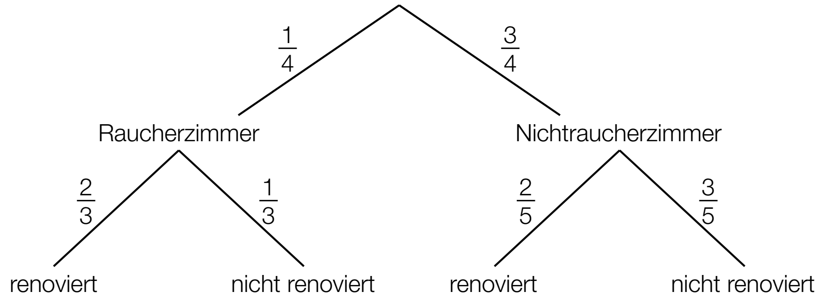


– Bestimmen Sie den Erwartungswert und die zugehörige Standardabweichung.
– Beschreiben Sie, wie sich die Kurve ändern würde, wenn die Standardabweichung bei gleichbleibendem Erwartungswert kleiner wäre.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



P(„renoviert“) = P(„Raucherzimmer und renoviert“) + P(„Nichtraucherzimmer und renoviert“) =

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

b) $$80\,000 = 17\,900 \cdot \frac{(1 + i_{eff})^5 - 1}{i_{eff}} \cdot \frac{1}{(1 + i_{eff})^5}$$

mittels Technologieeinsatz:
$i_{eff} = 0{,}03860...$

Der effektive Jahreszinssatz ist rund 3,86 %.

Bei der halbjährlichen Zahlungsart ergibt sich durch die früher fälligen Zahlungen ein höherer effektiver Jahreszinssatz.

c)

[...]	
[...]	
$1 - \binom{50}{0} \cdot 0{,}12^0 \cdot 0{,}88^{50} - \binom{50}{1} \cdot 0{,}12^1 \cdot 0{,}88^{49}$	☒
[...]	
[...]	

d) Der Erwartungswert μ liegt in der Mitte des Intervalls [46,1; 53,9].
Daher gilt: $\mu = \frac{46{,}1 + 53{,}9}{2} = 50$ ml

Normalverteilung mit $\mu = 50$ ml und $P(X \leq 46{,}1) = 0{,}025$
Berechnung der Standardabweichung σ mittels Technologieeinsatz: $\sigma \approx 1{,}99$ ml

Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß'sche Glockenkurve schmäler und höher.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) –
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) leicht	b) 2
c) mittel	c) 1
d) leicht	c) 3

Thema: Tourismus

Quellen: –

Computerspiele (2)

Aufgabennummer: B_151

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen produziert Computerspiele.

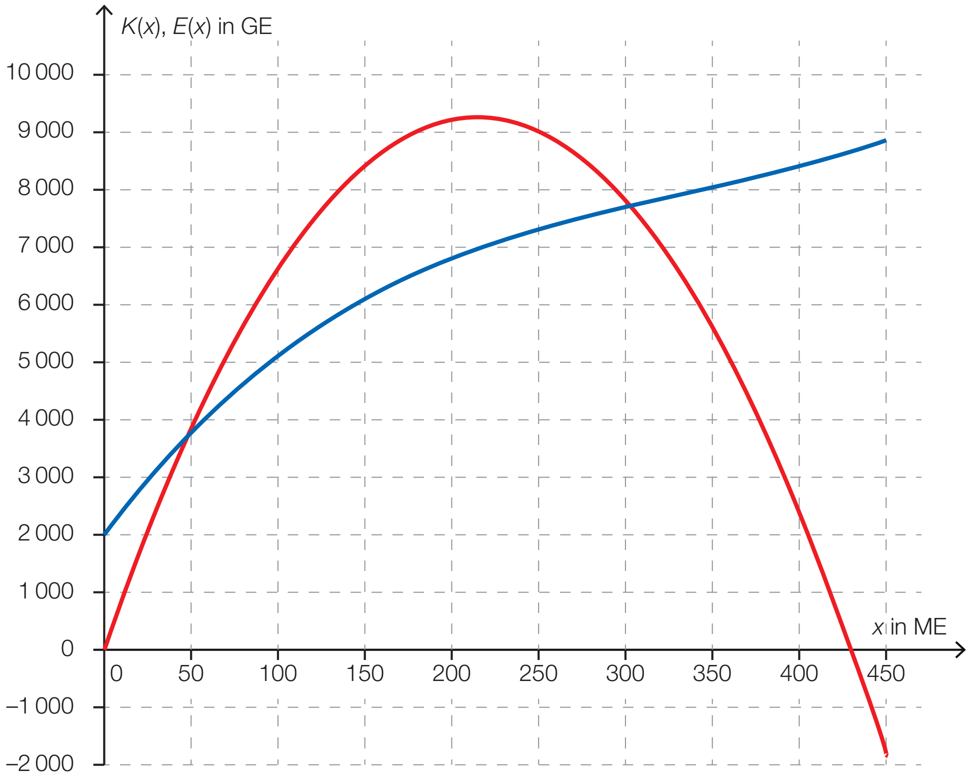
a) Für ein bestimmtes Verkaufsgebiet kann die Abhängigkeit des Verkaufspreises p in GE/ME und der nachgefragten Menge x in ME durch die Funktion p mit $p(x) = -0{,}2x + 86$ beschrieben werden.

- Erstellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion.
- Berechnen Sie diejenige Verkaufsmenge, bei der der erzielbare Erlös maximal ist.
- Bestimmen Sie die Höhe des maximalen Erlöses.

b) Für die Produktion des Spiels *Super Maxi* wird der Verlauf der Grenzkosten durch die Funktion K' mit $K'(x) = 0{,}0003x^2 - 0{,}2x + 40$ beschrieben.

- Stellen Sie die Gleichung der Kostenfunktion K auf, wenn die Fixkosten 2 000 GE betragen.
- Erklären Sie die Bedeutung der Kostenkehre in Bezug auf die Zunahme der Kosten pro zusätzlich produzierter ME.

c) In der nachstehenden Grafik sind die Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion des Spiels *Super Mizzi* dargestellt.



– Beschriften Sie die Graphen.
– Zeichnen Sie den Graphen der Gewinnfunktion möglichst genau in die Grafik ein.
– Lesen Sie die Grenzen der Gewinnzone ab.
– Lesen Sie den maximalen Gewinn ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

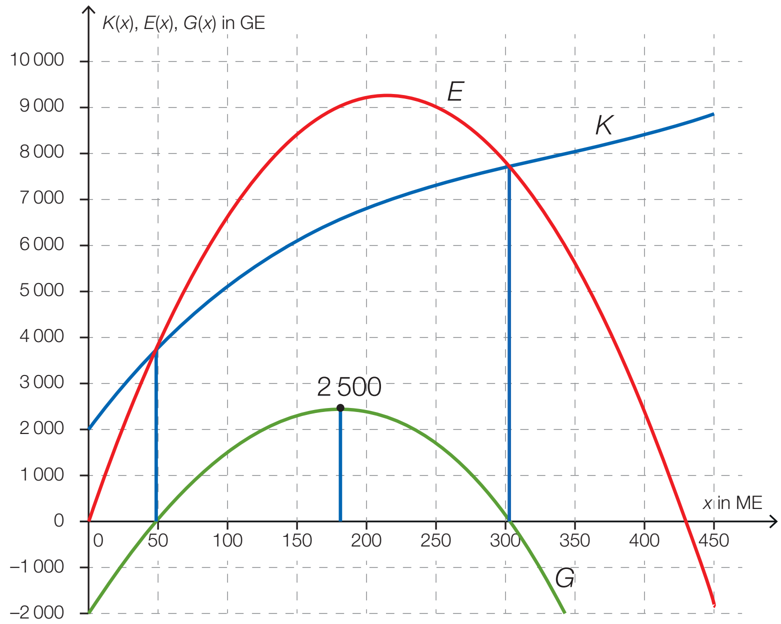
a) $E(x) = p(x) \cdot x = -0{,}2x^2 + 86x$
$E'(x) = -0{,}4x + 86 = 0$
$x = 215$

Das Erlösmaximum wird bei 215 ME erzielt. Der Erlös beträgt dort 9 245 GE.

b) $\int K'(x)\mathrm{d}x = 0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 40x + F$ mit $F = 2\,000$
$K(x) = 0{,}0001x^3 - 0{,}1x^2 + 40x + 2\,000$

Die Zunahme der Kosten wird mit der Grenzfunktion $K'(x)$ beschrieben. In der Kostenkehre ist $K''(x) = 0$. Die Grenzkostenfunktion hat an dieser Stelle ein Minimum. Die Zunahme der Kosten ist an dieser Stelle minimal.

c) Die Gewinnfunktion ergibt sich durch grafische Subtraktion der Kostenfunktion von der Erlösfunktion.



Das Gewinnintervall liegt zwischen ca. 50 ME und 300 ME. *Ableseungenauigkeiten ± 20 sind zu tolerieren.*
Der maximale Gewinn beträgt rund. 2 500 GE. *Ableseungenauigkeiten ± 200 sind zu tolerieren.*

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Fruchtsäfte*

Aufgabennummer: B_400

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen erzeugt Fruchtsäfte (Apfel-, Birnen-, Trauben- und Orangensaft).

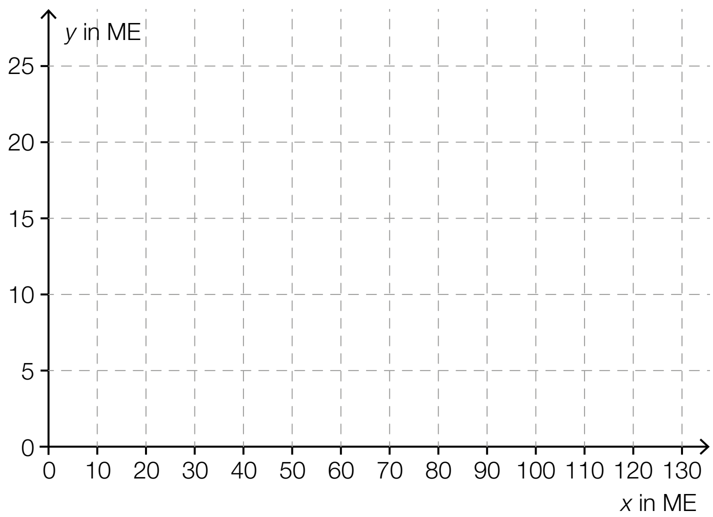
a) Die beiden Hauptprodukte des Unternehmens sind Apfelsaft und Birnensaft.
Aus Kapazitätsgründen können insgesamt pro Tag höchstens 200 Mengeneinheiten (ME) von diesen beiden Säften produziert werden.
Das Unternehmen kann pro Tag maximal 40 ME Birnensaft produzieren.

– Erstellen Sie die beiden Ungleichungen, die diese Produktionseinschränkungen für x ME Apfelsaft und y ME Birnensaft beschreiben.

b) Das folgende Ungleichungssystem beschreibt die Produktionseinschränkungen für x ME Apfelsaft und y ME Traubensaft:

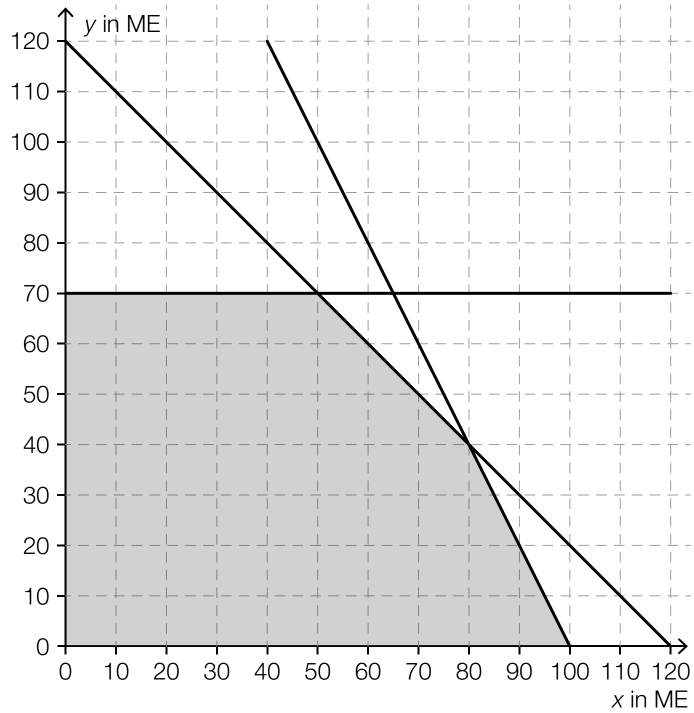
$x + 10 \cdot y \leq 200$
$x + 5 \cdot y \leq 125$
$x \leq 100$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

– Zeichnen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems in der nachstehenden Abbildung ein.



* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die tägliche Produktion von x ME Apfelsaft und y ME Orangensaft dargestellt.



Der Gewinn beim Verkauf jeder Flasche Apfelsaft beträgt € 0,12. Der Gewinn beim Verkauf jeder Flasche Orangensaft beträgt € 0,20. Dabei gilt: 1 ME = 1 000 Flaschen.

– Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns auf.
– Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn pro Tag in €.

Aufgrund einer weiteren Produktionseinschränkung können pro Tag nur maximal 60 ME Apfelsaft hergestellt werden.

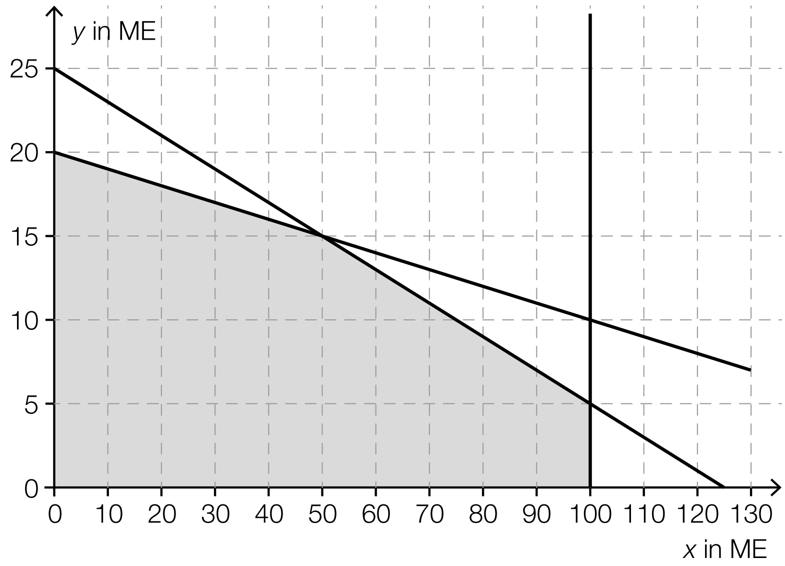
– Begründen Sie, warum sich der maximale Gewinn pro Tag dadurch nicht verändert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $x + y \leq 200$
$y \leq 40$

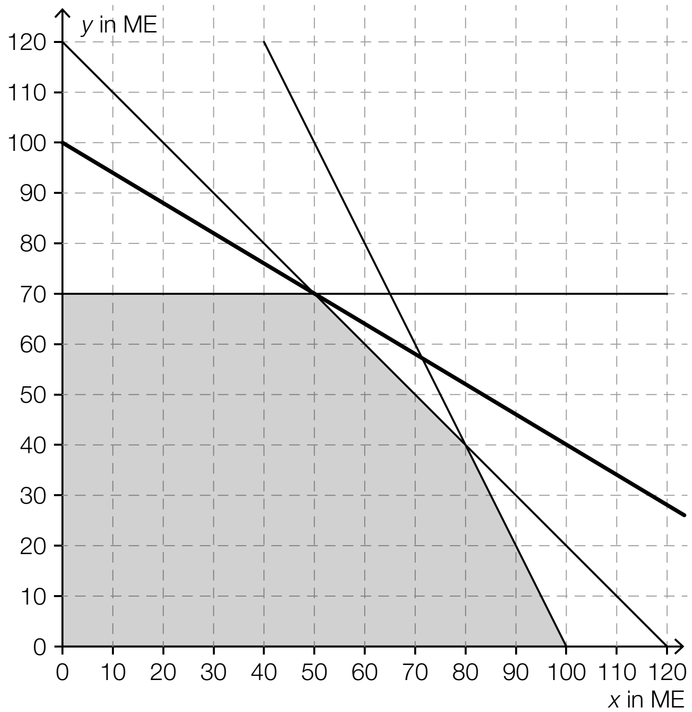
b)



c) $Z(x, y) = 120 \cdot x + 200 \cdot y$
x, y … Anzahl der ME Apfelsaft bzw. Orangensaft

oder:

$Z(x, y) = 0{,}12 \cdot x + 0{,}20 \cdot y$
x, y … Anzahl der Flaschen Apfelsaft bzw. Orangensaft



$120 \cdot 50 + 200 \cdot 70 = 20\,000$
Der maximale Gewinn pro Tag beträgt € 20.000.

Der maximale Gewinn pro Tag verändert sich nicht, weil der Eckpunkt (50|70) trotz dieser zusätzlichen Einschränkung immer noch im Lösungsbereich enthalten ist.

Lösungsschlüssel

a) $1 \times$ A1: für das richtige Erstellen der Ungleichung mithilfe der Information bezüglich der gesamten Kapazitätsbeschränkung
$1 \times$ A2: für das richtige Erstellen der Ungleichung mithilfe der Information bezüglich der Produktionseinschränkung bei Birnensaft

b) $1 \times$ B: für das richtige Zeichnen der Randgeraden des Lösungsbereichs
$1 \times$ C: für das richtige Markieren des Lösungsbereichs

c) $1 \times$ A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion
$1 \times$ B1: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
$1 \times$ B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns pro Tag
$1 \times$ D: für die richtige Begründung

Kunst und Kaffee*

Aufgabennummer: B_401

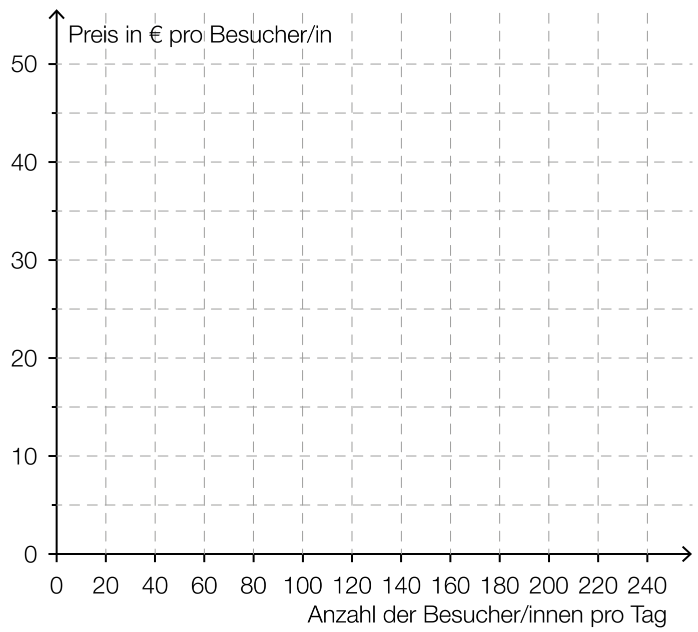
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Café-Restaurant in einer Kunsthalle bietet für die neue Ausstellung als zusätzliche Attraktion die Veranstaltung *Kunst und Kaffee* an. Nach einem gemütlichen Frühstück im Café-Restaurant kann man die Ausstellung besuchen und bezahlt für Frühstück und Ausstellungsbesuch nur einen Gesamtpreis.
Aus diesem Grund wird durch eine Befragung der Besucher/innen festgestellt, welcher Preis dafür verlangt werden kann.
Das Ergebnis dieser Befragung führt zu folgender linearer Preisfunktion der Nachfrage p:

$p(x) = -0{,}25 \cdot x + 45$

x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$p(x)$ ... Preis bei x Besucher/innen in € pro Besucher/in

a) – Zeichnen Sie den Graphen dieser linearen Preisfunktion der Nachfrage in der nachstehenden Abbildung ein.



– Markieren Sie in der obigen Abbildung die Sättigungsmenge.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) – Ermitteln Sie, um welchen Betrag der Preis reduziert werden muss, wenn man 10 Besucher/innen pro Tag mehr für dieses Angebot gewinnen möchte.

c) – Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion E auf.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden Koordinaten des Scheitelpunkts der Erlösfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Die täglichen Kosten, die dem Café-Restaurant für dieses Angebot entstehen, lassen sich durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 500$

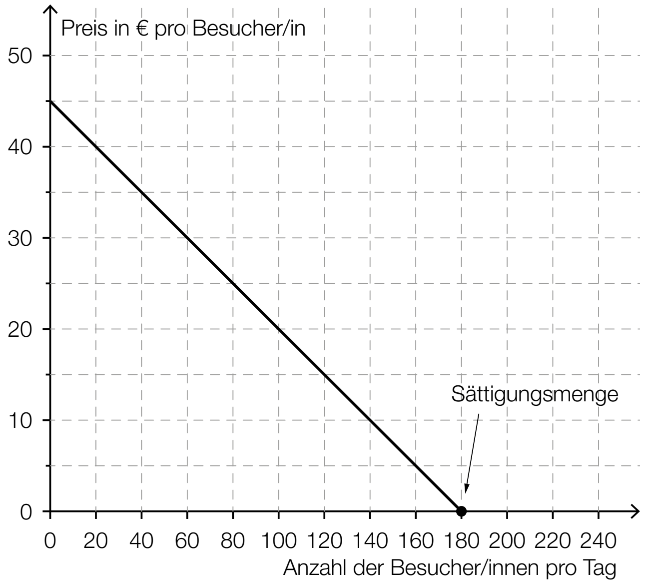
x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$K(x)$ ... tägliche Kosten bei x Besucherinnen und Besuchern in €

– Berechnen Sie die Höhe des maximalen Gewinns.
– Erklären Sie, warum die Stelle, an der der Gewinn maximal ist, nicht von den Fixkosten abhängt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Gemäß dem Modell steigt die Besucheranzahl um 1 Person pro Tag, wenn der Preis um € 0,25 pro Person reduziert wird (Steigung der Preisfunktion der Nachfrage). Daher muss der Preis um € 2,50 pro Person gesenkt werden, wenn man 10 Besucher/innen mehr pro Tag gewinnen möchte.

c) $E(x) = p(x) \cdot x = -0{,}25 \cdot x^2 + 45 \cdot x$

x … Anzahl der Besucher/innen pro Tag
$E(x)$ … Erlös bei x Besucherinnen und Besuchern in €

Die erste Koordinate des Scheitelpunkts gibt an, bei welcher Anzahl an Besucherinnen und Besuchern pro Tag der Erlös maximal ist, die zweite Koordinate gibt an, wie hoch dieser maximale Erlös ist.

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}3 \cdot x^2 + 33 \cdot x - 500$
Lösen der Gleichung $G'(x) = 0$:
$-0{,}6 \cdot x + 33 = 0 \;\Rightarrow\; x = 55$
$G(55) = 407{,}50$

Der maximale Gewinn beträgt € 407,50 pro Tag.

Eine Änderung der Fixkosten entspricht der Addition bzw. Subtraktion einer konstanten Funktion zur Gewinnfunktion. Sie bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen, wodurch sich die Maximumstelle nicht verändert.

oder:

Die Stelle des maximalen Gewinns ist die Nullstelle der 1. Ableitung der Gewinnfunktion. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der beim Bilden der 1. Ableitung wegfällt. Folglich haben sie auch keinen Einfluss auf die Stelle des maximalen Gewinns.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen
1 × C: für das richtige Markieren der Sättigungsmenge

b) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Preisreduktion

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × C: für die richtige Interpretation der beiden Koordinaten des Scheitelpunkts im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
1 × D: für die richtige Erklärung

Kängurusprünge

Aufgabennummer: B-C9_15

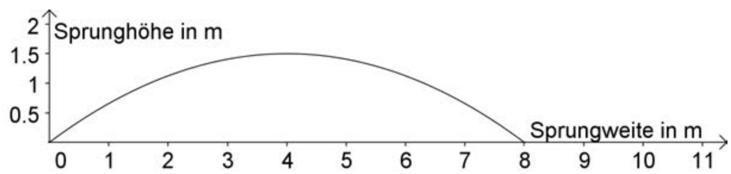
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In Australien leben heute ca. 60 Känguruarten, die sich bei höheren Geschwindigkeiten meist springend fortbewegen. Die kleinste Art ist das Zottelige Hasenkänguru mit ca. 35 cm Körpergröße, die größte das Rote Riesenkänguru mit ca. 1,8 m Körpergröße.

Bei allen Känguruarten ist die maximale Sprungweite etwa das 7-Fache ihrer Körpergröße.

- Erstellen Sie eine Funktion, die die ungefähre maximale Sprunglänge in Abhängigkeit von der Körpergröße angibt.
- Stellen Sie diese Funktion von der kleinsten bis zur größten Känguruart grafisch dar.

b) Der nachstehende Graph zeigt den Sprung eines Kängurus.



Der Sprung kann mit einer Polynomfunktion 2. Grades im angegebenen Definitionsbereich beschrieben werden.

- Berechnen Sie die Funktionsgleichung mithilfe quadratischer Regression. Runden Sie die Koeffizienten auf Hundertstel.
- Lesen Sie die benötigten Werte aus dem Graphen ab.

c) In einem Volksschulhort gibt es das Brettspiel *Känguruhüpfen* zum spielerischen Addieren im Zahlenraum 12.
Am Start stehen maximal 11 Kängurus, die mit den Nummern von 2 bis 12 beschriftet sind. Jede/r Spieler/in sucht sich ein Känguru aus. Es wird reihum mit 2 sechsseitigen Würfeln gewürfelt. Nach jedem Wurf werden die Augenzahlen addiert und das Känguru, dessen Nummer mit der Augensumme der beiden Würfel übereinstimmt, darf ein Feld vorhüpfen.

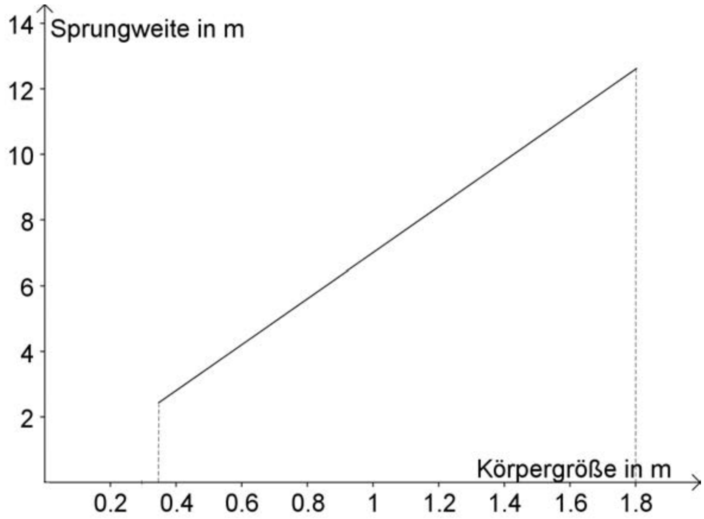
- Überprüfen Sie nachweislich, ob die Chance, ein Feld vorzurücken, für alle Kängurus gleich groß ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) lineare Funktion: $f(x) = 7x$

x … Körpergröße in m
$f(x)$ … Sprungweite in m



b) Koordinaten der Nullstellen und des Hochpunktes ablesen:
$N_1 = (0|0)$, $N_2 = (8|0)$, $H = (4|1{,}5)$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}093\ldots$
$b = 0{,}75$
$c = 0$

Funktionsgleichung: $y = -0{,}09 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x$

(Da die Koordinaten der Punkte, vor allem des Hochpunkts, abgelesen werden, ist eine angemessene Ungenauigkeit zu tolerieren.)

c) Es genügt, exemplarisch zu zeigen, dass die Anzahl der Möglichkeiten für 2 Zahlen unterschiedlich groß und damit die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten unterschiedlich hoch ist.

Zum Beispiel:
2 = 1 + 1
3 = 1 + 2 oder 2 + 1
4 = 1 + 3 oder 3 + 1 oder 2 + 2
usw.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 2
c) leicht	c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Öffentlicher Verkehr in Wien*

Aufgabennummer: B_515

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In Wien kostet die Jahreskarte für öffentliche Verkehrsmittel bei einmaliger Zahlung € 365. Alternativ dazu kann die Jahreskarte auch durch 12 monatliche Zahlungen zu je € 33 bezahlt werden.

1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz, bei dem 12 vorschüssige Monatsraten in Höhe von € 33 einem Barwert von € 365 entsprechen.

b) Die Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten für öffentliche Verkehrsmittel in Wien lässt sich für den Zeitraum von 2011 bis 2016 näherungsweise durch die Funktion N beschreiben.

$N(t) = 815\,000 - 450\,000 \cdot a^t$

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2011
$N(t)$ … Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten zur Zeit t
a … Parameter mit $0 < a < 1$

1) Erklären Sie, warum der Ordinatenabschnitt (Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse) des Graphen der Funktion N nicht vom Parameter a abhängt.

Im Jahr 2015 wurden 700 000 Jahreskarten verkauft.

2) Berechnen Sie den Parameter a.

Es wird davon ausgegangen, dass die Funktion N auch die zukünftige Entwicklung der Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten richtig beschreibt.

3) Interpretieren Sie die Zahl 815 000 in der obigen Gleichung der Funktion N im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Personen, die ein öffentliches Verkehrsmittel ohne gültige Fahrkarte benützen, werden als *Schwarzfahrer/innen* bezeichnet.
In der nachstehenden Tabelle ist der Anteil der Schwarzfahrer/innen in den öffentlichen Verkehrsmitteln in Wien für verschiedene Jahre angegeben.

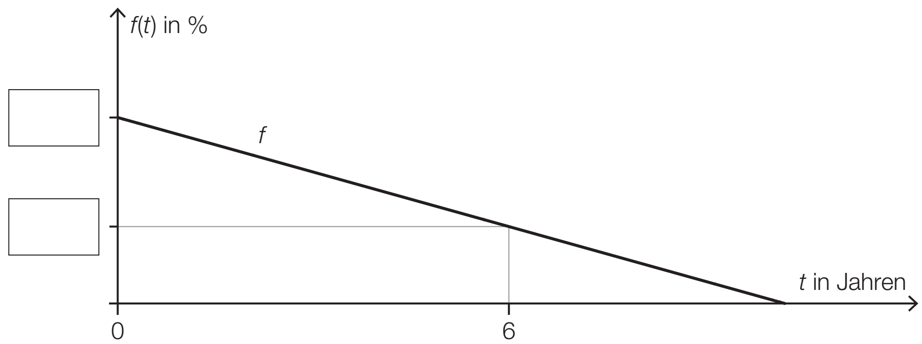
Jahr	2012	2013	2014	2015	2016
Anteil der Schwarzfahrer/innen in Prozent bezogen auf alle kontrollierten Personen	2,7	2,4	2,1	1,8	1,7

Datenquelle: https://wien.orf.at/v2/news/stories/2822992/ [27.10.2017].

Der Anteil der Schwarzfahrer/innen in Prozent soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2012.

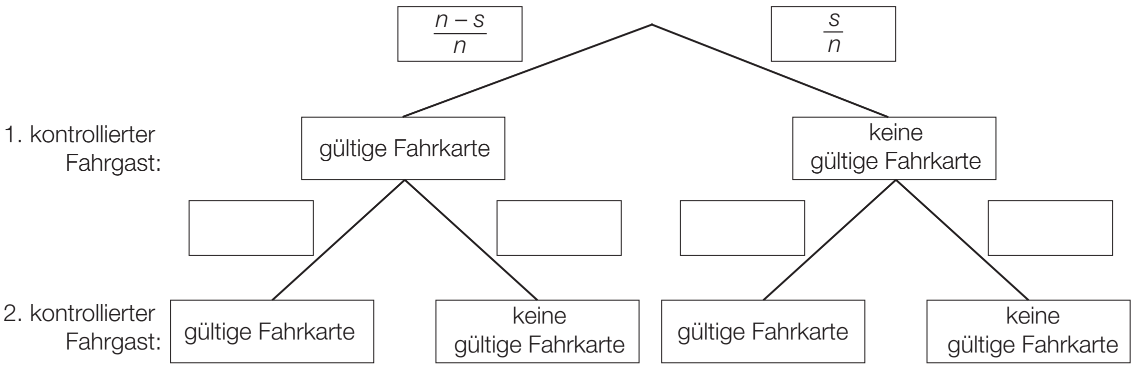
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Regressionsfunktion f dargestellt.



2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

d) In einer Straßenbahn befinden sich insgesamt n Fahrgäste, wovon s Fahrgäste keine gültige Fahrkarte besitzen. Eine Kontrollorin wählt nacheinander 2 Fahrgäste zufällig aus.

1) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass genau 1 der beiden kontrollierten Fahrgäste keine gültige Fahrkarte besitzt.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der diese Wahrscheinlichkeit angibt. *[1 aus 5]*

$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	☐
$\frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	☐
$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n}$	☐
$\frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n}$	☐
$\frac{s}{n} \cdot \frac{s-1}{n-1}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$365 = 33 \cdot \frac{q_{12}^{12} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{11}}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$q_{12} = 1{,}0151...$
$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}19818...$
Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 19,82 %.

b1) Der Ordinatenabschnitt ist der Funktionswert von N an der Stelle 0. Wegen $a^0 = 1$ ist dieser Ordinatenabschnitt daher unabhängig von a.

b2) $700\,000 = 815\,000 - 450\,000 \cdot a^4 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}7110...$

b3) Der Sättigungswert der Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten beträgt 815 000.

oder:

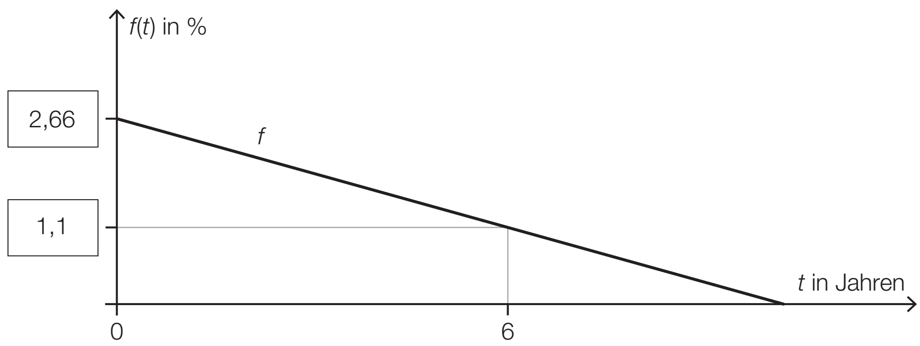
Gemäß der Funktion N nähert sich die Anzahl der pro Jahr verkauften Jahreskarten für $t \to \infty$ der Zahl 815 000 beliebig nahe an.

c1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

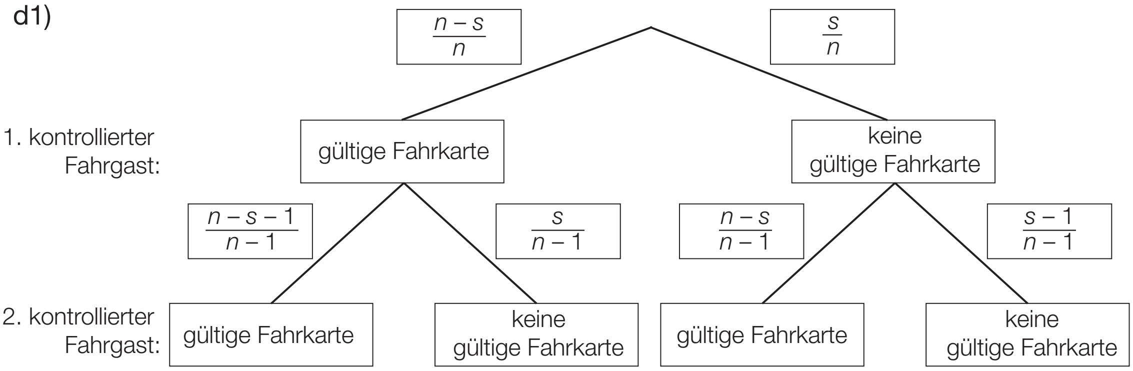
$f(t) = -0{,}26 \cdot t + 2{,}66$

t ... Zeit in Jahren
$f(t)$ ... Anteil der Schwarzfahrer/innen zur Zeit t in Prozent

c2)



d1)



d2)

$2 \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{n-s}{n-1}$	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des effektiven Jahreszinssatzes.
b1) Ein Punkt für das richtige Erklären.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Parameters *a*.
b3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Gleichung der Funktion *f*.
c2) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Zahlen.
d1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Wahrscheinlichkeiten.
d2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Anschaffungen

Aufgabennummer: B_134

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für die Anschaffung von neuer Hardware in einem Unternehmen muss ein Kredit aufgenommen werden.

a) Für einen Kredit in Höhe von € 50.000 bietet eine Bank bei einer Laufzeit von 10 Jahren und Rückzahlung durch nachschüssige Monatsraten einen effektiven Jahreszinssatz von 4,5 %.

– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

b) Das Angebot einer anderen Bank für die Rückzahlung eines Kredits in Höhe von € 50.000 ist ausschnittsweise im folgenden Tilgungsplan dargestellt:

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4			€ 12.500	

– Zeigen Sie, dass diesem Tilgungsplan ein effektiver Jahreszinssatz von rund 4,5 % zugrunde liegt.
– Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das 4. Semester.

Die Rückzahlung des Kredits soll am Ende des 5. Semesters durch eine Restzahlung abgeschlossen werden.

– Berechnen Sie die Höhe dieser Restzahlung.

c) Der Unternehmer nimmt einen weiteren Kredit in Höhe von € 10.000 auf, den er innerhalb eines Jahres zurückzahlen möchte.

Er kann zwischen 2 Rückzahlungsvarianten bei gleichem Jahreszinssatz *i* wählen:

- 1. Variante: 2 nachschüssige Semesterraten in Höhe von € 5.000 und 1 Restzahlung
- 2. Variante: 4 nachschüssige Quartalsraten in Höhe von € 2.500 und 1 Restzahlung

– Erklären Sie, warum 2 nachschüssige Quartalsraten von € 2.500 nicht genau einer nachschüssigen Semesterrate von € 5.000 entsprechen.
– Erklären Sie, bei welcher Variante der Unternehmer eine höhere Restzahlung zu tätigen hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}045}$

$$50\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \quad \Rightarrow \quad R = 516{,}020\ldots$$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 516,02.

b) Semesterzinssatz $i_2 = \dfrac{1\,112{,}62}{50\,000} = 0{,}02225\ldots$

effektiver Jahreszinssatz $i = (1 + i_2)^2 - 1 = 0{,}04499\ldots \approx 4{,}50\ \%$

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000
1	€ 1.112,62	€ 11.387,38	€ 12.500	€ 38.612,62
2	€ 859,22	€ 11.640,78	€ 12.500	€ 26.971,84
3	€ 600,19	€ 11.899,81	€ 12.500	€ 15.072,03
4	€ 335,39	€ 12.164,61	€ 12.500	€ 2.907,42

Die Restschuld vom Ende des 4. Semesters wird ein weiteres Semester aufgezinst. Es sind daher am Ende des 5. Semesters noch € 2.972,11 fällig.

c) Zu dem Zeitpunkt, zu dem die Semesterrate gezahlt wird (also am Ende des Semesters), wurde die 1. bezahlte Quartalsrate bereits 1 Semester lang verzinst. Der Endwert der beiden Quartalsraten ist daher etwas höher als die Semesterrate.

Der Endwert der Quartalsraten ist etwas höher als der Endwert der Semesterraten. Daher ist die Restzahlung bei der 1. Variante höher.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 3
c) mittel	c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Autokauf (2)

Aufgabennummer: B_143

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein neues Auto kostet € 66.700.

a) Herr Maier möchte dieses Auto kaufen. Innerhalb von 30 Tagen ist die Rechnung zu bezahlen. Der Verkäufer bietet ihm bei Barzahlung des Wagens innerhalb von 14 Tagen einen Skonto (Preisnachlass bei Zahlung binnen einer bestimmten Frist) von 1,5 % des Kaufpreises an. Leider verfügt Herr Maier erst 30 Tage nach dem Autokauf über das notwendige Geld. Um das Skonto-Angebot des Verkäufers annehmen zu können, müsste er sein Konto bei einem Überziehungszinssatz von 12 % p. a. überziehen.

– Überprüfen Sie, ob Herr Maier unter diesen Bedingungen das Auto innerhalb der ersten 14 Tage nach Kauf bezahlen soll.

b) Frau Specht möchte dasselbe Auto kaufen. Allerdings kann sie nicht den vollen Kaufpreis von € 66.700 zahlen. Sie überlegt daher, das Auto zu leasen. Das Autohaus bietet ihr folgende Konditionen:
Anzahlung: € 13.340
Laufzeit: 36 Monate
monatlich nachschüssige Rate: € 922
Restwert: € 26.000

– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz für dieses Leasinggeschäft.

c) Eine Alternative zu einer Leasingfinanzierung ist die Finanzierung mittels eines Kredits. Für das zum Verkauf stehende Auto (Kaufpreis: € 66.700) wird folgender Kredit angeboten:
Anzahlung: € 13.560
Zinssatz: 5,06 % p. a.
Laufzeit: 60 Monate

– Berechnen Sie, wie hoch bei diesem Angebot die zu leistenden nachschüssigen Monatsraten sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Kontoüberziehung verursacht bei einem Jahreszinssatz von 12 % für 16 Tage Kosten in Höhe von $\frac{16}{360} \cdot 0{,}12 = 0{,}005\dot{3} \approx 0{,}53$ % von € 65.699,50.
Diese sind viel geringer als der angebotene Skonto von 1,5 % der Kaufsumme.
Herr Maier sollte das Angebot des Verkäufers annehmen.

b) $13\,340 + 922 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{36}} + \frac{26\,000}{q_{12}^{36}} = 66\,700$
Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}00401...$
$q = (q_{12})^{12} = 1{,}0492...$
Der Zinssatz beträgt rund 4,9 % p. a.

c) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}0506} = 1{,}00412...$
$66\,700 - 13\,560 = R \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}}$
$53\,140 = R \cdot 53{,}0598...$
$R = 1\,001{,}51$
Die monatlichen Raten betragen jeweils € 1.001,51.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 3
c) leicht	c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

Biogas

Aufgabennummer: B_174

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Biogas ist ein alternativer Energieträger. Es kann unter anderem aus Mais- oder Zuckerrüben gewonnen werden. Der Hauptbestandteil von Biogas ist Methan.

x … Ackerfläche in Hektar (ha), auf der Mais angebaut wird
y … Ackerfläche in Hektar (ha), auf der Zuckerrüben angebaut werden

a) Eine Landwirtin hat insgesamt höchstens 40 Hektar (ha) Anbaufläche zur Verfügung. Sie will auf einer Ackerfläche von mindestens 5 ha Mais und auf einer Ackerfläche von mindestens 10 ha Zuckerrüben anbauen.
Außerdem möchte sie einen Ertrag von mindestens 480 000 m³ Biogas erzielen.
Sie möchte die Kosten für die Erzeugung von Methan möglichst gering halten.
In der folgenden Tabelle sind die Kosten und Erträge aufgelistet:

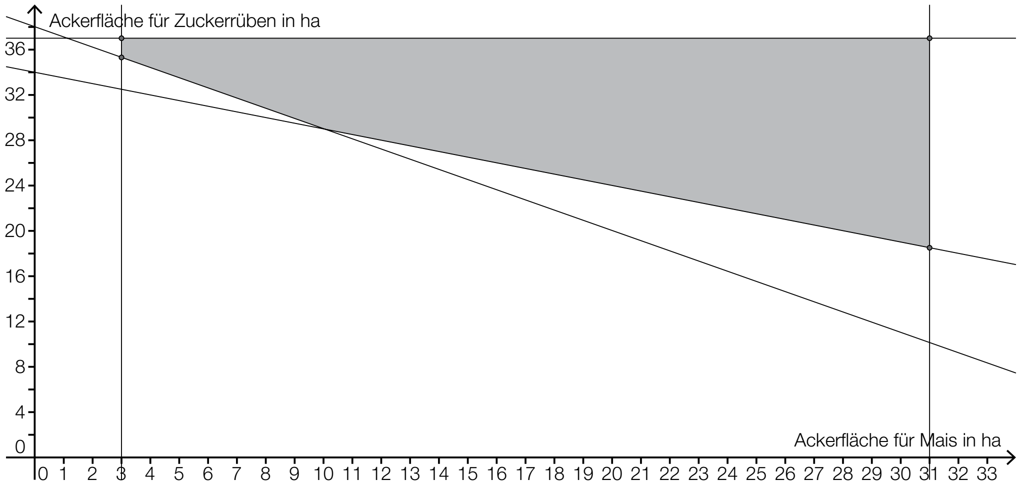
	Produktionskosten für Methan in €/m³	Methanertrag in m³/ha	Biogasertrag in m³/ha
Energiemais	0,2	6 400	11 000
Zuckerrüben	0,25	7 000	12 600

– Stellen Sie die notwendigen Ungleichungen und die Zielfunktion für eine lineare Optimierung auf.

b) Ein Landwirt ermittelt für seine Biogasproduktion folgende Zielfunktion Z der entstehenden Kosten in Euro (€):

$Z(x,y) = 1\,050 \cdot x + 1\,500 \cdot y$

– Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die nachstehende Grafik mit dem grau unterlegten Lösungsbereich ein.
– Lesen Sie aus der Grafik diejenigen Ackerflächen für Mais und Zuckerrüben ab, für die die Kosten minimal werden.
– Berechnen Sie die entstehenden minimalen Kosten.



c) Mögliche Werte für x und y werden durch folgende 6 Ungleichungen beschrieben:

(1) $x \geq 10$
(2) $x \leq 62$
(3) $y \geq 8$
(4) $y \leq 60$
(5) $y \geq -0{,}75 \cdot x + 70$
(6) $y \geq -0{,}52 \cdot x + 62$

– Zeichnen Sie diejenige Fläche, die durch diese Ungleichungen bestimmt ist.

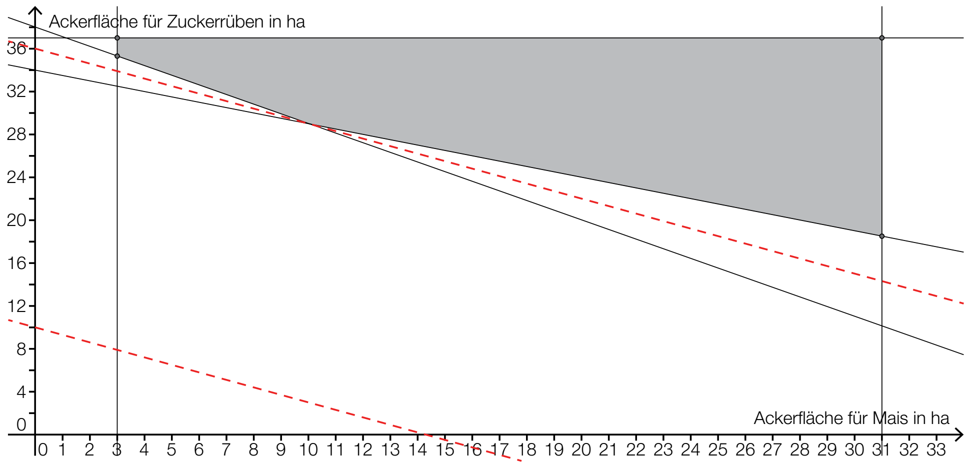
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zielfunktion: $Z(x,y) = 0{,}2 \cdot 6\,400 \cdot x + 0{,}25 \cdot 7\,000 \cdot y = 1\,280 \cdot x + 1\,750 \cdot y$

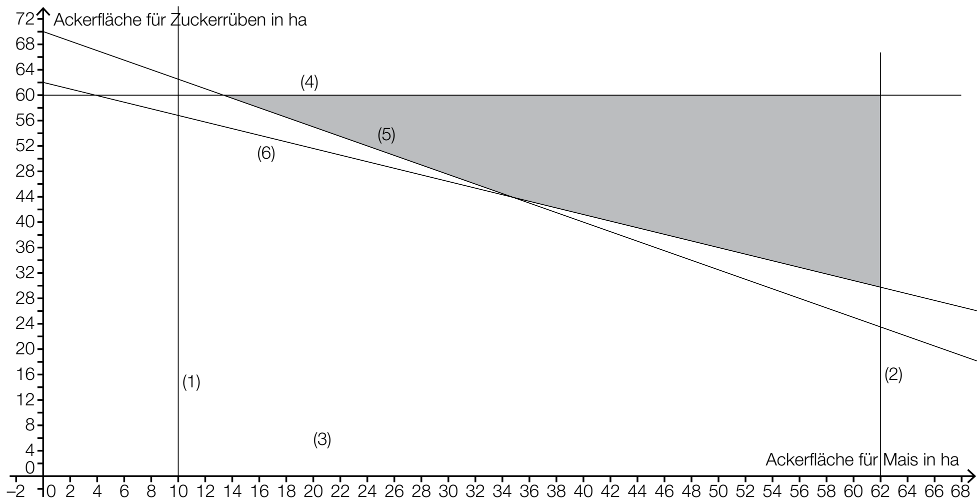
Ungleichungen:
$x \geq 5$
$y \geq 10$
$x + y \leq 40$
$11\,000 \cdot x + 12\,600 \cdot y \geq 480\,000$

b)



Der Lösungspunkt hat die Koordinaten (10|29).
Es werden auf einer Ackerfläche von 10 ha Mais und auf einer Ackerfläche von 29 ha Zuckerrüben angepflanzt. $\Rightarrow$ $Z(10, 29) = 1\,050 \cdot 10 + 1\,500 \cdot 29 = 54\,000$
Die minimalen Kosten betragen daher € 54.000.

c)



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Digitalkameras

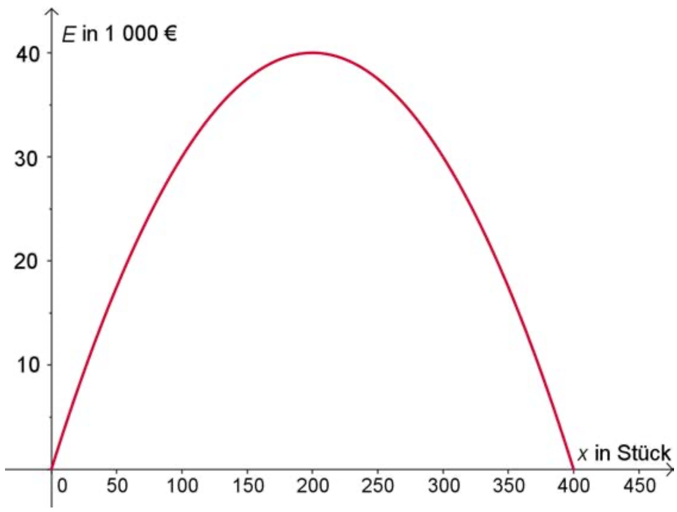
Aufgabennummer: B_126

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine spezielle Ausgabe von Digitalkameras wird verkauft.

a) – Erklären Sie, wie die langfristige Preisuntergrenze aus den Produktionskosten *K*, die bei der Erzeugung der Kameras anfallen, ermittelt werden kann.
– Argumentieren Sie, welche Bedeutung die langfristige Preisuntergrenze für den Betrieb hat.

b) Die Erlösfunktion *E* wird durch die nachstehende Grafik dargestellt.



– Lesen Sie aus dem Graphen die Erlösgrenzen, die Verkaufsmenge für das Erlösmaximum sowie das Erlösmaximum ab.
– Begründen Sie, warum der Erlös trotz steigendem Absatz *x* nach Erreichen eines Maximums sinkt und sogar null werden kann.

c) Der Gewinn *G* kann in Abhängigkeit von der Anzahl verkaufter Kameras *x* näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$G(x) = -x^2 + 370x - 2\,896$$

x … Anzahl der verkauften Kameras in Stück
$G(x)$ … Gewinn bei x Stück in Euro (€)

– Berechnen Sie die Gewinngrenzen (Break-even-Point und die obere Gewinngrenze) sowie das Gewinnmaximum.
– Interpretieren Sie die auftretenden Verlustzonen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Aus den gesamten Kosten K kann man die Stückkosten $\overline{K}$ ermitteln, die bei der Erzeugung einer einzelnen Kamera anfallen, indem man durch die produzierte Stückzahl x dividiert.

Die langfristige Preisuntergrenze entspricht den minimalen Stückkosten, die man mithilfe der Differenzialrechnung bestimmen kann.
Aus der Gleichung $\overline{K}(x)' = 0$ berechnet man die Menge x_{opt}, bei der die Stückkosten minimal werden.
Diese Menge setzt man in den Term für die Stückkosten ein und erhält so die langfristige Preisuntergrenze.

Produziert der Betrieb die Menge x_{opt} und kann die gesamte Produktion zu einem Preis verkauft werden, der der langfristigen Preisuntergrenze entspricht, dann arbeitet der Betrieb kostendeckend. Er macht weder einen Gewinn noch einen Verlust.

b) Die Erlösgrenzen sind die Nullstellen der Funktion:
$x_1 = 0$ und $x_2 = 400$ Stück.
Das Erlösmaximum liegt bei 200 Stück und beträgt ungefähr € 40.000.

Verkauft man mehr als 200 Stück, so wird der Erlös laufend geringer. Ein Grund dafür kann der geringer werdende Verkaufspreis sein.
Der Erlös wird bei Erreichen der sogenannten Marktsättigung null. Das ist bei 400 Stück der Fall. Der Preis wird null.

Ableseungenauigkeiten werden toleriert.

c) Gewinngrenzen: $G(x) = 0$
$-x^2 + 370x - 2\,896 = 0$

Technologieeinsatz:
$x_1 = 8$ Stück und $x_2 = 362$ Stück
Bei $x < 8$ Stück ist die Verkaufsmenge zu gering, um die Kosten zu decken, bei $x > 362$ Stück wird die Verkaufsmenge zu groß, die Herstellungskosten sind zu hoch oder der Verkaufspreis zu gering. In beiden Fällen wird ein Verlust zu erwarten sein.

Maximaler Gewinn:

$G'(x) = 0$
$-2x + 370 = 0$
$x = 185$
$G(185) = 31\,329$

Maximalen Gewinn erzielt man bei einem Verkauf von 185 Kameras.
Der maximale Gewinn beträgt € 31.329.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Erweiterung der Produktpalette

Aufgabennummer: B_142		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Ein Unternehmen möchte sein Angebot um ein neues Produkt erweitern. Im Zuge dessen werden die Gesamtkosten untersucht und es wird die Aufnahme eines Kredits in die Wege geleitet.

a) Die Gesamtkosten lassen sich näherungsweise durch eine Polynomfunktion 3. Grades K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschreiben. Die Kostenkehre liegt bei 100 Stück. Die Grenzkosten an der Kostenkehre betragen € 0,30/Stück. Die Fixkosten betragen € 5.000. Eine Produktion von 250 Stück verursacht Kosten in Höhe von € 10.000.

– Erstellen Sie das Gleichungssystem, mit dem man die Koeffizienten dieser Kostenfunktion ermitteln kann.
– Berechnen Sie die Koeffizienten der Kostenfunktion.

b) Der Unternehmer benötigt einen Kredit in Höhe von € 400.000. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten der Höhe R über einen Zeitraum von 10 Jahren bei einem Jahreszinssatz von 3,7 %.

– Veranschaulichen Sie den Kreditbetrag und die Raten auf einer Zeitachse.
– Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

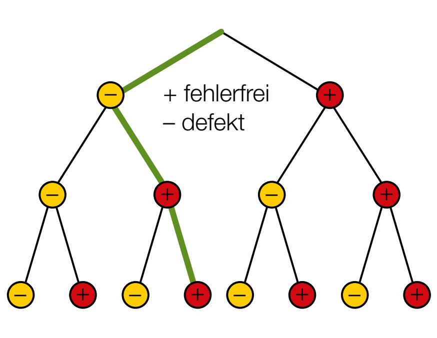
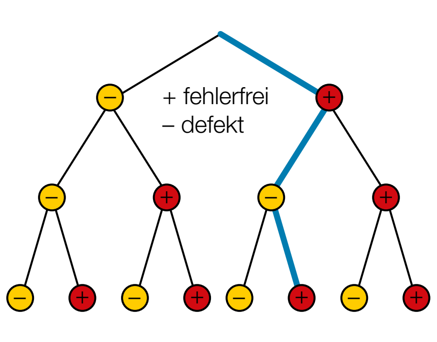
c) Eine Gewinnminderung ergibt sich für den Unternehmer durch die Tatsache, dass bei der Produktion erwartungsgemäß 10 % fehlerhafte Artikel auftreten.

Man entnimmt der Produktion 10 Stück.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 2 fehlerhafte Stück unter diesen 10 auftreten werden.

Gegeben sind zwei Baumdiagramme. Der markierte Ast des jeweiligen Baumdiagramms gibt bei Entnahme von 3 Stück aus der Produktion die Wahrscheinlichkeit einer fehlerhaften bzw. fehlerfreien Produktionsreihe wieder.

– Ordnen Sie den beiden Diagrammen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

A	Nur das 2. Stück ist fehlerhaft.
B	Das 2. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
C	Das 1. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
D	Nur das 1. Stück ist fehlerhaft.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

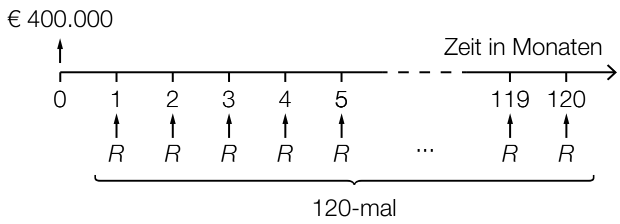
Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

Kostenkehre: $600 \cdot a + 2 \cdot b = 0$
Grenzkosten: $3 \cdot a \cdot 100^2 + 2 \cdot b \cdot 100 + c = 0{,}3$
Fixkosten: $d = 5\,000$
Kosten für 250 Stück: $a \cdot 250^3 + b \cdot 250^2 + c \cdot 250 + d = 10\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}001125$
$b = -0{,}3377\ldots$
$c = 34{,}0714$
$d = 5\,000$

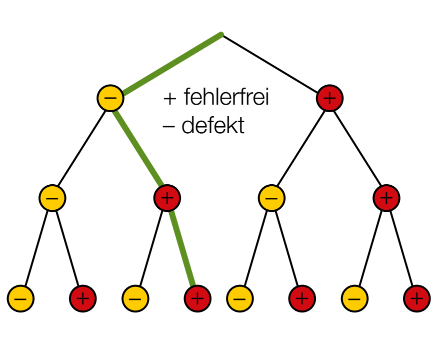
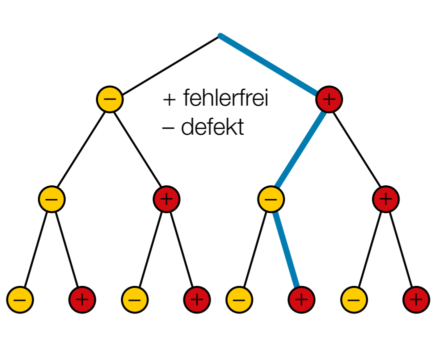
b)



$$400\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \quad \text{mit } q_{12} = \sqrt[12]{1{,}037}$$
$R = 3\,981{,}476\ldots$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 3.981,48.

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 26{,}4\ \%$

	D
	A

A	Nur das 2. Stück ist fehlerhaft.
B	Das 2. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
C	Das 1. und das 3. Stück sind fehlerhaft.
D	Nur das 1. Stück ist fehlerhaft.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Fahrzeugtests (2)

Aufgabennummer: B_159

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

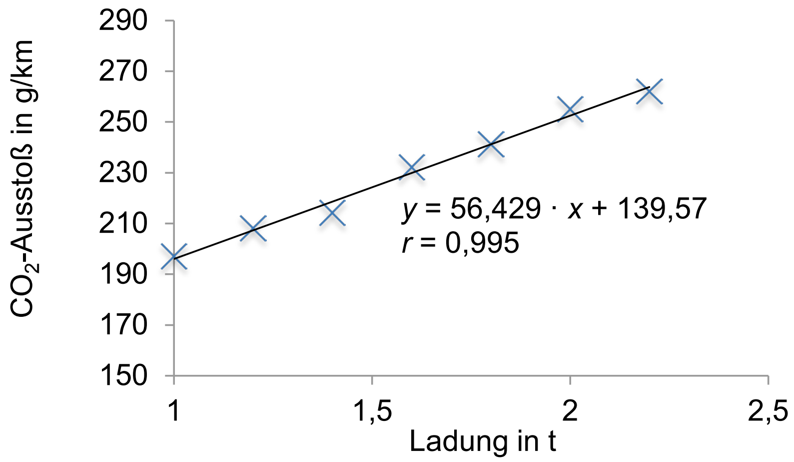
Die Firma *Cargo-Car* führt in der Entwicklungsphase eines neuen Transporters Tests durch.

a) In Testreihen wurde der Kraftstoffverbrauch – abhängig von der Ladung – erhoben. In der folgenden Tabelle ist für 8 Testfahrten die Reichweite pro Liter Kraftstoffverbrauch bei einer vorgegebenen Ladung in Tonnen angegeben:

Reichweite in km	12,46	12,10	11,81	11,32	10,94	10,81	10,79	10,23
Ladung in t	1	1,05	1,3	1,4	1,52	1,7	1,9	2,1

– Geben Sie an, welche Variable hier als unabhängig und welche als abhängig anzunehmen ist.
– Ermitteln Sie die lineare Regressionsgerade und stellen Sie diese mit den gegebenen Daten dar.
– Beschreiben Sie, wie man die Regressionsgerade zu einer Punktewolke ermittelt.

b) Bei der Auswertung einer Testreihe ergab sich folgende Regressionsgerade *y*:



Ein Mitarbeiter möchte die geschätzte CO_2-Emission bei einer Ladung von 1,5 Tonnen und bei einer Ladung von 2,5 Tonnen ermitteln.

– Berechnen Sie die gesuchten Werte.
– Interpretieren Sie den in der Grafik angegebenen Korrelationskoeffizienten *r*.

c) Tests zur Haltbarkeit neuer Bremsbeläge eines bestimmten Transporter-Typs haben ergeben, dass deren Zuverlässigkeit mithilfe der Funktion R beschrieben werden kann:

$R(t) = e^{-0{,}02 \cdot t}$

t ... Benützungsdauer in Stunden
$R(t)$ ... Prozentsatz der Bremsbeläge, die nach der Benützungsdauer t noch intakt sind

– Weisen Sie nach, dass nach einer Benützungsdauer von durchschnittlich 50 Stunden ca. 36,8 % der Bremsbeläge noch intakt sind.

Die Formel $R(t) = e^{-0{,}02 \cdot t}$ wird nach t umgeformt. Dabei wird ein Fehler gemacht.

– Kennzeichnen Sie die fehlerhafte Zeile.
– Formen Sie die Gleichung mathematisch richtig um.

1. $R(t) = e^{-0{,}02 \cdot t}$

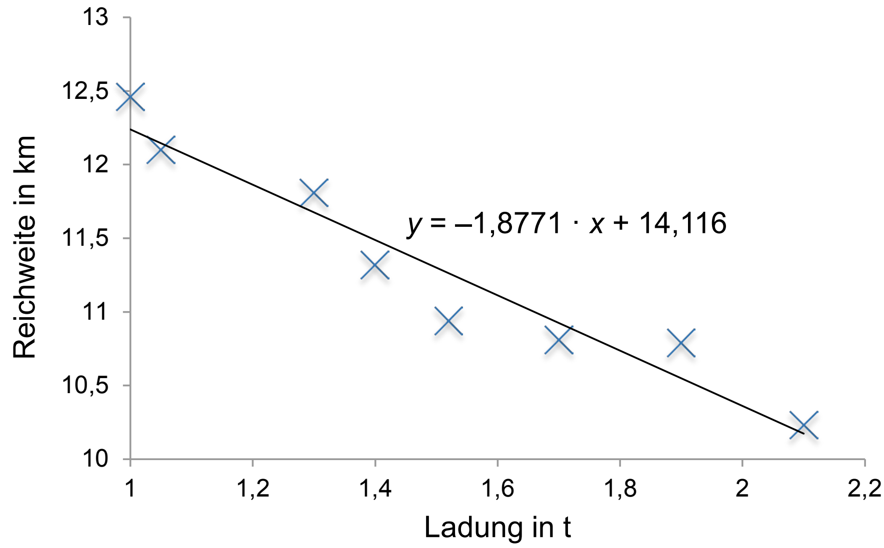
2. $\ln(R) = \frac{1}{0{,}02 \cdot t}$

3. $t = \frac{1}{0{,}02 \cdot \ln(R)}$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Abhängigkeit der Reichweite von einer vorgegebenen Ladung untersucht. Die Ladung ist daher die unabhängige Variable x, die Reichweite ist die abhängige Variable y.



Es werden die Differenzen zwischen den y-Werten der Punktewolke (des Streudiagramms) und den noch unbekannten y-Werten der Regressionsgeraden ermittelt. Diese Differenzen werden quadriert und summiert. Die Summe wird anschließend minimiert. Damit lässt sich die Gerade finden, die von den Punkten des Streudiagramms den geringsten Abstand hat.
(Auch die Erklärung mithilfe einer Skizze ist als richtig zu werten.)

b) Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 1,5 t beträgt 224,2... g/km ≈ 224 g/km.
Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 2,5 t beträgt 280,6... g/km ≈ 281 g/km.

Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}995$ liegt sehr nahe bei 1. Das bedeutet, dass der Zusammenhang sehr gut durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.
Das positive Vorzeichen deutet auf einen steigenden Trend.

c) $t = 50$ wird in die gegebene Gleichung eingesetzt:
$R(50) = 0{,}3678\ldots \approx 36{,}8\ \%$

Der Fehler befindet sich in der 2. Zeile. (Begründung: Der negative Exponent wurde falsch interpretiert bzw. eine logarithmische Rechenregel falsch angewendet.)

Korrekte Umformung:

1. $R(t) = e^{-0{,}02 \cdot t}$
2. $\ln(R) = -0{,}02 \cdot t$
3. $t = \frac{-\ln(R)}{0{,}02}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Messreihen

Quellen: —

Getränkeproduktion

Aufgabennummer: B_147

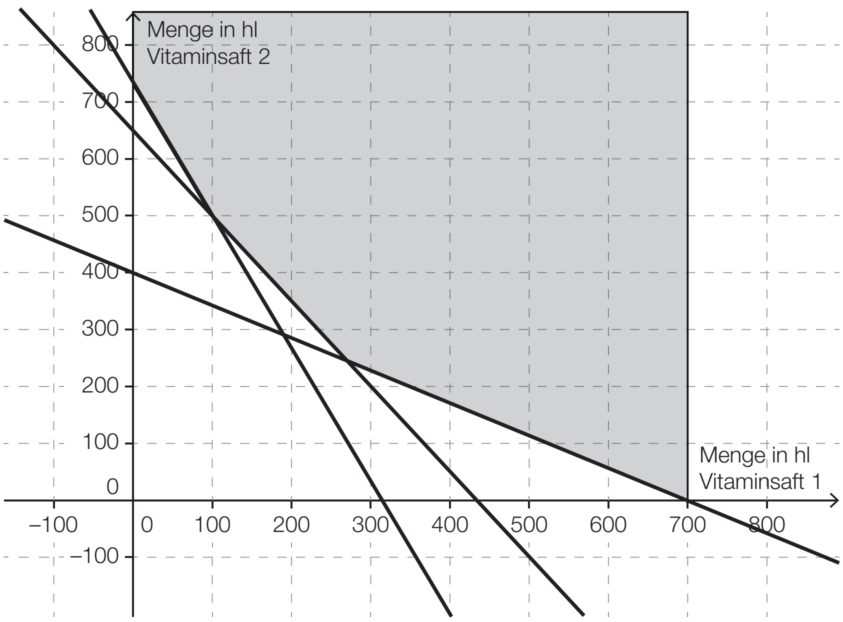
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Getränkehersteller produziert verschiedene Fruchtsäfte.

a) Das Unternehmen stellt zwei Sorten von Nektar her. Sorte 1 enthält 60 % Kirschsaft und 25 % Apfelsaft, Sorte 2 enthält 40 % Kirschsaft und 45 % Apfelsaft. Man hat maximal 400 Hektoliter (hl) Kirschsaft und 310 hl Apfelsaft zur Verfügung.

- Übertragen Sie die Anteile und die jeweiligen Maximalmengen der beiden Sorten in eine Tabelle.
- Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das den Bereich der möglichen Herstellungsmengen der beiden Sorten beschreibt.
- Stellen Sie den Lösungsbereich des Ungleichungssystems in einem Koordinatensystem grafisch dar.

b) Das Unternehmen stellt aus 2 hochwertigen Vitamingetränken eine neue Mischung her, die bestimmte Mindestmengen von 3 Inhaltsstoffen enthalten muss. Die in der nachstehenden Grafik dargestellte Lösungsmenge erfüllt diese Bedingungen. Der 1. Vitaminsaft kostet dem Unternehmen € 300 pro hl, der 2. Saft € 150 pro hl.



Die neue Mischung soll möglichst kostengünstig sein.

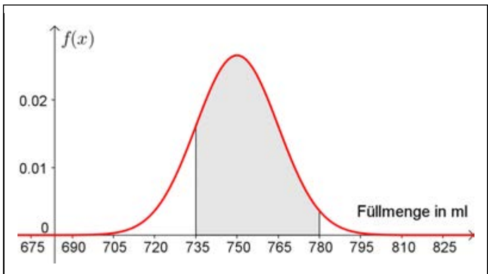
– Stellen Sie die Zielfunktion K für die Kosten auf.
– Zeichnen Sie die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die obige Grafik ein.
– Ermitteln Sie, für welche Mischung die Kosten minimal sind.
– Berechnen Sie die minimalen Kosten.

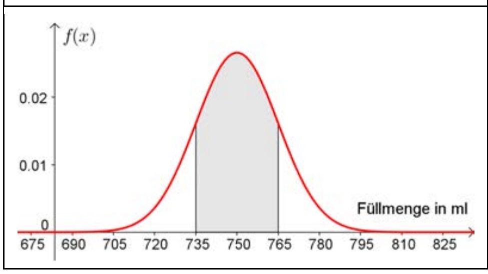
c) Die Säfte werden auf 2 Maschinen in Flaschen abgefüllt. Die Füllmenge pro Flasche kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.
Zum Ausschuss zählen diejenigen Flaschen, die die jeweils tolerierte Mindestfüllmenge unterschreiten.
Die Füllmenge an der 1. Maschine weist einen Erwartungswert von 750 Millilitern (ml) und eine Standardabweichung von 15 ml auf. Der Ausschuss an der 1. Maschine beträgt erfahrungsgemäß 2,5 %.
Die 2. Maschine füllt ebenfalls mit einem Erwartungswert von 750 ml ab, aber mit einer Standardabweichung von 10 ml.

– Berechnen Sie die tolerierte Mindestfüllmenge an der 1. Maschine.
– Argumentieren Sie, welche der beiden Maschinen weniger Ausschussware produziert, wenn man von der gleichen Mindestfüllmenge für beide Maschinen ausgeht.

Die nachstehenden Grafiken zeigen Wahrscheinlichkeiten für Füllmengenbereiche von Maschine 1.

– Ordnen Sie den beiden grafischen Darstellungen jeweils die zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*





A	$P(X \geq \mu - \sigma)$
B	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
C	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$
D	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

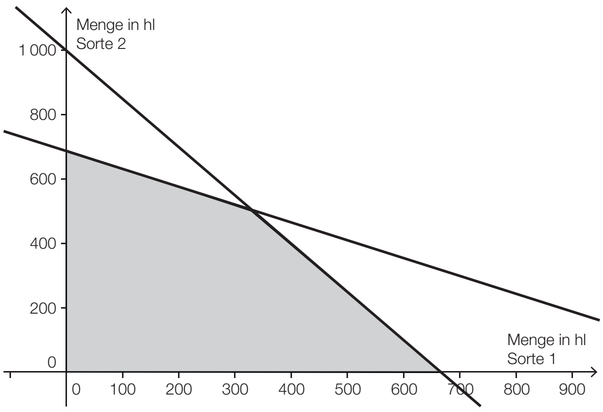
	Kirschsaft	Apfelsaft
Sorte 1 (x hl)	60 %	25 %
Sorte 2 (y hl)	40 %	45 %
Maximalmenge	400 hl	310 hl

I: $0{,}6x + 0{,}4y \leq 400$

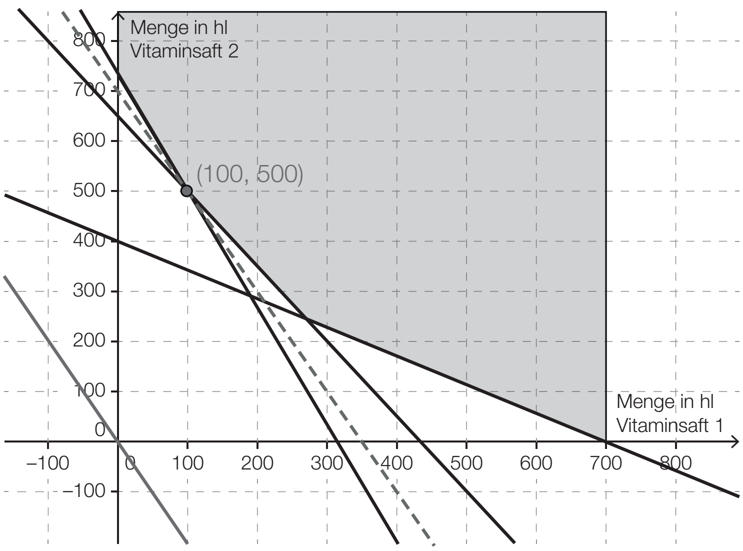
II: $0{,}25x + 0{,}45y \leq 310$

III: $x \geq 0$

IV: $y \geq 0$



b) $K(x, y) = 300x + 150y$ ... Zielfunktion



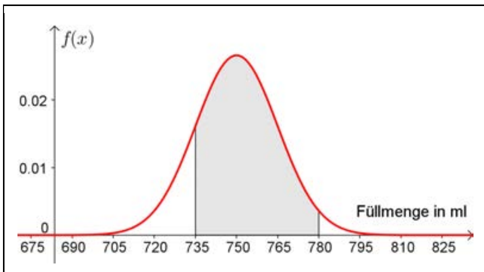
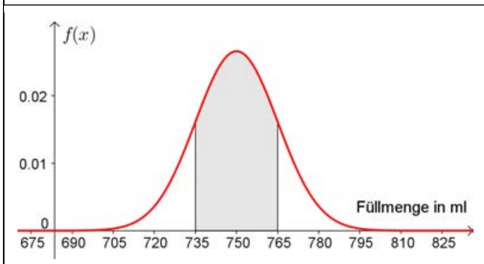
100 hl Vitaminsaft 1 gemischt mit 500 hl Vitaminsaft 2 sind am günstigsten.

$K_{\min} = 300 \cdot 100 + 150 \cdot 500$
Die minimalen Kosten betragen € 105.000.

c) Lösung mittels Technologie oder über die folgende Gleichung:
$P(X \leq a) = 0{,}025$
$\Phi\left(\frac{a-750}{15}\right) = 0{,}025$
$a = \Phi^{-1}(0{,}025) \cdot 15 + 750$
$a = -1{,}96 \cdot 15 + 750 \approx 720{,}605...$

Die Mindestfüllmenge beträgt rund 721 ml.

Bei gleicher Mindestfüllmenge der 2. Maschine, aber einer geringeren Standardabweichung bedeutet das, dass die Dichtefunktion steiler und schmäler verläuft. Unterhalb der Mindestfüllmenge und oberhalb der maximal zulässigen Füllmenge ist die Fläche jeweils kleiner.
Daher füllt die 2. Maschine präziser ab als die 1. Maschine.

	C
	B

A	$P(X \geq \mu - \sigma)$
B	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
C	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$
D	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 4
c) mittel	c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Grenzkosten und Stückkosten

Aufgabennummer: B_130

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als Grenzkostenfunktion K' bezeichnet man die 1. Ableitung der Gesamtkostenfunktion K.
Bei der Herstellung eines bestimmten Produkts während zweier aufeinanderfolgender Herstellungsperioden können die Grenzkosten durch eine lineare Grenzkostenfunktion K_1' (Abb. 1) und eine quadratische Grenzkostenfunktion K_2' (Abb. 2) beschrieben werden.

x … Produktionsmenge in Stück (Stk.)
$K_1'(x)$, $K_2'(x)$ … Grenzkosten in Euro pro Stück (€/Stk.) bei x erzeugten Stk.

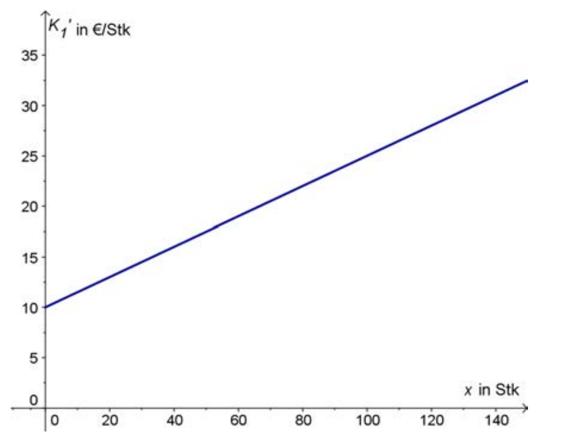


Abb. 1

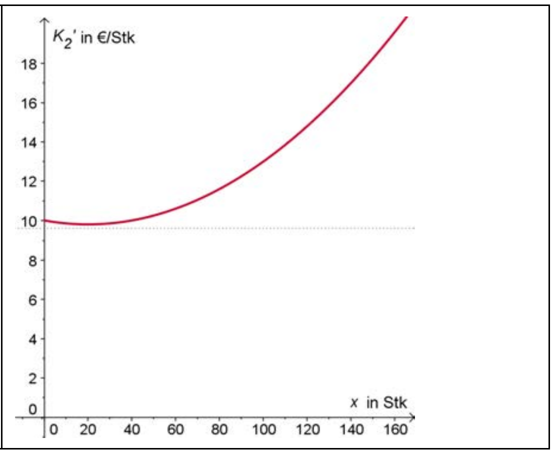


Abb. 2

a) – Ermitteln Sie die Gleichung der Grenzkostenfunktion K_1' aus dem Graphen der Abb. 1.
– Berechnen Sie mithilfe der Grenzkostenfunktion K_1' die Gesamtkostenfunktion K_1, wenn die Fixkosten € 260 betragen.

b) Die Kostenkehre ist die Herstellungsmenge, bei der der Graph der Kostenfunktion ihren Wendepunkt hat.

– Erklären Sie, wie Sie aus dem Graphen einer Grenzkostenfunktion die Kostenkehre ablesen können.
– Begründen Sie, warum der Verlauf von einer der beiden Grenzkostenfunktionen (Abb. 1 oder Abb. 2) auf eine Kostenkehre schließen lässt und dies für die andere nicht gilt.

c) Die Kostenfunktion für die Herstellung eines anderen Produkts lautet:

$$K(x) = 0{,}0006x^3 + 0{,}02x^2 + 10x + 250$$

x … Produktionsmenge in Stück (Stk.)
$K(x)$ … Gesamtkosten in Euro (€) bei Erzeugung von x Stk.

- Ermitteln Sie die Gleichungen der Grenzkostenfunktion K' und der Stückkostenfunktion $\overline{K} = \frac{K}{x}$.
- Zeichnen Sie im Definitionsbereich [0;250] die Graphen der beiden Funktionen K' und $\overline{K}$ in ein Koordinatensystem.
- Interpretieren Sie den Schnittpunkt der beiden Kurven im Zusammenhang mit dem Betriebsoptimum und den minimalen Stückkosten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $k = \frac{\Delta K'}{\Delta x} = \frac{3}{20} = 0{,}15$; $d = 10$

Falls die Ablesung falsch war, so ist der Folgefehler nicht zu berücksichtigen.
Eine ungenaue Ablesung ist zu tolerieren.

$K_1'(x) = 0{,}15x + 10$

$K_1(x) = \int (0{,}15x + 10)\mathrm{d}x$

$K_1(x) = 0{,}075x^2 + 10x + 260$

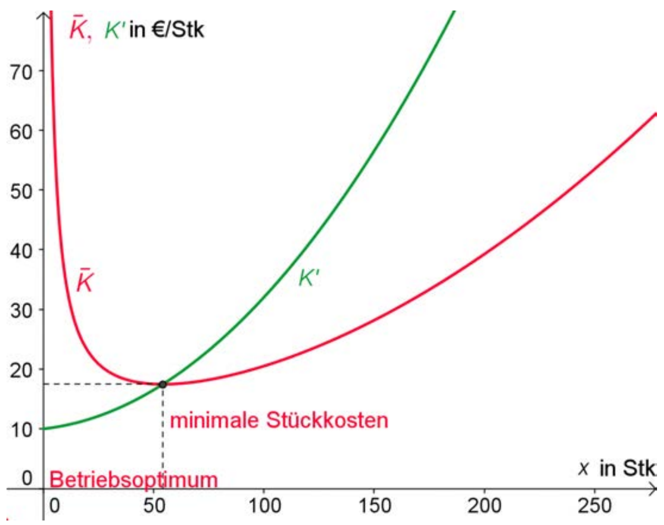
b) Die Grenzkostenfunktion bildet die 1. Ableitung der Kostenfunktion. An der Kostenkehre hätte die 2. Ableitung den Wert null. Man erkennt sie daher an einem Extremwert der Grenzkostenfunktion.

Abb. 1 stellt eine lineare Grenzkostenfunktion dar. Sie hat keinen Extremwert, daher liegt auch kein Wendepunkt vor.

Abb. 2 stellt eine quadratische Funktion dar, bei der der x-Wert des Minimums der Kostenkehre entspricht.

c) $K'(x) = 0{,}0018\,x^2 + 0{,}04x + 10$

$\overline{K}(x) = 0{,}0006x^2 + 0{,}02x + 10 + \frac{250}{x}$



Die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Kurven ergibt das Betriebsoptimum und dessen y-Koordinate ergibt die minimalen Stückkosten.

Die Grenzkosten im Betriebsoptimum entsprechen den minimalen Stückkosten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren; B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Grönlandwale

Aufgabennummer: B_195

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

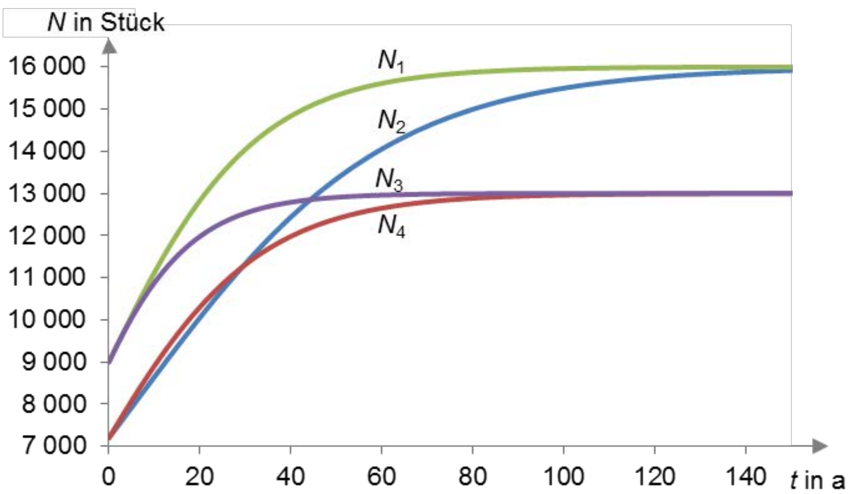
Grönlandwale sind eine vom Aussterben bedrohte Tierart. Noch existierende Populationen stehen unter strengstem Schutz. Das Wachstum der Populationen wird genau beobachtet.

Aus langjährigen Beobachtungen der größten heute lebenden Population kann für deren zukünftiges Wachstum unter gleichbleibenden Umweltbedingungen die folgende Funktion angegeben werden:

$$N(t) = \frac{16\,000}{1 + \frac{11}{9} \cdot e^{-0{,}0363 \cdot t}}$$

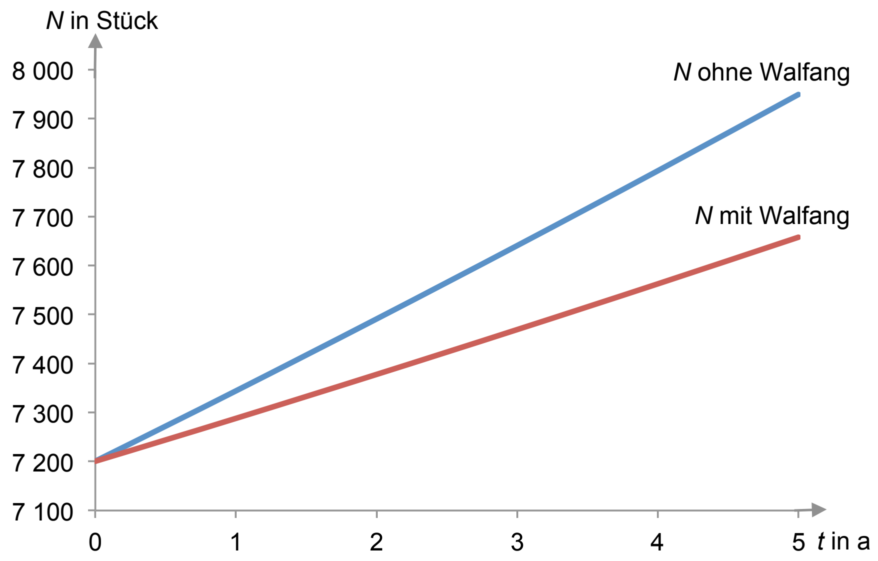
t … Zeit in Jahren (a) mit $t = 0$ im Jahr 2007
$N(t)$ … Anzahl der Wale in Stück nach t Jahren

a) – Lesen Sie ab, welcher der folgenden Funktionsgraphen zur angegebenen Funktion passt.
– Begründen Sie Ihre Auswahl.



b) – Stellen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Walpopulation in Abhängigkeit von der Zeit t grafisch dar.
– Berechnen Sie, zu welcher Zeit die Walpopulation am stärksten zunimmt.

c) Trotz Naturschutz gesteht die Internationale Walfangkommission IWC den Inuit (Volksgruppe in Grönland) Fangquoten für den Eigenbedarf für bestimmte Grönlandwalbestände zu. So wurde von 2008 bis 2012 der Fang einer genau bestimmten Anzahl an Tieren für die oben beschriebene Walpopulation erlaubt. In der nachstehenden Grafik ist die voraussichtliche Entwicklung der Walpopulation ohne und mit jährlichem Abfischen dargestellt.



– Argumentieren Sie mathematisch, warum sich der Abstand der beiden Exponentialfunktionen mit jedem Jahr vergrößert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Zähler der Formel gibt die maximal erreichbare Anzahl von Walen an. Es kommen also nur die Graphen N_1 und N_2 in Frage, da diese bis zu 16 000 Tiere erlauben.
Die Zahl der Tiere zum Zeitpunkt null kann mithilfe der Konstante $\frac{11}{9}$ bestimmt werden. Diese gibt das Verhältnis von maximal erreichbarem Wert und Anfangswert der logistischen Funktion wieder.

$$\frac{11}{9} = \frac{16\,000}{N_0} - 1$$

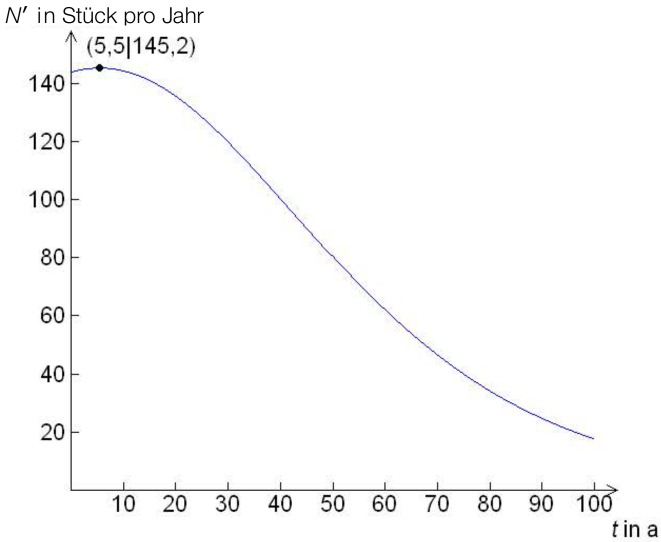
$$\frac{20}{9} = \frac{16\,000}{N_0}$$

$$N_0 = \frac{16\,000 \cdot 9}{20} = 7\,200$$

Der passende Graph ist daher N_2.

Auch andere passende Argumentationen bzgl. des Anfangswerts sind als richtig zu werten.

b) Die Wachstumsgeschwindigkeit der Walpopulation wird durch die 1. Ableitung der Funktion N beschrieben.
N' wird mithilfe von Technologie berechnet und deren Maximum bestimmt. Es ergibt sich, dass nach ca. 5,5 Jahren die größte Zunahme an Walen erfolgt.



c) Der Abstand der Funktionsgraphen wird immer größer, da durch das jährliche Abfischen auch die Basis für den prozentuellen jährlichen Zuwachs verkleinert wird. Bei gleichbleibender prozentueller Zuwachsrate ergibt sich bei einer größeren Ausgangsmenge eine größere Anzahl hinzukommender Wale als bei einer kleineren Ausgangsmenge.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2

Thema: Umwelt

Quelle: www.wwf.at/files/downloads/groenlandwal.pdf

Herstellungskosten (1)

Aufgabennummer: B-C6_07

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für ein Produkt lautet die quadratische Kostenfunktion wie folgt:

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 6x + 40$$

$K(x)$ … Gesamtkosten von x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE)
x … erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)

Der Betrieb erzeugt pro Tag höchstens 30 ME dieses Produkts.

a) – Interpretieren Sie die gegebene Kostenfunktion hinsichtlich der folgenden mathematischen Eigenschaften:
- sinnvoller Definitionsbereich
- Monotonie und Krümmungsverhalten
- Fixkosten

b) – Ermitteln Sie aus der gegebenen Gleichung, wie viele ME produziert wurden, wenn Kosten von 150 GE angefallen sind.
– Ermitteln Sie, wie hoch die Kosten für die Produktion von 10 ME sind.
– Stellen Sie die Kostenfunktion grafisch dar und zeichnen Sie die beiden berechneten Wertepaare ein.

c) – Stellen Sie die Stückkostenfunktion (= Durchschnittskostenfunktion) auf.
– Berechnen Sie das Betriebsoptimum mit der langfristigen Preisuntergrenze.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

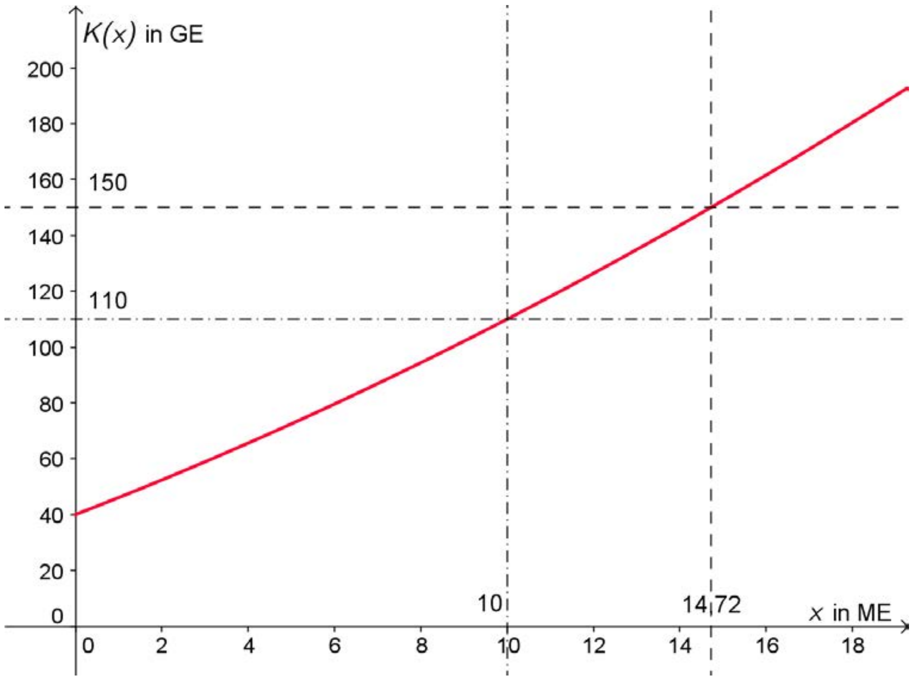
Möglicher Lösungsweg

a) Der Definitionsbereich ist [0;30].

Die Kostenfunktion ist im angegebenen Definitionsbereich streng monoton steigend.
Die Kosten steigen progressiv, der Graph der Kostenfunktion hat im betrachteten Bereich eine positive Krümmung.

Die Fixkosten betragen $K(0) = 40$ GE.

b) Bei Kosten von 150 GE werden rund 14,72 ME erzeugt.
Die Herstellung von 10 ME kostet 110 GE.



c) $\frac{K(x)}{x} = \overline{K}(x) = 0{,}1x + 6 + \frac{40}{x}$

$\overline{K}(x)' = 0{,}1 - \frac{40}{x^2} = 0$

$x = 20$
$\overline{K}(20) = 10$

Das Betriebsoptimum beträgt 20 ME.
Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 10 GE/ME.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B: Cluster 6

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Hustensaft

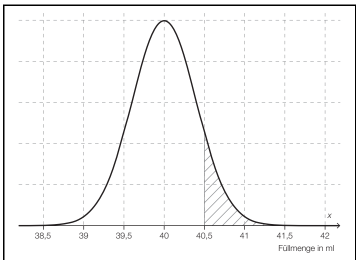
Aufgabennummer: B_138

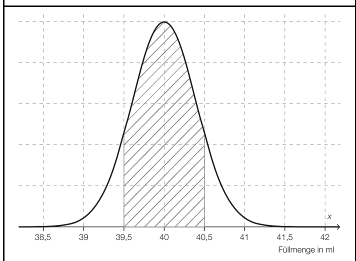
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen hat das Monopol auf den Vertrieb eines bestimmten Hustensafts. Der Hustensaft wird in kleinen Flaschen abgefüllt, deren Füllmenge in Millilitern (ml) angegeben ist.

a) Die Füllmenge für Flaschen einer bestimmten Größe kann als annähernd normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert von 40 ml angenommen werden. Die Standardabweichung beträgt 0,4 ml. Zum Ausschuss zählen alle Flaschen, deren Füllmenge außerhalb des Toleranzbereichs von [39,5; 40,5] ml liegt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche zum Ausschuss zählt.
– Ordnen Sie den durch die schraffierten Flächen dargestellten Wahrscheinlichkeiten in den beiden Skizzen je eine von den in A bis D gegebenen Füllmengen x richtig zu. Schreiben Sie den entsprechenden Buchstaben in das leere Feld neben der Skizze.
[2 zu 4]

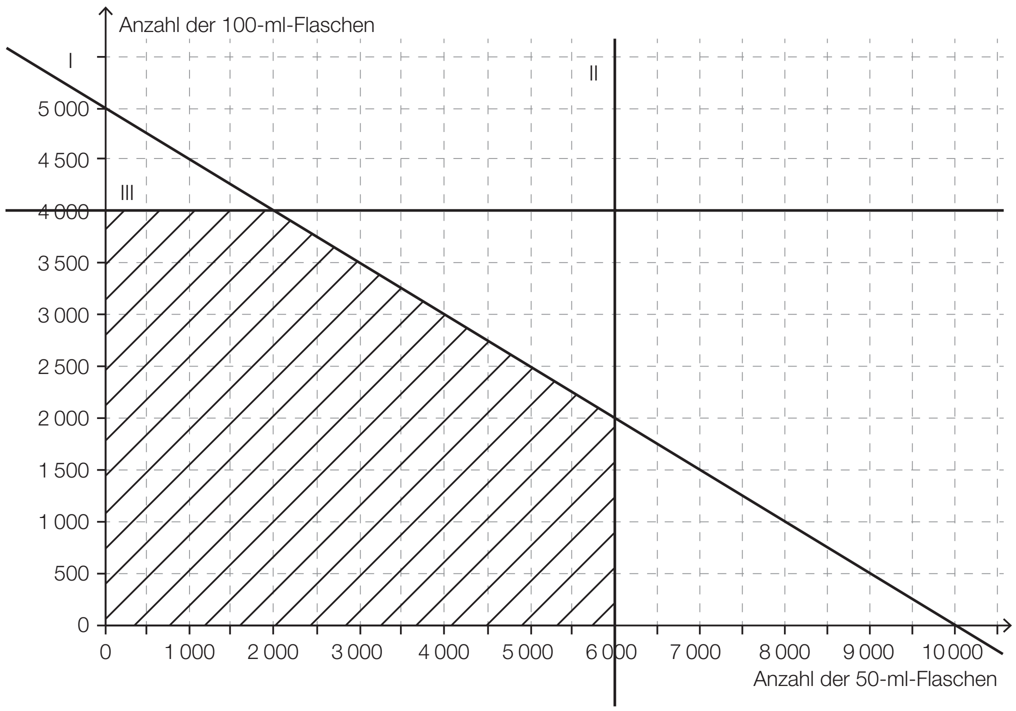




A	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 39{,}5 \wedge x \geq 40{,}5\}$ mit x in ml
B	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 39{,}5 \wedge x \leq 40{,}5\}$ mit x in ml
C	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 39{,}5 \wedge x \leq 40{,}5\}$ mit x in ml
D	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 39{,}5 \wedge x \geq 40{,}5\}$ mit x in ml

b) Das Unternehmen füllt pro Tag 500 Liter Hustensaft in x Flaschen mit 50 ml und y Flaschen mit 100 ml ab.
Der Verkaufspreis für eine 50-ml-Flasche beträgt € 5,40.
Für eine 100-ml-Flasche erzielt man einen Preis von € 9,60.

Der Lösungsbereich für die möglichen Verkaufszahlen der beiden unterschiedlichen Flaschen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Lesen Sie aus der Grafik die Ungleichung der einschränkenden Bedingung I ab.
– Erstellen Sie die Gleichung der Zielfunktion für den maximalen Erlös.
– Zeichnen Sie in die Grafik diejenige Gerade ein, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.
– Ermitteln Sie grafisch diejenige Anzahl von Flaschen, die das Unternehmen von beiden Größen verkaufen sollte, um einen maximalen Erlös zu erzielen.

c) Der Zusammenhang zwischen der Anzahl x der abgefüllten 100-ml-Flaschen und dem Verkaufspreis p pro Flasche wird in der folgenden Tabelle dargestellt.

x	1	5	10	15	20	25	30	35	40
$p(x)$	23,90	22,90	21,80	20,50	19,90	18,10	17,90	17,10	16,60

x … Flaschen in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis bei einem Absatz von x ME in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME)

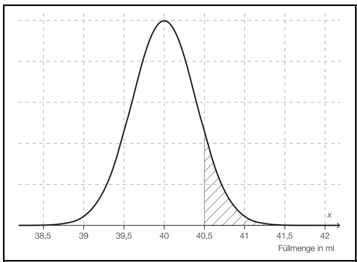
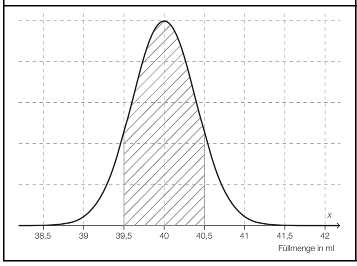
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für die Preis-Absatz-Funktion mithilfe einer linearen Regression.
– Erstellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion.
– Berechnen Sie den maximalen Erlös.
– Erklären Sie den Zusammenhang zwischen der 2. (oberen) Erlösgrenze und der Sättigungsmenge.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $P(X < 39{,}5) = \Phi\left(\frac{39{,}5-40}{0{,}4}\right) = 0{,}105649...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig entnommene Flasche Ausschuss ist, beträgt das Doppelte, nämlich rund 21,13 %.

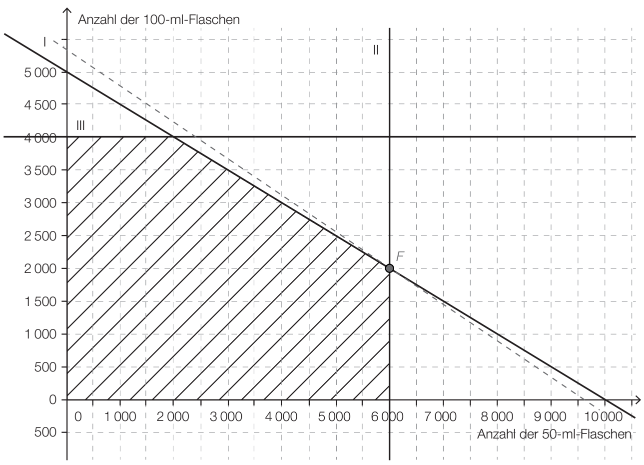
	D
	B

A	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 39{,}5 \wedge x \geq 40{,}5\}$ mit x in ml
B	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 39{,}5 \wedge x \leq 40{,}5\}$ mit x in ml
C	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 39{,}5 \wedge x \leq 40{,}5\}$ mit x in ml
D	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 39{,}5 \wedge x \geq 40{,}5\}$ mit x in ml

b) Ungleichung der einschränkenden Bedingung I: $y \leq 5\,000 - 0{,}5x$

$Z(x, y) = E = 5{,}4x + 9{,}6y$ … soll maximal werden

$Z_0 = -\frac{5{,}4}{9{,}6}x$



$F = (6\,000 \mid 2\,000)$

Bei einem Verkauf von 6 000 50-ml-Flaschen und 2 000 100-ml-Flaschen ist maximaler Erlös zu erwarten.

(Ablesung genügt, Toleranz: ±50 Flaschen)

c) $p(x) = -0{,}1916x + 23{,}71$
$E(x) = -0{,}1916x^2 + 23{,}71x$
Maximum des Erlöses: $E_{max} = 733{,}51$ GE

Die Sättigungsmenge ist die Menge, bei der der Stückpreis null ist. Es gibt daher keine Einnahmen.
An dieser Stelle ist auch der Erlös null.
Die 2. (obere) Erlösgrenze ist an der Stelle der Sättigungsmenge.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 4
c) leicht	c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Immobilienhandel

Aufgabennummer: B_127

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Immobilie soll verkauft werden. Der Barwert dieser Immobilie wird mit € 4.400.000 veranschlagt.

a) Ein Kaufinteressent könnte die 1. Hälfte des Betrags sofort bezahlen, die 2. Hälfte aber erst nach 1 Jahr.

– Argumentieren Sie, ohne zu rechnen, welche Zusatzforderungen an den Käufer mindestens gestellt werden müssten, damit der Verkäufer mit einem Zahlungsaufschub der 2. Hälfte einverstanden sein könnte.

b) Der Käufer muss zur Aufbringung des Kaufpreises einen Kredit in der Höhe von € 2.000.000 aufnehmen. Der Kredit soll in 15 Jahren durch gleichbleibende nachschüssige Annuitäten bei einem Zinssatz von 5 % p. a. getilgt werden. (Dieser Zinssatz berücksichtigt auftretende Gebühren und Steuern.)

– Erstellen Sie den Tilgungsplan für die ersten 2 Jahre.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 2.000.000,00
1				
2				

c) Der Verkäufer legt aus dem Verkaufserlös für die Immobilie € 800.000 bei seiner Bank zu 3,5 % p. a. an. (Die KESt ist in diesem Zinssatz bereits berücksichtigt.)
Er will jeweils zu Monatsbeginn eine Auszahlung von € 5.000 erhalten, bis die Einlage aufgebraucht ist. Der Zinssatz bleibt während der gesamten Zeit konstant.

– Berechnen Sie, wie viele volle Monatsraten er sich auszahlen lassen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Man muss den Barwert des eingegangenen Vorschlags berechnen, damit man die Zahlungen vergleichen kann (Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik).

Bei dem vorliegenden Vorschlag erhält der Besitzer die Hälfte des Betrages sofort. Durch die spätere Einzahlung der 2. Hälfte entgehen dem Verkäufer die von € 2,2 Millionen berechneten Jahreszinsen.

Falls der Käufer diese Zinsen zu einem vom Verkäufer eingebrachten Kalkulationszinssatz und mit allen sonstigen Auslagen für Kontoführung etc. ebenfalls berücksichtigt, wäre erst dann dieser Zahlungsvorschlag gleichwertig.

(Offene Aufgabe, daher nicht unbedingt in dieser Weise zu argumentieren. Stichwörter: gleicher Stichtag zum Vergleich der Zahlungen.)

b) Zunächst wird die Annuität A ermittelt:

$q = 1{,}05$

$2\,000\,000 = A \cdot \frac{q^{15} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{15}} \quad \Rightarrow \quad A \approx € \; 192.684{,}58$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 2.000.000,00
1	€ 100.000,00	€ 92.684,58	€ 192.684,58	€ 1.907.315,42
2	€ 95.365,77	€ 97.318,81	€ 192.684,58	€ 1.809.996,61

c) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}035}$

$800\,000 = 5\,000 \cdot \frac{q_{12}^{n} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{n-1}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 213{,}668...$

Der Betrag von € 5.000 kann 213-mal ausgezahlt werden.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 1
b) leicht	b) 3
c) schwer	c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Kreditkonditionen

Aufgabennummer: B_122		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Frau Mitter benötigt einen Kredit. Etwaige Nebengebühren und Steuern werden im Folgenden nicht berücksichtigt.

a) Ihre Hausbank bietet ihr einen Kredit in Höhe von € 100.000 zu folgenden Konditionen an: Rückzahlung durch vorschüssige Monatsraten bei einem Zinssatz von 4,2 % p. a. und einer Laufzeit von 10 Jahren.

– Ermitteln Sie die Höhe der Monatsraten.

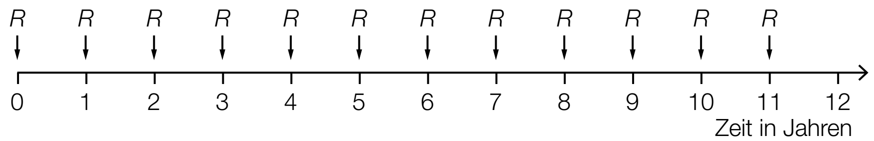
b) Frau Mitter hat die Möglichkeit, einen Teil aus eigenen Ersparnissen zu finanzieren und einen Kredit in Höhe von € 80.000 bei einem Zinssatz von 4,2 % p. a. aufzunehmen. Die Bank erwartet monatlich vorschüssige Rückzahlungen in Höhe von je € 550. Die Rückzahlung beginnt 3 Jahre nach Kreditaufnahme.

– Berechnen Sie, wie viele Jahre und Monate nach Kreditaufnahme die Schuld beglichen ist, wenn die Restzahlung 1 Monat nach der letzten Vollrate fällig ist.

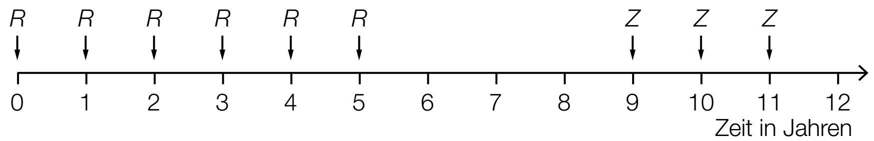
– Stellen Sie diese Situation mit den entsprechenden Rückzahlungsbeträgen grafisch in einer Zeitlinie dar.

c) Die nachstehenden Grafiken zeigen in Zeitlinien 2 weitere Rückzahlungsvarianten eines Kredits mit jährlichen Raten R bzw. Z mit dem Jahreszinssatz i.

1. Variante:



2. Variante:



– Beschreiben Sie die beiden Zahlungsweisen in Worten.

– Argumentieren Sie, dass die angegebene Gleichung den Wert von Z richtig beschreibt.

$Z = R \cdot (1 + q^3)$, wobei $q = 1 + i$ bedeutet

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

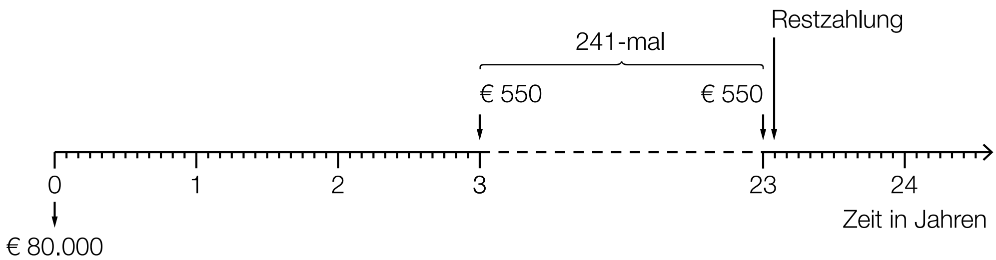
a) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}042}$

$$100\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{119}} \quad \Rightarrow \quad R = 1\,014{,}739...$$

Die Höhe der Rate beträgt € 1.014,74.

b) $$80\,000 \cdot 1{,}042^3 = 550 \cdot \frac{q_{12}^{n} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{n-1}}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n = 241{,}61...$
Frau Mitter muss 241 vorschüssige Monatsraten zahlen.
Die Restzahlung erfolgt daher 241 Monate (= 20 Jahre und 1 Monat) nach Beginn der Rückzahlung.
Das bedeutet, 23 Jahre und 1 Monat nach Kreditaufnahme ist die Schuld beglichen.



c) Das erste Angebot zeigt 12 jährliche vorschüssige Rückzahlungsraten R.

Das zweite Angebot zeigt die Rückzahlung mit 6 jährlichen vorschüssigen Raten R, der Endwert dieser 6 Raten wird 6 Jahre weiterverzinst, 3 Jahre sind ohne Rückzahlung und anschließend folgen 3 jährliche vorschüssige Raten Z, die die Rückzahlung abschließen.

Es wird 3-mal Z statt 6-mal R eingezahlt. Jedes Z steht demnach für 2 Zahlungen von R mit jeweils 3 Jahren zwischen den Einzahlungen. Wegen der jährlichen Verzinsung, die noch jeweils dazukommt, muss für jedes einzelne Z gelten:

$Z = R + R \cdot q^3 \quad \Rightarrow \quad$ daher ist $Z = R \cdot (1 + q^3)$

Man kommt auch mit anderen Überlegungen zu diesem Ergebnis (z. B.: der Endwert von 6 R*-Raten entspricht jenem der letzten 3 Z-Raten).*

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Lebensversicherung

Aufgabennummer: B_119

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei Lebensversicherungen spielt der Begriff *Sterbewahrscheinlichkeit* eine große Rolle. Man versteht darunter die Wahrscheinlichkeit, mit der eine versicherte Person innerhalb eines Versicherungsjahres verstirbt.

a) Die Sterbewahrscheinlichkeit ist unter anderem vom Lebensalter der versicherten Person exponentiell abhängig und verdoppelt sich bei jüngeren Personen schätzungsweise alle 9 Jahre. Laut Statistik Austria verstirbt in Österreich ein 30-jähriger Mann innerhalb eines Versicherungsjahres mit einer Wahrscheinlichkeit von nur ungefähr 0,088 %.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion p, die diese Abhängigkeit beschreibt. Runden Sie die Parameter auf 4 Nachkommastellen.

$p(t) = p_0 \cdot a^t$

t ... Alter in Jahren
$p(t)$ ... Sterbewahrscheinlichkeit in Prozent im Alter t

b) Ein junger Mann, dessen altersbedingte Sterbewahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses mit 0,09 % eingeschätzt wird, schließt eine Lebensversicherung über einen bestimmten Betrag ab, der im Falle des Ablebens an seine Angehörigen ausbezahlt wird.

– Erstellen Sie für diese Situation ein geeignetes Baumdiagramm für die ersten 3 Jahre nach Vertragsabschluss unter modellhafter Annahme einer konstanten Sterbewahrscheinlichkeit.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte innerhalb der ersten 3 Jahre nach Vertragsabschluss stirbt.

c) Statt jährlich € 100 in eine Lebensversicherung mit einer Versicherungssumme von € 20.000 einzuzahlen, möchte ein 30-jähriger Mann jährlich vorschüssig € 100 ansparen. Das Geld soll der Familie nach seinem Ableben zur Verfügung stehen.

– Berechnen Sie, wie lange es dauern würde, bis er gleich viel Geld gespart hat, wie die Lebensversicherungssumme beträgt. Gehen Sie dabei von einem Zinssatz von 2,5 % p.a. aus und berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 %.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 1. Gleichung: $0{,}088 = p_0 \cdot a^{30} \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{0{,}088}{a^{30}}$

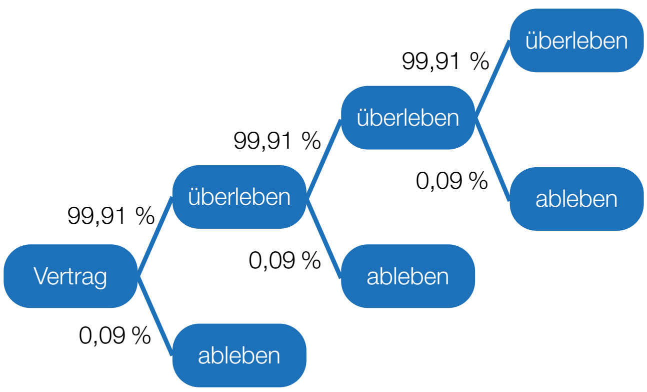
2. Gleichung: $2 \cdot 0{,}088 = p_0 \cdot a^{39} \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{2 \cdot 0{,}088}{a^{39}}$

Gleichsetzen: $\frac{0{,}088}{a^{30}} = \frac{2 \cdot 0{,}088}{a^{39}} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[9]{2} \approx 1{,}0801$

$p_0 = 0{,}00873... \approx 0{,}0087$

Gleichung der Funktion:
$p(t) = 0{,}0087 \cdot 1{,}0801^t$ (Parameter gerundet)

b)



$1 - 0{,}9991^3 = 0{,}00269... \approx 0{,}27\ \%$
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Versicherte innerhalb der ersten 3 Jahren nach Vertragsabschluss stirbt, ist rund 0,27 %.

c) Zinssatz nach Berücksichtigung der KESt: 2,5 % · 0,75 = 1,875 %
Aufzinsungsfaktor $q = 1{,}01875$

$20\,000 = 100 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 83{,}08...$
Es würde rund 83 Jahre dauern.

Erst ungefähr 83 Jahre nach dem Beginn der Spar-Einzahlungen und im Alter von 113 Jahren hätte der Mann den Betrag von € 20.000 angespart.
113 Jahre liegen weit über der durchschnittlichen Lebenserwartung. Daher ist das Ansparen von € 20.000 mit € 100 jährlich nicht zielführend.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 2

Thema: Versicherungen

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

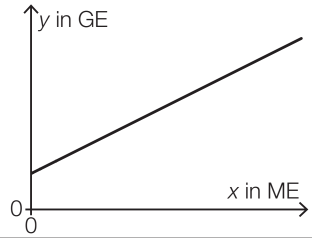
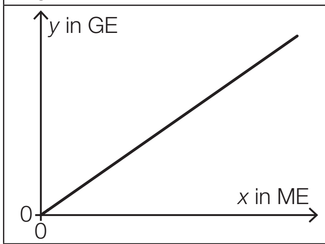
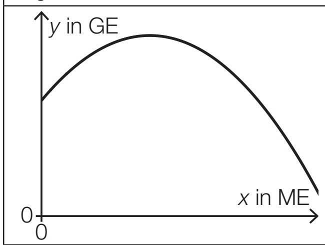
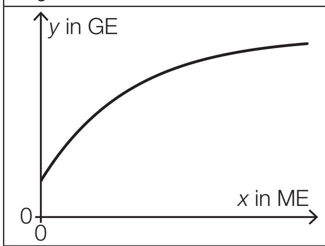
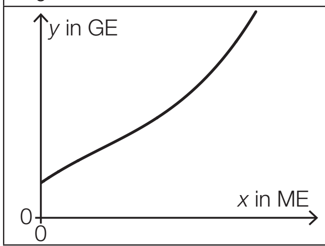
Möbel*

Aufgabennummer: B_513

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

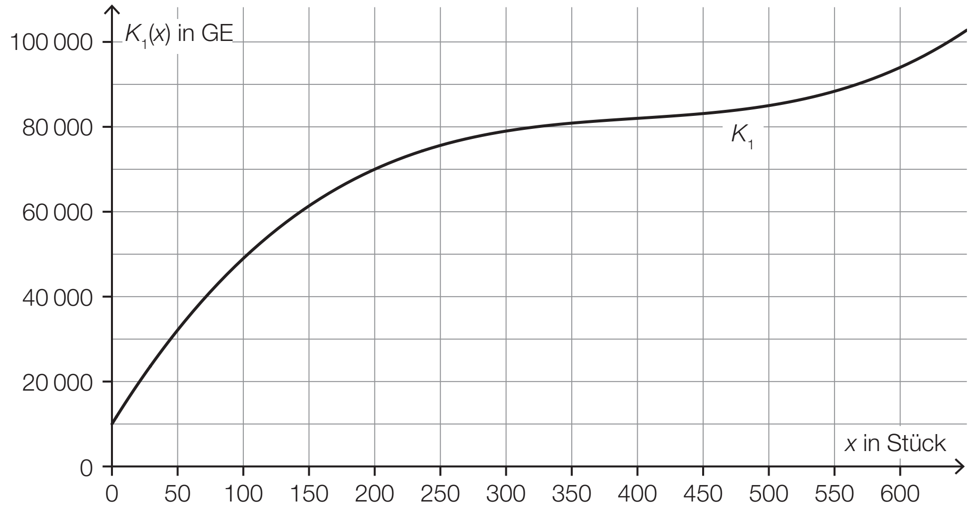
a) Im Folgenden sind die Graphen von 5 Funktionen dargestellt. Nur einer dieser Graphen kann der Graph einer Erlösfunktion sein.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Graphen an. *[1 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K_1 eines Betriebs bei der Produktion von Kleiderschränken dargestellt.



x ... Produktionsmenge in Stück
$K_1(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Lesen Sie das größtmögliche Produktionsintervall ab, in dem der Verlauf der Kostenfunktion K_1 degressiv ist.
2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Stückkosten bei einer Produktion von 200 Stück.

Die Fixkosten können um 10 % reduziert werden.

3) Begründen Sie, warum sich die Grenzkostenfunktion dadurch nicht ändert.

c) Die Kostenfunktion K_2 eines Betriebs bei der Produktion von Kommoden ist gegeben durch:

$$K_2(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + a \cdot x + 3\,000$$

x ... Produktionsmenge in Stück
$K_2(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 100 Kommoden hat der Betrieb Gesamtkosten von 35 000 GE.

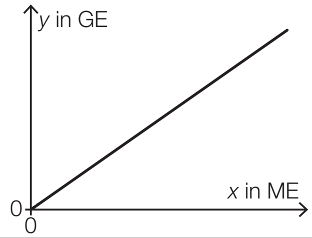
1) Berechnen Sie den Koeffizienten a der Kostenfunktion K_2.
2) Berechnen Sie das Betriebsoptimum.

Der Break-even-Point wird bei einem Verkauf von 60 Kommoden erreicht.

3) Berechnen Sie den Preis pro Kommode bei dieser verkauften Menge.

Möglicher Lösungsweg

a1)

	☒

b1) Im Produktionsintervall [0; 400[ist der Verlauf der Kostenfunktion degressiv.
Toleranzbereich für die obere Intervallgrenze [325; 475]
Auch die Angabe als abgeschlossenes oder offenes Intervall ist als richtig zu werten.

b2) $\overline{K}_1(200) = \frac{K_1(200)}{200} = \frac{70\,000}{200} = 350$
Die Stückkosten betragen 350 GE pro Stück.

b3) Die Grenzkostenfunktion ist die Ableitung der Kostenfunktion. Die Fixkosten fallen beim Ableiten als konstantes Glied weg.

c1) $0{,}001 \cdot 100^3 - 0{,}9 \cdot 100^2 + a \cdot 100 + 3000 = 35000 \quad \Rightarrow \quad a = 400$

c2) $\overline{K}_2(x) = \frac{K_2(x)}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}9 \cdot x + 400 + \frac{3000}{x}$

$\overline{K}_2'(x) = 0{,}002 \cdot x - 0{,}9 - \frac{3000}{x^2}$

$\overline{K}_2'(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 457{,}1\dots$

Das Betriebsoptimum liegt bei einer Produktion von rund 457 Kommoden.

c3) $K_2(60) = 23976$

$p = \frac{23976}{60} = 399{,}6$

Der Preis beträgt 399,60 GE pro Kommode.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Produktionsintervalls.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Stückkosten.
b3) Ein Punkt für das richtige Begründen.
c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Koeffizienten *a*.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Betriebsoptimums.
c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Preises.

Photovoltaik (2)

Aufgabennummer: B_153

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Bank bietet Frau Zangerl einen Kredit über € 12.560 für die Finanzierung einer Photovoltaikanlage an. Dieser Kredit soll in 15 Jahren durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 98 getilgt werden. Eine Bearbeitungsgebühr von 3 % der Kreditsumme wird bei der Auszahlung des Kredits von der Kreditsumme abgezogen. (Weitere Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz dieses Angebots.

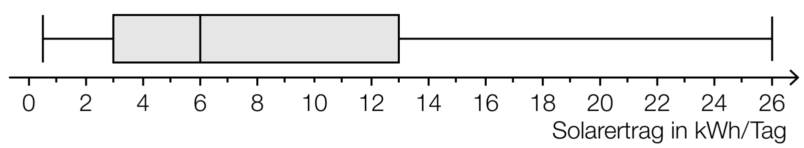
b) Man rechnet in den nächsten Jahren mit einer Strompreissteigerung von 4 % pro Jahr. Derzeit kostet eine Kilowattstunde (kWh) Strom € 0,16.
Der Strompreis in Euro pro Kilowattstunde (€/kWh) soll in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren durch eine Funktion beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung dieser Funktion.

Gewerbliche Photovoltaik-Betreiber werden durch spezielle Fördergelder unterstützt. Für einen Zeitraum von 13 Jahren wird ihnen garantiert, dass sie überschüssigen Strom zu einem gleichbleibenden Tarif von € 0,38/kWh ins Netz einspeisen können.

– Überprüfen Sie mithilfe der erstellten Funktion, ob der Strompreis nach 13 Jahren unter dem garantierten Tarif von € 0,38/kWh liegen wird.

c) Im nachstehenden Boxplot ist der tägliche Solarertrag in kWh einer Photovoltaikanlage in Eisenstadt für den Herbst 2012 dargestellt.



– Lesen Sie den minimalen und den maximalen Solarertrag pro Tag aus der Grafik ab.
– Lesen Sie den Interquartilsabstand ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Gebühren: 3 % von € 12.560 = € 376,80
Auszahlungsbetrag: € 12.183,20

Äquivalenzgleichung: $12\,183{,}20 = 98 \cdot \frac{q_{12}^{180} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{180}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$i_{\text{eff}} = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}05388...$
$q_{12} = 1{,}00438...$
Der effektive Jahreszinssatz ist rund 5,39 %.

b) t … Zeit in Jahren
$K(t)$ … Strompreis in €/kWh zur Zeit t
$K(t) = 0{,}16 \cdot 1{,}04^t$

$K(13) = 0{,}16 \cdot 1{,}04^{13} = 0{,}2664 < 0{,}38$
Der Strompreis wird nach 13 Jahren unter dem garantierten Tarif liegen.

c) minimaler Ertrag: rund 0,5 kWh/Tag
maximaler Ertrag: rund 26 kWh/Tag

Interquartilsabstand: 10 kWh/Tag

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 2
c) leicht	c) 2

Thema: Wirtschaft

Quelle: http://www.pvaustria.at

Preis und Absatz

Aufgabennummer: B_128

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Monopolbetrieb wird der Zusammenhang des Absatzes einer Ware mit einem bestimmten Preis pro Kilogramm untersucht.

x … Absatz in Kilogramm (kg)
$p(x)$ … Preis für x verkaufte Kilogramm in Euro pro Kilogramm (€/kg)

a) Im 1. Verkaufsmonat ist die Abhängigkeit des Absatzes vom Preis pro Kilogramm der Ware in der untenstehenden Tabelle aufgenommen worden.

x in kg	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
$p(x)$ in €/kg	40	39	38	37	35	33	31	28	25	22	18	14	10	5,6	0,2

– Ermitteln Sie die passende quadratische Preisfunktion der Nachfrage p in Abhängigkeit von der Absatzmenge x mithilfe von Regression.
– Interpretieren Sie anhand der Grafik, wie gut sich die berechnete Kurve an die gegebenen Daten anpasst.
– Argumentieren Sie, in welchem Definitionsbereich die ermittelte Funktion den Zusammenhang von Absatz und Preis sinnvoll beschreibt.

b) Für den 2. Verkaufsmonat lautet die Preisfunktion der Nachfrage:

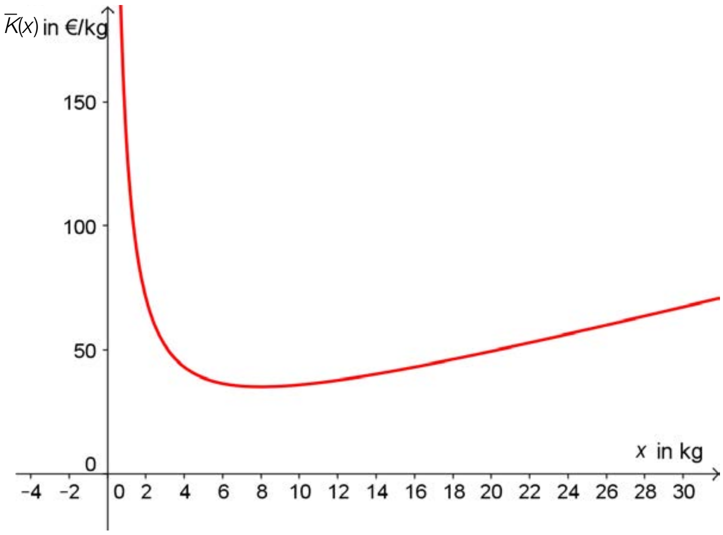
$$p(x) = -0{,}04x^2 - 0{,}2x + 40$$

Wenn sich die Absatzmenge von x kg auf $(x + 1)$ kg verändert, gilt für die damit zusammenhängende Preisänderung $\Delta p(x)$ folgende Beziehung:

$$\Delta p(x) = p(x + 1) - p(x)$$

– Ermitteln Sie eine möglichst einfache Gleichung der Funktion Δp für die gegebene Preisfunktion der Nachfrage p.
– Berechnen Sie mithilfe von Δp die Veränderung des Preises bei einer Absatzsteigerung von 20 kg auf 21 kg.

c) Die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ für diese Ware hat den unten dargestellten Funktionsgraphen.

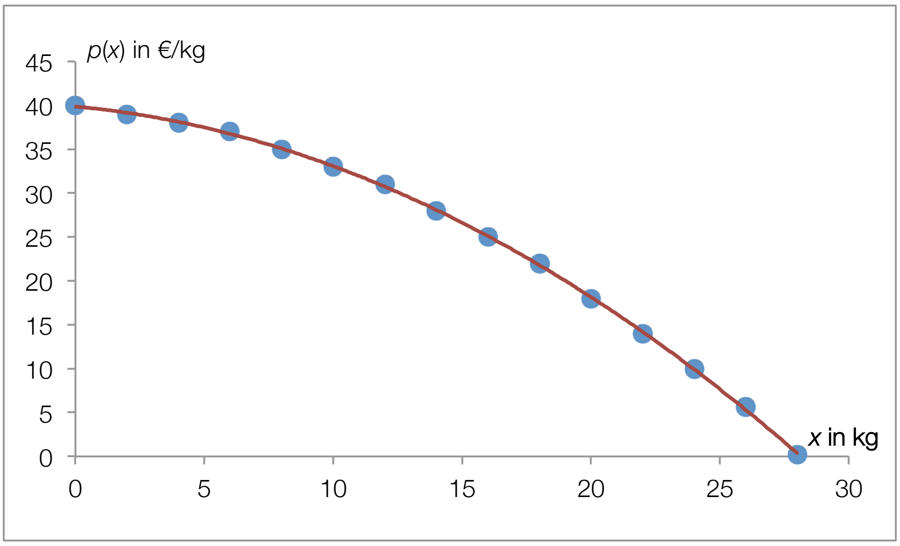


– Lesen Sie daraus das Betriebsoptimum und die minimalen Stückkosten ab.
– Erklären Sie, wie man diese aus der Gleichung der Gesamtkostenfunktion berechnet.
– Argumentieren Sie, welche Bedeutung die minimalen Stückkosten für die Festlegung des Verkaufspreises haben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Funktionsgleichung mittels quadratischer Regression:



$p(x) = -0{,}0406x^2 - 0{,}2729x + 39{,}8729$

Die Abweichung der gegebenen Daten von der Regressionslinie ist sehr gering. Dies lässt vermuten, dass eine Modellierung mithilfe einer quadratischen Funktion zu diesen Daten passend ist.

Sinnvoller Definitionsbereich:
Untere Grenze des Definitionsbereichs: $x = 0$, der Verkaufspreis zu Beginn ist der höchste Preis.
Obere Grenze: $x \approx 28$ kg, wäre die Sättigungsmenge: Es besteht keine Nachfrage nach dem Produkt mehr, man müsste den Preis auf 0 senken.

b) Wenn der Absatz im 2. Monat um 1 kg steigt, dann nimmt der Preis pro Kilogramm etwas ab.

$\Delta p(x) = p(x + 1) - p(x) = -0{,}04(x + 1)^2 - 0{,}2(x + 1) + 40 - (-0{,}04x^2 - 0{,}2x + 40)$

$\Delta p(x) = -0{,}08x - 0{,}24$

$\Delta p(20) = -1{,}84$

Der Preis pro Kilogramm nimmt um 1 € 84 Cent ab, wenn der Absatz von 20 auf 21 kg steigt.

c) Das Betriebsoptimum beträgt ungefähr 8 kg, die minimalen Stückkosten belaufen sich auf ca. 35 €/kg.

Die Stückkostenfunktion erhält man, indem man die Gesamtkostenfunktion durch die Produktionsmenge x dividiert. Die minimalen Stückkosten kann man durch Nullsetzen der 1. Ableitung der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ berechnen. Aus dieser Gleichung erhält man den x-Wert des Minimums – das so genannte *Betriebsoptimum*.
Diese Menge wird in die Stückkostenfunktion eingesetzt und ergibt die minimalen Stückkosten.

Wenn man die Ware bei einem Preis verkauft, der den minimalen Stückkosten entspricht, dann arbeitet der Betrieb zwar gerade kostendeckend, aber ohne Gewinn. Die minimalen Stückkosten legen damit die so genannte *langfristige Preisuntergrenze* fest.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren; D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Reisekosten

Aufgabennummer: B_193

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Tarife bei Fahrten mit dem Zug hängen normalerweise von der zurückgelegten Fahrtstrecke ab. Die in dieser Aufgabe verwendeten Bezeichnungen sind:

x … Fahrtstrecke in Kilometern (km)
$T(x)$ … Tarif in Euro (€) für die Fahrtstrecke x

a) In der nachstehenden Tabelle sind die 2012 gültigen Tarife für eine Fahrt mit der ÖBB (2. Klasse ohne Vorteilsticket) ausgehend vom Bahnhof Wien West zum angegebenen Endbahnhof angeführt.

Bahnhof	Fahrtstrecke x in km	Tarif in €
St. Pölten	60	11,00
Linz	190	31,20
Salzburg	317	47,50
Innsbruck	572	58,30
Landeck	647	58,70
Bregenz	770	64,30

– Bestimmen Sie mittels Regressionsrechnung eine Polynomfunktion 3. Grades, die die Abhängigkeit des Tarifs von der zu fahrenden Fahrtstrecke beschreibt.
– Stellen Sie die Funktion gemeinsam mit den angegebenen Werten in einem Diagramm dar und achten Sie dabei auf eine sinnvolle Skalierung der Achsen.

b) Im Kurzstreckenbereich kann die Abhängigkeit des Tarifs von der zurückgelegten Fahrtstrecke mithilfe folgender Funktion beschrieben werden:

$T(x) = 0{,}19x$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 0,19 im gegebenen Sachzusammenhang.

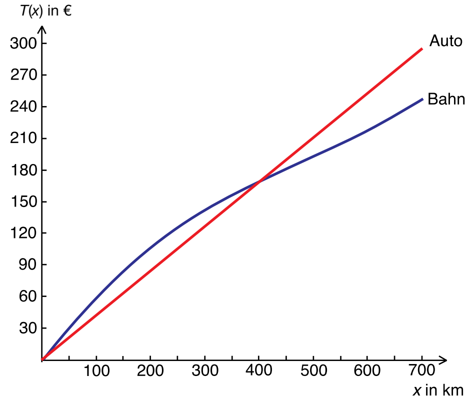
c) Die folgende Funktion T gibt den Tarif in Abhängigkeit von der Fahrtstrecke x entlang einer anderen Bahnstrecke an:

$$T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 3 \cdot 10^{-4}x^2 + 0{,}2305x - 0{,}8711$$

x … Fahrtstrecke in km
$T(x)$ … Tarif in € für die Fahrtstrecke x

– Ermitteln Sie mithilfe der Differenzialrechnung diejenige Fahrtstrecke, für die der Preiszuwachs am geringsten ist.
– Berechnen Sie den Preiszuwachs für diese Fahrtstrecke.

d) Eine Firma schickt 3 Angestellte auf Dienstreise. Als Kostenersatz müssen den Angestellten entweder € 0,42 pro gefahrenem Kilometer für ein gemeinsames Auto oder jeweils der Bahntarif 2. Klasse ohne Vorteilsticket rückerstattet werden. In der nebenstehenen Grafik sind die Bahnkosten für 3 Personen und das für den PKW zu erstattende Kilometergeld dargestellt.

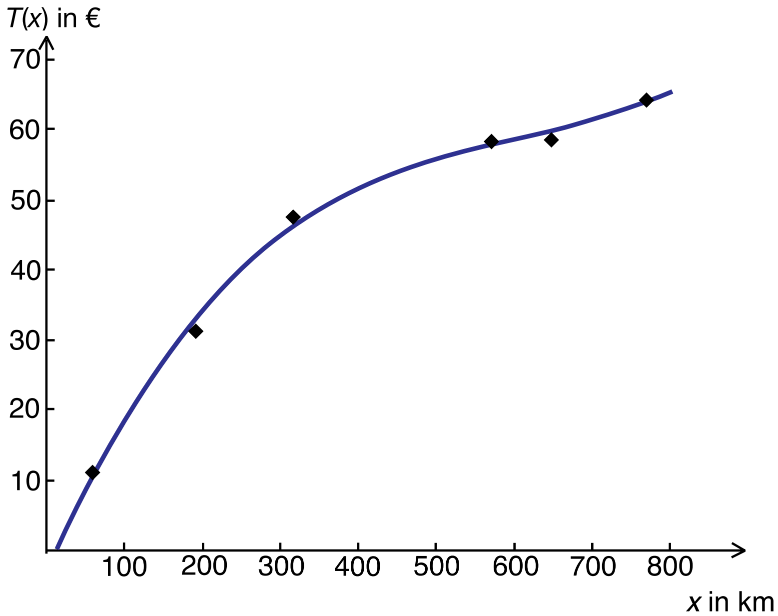


– Geben Sie an, wann die Firma Kilometergeld und wann sie Bahnkostenersatz leisten sollte, um ihre Kosten gering zu halten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 0{,}0004x^2 + 0{,}2557x - 3{,}5482$



b) $T(x) = 0{,}19x$
0,19 ist die Steigung der linearen Tariffunktion. Sie gibt den Tarif pro gefahrenem Kilometer an. Ein Kilometer kostet also € 0,19.

c) Die Preissteigerung pro Kilometer entspricht der Steigung der Tangente an die Tariffunktion, die man mit der 1. Ableitung berechnen kann. Zur Berechnung der geringsten Preissteigerung muss die 2. Ableitung berechnet und gleich null gesetzt werden. Es wird also die x-Koordinate des Wendepunkts der Tariffunktion berechnet.
$T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 3 \cdot 10^{-4}x^2 + 0{,}2305x - 0{,}8711$
$T'(x) = 6 \cdot 10^{-7}x^2 - 6 \cdot 10^{-4}x + 0{,}2305$
$T''(x) = 1{,}2 \cdot 10^{-6}x - 6 \cdot 10^{-4}$
$1{,}2 \cdot 10^{-6}x - 6 \cdot 10^{-4} = 0$
$1{,}2 \cdot 10^{-6}x = 6 \cdot 10^{-4}$
$x = 500$ km
Preiszuwachs an der Stelle $x = 500$:
$T'(500) = 6 \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 - 6 \cdot 10^{-4} \cdot 500 + 0{,}2305 = 0{,}0805$
Der Preiszuwachs an dieser Stelle beträgt ungefähr € 0,08 pro km.

d) Die Grafik zeigt, dass bis zu einer Strecke von ca. 400 km der Bahntarif höher liegt als das Kilometergeld. Die Firma hat bei Strecken bis zu 400 km geringere Kosten, wenn die 3 Angestellten gemeinsam mit dem Auto fahren. Für Strecken, die länger als 400 km sind, ist für die Firma der Bahnkostenersatz günstiger.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) 1 Zahlen und Maße
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 1
c) schwer	c) 3
d) leicht	d) 1

Thema: Verkehr

Quelle: http://www.oebb.at (Tarife und km-Angaben)

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Rücklage

Aufgabennummer: B_125		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Die Eltern von Martin legen für ihn 5 Jahre vor Abschluss der höheren Schule für sein späteres Studium € 22.500 als Rücklage auf ein Sparkonto.
Lisa erhält von ihren Eltern ab demselben Zeitpunkt 5 Jahre lang € 375 monatlich vorschüssig auf ein Sparkonto, das mit dem gleichen Jahreszinssatz wie bei Martin verzinst wird.
Der Zinssatz bleibt während dieser 5 Jahre konstant, es finden keine weiteren Transaktionen auf den beiden Konten von Martin und Lisa statt. Es gibt keine Kontoführungsgebühr.

a) – Erklären Sie, mit welchem Rechenansatz man aus dem Jahreszinssatz den äquivalenten Monatszinssatz i_{12} anhand der Zinseszinsformel herleiten kann.
(Die Kapitalertragsteuer ist bei dieser Berechnung nicht zu berücksichtigen.)

b) Lisa meint, dass zwar 60-mal € 375 wie bei Martin ebenfalls € 22.500 ergeben, aber die vorschüssige monatliche Ratenzahlung bei Verzinsung mit 0,2 % p. m. einem geringeren Barwert entspricht.

– Argumentieren Sie, weshalb Lisas Aussage stimmt.
– Berechnen Sie die Differenz zwischen dem Barwert der Ratenzahlung bei Lisa und dem Geldbetrag, den Martin von seinen Eltern erhält.
Runden Sie das Ergebnis auf Euro.
(Die Kapitalertragsteuer ist im gegebenen Zinssatz bereits berücksichtigt.)

c) Für Martin wird das Geld mit einem Zinssatz von 2,5 % p. a. angelegt.
Lisa möchte statt € 375 pro Monat 5 nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 4.500 erhalten. Sie wünscht sich, dass der Zinssatz so hoch gewählt wird, dass sie nach 5 Jahren einen gleich hohen Betrag wie Martin bekommt.

– Berechnen Sie, wie hoch der Jahreszinssatz für Lisa unter dieser Voraussetzung sein müsste. Berücksichtigen Sie die Kapitalertragsteuer von 25 %.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der äquivalente Monatszinssatz führt bei monatlicher Verzinsung innerhalb eines Jahres zum gleichen Ergebnis wie eine einmalige jährliche Verzinsung.
Wenn man ein Kapital K_0 ein Jahr lang mit i verzinst, so ergibt dies einen Endwert von:
$E = K_0 \cdot (1 + i)$
Wenn man das gleiche Anfangskapital monatlich mit i_{12} verzinst, lautet die Zinseszinsformel:
$E = K_0 \cdot (1 + i_{12})^{12}$
Da beide Endwerte gleich sein sollen, gilt:
$1 + i = (1 + i_{12})^{12}$
Aus diesem Ansatz lässt sich der äquivalente Monatszinssatz i_{12} berechnen.

b) Martin bekommt bar € 22.500.
Lisa würde in Zukunft monatlich € 375 bekommen, 60 Monate lang.
Um den Barwert dieser Ratenzahlung zu erhalten, müssen alle einzelnen 60 Raten auf den Anfangszeitpunkt abgezinst werden. Man erhält eine Folge von Beträgen:
{375; 374,25; 373,5; ...}
Die Summe dieser Beträge ergibt den Barwert und ist kleiner als 375 mal 60.

Martin: 22 500
Lisa: $375 \cdot \frac{1{,}002^{60} - 1}{0{,}002} \cdot \frac{1}{1{,}002^{59}} = 21\,224{,}8\ldots \approx 21\,225$

Die Differenz beträgt rund € 1.275.

c) Jahreszinssatz bei Martin nach Berücksichtigung der KESt:
$2{,}5\ \% \cdot 0{,}75 = 1{,}875\ \%$
$22\,500 \cdot 1{,}01875^5 = 4\,500 \cdot \frac{q^5 - 1}{q - 1}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q = 1{,}046457\ldots$

Bei einem Jahreszinssatz von rund 4,65 %, in dem bereits die KESt berücksichtigt ist, würde Lisa nach 5 Jahren den gleichen Betrag wie Martin bekommen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Segelboot

Aufgabennummer: B_117

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Segelboot wird zum Kauf angeboten. In den angegebenen Zinssätzen sind die Kapitalertragsteuer und allfällige Gebühren berücksichtigt.

a) Der Verkäufer schlägt folgende Zahlungsvariante vor:
Anzahlung in Höhe von € 6.000 und 5 Jahre lang (ab dem Kaufzeitpunkt gerechnet) nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 1.200 bei einem jährlichen Zinssatz von *i*

– Stellen Sie diese Zahlungsvariante mithilfe einer Zeitlinie grafisch dar.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Barwerts *B* des Segelboots.

B = ____

b) Der Verkäufer ändert die Konditionen: Er veranschlagt den Barwert des Bootes mit € 10.800 und verlangt eine Anzahlung in Höhe von € 6.000 sowie 3 nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 1.200. Der Rest soll ab dem 4. Jahr durch 4 nachschüssige Jahresraten der Höhe *R* beglichen werden.

– Berechnen Sie die Ratenhöhe *R*, wenn der Zinssatz 8 % p. a. beträgt.

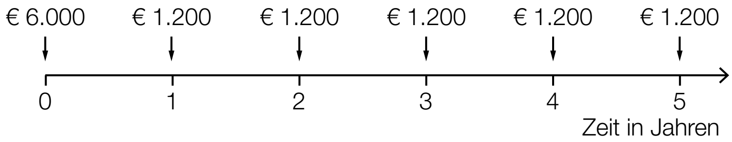
c) Um das Boot neu lackieren zu lassen, borgt sich der Käufer € 5.000, die er in Form von nachschüssigen Quartalsraten von jeweils € 300 bei einem Zinssatz von 6 % p. a. zurückzahlt.

– Berechnen Sie, wie viele volle Quartalsraten zu zahlen sind.
– Berechnen Sie, welcher Restbetrag 1 Quartal nach der letzten Vollrate anfällt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Die Zeitlinie ist zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zeitlinie:



$$B = 6\,000 + 1\,200 \cdot \frac{(1+i)^5 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^5}$$

b) Ansatz mit Berechnung des Endwerts nach 7 Jahren:

$$6\,000 \cdot 1{,}08^7 + 1\,200 \cdot \frac{1{,}08^3 - 1}{0{,}08} \cdot 1{,}08^4 + R \cdot \frac{1{,}08^4 - 1}{0{,}08} = 10\,800 \cdot 1{,}08^7 \quad \Rightarrow \quad R = 649{,}412$$

Die Ratenhöhe beträgt € 649,41.

c) € 5.000 ist der Barwert der nachschüssigen Quartalsrate.

$q_4 = \sqrt[4]{1{,}06}$

$$5\,000 = 300 \cdot \frac{q_4^n - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^n}$$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $n = 19{,}2...$
Es sind 19 volle Quartalsraten zu bezahlen.

Restzahlung am Ende des 20. Quartals:

$$\text{Rest} = 5\,000 \cdot q_4^{20} - 300 \cdot \frac{q_4^{19} - 1}{q_4 - 1} \cdot q_4 = 76{,}262...$$

Ein Quartal nach der letzten Einzahlung ist noch ein Restbetrag in Höhe von € 76,26 zu bezahlen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sparkonto

Aufgabennummer: B_120

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Karin zahlt 18 Jahre lang auf ein Sparkonto jährlich nachschüssig einen Betrag in Höhe von € 500 ein.
Der angesparte Betrag kann bei einem Jahreszinssatz von 1,5 % und mit Berücksichtigung der KESt mithilfe der folgenden Funktion beschrieben werden:

$$K = 500 \cdot \frac{1{,}01125^t - 1}{0{,}01125}$$

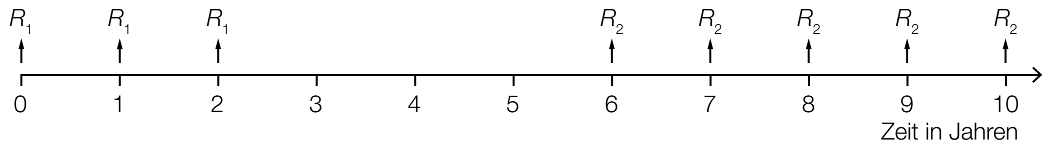
K ... Kapital in Euro (€)
t ... Zeit in Jahren

– Erklären Sie, um welche finanzmathematische Formel es sich handelt.
– Erklären Sie, wie der Zinssatz von 1,5 % in diese Formel einfließt.

b) Karin hat einen Betrag in Höhe von € 10.000 angespart. Er wird mit einem Zinssatz von 1,2 % p.a. weiter verzinst (Nebengebühren und Steuern sind im angegebenen Zinssatz berücksichtigt). Karin möchte davon monatlich nachschüssig je € 200 abheben.

– Berechnen Sie, wie oft Karin genau diesen Betrag abheben kann.
– Ermitteln Sie, welcher Restbetrag unmittelbar nach der letzten Abhebung auf dem Konto verbleibt.

c) Karin tätigt die in der nachstehenden Zeitlinie dargestellten Abhebungen.



– Beschreiben Sie den dargestellten Sachverhalt in Worten.
– Erstellen Sie eine Formel, mit der der Wert B aller Behebungen zum Zeitpunkt der 1. vorgenommenen Behebung berechnet werden kann. Gehen Sie dabei von einem Jahreszinssatz i aus.

B = ____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Endwert einer nachschüssigen Jahresrente wird mithilfe folgender Formel berechnet:

$E = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

R ... jährliche Rate
i ... Jahreszinssatz
q ... Aufzinsungsfaktor, $q = 1 + i$
n ... Anzahl der Raten

Im Falle der vorliegenden Formel gilt:
$E = K$,
$n = t$,
R = € 500,
$q = 1 + i = 1{,}01125$,
wobei $i = 1{,}125\ \%$ beträgt, das entspricht dem Jahreszinssatz von 1,5 %, von dem 25 % KESt abgezogen wurden.

b) Berechnung der Anzahl n der monatlichen nachschüssigen Auszahlungen:
$q_{12} = \sqrt[12]{1{,}012}$

$200 \cdot \frac{q_{12}^n - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^n} = 10\,000$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n = 51{,}3...$

Karin kann genau 51-mal € 200 abheben.

$\text{Restbetrag} = 10\,000 \cdot q_{12}^{51} - 200 \cdot \frac{q_{12}^{51} - 1}{q_{12} - 1} = 62{,}257...$

Der Restbetrag beträgt rund € 62,26.

c) Karin hebt zunächst jeweils zu Beginn des Jahres 3-mal die Rate R_1 ab. Im Jahr 4 und im Jahr 5 wird nichts abgehoben.
Ab dem 6. Jahr hebt Karin 5-mal jeweils am Ende des Jahres die Rate R_2 ab.

$B = R_1 \cdot \frac{(1 + i)^3 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1 + i)^2} + R_2 \cdot \frac{(1 + i)^5 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1 + i)^{10}}$

Auch andere Formelentwicklungen sind möglich!

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 4
c) schwer	c) 3

Thema: Wirtschaft

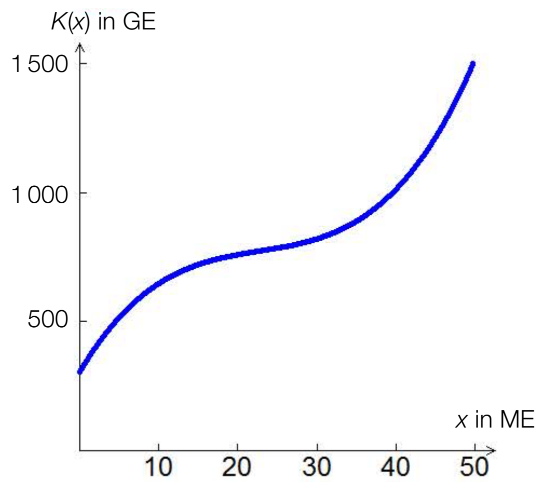
Quellen: –

Spielzeugautos (2)

Aufgabennummer: B_150

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In der nachstehenden Grafik ist eine Kostenfunktion für die Produktion eines Spielzeugautos dargestellt.



a) – Zeichnen Sie in der Grafik eine Tangente an die Kostenfunktion durch den Koordinatenursprung ein.

Interpretieren Sie diese Tangente als lineare Erlösfunktion.

– Beschreiben Sie die Bedeutung der Steigung dieser Tangente und der x-Koordinate des Berührpunkts im Sachzusammenhang.

b) Analysen der anfallenden Produktionskosten haben ergeben, dass die mittlere Kostenänderung bei einer Erhöhung der Produktionsmenge von 10 ME auf 12 ME 17,5 GE/ME beträgt. Die Grenzkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 19,7 GE/ME.

– Erklären Sie, warum sich die mittlere Kostenänderung und die Grenzkosten unterscheiden.

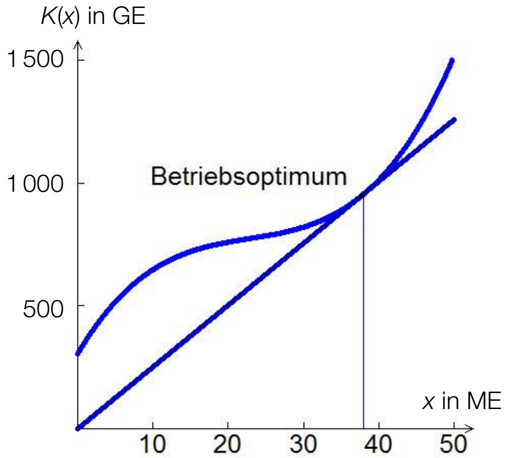
c) Die Gleichung der Kostenfunktion K lautet $K(x) = 0{,}03x^3 - 2{,}05x^2 + 51{,}7x + 305$, wobei x in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ in Geldeinheiten (GE) gegeben ist.
Das Produkt kann zum Preis von 35,2 GE/ME verkauft werden.

– Berechnen Sie die Verkaufsmenge x, ab der das Unternehmen mit diesem Produkt einen Gewinn erzielen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Steigung der Erlösfunktion ist der Verkaufspreis in GE/ME.

Die x-Koordinate des Berührpunkts gibt diejenige Verkaufsmenge (in ME) an, bei der gerade noch kostendeckend produziert wird, also das Betriebsoptimum.

b) 17,5 GE/ME ist die durchschnittliche Kostenänderung zwischen 10 ME und 12 ME.
Es handelt sich um einen Differenzenquotienten.
Die Grenzkosten entsprechen dem Differenzialquotienten.
Grafisch entsprechen die Grenzkosten der Steigung der Tangente an die Kostenfunktion bei der Produktionsmenge 10.

c) $K(x) = 0{,}03x^3 - 2{,}05x^2 + 51{,}7x + 305$
$E(x) = 35{,}2x$
$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}03x^3 + 2{,}05x^2 - 16{,}5x - 305$
$G(x) = 0$

mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 21{,}84$ ME, $x_2 = 54{,}96$ ME

Ab ca. 21,84 ME kann ein Gewinn erwirtschaftet werden.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) –
c) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Stallbaufinanzierung

Aufgabennummer: B_170

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Landwirt möchte einen größeren Stall bauen. Der Kostenvoranschlag beläuft sich auf € 375.000.

In den angegebenen Zinssätzen sind die Kapitalertragsteuer bzw. anfallende Gebühren berücksichtigt.

a) Er spart seit 14 Jahren jährlich vorschüssig € 2.800, die zu 2,3 % p. a. verzinst werden. Zusätzlich hat er vor 22 Jahren € 65.000 auf ein Sparbuch gelegt, das mit 1,8 % p. a. verzinst wird.

– Berechnen Sie, wie viel Geld er für den Stallbau zusätzlich zu seinem vorhandenen Kapital aufbringen muss.

b) Der Landwirt nimmt einen Kredit zur Begleichung der Gesamtkosten von € 375.000 auf. Zur Rückzahlung werden nachschüssige Jahresraten der Höhe R bei konstantem Zinssatz über einen Zeitraum von 30 Jahren vereinbart.
Er kann die 6., die 7. und die 8. Rate nicht bezahlen. Der Zahlungsausfall wird gleichmäßig auf die Raten der restlichen Laufzeit aufgeteilt. Die neue Ratenhöhe ist R_{neu}.

– Erstellen Sie eine Zeitlinie zur Beschreibung des Zahlungsverlaufs.

Die Höhe der ursprünglichen Rate beträgt gerundet R = € 23.841. Der Zinssatz ist 4,8 % p. a.

– Berechnen Sie die neue Ratenhöhe R_{neu}. (Runden Sie das Ergebnis auf ganze Euro.)

c) Die Bank bietet zur Rückzahlung des Kredits von € 375.000 folgende Möglichkeit an:
5 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags wird einmalig eine Zahlung der Höhe x entrichtet. Der Rest wird durch eine 10 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags beginnende Rente mit vorschüssigen Jahresraten der Höhe R über 20 Jahre abgedeckt.
Es ist bei allen Zahlungen von einem Jahreszinssatz i auszugehen.

– Modellieren Sie eine Formel zur Berechnung des Einmalbetrags x.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

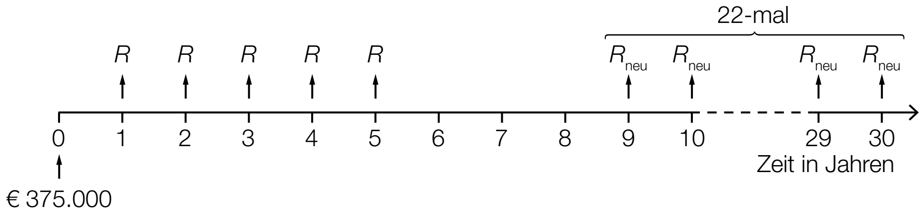
a) $2\,800 \cdot 1{,}023 \cdot \frac{1{,}023^{14} - 1}{0{,}023} \approx 46\,684{,}89$

$65\,000 \cdot 1{,}018^{22} \approx 96\,241{,}96$

$375\,000 - 46\,684{,}89 - 96\,241{,}96 = 232\,073{,}15$

Der Landwirt benötigt noch € 232.073,15.

b)



$375\,000 = 23\,841 \cdot \frac{1{,}048^5 - 1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^5} + R_{neu} \cdot \frac{1{,}048^{22} - 1}{0{,}048} \cdot \frac{1}{1{,}048^{30}} \quad \Rightarrow \quad R_{neu} = 29\,436{,}1\ldots$

Die neuen Raten betragen auf ganze Euro gerundet € 29.436.

c) Ansatzformel:

$q = 1 + i$

$375\,000 = \frac{x}{q^5} + R \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{19}} \cdot \frac{1}{q^{10}}$

Andere richtige Formeln sind ebenfalls zu akzeptieren.
Die Berechnungsformel für x kann man unter Umständen auch direkt – ohne einen Ansatz – angeben. Ist die Formel korrekt, so gilt das auch als richtig angesetzt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Tagestemperatur

Aufgabennummer: B_252

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die nachstehend angeführten 3 Messwerte wurden an einem Vormittag aufgezeichnet und sollen mithilfe einer abschnittsweise definierten linearen Funktion T in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

t in h	T in °C
6	8
9	10
12	16

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden (h)
$T(t)$ ... Temperatur nach t Stunden in Grad Celsius (°C)

Es wird angenommen, dass in den Intervallen [6; 9] und [9; 12] die Temperatur jeweils linear zunimmt.

– Stellen Sie den Temperaturverlauf im Intervall [6; 12] grafisch dar.
– Stellen Sie die Funktion T abhängig von der Zeit t im Intervall [6; 12] auf.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Funktion T die Temperatur um 11:30 Uhr.

b) An einem Tag im Oktober hat man einen Temperaturverlauf gemessen, der durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden kann.

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden
$f(t)$ ... Temperatur zum Zeitpunkt t in °C

t	2	5	8	11	14	17	20	23
$f(t)$	5,4	4,3	8,3	12,2	15,3	14	9,1	7,2

– Erstellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine zu den angegebenen Werten passende Polynomfunktion 3. Grades. (Runden Sie dabei die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.)
– Berechnen Sie den Differenzenquotient dieser Polynomfunktion für das Intervall [6; 12].
– Beschreiben Sie, was dieser Differenzenquotient für das Intervall im Sachzusammenhang aussagt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ansatz über $T(t) = k \cdot t + d$

$k_1 = \frac{10-8}{9-6} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ Punkt einsetzen: $8 = \frac{2}{3} \cdot 6 + d_1$

$\Rightarrow d_1 = 4$

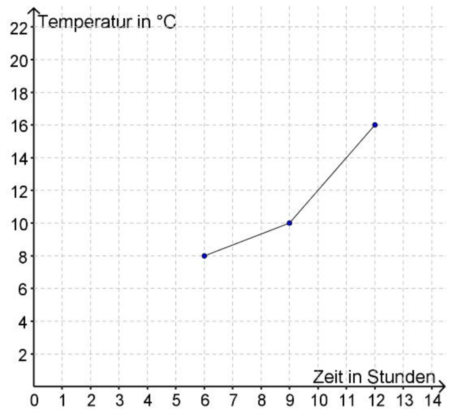
$k_2 = \frac{16-10}{12-9} = 2 \Rightarrow$ Punkt einsetzen: $10 = 2 \cdot 9 + d_2$

$\Rightarrow d_2 = -8$

$$T(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t + 4 \text{ für } t \in [6; 9] \\ 2t - 8 \text{ für } t \in [9; 12] \end{cases}$$

$T(11{,}5) = 2 \cdot 11{,}5 - 8 = 15$

Um 11:30 Uhr ergibt das Modell 15 °C.



b) Mittels Technologieeinsatz kommt man zur folgenden Gleichung:

$f(t) = -0{,}0057 \cdot t^3 + 0{,}1446 \cdot t^2 - 0{,}2598 \cdot t + 4{,}4186$

Der Differenzenquotient wird gebildet mit: $\frac{f(12) - f(6)}{12-6} = 0{,}9066 \approx 0{,}91$

Der Differenzenquotient sagt aus, dass die Temperatur im Intervall [6; 12] durchschnittlich um rund 1 °C pro Stunde zunimmt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

USB-Sticks

Aufgabennummer: B_191

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen bringt USB-Sticks auf den Markt.

a) Für bestimmte USB-Sticks werden die in der nachstehenden Tabelle aufgelisteten Gewinne G in Abhängigkeit von der Absatzmenge x der Ware ermittelt:

x	0	10	20
$G(x)$	–1,4	6,4	1,4

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$G(x)$ … Gewinn in Geldeinheiten (GE) bei einer Absatzmenge von x ME

Die Gewinnfunktion G wird beschrieben mit:

$$G(x) = ax^2 + bx + c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c.
– Ermitteln Sie die Gleichung dieser Gewinnfunktion.
– Beschreiben Sie, was der Parameter c in Bezug auf die Kosten aussagt.
– Erklären Sie, wo sich der Break-even-Point auf dem Graphen der Gewinnfunktion befindet.

b) Die Erlösfunktion E beim Verkauf von USB-Sticks wird beschrieben mit:

$$E(x) = -1{,}25x^2 + 21x$$

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$E(x)$ … Erlös in Geldeinheiten (GE) bei einem Absatz von x ME

– Ermitteln Sie den relevanten Definitionsbereich der Erlösfunktion.
– Erstellen Sie die Gleichung zur Berechnung der mittleren Änderungsrate der Erlösfunktion im Intervall [9; 15].
– Berechnen Sie den maximalen Erlös.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung den Nachweis für ein lokales Maximum erbringt.

c) Ein spezieller Typ von USB-Sticks hat den Höchstpreis von 6 GE/ME und eine Sättigungsmenge von 18 ME.

– Kreuzen Sie diejenige Darstellung der Preisfunktion p in Abhängigkeit von der Absatzmenge x an, die diese Kriterien erfüllt. *[1 aus 5]*

x … Absatzmenge in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheiten (GE/ME) bei einem Absatz von x in ME

$p(x) = \frac{1}{3} \cdot (18 - 6x)$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x}{18}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{18}$	☐
$p(x) = 6 - \frac{x}{90} - \frac{x^3}{900}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.
Beachten Sie, dass die Funktionen – wie in der Wirtschaftsmathematik üblich – näherungsweise als stetig angenommen werden, obwohl es sich um diskrete Werte handelt.

Möglicher Lösungsweg

a) Mit Einsetzen in $G(x) = ax^2 + bx + c$ erhält man folgendes Gleichungssystem:

$G(0) = -1{,}4$: $c = -1{,}4$

$G(10) = 6{,}4$: $10^2a + 10b = 6{,}4 + 1{,}4$

$G(20) = 1{,}4$: $\underline{20^2a + 20b = 1{,}4 + 1{,}4}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = -0{,}064 \quad b = 1{,}42 \quad c = -1{,}4$

Gewinnfunktion G mit: $G(x) = -0{,}064x^2 + 1{,}42x - 1{,}4$

$|c|$ gibt die Fixkosten an, die bei der Produktion der USB-Sticks anfallen.

Der Graph der quadratischen Gewinnfunktion schneidet die x-Achse an 2 Stellen. Die erste (linke) Nullstelle von G markiert die Schwelle in den Gewinnbereich und heißt „Break-even-Point".

b) Der Erlös kann nicht negativ sein. Positive Funktionswerte liegen zwischen den beiden Nullstellen der Funktion.

Nullstellen der Erlösfunktion: $-1{,}25x^2 + 21x = 0$,

$x_1 = 0$ (untere Erlösgrenze), $x_2 = 16{,}8$ (obere Erlösgrenze) $\Rightarrow$ $D = [0; 16{,}8]$

mittlere Änderungsrate:

$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{E(15) - E(9)}{15 - 9}$

$E(x) = -1{,}25x^2 + 21x$

$E'(x) = -2{,}5x + 21 = 0$

$x = \frac{21}{2{,}5} = 8{,}4$

$E(8{,}4) = 88{,}2$

Der maximale Erlös beträgt 88,2 GE.

Diese Aufgabe kann auch nur mit Berechnung des Parabelscheitels ohne Differenzieren gerechnet werden, wenn erkannt wird, dass es eine nach unten geöffnete Parabel ist. Dieser Lösungsweg ist ebenfalls zulässig.

Zum Nachweis eines lokalen Maximums dient die 2. Ableitung der Funktion an der berechneten Extremstelle. Ist die 2. Ableitung an dieser Stelle negativ, dann liegt ein Maximum vor.
(Hinweis: Die zweimalige Differenzierbarkeit der Funktion an der Extremstelle wird vorausgesetzt.)

c)

[...]	
[...]	
$p(x) = 6 - \frac{x^2}{54}$	☒
[...]	
[...]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 4
c) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Vitrinen

Aufgabennummer: B_124

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Firma stellt Vitrinen in den 2 verschiedenen Modellen *Roma* und *Vienna* her. Die Stückzahl der pro Monat erzeugten *Roma*-Modelle soll mit x und jene der *Vienna*-Modelle mit y bezeichnet werden. Die Modelle werden in den Größen *large*, *medium* und *mini* gefertigt.

a) Der Stückgewinn bei der Vitrine *Roma large* beträgt durchschnittlich € 40, jener bei der *Vienna large* ungefähr € 70.
Beide Produkte werden von 3 Maschinen gefertigt.
Die 1. Maschine ist pro Monat maximal 650 Stunden, die 2. Maschine 400 Stunden und die 3. Maschine 320 Stunden für den Zusammenbau der Vitrinen verfügbar.
Die Arbeitszeit für den Bau der Vitrine *Roma* beträgt 6 Stunden an der 1. Maschine, 5 Stunden an der 2. Maschine und 1,5 Stunden an der 3. Maschine.
Der Zusammenbau der Vitrine *Vienna* beansprucht die 1. Maschine 4,5 Stunden, die 2. Maschine 1,2 Stunden und die 3. Maschine 3,3 Stunden.

– Stellen Sie alle für diese Bedingungen relevanten Ungleichungen und die Gleichung der Zielfunktion für den maximalen Gewinn auf.

b) Das folgende Ungleichungssystem beschreibt den möglichen Lösungsbereich für die Herstellung von x Vitrinen *Roma medium* und y Vitrinen *Vienna medium* unter den in der Fabrik vorgegebenen Bedingungen.

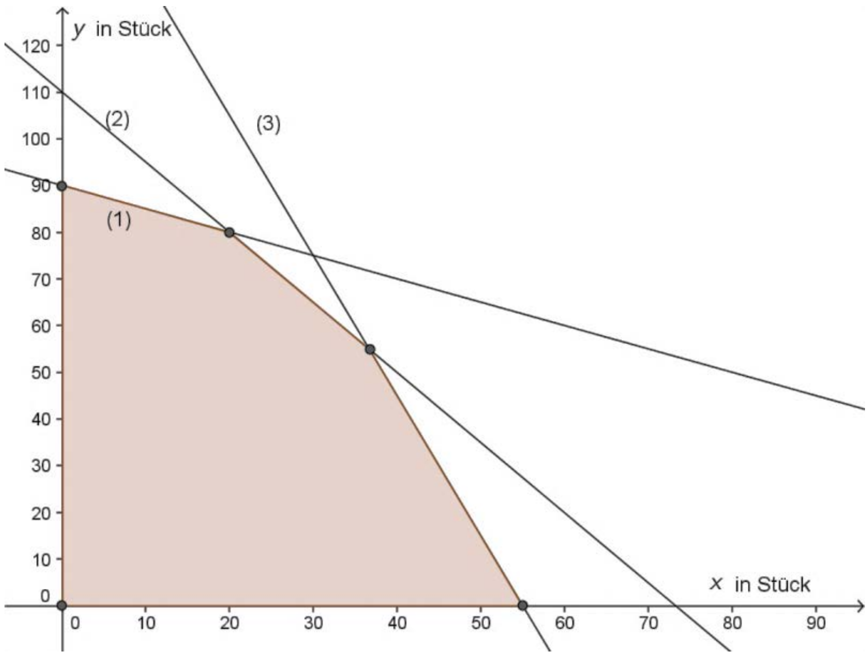
– Stellen Sie den möglichen Lösungsbereich grafisch dar.
– Ermitteln Sie anhand der Grafik die Koordinaten der Eckpunkte des Lösungsbereichs (gerundet auf ganze Zahlen).

$$3x + 2{,}2y \leq 170$$
$$2{,}5x + y \leq 110$$
$$2x + 2{,}8y \leq 180$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

c) Für die Zielfunktion Z für den Gewinn bei x Vitrinen *Roma mini* und bei y Vitrinen *Vienna mini* gilt:

$$Z(x,y) = 36x + 40y$$

– Zeichnen Sie die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die nachstehende Grafik ein.



– Bestimmen Sie den maximalen Gewinn, den man mit dem in der Grafik dargestellten Lösungsbereich erzielen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

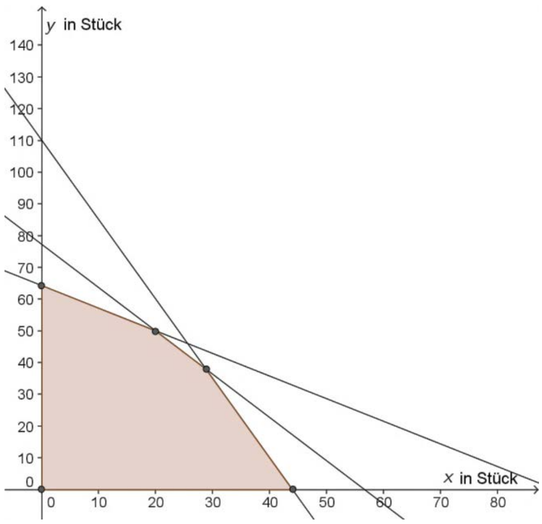
a) Übersichtstabelle (optional)

	Roma x	Vienna y	Stunden/Monat
M_1	6	4,5	650
M_2	5	1,2	400
M_3	1,5	3,3	320

Ungleichungssystem
$6x + 4,5y \leq 650$
$5x + 1,2y \leq 400$
$1,5x + 3,3y \leq 320$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Zielfunktion:
$Z(x,y) = 40x + 70y$

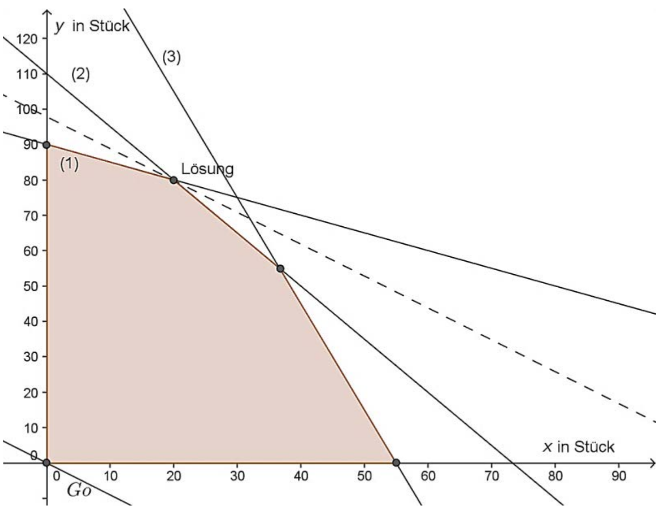
b)



Eckpunkte ablesen aus der Grafik:
(0 | 0)
(0 | 64)
(20 | 50)
(29 | 38)
(44 | 0)

Ableseungenauigkeiten werden toleriert. (Auch das genaue Berechnen mit Technologie ist möglich und zulässig!)

c)



20 Stück *Roma mini* und 80 Stück *Vienna mini* pro Monat bringen unter den vorgegebenen Bedingungen einen maximalen Gewinn. Er beträgt € 3.920.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 4
c) mittel	c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Weinbau und Weinkonsum

Aufgabennummer: B_133

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Weinbaugebiet sollen neue Anbauflächen für Reben optimal genutzt werden.

a) Auf einer Fläche von höchstens 30 Hektar (ha) werden 2 verschiedene Rebsorten *A* und *B* angebaut. Die nachstehende Tabelle enthält die Prognose pro Hektar für die Arbeitskosten in Euro (€), den Ernteertrag in Tonnen (t) und die erwartete Weinmenge in Litern (L). Außerdem ist der Verkaufspreis des Weins in Euro pro Liter (€/L) angegeben.

	Arbeitskosten in €/ha	Ernteertrag in t/ha	Weinmenge in L/ha	Preis pro Liter in €/L
Sorte *A*	500	7,5	3 200	2
Sorte *B*	950	5,3	4 000	1,8

Man möchte für dieses Gebiet nicht mehr als € 24.000 für die Arbeitskosten ausgeben und kann nur insgesamt 220 t Trauben zu Wein verarbeiten.
Die Anbaufläche soll zwischen den Sorten *A* und *B* so aufgeteilt werden, dass der Weinverkauf einen maximalen Erlös ergibt.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion und alle für den möglichen Lösungsbereich notwendigen Ungleichungen.

b) Auf einer weiteren Anbaufläche sollen die Sorten *C* und *D* angebaut werden. Die Bedingungen für die Aufteilung der Anbaufläche werden durch die folgenden Ungleichungen beschrieben:

$x \geq 0$ … Anbaufläche für Sorte *C* in ha
$y \geq 0$ … Anbaufläche für Sorte *D* in ha
$x + y \leq 32$
$7 \cdot x + 5 \cdot y \leq 210$
$400 \cdot x + 760 \cdot y \leq 21\,280$

Der Erlös in Euro (€) soll maximal sein und wird durch die Zielfunktion *E* mit
$E(x,y) = 7\,200 \cdot x + 6\,400 \cdot y$ beschrieben.

– Zeichnen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems und die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in ein geeignetes Koordinatensystem.
– Berechnen Sie diejenige Aufteilung der Anbaufläche für die Reben der Sorte *C* bzw. *D*, die einen maximalen Erlös ergibt.

c) In der nachstehenden Tabelle ist der Weinkonsum in Österreich von 2001 bis 2010 in Millionen Hektolitern (hl) dargestellt.

Jahrgang	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Mio. hl	2,477	2,291	2,403	2,263	2,443	2,643	2,680	2,410	2,438	2,664

– Stellen Sie die Daten grafisch mithilfe eines Balken- oder Säulendiagramms dar.
– Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung des konsumierten Weines von 2001 bis 2010.
– Lesen Sie die Spannweite des jährlichen Weinkonsums in Österreich ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

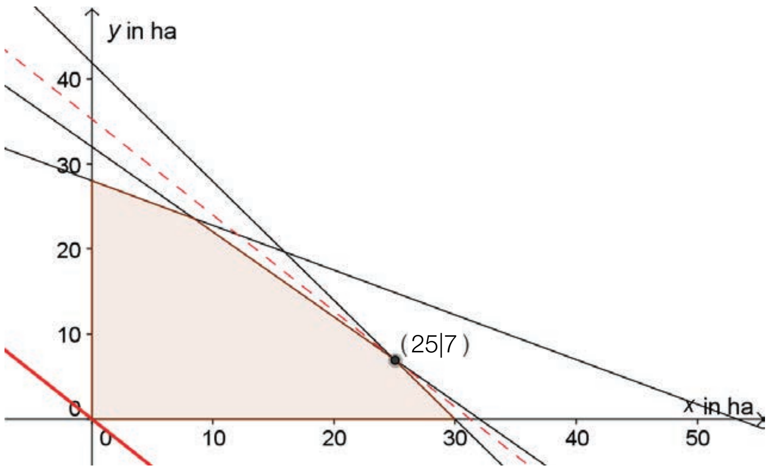
Möglicher Lösungsweg

a) x ... Anbaufläche für die Rebsorte A in Hektar (ha)
y ... Anbaufläche für die Rebsorte B in Hektar (ha)

a: $x + y \leq 30$
b: $500 \cdot x + 950 \cdot y \leq 24\,000$
c: $7{,}5 \cdot x + 5{,}3 \cdot y \leq 220$
d: $x \geq 0$
e: $y \geq 0$

$Z(x,y) = 6\,400 \cdot x + 7\,200 \cdot y \rightarrow$ Maximum

b) Bestimmen des für diese Bedingungen optimalen Schnittpunkts mit grafischer oder mit rechnerischer Methode mittels Technologieeinsatz

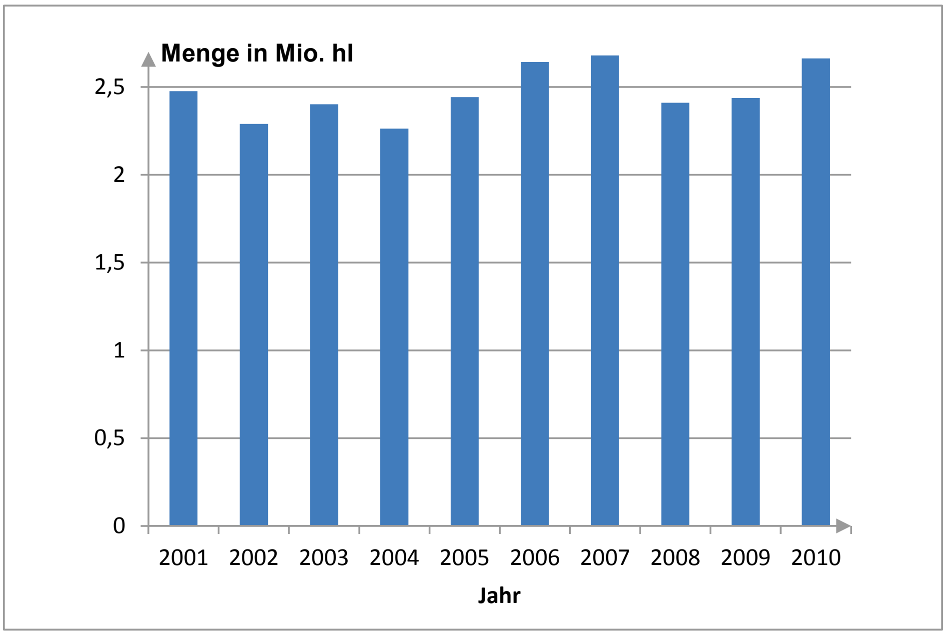


$x + y = 32$
$7 \cdot x + 5 \cdot y = 210$

Lösung des Gleichungssystems:
$x = 25$; $y = 7$

Die für einen maximalen Erlös günstigste Aufteilung erhält man mit 25 ha von Sorte C und 7 ha von Sorte D.

c)



Mittelwert: 2,4712 Mio. hl, Standardabweichung $\sigma \approx 0{,}148$ Mio. hl

Der jährliche Weinkonsum in Österreich schwankte in den 10 Jahren innerhalb einer Spannweite von 0,42 hl.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 4
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quelle: Statistik Austria, Endbericht Weinernte und Weinbestand 2010

Weinhandel

Aufgabennummer: B_121

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Zwei Weinhändler bieten je eine spezielle Sorte von Rot- und Weißwein als Sonderangebot in einem Festzelt an. Die Zahl der an diesem Tag verkauften Weißweinflaschen ist mit x bezeichnet, jene der Rotweinflaschen mit y.

a) Der Weinhändler Weininger kann erfahrungsgemäß bei diesem Fest höchstens 20 Flaschen pro Sorte verkaufen. Er kann an diesem Tag aber nur höchstens 30 Flaschen bei seinem Verkaufsstand unterbringen.
Der Gewinn beträgt bei einer Flasche Weißwein € 1,50 und bei einer Flasche Rotwein € 2,50.
Der Händler möchte die Lieferung so gestalten, dass er maximalen Gewinn hat.

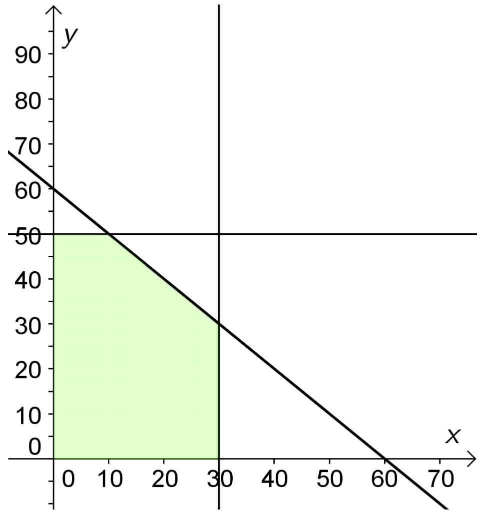
– Stellen Sie alle notwendigen Ungleichungen auf, die diese Bedingungen beschreiben.
– Stellen Sie die Gleichung der Zielfunktion für den Gewinn auf.

b) Der Verkauf von Weiß- und Rotweinflaschen des Weinhändlers Fassbinder bei diesem Fest wird durch folgende Grafik veranschaulicht:

– Lesen Sie die Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich bestimmen.
– Interpretieren Sie aus der Grafik, wie viele Weiß- und Rotweinflaschen dieser Händler jeweils höchstens zu seinem Stand im Festzelt mitnehmen sollte.

c) Beim Weinhändler Fassbinder beträgt die Zielfunktion für den Gewinn $Z(x,y) = 2x + 4y$.

– Zeichnen Sie die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in die nachstehende Grafik ein.



– Berechnen Sie mithilfe der passenden Werte aus der Grafik den maximalen Gewinn.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

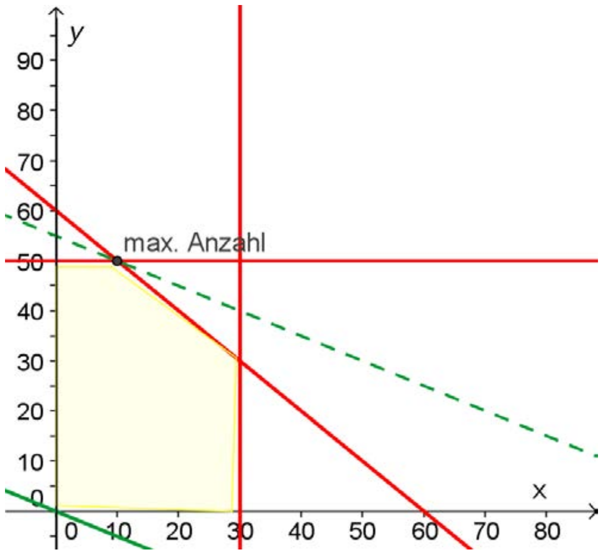
Möglicher Lösungsweg

a) $x \geq 0$
$x \leq 20$
$y \geq 0$
$y \leq 20$
$\underline{x + y \leq 30}$
$Z(x,y) = 1{,}5x + 2{,}5y \rightarrow$ max.

b) $x \leq 30$ und $x \geq 0$
$y \leq 50$ und $y \geq 0$
$x + y \leq 60$

Fassbinder verkauft erfahrungsgemäß an diesem Festtag höchstens 30 Flaschen Weißwein und 50 Flaschen Rotwein.

c) Zielfunktion $Z(x,y) = 2x + 4y \rightarrow$ max.



Lösung: (10|50) … gewinnmaximale Mengen

Die gewinnmaximalen Mengen betragen 10 Flaschen Weißwein und 50 Flaschen Rotwein. Dies führt an diesem Festtag zu einem maximalen Tagesgewinn von € 220.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Wohnungsrenovierung

Aufgabennummer: B_139

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Zuge einer Wohnungsrenovierung benötigt Thomas einen Kredit in Höhe von € 30.000.

a) Seine Bank bietet ihm einen Kredit mit einer Laufzeit von 10 Jahren, der bei einem Quartalszinssatz von 1 % p. q. durch nachschüssige Monatsraten getilgt werden soll.

– Ermitteln Sie den äquivalenten Monatszinssatz.
– Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die Ratenhöhe berechnet werden kann.
– Berechnen Sie die Ratenhöhe.

b) Thomas holt sich für diesen Kredit ein weiteres Angebot von einer anderen Bank. Diese verlangt eine Bearbeitungsgebühr von 2 % vom Kreditbetrag, die bei der Auszahlung einbehalten wird.
Die Rückzahlung des Kredits erfolgt in 12 Jahren durch nachschüssige Quartalsraten in Höhe von je € 800.

– Veranschaulichen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
– Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz.

c) Das Angebot einer dritten Bank ist in folgendem Tilgungsplan dargestellt:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	0	0	0	€ 30.000,00
1	€ 1.350,00	€ 491,75	€ 1.841,75	€ 29.508,25
2	€ 1.327,88	€ 513,87	€ 1.841,75	€ 28.994,38

– Erklären Sie die Begriffe und den Zusammenhang von Zinsanteil und Tilgungsanteil.
– Berechnen Sie den Jahreszinssatz, der dem Tilgungsplan zugrunde liegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

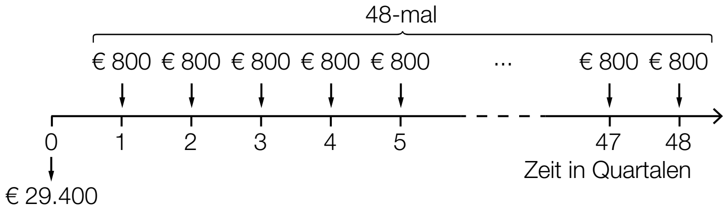
Möglicher Lösungsweg

a) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}01^4} - 1 = \sqrt[3]{1{,}01} - 1 = 0{,}00332...$
Der äquivalente Monatszinssatz beträgt rund 0,33 %.

$$30\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} \quad \text{mit} \quad q_{12} = \sqrt[3]{1{,}01}$$

$R = 303{,}546...$
Die Ratenhöhe beträgt € 303,55.

b)



$$30\,000 - 600 = 800 \cdot \frac{q_4^{48} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{48}}$$

$q_4 = 1{,}01147...$
$i_{eff} = 1{,}01147...^4 - 1 = 0{,}04669...$
Der effektive Jahreszinssatz des Angebots beträgt rund 4,67 % p. a.

c) Zusammenhang:

Den **Zinsanteil** einer Periode berechnet man durch Multiplikation der Restschuld der vorangegangenen Periode mit dem angegebenen Zinssatz.

Der **Tilgungsanteil** ist derjenige Teil der Annuität, der zur Tilgung der Schuld beiträgt. (Zinsanteil und Tilgungsanteil ergeben in Summe die Annuität.)

Berechnung des Zinssatzes: $i = \frac{1\,350}{30\,000} = 0{,}045 = 4{,}5\ \%$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 3
c) mittel	c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Halterungen für Glasfassaden

Ein Betrieb erzeugt Halterungen für Glasfassaden. Die monatlichen Produktionskosten für die Herstellung der Halterungen bis zu einer Grenze von $x = 5\,000$ Stück können durch folgende Funktion K beschrieben werden:

$K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}025 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500$

x ... Produktionsmenge in Stück mit $0 \leq x \leq 5\,000$
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

a) 1) Stellen Sie eine Gleichung der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ auf.
   2) Ermitteln Sie den lokalen Extremwert der Stückkostenfunktion $\overline{K}$.
   3) Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass es sich bei diesem Extremwert um ein lokales Minimum handelt.

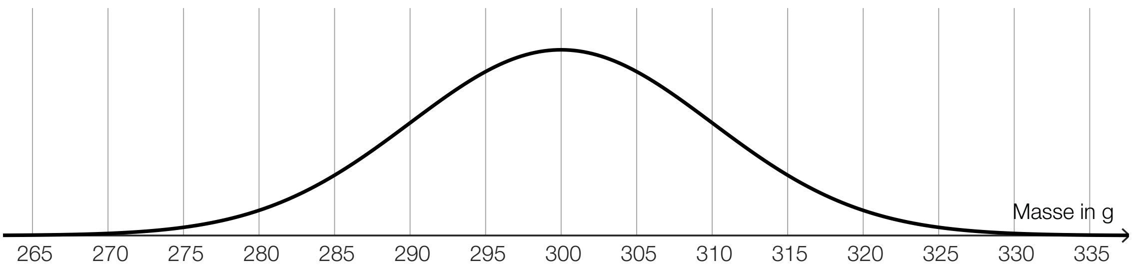
b) Die Halterungen werden zu einem Preis von € 20 pro Stück verkauft.

   1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf.
   2) Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

c) Ein Kunde bezieht die Halterungen in sehr großer Stückzahl.
   Erfahrungsgemäß ist eine Halterung mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % fehlerhaft.
   Der Kunde überprüft eine Zufallsstichprobe von 50 Halterungen.

   1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 1 der Halterungen in dieser Zufallsstichprobe fehlerhaft ist.

d) Die Masse der Halterungen ist annähernd normalverteilt. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



   1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ ab.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}00001 \cdot x^2 - 0{,}025 \cdot x + 24 + \frac{3500}{x}$

a2) $\overline{K}'(x) = 0{,}00002 \cdot x - 0{,}025 - \frac{3500}{x^2}$

$\overline{K}'(x) = 0$
$x = 1\,346{,}519...$
$K(1\,346{,}519...) = 11{,}067...$

a3) $\overline{K}''(x) = 0{,}00002 + \frac{7000}{x^3}$

$\overline{K}''(1\,346{,}519...) = 0{,}00002... > 0$

Die 2. Ableitung der Stückkosten ist positiv, daher liegt ein Minimum vor.

b1) $G(x) = 20 \cdot x - K(x)$
$G(x) = -0{,}00001 \cdot x^3 + 0{,}025 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3500$

b2) $G(x) = 0$

$(x_1 = -289{,}6...)$ $x_2 = 536{,}1....$ $x_3 = 2\,253{,}5...$
Gewinnbereich: [537 Stück; 2253 Stück]

c1) Binomialverteilung mit $n = 50$ und $p = 0{,}02$
X ... Anzahl der fehlerhaften Halterungen

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 1) = 0{,}7357...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 73,6 %.

d1) $\mu = 300$ g, $\sigma = 10$ g
Ablesetoleranz für σ: [7; 13]

Monopolistischer Betrieb

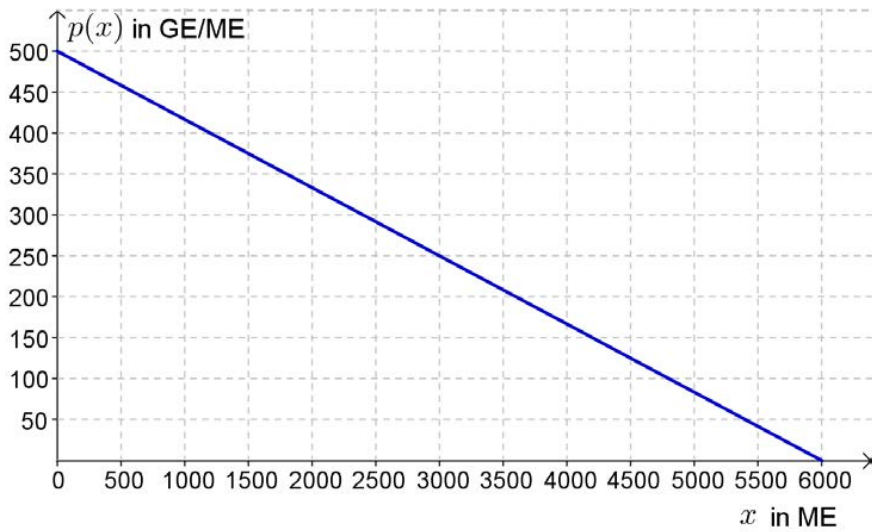
Aufgabennummer: B_148

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Produktion und der Verkauf einiger Produkte eines monopolistischen Betriebes werden untersucht.

a) Die lineare Preisfunktion der Nachfrage p für das Produkt A kann annähernd durch die nachstehende Grafik dargestellt werden.

x … nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) bei x ME



– Stellen Sie die Gleichung der in der obigen Grafik dargestellten Preisfunktion der Nachfrage auf.
– Interpretieren Sie die Nullstelle des dargestellten Funktionsgraphen im Sachzusammenhang.
– Argumentieren Sie, wie sich bei einem bestimmten Preis p_0 eine Preissenkung um 1 GE/ME auf den Absatz auswirkt.

b) Für das Produkt B gilt folgender Zusammenhang zwischen der nachgefragten Menge x und dem Erlös E:

$E(x) = -15 \cdot x^2 + 3\,000 \cdot x$

x … nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$E(x)$ … Erlös in Geldeinheiten (GE) bei einer nachgefragten Menge von x ME

– Berechnen Sie den maximalen Erlös mithilfe der Differenzialrechnung.
– Stellen Sie die Erlösfunktion grafisch für eine passende Definitionsmenge dar.
– Lesen Sie die mittlere Änderungsrate des Erlöses im Intervall [0 ME; 80 ME] ab.
– Erklären Sie die Bedeutung der mittleren Änderungsrate des Erlöses im Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Tabelle sind für das Produkt *C* die Gesamtkosten *K* in Geldeinheiten (GE) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge *x* in Mengeneinheiten (ME) angegeben:

x	0	6	15	23,5	30,3	40	60
$K(x)$	35	110	198	283	359	498	1 091

– Zeichnen Sie einen Streckenzug durch die gegebenen Punkte $(x|K(x))$ in ein Koordinatensystem.
– Beurteilen Sie, ob durch den Streckenzug $(x|K(x))$ eine zu einer Kostenfunktion passende Monotonie erkennbar ist.
– Bestimmen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine kubische Kostenfunktion für dieses Produkt.
– Berechnen Sie die Kostenkehre dieser kubischen Funktion.

d) Der Gewinn für das Produkt *D* kann annähernd durch die folgende Funktion *G* beschrieben werden:

$G(x) = -0{,}14 \cdot x^3 + 1{,}21 \cdot x^2 + 6{,}63 \cdot x - 16{,}98$

x … verkaufte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$G(x)$ … erzielter Gewinn in Geldeinheiten (GE) bei x ME

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage zur Gewinnfunktion an. *[1 aus 5]*

Bei einer Verkaufsmenge von 2 ME wird ein Verlust erzielt.	☐
Die gewinnmaximierende Menge liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	☐
Der Break-even-Point liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	☐
Bei einer Verkaufsmenge von 2 ME wird die obere Gewinngrenze erreicht.	☐
Das Betriebsoptimum liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

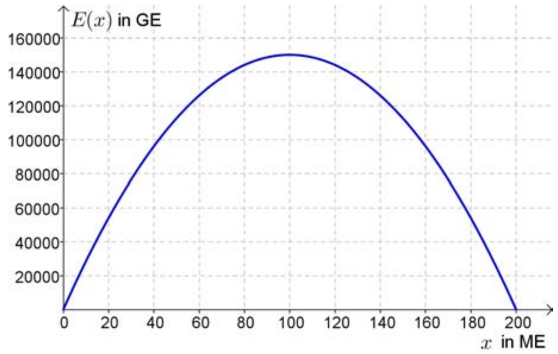
Möglicher Lösungsweg

a) $p(x) = 500 - \frac{x}{12}$

Die Nullstelle befindet sich bei $x = 6\,000$ ME. Es handelt sich um die Sättigungsmenge für dieses Produkt.

Wenn man den Preis p_0 um $\Delta p = 1$ senkt, dann bedeutet dies eine Zunahme des Absatzes um 12 Mengeneinheiten.
Begründung: $x = 6\,000 - 12\,p \;\Rightarrow\; \Delta x = -12 \cdot \Delta p$

b) $E'(x) = 0$: $-30 \cdot x + 3\,000 = 0$
$x = 100$ ME
Der maximale Erlös $E(100)$ beträgt 150 000 GE.

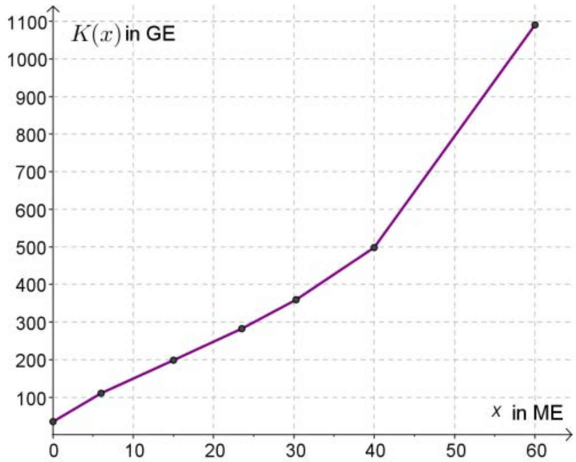


Der Graph darf keine negativen Funktionswerte aufweisen.

Die mittlere Änderungsrate zwischen 0 ME und 80 ME beträgt rund 1 800 GE/ME.

Die mittlere Änderungsrate gibt an, wie groß im Mittel pro zusätzliche ME ein Zuwachs des Erlöses im vorgegebenen Intervall ist.

c) Streckenzug:



Da alle Teilstrecken einen positiven Anstieg aufweisen, könnten die gegebenen Wertepaare Elemente einer streng monoton steigenden Funktion sein.
Dies ist u. a. eine Bedingung für ein passendes Modell einer Kostenfunktion.

Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$K(x) = 0{,}0061 \cdot x^3 - 0{,}3152 \cdot x^2 + 14{,}5417 \cdot x + 33{,}7192$

Kostenkehre aus $K''(x) = 0$: $0{,}0366 \cdot x - 0{,}6304 = 0$
Die Kostenkehre liegt bei $x_K \approx 17{,}21$ ME.

d)

Der Break-even-Point liegt bei einer Verkaufsmenge von 2 ME.	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren, D Argumentieren und Kommunizieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 4
d) 1

Thema: Wirtschaft

Quelle: Itemwriterkurs OÖ3 2014

Kostenanalyse

Aufgabennummer: B_141

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb stellt im Wesentlichen 2 verschiedene Produkte her. Um gewinnbringend zu produzieren, wurden jeweils die bei der Produktion anfallenden Kosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge untersucht. Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet:

x … erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x erzeugten ME in Geldeinheiten (GE)

a) In der nachstehenden Tabelle sind die Gesamtkosten des 1. Produkts bei unterschiedlichen Produktionsmengen aufgelistet.

x	0	10	20	30	40	50	60
$K(x)$	49	58	74	100	132	173	222

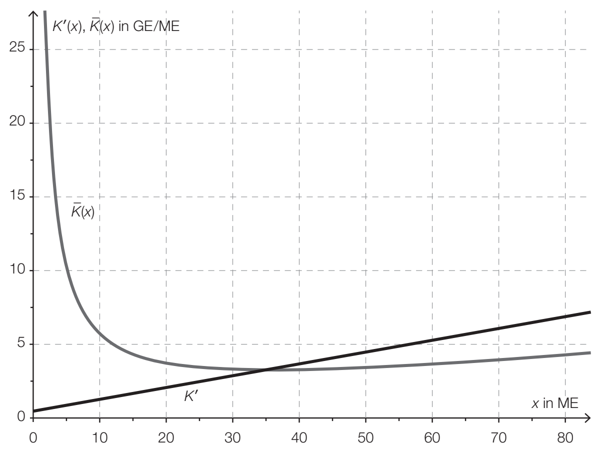
– Stellen Sie die Wertepaare in einem Koordinatensystem dar.

Die Abhängigkeit der Kosten von der Produktionsmenge soll durch eine Polynomfunktion beschrieben werden.

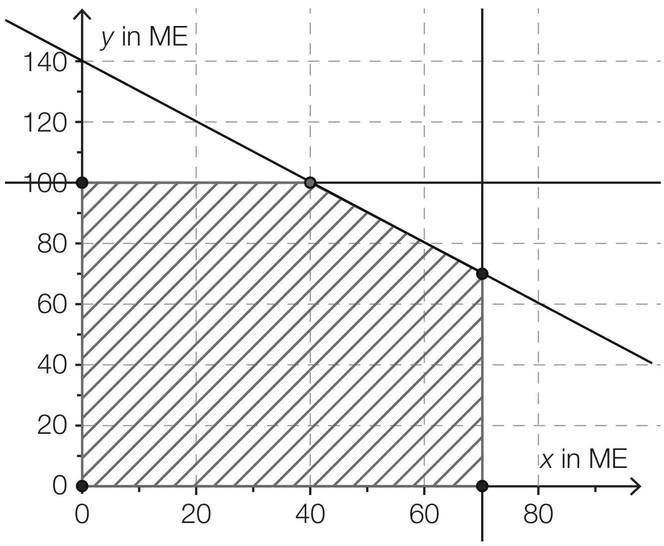
– Ermitteln Sie die Gleichung der quadratischen Kostenfunktion mittels Regression.

b) Die nebenstehende Grafik stellt die Stückkosten $\overline{K}$ und die Grenzkosten K' im Herstellungsprozess des 2. Produkts in Abhängigkeit von der Produktionsmenge dar.

– Interpretieren Sie die Bedeutung der x-Koordinate des Schnittpunkts dieser Funktionsgraphen im Sachzusammenhang.
– Lesen Sie die langfristige Preisuntergrenze aus der Grafik ab.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze mithilfe der Differenzialrechnung berechnen kann.



c) Der Betrieb kann täglich die in der nachstehenden Grafik im schraffierten Lösungsbereich angezeigten Mengen x des 1. Produkts und y des 2. Produkts herstellen. Die Mengen sind in Mengeneinheiten (ME) angegeben.
Die Herstellungskosten für 1 ME des 1. Produkts betragen 21 GE/ME, jene für das 2. Produkt 15 GE/ME.
Die Verkaufspreise betragen für 1 ME des 1. Produkts 51 GE/ME und für das 2. Produkt 39 GE/ME.
Die Produktionsmengen der beiden Produkte sollen so gewählt werden, dass insgesamt ein möglichst hoher Gewinn erwirtschaftet wird.



– Stellen Sie die zugehörige Zielfunktion zur Berechnung des maximalen Gewinns auf.
– Zeichnen Sie die zur Zielfunktion passende Gerade durch den Koordinatenursprung in die obige Grafik ein.
– Ermitteln Sie, wie viel von jedem Produkt gefertigt werden soll, damit der Gewinn maximal ist.

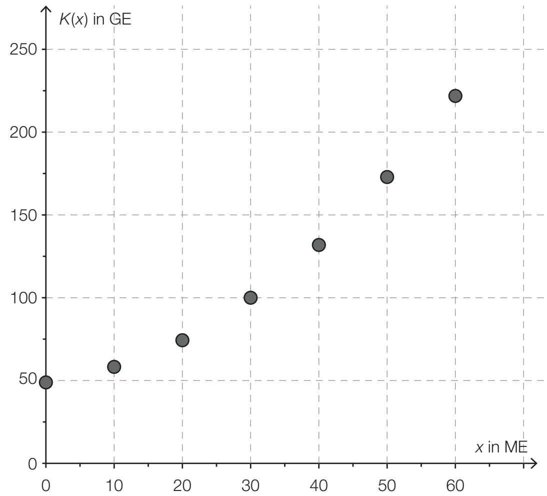
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Mittels Technologieeinsatz kann man die Regressionsfunktion berechnen:

$K(x) = 0{,}04x^2 + 0{,}475x + 49{,}02$



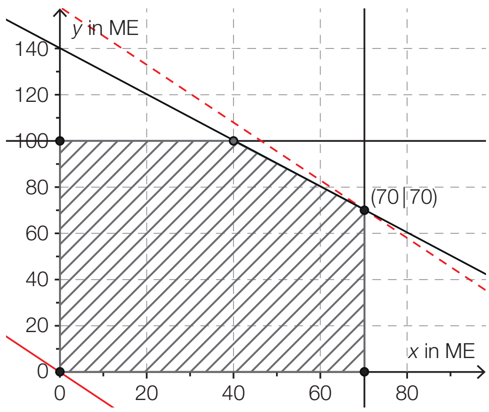
b) Die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Kurven ist die Minimumstelle der Stückkostenfunktion, also das Betriebsoptimum.
Die langfristige Preisuntergrenze liegt bei etwa 3,5 GE/ME (Toleranzintervall: [3; 4]).
Mithilfe der Differenzialrechnung löst man die Gleichung $\overline{K}'(x) = 0$.
Die Lösung der Gleichung liefert das Betriebsoptimum x_O und das Einsetzen von x_O in $\overline{K}(x)$ die Höhe der langfristigen Preisuntergrenze.

c) x … Menge von Produkt 1 in ME
y … Menge von Produkt 2 in ME

$z(x, y) = 30 \cdot x + 24 \cdot y$

Gerade durch den Koordinatenursprung:
$y = -\frac{30x}{24}$

Es sollen täglich 70 ME des 1. Produkts und 70 ME des 2. Produkts gefertigt werden.



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion

Aufgabennummer: B_136

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Gesamtkosten K für die Herstellung eines bestimmten Produkts in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x verlaufen nach einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion.

x … Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kostenfunktion muss in diesem Fall die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Es existiert ein positiver Funktionswert an der Stelle $x = 0$.
2. Die Kurve hat keinen Extremwert.
3. Die Kurve muss streng monoton steigen.
4. Sie muss im 1. Quadranten von einem degressiven Verlauf in einen progressiven wechseln.

a) Nur einer der beiden unten abgebildeten Graphen stellt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion dar.

- Begründen Sie, warum der Funktionsgraph in Abb. 2 keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion beschreibt.
- Lesen Sie aus dem Graphen der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion die Kostenkehre ab.
- Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Kostenkehre die Stückkosten an dieser Stelle.

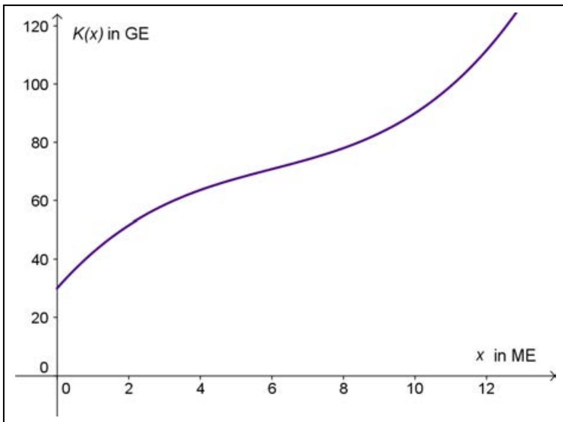


Abb. 1

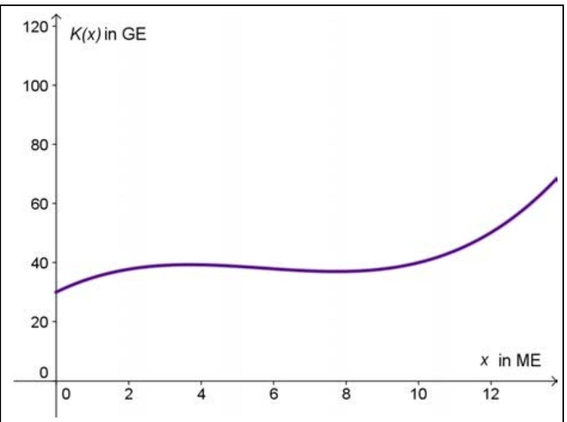


Abb. 2

b) – Begründen Sie, warum die Funktion K mit

$$K(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}6x^2 + 12x + 20$$

die 4 Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion erfüllt.

c) Eine Polynomfunktion 3. Grades beschreibt eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion. Die Fixkosten betragen 25 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen 53,8 GE. Die Tangente an den Graphen der Gesamtkostenfunktion hat an der Stelle $x = 2$ ME einen Anstieg $k = 6$.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Parameter der Kostenfunktion berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Graph in Abb. 2 erfüllt 2 Bedingungen einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion nicht.
Die 2. Bedingung ist nicht erfüllt: Die Funktion hat ein lokales Maximum (bei ca. 4 ME) und ein lokales Minimum (bei ca. 8 ME).
Die 3. Bedingung ist nicht erfüllt: Die Funktion steigt nicht streng monoton. Sie fällt im Bereich von ca. 4 ME bis ca. 8 ME.

Abb.1: Die Kostenkehre liegt bei ca. 6 ME. Toleranzbereich: ±0,5 ME.
Die Gesamtkosten an der Kostenkehre betragen ca. 70 GE, die Stückkosten an der Kostenkehre betragen daher ungefähr 11,67 GE/ME.

b) $K(0) = 20$ … positiver Funktionswert an der Stelle $x = 0$
$K'(x) = 0{,}3x^2 - 3{,}2x + 12 = 0$, die Gleichung hat keine reelle Lösung.
Es existieren keine Extremwerte.

Wenn der Funktionsgraph im gesamten Bereich monoton steigt, dann muss $K'(x)$ für alle x größer als null sein.
Der Graph von K' ist eine nach oben offene Parabel, weil der Koeffizient vor x^2 positiv ist. Weil die Ableitungsfunktion K' keine Nullstelle hat, sind alle Funktionswerte positiv.
Die Funktion K steigt daher monoton.

$K''(x) = 0{,}6x - 3{,}2 = 0 \Rightarrow x = 5{,}33$
Der Wendepunkt liegt im 1. Quadranten.
$K''(x)$ ist positiv für $x > 5{,}33$, denn K'' ist eine lineare Funktion mit positiver Steigung.
D. h., das Krümmungsverhalten ist nach der Wendestelle progressiv und vor der Wendestelle daher degressiv.

c) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$K'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
$K''(x) = 6a \cdot x + 2b$

Es gelten die folgenden Gleichungen:
$K(0) = 25$: $d = 25$
$K(5) = 53{,}8$: $125a + 25b + 5c + d = 53{,}8$
$K'(2) = 6$: $12a + 4b + c = 6$
$\underline{K''(5) = 0: \quad 30a + 2b = 0}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) mittel	b) 4
c) mittel	c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Jahresumsatz

Aufgabennummer: B_135

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

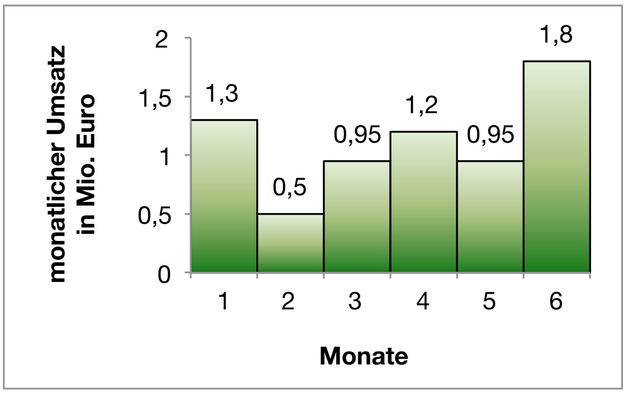
a) Ein Unternehmen erzielt in den Jahren nach seiner Gründung Jahresumsätze, die in der nachstehenden Tabelle aufgelistet sind.

t … Jahre (a) nach der Gründung
E(*t*) … Erlös *t* Jahre nach der Gründung in Millionen Euro (Mio. €)

t in a	1	5	9	13	17	21
E(*t*) in Mio. €	14	12,5	13,9	14,7	16	18,2

– Stellen Sie die Wertepaare der Tabelle in einem Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie mithilfe der Regression eine Polynomfunktion 2. Grades durch die gegebene Punktewolke.

b) Die nachstehende Grafik zeigt die monatliche Umsatzverteilung im 1. Halbjahr des 5. Jahres.



– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der monatlichen Umsätze.

In einem Geschäftsbericht werden nur das arithmetische Mittel und die Standardabweichung veröffentlicht.

– Erklären Sie, welche Informationen zur Umsatzentwicklung dadurch verloren gehen.

c) Der Jahresumsatz für ein bestimmtes Produkt dieses Unternehmens beträgt 2,4 Millionen Euro bei 20 000 verkauften Stück. Die Sättigungsmenge liegt bei 30 000 Stück. Die Preisfunktion der Nachfrage p ist linear:

$p(x) = k \cdot x + d$

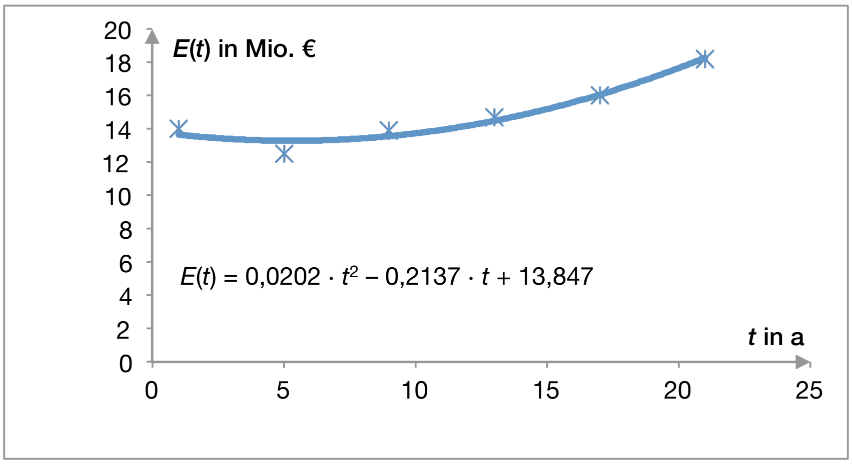
x … Verkaufsmenge in Stück
$p(x)$ … Preis pro Stück bei einer Verkaufsmenge von x Stück

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten k und d auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Regressionsfunktion:
$E(t) = 0{,}0202 \cdot t^2 - 0{,}2137 \cdot t + 13{,}8471$

b) Im Mittel nimmt das Unternehmen im diesem Halbjahr monatlich jeweils rund € 1,1167 Mio. ein. Die Standardabweichung beträgt rund € 0,3965 Mio.

Das arithmetische Mittel lässt keinen Rückschluss auf die Entwicklung des Umsatzes während des Halbjahres zu. Die tatsächlichen Schwankungen des Umsatzes von Monat zu Monat werden durch die Angabe der Standardabweichung nicht erfasst.

c) Preis pro Stück bei einer Verkaufsmenge von 20 000 Stück: $\frac{2\,400\,000\text{ €}}{20\,000\text{ Stk.}} = 120$ €/Stk.

$p(20\,000) = 120$: $20\,000 \cdot k + d = 120$
$p(30\,000) = 0$: $30\,000 \cdot k + d = 0$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Hühnerfarm

Aufgabennummer: B_184

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

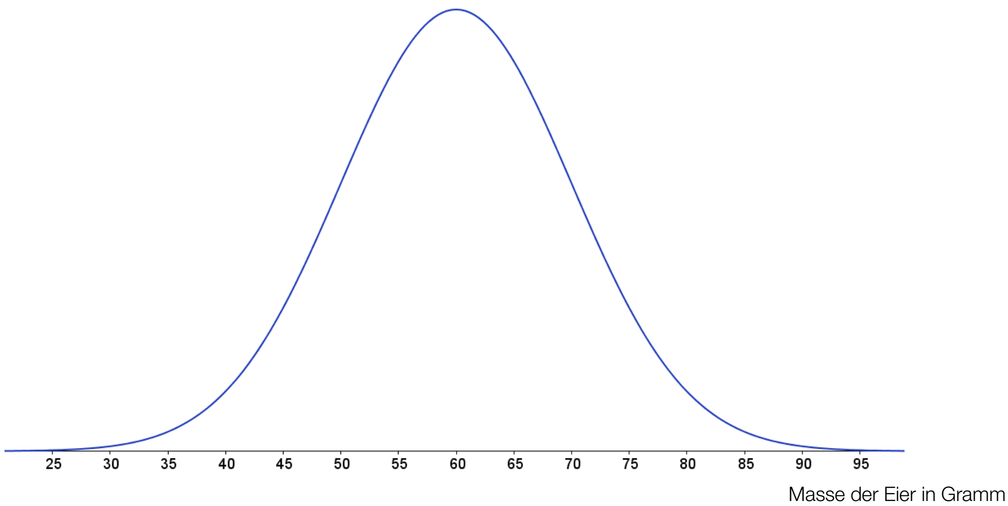
Auf einer Hühnerfarm werden Eier produziert.

a) In einer Stichprobe von n = 12 Eiern wurden folgende Massen in Gramm (g) gemessen:

62,4	68,1	54,3	65,4	71,8	52,6	55,7	62,8	67,1	66,2	61,0	70,1

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung dieser Stichprobe.

b) Die Masse von Hühnereiern kann als normalverteilt betrachtet werden.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der entsprechenden Dichtefunktion.



– Lesen Sie den Erwartungswert aus der Abbildung ab.
– Erklären Sie anhand der Abbildung, warum die Angabe einer Standardabweichung von 5 g nicht korrekt sein kann.

c) Die Eier werden nach Gewichtskategorien in mittlere und große Eier eingeteilt. Sechser- und Viererpackungen von Eiern werden zum Verkauf angeboten. Die Sechserpackung kostet € 2,50 und beinhaltet je 3 große und 3 mittlere Eier. Die Viererpackung kostet € 1,70 und beinhaltet je 1 großes Ei und 3 mittlere Eier.

Mindestens 60 große und 80 mittlere Eier sollen für eine Großküche eingekauft werden. Für den Einkauf stehen maximal € 65 zur Verfügung.

– Stellen Sie dasjenige Ungleichungssystem auf, das beschreibt, welche Anzahl an Viererpackungen y bei welcher Anzahl von Sechserpackungen x die Großküche kaufen kann.
– Stellen Sie den Lösungsbereich des Ungleichungssystems grafisch dar.
– Beurteilen Sie anhand des Lösungsbereichs, ob die Großküche 12 Sechserpackungen und 25 Viererpackungen kaufen kann.

d) Die Hühnerfarm soll durch den Ankauf eines der Nachbargrundstücke vergrößert werden. Es liegen zwei Angebote vor:

- Angebot 1 umfasst das Grundstück mit 2 000 m².
  Der Kaufpreis soll in 12 nachschüssigen Jahresraten zu je € 1.050 getilgt werden.
- Angebot 2 umfasst das Grundstück mit 2 200 m².
  Der Kaufpreis soll in 24 nachschüssigen Jahresraten zu je € 510 getilgt werden.

Für beide Angebote ist ein Zinssatz von 2,5 % p. a. vereinbart. Es soll das Grundstück mit dem niedrigeren Quadratmeterpreis gekauft werden.

– Dokumentieren Sie in Worten, wie man das günstigere Angebot ermitteln kann.
– Berechnen Sie den Kaufpreis pro Quadratmeter für das Angebot 2.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

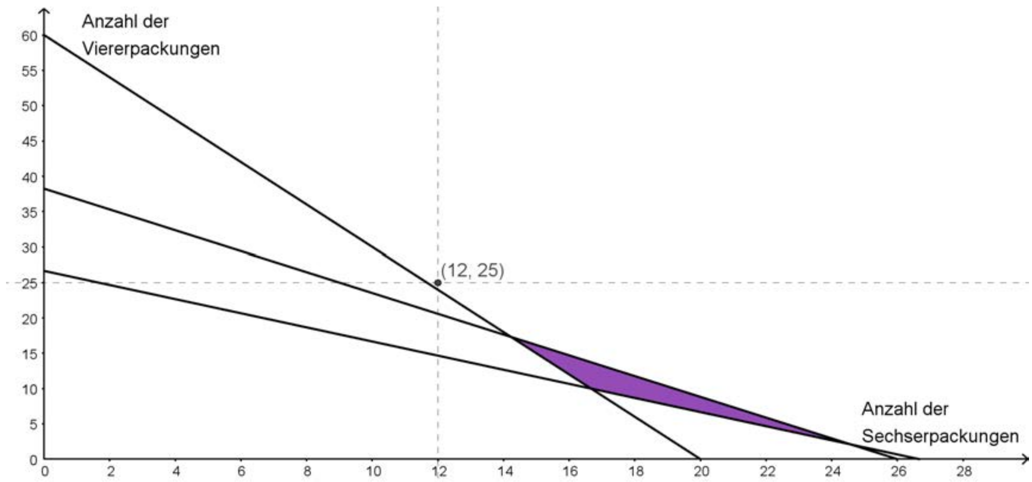
Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 63{,}125$ g
$s \approx 6{,}24$ g (*n*–1-Gewichtung, weil es die erwartungstreue Schätzung ist.
Eine *n*-Gewichtung ist aber ebenfalls zu akzeptieren.)

b) Der Erwartungswert liegt bei 60 g.
Die Standardabweichung muss größer als 5 g sein, weil die Wendepunkte der Kurve weiter vom Erwartungswert entfernt liegen.

c) *x* ... Anzahl der Sechserpackungen
y ... Anzahl der Viererpackungen

$2{,}5x + 1{,}7y \leq 65$ $\quad 3x + y \geq 60$ $\quad 3x + 3y \geq 80$ $\quad x \geq 0$ $\quad y \geq 0$



Der Punkt (12|25) liegt nicht im Lösungsbereich. Daher ist es nicht möglich, 12 Sechserpackungen und 25 Viererpackungen zu kaufen.

d) Man berechnet jeweils den Barwert der Angebote und dividiert diesen durch die entsprechende Fläche in Quadratmetern.

Barwert von Angebot 2: $B = \frac{510}{1{,}025^{24}} \cdot \frac{1{,}025^{24} - 1}{0{,}025} = 9\,121{,}342... \approx 9\,121{,}34$

Kaufpreis pro Quadratmeter in Euro: $\frac{B}{2\,200} = 4{,}146... \approx 4{,}15$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 2
c) leicht	c) 3
d) mittel	d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Sektkellerei

Aufgabennummer: B_132

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Sektkellerei erzeugt und vertreibt Sekt unterschiedlicher Marken.

x … Anzahl der produzierten oder verkauften Flaschen pro Tag
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x Flaschen pro Tag in Euro (€)

a) Man ermittelt die gesamt anfallenden Produktionskosten in Abhängigkeit von den pro Tag abgefüllten Flaschen der Marke *Dom*.

x	0	100	200	300	400	500	600
$K(x)$	10 000	12 800	14 800	16 000	18 000	19 000	21 600

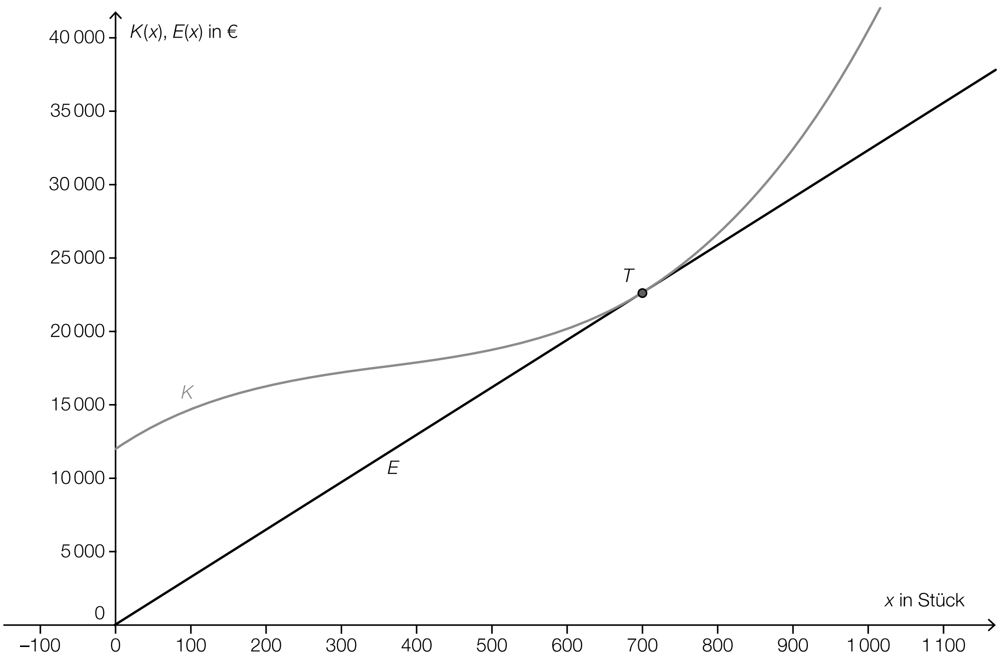
– Bestimmen Sie für diese Gesamtkosten mithilfe von Regression eine passende Polynomfunktion 3. Grades.
– Zeichnen Sie die gegebenen Punkte und den Graphen der Regressionslinie.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung die Kostenkehre berechnen kann.

b) Die Kellerei verkauft täglich die Tagesproduktion der Sektmarke *Gold* zu € 40 pro Flasche. Die Kostenfunktion für diese Marke lautet:

$$K(x) = 7 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}07 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 12\,000$$

– Berechnen Sie, wie viele Flaschen mindestens und wie viele höchstens pro Tag verkauft werden sollen, damit die Kellerei einen Gewinn macht.

c) Interpretieren Sie in der nachstehenden Grafik die Tangente an die Kostenfunktion K als lineare Erlösfunktion E.

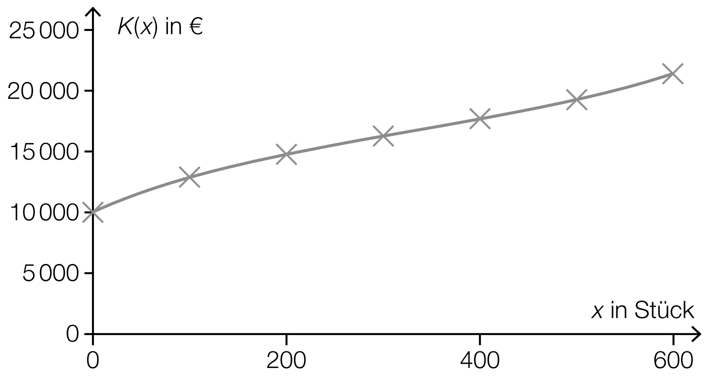


– Lesen Sie den Anstieg der Tangente und die Koordinaten des Berührpunktes T ab.
– Interpretieren Sie die Aussage der Koordinaten von T und des abgelesenen Tangentenanstiegs im Sachzusammenhang.
– Argumentieren Sie, welche Informationen diese Grafik über den möglichen Gewinn enthält.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = 0{,}00006 \cdot x^3 - 0{,}0602 \cdot x^2 + 33{,}365 \cdot x + 10\,000$

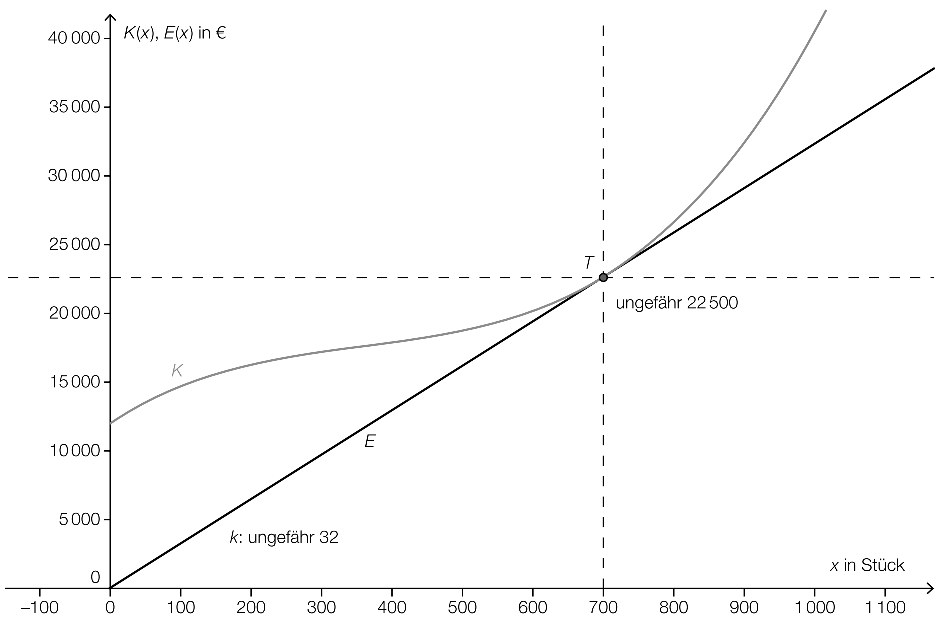


Man berechnet die Kostenkehre, indem man die 2. Ableitung der Kostenfunktion gleich null setzt und die Gleichung nach x auflöst.

b) $p = 40$
$G(x) = 40 \cdot x - (7 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}07 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 12\,000)$
$G(x) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 \approx 440{,}35$; $x_2 \approx 963{,}64$
Die Gewinnzone für diesen Sekt liegt zwischen mindestens 441 und höchstens 963 verkauften Flaschen pro Tag.

c) Genau ablesen lässt sich die x-Koordinate von T: 700 Flaschen, die Kosten lassen sich nur ungefähr bestimmen ($\approx 22\,500$). Der Anstieg beträgt ungefähr 32.



Der Tangentenansteig der Erlösfunktion ergibt den Verkaufspreis pro Flasche,
die Koordinaten von *T* ergeben das Betriebsoptimum $x_0 = 700$ Flaschen und den Erlös bzw. die Gesamtkosten am Betriebsoptimum von ca. € 22.500.

Aussage: Wenn eine Flasche zu ungefähr € 32 verkauft wird, dann müsste man genau 700 Flaschen verkaufen und nimmt ca. € 22.500 ein. Die Kosten sind bei dieser Verkaufsmenge gleich hoch wie der Erlös, das bedeutet, dass der Betrieb kostendeckend arbeitet. Es wird kein Gewinn erwirtschaftet.
Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sparbuch*

Aufgabennummer: B_222

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Von einem Sparbuch soll über 10 Jahre hinweg jeweils am Monatsende ein Betrag von € 200 abgehoben werden. Unmittelbar nach der letzten Abhebung sollen noch € 1.500 auf dem Sparbuch verbleiben. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

– Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, der zu Beginn auf das Sparbuch einbezahlt werden muss (ohne Berücksichtigung der KESt).

b) Auf ein Sparbuch wird einmalig ein Betrag von € 10.000 und 5 Jahre später einmalig ein Betrag x einbezahlt. Nach insgesamt 8 Jahren soll ein Betrag von € 20.000 zur Verfügung stehen. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

– Erstellen Sie eine Zeitlinie, die diesen Sachverhalt darstellt.
– Berechnen Sie die Höhe des Betrags x ohne Berücksichtigung der KESt.
– Begründen Sie, warum sich die Höhe des Betrags x verringert, wenn er bereits nach 2 Jahren einbezahlt wird.

c) Auf einem Sparbuch stehen zu Jahresbeginn € 25.000 zur Verfügung. In den folgenden 12 Jahren sollen jeweils am Jahresende € 2.300 abgehoben werden können, sodass das Guthaben zur Gänze aufgebraucht ist.

– Berechnen Sie den entsprechenden Jahreszinssatz (ohne Berücksichtigung der KESt).

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $q_{12} = \sqrt[12]{1{,}015} = 1{,}00124...$

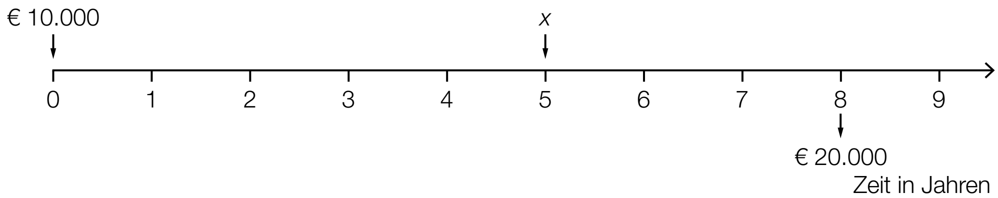
Barwert der Ratenzahlung: $200 \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{120}} = 22\,284{,}999...$

Barwert des Restbetrags: $\frac{1\,500}{1{,}015^{10}} = 1\,292{,}500...$

$22\,284{,}999... + 1\,292{,}500... = 23\,577{,}500...$

Es müssen zu Beginn € 23.577,50 auf das Sparbuch einbezahlt werden.

b)



$10\,000 \cdot 1{,}015^8 + x \cdot 1{,}015^3 = 20\,000$
$x = 8\,353{,}499...$
Es muss ein Betrag in Höhe von € 8.353,50 nach 5 Jahren einbezahlt werden.

Wird der Betrag x schon nach 2 Jahren einbezahlt, so können dafür zusätzlich 3 Jahre lang Zinsen lukriert werden. Um diesen Betrag sinkt die Höhe von x bei früherer Einzahlung.

c) $25\,000 = 2\,300 \cdot \frac{q^{12} - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{12}}$
$q = 1{,}01555...$
Der jährliche Zinssatz beträgt rund 1,56 %.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das Erkennen des richtigen finanzmathematischen Modells (Barwert)
1 × B1: für die Verwendung des richtigen (monatlichen) Zinssatzes
1 × B2: für die richtige Berechnung des am Beginn einzuzahlenden Betrags

b) 1 × A: für die richtige Erstellung der Zeitlinie
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe des Betrags x
1 × D: für die richtige Begründung

c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des jährlichen Zinssatzes
1 × B: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes

Produktion*

Aufgabennummer: B-C8_31		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) In der nachstehenden Tabelle sind die Gesamtkosten eines Unternehmens $K(x)$ in GE für die Produktionsmenge x in ME angegeben. Die Fixkosten betragen 40 GE.

x in ME	2	5	9
$K(x)$ in GE	105	152	369

– Ermitteln Sie die Gleichung der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K.
– Zeichnen Sie den Graphen dieser Kostenfunktion K im Intervall $0 \leq x \leq 10$.
– Lesen Sie aus dem Graphen denjenigen Bereich ab, in dem ein progressiver Kostenverlauf vorliegt.

b) – Beschreiben Sie die notwendigen Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze, wenn die Gesamtkostenfunktion bekannt ist.

c) Zur Gewinnermittlung für ein anderes Produkt verwendet das Unternehmen die folgende Kostenfunktion K sowie die folgende Erlösfunktion E:

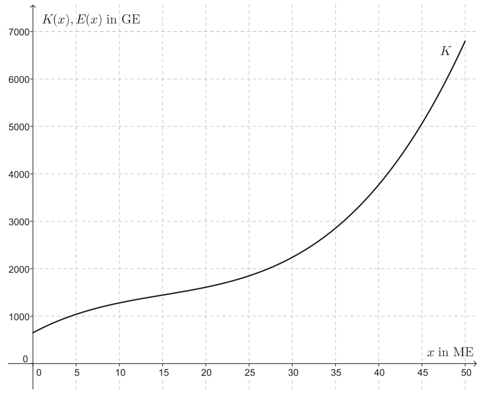
$K(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 55 \cdot x + 190$
$E(x) = 90 \cdot x$

x in ME
$K(x)$, $E(x)$ in GE

– Stellen Sie Funktionsgleichung der Gewinnfunktion auf.
– Berechnen Sie die Höhe des maximalen Gewinns.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K eines weiteren Produktes dargestellt.

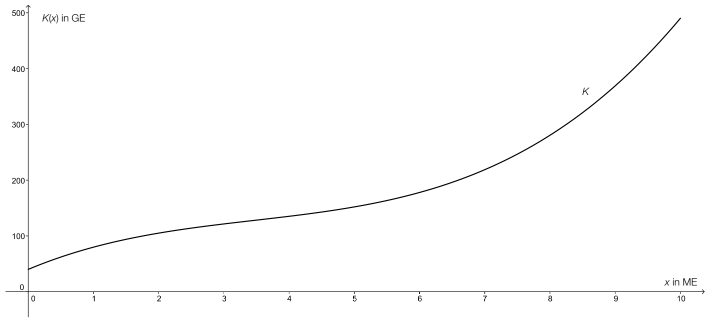


– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E bei einem Marktpreis von 100 GE/ME ein.
– Lesen Sie die beiden Gewinngrenzen ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = 0{,}99 \cdot x^3 - 10{,}27 \cdot x^2 + 49{,}1 \cdot x + 40$

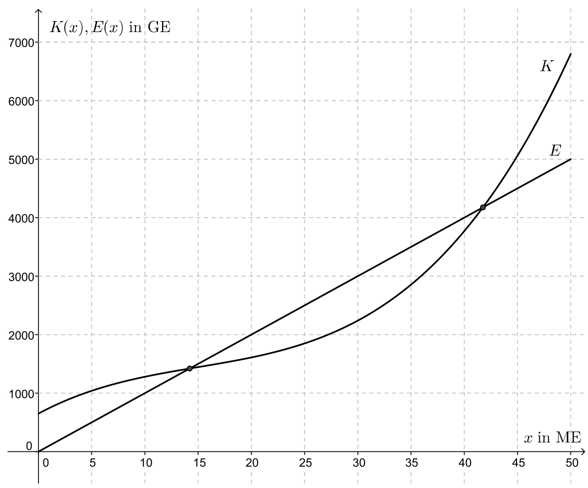


Im Bereich ab rund 3,5 ME liegt ein progressiver Kostenverlauf vor.
Für die untere Grenze gilt folgender Ablesetoleranzbereich: [3; 4].

b) Schritte zur Berechnung der kurzfristigen Preisuntergrenze:
– Bestimmung der variablen Stückkostenfunktion
– Stelle des Minimums der variablen Stückkostenfunktion berechnen (Betriebsminimum)
– Betriebsminimum in variable Stückkostenfunktion einsetzen
→ Ergebnis ist die kurzfristige Preisuntergrenze

c) $G(x) = -x^3 + 9 \cdot x^2 + 35 \cdot x - 190$
maximaler Gewinn: 156,9 GE

d)



untere Gewinngrenze: ca. 14 ME, Ablesetoleranzbereich [12; 16]
obere Gewinngrenze: ca. 42 ME, Ablesetoleranzbereich [40; 44]

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1 für die richtige Ermittlung der Gleichung
   1 × B2 für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen
   1 × C für das richtige Ablesen des Intervalls
b) 1 × C für die richtige Beschreibung der Berechnungsschritte
c) 1 × A für das richtige Aufstellen der Gewinnfunktion
   1 × B für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
d) 1 × A für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
   1 × C für das richtige Ablesen der Gewinngrenzen

Startkapital

Aufgabennummer: B_146

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Simon möchte sich selbstständig machen. Er setzt für die Gründung seines Unternehmens als Startkapital seine Ersparnisse und einen Kredit ein.

a) Er hat während der letzten 10 Jahre die folgenden Zahlungen auf ein mit 2,1 % p.a. verzinstes Sparbuch getätigt: Zu Beginn des 1. Jahres € 20.000, zu Beginn des 4. Jahres € 75.000 und ab dem Beginn des 8. Jahres monatlich vorschüssige Raten in Höhe von je € 450.

– Veranschaulichen Sie den Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.

– Berechnen Sie, über welchen Betrag Simon nach diesen 10 Jahren verfügen kann.

Simon überlegt durch welche nachschüssigen Monatsraten *R* er in 10 Jahren denselben Betrag hätte ansparen können.

– Ermitteln Sie die Höhe dieser Rate *R*.

b) Simon benötigt zusätzlich zu seinen Ersparnissen ein Kapital in Höhe von € 45.000. Die Bank bietet ihm einen entsprechenden Kredit mit dem folgenden Tilgungsplan:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 45.000,00
1	€ 1.665,00	€ 9.000,00	€ 10.665,00	€ 36.000,00
2	€ 1.332,00	€ 9.000,00		€ 27.000,00
3	€ 999,00	€ 9.000,00	€ 9.999,00	€ 18.000,00
4	€ 666,00	€ 9.000,00	€ 9.666,00	€ 9.000,00
5	€ 333,00	€ 9.000,00	€ 9.333,00	€ 0,00

– Ermitteln Sie die fehlende Zahl im Tilgungsplan.

In einem anderen Angebot soll diese Schuld bei einem Zinssatz von 4 % p.a. durch 5 nachschüssige Jahresraten getilgt werden.

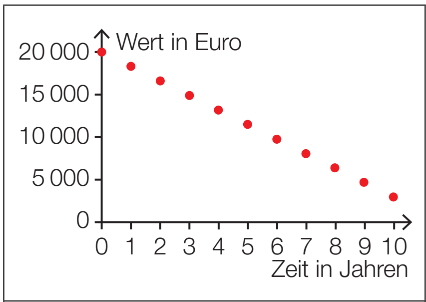
– Berechnen Sie die zugehörige Ratenhöhe.

c) Simon kauft vom Startkapital zu Beginn des Jahres für sein Unternehmen eine Maschine um € 20.000. Die Maschine verliert gegenüber dem Vorjahr jährlich 25 % ihres Wertes.

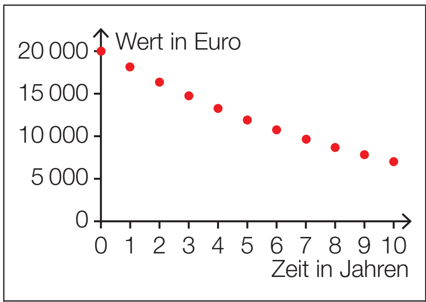
– Stellen Sie die Funktionsgleichung auf, die den Wert der Maschine jeweils zu Beginn jedes Jahres beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Beginn desjenigen Jahres, in dem die Maschine gekauft wird.
– Geben Sie eine passende Definitionsmenge zu dieser Funktion an.

Die nachstehenden grafischen Darstellungen sollen den Wert der Maschine zu Beginn jedes Jahres darstellen.

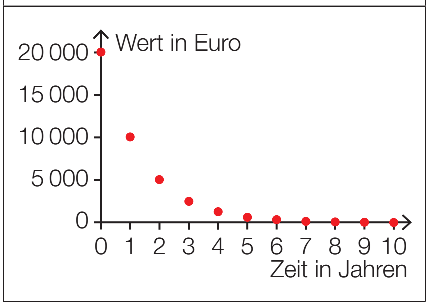
– Kreuzen Sie die korrekte Darstellung an. *[1 aus 5]*



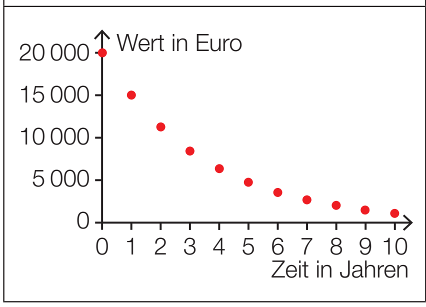
☐



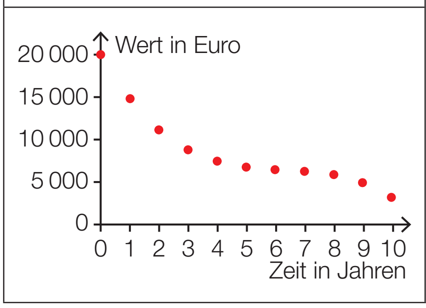
☐



☐



☐

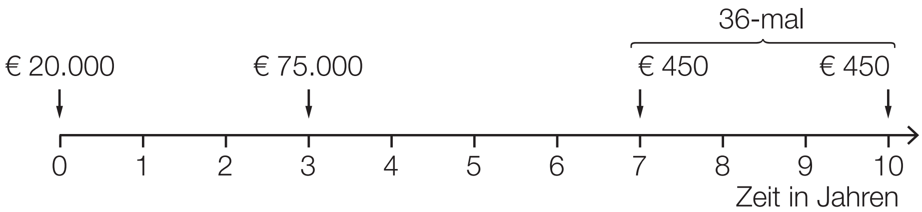


☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$q_{12} = \sqrt[12]{1{,}021}$

$K_{10} = 20\,000 \cdot 1{,}021^{10} + 75\,000 \cdot 1{,}021^{7} + 450 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot q_{12} = 128\,094{,}522...$

Simon kann nach 10 Jahren € 128.094,52 beheben.

$R \cdot \frac{q_{12}^{120} - 1}{q_{12} - 1} = 128\,094{,}52 \quad \Rightarrow \quad R = 961{,}203...$

Die Ratenhöhe beträgt € 961,20.

b) fehlende Zahl:

2. Zeile Annuität: € 10.332 (aus $Z + T = 1\,332 + 9\,000$)

$45\,000 = R \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^5}$

$R = 10\,108{,}220...$

Die Ratenhöhe beträgt € 10.108,22.

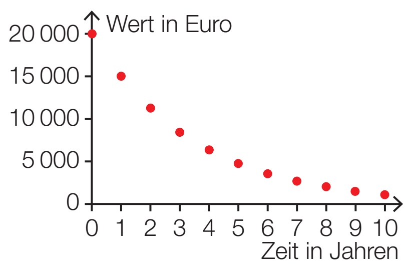
c) $W(t) = 20\,000 \cdot 0{,}75^t$ mit $t \in \mathbb{N}$

t … Anzahl der Jahre (ganzzahlig)

$W(t)$ … Wert zu Beginn des Jahres t in Euro (€)

$D = \mathbb{N}$

[...]	
[...]	
[...]	

[...]	
	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 3

Thema: Wirtschaft

Quelle: teilweise Mitarbeit der Gruppe HUM Itemwriterschulung OÖ 2014

Kraftstoffverbrauch

Aufgabennummer: B_176

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Kraftstoffverbrauch eines Kraftfahrzeugs ist unter anderem abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit.

v … Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde (km/h)
$K(v)$ … Kraftstoffverbrauch bei einer konstanten Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

a) Die nachstehende Tabelle zeigt den bei einer Testfahrt festgestellten Kraftstoffverbrauch eines LKWs bei verschiedenen Geschwindigkeiten.

v in km/h	30	50	60
$K(v)$ in L/100 km	10	9,4	11,8

Der Kraftstoffverbrauch bei dieser Testfahrt kann in einem Bereich von 30 km/h bis 70 km/h annähernd durch eine quadratische Funktion der Form $K(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ beschrieben werden.

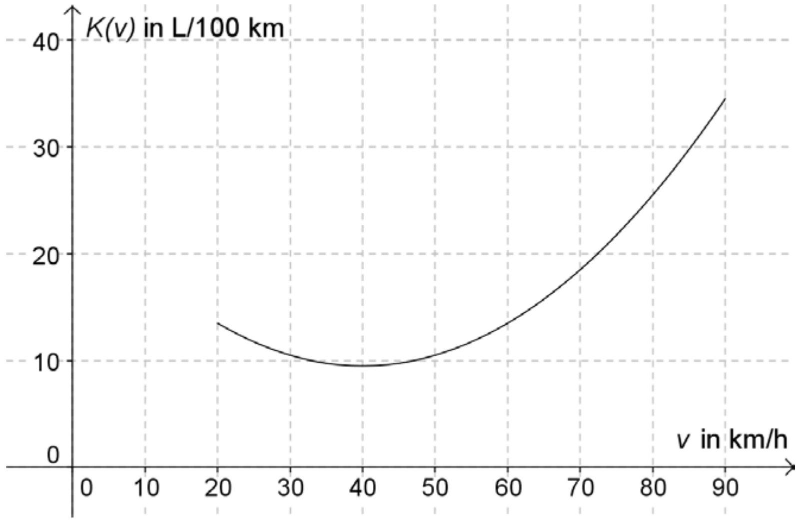
– Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Berechnung der Koeffizienten a, b und c auf.
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung $K(v)$.

b) Der Kraftstoffverbrauch eines Kleinlastwagens lässt sich im Intervall [30 km/h; 70 km/h] näherungsweise durch folgende Funktion K beschreiben:

$K(v) = 0{,}005 \cdot v^2 - 0{,}4 \cdot v + 14{,}3$

– Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, bei der der Kraftstoffverbrauch minimal ist.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Kraftstoffverbrauch eines Kleintransporters in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beim Fahren mit gleichbleibendem Gang.



– Veranschaulichen Sie in der Grafik die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h.
– Lesen Sie die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei 60 km/h ab.

d) Bei einem Test eines PKWs ergaben sich für den 4. Gang folgende Verbrauchswerte:

v in km/h	80	90	100	110	120
$K(v)$ in L/100 km	5,1	5,65	6,25	6,9	7,6

Zur Beschreibung des Kraftstoffverbrauchs kann man ab 80 km/h ein Modell verwenden, bei dem der Verbrauch mit zunehmender Geschwindigkeit konstant steigt.

– Argumentieren Sie, welcher Funktionstyp diesem Modell gerecht wird.
– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Funktion mittels Regression.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

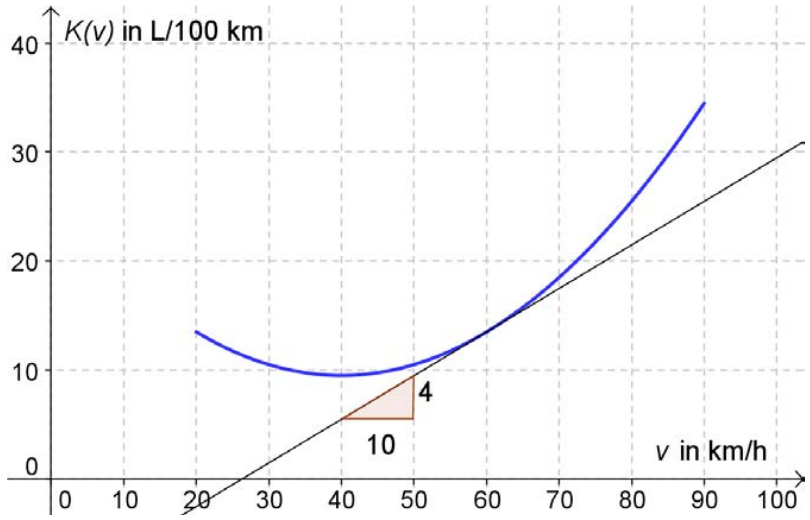
a) $10 = 30^2 \cdot a + 30 \cdot b + c$
$9{,}40 = 50^2 \cdot a + 50 \cdot b + c$
$11{,}8 = 60^2 \cdot a + 60 \cdot b + c$

$K(v) = 0{,}009 \cdot v^2 - 0{,}75 \cdot v + 24{,}4$

b) $K'(v) = 0{,}01 \cdot v - 0{,}4 = 0$
$v = 40$
$K''(v) > 0$

Bei 40 km/h ist der Kraftstoffverbrauch minimal.

c)



Die momentane Änderung des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h beträgt 0,4 L/100 km pro km/h.

Eine angemessene Ungenauigkeit wird toleriert.

d) Der passende Funktionstyp ist eine lineare Funktion, da die Steigung konstant ist.

Berechnung eines linearen Modells mittels Technologieeinsatz:

$K(v) = 0{,}0625 \cdot v + 0{,}05$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —
d) 5 Stochastik

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Produzent von landwirtschaftlichen Geräten

Aufgabennummer: B_179

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Hersteller landwirtschaftlicher Geräte entwickelt innovative Produkte.

a) Er lässt sich diese innovativen Produkte sofort patentieren. Aufgrund dieser exklusiven Produktion kann man von einer Monopolstellung ausgehen.

Für einen bestimmten Teil eines Miststreuers lässt sich die verkaufbare Stückzahl durch folgende Nachfragefunktion x ermitteln:

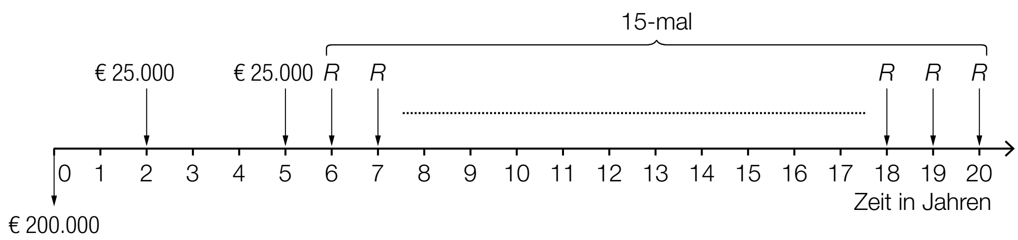
$x(p) = a \cdot p^2 + b \cdot p + c$

p … Preis eines Teils in Euro pro Stück
$x(p)$ … nachgefragte Stückzahl bei einem Preis p

Er hat ermittelt, dass bei einem Preis von € 200 pro Stück 47 980 Stück verkauft werden können.
Zudem geht man modellhaft davon aus, dass bei einem Preis von € 0 pro Stück 50 000 Stück nachgefragt werden.
Ab einem Preis von € 1.000 pro Stück gibt es keine Nachfrage mehr.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem man die Koeffizienten a, b und c berechnen kann.
– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

b) Für den Bau einer Produktionshalle muss das Unternehmen einen Kredit in Höhe von € 200.000 aufnehmen. Die folgende Grafik stellt das Angebot einer Rückzahlungsvariante dar:



– Beschreiben Sie den dargestellten Zahlungsverlauf.
– Dokumentieren Sie, wie man die Höhe der Rate R bei einem gegebenen Jahreszinssatz i berechnen kann.
– Berechnen Sie die Höhe der Rate R bei einem Zinssatz von 4 % p. a.

c) Bei der Überprüfung von bestimmten kleinen Teilen hat man bei einer Qualitätskontrolle festgestellt, dass durchschnittlich jedes 5. Stück einen Lackierungsfehler aufweist.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Schachtel von 20 Stück mindestens 3 Teile mit Lackierungsfehler zu finden sind.
– Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Anzahl von Teilen mit Lackierungsfehler für eine Schachtel, in der 5 Stück verpackt sind, grafisch dar.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $50000 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$0 = a \cdot 1000^2 + b \cdot 1000 + c$ $\quad a = -0{,}049875 \quad b = -0{,}125 \quad c = 50000$

$47980 = a \cdot 200^2 + b \cdot 200 + c$

b) Der Kredit von € 200.000 wird zurückgezahlt, indem am Ende des 2. Jahres und am Ende des 5. Jahres jeweils € 25.000 bezahlt werden und ab dem 6. Jahr bis zum 20. Jahr immer am Ende des Jahres ein gleich hoher Betrag *R* bezahlt wird (bzw. der Rest in Form einer nachschüssigen Rente mit Raten der Höhe *R* innerhalb von 15 Jahren zurückgezahlt wird).

Die Höhe der Raten *R* wird berechnet, indem man den Betrag von € 200.000 5 Jahre mit dem Zinssatz *i* verzinst. Davon zieht man die € 25.000, die zu Ende des 5. Jahres bezahlt werden, und die 3 Jahre verzinsten € 25.000, die zu Ende des 2. Jahres bezahlt werden, ab. Die Differenz stellt den Barwert einer 15-jährigen nachschüssigen Rente mit Jahresraten der Höhe *R* bei einem Zinssatz *i* dar. Die Höhe dieser Rate *R* lässt sich mittels Technologieeinsatz berechnen.

$200000 \cdot 1{,}04^5 - (25000 + 25000 \cdot 1{,}04^3) \approx 190208{,}98$ … Barwert der 15-jährigen Rente

$190208{,}98 = R \cdot \frac{1}{1{,}04^{15}} \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{0{,}04} \quad \Rightarrow \quad R \approx 17107{,}605...$

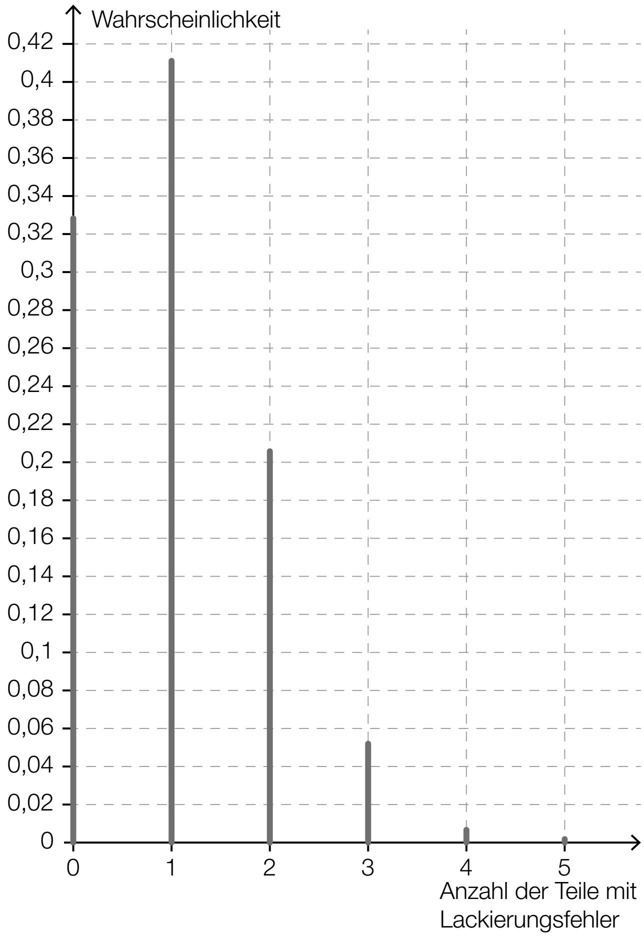
Die Höhe der Rate *R* beträgt € 17.107,61.

Ebenso könnte man den Zeitpunkt der Kreditaufnahme als ersten Bezugszeitpunkt verwenden.

$\left[200000 - \left(\frac{25000}{1{,}04^2} + \frac{25000}{1{,}04^5}\right)\right] \cdot 1{,}04^5 \approx 190\,208{,}98$ … Barwert der 15-jährigen Rente

c) $P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{20} \binom{20}{k} \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{20-k}$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ungefähr 79,4 %.



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 3
c) mittel	c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

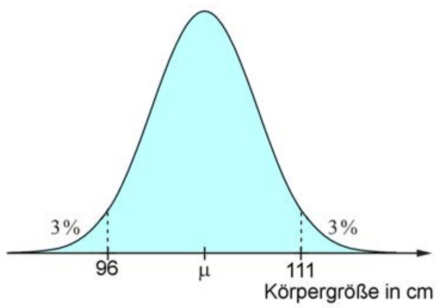
Körpergröße von Kindergartenkindern

Aufgabennummer: B_235

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

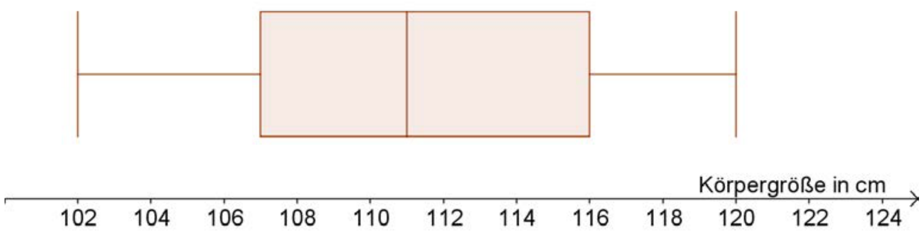
Bei den Vorsorgeuntersuchungen von Kindern wird auch die Körpergröße überprüft, um bei Auffälligkeiten rechtzeitig Therapiemaßnahmen setzen zu können.

a) Die nebenstehende Glockenkurve nach Gauß schematisiert die Größenverteilung von 4-jährigen Kindern.
Die 3 % am oberen und am unteren Ende weisen auf die auffällig großen bzw. die auffällig kleinen Kinder hin.



– Interpretieren Sie die Kurve in Bezug auf die Verteilung der Körpergröße von 4-jährigen Kindern und den Erwartungswert μ.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ.

b) Als Ergebnis der Messung der Körpergröße von 5-jährigen Kindern wurde folgender Boxplot erstellt:



– Interpretieren Sie das Diagramm im Hinblick auf die Bedeutung der 5 Kennzahlen Minimum, Maximum, Median, 1. und 3. Quartil.

c) Die gemessenen Körpergrößen der 4-jährigen Buben haben folgende Kennzahlen geliefert:

Minimum (Min):	96 cm
Maximum (Max):	112 cm
Median (Med):	103 cm
1. Quartil (Q_1):	100,5 cm
3. Quartil (Q_3):	108 cm

– Erstellen Sie mit diesen Kennzahlen einen Boxplot.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 3 % der 4-jährigen Kinder sind kleiner als 96 cm.
3 % der Kinder sind größer als 111 cm.
94 % der Kinder sind zwischen 96 cm und 111 cm groß.
Der Erwartungswert μ der Körpergröße bei 4-Jährigen liegt bei 103,5 cm,
Ermittlung von σ mittels Technologieeinsatz, z. B. durch Ablesen aus der Wertetabelle der Funktion „normalcdf“:
$\sigma = 3{,}987\ldots$
$\sigma \approx 3{,}99$ cm

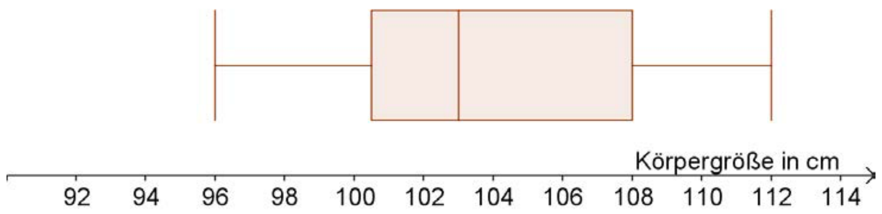
b) Der Median m liegt in der Mitte einer geordneten Liste. Mindestens 50 % der Messwerte sind $\leq m$, mindestens 50 % sind $\geq m$. Die Quartile teilen die geordnete Liste in 4 Teile.

Aus dem Diagramm kann man die folgenden Größen ablesen:

Die Körpergrößen der 5-jährigen Kinder liegen zwischen 102 und 120 cm.
Der Median legt bei 111 cm, das 1. Quartil bei 107 cm und das 3. Quartil bei 116 cm.

Der Unterschied zwischen Minimum und 1. Quartil beträgt 5 cm, zwischen 1. Quartil und Median 4 cm, zwischen Median und 3. Quartil 5 cm, zwischen 3. Quartil und Maximum 4 cm.

c)



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) leicht	b) 2
c) leicht	c) 1

Thema: Alltag

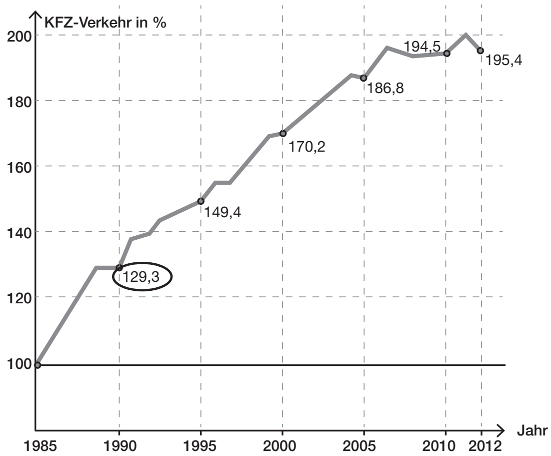
Quelle: Statistische Kennzahlen: Forschungsinstitut für Kinderernährung, Dortmund

Straßenverkehr in Tirol (2)*

Aufgabennummer: B_277		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Das Verkehrsaufkommen wird seit vielen Jahren statistisch erfasst.

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung des KFZ-Verkehrs von 1985 bis 2012 in Tirol.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der in der Grafik markierten Zahl 129,3 in diesem Sachzusammenhang.

– Erstellen Sie basierend auf den Daten der Grafik eine quadratische Regressionsfunktion. Wählen Sie dabei für das Jahr 1985 den Zeitpunkt $t = 0$.

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den KFZ-Verkehr im Jahr 2013.

b) Die Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn kann für den Zeitraum 2000 bis 2007 durch die lineare Regressionsfunktion f beschrieben werden:

$f(t) = 617 \cdot t + 28\,017$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2000
$f(t)$ ... Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten zur Zeit t

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Koeffizienten 617 in diesem Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Auf einer österreichischen Transitroute wurden im Jahr 2003 insgesamt 1 700 000 Fahrten gezählt. Im Jahr 2011 waren es bereits 2 006 000 Fahrten.

– Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Anzahl der Fahrten auf dieser Route mit einer Exponentialfunktion der Form $y(t) = a \cdot b^t$ beschreibt.

  t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2003
  $y(t)$ ... Zahl der jährlichen Fahrten zur Zeit t

– Erklären Sie den Unterschied zwischen exponentiellem und linearem Wachstum.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 129,3 bedeutet, dass der Verkehr im Jahr 1990 gegenüber dem Jahr 1985 um 29,3 % zugenommen hat.

quadratische Regression: $r(t) = -0{,}09 \cdot t^2 + 6{,}11 \cdot t + 99{,}93$
2013 entspricht $t = 28$: $r(28) = 197{,}50... \approx 197{,}5$.

Die Regressionsfunktion prognostiziert ein KFZ-Verkehrsaufkommen von rund 197,5 % bezogen auf das KFZ-Verkehrsaufkommen im Jahr 1985.

b) 617 entspricht der jährlichen Zunahme der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn.

c) $a = 1\,700\,000$

$b = \sqrt[8]{\frac{2\,006\,000}{1\,700\,000}} = 1{,}0209... \approx 1{,}021$

$y(t) = 1\,700\,000 \cdot 1{,}021^t$

Bei einem linearen Modell ist die absolute Änderung pro Zeiteinheit konstant. Bei einem exponentiellen Modell ändert sich die Größe in jeweils gleichen Zeitschritten immer um denselben Faktor.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation der markierten Zahl
1 × A: für das richtige Erstellen der Regressionsfunktion
1 × B: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Jahr 2013
b) 1 × C: für die richtige Interpretation des Koeffizienten)
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × D: für die richtige Erklärung

Küchengerät

Ein neues Küchengerät wird auf den Markt gebracht.

a) Die zeitliche Entwicklung der Verkaufszahlen dieses Küchengeräts soll durch die beschränkte Wachstumsfunktion N_1 beschrieben werden.

$N_1(t) = S \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$

t ... Zeit ab Verkaufsbeginn in Wochen
$N_1(t)$ ... insgesamt verkaufte Menge bis zur Zeit t in Stück
S ... Sättigungsmenge in Stück
λ ... positiver Parameter

1) Argumentieren Sie mathematisch anhand der Funktionsgleichung, dass gilt: $N_1(0) = 0$ *[0/1 P.]*

Die Sättigungsmenge beträgt 5 000 Stück. Eine Woche nach Verkaufsbeginn wurden bereits 350 Stück verkauft.

2) Berechnen Sie λ. *[0/1 P.]*

Vereinfacht kann die zeitliche Entwicklung der Verkaufszahlen dieses Küchengeräts für einen eingeschränkten Zeitraum auch durch die Funktion N_2 beschrieben werden.

$N_2(t) = 350 \cdot t$

t ... Zeit ab Verkaufsbeginn in Wochen
$N_2(t)$ ... insgesamt verkaufte Menge bis zur Zeit t in Stück

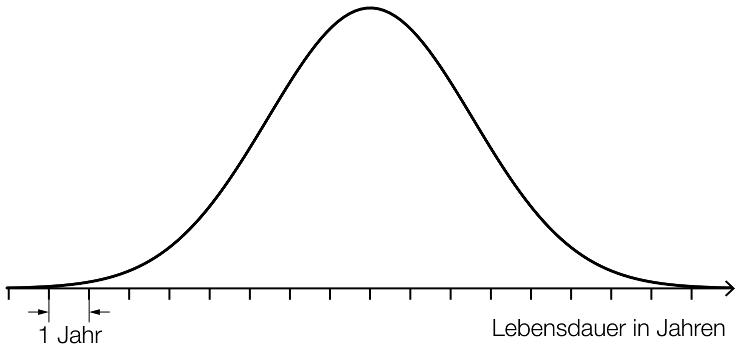
Jemand hat die Gleichungen $N_1(t) = N_2(t)$ und $N_1'(t) = N_2'(t)$ nach t gelöst.

3) Ordnen Sie den beiden Gleichungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

$N_1(t) = N_2(t)$	
$N_1'(t) = N_2'(t)$	

A	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\{0; 1\}$.
B	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall $]0; 1[$.
C	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall $[1; \infty[$.
D	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\{0\}$.

b) Die Lebensdauer des Küchengeräts wird als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 10 Jahren angenommen. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung. Der Abstand zwischen zwei Markierungen auf der Achse entspricht 1 Jahr.



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Küchengerät dieses Typs eine Lebensdauer von maximal 7 Jahren hat, beträgt 12 %.

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung diese Wahrscheinlichkeit. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung. *[0/1 P.]*

c) Eine Marktforschungsanalyse zu diesem Küchengerät hat ergeben, dass folgende Mengen bei den jeweiligen Preisen abgesetzt werden können:

abgesetzte Menge in Stück	210	420	1 430	1 760
Preis in Euro/Stück	55	45	20	15

Die Kosten für die Produktion von 1 430 Stück betragen 28.000 Euro. Diese Menge wird zu einem Preis von 20 Euro/Stück abgesetzt.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Break-even-Point bei weniger als 1 430 Stück erreicht wird. *[0/1 P.]*

Mit den Daten aus der obigen Tabelle soll mithilfe von exponentieller Regression eine Preis-Absatz-Funktion p erstellt werden.

$$p(x) = a \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

x ... abgesetzte Menge in Stück
$p(x)$ ... Preis bei der abgesetzten Menge x in Euro/Stück

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der Funktion p auf. *[0/1 P.]*

3) Begründen Sie, warum es gemäß diesem Modell keine Sättigungsmenge gibt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $N_1(0) = S \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 0}) = S \cdot (1 - 1) = 0$

a2) $S = 5000$

$N_1(1) = 350$ *oder* $5000 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 1}) = 350$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = -\ln(0{,}93) = 0{,}07257...$

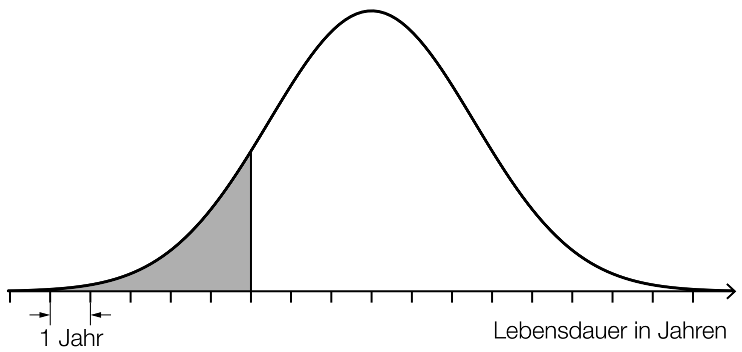
a3)

$N_1(t) = N_2(t)$	A
$N_1'(t) = N_2'(t)$	B

A	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\{0; 1\}$.
B	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall $]0; 1[$.
C	Die Lösung dieser Gleichung liegt im Intervall $[1; \infty[$.
D	Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\{0\}$.

a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von λ.
a3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

b1)



b2) X ... Lebensdauer in Jahren

$P(X \leq 7) = 0{,}12$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\sigma = 2{,}55...$ Jahre

b1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung.

c1) $20 \cdot 1\,430 - 28\,000 = 600$

Der Gewinn beim Verkauf von 1 430 Stück beträgt 600 Euro, daher wird der Break-even-Point bei weniger als 1 430 Stück erreicht.

c2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$p(x) = 64{,}7 \cdot e^{-0{,}00083 \cdot x}$ *(Parameter gerundet)*

c3) Die Sättigungsmenge ist die Nullstelle der Preis-Absatz-Funktion. Da hier ein exponentielles Modell gewählt wurde, gibt es keine Nullstelle.

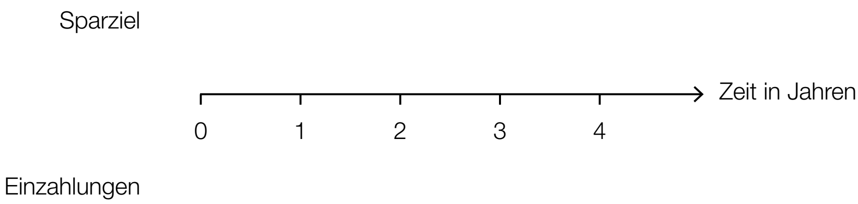
c1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von p.
c3) Ein Punkt für das richtige Begründen.

Esszimmereinrichtung

Petra möchte eine neue Esszimmereinrichtung kaufen, die € 4.000 kostet.

a) Petra hat vor 3 Jahren € 2.000 und vor 1 Jahr den Betrag X auf ein Konto eingezahlt, sodass sie nun als Sparziel den Betrag € 4.000 auf diesem Konto hat.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und Sparziel) auf der nachstehenden Zeitachse. *[0/1 P.]*



Die eingezahlten Beträge werden mit dem Jahreszinssatz i verzinst.

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe des Betrags X auf. Verwenden Sie dabei die Beträge € 4.000 und € 2.000 sowie den Jahreszinssatz i.

X = ______________________________ *[0/1 P.]*

b) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch bei einem Versandhaus über Ratenzahlung finanzieren. Aufgrund der anfallenden Zinsen betragen die Kosten dabei monatlich € 1,65 pro € 100 offener Restschuld.

Petra berechnet für diese Ratenzahlung einen Jahreszinssatz von rund 21,7 %.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob Petras Berechnung stimmt. *[0/1 P.]*

Beim Kauf der Esszimmereinrichtung um € 4.000 über Ratenzahlung müssen 12 nachschüssige Monatsraten in Höhe von jeweils € 370 und ein Restbetrag, der zeitgleich mit der letzten Monatsrate fällig ist, bezahlt werden. Der Jahreszinssatz beträgt 21,7 %.

2) Berechnen Sie die Höhe des Restbetrags. *[0/1 P.]*

Beim Kauf eines Möbelstücks mit dem Verkaufspreis W über Ratenzahlung müssen 3 nachschüssige Monatsraten der Höhe R bezahlt werden. Der zugehörige monatliche Aufzinsungsfaktor wird mit q_{12} bezeichnet.

3) Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$W = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = R + \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2}$	☐
$W = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☐
$W \cdot q_{12}^3 = R \cdot q_{12}^3 + R \cdot q_{12}^2 + R \cdot q_{12}$	☐

c) Petra kann die Esszimmereinrichtung auch über einen Kredit mit einer Laufzeit von 5 Jahren finanzieren.

Dazu wird eine gleichbleibende Annuität berechnet und ein Tilgungsplan erstellt.

Allerdings ist nach 5 Jahren die Schuld noch nicht vollständig getilgt, weil während der Laufzeit eine einmalige Änderung des Zinssatzes stattgefunden hat.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	–––	–––	–––	€ 4.000,00
1	€ 100,00	€ 760,99	€ 860,99	€ 3.239,01
2	€ 80,98	€ 780,01	€ 860,99	€ 2.459,00
3	€ 98,36	€ 762,63	€ 860,99	€ 1.696,37
4	€ 67,85	€ 793,13	€ 860,99	€ 903,24
5	€ 36,13	€ 824,86	€ 860,99	€ 78,38

1) Erklären Sie, woran man erkennen kann, dass während der Laufzeit eine Änderung des Zinssatzes stattgefunden hat.
[0/1 P.]

2) Berechnen Sie den Zinssatz im Jahr 5. *[0/1 P.]*

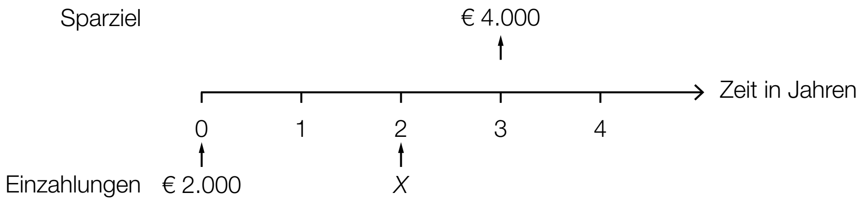
Der Kredit soll am Ende des Jahres 5 vollständig getilgt werden.
Dadurch verändert sich die letzte Zeile des obigen Tilgungsplans.

3) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die beiden fehlenden Zahlen ein. *[0/1 P.]*

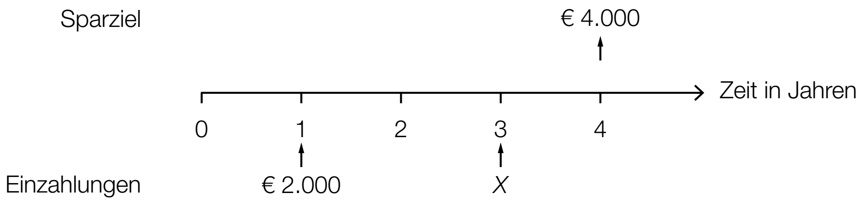
Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 36,13			€ 0,00

Möglicher Lösungsweg

a1)



oder:



a2) $X = \frac{4000}{1+i} - 2000 \cdot (1+i)^2$

a1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen auf der Zeitachse.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b1) „Monatlich € 1,65 pro € 100" bedeutet, dass der Zinssatz 1,65 % p.m. beträgt.
$i = 1{,}0165^{12} - 1 = 0{,}2169...$

Der Jahreszinssatz beträgt also rund 21,7 %.

b2) $X = 4000 \cdot 1{,}217 - 370 \cdot \frac{1{,}217^{\frac{12}{12}} - 1}{1{,}217^{\frac{1}{12}} - 1} = 2{,}053...$
Der Restbetrag hat eine Höhe von € 2,05.

b3)

$W = \frac{R}{q_{12}} + \frac{R}{q_{12}^2} + \frac{R}{q_{12}^3}$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe des Restbetrags.
b3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) Die Zinsen im Jahr 3 sind (trotz gleichbleibender Annuität) höher als im Jahr 2.

c2) $i = \frac{Z_5}{K_4} = \frac{36{,}13}{903{,}24} = 0{,}0400...$
Der Zinssatz im Jahr 5 beträgt rund 4 %.

c3)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
5	€ 36,13	**€ 903,24**	**€ 939,37**	€ 0,00

c1) Ein Punkt für das richtige Erklären.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Zinssatzes.
c3) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Zahlen.

E-Reader*

Aufgabennummer: B_224

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1310
6	1700
7	2055
8	2280
9	2470
10	2500
11	2540
12	2545

a) Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall [3; 7], so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

– Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall [3; 7].
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

b) Betrachtet man nur die ersten 3 Zahlenpaare, so zeigt sich ein annähernd exponentieller Verlauf. Dieser kann durch

$$V_1(t) = 93{,}7 \cdot 1{,}94^t$$

oder durch

$$V_2(t) = 93{,}7 \cdot e^{0{,}662688 \cdot t}$$

dargestellt werden.

t ... Zeit in Wochen
$V_1(t)$, $V_2(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

– Erklären Sie, warum beide Funktionen V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben.
– Berechnen Sie die Verdoppelungszeit in diesem exponentiellen Wachstumsmodell.

* ehemalige Klausuraufgabe

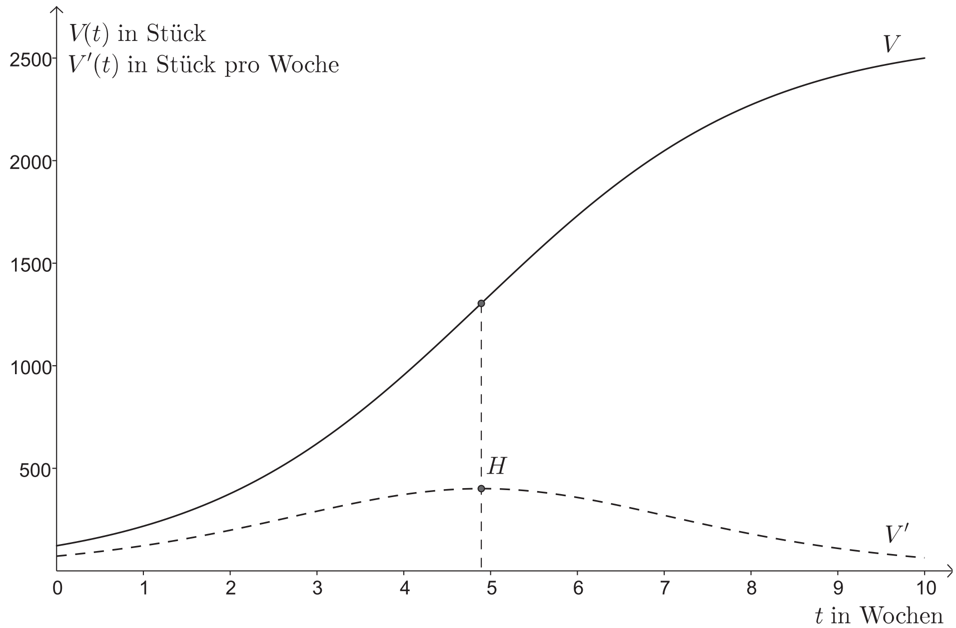
c) Betrachtet man alle 12 Zahlenpaare, so lässt sich die Entwicklung der Anzahl der insgesamt verkauften E-Reader näherungsweise durch eine logistische Funktion V beschreiben:

$$V(t) = \frac{2608}{1 + 20{,}28 \cdot e^{-0{,}6151 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen
$V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

– Begründen Sie anhand der gegebenen Funktion, warum die Funktionswerte sich mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern.
– Berechnen Sie, um wie viel der logistische Funktionswert $V(8)$ vom gegebenen Tabellenwert bei 8 Wochen abweicht.

In der nachstehenden Grafik sind die logistische Funktion V sowie deren Ableitungsfunktion V' grafisch dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der Koordinaten des Hochpunktes H der Ableitungsfunktion V' im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Regressionsgerade mittels Technologieeinsatz:

$V(t) = 348{,}1 \cdot t - 396{,}5$

t ... Zeit in Wochen
$V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

In diesem Zeitraum werden nach diesem Modell pro Woche rund 348 Stück verkauft.

b) Da $1{,}94 \approx e^{0{,}662688}$, beschreiben V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf.

Verdoppelungszeit: $T = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}94)} = 1{,}045...$
Die Verdoppelungszeit beträgt rund 1,05 Wochen.

c) Da für großes t der Wert $e^{-0{,}6151 \cdot t}$ gegen null geht, nähert sich der Nenner der Zahl 1 und $V(t)$ damit 2608.

Funktionswert nach 8 Wochen: $V(8) \approx 2272$
Abweichung vom gegebenen Tabellenwert: $2280 - 2272 = 8$

Der logistische Funktionswert weicht um ca. 8 Stück vom gegebenen Tabellenwert ab.

Die 1. Koordinate von H ist nach diesem Modell derjenige Zeitpunkt, in dessen Nähe am meisten E-Reader pro Woche verkauft wurden. Die 2. Koordinate entspricht in etwa der Anzahl der verkauften E-Reader in dieser Woche.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang

b) 1 × D: für die richtige Erklärung, warum V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben
1 × B: für die richtige Berechnung der Verdoppelungszeit mithilfe der Funktion V_1 oder V_2

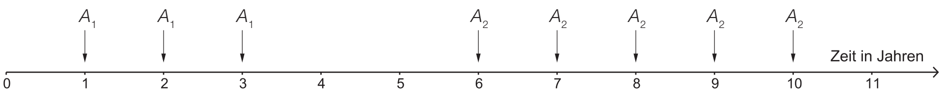
c) 1 × D: für die richtige Begründung, warum sich die Funktionswerte mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern
1 × B: für die richtige Berechnung der Abweichung
1 × C: für die richtige Interpretation der Koordinaten des Hochpunktes im Sachzusammenhang

Kreditrückzahlung*

Aufgabennummer: B_206

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für den Kauf eines Grundstücks nimmt Herr Maier einen Kredit auf.
Ursprünglich vereinbart er mit seiner Bank, diesen innerhalb von 10 Jahren in Form von gleich hohen, nachschüssigen, jährlichen Annuitäten A_1 zurückzuzahlen. Dieser Plan ändert sich jedoch.
Der tatsächliche Verlauf der vollständigen Rückzahlung von Herrn Maier ist auf der nachstehenden Zeitachse dargestellt.



a) In den ersten 3 Jahren läuft die Kredittilgung nach dem ursprünglichen Plan. Für das 3. Jahr der Rückzahlung ergeben sich folgende Einträge im Tilgungsplan:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
3	€ 3.703,15	€ 13.881,45	€ 17.584,60	€ 109.556,81

– Berechnen Sie den zugrunde liegenden jährlichen Zinssatz dieser Kredittilgung.
– Berechnen Sie die ursprüngliche Kredithöhe.

b) Fassen Sie die tatsächlich erfolgten Zahlungen wie in der oben dargestellten Zeitachse als 2 nachschüssige Renten mit Annuitäten A_1 und A_2 auf.

– Übersetzen Sie den oben dargestellten Zahlungsstrom in einen passenden Text, der den Rückzahlungsverlauf beschreibt.
– Markieren Sie jeweils die Bezugszeitpunkte für die Barwerte und die Endwerte der beiden Renten in der oben dargestellten Zeitachse.

c) Nach dem Bezahlen der Annuitäten A_1 verbleibt am Ende des 3. Jahres eine Restschuld.

– Begründen Sie, warum sich die Höhe dieser Restschuld bis zum Ende des 5. Jahres ändert.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Am Ende des 5. Jahres beträgt die verbleibende Schuld € 116.228,82.
Eine weitere Rückzahlungsvariante, die die Laufzeit verlängert hätte, wäre gewesen:
Herr Maier zahlt weiterhin jährlich Annuitäten in Höhe von € 17.584,60.
Die Bank verlangt ab dem 6. Jahr Zinsen in Höhe von 3,5 % p. a.

Die vorletzte Zeile des sich daraus ergebenden Tilgungsplans lautet:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
	€ 969,26	€ 16.615,34	€ 17.584,60	€ 11.077,75

– Bestimmen Sie, in welchem Jahr (vom Zeitpunkt der Aufnahme des Kredits) die Zahlung erfolgt, die in dieser Zeile des Tilgungsplans dargestellt ist.
– Ermitteln Sie die letzte Zeile dieses Tilgungsplans.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Höhe der ursprünglichen Schuld kann durch direktes Rückrechnen im Tilgungsplan erfolgen.

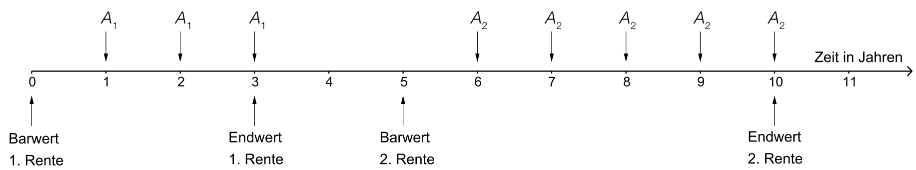
Restschuld des 2. Jahres = € 109.556,81 + € 13.881,45 = € 123.438,26

Zinssatz: $i = \frac{3\,703{,}15}{123\,438{,}26} = 0{,}030... \approx 3\ \%$

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 150.000,00
1	€ 4.500,00	€ 13.084,60	€ 17.584,60	€ 136.915,40
2	€ 4.107,46	€ 13.477,14	€ 17.584,60	€ 123.438,26
3	€ 3.703,15	€ 13.881,45	€ 17.584,60	€ 109.556,81

Die ursprüngliche Schuld kann auch direkt mithilfe der Rentenrechnung bestimmt werden.

b) Herr Maier bezahlt 3 Jahre lang nachschüssig Annuitäten in Höhe von A_1.
Im 4. und 5. Jahr leistet er keine Zahlungen, dafür bezahlt er ab dem 6. Jahr nachschüssig 5 Annuitäten in Höhe von A_2.



c) Da im 4. und 5. Jahr keine Rückzahlung erfolgt, erhöht sich die Restschuld des 3. Jahres um die Zinsen des 4. und 5. Jahres.

d) Die Rückzahlung entspricht in diesem Fall einer nachschüssigen Rente mit Annuitäten in Höhe von € 17.584,60. Der Barwert der Rente beträgt € 116.228,82.

$$116\,228{,}82 \cdot 1{,}035^n - 17\,584{,}60 \cdot \frac{1{,}035^n - 1}{0{,}035} = 11\,077{,}75$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n \approx 7$

Die angegebene Zeile des Tilgungsplans ist daher jene für das Jahr 12.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
12	€ 969,26	€ 16.615,34	€ 17.584,60	€ 11.077,75
13	€ 387,72	€ 11.077,75	€ 11.465,47	€ 0

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Zinssatzes
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Anfangsschuld
b) 1 × A: für das richtige Übersetzen des dargestellten Zahlungsflusses
   1 × C1: für das richtige Markieren des Barwerts und des Endwerts der 1. Rente
   1 × C2: für das richtige Markieren des Barwerts und des Endwerts der 2. Rente
c) 1 × D: für eine richtige Begründung
d) 1 × B1: für die richtige Bestimmung des Jahres
   1 × B2: für das richtige Ermitteln der letzten Zeile des Tilgungsplans

Marketingausgaben*

Aufgabennummer: B_304

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

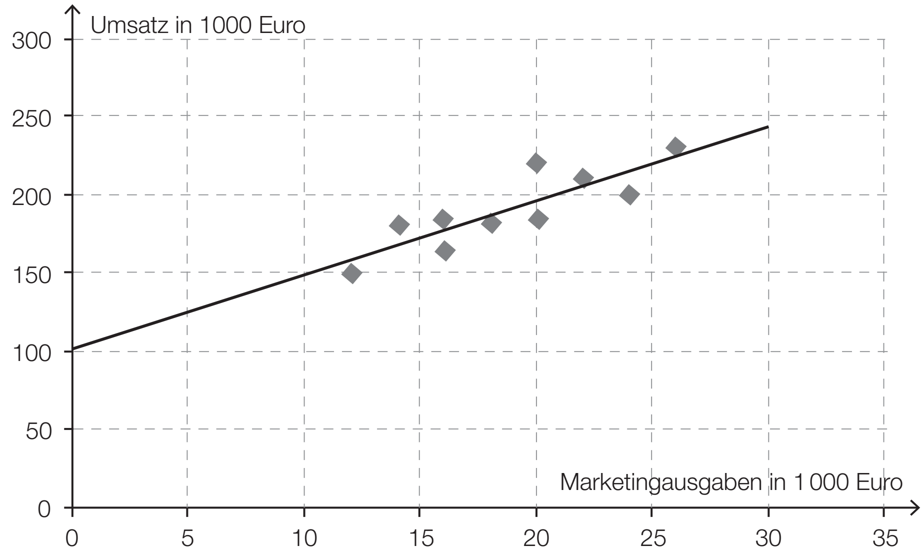
Die Marketingabteilung einer Handelskette möchte wissen, ob ihre Werbemaßnahmen wirken. Die Buchhaltung liefert Informationen über die monatlichen Umsätze. Die Umsätze von 10 aufeinanderfolgenden Monaten mit den entsprechenden Marketingausgaben liefern folgende Daten (Beträge in 1.000 Euro):

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marketingausgaben	24	16	20	26	14	16	20	12	18	22
Umsatz	200	184	220	230	180	164	185	150	182	210

a) – Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen Marketingausgaben und Umsatz.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

b) – Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Regressionsgeraden, die den Umsatz in Abhängigkeit von den Marketingausgaben beschreibt.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im Hinblick auf den Umsatz und die Marketingausgaben.

c) In der nachstehenden Grafik sind die Datenpunkte und die dazugehörige Regressionsgerade dargestellt.



– Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Umsatz ab, den die Handelskette bei Marketingausgaben von € 10.000 erwarten kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}86$

Die gegebenen Daten lassen einen positiven linearen Zusammenhang zwischen Marketingausgaben und Umsatz vermuten.

b) mittels Technologieeinsatz: $y = 4{,}786 \cdot x + 100{,}523$

Steigen die Marketingausgaben um € 1.000, dann steigt der Umsatz um ca. € 4.786.

c) ca. € 150.000
Toleranzbereich: [€ 140.000; € 160.000]

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten
1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Ablesen des Wertes

Zahnpasta*

Aufgabennummer: B_307

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) In der Marketingabteilung eines Zahnpastaproduzenten stellt man fest, dass sich bei einem Preis von € 2,00 pro Tube täglich 500 Stück absetzen lassen. Nach einer Preissenkung auf € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen.

– Beschreiben Sie, wie sich durch diese Preissenkung der Erlös ändert.

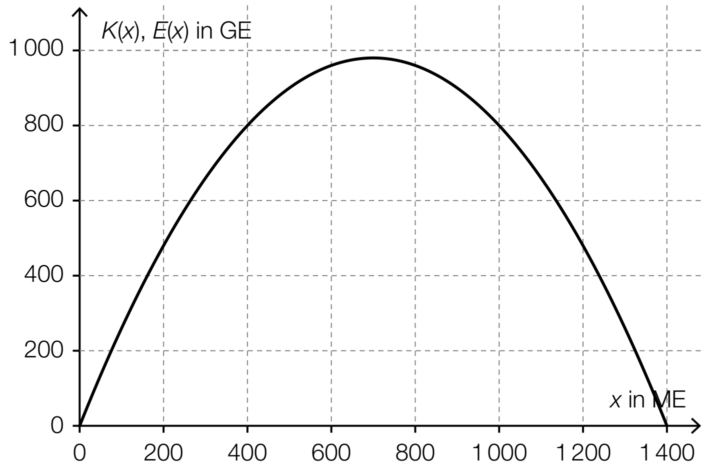
b) Bei einem Preis von € 2,00 pro Tube lassen sich täglich 500 Stück in einer bestimmten Region absetzen, bei einem Preis von € 1,80 lassen sich täglich 600 Stück absetzen. Der Höchstpreis liegt bei € 3,15.

Es soll der Zusammenhang zwischen dem Preis p in Euro und der nachgefragten Menge x in Stück durch eine quadratische Funktion $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dargestellt werden.

– Stellen Sie die Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage auf.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.
– Erklären Sie, warum die Funktion nur im Intervall zwischen null und der Sättigungsmenge ein sinnvolles Modell für diesen Zusammenhang liefert.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) In der nachstehenden Grafik ist die Erlösfunktion E eines Zahnpastaproduzenten dargestellt. Für die zugehörige lineare Kostenfunktion K gelten Fixkosten in Höhe von 400 GE und variable Stückkosten in Höhe von 0,5 GE/ME.



– Zeichnen Sie den Graphen der Kostenfunktion K in die vorgegebene Grafik ein.
– Lesen Sie aus der Grafik ab, bei welcher Menge der Gewinn maximal ist.

d) Aufgrund einer Lohnerhöhung steigen die Fixkosten.

– Begründen Sie, warum sich die gewinnmaximale Menge dadurch nicht verändert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Erlös beim Preis € 2,00: $E = 2 \cdot 500 = 1000$
Erlös beim Preis € 1,80: $E = 1{,}8 \cdot 600 = 1080$
Durch die Preissenkung steigt der Erlös.

b) $p(0) = 3{,}15$: $3{,}15 = c$
$p(500) = 2$: $2 = 500^2 \cdot a + 500 \cdot b + 3{,}15$
$p(600) = 1{,}8$: $1{,}8 = 600^2 \cdot a + 600 \cdot b + 3{,}15$

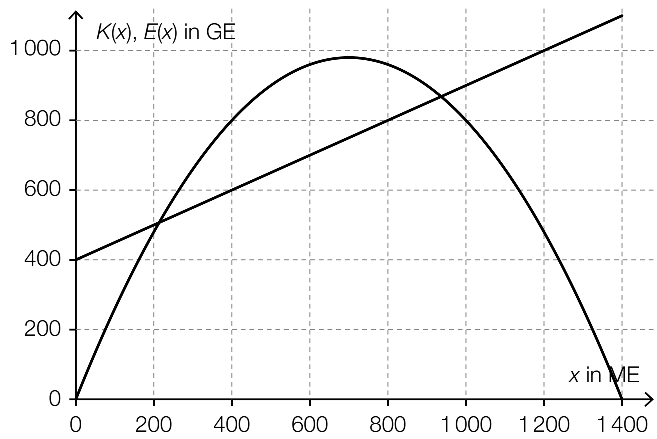
$a = 0{,}0000005$; $b = -0{,}00255$

$p(x) = 0{,}0000005 \cdot x^2 - 0{,}00255 \cdot x + 3{,}15$

Sättigungsmenge: Setze $p(x) = 0$:
$0 = 0{,}0000005 \cdot x^2 - 0{,}00255 \cdot x + 3{,}15$
$x_1 = 2100$; ($x_2 = 3000$)

Die Sättigungsmenge liegt bei 2100 Tuben täglich.
Ein sinnvolles Intervall ist [0; 2100], da der Preis nicht unter null gesenkt werden kann.

c)



gewinnmaximale Menge: ca. 600 ME (exakt 575 ME)
Toleranzbereich: [450; 650]
Achtung: $x = 700$ ist falsch!

d) Die gewinnmaximale Menge ändert sich nicht, wenn die Fixkosten geändert werden.
Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der bei der Ableitung wegfällt. Da die gewinnmaximale Menge die Nullstelle des Grenzgewinns ist, haben die Fixkosten keinen Einfluss auf die gewinnmaximale Menge.

oder

Im Gewinnmaximum sind die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös. Die Grenzkosten sind unabhängig von den Fixkosten.

oder

$G(x) = E(x) - K_v(x) - F$
$G'(x) = E'(x) - K_v'(x)$

x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME
$G(x)$ ... Gewinn in GE
$E(x)$ ... Erlös in GE
$K_v(x)$ ... variable Kosten in GE
F ... Fixkosten in GE

Der Gewinn ist maximal, wenn gilt: $E'(x) = K_v'(x)$, d. h., die Fixkosten sind irrelevant.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Erlösänderung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Bedingungen
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Funktionsgleichung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge
1 × D: für die richtige Erklärung des Intervalls

c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen der gewinnmaximalen Menge

d) 1 × D: für die richtige Begründung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Gerätekauf

Aufgabennummer: B_211

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Familie Kurz benötigt für ihre neue Wohnung Küchengeräte.

a) In den Preisverhandlungen mit einem Händler werden die nachstehend angeführten Teilzahlungsvarianten diskutiert. Bei allen Teilzahlungsvarianten wird mit dem gleichen konstanten Zinssatz gerechnet.
Die Familie möchte sich für die Teilzahlungsvariante mit dem niedrigsten Barwert entscheiden.

– Kreuzen Sie diese Teilzahlungsvariante an. *[1 aus 5]*

eine Anzahlung Z und 60 nachschüssige Monatsraten R	☐
eine Anzahlung Z und 60 vorschüssige Monatsraten R	☐
60 nachschüssige Monatsraten $R + \frac{Z}{60}$	☐
60 nachschüssige Monatsraten R und gleichzeitig mit der letzten Monatsrate eine Restzahlung Z	☐
eine Anzahlung $\frac{Z}{2}$, 60 vorschüssige Monatsraten R und eine Restzahlung $\frac{Z}{2}$ am Ende der Laufzeit	☐

b) Die Geräte können durch einen Bankkredit finanziert werden. Familie Kurz erhält folgendes Angebot:
Kreditbetrag: € 10.000
Bearbeitungsgebühr: 2 % des Kreditbetrags (bei Kreditabschluss fällig)
60 nachschüssige Monatsraten zu je € 185

– Berechnen Sie den zugrunde liegenden jährlichen Effektivzinssatz dieses Angebots.

c) Familie Kurz vereinbart mit ihrer Bank einen Kredit in Höhe von € 10.000. Dieser ist durch nachschüssige Monatsraten innerhalb von 5 Jahren zu begleichen. Die Bank bietet einen Zinssatz von 0,25 % p.m. an.
Nach Zahlung von 12 Raten werden ein halbes Jahr keine Rückzahlungen geleistet. Anschließend werden die vereinbarten Raten weiterbezahlt. Die versäumten Zahlungen werden durch eine Sonderzahlung 3 Jahre nach Kreditaufnahme abgegolten.

– Stellen Sie den Verlauf der Kreditrückzahlung auf einer Zeitachse dar.
– Berechnen Sie die Höhe der vereinbarten Raten.
– Berechnen Sie, wie hoch die Sonderzahlung sein muss, um die versäumten Zahlungen nachzuholen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

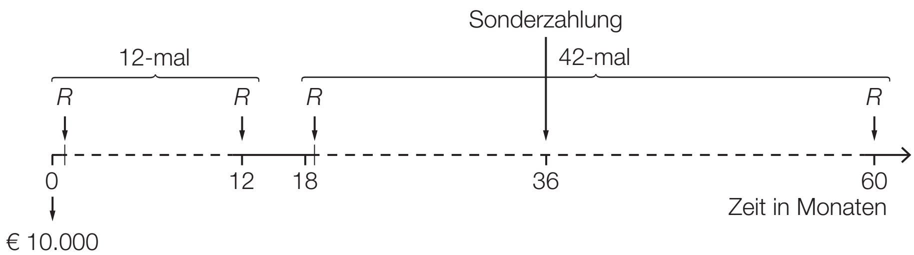
[...]	
[...]	
[...]	
60 nachschüssige Monatsraten *R* und gleichzeitig mit der letzten Monatsrate eine Restzahlung *Z*	☒
[...]	

b) $10\,000 = 200 + 185 \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$q_{12} = 1{,}00417...$
$q = (q_{12})^{12} = 1{,}05130...$

effektiver Jahreszinssatz:
$i \approx 5{,}13\ \%$

c)



vereinbarte Ratenhöhe *R*:
$10\,000 = R \cdot \frac{1{,}0025^{60} - 1}{0{,}0025} \cdot \frac{1}{1{,}0025^{60}} \quad \Rightarrow \quad R \approx € 179{,}69$

Wert der 6 versäumten Monatsraten zum Zeitpunkt 18: $179{,}69 \cdot \frac{1{,}0025^{6} - 1}{0{,}0025} = 1\,084{,}90$
aufgezinst zum Zeitpunkt 36: $1\,084{,}90 \cdot 1{,}0025^{18} \approx 1\,134{,}77$

Die Sonderzahlung muss € 1.134,77 betragen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 1
b) leicht	b) 1
c) mittel	c) 4

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Kredit für einen Wohnungskauf*

Aufgabennummer: B_223

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Frau Simon möchte eine Wohnung kaufen. Sie benötigt dazu einen Kredit und holt deswegen bei Banken verschiedene Angebote ein.

a) Bank *A* bietet Frau Simon einen Kredit zu einem Zinssatz von 3 % p. a. an. Die monatlichen Raten sind nach Auszahlung der Kreditsumme von € 120.000 jeweils am Ende jedes Monats fällig. Die Kreditlaufzeit beträgt 20 Jahre. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

- Ermitteln Sie den zu 3 % p. a. äquivalenten Monatszinssatz.
- Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

b) Bank *B* bietet Frau Simon einen Kredit über € 120.000 an, der in 15 Jahren durch nachschüssige Quartalsraten in Höhe von je € 2.650 zu tilgen ist. Eine Bearbeitungsgebühr von 2 % der Kreditsumme wird bei Auszahlung des Kredits von der Kreditsumme abgezogen. (Weitere Spesen und Gebühren sind in den Raten berücksichtigt.)

- Berechnen Sie den effektiven Jahreszinssatz dieses Kredits.

c) Bank *C* bietet Frau Simon einen Kredit über € 120.000 an, den sie durch nachschüssige Quartalsraten mit dem Zinssatz 1 % p. q. zurückzahlen soll. Die Bank legt ihr den folgenden Tilgungsplan vor:

Quartal	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1	€ 1.200,00	€ 986,26	€ 2.186,26	€ 119.013,74

- Dokumentieren Sie, wie der Zinssatz 1 % p. q. aus dem Tilgungsplan ermittelt werden kann.
- Berechnen Sie die Laufzeit des Kredits.
- Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Zinsanteil, Tilgungsanteil und Annuität.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Die jährliche Annuität A eines Kredits kann mittels verschiedener Formeln berechnet werden.

Eine Formel lautet:

$$A = K_0 \cdot \frac{i \cdot q^n}{q^n - 1}$$

Eine andere Formel lautet:

$$A = K_0 \cdot \frac{i}{1 - q^{-n}}$$

K_0 ... Kreditsumme
i ... Jahreszinssatz
n ... Laufzeit in Jahren

– Geben Sie an, was q in diesem Sachzusammenhang bedeutet.
– Zeigen Sie, dass diese beiden Formeln gleichwertig sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}03} - 1 = 0{,}002466... \approx 0{,}247\ \%$
Der Monatszinssatz beträgt rund 0,247 %.

monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_{12} = i_{12} + 1$

Barwertformel für nachschüssige Monatsrente:

$$120\,000 = R \cdot \frac{q_{12}^{240} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{240}} \quad \Rightarrow \quad R \approx 663{,}088...$$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 663,09.

b) Auszahlungsbetrag: $120\,000 \cdot 0{,}98 = 117\,600$

Äquivalenzgleichung: $117\,600 = 2\,650 \cdot \frac{q_4^{60} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{60}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_4 = 1{,}010475\ldots$
$q = q_4^4 = 1{,}042566\ldots$

Die effektive Jahreszinssatz beträgt rund 4,257 %.

c) Den Quartalszinssatz erhält man, indem man den Zinsanteil im Quartal 1 durch die Kreditsumme dividiert, d. h.:

$i_4 = \frac{1\,200}{120\,000} = 0{,}01 = 1\ \%$

Die Kreditsumme ist der Barwert einer nachschüssigen Rente, die Annuität deren Rate.
Äquivalenzgleichung:

$$120\,000 = 2\,186{,}26 \cdot \frac{1{,}01^n - 1}{0{,}01} \cdot \frac{1}{1{,}01^n}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 80{,}00...$
Die Laufzeit des Kredits beträgt 80 Quartale.

Die Annuität ist die Summe von Zinsanteil und Tilgungsanteil.

d) $q = 1 + i$ ist der jährliche Aufzinsungsfaktor.

Die Formeln sind äquivalent, weil $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$.

Werden in der 1. Formel Zähler und Nenner durch q^n dividiert, erhält man die 2. Formel.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Ermittlung des Monatszinssatzes
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Monatsrate

b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Effektivzinssatzes mit dem richtigen Auszahlungsbetrag
   1 × B: für die richtige Berechnung des jährlichen Effektivzinssatzes

c) 1 × C: für die richtige Dokumentation zur Ermittlung des Quartalszinssatzes
   1 × B: für die richtige Berechnung der Laufzeit (Runden des Ergebnisses auf 81 Quartale ebenfalls zulässig)
   1 × D: für die richtige Erklärung des Zusammenhangs

d) 1 × C: für die richtige Beschreibung von q in diesem Sachzusammenhang
   1 × D: für den richtigen Nachweis der Äquivalenz der beiden Formeln

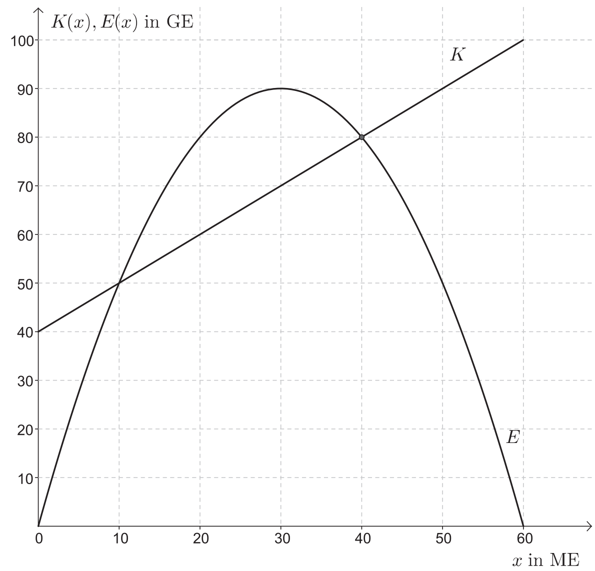
Bundes institut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Papierproduzent*

Aufgabennummer: B_281

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Papierproduzent stellt als Monopolist hochwertiges Urkundenpapier her. Die Kostenfunktion K für die Herstellung und die Erlösfunktion E für den Absatz dieses Produkts sind in der nachstehenden Grafik dargestellt.



a) – Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
– Argumentieren Sie, welches Vorzeichen der Koeffizient a dieser Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ haben muss.

b) Das Verhalten der Erlösfunktion soll für die nachgefragte Menge 40 ME untersucht werden.

– Zeichnen Sie in der obigen Grafik die Tangente an den Graphen der Erlösfunktion E an der Stelle $x = 40$ ein.
– Lesen Sie die Steigung dieser Tangente ab.
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

c) Für die Stelle des Gewinnmaximums gilt, dass die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös sind.

– Begründen Sie diese Aussage.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

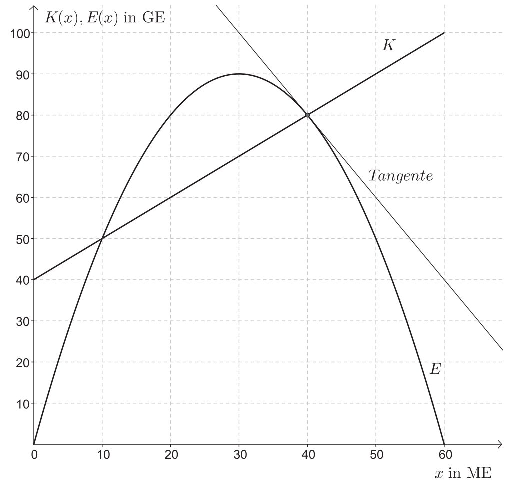
* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

Möglicher Lösungsweg

a) Kostenfunktion: $K(x) = x + 40$

Erlösfunktion: Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph der Erlösfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist.

b)



Steigung der Tangente: $k = -2$
Toleranzbereich: $[-2{,}5; -1{,}5]$

Wird die Absatzmenge um 1 ME erhöht, sinkt der Erlös näherungsweise um 2 GE.

c) $G(x) = E(x) - K(x)$
An der Stelle des Gewinnmaximums gilt: $G'(x) = 0$.
$G'(x) = 0 = E'(x) - K'(x)$
Also: $E'(x) = K'(x)$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
   1 × D: für die richtige Argumentation zum Vorzeichen des Koeffizienten a

b) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der Tangente
   1 × C1: für das richtige Ablesen der Steigung der Tangente im Toleranzbereich [–2,5; –1,5]
   1 × C2: für die richtige Interpretation der Steigung der Tangente im Sachzusammenhang

c) 1 × D: für die richtige Begründung

Konditorei*

Aufgabennummer: B_317

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) In einer Konditorei können täglich höchstens 10 Sachertorten und höchstens 25 Topfentorten hergestellt werden. Es werden täglich mindestens doppelt so viele Topfentorten wie Sachertorten hergestellt.

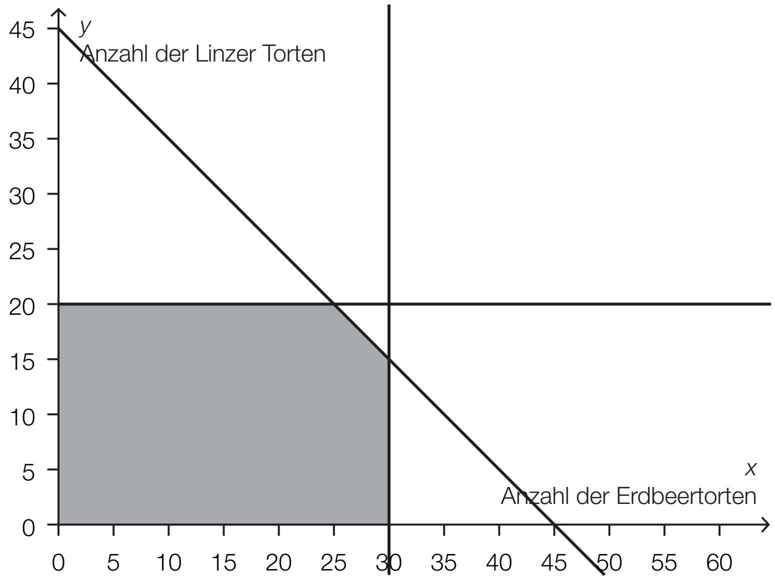
– Übertragen Sie diesen Sachverhalt in ein lineares Ungleichungssystem.

b) Die Fertigungskosten für eine Sachertorte betragen € 10,50, jene für eine Topfentorte € 8,00.
Der Verkaufspreis für eine Sachertorte beträgt € 34,00, jener für eine Topfentorte € 26,00.
Es werden x Sachertorten und y Topfentorten verkauft.

– Stellen Sie die Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns auf.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die tägliche Produktion von Erdbeertorten und Linzer Torten dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung die 5 Ungleichungen ab, die den Lösungsbereich beschreiben.

Die Zielfunktion Z beschreibt den täglichen Gewinn beim Verkauf von x Erdbeertorten und y Linzer Torten in Euro:

$Z(x, y) = 25 \cdot x + 20 \cdot y$

x ... Anzahl der verkauften Erdbeertorten
y ... Anzahl der verkauften Linzer Torten

– Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

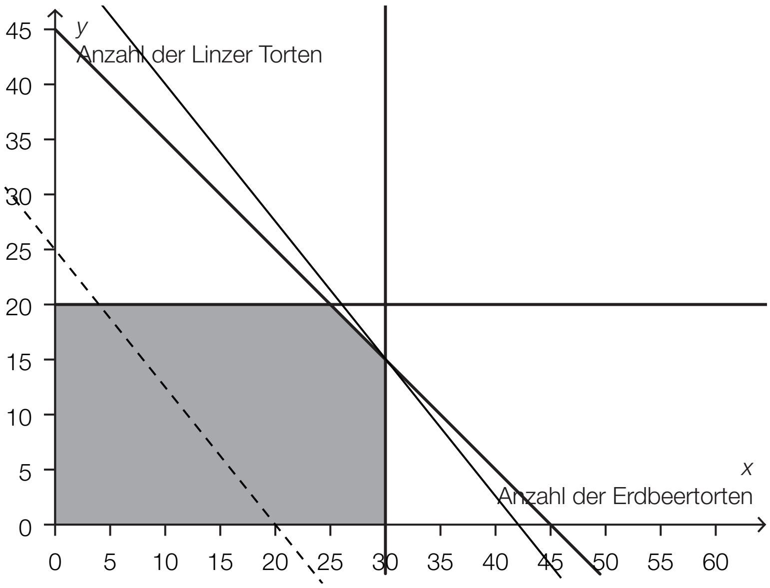
a) x … Anzahl der Sachertorten
y … Anzahl der Topfentorten

(1) $x \leq 10$
(2) $y \leq 25$
(3) $y \geq 2 \cdot x$

Nichtnegativitätsbedingungen: $x \geq 0$, $y \geq 0$
Es ist nicht gefordert, die Nichtnegativitätsbedingungen anzugeben.

b) $Z(x, y) = 23{,}5 \cdot x + 18 \cdot y$

c) (1) $x \geq 0$
(2) $y \geq 0$
(3) $x \leq 30$
(4) $y \leq 20$
(5) $x + y \leq 45$



gewinnmaximierende Menge: $(30|15)$

$25 \cdot 30 + 20 \cdot 15 = 1\,050$
Der maximale Gewinn beträgt € 1.050 pro Tag.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der beiden Ungleichungen (1) und (2)
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Ungleichung (3)
Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist nicht erforderlich.

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns

c) 1 × C1: für das richtige Ablesen der 4 Ungleichungen (1) bis (4)
1 × C2: für das richtige Ablesen von Ungleichung (5)
1 × B1: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
1 × B2: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns

LED-Lampen (2)*

Aufgabennummer: B_315

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

a) LED-Lampen sind derzeit wesentlich teurer als Glühlampen, zeichnen sich aber durch eine höhere Lebensdauer und durch eine höhere Energieeffizienz aus.

Für eine Lampe, die 1000 Stunden pro Jahr in Betrieb ist, kann als Leuchtmittel eine Glühlampe oder eine LED-Lampe verwendet werden. Um die dabei anfallenden Kosten zu vergleichen, werden die folgenden Daten benötigt:

	Glühlampe	LED-Lampe
Preis pro Stück	€ 0,75	€ 15,00
Lebensdauer	1 Jahr	25 Jahre
Energiekosten pro Jahr	€ 5	€ 0,60

– Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für diesen Kostenvergleich.

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung …	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1		
2		
3		
4		
5		

– Lesen Sie aus dieser Tabelle ab, nach wie vielen ganzen Jahren die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer sind als bei der Verwendung von Glühlampen.

* ehemalige Klausuraufgabe

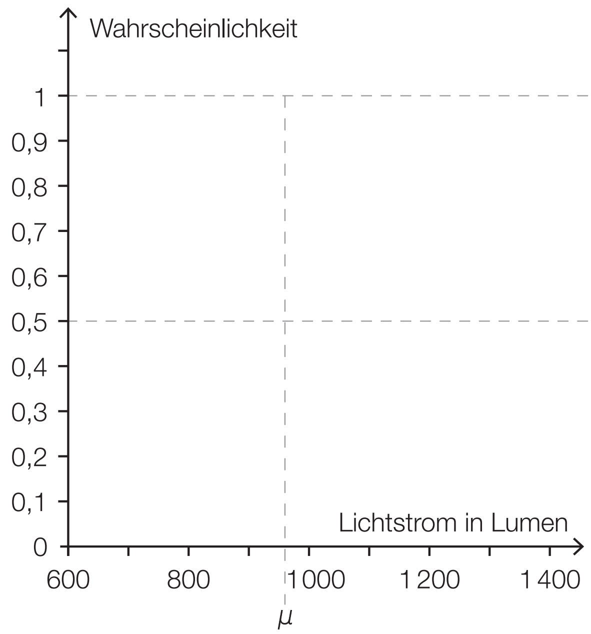
b) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden. In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen mit verschiedenem Lichtstrom der jeweilige Preis angegeben.

Lichtstrom in Lumen	136	300	400	600	800
Preis in Euro / Stück	6,00	9,90	9,99	16,50	23,40

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Der Preis soll in Abhängigkeit vom Lichtstrom beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion denjenigen Preis, der für eine LED-Lampe mit einem Lichtstrom von 500 Lumen zu erwarten ist.

c) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ angenommen werden. Dabei liegen 95 % der Lichtstromwerte in dem um μ symmetrischen Intervall von 780 Lumen bis 1 140 Lumen.

– Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
– Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in der nachstehenden Abbildung.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 12-Watt-LED-Lampe einen Lichtstrom von bis zu 900 Lumen hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung …	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1	€ 5,75	€ 15,60
2	€ 11,50	€ 16,20
3	€ 17,25	€ 16,80
4	€ 23,00	€ 17,40
5	€ 28,75	€ 18,00

Nach 3 Jahren sind die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer als bei der Verwendung von Glühlampen.

b) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 0{,}026 \cdot x + 1{,}534$

x … Lichtstrom in Lumen
$f(x)$ … Preis bei einem Lichtstrom x in Euro/Stück

Die Steigung 0,026 besagt, dass pro zusätzlichem Lumen Lichtstrom der Preis um € 0,026 steigt.

$f(500) \approx 14{,}53$
Für eine LED-Lampe mit 500 Lumen ist ein Preis von € 14,53 pro Stück zu erwarten.

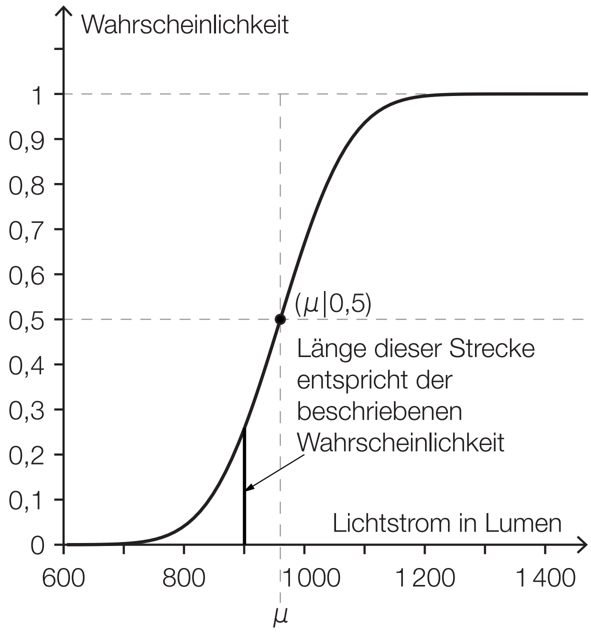
c) $\mu = \frac{780 + 1\,140}{2} = 960$

Der Erwartungswert beträgt 960 Lumen.

Aufgrund der Symmetrie gilt: $P(X \leq 1\,140) = 0{,}975$
$\phi(z) = 0{,}975 \quad \Rightarrow \quad z = 1{,}959\ldots$

$\sigma = \frac{1\,140 - 960}{1{,}959\ldots} = 91{,}8\ldots$

Die Standardabweichung beträgt rund 92 Lumen.



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
1 × C: für das richtige Ablesen aus der Tabelle

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung des Preises pro Stück

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung
1 × A1: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der Abbildung

Grenzkosten*

Aufgabennummer: B_316

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Betrieb erhebt die Grenzkosten für unterschiedliche Produkte.

a) Für eine quadratische Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)	20	50	60
Grenzkosten in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME)	1 060	7 120	10 340

– Interpretieren Sie den Grenzkostenwert 1 060 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Grenzkostenfunktion auf.

b) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Produkts gilt:

$K'(x) = 0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15$

x … Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei x ME in GE/ME

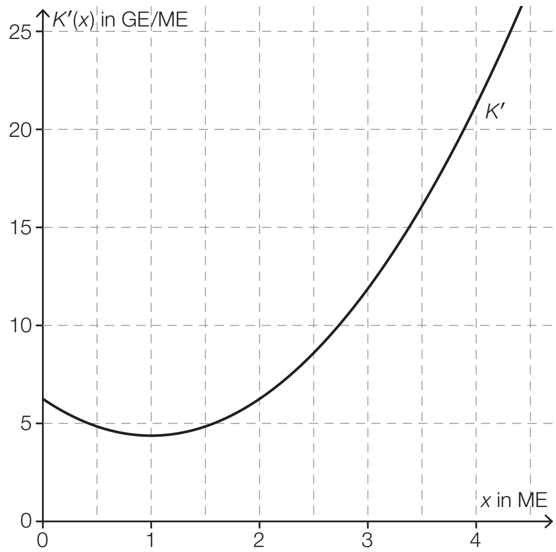
– Berechnen Sie die Kostenkehre.

Bei einer Produktionsmenge von 35 ME betragen die Gesamtkosten 2 372,50 GE.

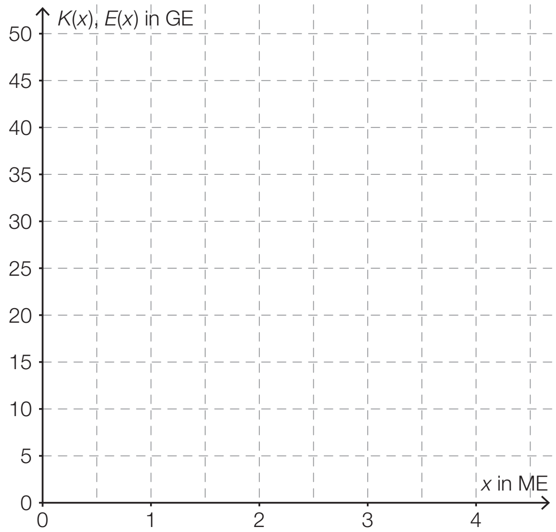
– Berechnen Sie die zugehörige Kostenfunktion K.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Produkt wird zu einem konstanten Preis von 10 GE/ME abgesetzt. Die Fixkosten betragen 5 GE. Die obere Gewinngrenze beträgt 4 ME.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Grenzkostenfunktion K' dieses Produkts.



– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Erlösfunktion E im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein.
– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der zugehörigen Kostenfunktion K im Intervall [0; 4] in der unten stehenden Abbildung ein.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Grenzkostenwert 1060 GE/ME bedeutet, dass bei einer Produktionsmenge von 20 ME eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1060 GE führen wird.

$K'(20) = 1060$
$K'(50) = 7120$
$K'(60) = 10340$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$

b) $K''(x) = 0{,}6 \cdot x - 4$

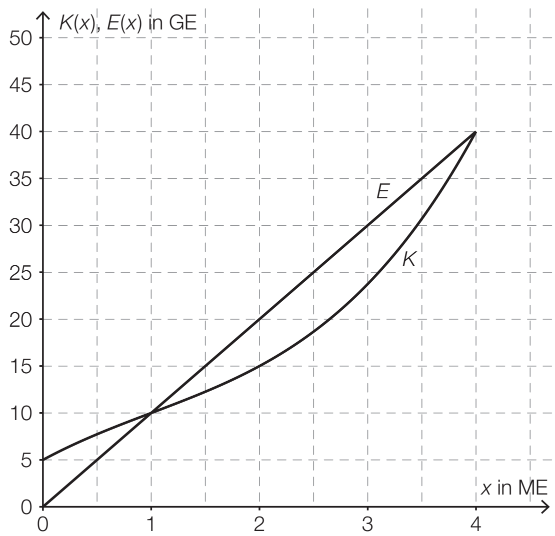
$0 = 0{,}6 \cdot x - 4 \Rightarrow x = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$

Die Kostenkehre liegt bei rund 6,7 ME.

$\int (0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15)\,\mathrm{d}x = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + C$
$K(35) = 2\,372{,}50$:
$0{,}1 \cdot 35^3 - 2 \cdot 35^2 + 15 \cdot 35 + C = 2372{,}50 \Rightarrow C = 10$

$K(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 10$

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation der Grenzkosten im gegebenen Sachzusammenhang
   1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

b) 1 x B1: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
   1 x A: für den richtigen Ansatz zum Aufstellen der Funktionsgleichung der Kostenfunktion K
   1 x B2: für die richtige Berechnung der Integrationskonstanten

c) 1 x A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen von E im Intervall [0; 4]
   1 x A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen von K im Intervall [0; 4] als ertragsgesetzliche Kostenfunktion mit Fixkosten 5 GE und oberer Gewinngrenze 4 ME
   1 x A3: für die richtige Darstellung der Extremstelle der Grenzkostenfunktion als Wendepunkt des Graphen der Kostenfunktion an der Stelle $x = 1$

Schwangerschaft*

Aufgabennummer: B_322

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Nach der Ausbildung der inneren Organe verwendet man für das ungeborene Kind den Begriff *Fötus*.

a) Bei Ultraschalluntersuchungen wird die Scheitel-Steiß-Länge (SSL) von Föten bestimmt. In der nachstehenden Tabelle sind die durchschnittlichen Längen in Zentimetern (cm) in der jeweiligen Schwangerschaftswoche angegeben:

Schwangerschaftswoche	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SSL in cm	4,1	5,4	7,4	8,7	10,1	11,9	13,3	14,1	14,8	16,2

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die Länge soll in Abhängigkeit von der Schwangerschaftswoche beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang.

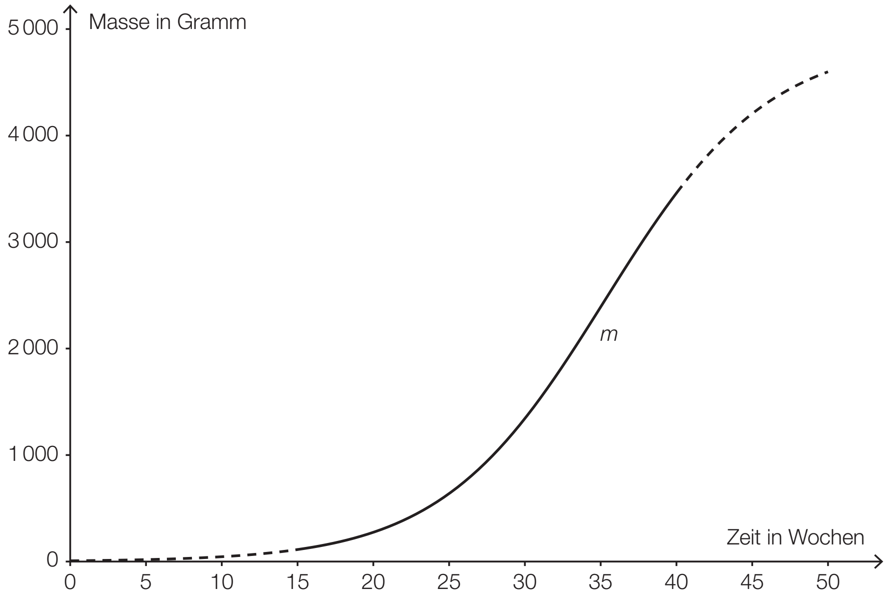
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die zunehmende Masse eines Fötus kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{4\,900}{1 + 681 \cdot e^{-0{,}185 \cdot t}} \quad \text{mit} \quad 15 \leq t \leq 40$$

t … Zeit seit Beginn der Schwangerschaft in Wochen
$m(t)$ … Masse des Fötus zur Zeit t in Gramm (g)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



– Berechnen Sie die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$.
– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Massezunahme des Fötus am größten ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$y = 1{,}36 \cdot x - 10{,}42$

Gemäß dem Modell nimmt die Scheitel-Steiß-Länge durchschnittlich rund 1,36 cm pro Woche zu.

b) $m(25) = 638{,}3\ldots \approx 638$
Die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$ beträgt rund 638 g.

Die stärkste Massezunahme erfolgt an der Wendestelle $m''(t) = 0$.
Lösung dieser Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 35{,}26\ldots \approx 35{,}3$
Nach etwa 35,3 Wochen ist die Massezunahme am größten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Masse des Fötus
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Zeitpunktes, zu dem die Massezunahme am größten ist (In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Wendestelle die größte Massezunahme vorliegt. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)

Sportartikel*

Aufgabennummer: B_348

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Für einen Sportartikel lassen sich die Produktionskosten mithilfe der linearen Funktion K beschreiben:

$K(x) = 25 \cdot x + 300$

x ... Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Die Kapazitätsgrenze liegt dabei bei 50 ME.
Das Produkt kann zu einem Preis von 40 GE/ME verkauft werden.

– Erklären Sie, warum der maximale Gewinn hier nicht mithilfe der Differenzialrechnung ermittelt werden kann.
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

b) Die Fixkosten für die Erzeugung eines bestimmten Sportartikels betragen 2 900 GE. Die Kostenkehre liegt bei 5 ME. Die Gesamtkosten bei einer Produktionsmenge von 5 ME betragen 3 100 GE. Bei einer Produktionsmenge von 9 ME betragen die Gesamtkosten 3 252,80 GE.
Der Kostenverlauf soll mithilfe einer Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Kostenfunktion.
– Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Kostenfunktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

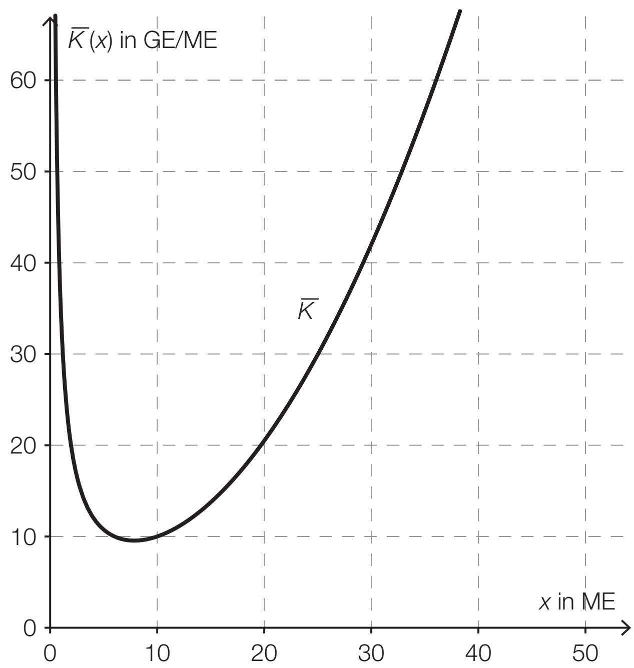
c) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Sportartikels gilt:

$K'(x) = 0{,}15 \cdot x^2 - 0{,}6 \cdot x + 5$

Die Fixkosten betragen 30 GE.

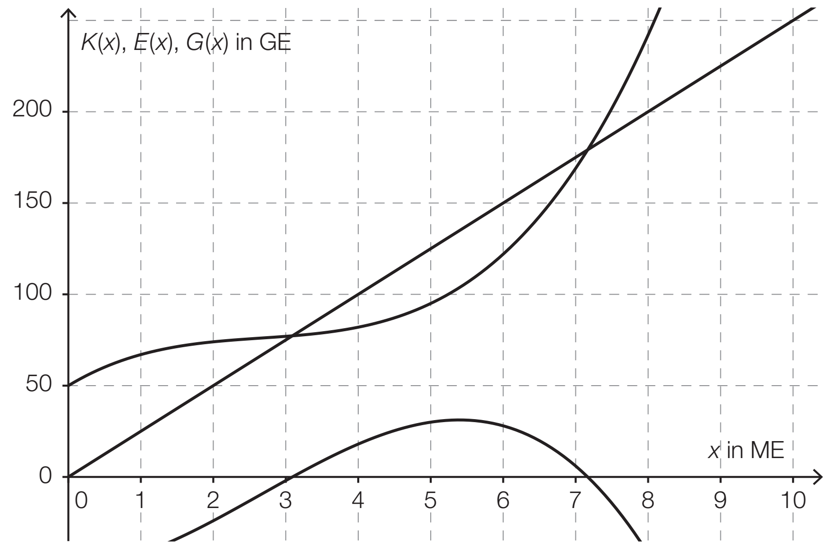
– Ermitteln Sie die zugehörige Kostenfunktion K.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Stückkostenfunktion $\overline{K}$ dargestellt.



– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.

d) Die Graphen einer Kostenfunktion K, einer Erlösfunktion E und der zugehörigen Gewinnfunktion G sind im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Beschriften Sie im obigen Diagramm diese 3 dargestellten Graphen.
– Stellen Sie die Gleichung der Erlösfunktion E mithilfe des Diagramms auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Gewinnfunktion ist im gegebenen Fall eine lineare Funktion mit positiver Steigung. Sie nimmt ihren maximalen Funktionswert am rechten Rand des Definitionsbereichs (Kapazitätsgrenze) an.

$G(x) = 40 \cdot x - (25 \cdot x + 300)$
$G(50) = 450$
Der maximale Gewinn beträgt 450 GE.

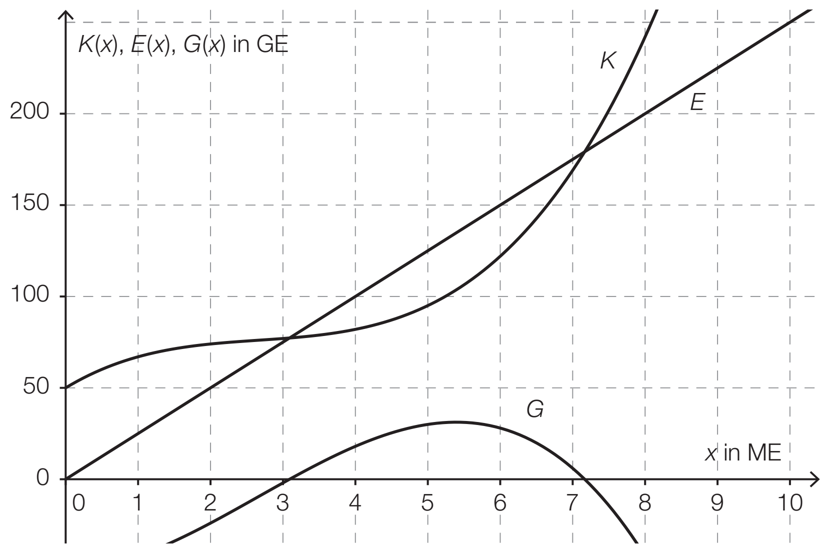
b) I. $K(0) = 2\,900$
II. $K''(5) = 0$
III. $K(5) = 3\,100$
IV. $K(9) = 3\,252{,}80$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}2$; $b = -3$; $c = 50$; $d = 2\,900$

c) $K(x) = \int K'(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
$K(0) = 30 \;\Rightarrow\; C = 30$
$K(x) = 0{,}05 \cdot x^3 - 0{,}3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 30$

Betriebsoptimum: rund 8 ME
Toleranzbereich: [7 ME; 9 ME]

d)



$E(x) = 25 \cdot x$

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung
(Auch eine Argumentation, dass die Gewinnfunktion keine lokalen Extremstellen hat, an denen die Tangentensteigung null ist, ist zulässig.)
1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns

b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Information zur Kostenkehre
1 × A2: für das richtige Aufstellen der 3 Gleichungen mithilfe der Informationen zu den Kosten
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

c) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [7 ME; 9 ME]

d) 1 × C: für die richtige Beschriftung der 3 dargestellten Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Renovierungskredit*

Aufgabennummer: B_349

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Frau Eberharter muss für die Renovierung ihrer Wohnung einen Kredit in Höhe von € 30.000 aufnehmen. Dazu holt sie verschiedene Angebote von Privatpersonen und von Banken ein. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

a) Eine Bekannte bietet Frau Eberharter privat einen Kredit in Höhe von € 30.000 zu einem Zinssatz von 2 % p. a. an.

Frau Eberharter soll diesen Kredit folgendermaßen zurückzahlen:
€ 8.000 nach einem Jahr und 2 gleich hohe Raten, eine davon nach 3 Jahren und die andere nach 4 Jahren.

– Stellen Sie diese Zahlungen auf einer Zeitachse dar.
– Berechnen Sie die Ratenhöhe.
– Erklären Sie, warum sich diese Ratenhöhe verringert, wenn beide Raten früher bezahlt werden.

b) Frau Eberharter recherchiert im Internet Angebote von Banken für Kredite in Höhe von € 30.000 mit einer Laufzeit von 60 Monaten.

Eine Bank bietet einen Kredit mit einer monatlichen Rate in Höhe von € 559,11 bei einem Zinssatz von 4,58 % p. a.

– Ermitteln Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz.
– Überprüfen Sie nachweislich, ob es sich um eine vorschüssige oder eine nachschüssige Ratenzahlung handelt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine Bank bietet Frau Eberharter einen Kredit in Höhe von € 30.000 an, den sie in 10 nachschüssigen Halbjahresraten in Höhe von je € 3.480 zurückzahlen muss.

Für diesen Kredit kann Frau Eberharter einen Annuitätenzuschuss bei der Landesregierung beantragen, d.h., 10 % jeder Halbjahresrate werden vom Land übernommen.

– Berechnen Sie die Höhe der Halbjahresraten, die Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses bezahlen muss.
– Ermitteln Sie den effektiven Jahreszinssatz, der sich für Frau Eberharter unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses ergibt.
– Ermitteln Sie die Höhe desjenigen Annuitätenzuschusses in Euro, bei dem sich für Frau Eberharter ein effektiver Jahreszinssatz von null Prozent ergeben würde.

d) Frau Eberharter vereinbart für einen Kredit mit einer Bank Sonderkonditionen. Die Bank erstellt dazu einen Tilgungsplan. Ein Auszug dieses Tilgungsplans ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

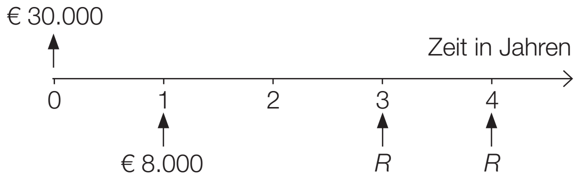
Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 30.000,00
1	€ 660,00	€ –660,00	€ 0,00	€ 30.660,00
2	€ 674,52	€ 0,00	€ 674,52	€ 30.660,00
3	€ 674,52	€ 5.325,48	€ 6.000,00	€ 25.334,52

– Interpretieren Sie die Bedeutung der beiden auftretenden Beträge in Höhe von € 0,00 im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



$30\,000 = 8\,000 \cdot 1{,}02^{-1} + R \cdot 1{,}02^{-3} + R \cdot 1{,}02^{-4}$
$R = 11\,872{,}921\ldots$

Die Ratenhöhe beträgt € 11.872,92.

Wenn die Raten früher bezahlt werden, wird die ausstehende Kreditsumme über eine kürzere Zeitspanne verzinst. Daher sind die Raten niedriger.

b) $i_{12} = \sqrt[12]{1 + 0{,}0458} - 1 = 0{,}0037388\ldots$

Der Monatszinssatz beträgt rund 0,3739 %.

$q_{12} = 1 + i_{12}$

$B_{\text{nach}} = 559{,}11 \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{60}} = 30\,000{,}132\ldots$

$B_{\text{vor}} = B_{\text{nach}} \cdot q_{12} = 30\,112{,}297\ldots$

Es handelt sich um eine nachschüssige Ratenzahlung, da der Barwert der Raten in diesem Fall der Kreditsumme entspricht.

c) $3\,480 \cdot 0{,}9 = 3\,132$

Unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses muss Frau Eberharter Halbjahresraten in Höhe von € 3.132 bezahlen.

$30\,000 = 3\,132 \cdot \frac{q_2^{10} - 1}{q_2 - 1} \cdot \frac{1}{q_2^{10}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $q_2 = 1{,}007906\ldots$
$i = (q_2)^2 - 1 = 0{,}01587\ldots \approx 1{,}59\ \%$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 1,59 %.

Die Verzinsung beträgt 0 %, wenn die Halbjahresraten $\frac{€\ 30.000}{10} = €\ 3.000$ betragen.
Dafür muss zur vereinbarten Halbjahresrate von € 3.480 ein Zuschuss in Höhe von € 480 gewährt werden.

d) Im Semester 1 erfolgt keine Rückzahlung. Im Semester 2 werden nur die anfallenden Zinsen zurückbezahlt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse
1 × B: für die richtige Berechnung der Ratenhöhe
1 × D: für die richtige Erklärung

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des zugehörigen monatlichen Zinssatzes
1 × D: für die richtige Überprüfung

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Höhe der Halbjahresraten unter Berücksichtigung des Annuitätenzuschusses
1 × B2: für das richtige Ermitteln des effektiven Jahreszinssatzes
1 × B3: für das richtige Ermitteln der Höhe des Annuitätenzuschusses

d) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

Höhenwachstum von Fichten*

Aufgabennummer: B_350

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Zusammenhang zwischen dem Alter und der durchschnittlichen Höhe von Fichten kann näherungsweise mithilfe einer Funktion h beschrieben werden:

$h(t) = a \cdot e^{-\frac{b}{t}}$

t ... Alter in Jahren
$h(t)$ ... durchschnittliche Höhe im Alter t in Metern (m)
$a > 0$ ... Parameter in m
$b > 0$ ... Parameter in Jahren

a) – Begründen Sie mathematisch, warum $e^{-\frac{b}{t}}$ für $t = 0$ nicht definiert ist.
– Begründen Sie mathematisch, warum die durchschnittliche Höhe in diesem Modell a nicht überschreiten kann.

Für einen 80-jährigen Fichtenbestand beträgt die durchschnittliche Höhe der Fichten 19,24 m. Der Parameter a ist gleich 28 m.

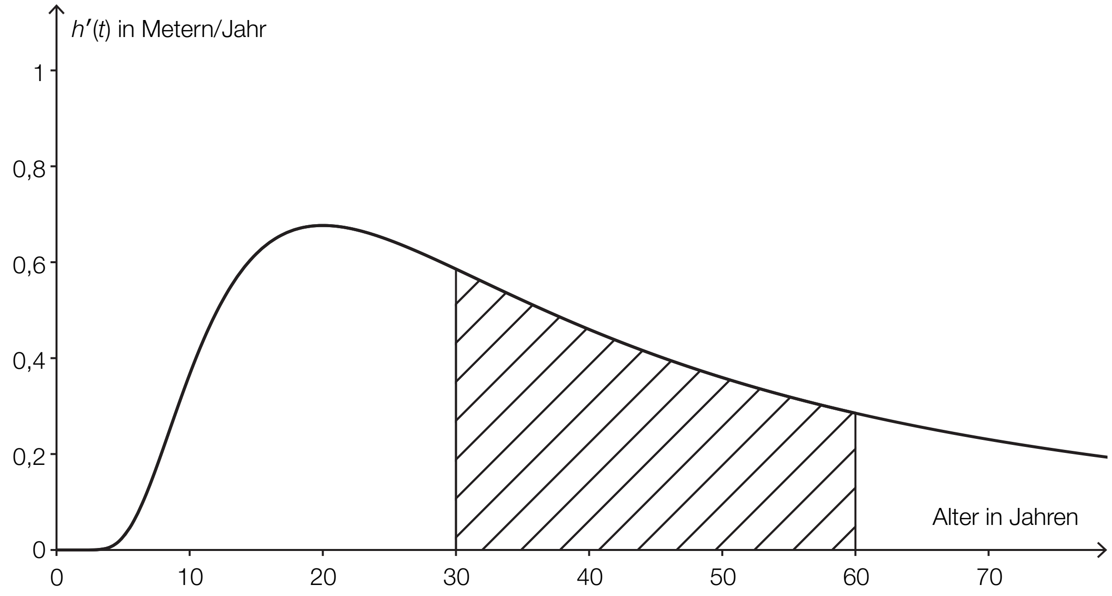
– Berechnen Sie den Parameter b.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells, um wie viel Prozent die durchschnittliche Höhe in den nächsten 20 Jahren zunehmen wird.

b) Für einen Fichtenbestand gilt: $a = 60$ m, $b = 50$ Jahre.

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h im Intervall [10; 70].
– Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe eines Fichtenbestandes $h'(t)$ dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung des Inhalts der schraffierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Durch 0 kann nicht dividiert werden.

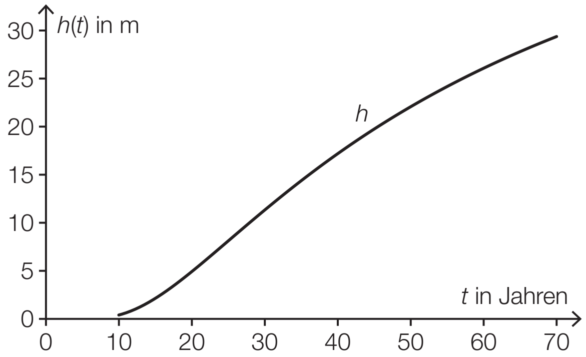
Für $b > 0$ und $t > 0$ ist $-\frac{b}{t}$ kleiner als 0 und daher $e^{-\frac{b}{t}}$ kleiner als 1. Daher gilt: $a \cdot e^{-\frac{b}{t}} < a$.

$19{,}24 = 28 \cdot e^{-\frac{b}{80}}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $b = 30{,}0\ldots \approx 30$

$\frac{h(100) - h(80)}{h(80)} = 0{,}0779\ldots \approx 7{,}8\ \%$

Gemäß diesem Modell rechnet man in den nächsten 20 Jahren mit einer Zunahme der durchschnittlichen Höhe um rund 7,8 %.

b)



$h'(t) = \frac{3000}{t^2} \cdot e^{-\frac{50}{t}}$

$h'(40) = 0{,}537\ldots \approx 0{,}54$
Die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten beträgt rund 0,54 m pro Jahr.

c) Der Inhalt der schraffierten Fläche entspricht der Zunahme der durchschnittlichen Höhe dieses Fichtenbestands zwischen $t = 30$ Jahre und $t = 60$ Jahre.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für die richtige mathematische Begründung, warum die Funktion an der Stelle $t = 0$ nicht definiert ist
   1 × D2: für die richtige mathematische Begründung, warum die durchschnittliche Höhe a nicht überschreiten kann
   1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b
   1 × B2: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

b) 1 × B1: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen im Intervall [10; 70]
   1 × B2: für die richtige Berechnung der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe von 40-jährigen Fichten

c) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

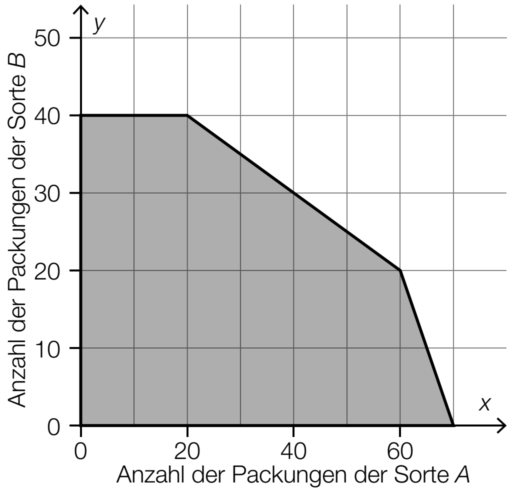
Müsli

Ein kleiner Betrieb produziert und verpackt verschiedene Sorten Müsli.

a) Es werden x Packungen *Fruchtgenuss* und y Packungen *Knabbertraum* hergestellt.
Für die Herstellung einer Packung der Sorte *Fruchtgenuss* werden 250 g Fruchtmischung und 235 g Getreideflocken benötigt.
Für die Herstellung einer Packung der Sorte *Knabbertraum* werden 175 g Fruchtmischung und 300 g Getreideflocken benötigt.
Insgesamt können maximal 22 kg Fruchtmischung und maximal 28 kg Getreideflocken verarbeitet werden.
Es sollen mindestens 20 Packungen *Knabbertraum* hergestellt werden.
Insgesamt können maximal 100 Packungen Müsli hergestellt werden.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das den obigen Sachverhalt beschreibt. *[0/1/2 P.]*

b) Der Betrieb liefert regelmäßig zwei Sorten Müsli an einen bestimmten Supermarkt. Jede Lieferung besteht aus *x* Packungen der Sorte *A* und *y* Packungen der Sorte *B*. Die zulässigen Liefermengen sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Für eine Packung der Sorte *A* beträgt der Verkaufspreis € 3,00.
Für eine Packung der Sorte *B* beträgt der Verkaufspreis € 2,50.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion *Z* zur Beschreibung des Erlöses auf.

$Z(x, y) =$ ____ *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie den maximalen Erlös in Euro. *[0/1 P.]*

Für die nächste Lieferung bestellt der Supermarkt 30 Packungen der Sorte *B*. Unter dieser Voraussetzung kann der Betrieb nur höchstens eine bestimmte Anzahl an Packungen der Sorte *A* liefern.

3) Vervollständigen Sie den nachstehenden Satz durch Eintragen der richtigen Zahl.

Der Betrieb kann unter dieser Voraussetzung höchstens __________ Packungen der Sorte *A* liefern. *[0/1 P.]*

c) Es werden zwei neue Sorten Müsli – *Knusperkorn* und *Fruchtstart* – produziert. Es werden x Packungen *Knusperkorn* und y Packungen *Fruchtstart* verkauft.

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Ungleichung aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Von *Knusperkorn* werden mindestens doppelt so viele Packungen wie von *Fruchtstart* verkauft.	
Von *Knusperkorn* werden höchstens halb so viele Packungen wie von *Fruchtstart* verkauft.	

A	$x \geq 2 \cdot y$
B	$2 \cdot x \leq y$
C	$y \leq 2 \cdot x$
D	$x \leq 2 \cdot y$

d) In einer Marktstudie wird die Nachfrage nach einer bestimmten Müslisorte untersucht.

Die Sättigungsmenge liegt bei 180 Packungen.

Bei einem Preis von 10 Euro pro Packung beträgt die Nachfrage 80 Packungen.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

$p_N(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 30$
x ... Anzahl der nachgefragten Packungen
$p_N(x)$ ... Preis bei der Nachfrage x in Euro pro Packung

1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Nachfrage bei einem Preis von 24 Euro pro Packung. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

Müsli

a1) I: $0{,}25 \cdot x + 0{,}175 \cdot y \leq 22$
II: $0{,}235 \cdot x + 0{,}3 \cdot y \leq 28$
III: $y \geq 20$
IV: $x + y \leq 100$

Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist nicht erforderlich.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichungen I und II (Einschränkung bezüglich der zur Verfügung stehenden Fruchtmischung bzw. Getreideflocken).
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichungen III und IV (Einschränkung bezüglich der Mindestanzahl von *Knabbertraum*, Einschränkung bezüglich der Gesamtanzahl).

b1) $Z(x, y) = 3 \cdot x + 2{,}5 \cdot y$

b2) $Z(0, 40) = 3 \cdot 0 + 2{,}5 \cdot 40 = 100$
$Z(20, 40) = 3 \cdot 20 + 2{,}5 \cdot 40 = 160$
$Z(60, 20) = 3 \cdot 60 + 2{,}5 \cdot 20 = 230$
$Z(70, 0) = 3 \cdot 70 + 2{,}5 \cdot 0 = 210$

Der maximale Erlös beträgt € 230.

b3) Der Betrieb kann unter dieser Voraussetzung höchstens **40** Packungen der Sorte *A* liefern.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion *Z*.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des maximalen Erlöses.
b3) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Satzes.

c1)

Von *Knusperkorn* werden mindestens doppelt so viele Packungen wie von *Fruchtstart* verkauft.	A
Von *Knusperkorn* werden höchstens halb so viele Packungen wie von *Fruchtstart* verkauft.	B

A	$x \geq 2 \cdot y$
B	$2 \cdot x \leq y$
C	$y \leq 2 \cdot x$
D	$x \leq 2 \cdot y$

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

d1) $p_N(180) = 0$
$p_N(80) = 10$

oder:

$a \cdot 180^2 + b \cdot 180 + 30 = 0$
$a \cdot 80^2 + b \cdot 80 + 30 = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{1}{1200} = 0{,}0008\dot{3}$

$b = -\frac{19}{60} = -0{,}31\dot{6}$

d2) $p_N(x) = 24$ *oder* $\frac{1}{1200} \cdot x^2 - \frac{19}{60} \cdot x + 30 = 24$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 20 \quad (x_2 = 360)$

Bei einem Preis von 24 Euro pro Packung werden 20 Packungen nachgefragt.

d1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten *a* und *b*.
d2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der nachgefragten Menge.

Gürtelproduktion*

Aufgabennummer: B_351

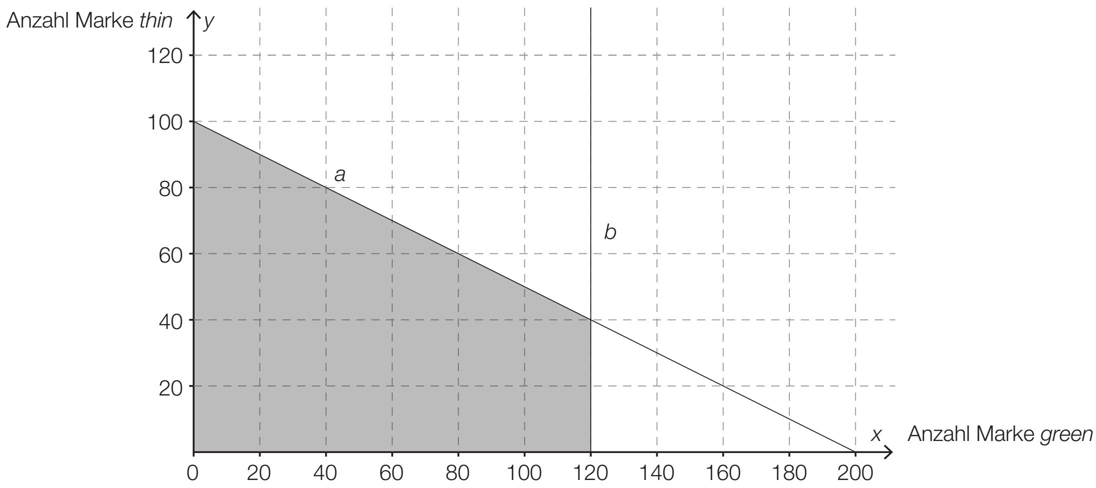
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Ledergürtel her.

a) Die Herstellung eines Gürtels der Marke *dark* dauert 5 Minuten, die eines Gürtels der Marke *small* dauert 2 Minuten. Insgesamt stehen pro Tag höchstens 600 Minuten für die Gürtelproduktion zur Verfügung.
Die Lederbelieferung erlaubt nur die Produktion von maximal 200 Gürteln pro Tag (gleich welcher Marke).

– Stellen Sie die beiden Ungleichungen auf, die diese Produktionseinschränkungen für x Gürtel der Marke *dark* und y Gürtel der Marke *small* beschreiben.

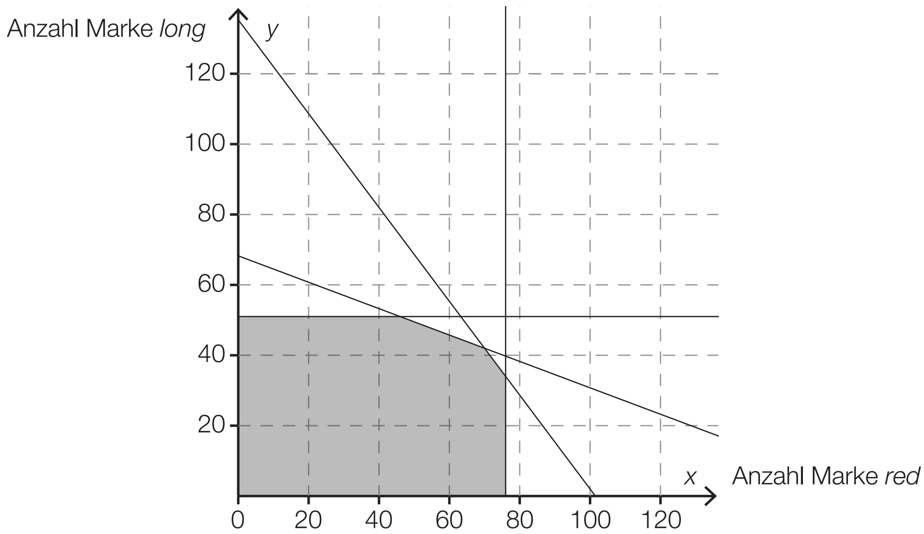
b) In der nachstehenden Grafik ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken *green* und *thin* angegeben.



– Stellen Sie die Gleichung der Geraden a auf.
– Stellen Sie die Gleichung der Geraden b auf.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken *red* und *long* dargestellt.



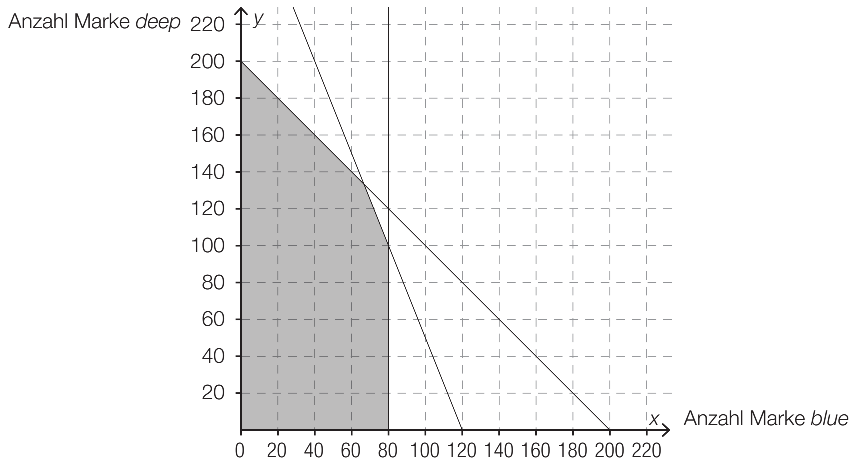
Die Zielfunktion Z beschreibt den Gewinn in Euro: $Z(x, y) = 2 \cdot x + 3 \cdot y$

x ... Anzahl der Gürtel der Marke *red*
y ... Anzahl der Gürtel der Marke *long*

Dieser Gewinn soll maximiert werden.

– Zeichnen Sie diejenige Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, in der obigen Abbildung ein.
– Lesen Sie die optimalen Produktionsmengen näherungsweise ab.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die Gürtelproduktion der Marken *blue* und *deep* dargestellt.



Jemand behauptet, dass der maximale Gewinn erreicht wird, wenn 60 Gürtel der Marke *blue* und 120 Gürtel der Marke *deep* produziert und verkauft werden.

– Erklären Sie, warum man ohne Kenntnis der Zielfunktion beurteilen kann, dass diese Behauptung falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

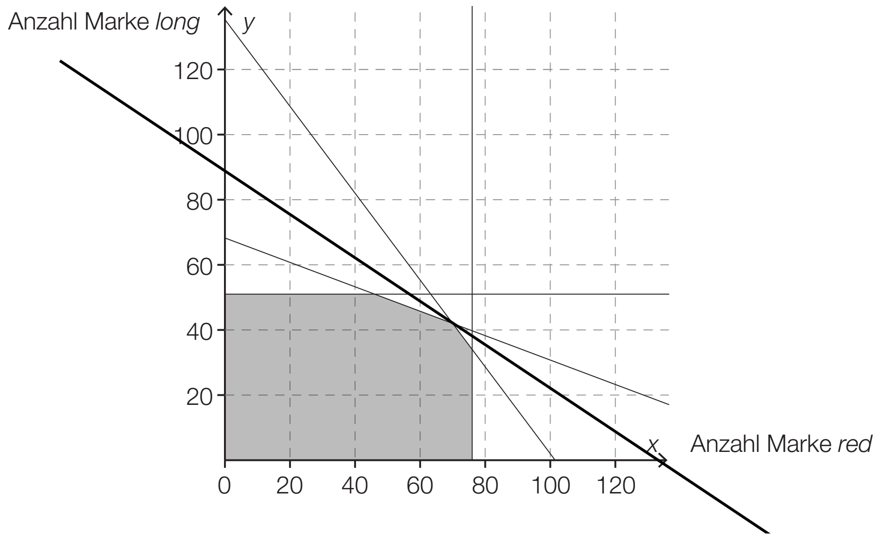
Möglicher Lösungsweg

a) $5 \cdot x + 2 \cdot y \leq 600$
$x + y \leq 200$

b) a: $y = -\frac{1}{2} \cdot x + 100$
b: $x = 120$

Auch eine Angabe als Ungleichung ist als richtig zu werten.

c)



optimale Produktionsmengen:

70 Stück der Marke *red*
Toleranzbereich: [67; 73]

42 Stück der Marke *long*
Toleranzbereich: [41; 45]

$2 \cdot 70 + 3 \cdot 42 = 266$
Der maximale Gewinn beträgt € 266.

d) Wenn 60 Gürtel der Marke *blue* und 120 Gürtel der Marke *deep* produziert und verkauft werden, kann der maximale Gewinn nicht erreicht werden, weil der Punkt (60|120) nicht am Rand des Lösungsbereichs liegt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Ungleichung mithilfe der Information bezüglich der zur Verfügung stehenden Zeit
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Ungleichung mithilfe der Information bezüglich der Belieferungseinschränkung

b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Geraden a
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Geraden b
Auch eine Angabe als Ungleichung ist als richtig zu werten.

c) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
1 × C: für das richtige Ablesen der optimalen Produktionsmengen
(Toleranzbereich: [67; 73] bzw. [41; 45])
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns

d) 1 × D: für die richtige Erklärung

Größe von Mädchen*

Aufgabennummer: B_353

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Tabelle ist angegeben, wie groß Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Körpergröße (in Zentimetern)
0	51,5
1	74,0
2	85,4
3	95,4
4	102,8
5	109,5
6	115,3

a) – Stellen Sie die durchschnittliche Körpergröße in Abhängigkeit vom Alter in einem Koordinatensystem dar. Verwenden Sie dazu die Angaben aus der obigen Tabelle.

b) – Bestimmen Sie den absoluten Größenzuwachs im 3. Lebensjahr anhand der gegebenen Daten.
– Beschreiben Sie, was mit der folgenden Rechnung im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt wird:
$\frac{102{,}8 - 95{,}4}{95{,}4}$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Tabelle sehen Sie, wie schwer Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Masse (in Kilogramm)
1	9,3
2	12,2
3	14,5
4	16,6
5	19,0
6	21,0

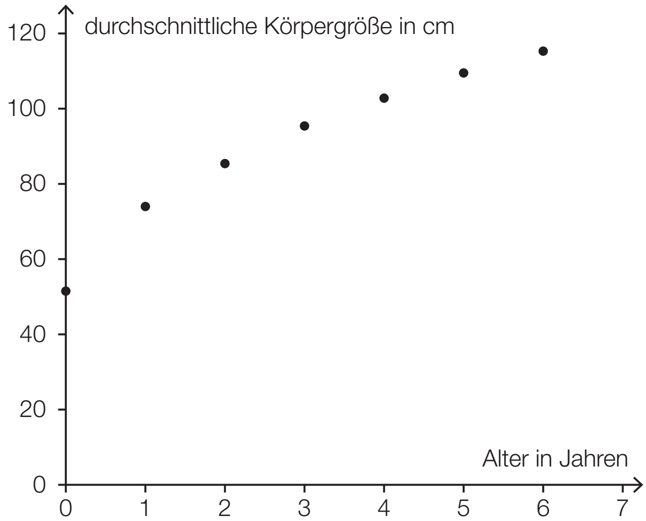
Aufgrund der gegebenen Daten kann man vermuten, dass die Abhängigkeit der durchschnittlichen Masse von der durchschnittlichen Körpergröße annähernd durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann. Die Werte für die durchschnittliche Körpergröße entnehmen Sie der im Einleitungstext gegebenen Tabelle.

– Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten für den linearen Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Körpergröße und durchschnittlicher Masse.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) 95,4 – 85,4 = 10
Der absolute Größenzuwachs im 3. Lebensjahr beträgt 10 cm.

Es wird der relative Zuwachs der durchschnittlichen Körpergröße im 4. Lebensjahr ermittelt.

c) Berechnung des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}9961$

Der Korrelationskoeffizient liegt nahe bei 1 und lässt daher einen starken positiven linearen Zusammenhang vermuten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige grafische Darstellung

b) 1 × B: für das richtige Bestimmen des absoluten Größenzuwachses
1 × C: für die richtige Beschreibung im Sachzusammenhang

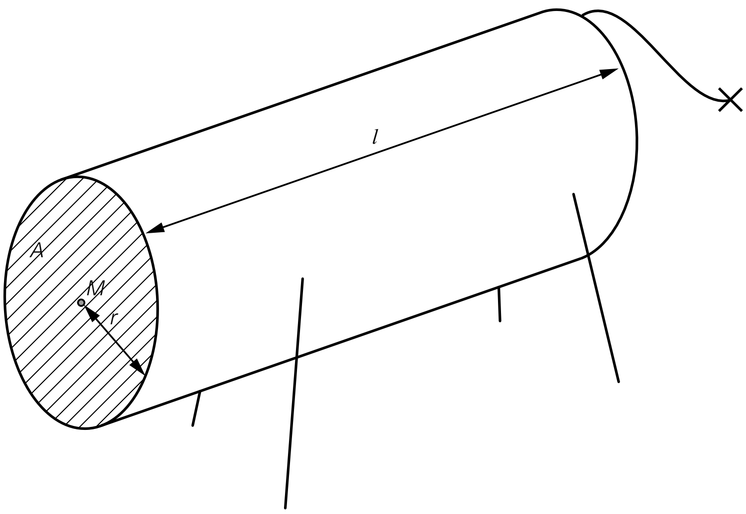
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten
1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten

Modell-Kuh*

Aufgabennummer: B_385

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Um in einer Faustformel einen Zusammenhang zwischen Brustumfang und Volumen einer Kuh herzustellen, wird die Kuh modellhaft als Zylinder mit einer kreisförmigen Querschnittsfläche und der Länge l angenommen.



Dazu muss der Flächeninhalt A der Kreisfläche durch den Umfang u des Kreises ausdrückt werden.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A in Abhängigkeit vom Umfang u auf.

A = ______________________________

In diesem Modell wird die Länge l des Zylinders als das 9-Fache des Radius r angenommen.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V in Abhängigkeit vom Umfang u auf.

V = ______________________________

Der Brustumfang einer Kuh ist um 10 % größer als jener einer anderen Kuh.

– Bestimmen Sie, um wie viel Prozent das Volumen dieser Kuh größer ist als das Volumen der anderen Kuh.

* ehemalige Klausuraufgabe

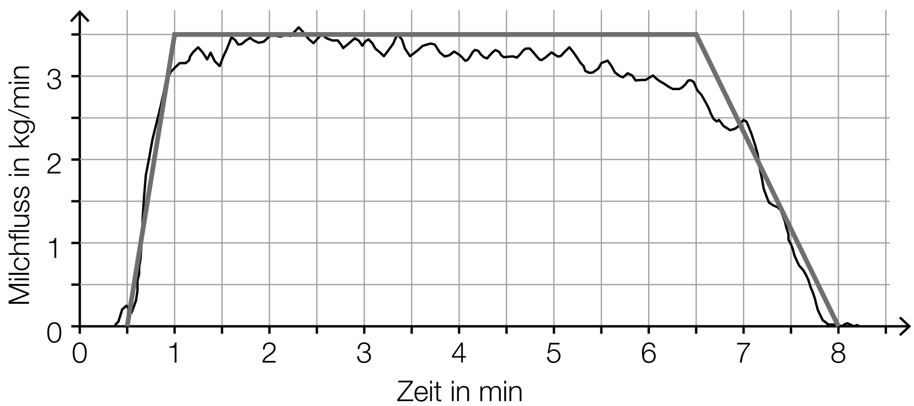
b) Die nachstehende Tabelle gibt den Brustumfang und die Lebendmasse von 8 Kühen an.

Brustumfang in cm	Lebendmasse in kg
153	240
155	303
161	285
163	320
165	373
167	318
169	387
170	358

In einem vereinfachten Modell kann für Brustumfänge von 150 cm bis 170 cm ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden angegebenen Größen angenommen werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Die Lebendmasse soll in Abhängigkeit vom Brustumfang beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells die Lebendmasse, die man bei einem Brustumfang von 160 cm erwarten kann.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Milchfluss während eines Melkvorgangs in Kilogramm pro Minute (kg/min) in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten (min).
Für weitere Berechnungen wird der Milchfluss durch einen Streckenzug in Form eines Trapezes modelliert. Dieser Streckenzug ist ebenfalls eingezeichnet.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Grafik die während dieses Melkvorgangs insgesamt gemolkene Milchmenge.
– Bestimmen Sie näherungsweise die während dieses Melkvorgangs insgesamt gemolkene Milchmenge.

Möglicher Lösungsweg

a) $u = 2 \cdot r \cdot \pi \ \Rightarrow \ r = \dfrac{u}{2 \cdot \pi}$

$A = r^2 \cdot \pi$

$\Rightarrow \ A = \dfrac{u^2}{4 \cdot \pi}$

$l = 9 \cdot r$

$V = A \cdot 9 \cdot r$

$V = \dfrac{u^2}{4 \cdot \pi} \cdot \dfrac{9 \cdot u}{2 \cdot \pi} = \dfrac{9 \cdot u^3}{8 \cdot \pi^2}$

$V_{\text{neu}} = \dfrac{9 \cdot (1{,}1 \cdot u)^3}{8 \cdot \pi^2} = \dfrac{9 \cdot 1{,}1^3 \cdot u^3}{8 \cdot \pi^2} = 1{,}1^3 \cdot V = 1{,}331 \cdot V$

Wenn der Umfang um 10 % steigt, nimmt gemäß diesem Modell das Volumen um 33,1 % zu.

b) Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$y = 6{,}50 \cdot x - 736$ *(Koeffizienten gerundet)*

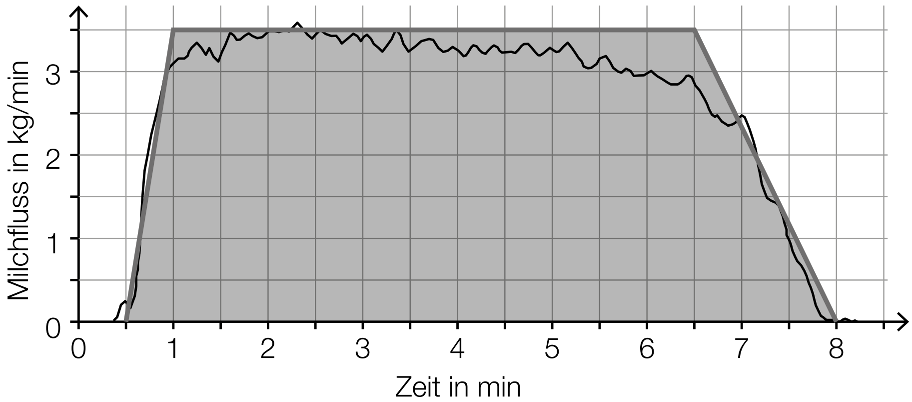
x … Brustumfang in cm
y … Lebendmasse in kg

Gemäß dem Modell steigt die Lebendmasse pro Zentimeter Brustumfang um rund 6,50 kg.

x = 160 cm:
$6{,}50\ldots \cdot 160 - 736{,}\ldots = 304{,}2\ldots \approx 304$

Gemäß dem Modell kann man bei einem Brustumfang von 160 cm eine Lebendmasse von rund 304 kg erwarten.

c)



Auch das Veranschaulichen der Milchmenge als Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der horizontalen Achse ist als richtig zu werten.

Die gemolkene Milchmenge entspricht dem Flächeninhalt A des Trapezes:

$$A = \frac{(7{,}5 + 5{,}5) \cdot 3{,}5}{2} = 22{,}75$$

Es wurden 22,75 kg Milch gemolken.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Formel für A in Abhängigkeit von u
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Formel für V in Abhängigkeit von u
1 × A3: für das richtige Bestimmen des prozentuellen Unterschieds

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C: für eine richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung der Lebendmasse bei 160 cm Brustumfang

c) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Milchmenge als Fläche zwischen dem Streckenzug bzw. dem Graphen der Funktion und der horizontalen Achse
1 × B: für das richtige Bestimmen der insgesamt gemolkenen Milchmenge

Ansparpläne*

Aufgabennummer: B_382

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für die Finanzierung größerer Anschaffungen ist es oft nötig, einen Geldbetrag anzusparen. Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

a) Andrea möchte einen Geldbetrag E ansparen.
Dazu legt sie einen Geldbetrag B, der mit dem jährlichen Zinssatz i verzinst wird, für n Jahre auf einem Sparkonto an.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von E, wenn B, n und i bekannt sind.

E = ____

– Formen Sie diese Formel nach dem Zinssatz i um.

b) Bernhard möchte auf einem Konto in 4 Jahren € 4.000 angespart haben. Dazu will er sofort € 1.000 auf das Konto legen, nach 1 Jahr € 1.500 und nach 3 Jahren den nötigen Restbetrag R. Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

– Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.
– Erklären Sie in Worten (ohne Rechnung), warum der Restbetrag R kleiner als € 1.500 sein muss.
– Berechnen Sie den Restbetrag R.

c) Cornelia führt für ihren Ansparplan folgende Rechnung durch:

$$5\,000 \cdot 1{,}035^5 + 1\,000 \cdot 1{,}035^2 \approx 7\,009{,}66$$

– Beschreiben Sie diesen Ansparplan hinsichtlich der Zahlungen, des Zinssatzes, der Verzinsungsdauer und des angesparten Geldbetrags in Worten.

d) Daniel möchte in 2 Jahren insgesamt € 10.000 angespart haben. Seine Ersparnisse betragen derzeit € 4.000. Den Restbetrag will er ansparen, indem er jeweils am Ende jedes Monats einen gleichbleibenden Betrag anspart.

– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn die Beträge nicht verzinst werden.
– Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn alle Beträge zu einem Zinssatz von 0,25 % p. m. veranlagt werden.

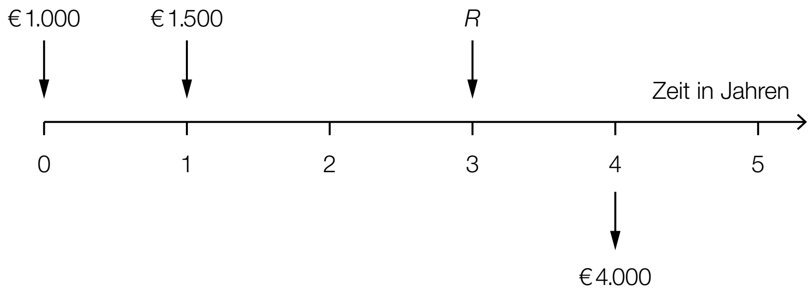
* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $E = B \cdot (1 + i)^n$

$i = \sqrt[n]{\frac{E}{B}} - 1$

b)



Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn der angesparte Betrag (€ 4.000) auf der Zeitachse nicht angegeben ist.

Der Restbetrag muss kleiner als € 1.500 sein, da die Einzahlungen verzinst werden.

Eine Begründung nur durch die nachstehende Rechnung ist nicht ausreichend.

$1\,000 \cdot 1{,}03^4 + 1\,500 \cdot 1{,}03^3 + R \cdot 1{,}03 = 4\,000$

$R = \frac{4\,000 - 1\,000 \cdot 1{,}03^4 - 1\,500 \cdot 1{,}03^3}{1{,}03} = 1\,199{,}418\ldots$

Als Restbetrag müssen € 1.199,42 eingezahlt werden.

c) € 5.000 werden 5 Perioden lang mit einem Zinssatz von 3,5 % pro Periode veranlagt. Nach 3 Perioden kommen noch € 1.000 dazu. Nach 5 Perioden beträgt der angesparte Geldbetrag € 7.009,66.

Wurden konkrete Perioden (z. B. Jahre) bei der Beschreibung verwendet, ist der Punkt zu vergeben.

d) ohne Verzinsung:

$\frac{6\,000}{24} = 250$

Ohne Verzinsung beträgt die Ratenhöhe € 250.

mit Verzinsung:

$4\,000 \cdot 1{,}0025^{24} + R \cdot \frac{1{,}0025^{24} - 1}{0{,}0025} = 10\,000$

$R = (10\,000 - 4\,000 \cdot 1{,}0025^{24}) \cdot \frac{0{,}0025}{1{,}0025^{24} - 1} = 232{,}887\ldots$

Mit Verzinsung beträgt die Ratenhöhe € 232,89.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × B: für das richtige Umformen der Formel nach der Variablen i

b) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse (Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn der angesparte Betrag (€ 4.000) auf der Zeitachse nicht angegeben ist.)
1 × D: für eine richtige Erklärung zur Höhe des Restbetrags
1 × B: für die richtige Berechnung des Restbetrags

c) 1 × C: für eine richtige Beschreibung (Wurden konkrete Perioden (z. B. Jahre) bei der Beschreibung verwendet, ist der Punkt zu vergeben.)

d) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Ratenhöhe ohne Verzinsung
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Ratenhöhe mit Verzinsung

Kreativ-Workshop*

Aufgabennummer: B_383

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In den kommenden Sommerferien möchte der Kulturverband einer Großstadt eine Kombination aus Ausstellungsbesuch, Malkurs und Mittagessen für Kinder anbieten.

Laut einer Umfrage würde dieses Angebot bei einem Preis von € 23 pro Kind für 1 050 Kinder gebucht werden. Bei einem Preis von € 27 pro Kind würde dieses Angebot für 990 Kinder gebucht werden.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen linearen Preisfunktion der Nachfrage auf.

b) Die Preisfunktion der Nachfrage p für einen 2-tägigen Kreativ-Workshop ist erhoben worden:

$p(x) = -0{,}5 \cdot x + 220$

x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
$p(x)$ ... Preis bei x Personen in € pro Person

– Berechnen Sie denjenigen Preis pro Person, bei dem 200 Personen zu erwarten sind.
– Geben Sie den Höchstpreis an.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

c) Bei einem Kreativ-Workshop fallen für den Veranstalter Kosten an, die sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben lassen:

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4\,800$

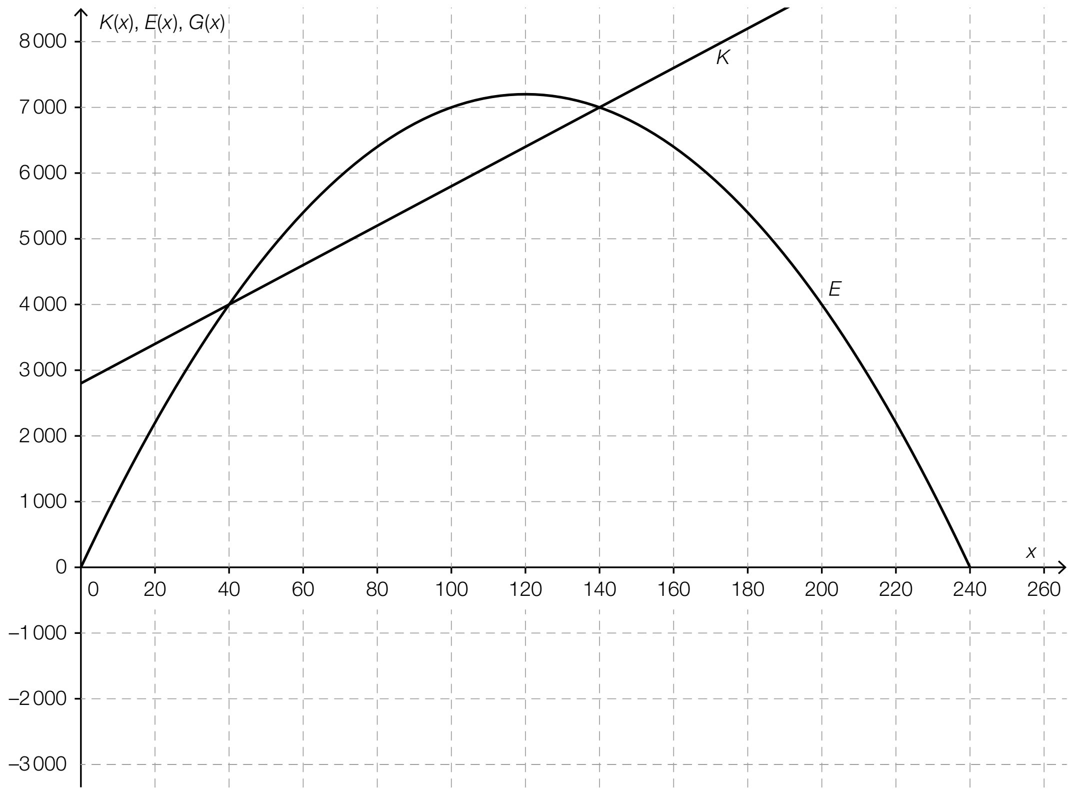
x ... Anzahl der teilnehmenden Personen
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei x Personen in €

Der Preis für den Kreativ-Workshop beträgt € 129 pro Person.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G auf.
– Berechnen Sie, bei welcher Anzahl an teilnehmenden Personen für diesen Workshop der Break-even-Point erreicht wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen einer quadratischen Erlösfunktion E und einer linearen Kostenfunktion K.



– Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.
– Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Gewinnfunktion G im Intervall von 0 bis zur oberen Gewinngrenze in der obigen Abbildung ein.
– Beschreiben Sie, wie sich die beiden Gewinngrenzen verändern, wenn die Fixkosten steigen.

Möglicher Lösungsweg

a) $p(x) = k \cdot x + d$

x … Nachfragemenge
$p(x)$ … Preis bei der Nachfrage x in € pro Kind

$23 = k \cdot 1\,050 + d$
$27 = k \cdot 990 + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$k = -\frac{1}{15}$, $d = 93$
$p(x) = -\frac{1}{15} \cdot x + 93$

b) $p(200) = -0{,}5 \cdot 200 + 220 = 120$

Der Preis, bei dem 200 teilnehmende Personen zu erwarten sind, beträgt € 120 pro Person.

Der Höchstpreis beträgt € 220 pro Person.

$p(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{220}{0{,}5} = 440$

Die Sättigungsmenge liegt bei 440 Personen.

c) $G(x) = E(x) - K(x) = 129 \cdot x - (0{,}01 \cdot x^2 + 35 \cdot x + 4\,800) = -0{,}01 \cdot x^2 + 94 \cdot x - 4\,800$

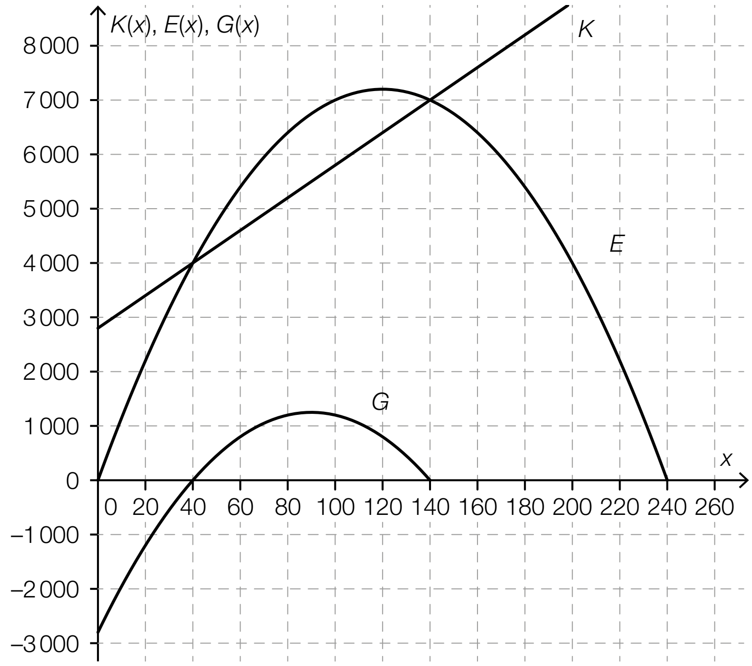
x … Anzahl der teilnehmenden Personen
$G(x)$ … Gewinn bei x Personen in €

$G(x) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x = 51{,}3\ldots$

Ab 52 teilnehmenden Personen wird Gewinn erzielt.

d) Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.



Die untere Gewinngrenze wird höher und die obere Gewinngrenze niedriger.

oder:

Der Gewinnbereich wird schmäler.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung der Preisfunktion der Nachfrage

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Preises pro Person, bei dem 200 teilnehmende Personen zu erwarten sind
1 × C: für das richtige Angeben des Höchstpreises
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gewinnfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Teilnehmerzahl, bei der der Break-even-Point erreicht wird

d) 1 × D: für die richtige mathematische Erklärung
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen (Graph einer quadratischen Funktion mit richtigem Ordinatenabschnitt und richtigen Nullstellen)
1 × C: für die richtige Beschreibung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Kleinwald

Aufgabennummer: B_273

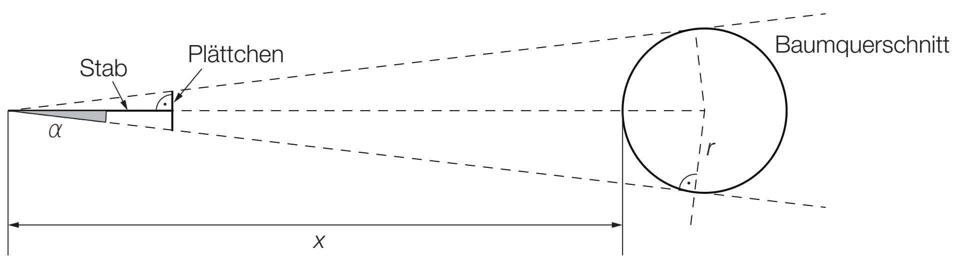
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Um ein zusätzliches Einkommen zu erwirtschaften, kauft ein Landwirt eine kleine Waldfläche.

a) Er erwirbt eine Waldfläche mit einem Flächeninhalt von 18,6 Hektar (ha). Der Preis liegt bei € 0,95 pro Quadratmeter; der durchschnittliche Erlös pro Jahr soll € 300 pro Hektar betragen. Der Landwirt legt den Erlös an jedem Jahresende auf ein Sparbuch mit einem Jahreszinssatz i.

- Berechnen Sie den Kaufpreis.
- Erstellen Sie eine Gleichung, mit deren Hilfe man die Zeitdauer in Jahren, bis der Landwirt Gewinn erzielt, berechnen kann.
- Berechnen Sie den Gewinn 40 Jahre nach dem Kauf des Waldes bei einem Zinssatz von 0,8 % p.a.

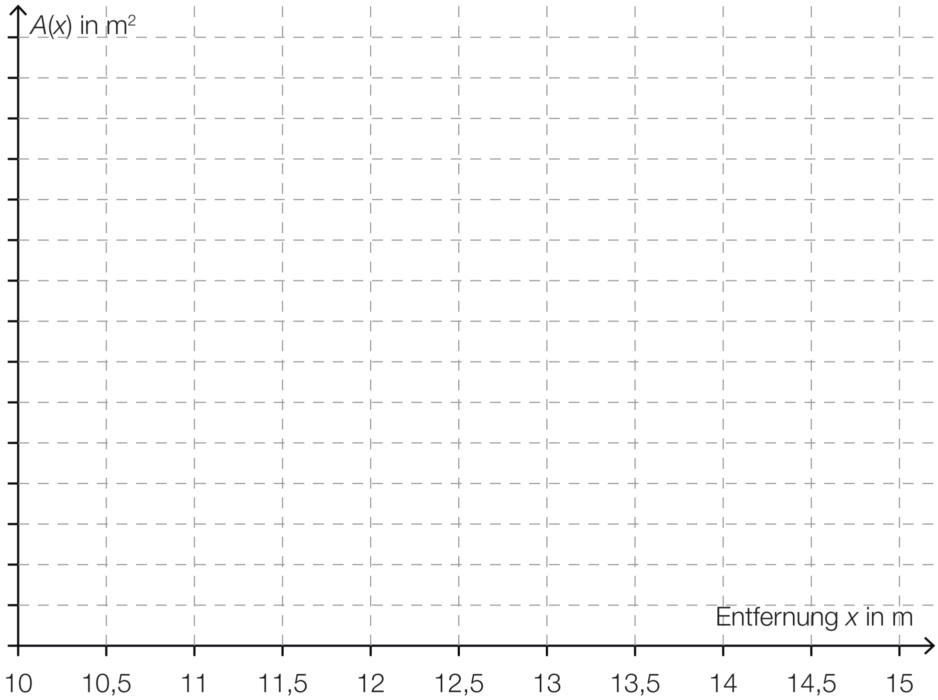
b) Für eine Abschätzung des Holzvolumens eines Baumes kann man die sogenannte „Winkelzählprobe" verwenden. Dafür wird ein 1 m langer Stab verwendet, an dessen Ende ein 4 cm breites Plättchen symmetrisch im rechten Winkel zum Stab montiert ist.
Man hält dieses Gerät waagrecht und bewegt sich damit in die richtige Position, bei der die Breite des Baums durch das Plättchen verdeckt wird (siehe nachstehende Skizze – Sicht von oben).



- Berechnen Sie den Winkel α.
- Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Baumradius r in Abhängigkeit von x und α auf.

r = ______________________________

– Zeichnen Sie die Funktion *A* des Flächeninhalts des Baumquerschnitts in Abhängigkeit von der Entfernung *x* mit entsprechender Skalierung der vertikalen Achse in das nachstehende Koordinatensystem ein.



c) Der Landwirt hat ermittelt, dass er die Höhe der Bäume annähernd mithilfe der folgenden Funktion beschreiben kann:

$h(d) = 194{,}85 + 221{,}89 \cdot \ln(d)$

d … Durchmesser eines Baums auf Brusthöhe in Zentimetern (cm) mit $d \in [3; 14]$
$h(d)$ … Baumhöhe in cm bei einem Durchmesser d

Bei einem Baum wird ein Durchmesser von 5 cm gemessen. Nach einiger Zeit weist der Baum einen Durchmesser d_0 auf.

– Stellen Sie eine Formel auf, mit der man die mittlere Änderungsrate der Baumhöhe bei dieser Durchmesseränderung berechnen kann.

$k =$ ____________________________________

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die lokale Änderungsrate der Baumhöhe berechnet werden kann. *[1 aus 5]*

$194{,}85 + 221{,}89 \cdot e^d$	☐
$\frac{221{,}89}{d}$	☐
$221{,}89 \cdot \ln(d)$	☐
$194{,}85 + \frac{221{,}89}{d}$	☐
$221{,}89 \cdot d$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) K ... Kaufpreis

$K = 18{,}6 \cdot 100^2 \cdot 0{,}95 = 176\,700$

Der Kaufpreis beträgt € 176.700.

$q = 1 + i$

n ... Zeit in Jahren

$176\,700 = 5\,580 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$

Berechnung des Gewinns nach 40 Jahren:

$5\,580 \cdot \frac{1{,}008^{40} - 1}{0{,}008} - 176\,700 \cdot 1{,}008^{40} = 18\,795{,}561...$

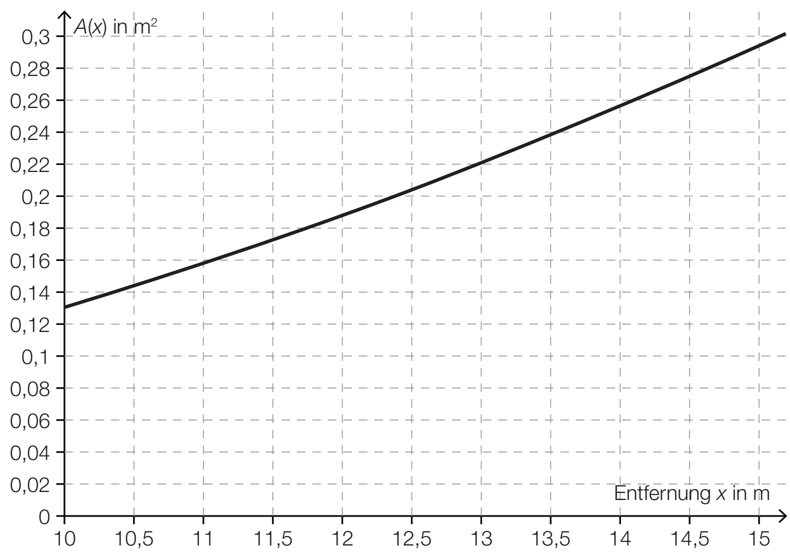
Der Gewinn beträgt € 18.795,56.

b) $\tan(\alpha) = \frac{2}{100} \quad\Rightarrow\quad \alpha = 1{,}1457...°$

Der Winkel beträgt rund 1,146°.

$\sin(\alpha) = \frac{r}{x + r} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{x \cdot \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}$

$A(x) = \left(\frac{x \cdot \sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}\right)^2 \cdot \pi \quad \text{mit} \quad \sin(\alpha) \approx 0{,}019996$



c) k … mittlere Änderungsrate der Baumhöhe

$h(5) = 194{,}85 + 221{,}89 \cdot \ln(5) = 551{,}9\ldots \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{194{,}85 + 221{,}89 \cdot \ln(d_0) - 551{,}9\ldots}{d_0 - 5}$

oder:

$k = \dfrac{h(d_0) - h(5)}{d_0 - 5}$

[...]	
$\dfrac{221{,}89}{d}$	☒
[...]	
[...]	
[...]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) schwer	b) 3
c) mittel	c) 2

Thema: Forstwirtschaft

Quellen: https://de.wikipedia.org/wiki/Kleinwald (Stand vom 28. Juni 2015 um 18:41 Uhr)
http://www.lagerhaus.at/wie-viel-holz-steht-in-meinem-wald+2500+1066813

Miststreuer

Aufgabennummer: B_286

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Unternehmen stellt Miststreuer her. Die Produktion sowie der Verkauf werden innerhalb eines Jahres betrachtet.

a) Das Unternehmen geht bezüglich eines speziellen Zusatzteils innerhalb eines Jahres von folgender Preis-Absatz-Funktion aus:

$p(x) = -0{,}02 \cdot (x + 10)^2 + 288$

x … verkaufte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ … Preis bei x verkauften ME in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME)

– Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichung, dass der Graph der Funktion p einen Hochpunkt hat.
– Berechnen Sie die Sättigungsmenge.
– Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der erlösmaximierenden Menge auf.

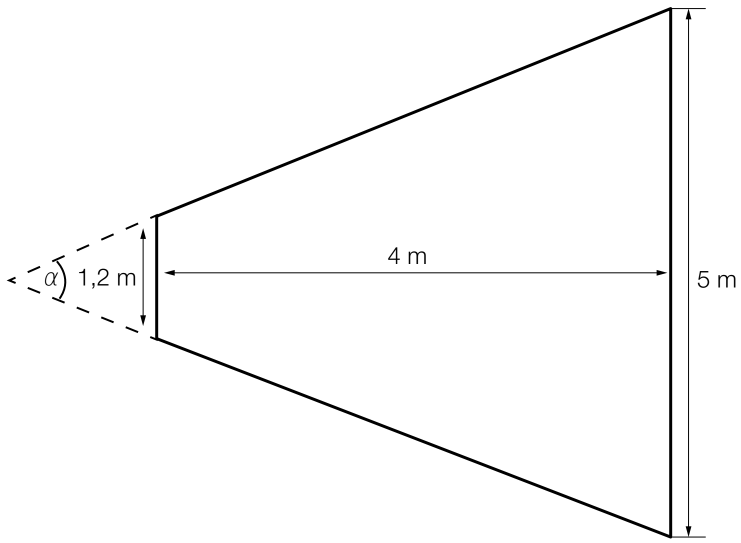
b) Die jährlichen Fixkosten für die Herstellung eines Produktionsteils des Miststreuers belaufen sich auf 8 000 Geldeinheiten (GE).
Die variablen Gesamtkosten können durch folgende Funktion beschrieben werden:

$K_V(x) = 0{,}11 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 80 \cdot x \quad \text{mit} \quad x \geq 0$

x … produzierte Mengeneinheiten (ME)
$K_V(x)$ … variable Kosten in GE bei x produzierten ME

– Dokumentieren Sie, wie die langfristige Preisuntergrenze berechnet werden kann.
– Berechnen Sie dasjenige Intervall, in dem die Kostenfunktion degressiv verläuft.
– Interpretieren Sie die Stelle des Übergangs vom degressiven in den progressiven Verlauf der Kostenfunktion hinsichtlich der Veränderung der Kosten.

c) Ein bestimmtes Miststreuer-Modell hat eine Breite von 1,2 m. Es streut im Stand bis zu einer Breite von rund 5 m. Dabei wirft es den Mist (wie in der nachstehenden Skizze ersichtlich) bis zu rund 4 m weit.
Die dick umrandete Fläche der Skizze zeigt den Bereich, der vom stehenden Miststreuer bestreut wird.



– Berechnen Sie den Winkel α.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Da der Koeffizient –0,02 negativ ist, ist der Graph dieser quadratischen Funktion eine nach unten geöffnete Parabel. Der Scheitel dieser Parabel ist daher der Hochpunkt.

Lösen der Gleichung $p(x) = 0$ ergibt: $x = 110$ bzw. $x = -130$ $\Rightarrow$ 110 Stück ist die Sättigungsmenge.

$p(x) = -0{,}02 \cdot (x + 10)^2 + 288 = -0{,}02 \cdot x^2 - 0{,}4 \cdot x - 2 + 288$

$E(x) = p(x) \cdot x$

$E(x) = -0{,}02 \cdot x^3 - 0{,}4 \cdot x^2 + 286 \cdot x$

$E'(x) = 0 \;\Rightarrow\; E'(x) = -0{,}06 \cdot x^2 - 0{,}8 \cdot x + 286 \;\Rightarrow\; -0{,}06 \cdot x^2 - 0{,}8 \cdot x + 286 = 0$

b) Man berechnet die Gesamtkostenfunktion durch Addition der variablen Kosten und der Fixkosten. Danach bestimmt man die Durchschnittskostenfunktion, indem man die Gesamtkostenfunktion durch x dividiert. Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung der Durchschnittskostenfunktion. Die positive Nullstelle ist Minimumstelle der Durchschnittskostenfunktion. Die Durchschnittskosten an der Stelle des Minimums stellen die langfristige Preisuntergrenze dar.

$K(x) = 0{,}11 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 8\,000$

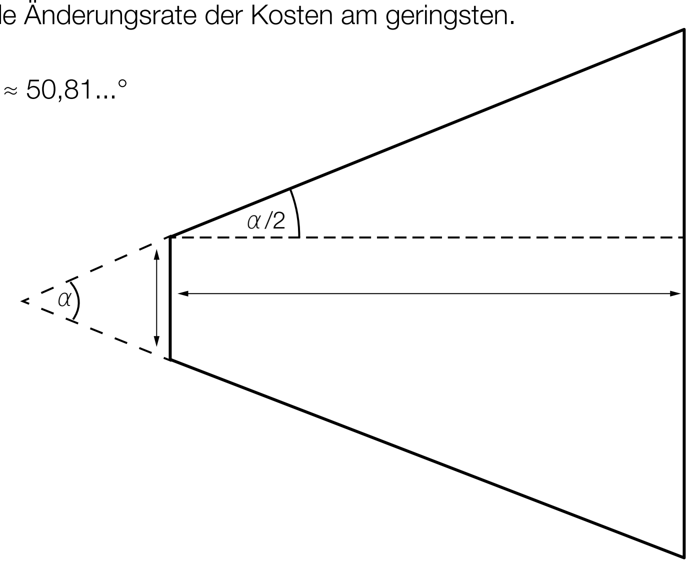
$K''(x) = 0{,}66 \cdot x - 10 = 0 \;\Rightarrow\; x \approx 15{,}15$ ME

Die Funktion verläuft im Intervall $[0; 15{,}15]$ degressiv.

An dieser Stelle ist die lokale Änderungsrate der Kosten am geringsten.

c) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2{,}5 - 0{,}6}{4} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 50{,}81...°$

$\alpha \approx 50{,}8°$



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Tischlereibetrieb

Aufgabennummer: B_269		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Ein Tischlereibetrieb produziert Tischgruppen (Tisch und Sessel), die österreichweit vertrieben werden sollen.

a) Die Kosten für die Produktion eines bestimmten Tischgruppenmodells lassen sich durch die Kostenfunktion K beschreiben:

$$K(x) = \frac{x^3}{300} - x^2 + 200 \cdot x + 9\,000$$

Folgende Preis-Absatz-Funktion p beschreibt den Zusammenhang zwischen Absatz und Preis für dieses Tischgruppenmodell:

$$p(x) = -\frac{10}{3} \cdot x + 875$$

x … Tischgruppenmodelle in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Kosten bei x ME in Geldeinheiten (GE)
$p(x)$ … Preis bei x ME in GE/ME

– Erstellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion.
– Ermitteln Sie, bei welcher Menge der maximale Gewinn erreicht wird.
– Ermitteln Sie die Durchschnittskosten für die gewinnmaximierende Menge.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man die langfristige Preisuntergrenze berechnen kann.

b) Für ein anderes Produkt wurde eine fehlerhafte Kostenfunktion erstellt:

$$K(x) = \frac{x^3}{300} - x^2 + 96 \cdot x + 9\,000$$

– Erklären Sie mithilfe des Graphen der Ableitungsfunktion K', warum diese Funktion keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion ist.

c) Die Nachfragefunktion ordnet dem Stückpreis die Nachfragemenge zu.
Als Modell für die Nachfragefunktion für eine spezielle Tischgruppe verwendet man eine Polynomfunktion 2. Grades:

$x(p) = a \cdot p^2 + b \cdot p + c$

p … Stückpreis in GE/ME
$x(p)$ … nachgefragte Menge in ME bei einem Preis p in GE/ME

Folgende Daten wurden erhoben: Bei einem Preis von 1 000 GE/ME besteht eine Nachfrage von 6 600 ME. Bei einem Preis von 1 200 GE/ME ist die lokale Änderungsrate der Nachfrage –3 ME pro ME/GE und ab einem Preis von 2 500 GE besteht keine Nachfrage.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem eine Gleichung der Nachfragefunktion berechnet werden kann.
– Bestimmen Sie eine Gleichung der Nachfragefunktion.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $G(x) = E(x) - K(x) = \left(-\frac{10}{3} \cdot x + 875\right) \cdot x - \left(\frac{x^3}{300} - x^2 + 200 \cdot x + 9000\right)$

$G(x) = -\frac{x^3}{300} - \frac{7}{3} \cdot x^2 + 675 \cdot x - 9000$

$G'(x) = -\frac{x^2}{100} - \frac{14}{3} \cdot x + 675 = 0 \;\Rightarrow\; x = 115{,}87\ldots$

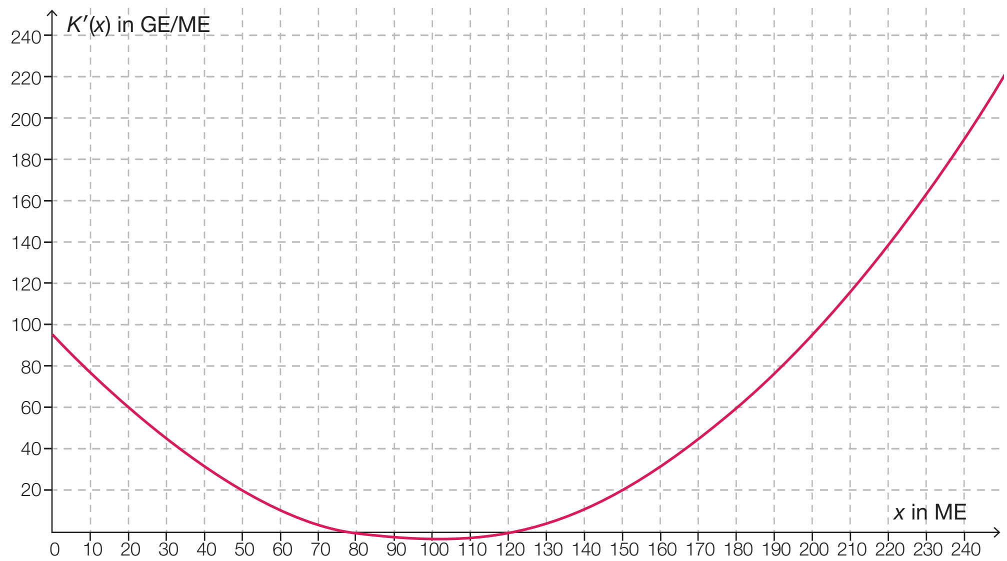
Der maximale Gewinn wird bei rund 116 ME erzielt.

$\frac{K(x)}{x} = \frac{x^2}{300} - x + 200 + \frac{9000}{x} \;\Rightarrow\; \overline{K}(115{,}87\ldots) \approx 206{,}55$

Die Durchschnittskosten pro ME betragen rund 206,55 GE.

Man berechnet die Nullstelle der 1. Ableitung der Stückkostenfunktion.
Dieser Wert wird in die Stückkostenfunktion eingesetzt. Die sich daraus ergebenden Stückkosten in GE/ME stellen die langfristige Preisuntergrenze dar.

b) $K'(x) = \frac{x^2}{100} - 2 \cdot x + 96$



Der Funktionsgraph von K' kann keine Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion sein, weil eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion streng monoton wachsend ist und daher die Grenzkostenfunktion keine negativen Funktionswerte hat.

c) $6600 = a \cdot 1000^2 + b \cdot 1000 + c$

$-3 = a \cdot 2 \cdot 1200 + b$

$0 = a \cdot 2500^2 + b \cdot 2500 + c$

Mittels Technologieeinsatz:

$x(p) \approx -0{,}00127 \cdot p^2 + 0{,}0545 \cdot p + 7818{,}18$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 4
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

Werbung*

Aufgabennummer: B_440

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Campus einer Universität beherbergt 1200 Studierende. Eine Fast-Food-Kette möchte eine Filiale mit neuen, spezifisch auf Studierende abgestimmten Produkten am Campusgelände eröffnen. Es kursiert ein Gerücht, dass ein berühmter Hollywoodstar bei der Eröffnung der Filiale anwesend sein wird.

Die Funktion N_G beschreibt näherungsweise die Anzahl der Studierenden, die von dem Gerücht erfahren haben:

$$N_G(t) = \frac{1200}{1 + 1199 \cdot e^{-0{,}99 \cdot t}}$$

t ... Zeit nach Aufkommen des Gerüchts in Tagen
$N_G(t)$ ... Anzahl der Studierenden, die vom Gerücht bis zum Zeitpunkt t erfahren haben

a) 1) Berechnen Sie, wie viele Studierende nach 8 Tagen von dem Gerücht erfahren haben.

b) Auf einem anderen vergleichbaren Campus wird gleichzeitig eine Werbekampagne mit Plakaten gestartet.
Die Funktion N_W beschreibt näherungsweise die Anzahl der Studierenden, die durch die Werbekampagne erreicht werden:

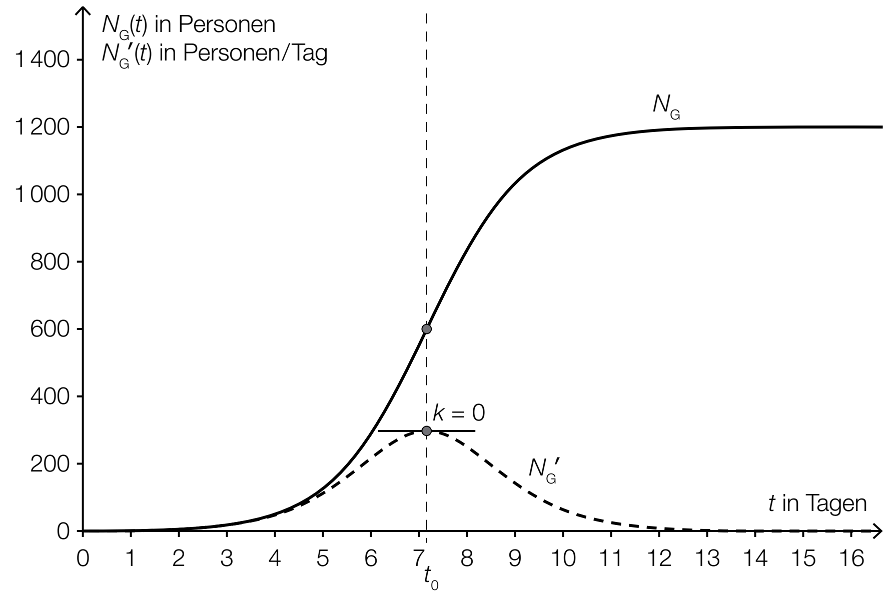
$$N_W(t) = 1200 \cdot (1 - e^{-0{,}077 \cdot t})$$

t ... Zeit nach Beginn der Werbekampagne in Tagen ($t \geq 1$)
$N_W(t)$ ... Anzahl der Studierenden, die durch die Werbekampagne bis zum Zeitpunkt t erreicht wurden

1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t ($t \geq 1$), zu dem gleich viele Studierende vom Gerücht erfahren haben, wie von der Werbekampagne erreicht wurden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Grafik sind der Graph der Funktion N_G und der Graph ihrer Ableitung N_G' dargestellt.



1) Beschreiben Sie, welche Eigenschaft die Ableitungsfunktion N_G' und welche Eigenschaft die Funktion N_G an der dargestellten Stelle t_0 hat.
2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Stelle t_0 im gegebenen Sachzusammenhang.

Eine Studierende behauptet, dass die 2. Ableitung der Funktion N_G für alle $t \geq 0$ positiv ist.

3) Argumentieren Sie, warum diese Behauptung falsch ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) $N_G(8) = 835{,}8...$

Nach 8 Tagen kennen rund 835 Studierende das Gerücht.

b1) $N_W(t) = N_G(t)$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t = 6{,}779... \approx 6{,}78$

Nach etwa 6,78 Tagen haben gleich viele Studierende vom Gerücht erfahren, wie von der Werbekampagne erreicht wurden.

c1) Die Ableitung N_G' hat an der Stelle t_0 eine Maximumstelle.
Die Funktion N_G hat an der Stelle t_0 eine Wendestelle.

c2) Zur Zeit t_0 ist der Zuwachs der Studierenden, die von dem Gerücht erfahren haben, am größten.

c3) Die Funktion N_G ist zwar für $0 \leq t < t_0$ positiv gekrümmt, für $t > t_0$ jedoch negativ gekrümmt. Somit gilt hier für $t > t_0$: $N_G''(t) < 0$.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Studierenden, die nach 8 Tagen von dem Gerücht erfahren haben (Auch ein Runden des Ergebnisses auf 836 Studierende ist als richtig zu werten.)

b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Bestimmung des Zeitpunkts

c1) 1 × C1: für die richtige Beschreibung zur Ableitung N_G'
1 × C2: für die richtige Beschreibung zur Funktion N_G
c2) 1 × C3: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
c3) 1 × D: für eine richtige Argumentation

Alkoholfreie Cocktails*

Aufgabennummer: B_454

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Es gibt viele beliebte Cocktails ohne Alkohol.

a) Für einen Cocktail *Yellow Fun* benötigt man 2 Centiliter (cl) Mangosaft, 8 cl Maracujasaft, 2 cl Zitronensaft und 8 cl Pfirsichsaft.

Für einen Cocktail *Exotic Punch* benötigt man 4 cl Mangosaft, 4 cl Maracujasaft, 4 cl Ananassaft, 4 cl Grapefruitsaft und 4 cl Orangensaft.

Es sollen x Cocktails *Yellow Fun* und y Cocktails *Exotic Punch* hergestellt werden.

Insgesamt stehen maximal 2 L Mangosaft und maximal 2 L Maracujasaft zur Verfügung.

1) Ordnen Sie den beiden Einschränkungen jeweils die passende Ungleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Einschränkung bezüglich Mangosaft	
Einschränkung bezüglich Maracujasaft	

A	$x + 2 \cdot y \leq 100$
B	$2 \cdot x + y \leq 100$
C	$y \leq -2 \cdot x + 50$
D	$x + 4 \cdot y \leq 200$

Man rechnet damit, dass mindestens doppelt so viele Cocktails *Yellow Fun* wie *Exotic Punch* benötigt werden.

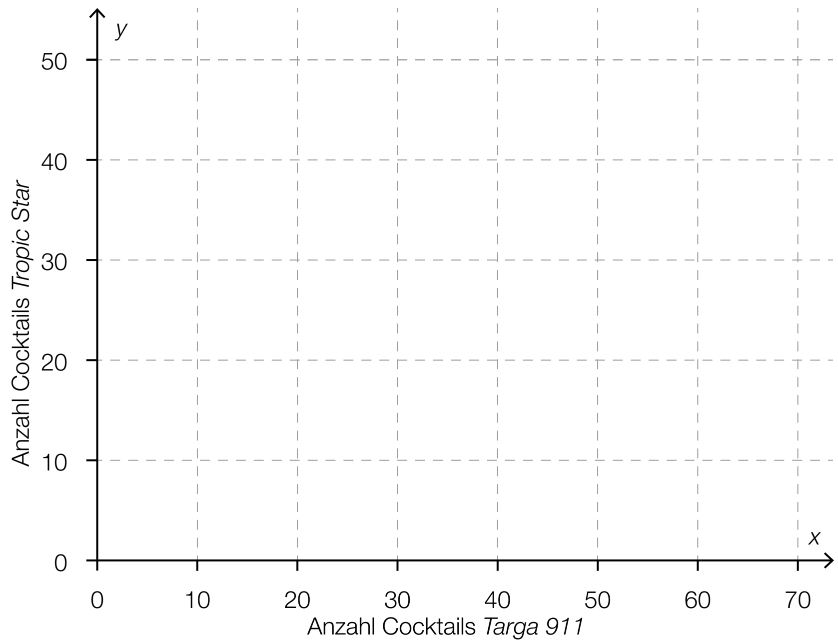
2) Erstellen Sie eine Ungleichung, die diese Bedingung für die beiden Cocktails beschreibt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Es sollen x Cocktails *Targa 911* und y Cocktails *Tropic Star* zubereitet werden.
Folgendes Ungleichungssystem beschreibt die Einschränkungen bei der Zubereitung:

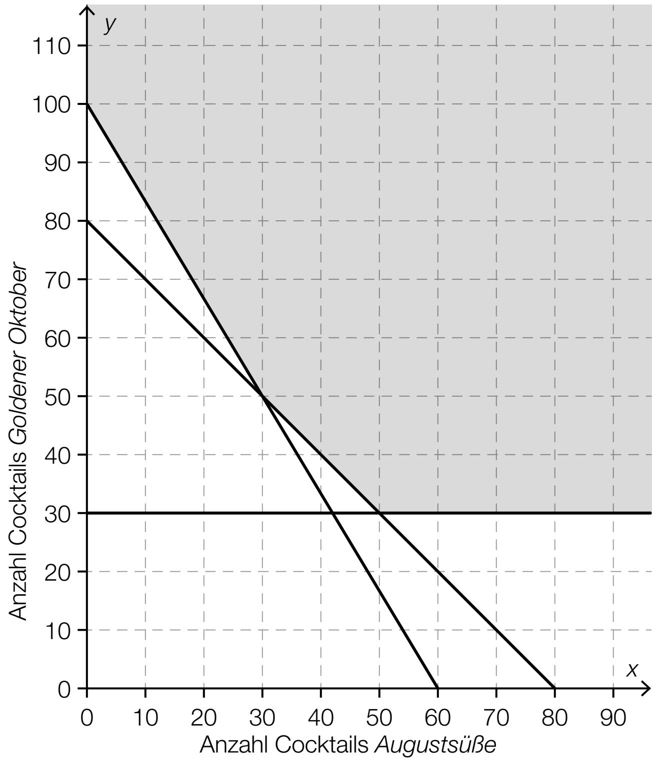
$6 \cdot x + 8 \cdot y \leq 400$
$2 \cdot y \geq x$
$x \geq 20$

1) Zeichnen Sie den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems in der nachstehenden Abbildung ein.



2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Ungleichung $x \geq 20$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Herstellung der Cocktails *Augustsüße* und *Goldener Oktober* dargestellt.



Die Produktionskosten für einen Cocktail *Goldener Oktober* sind um 50 % höher als die Produktionskosten für einen Cocktail *Augustsüße*. Die gesamten Produktionskosten sollen minimiert werden.

1) Geben Sie eine mögliche Zielfunktion Z an, die die gesamten Produktionskosten beschreibt.

$Z(x, y) =$ ____

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, für die im Lösungsbereich der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.

Möglicher Lösungsweg

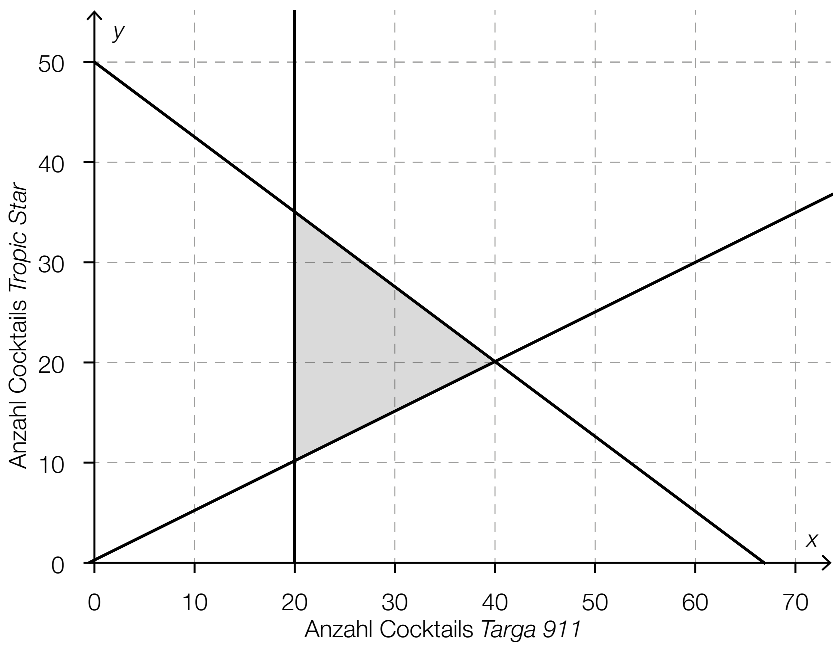
a1)

Einschränkung bezüglich Mangosaft	A
Einschränkung bezüglich Maracujasaft	C

A	$x + 2 \cdot y \leq 100$
B	$2 \cdot x + y \leq 100$
C	$y \leq -2 \cdot x + 50$
D	$x + 4 \cdot y \leq 200$

a2) $x \geq 2 \cdot y$

b1)

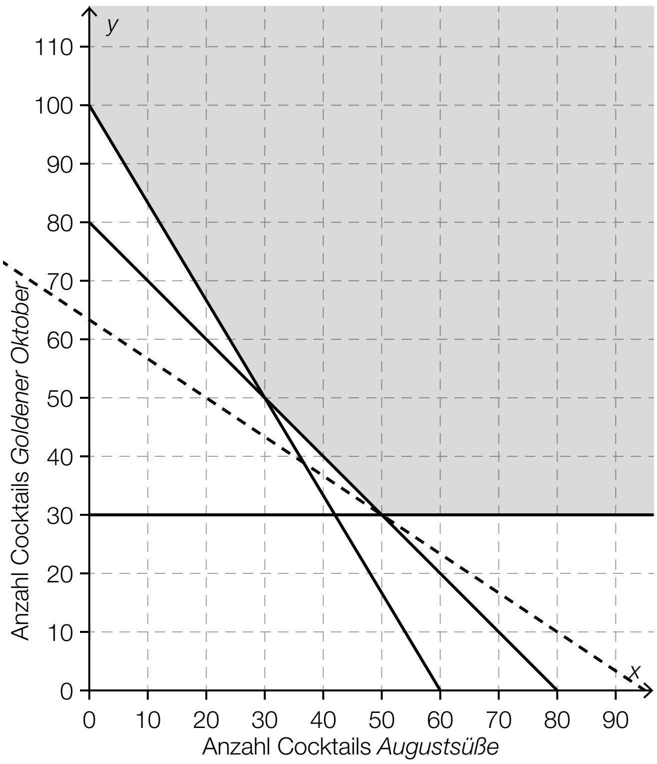


b2) Es sollen mindestens 20 Cocktails *Targa 911* zubereitet werden.

c1) $Z(x, y) = x + 1{,}5 \cdot y$

Auch eine Angabe der Zielfunktion als $Z(x, y) = k \cdot x + k \cdot 1{,}5 \cdot y$ *mit* $k \in \mathbb{R}^+$ *ist als richtig zu werten.*

c2)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Zuordnung
a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Ungleichung
b1) 1 × B: für das richtige Einzeichnen der Begrenzungsgeraden
1 × C1: für das richtige Einzeichnen des Lösungsbereichs
b2) 1 × C2: für die richtige Interpretation der Bedeutung der Ungleichung im gegebenen Sachzusammenhang
c1) 1 × A: für das richtige Angeben einer möglichen Zielfunktion
c2) 1 × B: für das richtige Einzeichnen derjenigen Geraden, für die im Lösungsbereich der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird

Catering*

Aufgabennummer: B_410

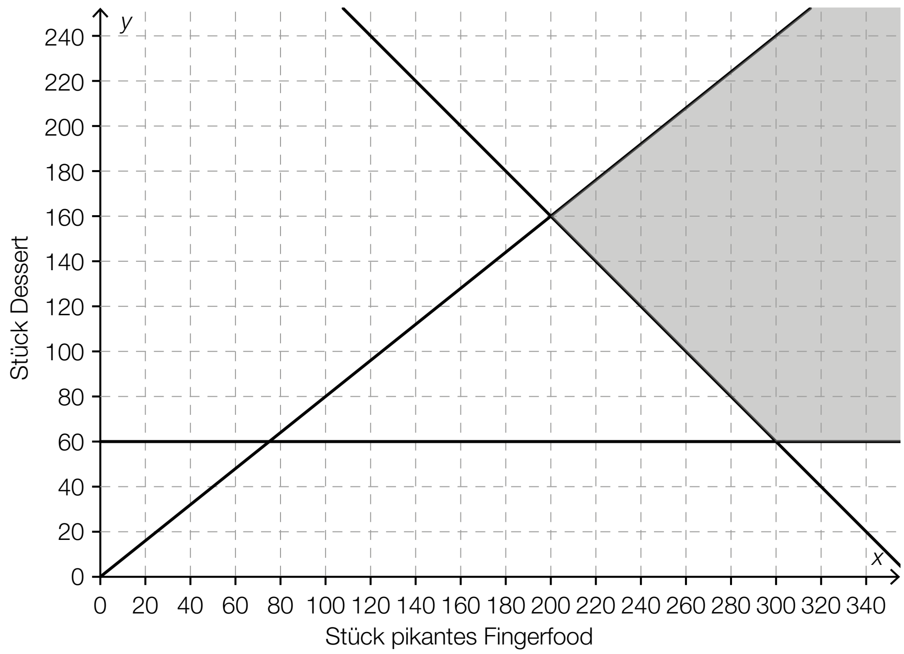
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Rahmen eines Schulprojekts soll eine Schülergruppe Caterings für Events durchführen. Dabei sollen x Stück pikantes Fingerfood und y Stück Dessert geliefert werden.

a) Für ein Event sollen insgesamt mindestens 270 Stück geliefert werden, davon sollen höchstens 100 Stück Dessert sein. Insgesamt sollen mindestens doppelt so viel Stück pikantes Fingerfood wie Stück Dessert geliefert werden.

– Erstellen Sie die Ungleichungen, die diesen Sachverhalt beschreiben.

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich des Ungleichungssystems mit den Vorgaben eines anderen Events dargestellt.

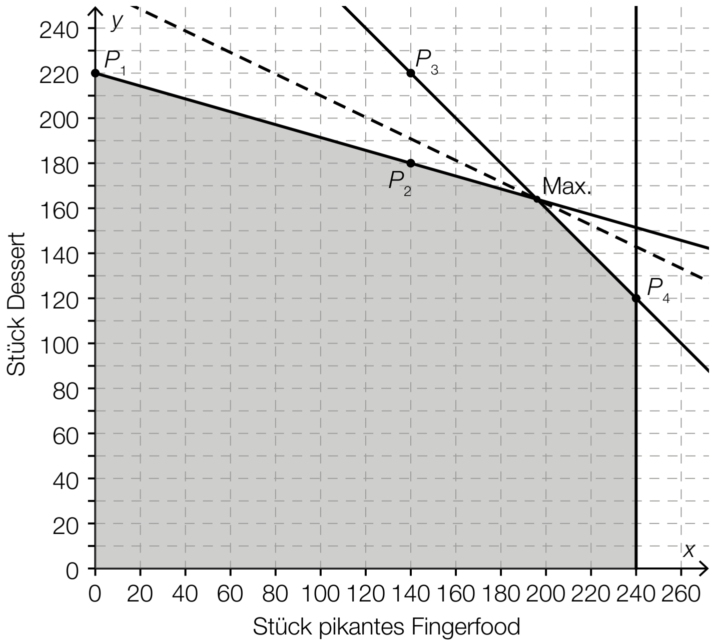


Die Produktionskosten für jedes Stück pikantes Fingerfood betragen € 0,80, für jedes Stück Dessert € 1. Die Gesamtproduktionskosten sollen möglichst gering sein.

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Zielfunktion.
– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, für die im Lösungsbereich des Ungleichungssystems der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.
– Lesen Sie aus der obigen Abbildung diejenigen Produktionsmengen ab, bei der die Gesamtproduktionskosten minimal sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich zur Ermittlung des maximalen Gewinns beim Catering für ein anderes Event dargestellt. Die Gerade, für die der optimale Wert der Zielfunktion angenommen wird, ist strichliert eingezeichnet.



Die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen auf dem Koordinatengitter.

– Erstellen Sie mithilfe der eingezeichneten Punkte die Gleichungen der beiden Begrenzungsgeraden, die zum Bestimmen der Produktionsmengen für den maximalen Gewinn benötigt werden.
– Berechnen Sie diejenigen Stückzahlen an pikantem Fingerfood und Dessert, bei denen ein maximaler Gewinn erzielt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

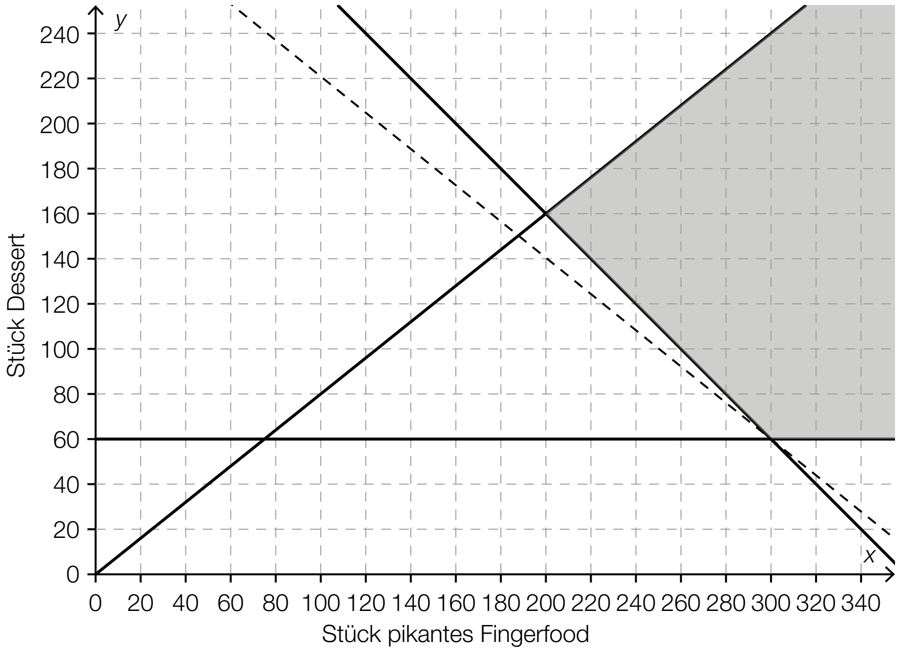
Möglicher Lösungsweg

a) x ... Stück pikantes Fingerfood
y ... Stück Dessert

I: $x + y \geq 270$
II: $y \leq 100$
III: $x \geq 2 \cdot y$
IV: $x \geq 0$
V: $y \geq 0$

Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b) $Z(x, y) = 0{,}80 \cdot x + 1 \cdot y$



Die Gesamtproduktionskosten sind bei einer Produktion von 300 Stück pikantem Fingerfood und 60 Stück Dessert minimal.

c) P_1P_2: $y = -\frac{2}{7} \cdot x + 220$
P_3P_4: $y = -x + 360$

$-x + 360 = -\frac{2}{7} \cdot x + 220$

$140 = \frac{5}{7} \cdot x$

$x = 196 \;\Rightarrow\; y = 164$

Der maximale Gewinn wird bei einer Produktion von 196 Stück pikantem Fingerfood und 164 Stück Dessert erzielt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Ungleichung (Einschränkung „mindestens 270 Stück“)
1 × A2: für das richtige Erstellen der Ungleichung (Einschränkung „höchstens 100 Stück Dessert“)
1 × A3: für das richtige Erstellen der Ungleichung (Einschränkung „mindestens doppelt so viel ...“)
Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Zielfunktion
1 × B: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
1 × C: für das richtige Ablesen der optimalen Produktionsmengen

c) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung der Geraden P_1P_2
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Geraden P_3P_4
1 × B: für die richtige Berechnung der Stückzahlen an pikantem Fingerfood und Dessert mit maximalem Gewinn

Fairtrade*

Aufgabennummer: B_399

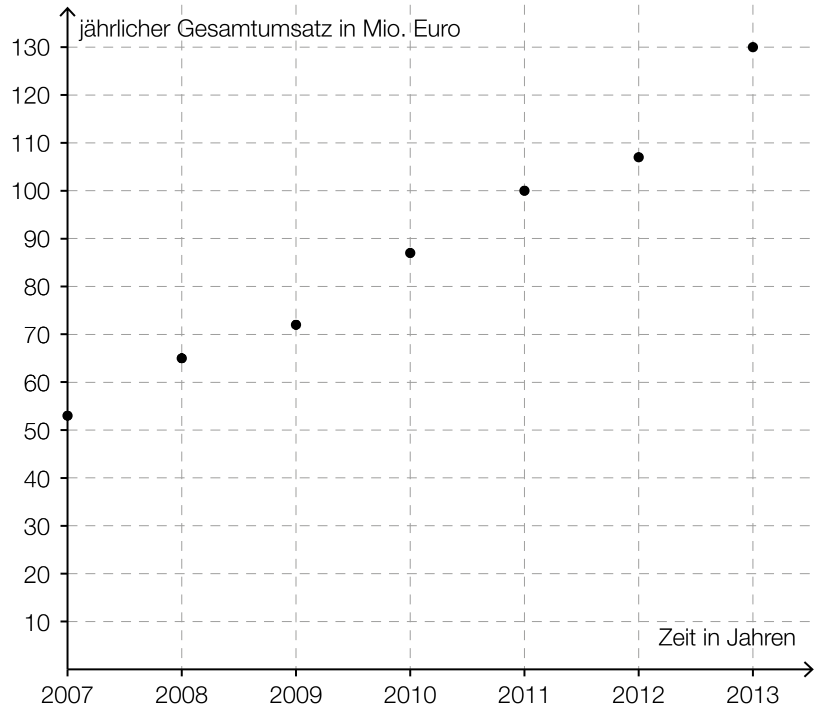
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Gesamtumsatz von Fairtrade-Produkten in Österreich ist in den letzten Jahren deutlich gestiegen:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
jährlicher Gesamtumsatz in Millionen (Mio.) Euro	53	65	72	87	100	107	130

Quelle: http://www.fairtrade.at/fileadmin/AT/Materialien/2013_FAIRTRADE_Inside_Zahlen_Fakten.pdf [05.09.2016].

a) Die nachstehende Abbildung zeigt diese Gesamtumsatzentwicklung.



Der jährliche Gesamtumsatz soll in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.
– Zeichnen Sie den Graphen der Regressionsfunktion im obigen Koordinatensystem ein.
– Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Gesamtumsatzentwicklung ist.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells den zu erwartenden jährlichen Gesamtumsatz im Jahr 2020.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Betrachtet man nur den Zeitraum von 2009 bis 2013, so kann die Entwicklung des Gesamtumsatzes näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(t) = 13{,}6 \cdot t + 72$

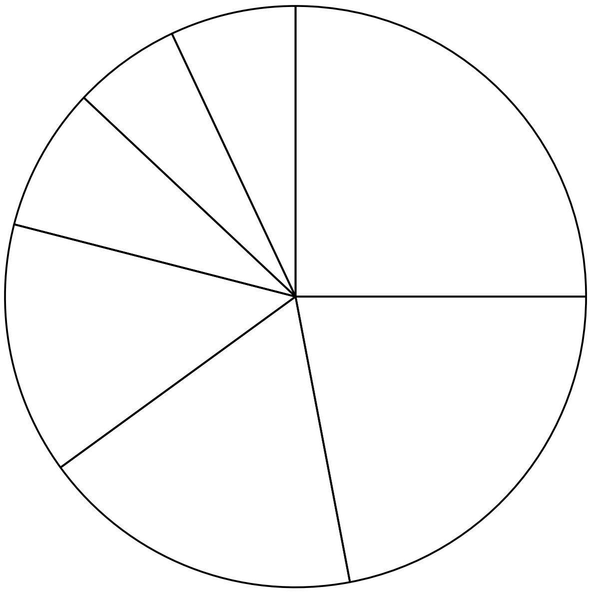
t ... Zeit in Jahren ab 2009 ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2009)
$f(t)$ ... jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro

– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Im Jahr 2012 teilte sich der Gesamtumsatz auf folgende 7 Bereiche auf:
Baumwolle, frische Früchte, Fruchtsäfte, Kaffee, Rosen, Süßwaren und Rest.

Der Umsatz an Kaffee betrug in diesem Jahr 18 % des Gesamtumsatzes.

– Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm denjenigen Sektor, der dem Umsatz an Kaffee entspricht.



Der Umsatz an Süßwaren betrug 2012 etwa 24 Mio. Euro.

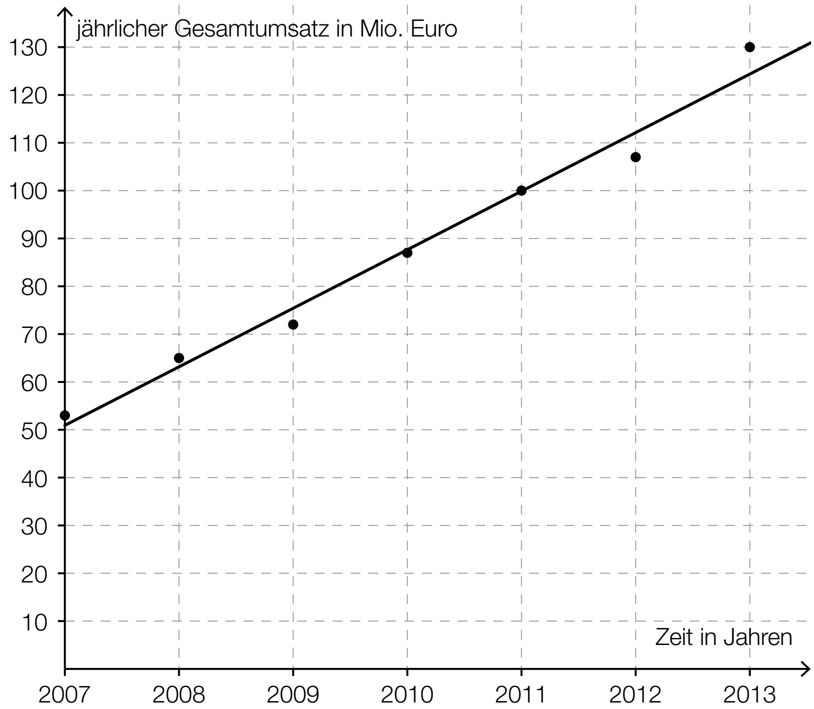
– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Umsatz an Süßwaren in Bezug auf den Gesamtumsatz im Jahr 2012 (siehe Tabelle) betrug.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 12{,}25 \cdot t + 50{,}96$ (Koeffizienten gerundet)

t … Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2007)
$f(t)$ … jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro



Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}991$

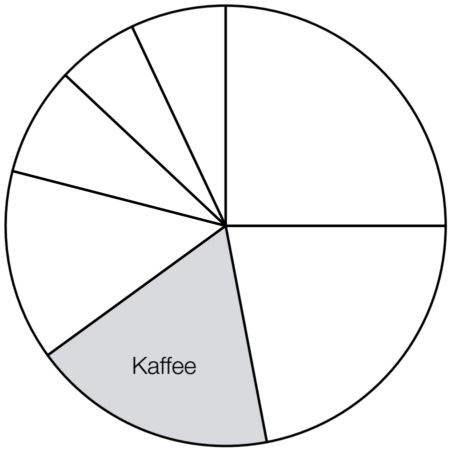
Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$f(13) = 210{,}2\ldots$

Gemäß diesem Modell wird der jährliche Gesamtumsatz im Jahr 2020 rund 210 Millionen Euro betragen.

b) Gemäß diesem Modell steigt der jährliche Gesamtumsatz pro Jahr um 13,6 Millionen Euro.

c)



$\frac{24}{107} = 0{,}2242... \approx 22{,}4\ \%$

Der Umsatz an Süßwaren betrug im Jahr 2012 rund 22,4 Prozent des Gesamtumsatzes.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × B2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Regressionsfunktion
1 × D: für die richtige Beurteilung mithilfe des Korrelationskoeffizienten
1 × B3: für die richtige Berechnung des jährlichen Gesamtumsatzes im Jahr 2020

b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Sektors, der den Umsatz an Kaffee darstellt
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

Seegrundstück*

Aufgabennummer: B_415

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für den Kauf eines Seegrundstücks benötigt der Käufer einen Kredit in Höhe von € 865.000. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

a) Ein Kreditinstitut macht folgendes Angebot:
Der Kreditnehmer bezahlt am Ende jedes Jahres eine Rate in Höhe von € 100.000 bei einem Zinssatz von 6,75 % p. a.

– Berechnen Sie, wie viele volle Raten der Kreditnehmer bezahlen muss.
– Berechnen Sie die Höhe des ein Jahr nach der letzten vollen Rate fälligen Restbetrags.

b) Ein anderes Kreditinstitut stellt einen Tilgungsplan zur Rückzahlung des Kredits auf. Ein Ausschnitt dieses Tilgungsplans ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 865.000
1	€ 51.467,50	€ 53.532,50		
2	€ 48.282,32	€ −48.282,32		
...				

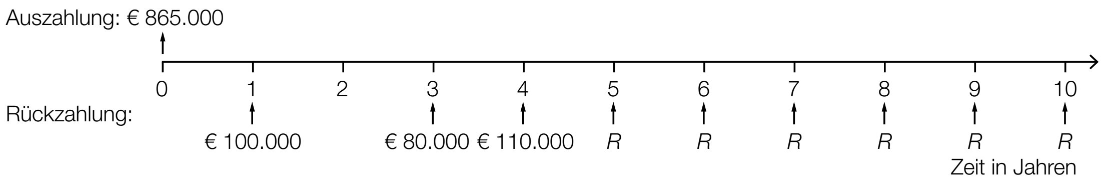
– Ermitteln Sie die Annuität und die Restschuld im Jahr 1.

Im Jahr 2 sind die beiden Einträge in den Spalten „Zinsanteil“ und „Tilgungsanteil“ bis auf das Vorzeichen gleich.

– Beschreiben Sie die Auswirkungen auf die Restschuld im Jahr 2.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein weiteres Angebot zur Rückzahlung des Kredits innerhalb von 10 Jahren kann mithilfe folgender Zeitachse dargestellt werden:



– Beschreiben Sie den Rückzahlungsvorgang des in der Zeitachse dargestellten Angebots in Worten.
– Berechnen Sie die Ratenhöhe R bei einem Zinssatz von 6 % p.a.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $865\,000 = 100\,000 \cdot \frac{1{,}0675^n - 1}{0{,}0675} \cdot \frac{1}{1{,}0675^n}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$n = 13{,}42...$
Der Kreditnehmer muss 13 volle Raten bezahlen.

$$\left(865\,000 - 100\,000 \cdot \frac{1{,}0675^{13} - 1}{0{,}0675} \cdot \frac{1}{1{,}0675^{13}}\right) \cdot 1{,}0675^{14} = 43\,077{,}457...$$

Die Höhe des Restbetrags beträgt € 43.077,46.

b) Annuität im Jahr 1: $51\,467{,}50 + 53\,532{,}50 = 105\,000$
Restschuld im Jahr 1: $865\,000 - 53\,532{,}50 = 811\,467{,}50$
Im Jahr 1 beträgt die Annuität € 105.000 und die Restschuld € 811.467,50.

Die Restschuld erhöht sich um die anfallenden Zinsen.

c) Jeweils am Ende des ersten, des dritten und des vierten Jahres erfolgt eine Einmalzahlung in Höhe von € 100.000, € 80.000 bzw. € 110.000.
Ab dem fünften Jahr wird eine 6-mal zahlbare nachschüssige Jahresrate in Höhe von R vereinbart.

Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre:
$865\,000 \cdot 1{,}06^4 - 100\,000 \cdot 1{,}06^3 - 80\,000 \cdot 1{,}06 - 110\,000 = 778\,140{,}970...$

$778\,140{,}970... = R \cdot \frac{1{,}06^6 - 1}{0{,}06} \cdot \frac{1}{1{,}06^6}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $R = 158\,244{,}793...$

Die Ratenhöhe beträgt € 158.244,79.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe des Restbetrags

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Annuität und der Restschuld im Jahr 1
1 × C: für die richtige Beschreibung der Auswirkungen auf die Restschuld im Jahr 2

c) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Rückzahlungsvorgangs
1 × A: für einen richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Ratenhöhe

Weinbau (1)*

Aufgabennummer: B_412

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Aus nostalgischen Gründen werden in einem kleinen Weingut Trauben der Sorte *Welschriesling* mit einer renovierten Handpresse gepresst.
Der zylinderförmige Korb, in dem die Weintrauben gepresst werden, hat dabei die folgenden Abmessungen:
Höhe h = 80 cm, Innenradius r = 42 cm.

– Überprüfen Sie nachweislich mithilfe der Volumsformel des Drehzylinders, ob die nachstehenden Aussagen jeweils richtig sind.

Aussage 1: „Wäre die Presse 1,6 m hoch (bei gleichem Durchmesser), so würde sie das doppelte Volumen fassen."
Aussage 2: „Hätte die Presse einen Innenradius von 84 cm (bei gleicher Höhe), so würde sie das doppelte Volumen fassen."

Der Korb ist zu 95 % mit Trauben gefüllt. Aus diesen Trauben werden 350 Liter Traubenmost gepresst.

– Berechnen Sie den prozentuellen Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Volumen der Trauben.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Weine der Sorten *Zweigelt* und *Grüner Veltliner* werden in Kisten zu 12 Flaschen und Kartons zu 6 Flaschen verkauft. Die Preise pro Flasche sind unabhängig von der Packungsgröße.

1 Kiste *Zweigelt* und 1 Karton *Grüner Veltliner* kosten insgesamt € 47,40.
2 Kisten *Grüner Veltliner* und 1 Karton *Zweigelt* kosten insgesamt € 72.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem der Preis für eine Flasche *Zweigelt* und der Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner* berechnet werden können.
– Berechnen Sie den Preis für eine Flasche *Zweigelt* und den Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner*.

c) Der Wein wird mit einem manuellen Reihenfüller in Flaschen abgefüllt. Das Füllvolumen der Flaschen kann dabei als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden. Es liegen 95 % der Füllvolumina in dem um μ symmetrischen Intervall von 995 Millilitern (ml) bis 1 015 ml.

– Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Füllvolumens der Flaschen.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ.

Möglicher Lösungsweg

a) Aussage 1 ist richtig, weil das Volumen direkt proportional zur Höhe ist.
Aussage 2 ist falsch, weil das Volumen nicht direkt proportional zum Radius ist.
Bei Verdoppelung des Radius erhält man das vierfache Volumen.

Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.

Volumen der Trauben im Korb in Litern: $0{,}95 \cdot 4{,}2^2 \cdot \pi \cdot 8 = 421{,}1...$
relativer Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Traubenvolumen:
$\frac{350}{421{,}1...} = 0{,}8310... \approx 83{,}1\ \%$

b) z ... Preis für 1 Flasche *Zweigelt*
g ... Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*

I: $12 \cdot z + 6 \cdot g = 47{,}40$
II: $24 \cdot g + 6 \cdot z = 72$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$z = 2{,}80$
$g = 2{,}30$

Preis für 1 Flasche *Zweigelt*: € 2,80
Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*: € 2,30

c) $\mu = \frac{995 + 1\,015}{2} = 1\,005$
Der Erwartungswert beträgt 1 005 ml.

X ... Füllvolumen in ml

$P(X \leq 1\,015) = 0{,}975$

Berechnung von σ mittels Technologieeinsatz: $\sigma = 5{,}1...$

Die Standardabweichung beträgt rund 5 ml.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für den richtigen Nachweis zur Aussage 1
1 × D2: für den richtigen Nachweis zur Aussage 2
Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.
1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Anteils

b) 1 × A: für das richtige Erstellen eines Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Preise

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

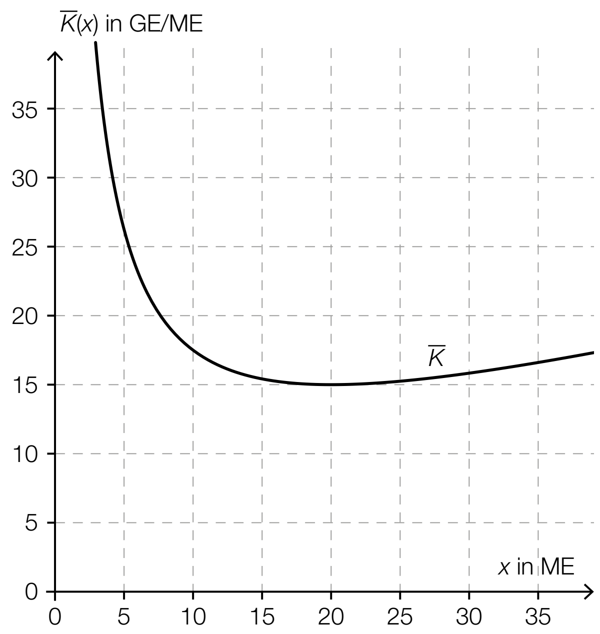
Lampenproduktion (1)*

Aufgabennummer: B_419

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert verschiedene Lampen.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ der Leuchte *Credas* dargestellt.



Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' ist gegeben durch:

$K'(x) = 0{,}5 \cdot x + 5$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei x produzierten ME in GE/ME

– Zeichnen Sie den Graphen der Grenzkostenfunktion K' in der obigen Abbildung ein.
– Lesen Sie das Betriebsoptimum ab.
– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.
– Berechnen Sie die Fixkosten.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Kosten für die Produktion der Pendelleuchte *Ecos* lassen sich näherungsweise durch eine Kostenfunktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155$

x ... Anzahl der produzierten ME
$K(x)$ ... Kosten bei x produzierten ME in GE

Die Pendelleuchte wird zu einem fixen Preis von 9 GE/ME verkauft.

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.
– Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.
– Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

c) Für eine quadratische Gewinnfunktion G gilt:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... Anzahl der abgesetzten ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

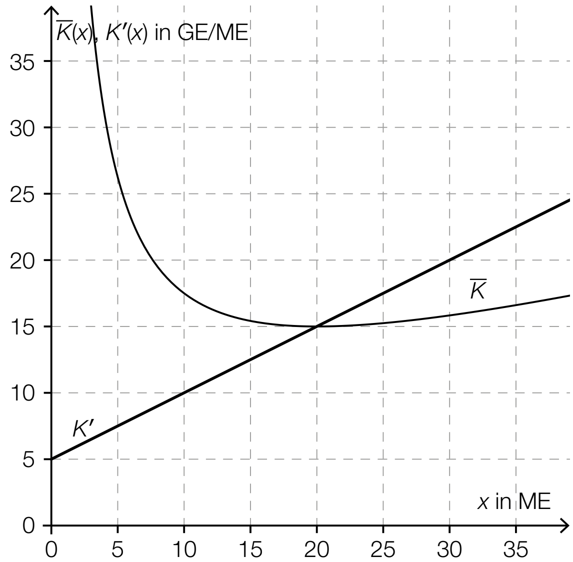
Es wird behauptet, dass die Extremstelle von G bei $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ liegt.

– Zeigen Sie, dass diese Behauptung stimmt.
– Geben Sie an, welche Bedingung für den Koeffizienten a gelten muss, damit an dieser Stelle ein Maximum vorliegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Betriebsoptimum: $x_{opt} = 20$ ME
Toleranzbereich: [18 ME; 22 ME]

$K(x) = \int (0{,}5 \cdot x + 5)\,\mathrm{d}x =$
$= 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$
$K(20) = 20 \cdot 15 = 300$
$300 = 0{,}25 \cdot 20^2 + 5 \cdot 20 + C$
$C = 100$

Die Fixkosten betragen 100 GE.

b) $G(x) = E(x) - K(x) = 9 \cdot x - (0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155) = -0{,}05 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 155$

$G(x) = 0$:
Lösen der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $x_1 = 37{,}639...$ ME $\approx 37{,}64$ ME,
$x_2 = 82{,}360...$ ME $\approx 82{,}36$ ME

$G'(x) = 0$:
$0 = -0{,}1 \cdot x + 6$
$x = 60$
$G(60) = 25$

Der maximale Gewinn beträgt 25 GE.

Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist hier nicht erforderlich.

c) $G'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$
$\Rightarrow\ x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$

Es muss gelten: $a < 0$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Grenzkostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [18 ME; 22 ME]
1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion (ohne Berechnung der Integrationskonstanten)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Fixkosten

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gewinngrenzen
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns (Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, ist nicht erforderlich.)

c) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × A: für das richtige Angeben der Bedingung

Bügeleisen*

Aufgabennummer: B_217

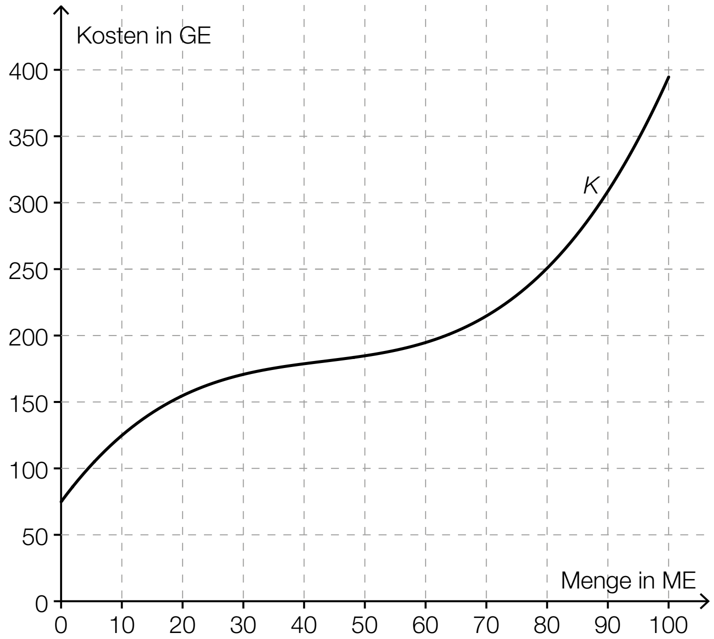
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



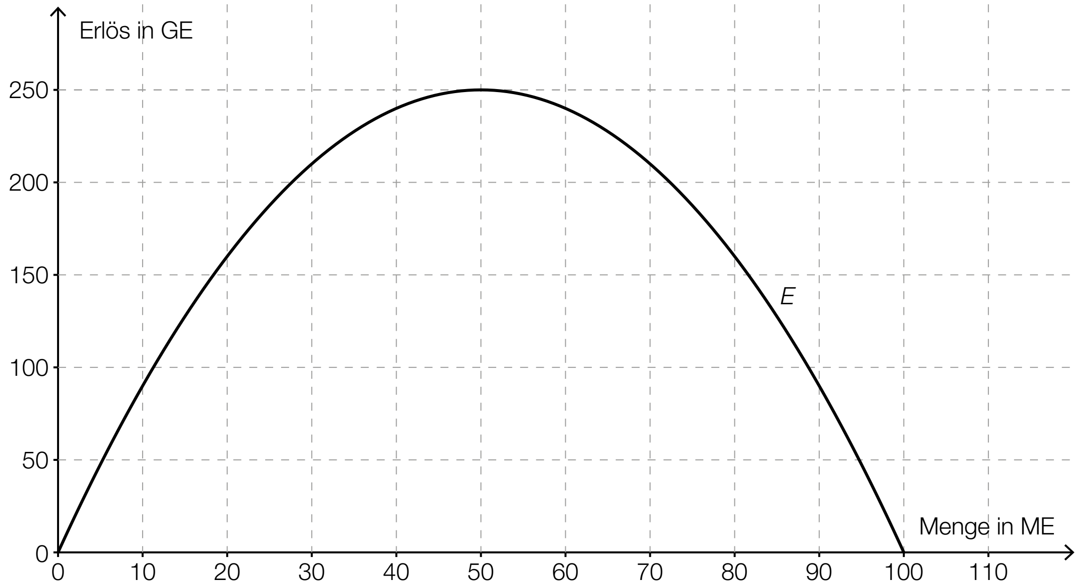
Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.
– Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind.

c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss.
– Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf.
– Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Intervall [0; 43] ist der Kostenverlauf degressiv.
Toleranzbereich der oberen Grenze: [40; 50]

b) $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}13 \cdot x + 6{,}2 + \frac{75}{x}$

$\overline{K}'(x) = 0{,}002 \cdot x - 0{,}13 - \frac{75}{x^2}$

$\overline{K}'(x_{opt}) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $x_{opt} = 72{,}19...$
Bei einer Produktion von rund 72,2 ME sind die Stückkosten minimal.

$\overline{K}(x_{opt}) = K'(x_{opt})$
minimale Stückkosten bei dieser Produktionsmenge: $\overline{K}(72{,}2) = 3{,}06...$
Grenzkosten bei dieser Produktionsmenge: $K'(72{,}2) = 3{,}06...$

Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist.

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$
$E(100) = 0$
$E(50) = 250$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x - (0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75)$
$G(x) = -0{,}001 \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 + 3{,}8 \cdot x - 75$

$G(x) = 50$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 34{,}17...$, $x_2 = 58{,}42...$
Bei einer Produktion von rund 34,2 ME bzw. rund 58,4 ME kann jeweils ein Gewinn von 50 GE erzielt werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des gesamten Bereichs, in dem der Kostenverlauf degressiv ist

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Produktionsmenge, bei der die Stückkosten minimal sind
1 × D: für den richtigen Nachweis
Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) 1 × D: für die richtige Argumentation mithilfe des Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung

Pensionsvorsorge*

Aufgabennummer: B_420

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Alexander möchte für seine Pension ansparen. In den folgenden Aufgaben wird die Kapitalertragssteuer nicht berücksichtigt.

a) Er zahlt 15 Jahre lang monatlich vorschüssig € 400 auf ein mit 0,27 % p. m. verzinstes privates Pensionskonto und lässt sein Geld anschließend 25 Jahre bei gleichbleibendem Zinssatz angelegt.

– Berechnen Sie seinen privaten Pensionsbetrag nach 40 Jahren.

b) Eine Bank unterbreitet ihm folgenden Vorschlag:
Durch Einzahlungen von € 20.000 sofort, € 30.000 nach 5 Jahren und € 40.000 nach 15 Jahren garantiert sie ihm nach insgesamt 40 Jahren ein angespartes Kapital von € 200.000.

– Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Einzahlungen und angespartes Kapital) auf einer Zeitachse.
– Berechnen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz.

c) Er hat auf seinem privaten Pensionskonto, das mit 2 % p. a. verzinst wird, einen Betrag in Höhe von € 200.000 angespart.

Nun vergleicht er zwei Auszahlungsvarianten:
Variante 1: Er hebt am Ende jedes Jahres € 12.000 ab.
Variante 2: Er hebt am Ende jedes Jahres € 4.000 ab.

– Berechnen Sie, wie oft er bei Variante 1 den vollen Betrag abheben könnte.
– Erklären Sie, warum bei Variante 2 das angesparte Kapital am Pensionskonto erhalten bleibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

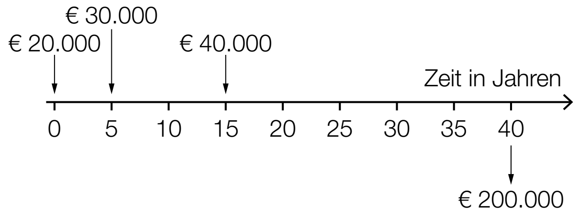
Möglicher Lösungsweg

a) $400 \cdot 1{,}0027 \cdot \frac{1{,}0027^{180} - 1}{0{,}0027} = 92\,803{,}312...$

$92\,803{,}312... \cdot 1{,}0027^{300} = 208\,385{,}722...$

Sein privater Pensionsbetrag beträgt nach 40 Jahren rund € 208.385,72.

b)



$200\,000 = 20\,000 \cdot (1 + i)^{40} + 30\,000 \cdot (1 + i)^{35} + 40\,000 \cdot (1 + i)^{25}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$i = 0{,}02514...$

Der zugehörige Jahreszinssatz beträgt rund 2,51 % p. a.

c) $200\,000 = 12\,000 \cdot \frac{1{,}02^{n} - 1}{0{,}02} \cdot \frac{1}{1{,}02^{n}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$n = 20{,}4...$

Er könnte 20-mal den vollen Betrag in Höhe von € 12.000 abheben.

Bei Variante 2 bleibt das angesparte Kapital erhalten, weil der Betrag, den er am Ende jedes Jahres abhebt, genau den anfallenden Zinsen entspricht.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Pensionsbeitrags nach 40 Jahren

b) 1 × A: für das richtige Darstellen auf einer Zeitachse
1 × B: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten
1 × D: für die richtige Erklärung

Grenzkosten und Grenzerlös*

Aufgabennummer: B_421

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Produktionskosten eines Unternehmens lassen sich näherungsweise durch die folgende Kostenfunktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}115 \cdot x^2 + 5{,}2 \cdot x + 50$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

- Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von K, wenn die Produktion von 20 ME auf 25 ME erhöht wird.
- Berechnen Sie die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME.
- Interpretieren Sie diesen Grenzkostenwert im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ das Betriebsoptimum zu ermitteln, wurde folgende Rechnung angesetzt:

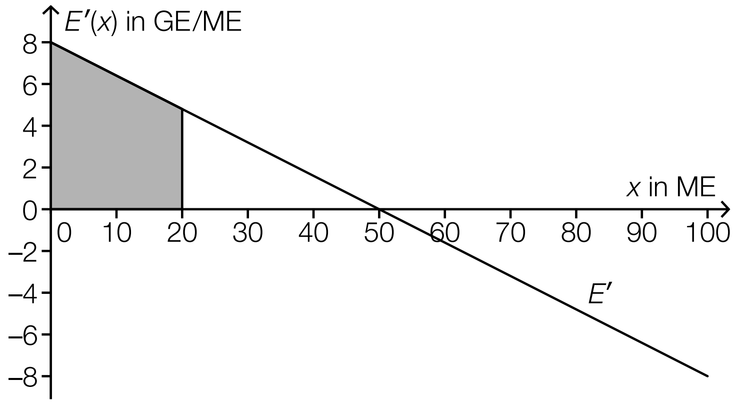
$$\frac{K(x)}{x} = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$$

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b + \frac{d}{x}$$

Dabei ist die Berechnung der Ableitungsfunktion fehlerhaft.

– Stellen Sie die Berechnung der Ableitungsfunktion richtig.

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Grenzerlösfunktion E' dargestellt.



– Stellen Sie eine Gleichung von E' auf.
– Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.
– Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstelle von E' in Bezug auf die zugehörige Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{K(25) - K(20)}{25 - 20} = \frac{123{,}75 - 116}{5} = \frac{7{,}75}{5} = 1{,}55$

Die mittlere Änderungsrate von K im Intervall [20 ME; 25 ME] beträgt 1,55 GE/ME.

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 0{,}23 \cdot x + 5{,}2$

$K'(20) = 1{,}8$

Die Grenzkosten bei einer Produktion von 20 ME betragen 1,8 GE/ME.

Bei einer Produktionsmenge von 20 ME führt eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1,8 GE.

b) $\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 2 \cdot a \cdot x + b - \frac{d}{x^2}$

c) $E'(x) = -\frac{8}{50} \cdot x + 8$

$E'(20) = 4{,}8$

$A = \frac{(8 + 4{,}8) \cdot 20}{2} = 128$

Bei 20 abgesetzten ME beträgt der Erlös 128 GE.
Bei 50 abgesetzten ME ist der Erlös maximal.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate
1 × B2: für die richtige Berechnung der Grenzkosten
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × B: für das Richtigstellen der Berechnung der Ableitungsfunktion

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Grenzerlösfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
1 × C1: für die richtige Interpretation des Inhalts der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der Einheit
1 × C2: für die richtige Interpretation der Nullstelle von E' in Bezug auf die Erlösfunktion E im gegebenen Sachzusammenhang

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Wohnungen (1)*

Aufgabennummer: B_423

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder erstellt Statistiken zu den Trends auf dem Immobilienmarkt. Es werden die ortsüblichen Kaufpreise und Mieten erhoben. Die Höhe der Kaufpreise bzw. der Mieten hängt in der Regel stark von der Größe, der Ausstattung und der Lage der Wohnungen ab.

a) Für eine österreichische Landeshauptstadt hat der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder die Mietpreise in Euro pro m² für Wohnungen bis zu 60 m² mit gutem Wohnwert erhoben:

Ende des Jahres ...	Mietpreis in Euro pro m²
2003	8,10
2004	7,90
2005	8,20
2006	8,50
2007	8,80
2008	9,30
2009	9,60
2010	9,70
2011	10,30
2012	10,80

Der Mietpreis in Euro pro m² soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe von linearer Regression eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 2003.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den Mietpreis pro m² für das Ende des Jahres 2018.

Ein anderes Modell verwendet zur Beschreibung der Mietpreisentwicklung die Funktion B.

$B(t) = 7{,}77 \cdot 1{,}035^t$

t ... Zeit in Jahren ab Ende des Jahres 2003
$B(t)$ ... Mietpreis zur Zeit t in Euro pro m²

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2001 lebten im Bundesland Tirol in 303 632 Wohnungen 661 026 Personen. Die nachstehende Tabelle gibt die Anzahl dieser Wohnungen aufgelistet nach dem Merkmal „Anzahl der Wohnräume“ an.

Anzahl der Wohnräume	Anzahl der Wohnungen
1	19 372
2	28 973
3	61 002
4	80 331
5	56 878
6	57 076
Summe	303 632

– Beschreiben Sie in Worten, was durch folgende Ausdrücke im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:

(1) $\frac{661\,026}{303\,632} \approx 2{,}18$

(2) $\frac{1 \cdot 19\,372 + 2 \cdot 28\,973 + 3 \cdot 61\,002 + 4 \cdot 80\,331 + 5 \cdot 56\,878 + 6 \cdot 57\,076}{303\,632} \approx 3{,}98$

c) Der durchschnittliche Preis für Eigentumswohnungen mit gutem Wohnwert wurde in einer Landeshauptstadt jeweils am Ende des Jahres erhoben.

Die nachstehende Tabelle gibt die prozentuelle Steigerung des Preises pro m^2 am Ende des Jahres gegenüber dem Preis pro m^2 am Ende des jeweiligen Vorjahres für die Jahre 2009 bis 2013 an.

Ende des Jahres ...	Preissteigerung gegenüber dem Preis pro m^2 am Ende des jeweiligen Vorjahres
2009	5,5 %
2010	1,2 %
2011	7,1 %
2012	6,7 %
2013	5,4 %

Am Ende des Jahres 2013 kostete eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert durchschnittlich € 3.362 pro m^2.

– Berechnen Sie den durchschnittlichen Preis pro m^2 für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert am Ende des Jahres 2010.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Lösung mittels Technologieeinsatz:
$M(t) = 0{,}32 \cdot t + 7{,}69$ (Koeffizienten gerundet)

Die Mietpreise pro m^2 sind im angegebenen Zeitraum um durchschnittlich rund € 0,32 pro Jahr angestiegen.

$M(15) = 12{,}454... \approx 12{,}45$
Gemäß diesem Modell beträgt der Mietpreis pro m^2 am Ende des Jahres 2018 rund € 12,45.

Der Änderungsfaktor 1,035 gibt an, dass die Mietpreise pro m^2 jährlich um 3,5 % steigen.

b) Der Ausdruck (1) gibt die durchschnittliche Anzahl der Personen pro Wohnung (rund 2,18) an.
Der Ausdruck (2) gibt die durchschnittliche Anzahl der Wohnräume pro Wohnung (rund 3,98) an.

c) $\frac{3\,362}{1{,}054 \cdot 1{,}067 \cdot 1{,}071} = 2\,791{,}2... \approx 2\,791$
Der durchschnittliche Preis pro m^2 für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert lag am Ende des Jahres 2010 bei rund € 2.791.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln einer Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C1: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Ende des Jahres 2018
1 × C2: für die richtige Interpretation des Werts 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (1) im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (2) im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Preises pro m^2 am Ende des Jahres 2010

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lackproduktion*

Aufgabennummer: B_433

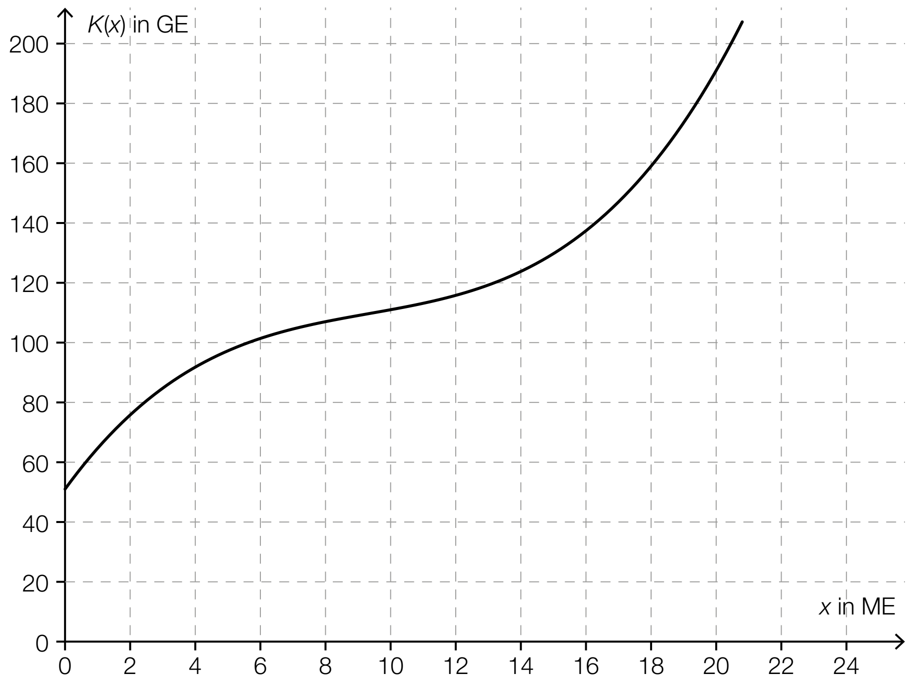
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt verschiedene Lacke her. Es wird die monatliche Produktion betrachtet.

a) Die Kosten für die Herstellung des Acryllacks *Ferrocolor* sollen durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Das Unternehmen hat dabei Fixkosten von 450 GE. Bei der Produktion von 8 ME liegt die Kostenkehre. Bei der Produktion von 8 ME betragen die Gesamtkosten 522 GE und die Grenzkosten 5 GE/ME.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten a, b, c und d ermittelt werden können.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten a, b, c und d.

b) Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung des Lacks *VariColor* dargestellt.



Das Betriebsoptimum kann mithilfe des Graphen der Kostenfunktion K ermittelt werden, indem man diejenige Tangente an den Graphen von K einzeichnet, die durch den Koordinatenursprung verläuft. Die x-Koordinate des Berührpunkts ist das Betriebsoptimum.

– Ermitteln Sie grafisch mithilfe des obigen Diagramms das Betriebsoptimum.
– Ermitteln Sie die langfristige Preisuntergrenze.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für die Holzschutzgrundierung *Pullex* wird der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge erhoben:

Absatzmenge x in ME	Preis $p_N(x)$ in GE/ME
10	16
12	13
15	12
17	9
19	8

– Ermitteln Sie mithilfe linearer Regression eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N.
– Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

d) Die Gewinnfunktion G für den Lack *Soloplast* ist gegeben durch:

$G(x) = -0{,}025 \cdot x^3 - 0{,}1 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 65$

x ... Anzahl der abgesetzten ME
$G(x)$ ... Gewinn bei x abgesetzten ME in GE

– Lesen Sie aus der Gleichung der Gewinnfunktion die Fixkosten für die Herstellung des Lacks ab.
– Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Gewinnfunktion ändert, wenn die Fixkosten steigen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

I: $K(0) = 450 \quad \Rightarrow \quad 450 = d$

II: $K(8) = 522 \quad \Rightarrow \quad 522 = 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + 450$

III: $K'(8) = 5 \quad \Rightarrow \quad 5 = 192 \cdot a + 16 \cdot b + c$

IV: $K''(8) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 48 \cdot a + 2 \cdot b$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

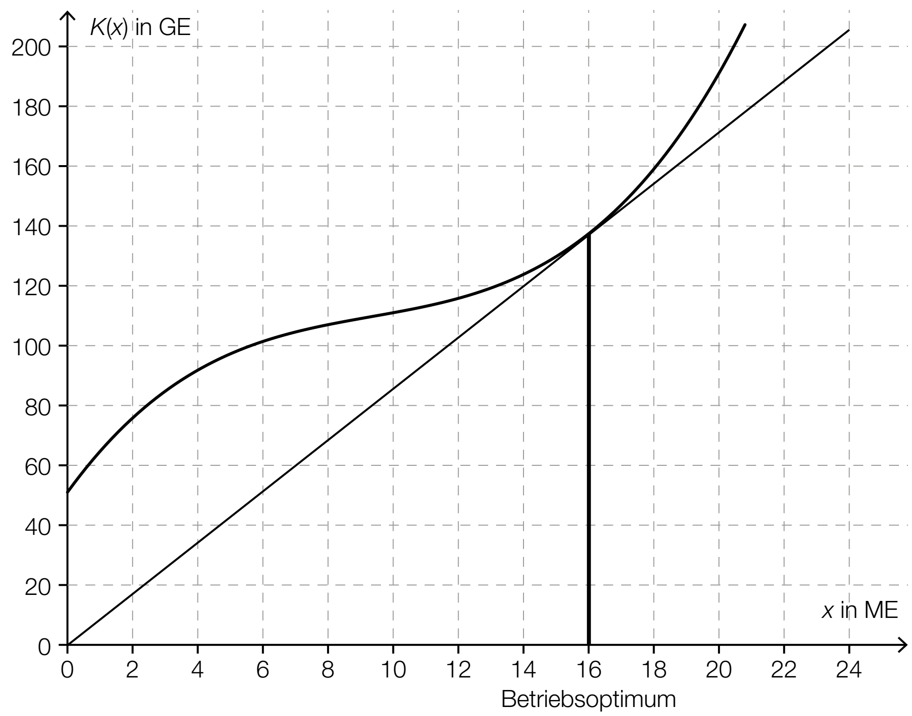
$a = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

$b = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

$c = 17$

$d = 450$

b)



grafische Ermittlung des Betriebsoptimums: 16 ME (Toleranzbereich: [15; 17])

Ermittlung der langfristigen Preisuntergrenze: $\frac{136 \text{ GE}}{16 \text{ ME}} = 8{,}5$ GE/ME

(Toleranzbereich: [8; 9])

c) Berechnung der Preisfunktion der Nachfrage mittels Technologieeinsatz:
$p_N(x) = -0{,}861 \cdot x + 24{,}169$ (Koeffizienten gerundet)

$E(x) = p_N(x) \cdot x$

$E'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 14{,}037...$
$E(14{,}037...) = 169{,}632...$
Der maximale Erlös beträgt rund 169,63 GE.

d) $G(0) = -F$

Die Fixkosten betragen 65 GE.

Wenn die Fixkosten steigen, wird der Graph der Gewinnfunktion nach unten verschoben.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Funktion K
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Funktionen K' und K''
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten a, b, c und d

b) 1 × A: für das richtige grafische Ermitteln des Betriebsoptimums
1 × B: für das richtige Ermitteln der langfristigen Preisuntergrenze

c) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung mithilfe linearer Regression
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Erlöses

d) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Fixkosten
1 × C2: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Graphen der Gewinnfunktion

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Liftgesellschaft (1)*

Aufgabennummer: B_434

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Für die Finanzierung eines Sessellifts hat eine Liftgesellschaft einen Kredit in Höhe von € 1,4 Mio. aufgenommen. Diesen Kredit zahlt die Liftgesellschaft durch nachschüssige Jahresraten in Höhe von € 90.000 bei einer Verzinsung von 4 % p. a. zurück. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

– Berechnen Sie, wie viele volle Jahresraten zu zahlen sind.

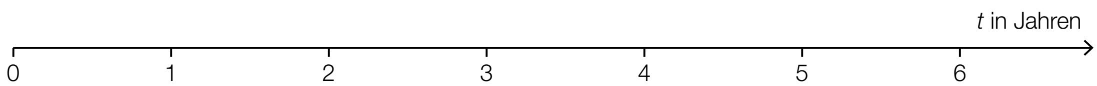
Nach 5 Jahren Kredittilgung gerät die Liftgesellschaft in Zahlungsschwierigkeiten und setzt die Rückzahlungen aus.

– Berechnen Sie die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres.

b) Die Liftgesellschaft bildet eine Rücklage und veranlagt dafür 3 Beträge zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Der Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren wird durch folgende Rechnung ermittelt:

$(50\,000 \cdot 1{,}03^2 + 30\,000) \cdot 1{,}035^4 + 80\,000 \cdot 1{,}035 \approx 178\,096{,}05$

– Beschreiben Sie, zu welchen Zinssätzen der Betrag in Höhe von € 50.000 verzinst wird. Geben Sie an, wie lange die jeweiligen Zinssätze gelten.
– Tragen Sie die 3 Beträge und den Gesamtwert der Rücklage nach 6 Jahren auf der nachstehenden Zeitachse ein.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

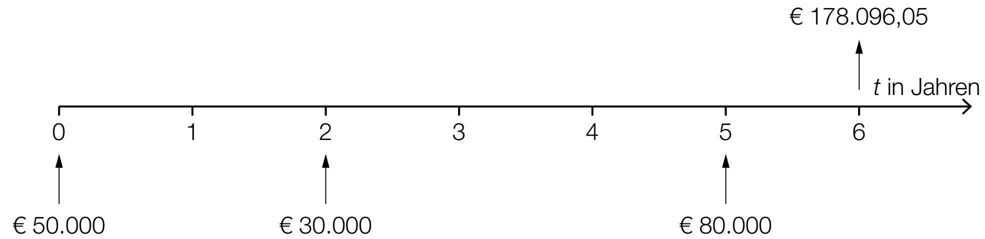
Möglicher Lösungsweg

a) $1\,400\,000 = 90\,000 \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{0{,}04} \cdot \frac{1}{1{,}04^n}$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$n = 24{,}81...$
Die Liftgesellschaft muss 24 volle Jahresraten bezahlen.

$\left(1\,400\,000 \cdot 1{,}04^5 - 90\,000 \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{0{,}04}\right) \cdot 1{,}04 = 1\,264\,478{,}834...$
Die Höhe der Restschuld am Ende des 6. Jahres beträgt € 1.264.478,83.

b) Der Betrag in Höhe von € 50.000 wird 2 Jahre zu 3 % p. a., dann 4 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.



Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Anzahl der Vollraten
1 × B2: für die richtige Berechnung der Restschuld am Ende des 6. Jahres

b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Zinssätze und der Verzinsungsdauer
1 × A: für das richtige Eintragen der 3 Beträge und des Gesamtwerts der Rücklage nach 6 Jahren

Smartphones (2)*

Aufgabennummer: B_079

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Akku eines Smartphones entlädt sich aufgrund von Hintergrundanwendungen auch dann, wenn das Gerät nicht aktiv benützt wird.

Für ein bestimmtes Smartphone wird die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent beobachtet. Zur Zeit $t = 0$ ist der Akku vollständig aufgeladen.

Zeit *t* in Stunden	Akku-Ladestand in Prozent
0	100
3	94
6	81
10	71
18	43

Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent soll beschrieben werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

Bei einem Akku-Ladestand von 15 % sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

– Berechnen Sie, wie viele Stunden nach dem vollständigen Aufladen dies gemäß diesem linearen Regressionsmodell der Fall ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands beim Aufladen lässt sich näherungsweise durch die Funktion A beschreiben:

$A(t) = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn des Aufladens in h
$A(t)$ … Akku-Ladestand zur Zeit t in Prozent
λ … positiver Parameter

– Argumentieren Sie mathematisch, dass sich die Funktionswerte von A mit wachsendem t dem Wert 100 annähern.

2 Stunden nach Beginn des Aufladens beträgt der Akku-Ladestand 80 %.

– Berechnen Sie λ.
– Berechnen Sie, zu welcher Zeit nach Beginn des Aufladens der Akku-Ladestand 90 % beträgt.

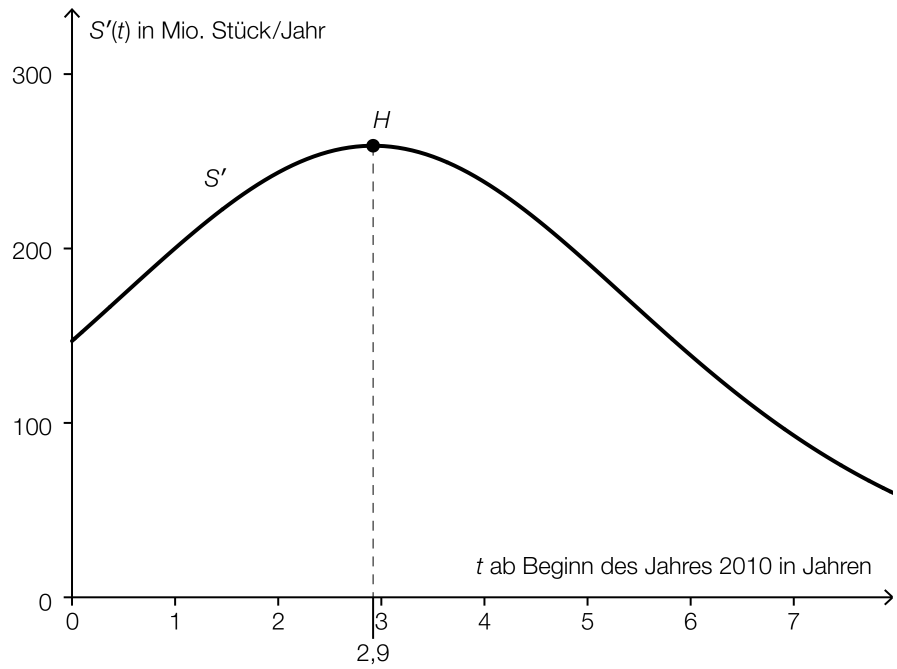
c) Die Entwicklung der weltweiten Verkaufszahlen von Smartphones kann modellhaft durch die Funktion S beschrieben werden:

$$S(t) = \frac{1918}{1 + 4{,}84 \cdot e^{-0{,}54 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2010)
$S(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften Smartphones in Millionen Stück

– Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells die Anzahl der bis zum Beginn des Jahres 2020 insgesamt verkauften Smartphones.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Ableitungsfunktion S' dargestellt. Auf dem Graphen von S' ist der Hochpunkt H markiert.



– Beschreiben Sie die mathematische Bedeutung der Stelle $t = 2{,}9$ in Bezug auf die Funktion S.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$L(t) = -3{,}210 \cdot t + 101{,}554$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in h
$L(t)$ ... Akku-Ladestand zur Zeit t in %

$15 = -3{,}210 \cdot t + 101{,}554$
$t = 26{,}9...$

Nach etwa 27 Stunden sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

b) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-\lambda \cdot t}$ gegen null, und damit geht $100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ gegen 100.

$80 = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot 2}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = 0{,}72345...$

$90 = 100 - 85 \cdot e^{-0{,}72345... \cdot t}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 2{,}9...$

Nach etwa 3 Stunden ist ein Ladestand von 90 % erreicht.

c) $S(10) = \dfrac{1\,918}{1 + 4{,}84 \cdot e^{-0{,}54 \cdot 10}} = 1\,876{,}9...$

Gemäß diesem Modell werden bis zum Beginn des Jahres 2020 rund 1 877 Millionen Smartphones verkauft.

$t = 2{,}9$ ist die Wendestelle der Funktion S.

oder:

$t = 2{,}9$ ist die Stelle maximalen Wachstums von S.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

b) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation
1 × B1: für die richtige Berechnung von λ
1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

c) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Funktionswerts
1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Stelle $t = 2{,}9$ in Bezug auf die Funktion S

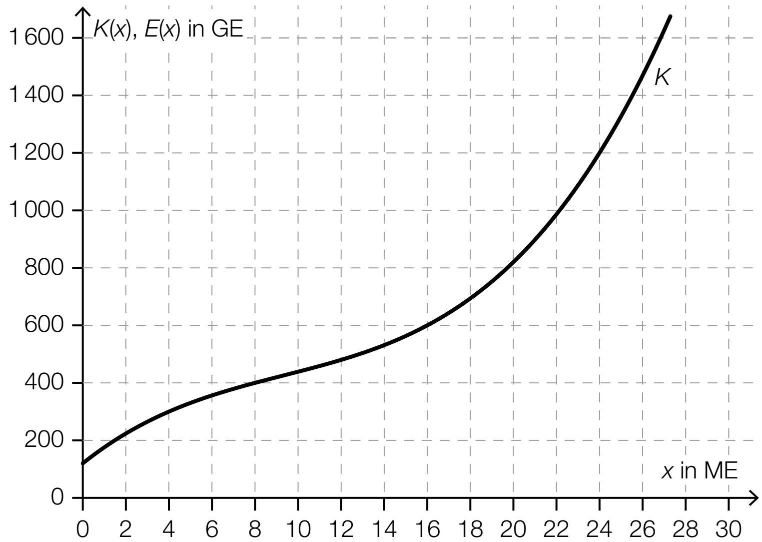
Rohrproduktion*

Aufgabennummer: B_089

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffrohre her, die zu einem fixen Preis verkauft werden.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Kostenfunktion K für die Herstellung der Kunststoffrohre dargestellt.



Der Break-even-Point liegt bei einer Produktion von 8 ME. Die Kosten betragen dabei 400 GE.

– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E im obigen Diagramm ein.
– Ermitteln Sie den zugehörigen Marktpreis.
– Ergänzen Sie in der nachstehenden Wertetabelle die fehlenden Werte für die zugehörige Gewinnfunktion G.

x in ME	0	8	16
$G(x)$ in GE		0	

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von Kunststoffrohren ist gegeben durch:

$K'(x) = \frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60$

x … produzierte Menge in ME
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der produzierten Menge x in GE/ME

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K mit $K(16) = 600$.
– Berechnen Sie die Kostenkehre.

c) Ein anderes Unternehmen stellt Keramikrohre her.

Von der quadratischen Erlösfunktion E ist für den Absatz von 10 ME bekannt:

$E(10) = 15$
$E'(10) = -1{,}5$
$E''(10) = -0{,}6$

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über den Erlös bei einem Absatz von 11 ME an. *[1 aus 5]*

$E(11) = 13{,}2$	☐
$E(11) = 13{,}5$	☐
$E(11) = 14{,}1$	☐
$E(11) = 16{,}2$	☐
$E(11) = 16{,}5$	☐

d) Die Erlösfunktion E für Betonrohre ist gegeben durch:

$E(x) = -3{,}2 \cdot x \cdot (x - 25)$

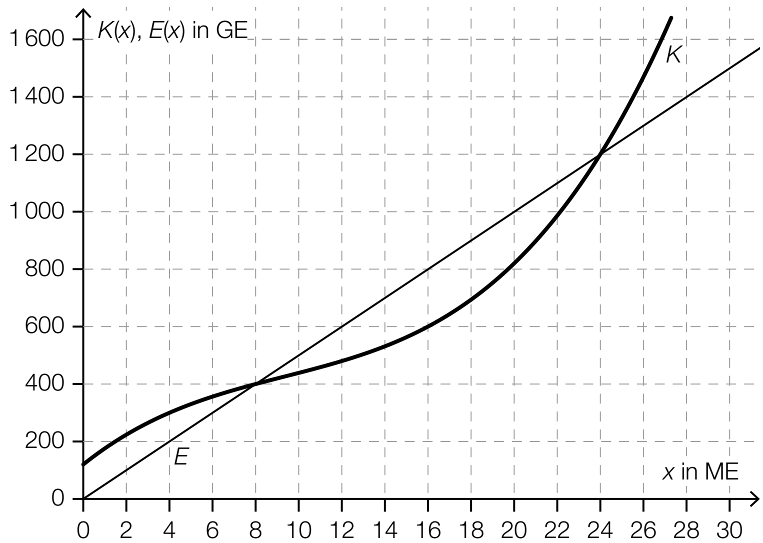
x … Absatzmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.
– Ermitteln Sie den Höchstpreis.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Marktpreis: 50 GE/ME

x in ME	0	8	16
$G(x)$ in GE	**–120**	0	**200**

Toleranzbereiche:
$G(0)$: [–180; –100]
$G(16)$: [150; 250]

b) $K(x) = \int \left(\frac{15}{32} \cdot x^2 - \frac{35}{4} \cdot x + 60\right) \mathrm{d}x = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + 60 \cdot x + F$

$K(16) = 600 \quad \Rightarrow \quad 600 = \frac{5}{32} \cdot 16^3 - \frac{35}{8} \cdot 16^2 + 60 \cdot 16 + F \quad \Rightarrow \quad F = 120$

$K(x) = \frac{5}{32} \cdot x^3 - \frac{35}{8} \cdot x^2 + 60 \cdot x + 120$

$K''(x) = \frac{15}{16} \cdot x - \frac{35}{4}$

$K''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{28}{3}$

Die Kostenkehre liegt bei rund 9,33 ME.

c)

$E(11) = 13{,}2$	☒

d) $p_N(x) = -3{,}2 \cdot x + 80$

x ... Absatzmenge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der Absatzmenge x in GE/ME

Höchstpreis: 80 GE/ME

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
1 × C: für das richtige Ermitteln des Marktpreises
1 × A2: für das richtige Ergänzen der fehlenden Werte in der Tabelle in den angegebenen Toleranzbereichen [–180; –100] bzw. [150; 250]

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre

c) 1 × A: für das richtige Ankreuzen

d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage
1 × C: für das richtige Ermitteln des Höchstpreises

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Baugrundstücke*

Aufgabennummer: B_090

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Preise von Baugrundstücken sind in den letzten Jahren erheblich gestiegen.

a) Herr Pfeifer hat ein Grundstück um € 228.000 gekauft. Nach der Umwidmung in ein Baugrundstück kann er es 4 Jahre später um € 753.000 verkaufen.

– Ermitteln Sie den mittleren jährlichen Zinssatz des eingesetzten Kapitals ohne Berücksichtigung von Spesen, Gebühren und Steuern.

b) Frau Maier möchte ein Baugrundstück verkaufen. Sie bekommt zwei Angebote.

Herr Altmann bietet € 150.000 sofort bei Vertragsabschluss und € 50.000 nach 2 Jahren.
Frau Bogner bietet € 202.000 ein Jahr nach Vertragsabschluss.

Frau Maier vergleicht die beiden Angebote.

– Weisen Sie für einen Zinssatz von 3 % p. a. nach, dass sich die beiden Angebote zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses um rund € 1.013 unterscheiden.

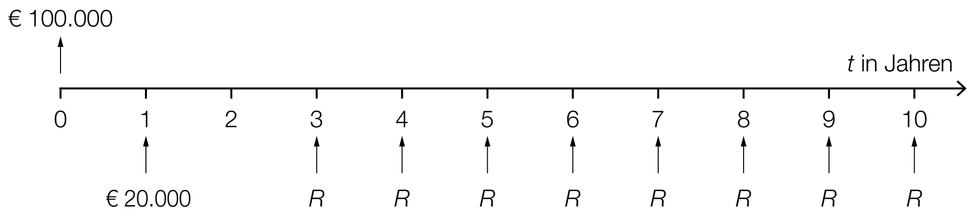
Für die beiden Angebote wird folgende Gleichung aufgestellt:
$150\,000 \cdot x^2 + 50\,000 = 202\,000 \cdot x$
Eine Lösung dieser Gleichung ist $x \approx 1{,}0198$.

– Interpretieren Sie die Bedeutung von x im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Herr Müller nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 100.000 auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 3 % p. a.

Der Kredit soll durch die auf der nachstehenden Zeitachse dargestellten Zahlungen vollständig getilgt werden.



Die Zahlungen R können als nachschüssige Rente aufgefasst werden.

– Markieren Sie auf der Zeitachse den Bezugszeitpunkt für den Barwert dieser nachschüssigen Rente.
– Berechnen Sie die Höhe der Zahlungen R.

d) Frau Marth nimmt für den Kauf eines Baugrundstücks einen Kredit in Höhe von € 120.000 mit jährlich nachschüssigen Kreditrückzahlungen auf. Der vereinbarte Zinssatz beträgt 2,5 % p. a.

Für die ersten zwei Jahre vereinbart Frau Marth Sonderbedingungen, die im nachstehenden Tilgungsplan dargestellt sind.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1			€ 0,00	€ 123.000,00
2		€ 0,00		€ 123.000,00

– Ermitteln Sie die Beträge für die beiden grau markierten Zellen im obigen Tilgungsplan.

Ab dem Jahr 3 werden jährliche Annuitäten in Höhe von € 10.000 bezahlt.

– Berechnen Sie, wie viele volle Annuitäten in Höhe von € 10.000 bezahlt werden müssen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $228\,000 \cdot (1 + i)^4 = 753\,000$

$$i = \sqrt[4]{\frac{753\,000}{228\,000}} - 1 = 0{,}3480...$$

Der mittlere jährliche Zinssatz beträgt rund 34,8 %.

b) Barwertvergleich:

Angebot 1: $150\,000 + \frac{50\,000}{1{,}03^2} = 197\,129{,}795...$

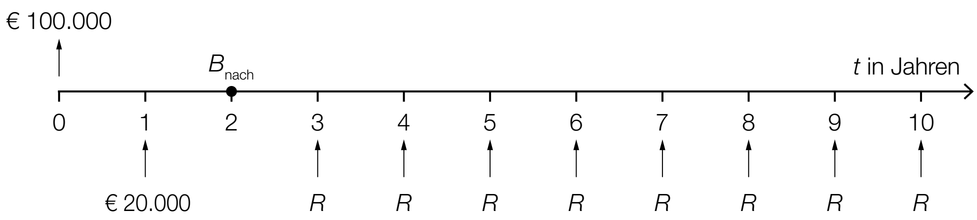
Angebot 2: $\frac{202\,000}{1{,}03} = 196\,116{,}504...$

$197\,129{,}795... - 196\,116{,}504... = 1\,013{,}290...$

Die beiden Angebote unterscheiden sich zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses also um rund € 1.013.

Bei einem Zinssatz von 1,98 % p. a. sind die beiden Angebote äquivalent.

c)



Bewertung aller Zahlungen auf den Bezugszeitpunkt $t = 2$ (Barwert der nachschüssigen Rente): $100\,000 \cdot 1{,}03^2 - 20\,000 \cdot 1{,}03 = 85\,490$

$$85\,490 = R \cdot \frac{1{,}03^8 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^8} \quad \Rightarrow \quad R = 12\,178{,}596...$$

Die Höhe der Zahlungen R beträgt € 12.178,60.

d)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 120.000,00
1		€ –3.000,00	€ 0,00	€ 123.000,00
2		€ 0,00	€ 3.075,00	€ 123.000,00

$$123\,000 = 10\,000 \cdot \frac{1{,}025^n - 1}{0{,}025} \cdot \frac{1}{1{,}025^n}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 14{,}88...$

Die volle Annuität in Höhe von € 10.000 muss 14-mal bezahlt werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des mittleren jährlichen Zinssatzes

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Markieren des Bezugszeitpunkts
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe von R

d) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Tilgungsanteils im Jahr 1 und der Annuität im Jahr 2
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der vollen Annuitäten

Parfumherstellung

In einem Betrieb wird Parfum hergestellt.

a) Die Gesamtkosten für die Produktion des Parfums *Desert* können durch die ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden. Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + c$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME
c ... Parameter

1) Ermitteln Sie, für welche Produktionsmengen ein progressiver Kostenverlauf vorliegt. *[0/1 P.]*

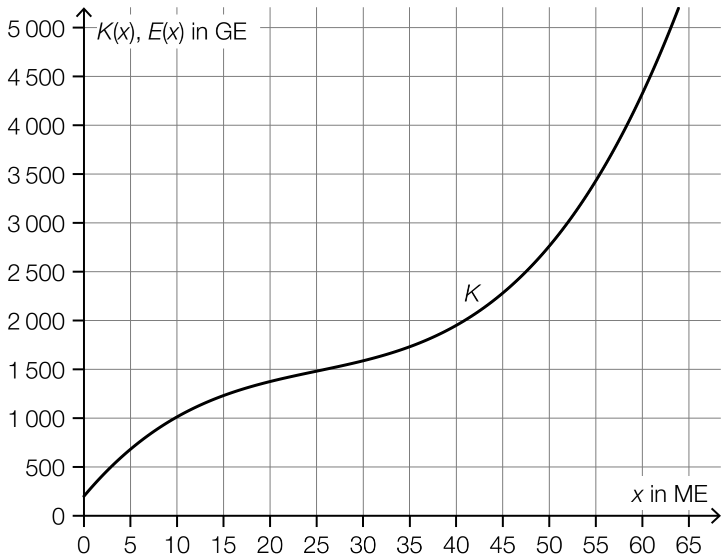
Bei ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen gilt folgende Bedingung:
Die Grenzkostenfunktion muss im gesamten Definitionsbereich positiv sein.

2) Weisen Sie nach, dass diese Bedingung nur für $c > 60$ erfüllt ist. *[0/1 P.]*

Die Fixkosten bei der Produktion dieses Parfums betragen 250 GE.
Es gilt: $c = 80$

3) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K auf. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Gesamtkostenfunktion K für die Produktion des Parfums *Sunrise* dargestellt. Der Verkaufspreis dieses Parfums beträgt 75 GE/ME.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E ein. *[0/1 P.]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Gewinnbereich ab.

[_______ ; _______] (in ME) *[0/1 P.]*

c) Für die Gewinnfunktion G für die Produktion des Parfums *Moonlight* gilt:

$G(x) = -0{,}05 \cdot x^3 + 2{,}4 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 180$

x ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn pro ME, der bei einem Absatz von 25 ME erzielt wird. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $K''(x) = 0{,}3 \cdot x - 6$
$K''(x) = 0$ *oder* $0{,}3 \cdot x - 6 = 0$
$x = 20$

Für $x > 20$ liegt ein progressiver Kostenverlauf vor.

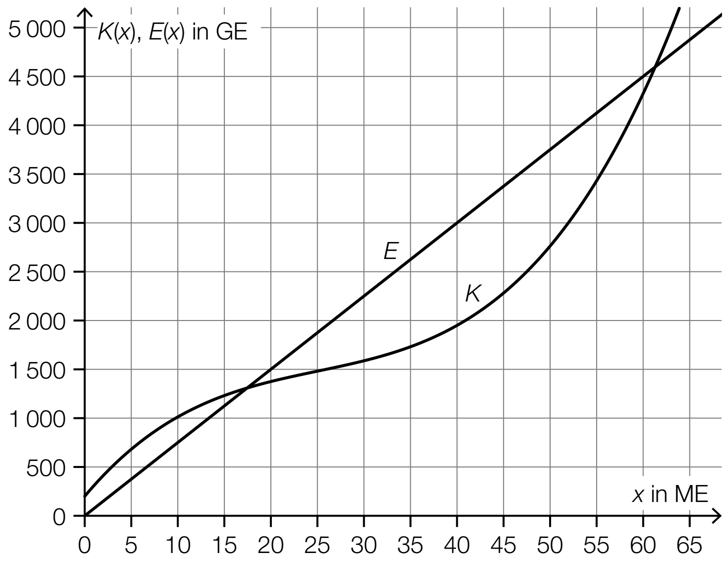
a2) $0{,}15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + c = 0$
$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 0{,}15 \cdot c}}{2 \cdot 0{,}15}$
Der Ausdruck unter der Wurzel muss kleiner als null sein:
$36 - 4 \cdot 0{,}15 \cdot c < 0$
$c > 60$

Auch ein Nachweis, dass $K'(20) = 0$ *für* $c = 60$ *gilt, ist im Hinblick auf die Punktevergabe ausreichend.*

a3) $\int (0{,}15 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 80)\,\mathrm{d}x = 0{,}05 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 80 \cdot x + F$
$F = 250$
$K(x) = 0{,}05 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 250$

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Produktionsmengen mit einem progressiven Kostenverlauf.
a2) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.
a3) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Kostenfunktion K.

b1)



b2) [17; 61] (in ME)

Toleranzbereich untere Grenze: [15; 19]
Toleranzbereich obere Grenze: [59; 63]

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion *E*.
b2) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Gewinnbereichs.

c1) $G(25) = 313{,}75$
$\frac{313{,}75}{25} = 12{,}55$
Bei einem Absatz von 25 ME beträgt der durchschnittliche Gewinn 12,55 GE/ME.

c2) $G'(x) = -0{,}15 \cdot x^2 + 4{,}8 \cdot x - 9$
$G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}15 \cdot x^2 + 4{,}8 \cdot x - 9 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 2 \quad x_2 = 30$
$(G(2) = -188{,}8)$
$G(30) = 360$

Der maximale Gewinn beträgt 360 GE.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des durchschnittlichen Gewinns.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des maximalen Gewinns.

Mixer*

Aufgabennummer: B_282

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt unterschiedliche Typen von Mixern her.

a) Bei einem Stückpreis von € 65 können 2 000 Stabmixer pro Jahr verkauft werden.
Bei einem Verkauf von 2 500 Stabmixern kann ein Erlös in Höhe von € 131.250 pro Jahr erzielt werden.

Der Erlös beim Verkauf der Stabmixer kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … Anzahl der verkauften Stabmixer
$E(x)$ … Erlös bei x verkauften Stabmixern in €

1) Begründen Sie, warum in der Gleichung der Erlösfunktion der Parameter c gleich null sein muss.
2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a und b der Erlösfunktion.
3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.
4) Berechnen Sie die Sättigungsmenge.

b) Der Gewinn beim Verkauf der Handmixer kann durch die Funktion G beschrieben werden.

$G(x) = -0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940$

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Berechnen Sie die Gewinngrenzen.
2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

Durch Veränderungen im Unternehmen können die Fixkosten um 200 GE gesenkt werden.

3) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_1.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Kosten bei der Produktion von Standmixern können durch die Funktion K beschrieben werden.

$K(x) = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Kostenverlauf bei einer Produktion von 25 ME progressiv oder degressiv ist.

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsoptimum ist. *[1 aus 5]*

$0 = 0{,}04 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 63 \cdot x + 940$	☐
$0 = 0{,}12 \cdot x^2 - 4{,}8 \cdot x + 63$	☐
$0 = 0{,}24 \cdot x - 4{,}8$	☐
$0 = 0{,}04 \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x + 63 + \frac{940}{x}$	☐
$0 = 0{,}08 \cdot x - 2{,}4 - \frac{940}{x^2}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Parameter c muss null sein, da bei einem Absatz von null Stück auch der Erlös null ist.

a2) Erlös beim Absatz von 2000 Mixern: $2000 \cdot 65 = 130000$

$E(2000) = 130000$
$E(2500) = 131250$

oder:

$2000^2 \cdot a + 2000 \cdot b = 130000$
$2500^2 \cdot a + 2500 \cdot b = 131250$

a3) Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{1}{40} = -0{,}025$
$b = 115$

a4) $E(x) = 0$

oder:

$-0{,}025 \cdot x^2 + 115 \cdot x = 0$

$x_1 = 0$
$x_2 = 4600$

Die Sättigungsmenge liegt bei 4600 Stück.

b1) $G(x) = 0$

oder:

$-0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 940 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 5$ ME (untere Gewinngrenze)
$x_2 = 32{,}9\ldots$ ME ≈ 33 ME (obere Gewinngrenze)

b2) $G'(x) = 0$

oder:

$-0{,}3 \cdot x^2 - 3{,}8 \cdot x + 200 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -32{,}9...)$
$x_2 = 20{,}2...$
$G(20{,}2...) = 1\,500{,}504...$
Der maximale Gewinn beträgt rund 1.500,50 GE

b3) $G_1(x) = G(x) + 200 = -0{,}1 \cdot x^3 - 1{,}9 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 740$

c1) $K''(x) = 0{,}24 \cdot x - 4{,}8$

$K''(25) = 1{,}2 > 0$

Da die 2. Ableitung für 25 ME positiv ist, ist der Kostenverlauf dort progressiv.

c2)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$0 = 0{,}08 \cdot x - 2{,}4 - \frac{940}{x^2}$	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung
1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
1 × B1: für die richtige Berechnung der Koeffizienten *a* und *b*
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Gewinngrenzen
1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns
1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der neuen Gewinnfunktion G_1

c) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung
1 × C: für das richtige Ankreuzen

Marmelade*

Aufgabennummer: B_280		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Sarah und Daniel stellen im Rahmen eines Schulprojekts selbstgemachte Marmelade her und füllen sie in Gläser ab. Es werden x Gläser Erdbeermarmelade und y Gläser Mehrfruchtmarmelade abgefüllt.

a) Für ein Glas Erdbeermarmelade benötigen sie 160 g Erdbeeren.
Für ein Glas Mehrfruchtmarmelade benötigen sie 60 g Erdbeeren, 60 g Himbeeren und 40 g Heidelbeeren.
Sie haben insgesamt 15 kg Erdbeeren, 4 kg Himbeeren und 2 kg Heidelbeeren zur Verfügung.
Insgesamt wollen sie mindestens 70 Gläser Erdbeermarmelade produzieren.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das die obigen Mengenbeschränkungen für die Herstellung der beiden Marmeladesorten beschreibt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Nach einer Besprechung der Projektgruppe ergeben sich die folgenden Mengenbeschränkungen für die Herstellung der beiden Marmeladesorten:

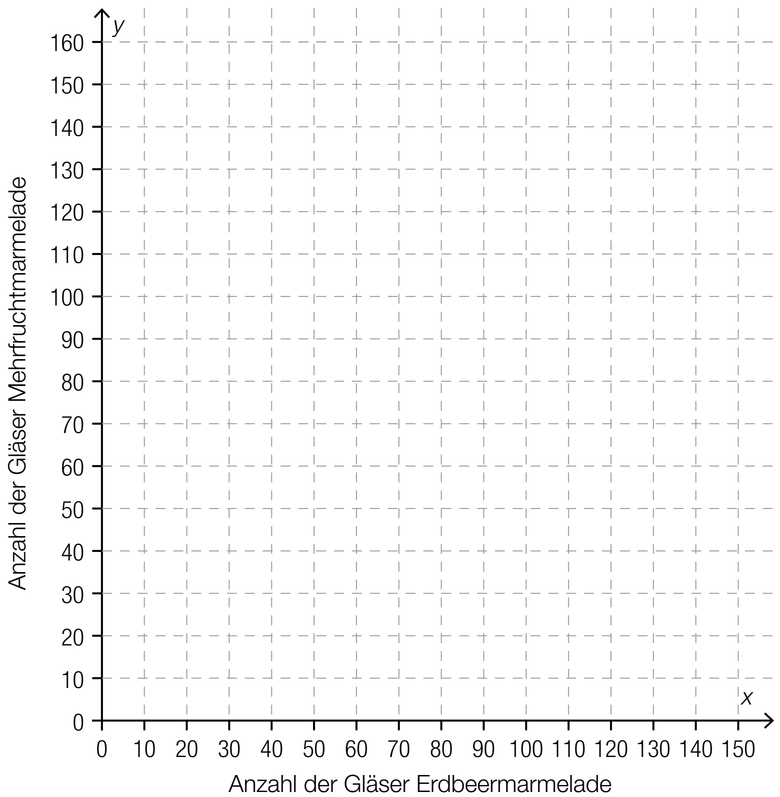
I: $150 \cdot x + 50 \cdot y \leq 18000$

II: $x + y \geq 100$

III: $y \geq 50$

IV: $y \leq 120$

V: $x \geq 0$

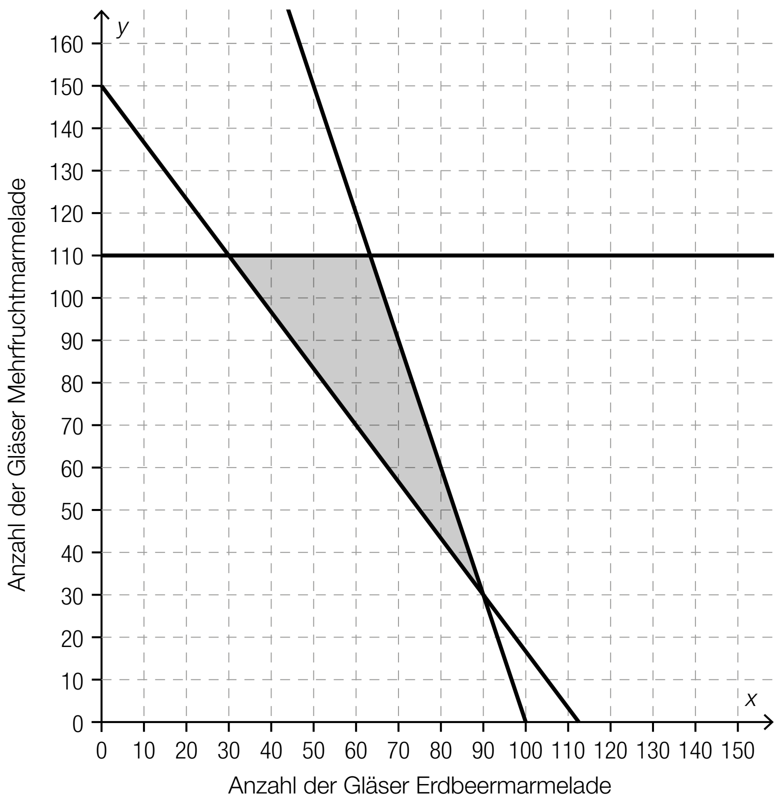


1) Zeichnen Sie im obigen Koordinatensystem die Begrenzungsgeraden der Ungleichungen I, II, III und IV ein.

2) Markieren Sie im obigen Koordinatensystem den Lösungsbereich des Ungleichungssystems.

3) Interpretieren Sie die Bedeutung der Ungleichungen III und IV im gegebenen Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Grafik sind die Mengenbeschränkungen nach einer weiteren Überarbeitung des Projekts dargestellt.



Die Gleichung der Zielfunktion Z zur Ermittlung der Kosten in Euro bei der Herstellung lautet:

$Z(x, y) = 2{,}50 \cdot x + 3 \cdot y$

1) Zeichnen Sie in der obigen Grafik diejenige Gerade ein, für die der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird.

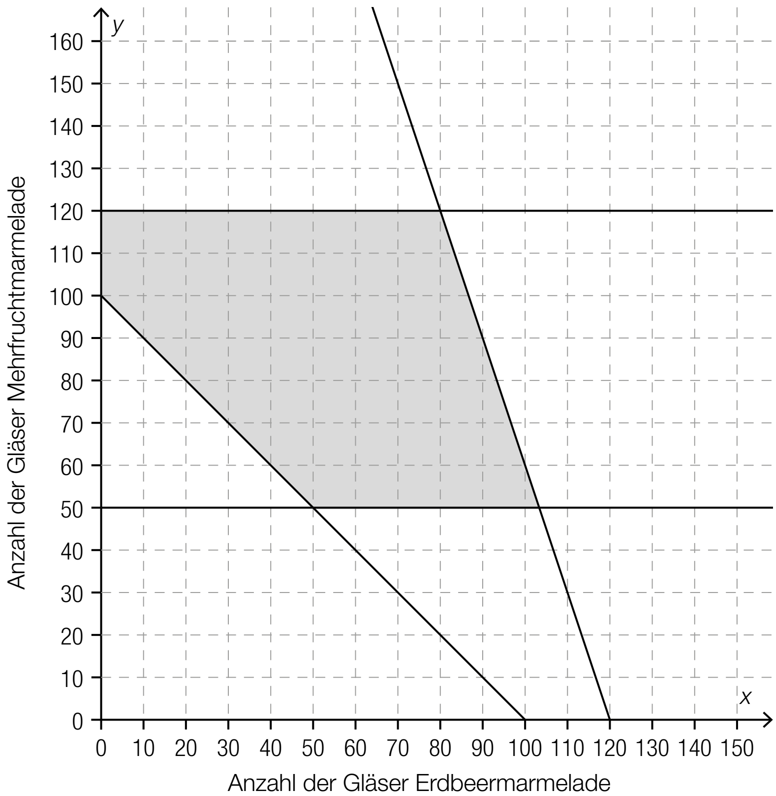
Nachdem Sarah ihrer Tante von ihrem Schulprojekt erzählt hat, stellt diese Himbeeren kostenlos zur Verfügung. Die Kosten pro Glas Mehrfruchtmarmelade sinken dadurch auf € 2,50 pro Glas.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der neuen Zielfunktion Z_1 zur Ermittlung der Kosten.
3) Überprüfen Sie nachweislich, ob Sarah und Daniel durch diese Kostensenkung auch die Produktionsmengen ändern müssen, wenn ihre Gesamtkosten minimal bleiben sollen.

Möglicher Lösungsweg

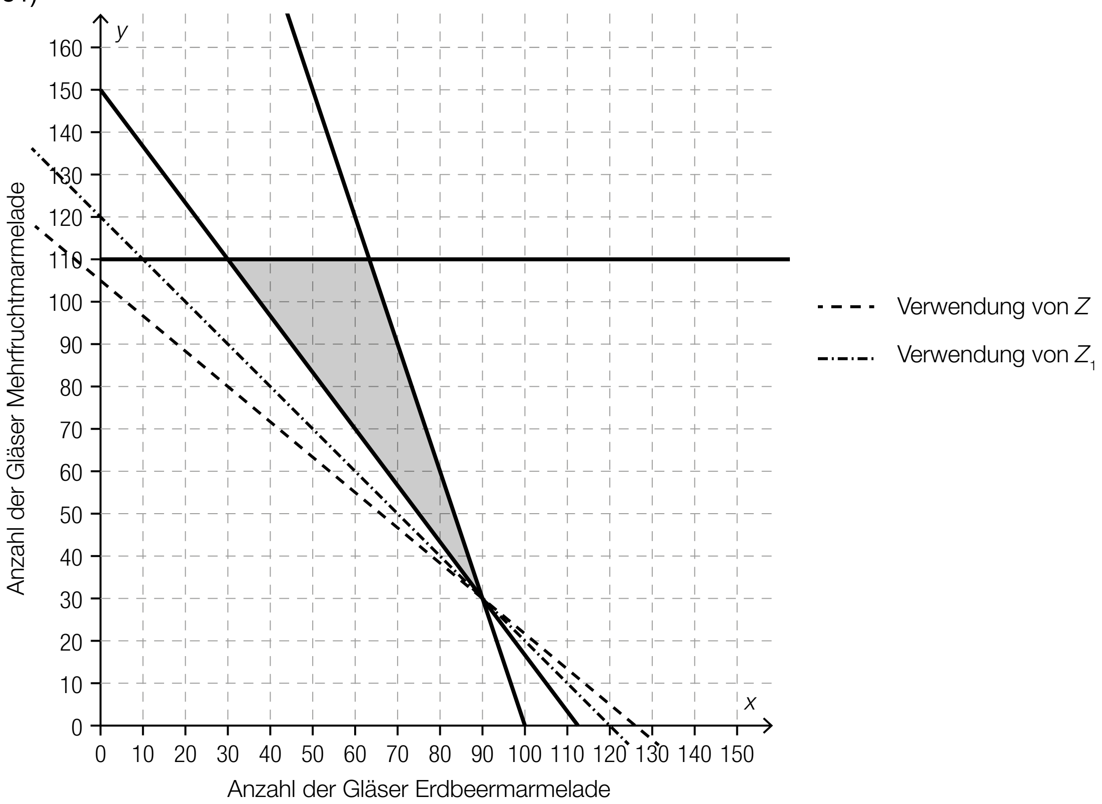
a1) I: $160 \cdot x + 60 \cdot y \leq 15000$
II: $60 \cdot y \leq 4000$
III: $40 \cdot y \leq 2000$
IV: $x \geq 70$

b1 und b2)



b3) Sie planen, mindestens 50 und höchstens 120 Gläser Mehrfruchtmarmelade zu produzieren.

c1)



c2) $Z_1(x, y) = 2{,}50 \cdot x + 2{,}50 \cdot y$

c3) Durch Einzeichnen derjenigen Geraden, für die der minimale Wert der Zielfunktion Z_1 angenommen wird, kann man feststellen, dass dieselben Produktionsmengen zu minimalen Kosten führen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Ungleichungen (Einschränkung bezüglich der zur Verfügung stehenden Beeren)
1 × A2: für das richtige Erstellen der Ungleichung (Einschränkung „mindestens 70 Gläser Erdbeermarmelade")
Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b) 1 × B: für das richtige Einzeichnen der Begrenzungsgeraden
1 × C1: für das richtige Markieren des Lösungsbereichs
1 × C2: für die richtige Interpretation der Bedeutung der Ungleichungen III und IV im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × B: für das richtige Einzeichnen der Geraden, für die der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird
1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der neuen Zielfunktion Z_1
1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung

Erbschaft*

Aufgabennummer: B_264

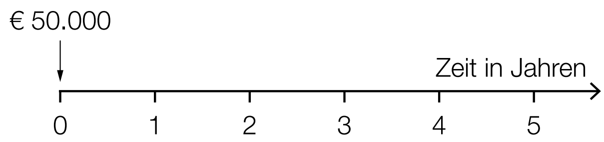
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Armin erhält ein Erbe in Höhe von € 50.000, das in Form von 3 Beträgen in den nächsten 5 Jahren ausbezahlt wird.
Die Höhe der Auszahlungen Z kann mit der nachstehenden Gleichung berechnet werden:

$$50\,000 = \frac{20\,000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}$$

1) Lesen Sie den zugehörigen Jahreszinssatz ab.

2) Veranschaulichen Sie alle in der Gleichung vorkommenden Auszahlungen auf der nachstehenden Zeitachse.



3) Berechnen Sie die Höhe der Auszahlungen Z.

b) Jutta hat € 50.000 geerbt. Diesen Betrag legt sie mit einer Verzinsung von 3 % p.a. an.

In den nächsten 5 Jahren will sie nun jeweils am Ende jedes Monats einen gleich hohen Betrag abheben, sodass nach diesen 5 Jahren vom angelegten Geld ein Betrag in Höhe von € 20.000 vorhanden ist.

Jutta überlegt, dass sie monatlich rund $\frac{€\ 50.000 - €\ 20.000}{60} = €\ 500$ abheben kann.

1) Begründen Sie, warum die tatsächlichen Monatsraten größer als € 500 sind.

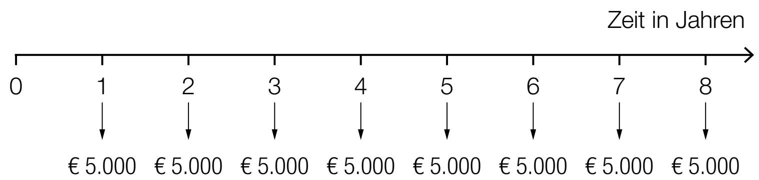
2) Berechnen Sie den zugehörigen äquivalenten Monatszinssatz.

3) Berechnen Sie die Höhe dieser tatsächlichen Monatsraten.

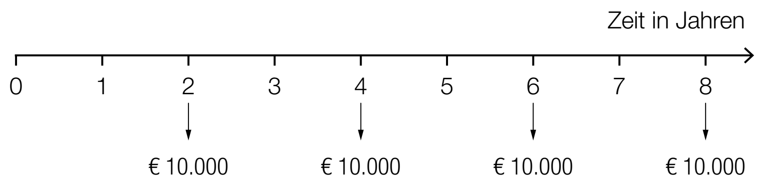
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Auf den unten stehenden Zeitachsen sind Erbschaftsauszahlungen dargestellt.

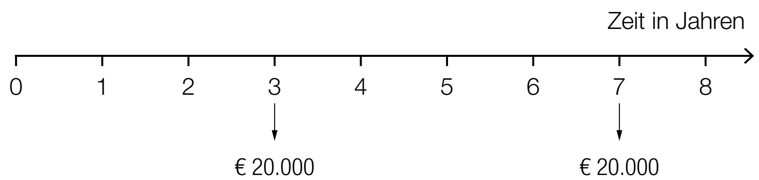
1) Kreuzen Sie diejenige Auszahlungsvariante an, die bei einem positiven Zinssatz den größten Barwert hat. *[1 aus 5]*



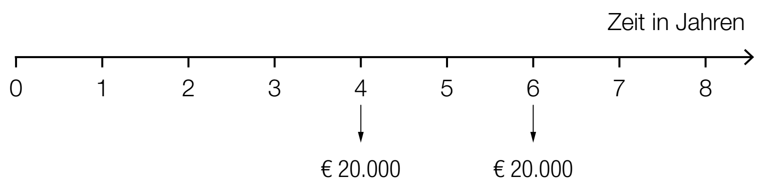
☐



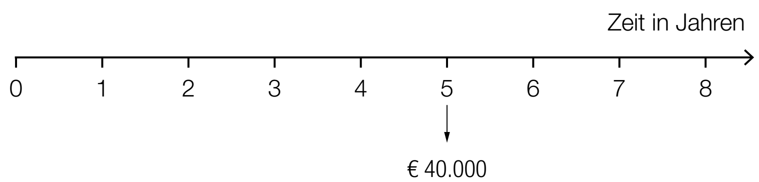
☐



☐



☐

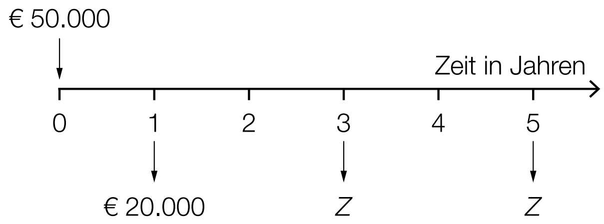


☐

Möglicher Lösungsweg

a1) Zinssatz: 3 % p. a.

a2)



a3) $50\,000 = \frac{20\,000}{1{,}03} + \frac{Z}{1{,}03^3} + \frac{Z}{1{,}03^5}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$Z = 17\,202{,}934...$

Die Höhe der Auszahlungen Z beträgt € 17.202,93.

b1) Da das Erbe angelegt und verzinst wird, kann Jutta einen höheren Betrag als monatlich € 500 abheben.

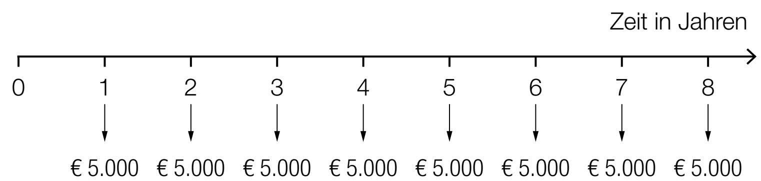
b2) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}03} - 1 = 0{,}002466...$
Der Monatszinssatz beträgt rund 0,247 %.

b3) $q_{12} = 1 + i_{12}$
$50\,000 \cdot 1{,}03^5 = R \cdot \frac{q_{12}^{60} - 1}{q_{12} - 1} + 20\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$R = 587{,}846...$

Die Höhe der Monatsraten beträgt € 587,85.

c1)

	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Jahreszinssatzes
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Auszahlungen auf der Zeitachse
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Auszahlungen Z

b) 1 × D: für die richtige Begründung
1 × B1: für die richtige Berechnung des äquivalenten Monatszinssatzes
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe der Monatsraten

c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Maschinenring

Aufgabennummer: B_182

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Vier landwirtschaftliche Betriebe, die Weizen anbauen, haben sich zu einem Maschinenring zusammengeschlossen.

a) Man geht davon aus, dass der jetzige Mähdrescher noch genau 10 Jahre verwendet werden kann. Daher plant man, dann einen neuen Mähdrescher um einen voraussichtlichen Kaufpreis von € 150.000 zu erwerben.
Für die Anschaffung haben die Betriebe gemeinsam bereits € 30.000 an Rücklagen gebildet und wollen den Rest in Form von vorschüssigen Jahresraten ansparen.
Der Zinssatz wird mit 1,5 % p. a. angenommen.

– Veranschaulichen Sie das Finanzierungskonzept mithilfe einer Zeitlinie.
– Berechnen Sie die Höhe der Jahresraten.

Es wird überlegt, mit der Ratenzahlung erst in 5 Jahren zu beginnen.

– Argumentieren Sie, warum die neuen Raten für die restlichen 5 Jahre in diesem Fall mehr als doppelt so hoch sein müssen, als wenn sofort mit dem Ansparen begonnen wird.

b) Die nebenstehende Tabelle zeigt die erzielten Preise für Weizen in den Qualitätsstufen *A* und *B* für einen Zeitraum von 10 Jahren.

Der Zusammenhang der Preise zwischen den Weizenqualitäten *A* und *B* wird mithilfe der linearen Regression untersucht.

	Preis pro 1 000 kg	
Jahr	*A*	*B*
1	€ 98	€ 112
2	€ 108	€ 117
3	€ 88	€ 101
4	€ 82	€ 97
5	€ 105	€ 116
6	€ 189	€ 202
7	€ 135	€ 165
8	€ 91	€ 106
9	€ 184	€ 205
10	€ 157	€ 186

– Erstellen Sie eine Gleichung der Regressionsgeraden.
– Interpretieren Sie die Bedeutung eines Korrelationskoeffizienten von $r = 0{,}989$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Stellen Sie die Punkte und die Regressionsgerade in einem passenden Koordinatensystem grafisch dar.

c) Die Landwirte des Maschinenrings diskutieren über die Begriffe *Betriebsoptimum* und *Betriebsminimum*.

– Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die korrekte Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Betriebsoptimum	
Betriebsminimum	

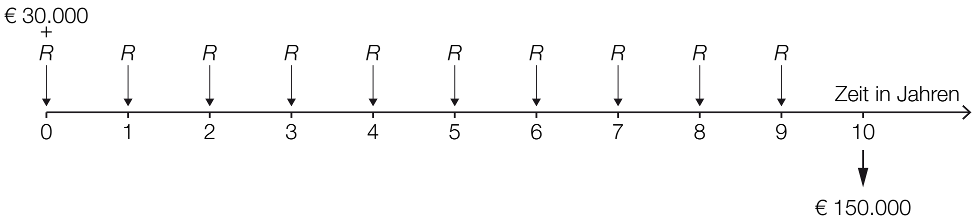
A	Hier spielen die Fixkosten keine Rolle.
B	Hier erzielt man den höchsten Erlös.
C	Hier sind die Durchschnittskosten am kleinsten.
D	Hier steigt der Gewinn am stärksten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

$\frac{1}{2}$

Möglicher Lösungsweg

a) *R* … Höhe einer Jahresrate in €



$q = 1{,}015$

$30\,000 \cdot q^{10} + R \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} \cdot q = 150\,000 \Rightarrow R \approx € \, 10.603{,}06$

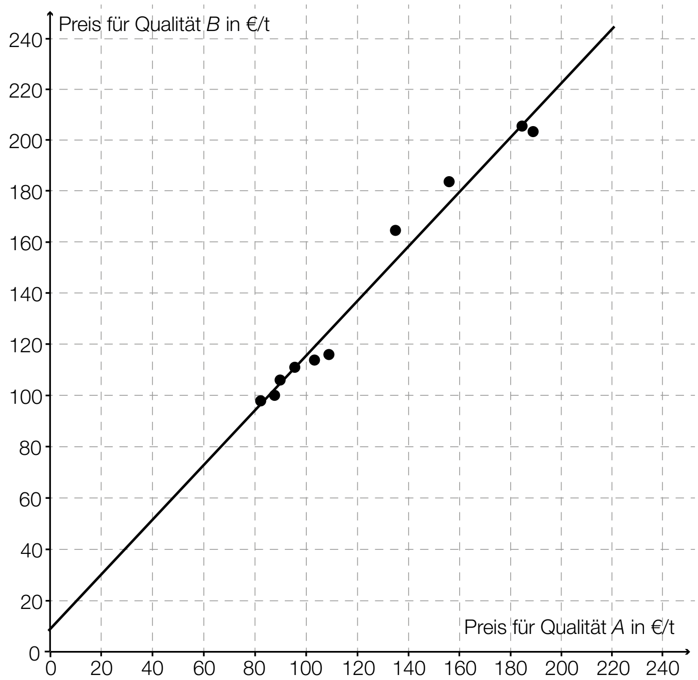
Die Höhe der Jahresraten beträgt € 10.603,06.

Wenn die Raten genau doppelt so hoch wären, wäre die Summe der bezahlten Raten zwar gleich hoch, der Endwert der 5-jährigen Rente aber niedriger, weil die Verzinsungen der ersten 5 Raten fehlten. Um den gleichen Wert zu erhalten, müssen die Raten daher mehr als doppelt so hoch sein.

b) $y = 1{,}08 \cdot x + 7{,}32$ *(Parameter gerundet)*

x … Preis für Qualität *A* in €/t
y … Preis für Qualität *B* in €/t

Der Korrelationskoeffizient liegt nahe bei 1 und lässt daher einen ziemlich starken positiven linearen Zusammenhang zwischen den Preisen für die Qualitätsstufen *A* und *B* vermuten.



c)

Betriebsoptimum	C
Betriebsminimum	A

A	Hier spielen die Fixkosten keine Rolle.
B	Hier erzielt man den höchsten Erlös.
C	Hier sind die Durchschnittskosten am kleinsten.
D	Hier steigt der Gewinn am stärksten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 1

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Traktoren-Steuerung

Aufgabennummer: B_183

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Großunternehmen hat eine spezielle GPS-unterstützte Steuerung für Traktoren entwickelt und verkauft diese direkt.

a) Für die Produktion von Ersatzteilen der Steuerung sind die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E bekannt:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}03 \cdot x^2 + x + 70\,000$

$E(x) = -5 \cdot x^2 + 3\,000 \cdot x$

x … Anzahl produzierter bzw. verkaufter Stück
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x produzierten Stück in Euro
$E(x)$ … Erlös bei x verkauften Stück in Euro

– Berechnen Sie diejenige Anzahl von Ersatzteilen, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Preis-Absatz-Funktion p.

– Beschreiben Sie, wie man unter Verwendung der gegebenen Kosten- und Erlösfunktion den Cournot'schen Punkt ermitteln kann.

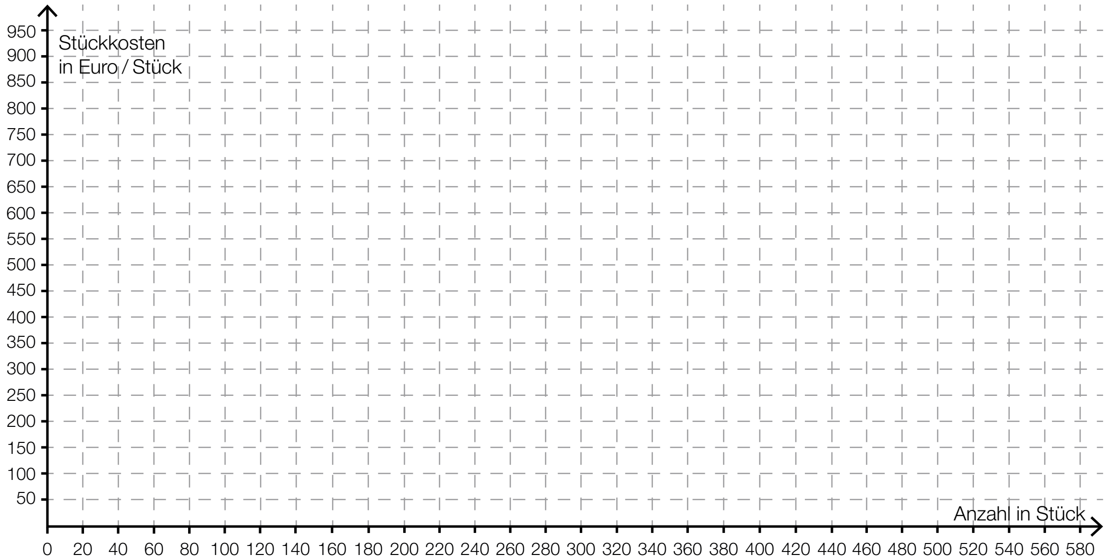
Der Cournot'sche Punkt befindet sich bei $(x_C|1\,610)$.

– Interpretieren Sie die Koordinaten des Cournot'schen Punktes im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Für die Produktion von Ersatzteilen der Steuerung werden die Stückkosten durch die folgende Funktion $\overline{K}$ beschrieben:

$$\overline{K}(x) = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}03 \cdot x + 1 + \frac{70\,000}{x}$$

x … Anzahl produzierter Stück
$\overline{K}(x)$ … Stückkosten bei x produzierten Stück in Euro/Stück



– Zeichnen Sie den Graphen der Stückkostenfunktion in das obige Koordinatensystem ein.

– Markieren Sie in der obigen Abbildung das Betriebsoptimum.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $G(x) = -0{,}001 \cdot x^3 - 4{,}97 \cdot x^2 + 2\,999 \cdot x - 70\,000$

$G'(x) = -0{,}003 \cdot x^2 - 9{,}94 \cdot x + 2\,999$

$G'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 278{,}3\ldots$

Das Gewinnmaximum liegt bei 278 Stück.

$p(x) = -5 \cdot x + 3\,000$

Ermittlung der Gewinnfunktion G als Differenz von Erlös- und Kostenfunktion:
$G(x) = E(x) - K(x)$

Berechnung der Maximumstelle x_C von G:
Lösen der Gleichung $G(x_C) = 0$ (wobei $G'(x_C) < 0$ gelten muss)

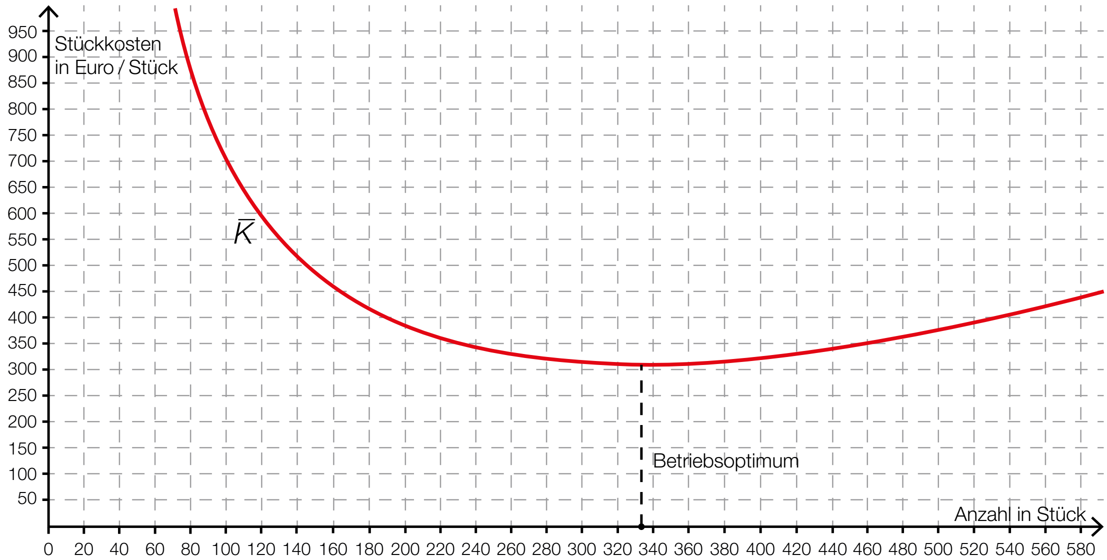
x_C ist die x-Koordinate des Cournot'schen Punktes.

Ermittlung der Preis-Absatz-Funktion p aus der Erlösfunktion: $p(x) = \frac{E(x)}{x}$

Der Funktionswert $p(x_C)$ ist die y-Koordinate des Cournot'schen Punktes.

Der maximale Gewinn wird bei Produktion und Verkauf von x_C Stück zum Preis von € 1.610 pro Stück erzielt.

b)



Toleranzbereich für das Einzeichnen des Betriebsoptimums: [310; 350]

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Produktion von Golfschlägern

Aufgabennummer: B_303

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert und verkauft Golfschläger.

a) Durch Marktforschung konnten folgende Verkaufsdaten ermittelt werden:

Nachfrage in Stück	240	310	400	500
Preis in €/Stk.	230	217	203	182

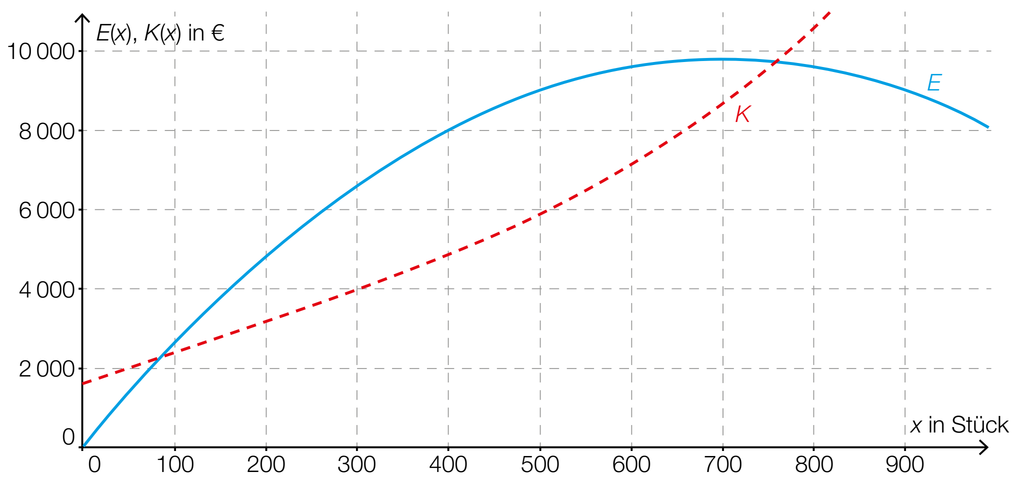
Auf Grundlage dieser Daten soll eine Preisfunktion der Nachfrage p_N mit $p_N(x) = a \cdot x + b$ ermittelt werden.

x … Anzahl der Golfschläger in Stück
$p_N(x)$ … Preis bei einer Nachfrage von x Stück in Euro pro Stück (€/Stk.)

– Ermitteln Sie mithilfe von Regression eine Gleichung der Funktion p_N.

– Interpretieren Sie die Parameter a und b der Preisfunktion der Nachfrage p_N im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Für einen speziellen Golfschläger sind die Graphen der Erlösfunktion E und der Kostenfunktion K dargestellt:



– Beschreiben Sie, wie Sie aus der obigen Grafik die Gewinngrenzen ermitteln können.

– Beschreiben Sie, wie Sie aus der obigen Grafik diejenige Stückzahl ermitteln können, für die der Gewinn maximal ist.

c) Von einer Golfschlägerproduktion sind die Gewinnfunktion G und die Preisfunktion der Nachfrage p_N bekannt.

$G(x) = -0{,}0001 \cdot x^3 - 0{,}17 \cdot x^2 + 200 \cdot x - 16\,000$
$p_N(x) = -0{,}2 \cdot x + 280$

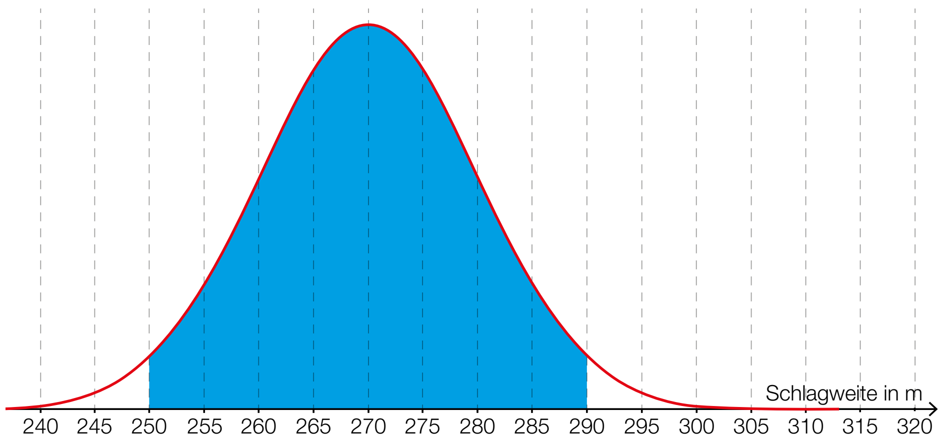
x … Anzahl der Golfschläger in Stück
$G(x)$ … Gewinn bei x Stück in €
$p_N(x)$ … Preis bei x Stück in €/Stk.

– Berechnen Sie den Cournot'schen Punkt.

d) Von einem Roboter wird ein Schlägertest durchgeführt. Dabei wird ein Ball abgeschlagen und die dabei erzielte Schlagweite gemessen. Die Schlagweite wird als annähernd normalverteilt mit $\mu = 270$ m und $\sigma = 10$ m angenommen.
Liegt die Schlagweite bei einem getesteten Schläger unter einer bestimmten Grenze, wird er aussortiert.

– Berechnen Sie, welche Schlagweite als Grenze angesetzt wurde, wenn 7 % der Schläger aussortiert werden.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



– Kreuzen Sie die korrekte Beschreibung des dunkel hinterlegten Bereichs an. *[1 aus 5]*

der Anteil der Schläger, deren Schlagweite mindestens um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☐
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite genau um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☐
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite genau um $\pm 4 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☐
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite höchstens um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☐
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite höchstens um $\pm 4 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung der Funktionsgleichung mittels Technologieeinsatz:
$p_N(x) = -0{,}18 \cdot x + 273{,}98$ (Parameter gerundet)

Interpretation der Parameter:
$a \approx -0{,}18$: Bei einer Preissenkung um € 0,18 pro Stück steigt die Nachfrage um 1 Stück.
$b \approx 273{,}98$: Der Höchstpreis beträgt € 273,98.

b) Die Gewinngrenzen sind diejenigen Stückzahlen, bei denen die Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion einander schneiden.

Man misst, bei welcher Stückzahl der senkrechte Abstand zwischen den Graphen der Kostenfunktion und der Erlösfunktion innerhalb der Gewinngrenzen am größten ist.

c) denjenigen x-Wert, für den $G'(x) = 0$ ist, in p_N einsetzen
Cournot'scher Punkt: $(427{,}20\ldots \mid 194{,}55\ldots)$ bzw., falls die x-Koordinate auf ganze Stück gerundet wird: $(427 \mid 194{,}6)$

d) X … Schlagweite in m
$P(X \leq a) = 0{,}07 \quad \Rightarrow \quad a = 255{,}2\ldots$

Die Grenze der Schlagweite liegt bei rund 255 m.

	☐
	☐
	☐
der Anteil der Schläger, deren Schlagweite höchstens um $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht	☒
	☐

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 1
d) mittel	d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Ansparplan*

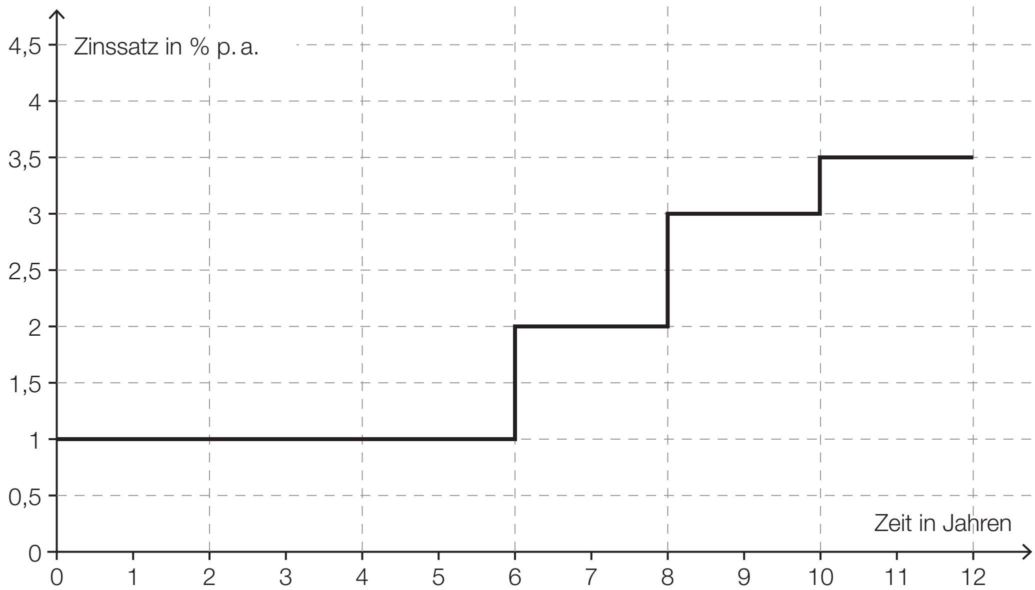
Aufgabennummer: B_185

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Monika möchte in den nächsten 12 Jahren € 20.000 ansparen.

Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

a) Monika betrachtet das Angebot einer Bank für eine Wohnbauanleihe mit einer Laufzeit von 12 Jahren (siehe nachstehende Grafik). Die jährliche Verzinsung steigt dabei im Laufe der Jahre an.



1) Lesen Sie aus der obigen Grafik die Höhe und die Dauer der jährlichen Zinssätze ab.

2) Berechnen Sie den mittleren jährlichen Zinssatz.

3) Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrags, den Monika jetzt anlegen muss, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen.

b) Auf einem Sparbuch bietet die Bank für 12 Jahre einen fixen Zinssatz von 2 % p.a. Um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren zu erreichen, könnte Monika sofort € 8.000 einlegen und 2 gleich hohe Einzahlungen Z nach 3 Jahren und nach insgesamt 8 Jahren tätigen.

1) Veranschaulichen Sie Monikas Zahlungsplan und das Sparziel auf einer Zeitachse.

2) Berechnen Sie die Höhe der Einzahlung Z.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Monika überlegt, 12 Jahre lang zu Beginn jedes Jahres einen gleich hohen Betrag einzuzahlen, um ihr Sparziel von € 20.000 in 12 Jahren bei einem fixen Zinssatz von 2 % p. a. zu erreichen.

1) Berechnen Sie die Höhe des jährlichen Einzahlungsbetrags R.

Sie überlegt, nicht zu Beginn jedes Jahres den Jahresbetrag einzuzahlen, sondern zu Beginn jedes Monats $\frac{1}{12}$ des Jahresbetrags.

2) Argumentieren Sie, dass sie ihr Sparziel damit nicht in der vorgesehenen Zeit erreicht.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Anleihe wird die ersten 6 Jahre zu 1 % p. a., dann 2 Jahre zu 2 % p. a., 2 Jahre zu 3 % p. a. und schließlich 2 Jahre zu 3,5 % p. a. verzinst.

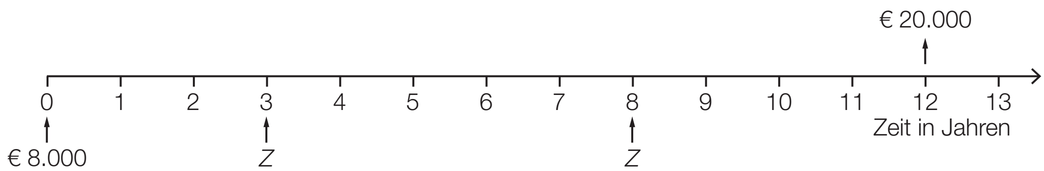
a2) $(1 + i)^{12} = 1{,}01^6 \cdot 1{,}02^2 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2 \quad \Rightarrow \quad i = 0{,}0191...$

Der mittlere jährliche Zinssatz beträgt rund 1,9 %.
(Eine Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes als gewichtetes arithmetisches Mittel ist als falsch zu werten.)

a3) $\dfrac{20\,000}{1{,}01^6 \cdot 1{,}02^2 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}035^2} = 15\,934{,}786...$

Monika muss € 15.934,79 anlegen, damit sie in 12 Jahren € 20.000 angespart hat.

b1)



b2) $8\,000 \cdot 1{,}02^{12} + Z \cdot 1{,}02^9 + Z \cdot 1{,}02^4 = 20\,000 \quad \Rightarrow \quad Z = 4\,326{,}655...$

Die Höhe einer Einzahlung Z beträgt € 4.326,66.

c1) $20\,000 = R \cdot \dfrac{1{,}02^{12} - 1}{0{,}02} \cdot 1{,}02 \quad \Rightarrow \quad R = 1\,461{,}952...$

Der jährliche Ansparbetrag beträgt € 1.461,95.

c2) Sie wird damit ihr Sparziel nicht erreichen, da die Zahlungen großteils später erfolgen und sie somit weniger Zinsen erhält.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Zinssätze und der Verzinsungsdauer
a2) 1 × B1: für die richtige Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes
(Eine Berechnung des mittleren jährlichen Zinssatzes als gewichtetes arithmetisches Mittel ist als falsch zu werten.)
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe des Betrags

b1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen auf einer Zeitachse
b2) 1 × A2: für einen richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Zahlung Z

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung des jährlichen Ansparbetrags
c2) 1 × D: für die richtige Argumentation

Verkehrsbetriebe*

Aufgabennummer: B_294

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Städtische Verkehrsbetriebe analysieren ihre Einnahmen.

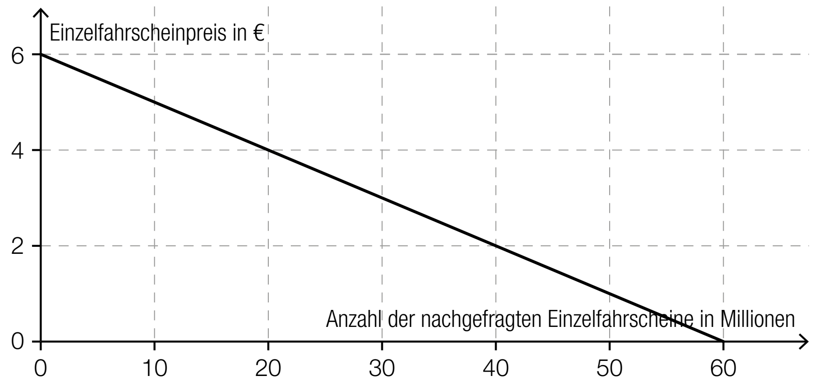
a) In der Stadt *A* können die Einnahmen der Verkehrsbetriebe durch den Verkauf von Einzelfahrscheinen modellhaft durch die folgende Erlösfunktion *E* beschrieben werden:

$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 6{,}6 \cdot x$

x ... Anzahl der verkauften Einzelfahrscheine in Millionen
$E(x)$ ... Erlös beim Verkauf von x Einzelfahrscheinen in Millionen Euro

1) Berechnen Sie den maximal möglichen Erlös in Euro.
2) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage.
3) Ermitteln Sie den zum maximalen Erlös führenden Einzelfahrscheinpreis in Euro.

b) In der Stadt *B* wird ein linearer Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen angenommen. Dieser Zusammenhang ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Höchstpreis ab.
2) Beschreiben Sie die Bedeutung der Sättigungsmenge im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der Stadt C wird modellhaft angenommen, dass der Zusammenhang zwischen dem Einzelfahrscheinpreis in Euro und der Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen durch eine quadratische Funktion p beschrieben werden kann.

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

x ... Anzahl der nachgefragten Einzelfahrscheine in Millionen
$p(x)$ ... Einzelfahrscheinpreis bei x nachgefragten Einzelfahrscheinen in Euro

Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,60 werden 50 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 1,80 werden 48 Millionen Einzelfahrscheine nachgefragt. Der Höchstpreis wird mit € 7,80 angenommen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten von p.

Möglicher Lösungsweg

a1) $E'(x) = -0{,}2 \cdot x + 6{,}6$

$E'(x) = 0$
$0 = -0{,}2 \cdot x + 6{,}6$
$x = 33$
$E(33) = 108{,}9$

Der maximale Erlös beträgt € 108,9 Millionen.
(Der Graph von E ist eine nach unten offene Parabel. Die Nullstelle der Ableitungsfunktion E' ist also eine Maximumstelle.)

a2) $p(x) = -0{,}1 \cdot x + 6{,}6$

a3) $p(33) = 3{,}3$

Bei einem Einzelfahrscheinpreis von € 3,30 ist der Erlös maximal.

b1) Höchstpreis: € 6

b2) Die Sättigungsmenge ist diejenige Anzahl an nachgefragten Einzelfahrscheinen in Millionen, wenn der Einzelfahrscheinpreis € 0 beträgt.

c1) $p(0) = 7{,}8$
$p(48) = 1{,}8$
$p(50) = 1{,}6$

oder:

$7{,}8 = c$
$1{,}8 = 2304 \cdot a + 48 \cdot b + c$
$1{,}6 = 2500 \cdot a + 50 \cdot b + c$

c2) Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}0005$; $b = -0{,}149$; $c = 7{,}8$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des maximalen Erlöses
(Die Zahl 108,9 allein als Lösung ist nicht als richtig zu werten.
Dass es sich bei der Nullstelle von E' um eine Maximumstelle handelt, muss weder überprüft noch argumentativ begründet werden.)
a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Einzelfahrscheinpreises bei maximalem Erlös

b1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Höchstpreises
b2) 1 × C2: für die richtige Beschreibung der Sättigungsmenge im gegebenen Sachzusammenhang

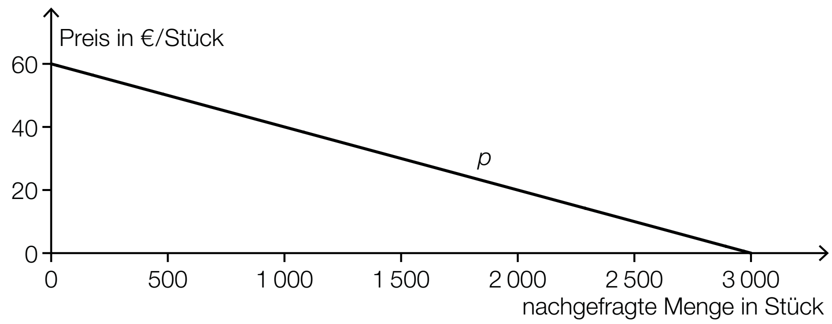
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

Betonrohre*

Aufgabennummer: B_452

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p für Betonrohre des Modells A dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von p im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Betonrohre des Modells A werden um € 32 pro Stück verkauft.

3) Berechnen Sie die zugehörige Anzahl der nachgefragten Betonrohre des Modells A.

b) Für Betonrohre des Modells B geht man von einer kubischen Gewinnfunktion G aus.

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Gleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für Betonrohre des Modells C geht man von einer kubischen Kostenfunktion K aus.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Die Fixkosten betragen 150 GE.
Bei einer Produktion von 20 ME ergeben sich Kosten von 530 GE.
Bei einer Produktion von 10 ME ergeben sich Grenzkosten von 17 GE/ME.
Bei einer Produktion von 30 ME ergeben sich Stückkosten von 22 GE/ME.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.
2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

d) Der Durchmesser von Betonrohren des Modells D kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ mm angenommen werden. Bei 3 % der Rohre ist der Durchmesser kleiner als 98 mm.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ.

Möglicher Lösungsweg

a1) $p(x) = -\frac{1}{50} \cdot x + 60$

x ... nachgefragte Menge in Stück
$p(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in €/Stück

a2) Die Steigung $-\frac{1}{50}$ gibt an, dass eine Preisreduktion um € 1 pro Stück zu einer Erhöhung der nachgefragten Menge um 50 Stück führt.

oder:

Soll die nachgefragte Menge um 1 Stück gesteigert werden, muss der Preis um € 0,02 pro Stück gesenkt werden.

a3) $p(x) = 32$ *oder* $-\frac{1}{50} \cdot x + 60 = 32 \quad \Rightarrow \quad x = 1\,400$

Bei einem Preis von € 32 pro Stück ist mit einer nachgefragten Menge von 1 400 Stück zu rechnen.

b1)

Der Break-even-Point liegt bei 200 ME.	B
Das Gewinnmaximum liegt bei 200 ME.	C

A	$G(0) = 200$
B	$G(200) = 0$
C	$G'(200) = 0$
D	$G''(200) = 0$

c1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$\overline{K}(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c + \frac{d}{x}$

$K(0) = 150$
$K(20) = 530$
$K'(10) = 17$
$\overline{K}(30) = 22$

oder:

$d = 150$
$a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 + d = 530$
$3 \cdot a \cdot 10^2 + 2 \cdot b \cdot 10 + c = 17$
$a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c + \frac{d}{30} = 22$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 0{,}02$
$b = -1{,}2$
$c = 35$
$d = 150$

d1) X ... Durchmesser in mm
$P(X < 98) = 0{,}03$

Berechnung von σ mittels Technologieeinsatz:
$\sigma = 1{,}06...$

Die Standardabweichung beträgt rund 1,1 mm.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der nachgefragten Betonrohre
b1) 1 × C: für die richtige Zuordnung
c1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Kosten
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Grenzkosten
1 × A3: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Stückkosten
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten
d1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Standardabweichung

Küchenkauf*

Aufgabennummer: B_453

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Frau Tomić will eine neue Küche um € 30.000 kaufen.

a) Um sich die Küche leisten zu können, hat sie vor 7 Jahren, vor 4 Jahren und vor 1 Jahr jeweils € 3.000 auf ein Sparbuch mit fixem Zinssatz eingezahlt. Nun befinden sich € 10.000 auf dem Sparbuch.

1) Berechnen Sie den zugrunde liegenden Jahreszinssatz.

Bei diesem Sparvorgang wurden jährlich 25 % Kapitalertragssteuer (KESt) abgezogen.

2) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Sparbuchs vor Abzug der KESt.

b) Frau Tomić benötigt für den Kauf der Küche einen Kredit in Höhe von € 20.000. Ein Bekannter von Frau Tomić bietet an, ihr das Geld zu einem fixen Zinssatz von 4 % p. a. zu leihen. Für die Rückzahlung vereinbaren sie, dass am Ende des 1. Semesters nur die Zinsen zu bezahlen sind, danach sind Semesterraten in Höhe von jeweils € 2.000 fällig.

1) Berechnen Sie den äquivalenten Semesterzinssatz.

2) Vervollständigen Sie die Zeilen für die Semester 1 und 2 des nachstehenden Tilgungsplans.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1				
2				

3) Erklären Sie, warum die folgende Behauptung richtig ist: „Eine Verdoppelung der Semesterrate führt nicht zu einer Verdoppelung des Tilgungsanteils."

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für einen Kredit in Höhe von € 20.000 holt Frau Tomić ein Angebot von einer Bank ein. Die Bank schlägt für die Rückzahlung nachschüssige Jahresraten in Höhe von jeweils € 3.000 bei einem Jahreszinssatz i vor.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Restschuld S nach t Jahren.

$S =$ ____

Möglicher Lösungsweg

a1) $3000 \cdot (1 + i)^7 + 3000 \cdot (1 + i)^4 + 3000 \cdot (1 + i) = 10000$

$i = 0{,}02617...$

Der zugrunde liegende Jahreszinssatz beträgt rund 2,62 %.

a2) $\frac{0{,}02617...}{0{,}75} = 0{,}0349...$

Der Jahreszinssatz vor Abzug der KESt beträgt rund 3,5 %.

b1) $i_2 = \sqrt{1{,}04} - 1 = 0{,}01980...$

Der äquivalente Semesterzinssatz beträgt rund 1,98 %.

b2)

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Semesterrate	Restschuld
0	---	---	---	€ 20.000
1	€ 396,08	€ 0	€ 396,08	€ 20.000
2	€ 396,08	€ 1.603,92	€ 2.000	€ 18.396,08

b3) Der Tilgungsanteil berechnet sich aus der Differenz von Semesterrate und Zinsanteil. Wenn die Semesterrate verdoppelt wird, bleibt der Zinsanteil trotzdem gleich hoch. Somit ist der neue Tilgungsanteil mehr als doppelt so hoch wie der alte Tilgungsanteil.

c1) $S = 20000 \cdot (1 + i)^t - 3000 \cdot \frac{(1 + i)^t - 1}{i}$

oder:

$S = 20000 \cdot q^t - 3000 \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}$ mit $q = 1 + i$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes
a2) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes vor Abzug der KESt
b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des äquivalenten Semesterzinssatzes
b2) 1 × B2: für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Semester 1 des Tilgungsplans
1 × B3: für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Semester 2 des Tilgungsplans
b3) 1 × D: für die richtige Erklärung
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Autokauf (1)*

Aufgabennummer: B_459

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Frau Kopecek möchte ein neues Auto mit einem Listenpreis von € 17.100 kaufen. Dabei stehen verschiedene Finanzierungsmöglichkeiten zur Auswahl.

a) Ein Händler verlangt eine Anzahlung von € 3.420 und 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.

1) Veranschaulichen Sie die Zahlungen und den Listenpreis auf der nachstehenden Zeitachse.

Der Händler behauptet, dass es sich bei dieser Finanzierung um eine „Null-Prozent-Finanzierung“ handelt.
Unter einer „Null-Prozent-Finanzierung“ versteht man, dass keine Zinsen verrechnet werden.

2) Zeigen Sie, dass die Behauptung des Händlers richtig ist.

b) Bei „Drittelfinanzierung“ muss Frau Kopecek sofort, am Ende des 2. Jahres und am Ende des 3. Jahres jeweils einen gleich hohen Betrag R bezahlen. Der Zinssatz beträgt 2 % p.a.

1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R.

2) Berechnen Sie R.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Bei einer anderen Finanzierung werden am Ende des 1. Jahres und am Ende des 2. Jahres jeweils € 6.000 bezahlt. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Tilgungsplan für die Jahre 1 und 2.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 17.100
1				
2				

2) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, mit der die Schuld am Ende des 3. Jahres vollständig getilgt ist.

d) Bei Barzahlung gewährt der Händler 8 % Preisnachlass vom Listenpreis.

1) Berechnen Sie den Preis des Autos bei Barzahlung.

Bei einer Ratenfinanzierung verlangt der Händler eine Anzahlung von € 3.420 sowie 36 nachschüssige Monatsraten zu je € 380.
Barzahlung und Ratenfinanzierung sind bei einem bestimmten Jahreszinssatz gleichwertig.

2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz.

Möglicher Lösungsweg

a1)

a2) $3420 + 36 \cdot 380 = 17100$

Die Summe aller Zahlungen ergibt den Listenpreis. Daher ist die Behauptung des Händlers richtig.

b1) $17100 = R + \frac{R}{1{,}02^2} + \frac{R}{1{,}02^3}$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$R = 5889{,}461...$

Es müssen jeweils € 5.889,46 bezahlt werden.

c1)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 17.100
1	**€ 256,50**	**€ 5.743,50**	**€ 6.000,00**	**€ 11.356,50**
2	**€ 170,35**	**€ 5.829,65**	**€ 6.000,00**	**€ 5.526,85**

c2) $5526{,}85 \cdot 1{,}015 = 5609{,}75$

Die Höhe der Restzahlung beträgt € 5.609,75.

d1) $17100 \cdot 0{,}92 = 15732$

Bei Barzahlung beträgt der Preis des Autos € 15.732.

d2) $15732 = 3420 + 380 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{36}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$q_{12} = 1{,}0058...$
$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}0719...$

Der Jahreszinssatz ist rund 7,2 %.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Zahlungen und des Listenpreises auf der Zeitachse
a2) 1 × D: für den richtigen Nachweis
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung zur Berechnung von R
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung von R
c1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der beiden Zeilen des Tilgungsplans
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Restzahlung
d1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Preises bei Barzahlung
d2) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B2: für die richtige Berechnung des Jahreszinssatzes

Fahrräder*

Aufgabennummer: B_460

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Verkaufszahlen für E-Bikes in Österreich sind in den letzten Jahren gestiegen.
In der nachstehenden Tabelle sind die Verkaufszahlen (gerundet auf 1 000) für ausgewählte Jahre angegeben.

Jahr	2008	2010	2012	2013
Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes	8 000	20 000	41 000	43 000

Die Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2008.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

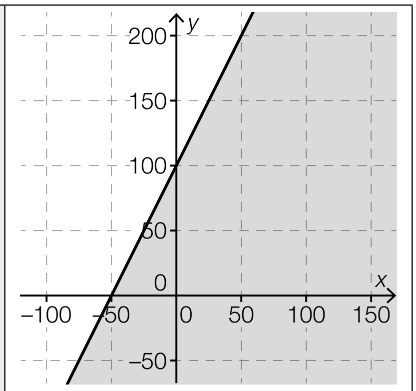
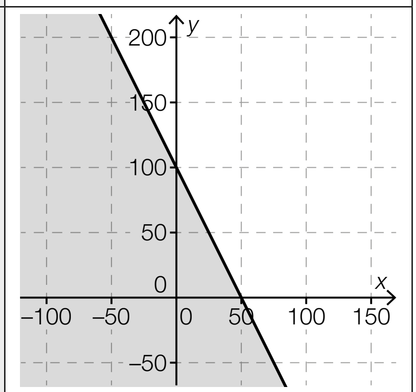
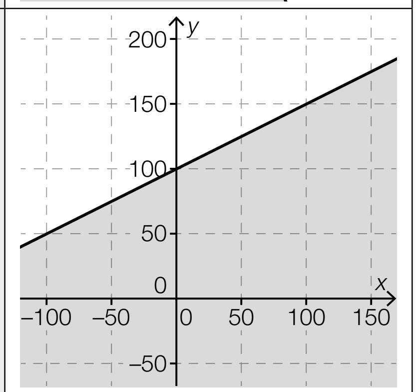
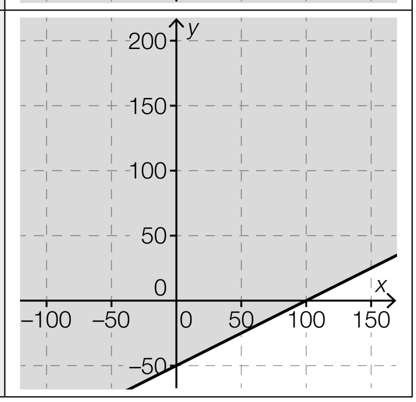
b) Ein Fahrradverleih möchte x E-Bikes und y Citybikes anschaffen.
Insgesamt möchte er höchstens 100 Fahrräder (E-Bikes und Citybikes) anschaffen.
Er möchte um mindestens 30 E-Bikes mehr als Citybikes anschaffen.

1) Erstellen Sie die beiden Ungleichungen, die diesen Sachverhalt beschreiben.

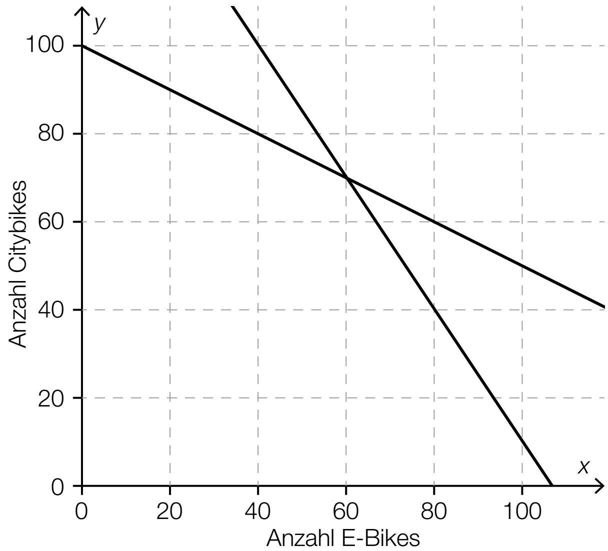
* ehemalige Klausuraufgabe

c) 1) Ordnen Sie den beiden Ungleichungen jeweils die richtige grafische Darstellung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\frac{1}{2} \cdot x \leq y + 50$	
$\frac{1}{2} \cdot y \leq x + 50$	

<table>
<tr><td>A</td><td>
</td></tr>
<tr><td>B</td><td>
</td></tr>
<tr><td>C</td><td>
</td></tr>
<tr><td>D</td><td>
</td></tr>
</table>

d) Ein anderer Fahrradverleih möchte x E-Bikes und y Citybikes anschaffen.
In der nachstehenden Abbildung sind bereits die beiden Begrenzungsgeraden für die Ungleichungen $y \leq -1{,}5 \cdot x + 160$ und $y \leq -0{,}5 \cdot x + 100$ eingezeichnet.

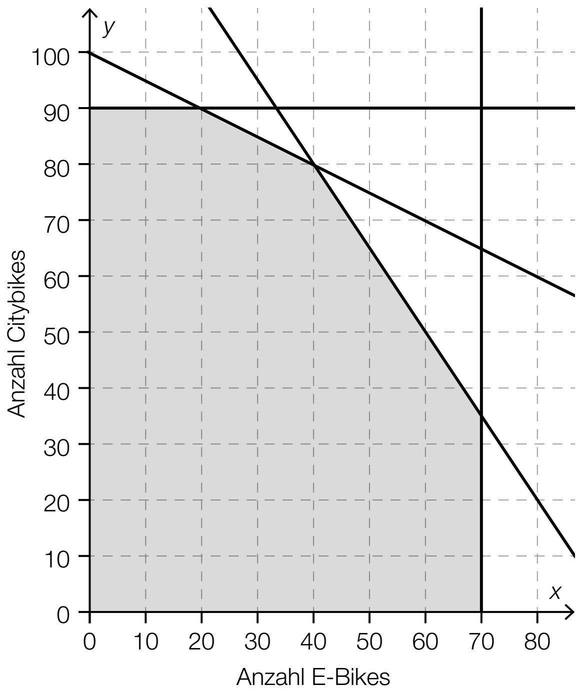


1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Begrenzungsgerade für die Ungleichung $x \leq 80$ ein.

Die 3 genannten Ungleichungen bilden ein Ungleichungssystem.

2) Markieren Sie in der obigen Abbildung den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems.

e) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für einen weiteren Fahrradverleih dargestellt.



Die Zielfunktion für den Erlös in Euro pro Tag bei diesem Fahrradverleih lautet:

$E(x, y) = 30 \cdot x + 20 \cdot y$

x ... Anzahl der E-Bikes
y ... Anzahl der Citybikes

Es soll ermittelt werden, wie viele E-Bikes und Citybikes pro Tag verliehen werden müssen, um den maximalen Erlös zu erzielen.

1) Argumentieren Sie, dass es dafür keine eindeutige Lösung gibt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$A(t) = 7\,525 \cdot t + 7\,305$ *(Koeffizienten gerundet)*

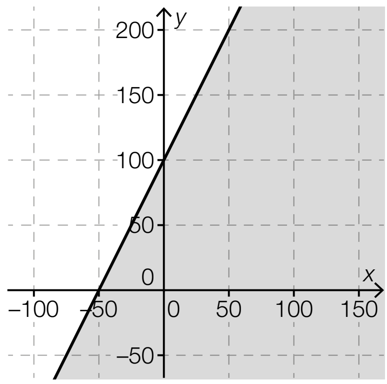
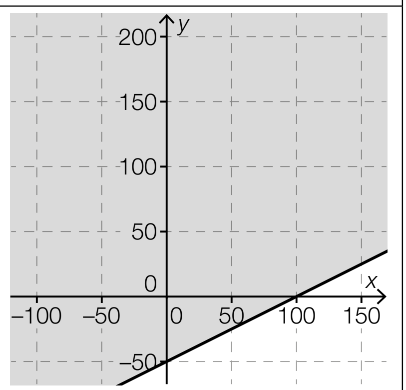
t ... Zeit ab 2008 in Jahren
$A(t)$ ... Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes zur Zeit t

a2) Die Anzahl der pro Jahr verkauften E-Bikes steigt um rund 7 525 Stück pro Jahr.

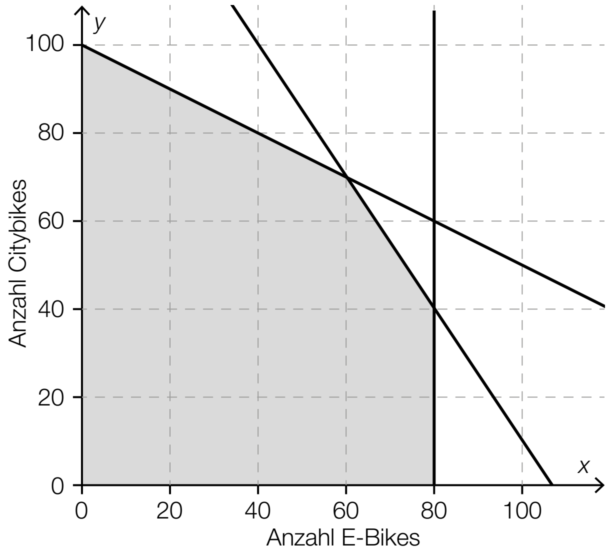
b1) $x + y \leq 100$
$x \geq y + 30$

c1)

$\frac{1}{2} \cdot x \leq y + 50$	D
$\frac{1}{2} \cdot y \leq x + 50$	A

<table>
<tr><td>A</td><td>
</td></tr>
<tr><td>B</td><td>[...]</td></tr>
<tr><td>C</td><td>[...]</td></tr>
<tr><td>D</td><td>
</td></tr>
</table>

d1 und d2)



e1) Die Gerade, für die die Zielfunktion im Lösungsbereich den maximalen Wert annimmt, ist identisch mit einer der Begrenzungsgeraden des Lösungsbereichs. Alle Punkte dieser Begrenzungsgeraden, die im Lösungsbereich liegen, sind mögliche Lösungen, daher gibt es keine eindeutige Lösung.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion

a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang

b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Ungleichung zur Bedingung „höchstens 100 Fahrräder"

1 × A2: für das richtige Erstellen der Ungleichung zur Bedingung „mindestens 30 E-Bikes mehr"

c1) 1 × C: für die richtige Zuordnung

d1) 1 × B: für das richtige Einzeichnen der Begrenzungsgeraden

d2) 1 × C: für das richtige Markieren des Lösungsbereichs

e1) 1 × D: für die richtige Argumentation

Zeitschriften (1)*

Aufgabennummer: B_461

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Kosten für die Produktion der Sport-Zeitschrift *Bike and Run* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K modelliert werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 79$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Bei einer Produktion von 10 ME betragen die Kosten 100 GE und die Grenzkosten 1,5 GE/ME.

1) Erstellen Sie die beiden Gleichungen, die diesem Sachverhalt entsprechen.

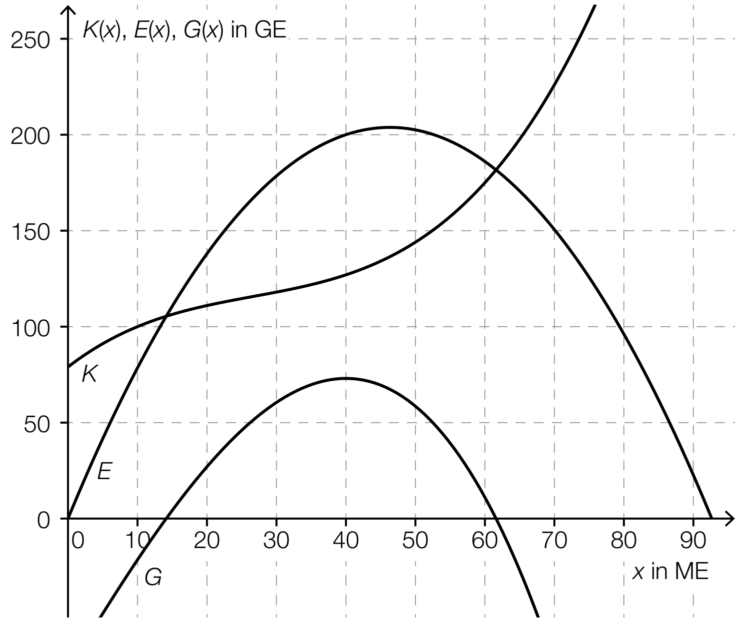
Weiters gilt: $K''(10) = -0{,}1$

2) Interpretieren Sie das Vorzeichen von $K''(10)$ in Bezug auf den Verlauf des Funktionsgraphen von K.

3) Ermitteln Sie die Koeffizienten a, b und c der Kostenfunktion K.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K, der Graph der Erlösfunktion E und der Graph der Gewinnfunktion G für die Zeitschrift *Adventure* dargestellt.



Bei einer bestimmten Absatzmenge ist der Gewinn maximal.

1) Ermitteln Sie den Preis der Zeitschrift *Adventure* bei dieser Absatzmenge.

c) Von einer linearen Preisfunktion der Nachfrage kennt man den Höchstpreis p_h und die Sättigungsmenge x_s.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck für die Steigung der Preisfunktion der Nachfrage an. *[1 aus 5]*

$\frac{p_h}{x_s}$	☐
$-\frac{p_h}{x_s}$	☐
$\frac{x_s}{p_h}$	☐
$-\frac{x_s}{p_h}$	☐
$\frac{p_h - x_s}{x_s}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$K(10) = 100$
$K'(10) = 1{,}5$

oder:

$10^3 \cdot a + 10^2 \cdot b + 10 \cdot c + 79 = 100$
$3 \cdot 10^2 \cdot a + 2 \cdot 10 \cdot b + c = 1{,}5$

a2) Der Graph von K ist bei $x = 10$ rechtsgekrümmt (degressiv).

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}001$
$b = -0{,}08$
$c = 2{,}8$

b1) $\frac{E(40)}{40} = \frac{200}{40} = 5$
Toleranzbereich: [4,8; 5,2]

Der Preis bei dieser Absatzmenge beträgt 5 GE/ME.

c1)

$-\frac{p_h}{x_s}$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Information zu den Gesamtkosten
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Information zu den Grenzkosten
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Vorzeichens
a3) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten
b1) 1 × C: für das richtige Ermitteln des Preises (Toleranzbereich: [4,8; 5,2])
c1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Goldener Schnitt

Aufgabennummer: B_291

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Strecke (vgl. Abbildung 1) wird in die zwei Teile a und b geteilt ($a > b$).
Gilt $a : b = (a + b) : a$, dann bezeichnet man das Teilungsverhältnis $\phi = a : b$ als den *Goldenen Schnitt*.

Abbildung 1

a) – Zeigen Sie, dass für $b = 1$ gilt: $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Wenn man von einem Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, ein Quadrat A abtrennt (Abbildung 2), dann entspricht das Seitenverhältnis des verbleibenden Rechtecks B ebenfalls dem Goldenen Schnitt.

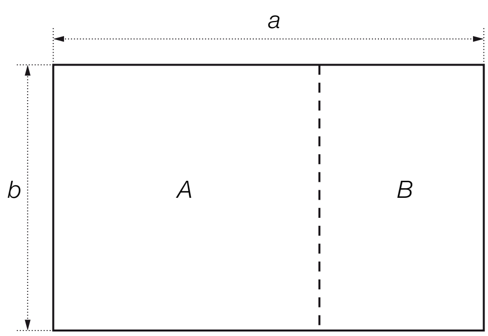


Abbildung 2

– Zeigen Sie diese Eigenschaft für den Fall $b = 1$.

b) Ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, wird als *Goldenes Rechteck* bezeichnet. In Abbildung 3 wird ein Goldenes Rechteck fortlaufend durch Abtrennung eines Quadrats geteilt. Anschließend wird in den einzelnen Quadraten ein Viertelkreis gezeichnet. Dadurch entsteht eine sogenannte *Goldene Spirale*.

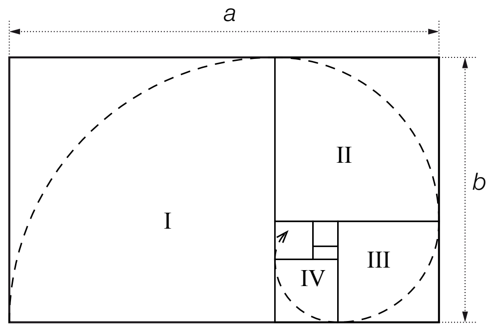


Abbildung 3

– Berechnen Sie die Länge dieser Spirale für die Quadrate I bis IV, wenn die Seitenlängen des Rechtecks a = 144 cm und b = 89 cm betragen.

c) Schon nach dem antiken Schönheitsideal gilt ein Mensch als wohlproportioniert, wenn die Höhe des Nabels die Körpergröße im Goldenen Schnitt teilt. In einer Bevölkerungsgruppe entsprechen 87 % diesem Ideal.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerungsgruppe mindestens 3 diesem Ideal entsprechen.

In einer anderen Bevölkerungsgruppe wurden die Daten von 5 Personen erhoben:

x = Höhe bis zum Nabel in cm	105	115	108	121	114
y = Körpergröße in cm	159	174	161	182	171

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

d) Das Seitenverhältnis eines rechteckigen digitalen Bilderrahmens mit einer Diagonale von d = 10 Zoll entspricht mit 1,6 in etwa dem Goldenen Schnitt.

– Berechnen Sie die Breite (= längere Rechteckseite) des Bildschirms in Zentimetern (1 Zoll = 2,54 cm).

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für $b = 1$ gilt:

$a : 1 = (a + 1) : a \;\Rightarrow\; a^2 = a + 1 \;\Rightarrow\; a^2 - a - 1 = 0$

$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Die zweite Lösung $a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ kann aufgrund der Voraussetzung $a > 1$ nicht auftreten.

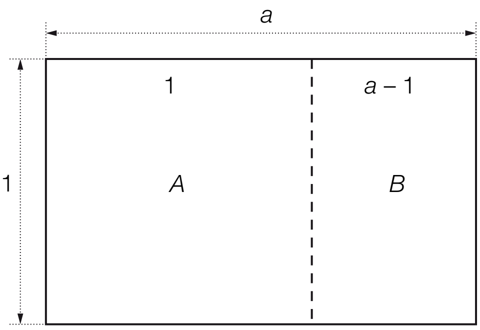
$a : 1 = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Für das ursprüngliche Rechteck gilt:

$\frac{a}{1} = \frac{a+1}{a} \;\Rightarrow a - 1 = \frac{1}{a}$

und durch den Kehrwert $1 : (a - 1) = a : 1$

Somit entspricht das Seitenverhältnis des Rechtecks B dem Goldenen Schnitt.



Alternativer Lösungsweg:

Im ursprünglichen Rechteck gilt: $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Das Seitenverhältnis des Rechtecks B entspricht genau dann dem Goldenen Schnitt, wenn gilt:

$\frac{1}{a - 1} = \frac{a}{1}$

$\frac{1}{a - 1} = \frac{a}{1} \;\Leftrightarrow\; 1 = (a - 1) \cdot a \;\Leftrightarrow\; a^2 - a - 1 = 0$

Diese Gleichung ist für $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ laut Voraussetzung erfüllt.

b) Radien der Viertelkreise: $r_{\mathrm{I}} = 89$, $r_{\mathrm{II}} = 144 - 89 = 55$, $r_{\mathrm{III}} = 89 - 55 = 34$, $r_{\mathrm{IV}} = 55 - 34 = 21$

Länge der Spirale: $\frac{\pi}{2} \cdot 89 + \frac{\pi}{2} \cdot 55 + \frac{\pi}{2} \cdot 34 + \frac{\pi}{2} \cdot 21 = 99{,}5 \cdot \pi \approx 312{,}59$ cm

c) Binomialverteilung mit $p = 0{,}87$ und $n = 5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9820\ldots \approx 98{,}2$ %

Ermitteln der Gleichung mittels Technologieeinsatz:

$y = 1{,}5064 \cdot x - 0{,}2163$ *(Parameter gerundet)*

d) $d = 25{,}4$ cm; $\frac{\text{Breite}}{\text{Höhe}} = \frac{b}{h} = 1{,}6 \Rightarrow h = \frac{b}{1{,}6}$

Pythagoras: $d^2 = b^2 + h^2 = b^2 + \left(\frac{b}{1{,}6}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{d^2}{1 + \left(\frac{1}{1{,}6}\right)^2}$

Breite $b = 21{,}539\ldots \approx 21{,}54$ cm

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) schwer	a) 2
b) mittel	b) 1
c) leicht	c) 2
d) mittel	d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: Elam, Kimberley: *Proportion und Komposition. Geometrie im Design.* New York: Princeton Architectural Press 2006.

Lagerhalle*

Aufgabennummer: B_484

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für den Kauf einer Lagerhalle benötigt ein Unternehmen € 180.000. Es werden verschiedene Möglichkeiten für die Finanzierung überprüft.

a) Das Unternehmen konnte in den vergangenen Jahren Rücklagen bilden, die mit einem positiven jährlichen Zinssatz i verzinst werden:
Vor 4 Jahren konnte das Unternehmen € 50.000 zurücklegen, vor 3 Jahren konnte es € 70.000 zurücklegen.

Es soll derjenige Betrag X ermittelt werden, der für den Kauf der Lagerhalle heute noch fehlt.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Betrags X.

$X =$ ____

2) Berechnen Sie den Betrag X für den Zinssatz $i = 2{,}5~\%$ p. a.

b) Das Unternehmen kann den Kauf der Lagerhalle mit einem Kredit in Höhe von € 180.000 finanzieren.

Der Kredit soll durch 40 nachschüssige Quartalsraten bei einem Zinssatz von 1 % p. q. getilgt werden.

1) Berechnen Sie die Höhe einer Quartalsrate.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein anderes Kreditangebot enthält Sonderkonditionen für die Jahre 1 und 2.

Diese Sonderkonditionen können dem Tilgungsplan entnommen werden:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 180.000
1	€ 5.400	€ –5.400	€ 0	€ 185.400
2	€ 5.562			€ 180.000

1) Ermitteln Sie den Jahreszinssatz für dieses Kreditangebot.

2) Erklären Sie mithilfe der Einträge im Tilgungsplan, warum der Tilgungsanteil im Jahr 1 negativ ist.

3) Vervollständigen Sie die Zeile für das Jahr 2 im obigen Tilgungsplan.

Möglicher Lösungsweg

a1) $X = 180\,000 - 50\,000 \cdot (1 + i)^4 - 70\,000 \cdot (1 + i)^3$

a2) $X = 180\,000 - 50\,000 \cdot 1{,}025^4 - 70\,000 \cdot 1{,}025^3 = 49\,427{,}011\ldots$
Es fehlt ein Betrag in Höhe von € 49.427,01.

b1) $180\,000 = R \cdot \frac{1{,}01^{40} - 1}{0{,}01} \cdot \frac{1}{1{,}01^{40}} \quad \Rightarrow \quad R = 5\,482{,}007\ldots$
Die Höhe einer Quartalsrate beträgt € 5.482,01.

c1) $i = \frac{5\,400}{180\,000} = 0{,}03$
Der Jahreszinssatz beträgt 3 %.

c2) Das Unternehmen bezahlt im Jahr 1 nichts, die Annuität ist gleich null.
Da die Summe aus Zinsanteil und Tilgungsanteil gleich null ist, muss der Tilgungsanteil negativ sein.

c3)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
2	€ 5.562	**€ 5.400**	**€ 10.962**	€ 180.000

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Betrags X
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Höhe einer Quartalsrate
c1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Jahreszinssatzes
c2) 1 × D: für das richtige Erklären
c3) 1 × B2: für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Jahr 2

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fruchtsaftproduktion*

Aufgabennummer: B_483

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert den Fruchtsaft *Mangomix*.

a) Die Kosten bei der Produktion des Fruchtsafts *Mangomix* können durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion K beschrieben werden:

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 105 \cdot x + 1215$$

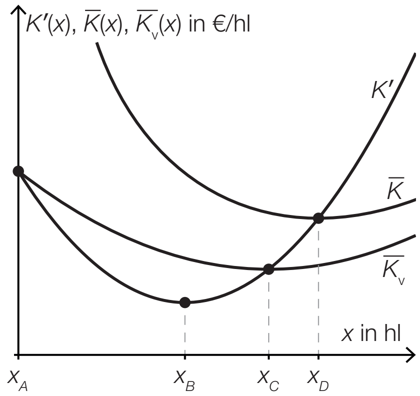
x ... Produktionsmenge in hl
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

Von der Kostenfunktion ist bekannt:
I: Die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 25 hl betragen 30 €/hl.
II: $K''(25) = 0$

1) Erstellen Sie eine Gleichung, die die Bedingung I beschreibt.
2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 25 in der Gleichung II im gegebenen Sachzusammenhang.
3) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Grenzkostenfunktion K', der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K_v}$ für den Fruchtsaft *Mangomix* dargestellt.
Vier Produktionsmengen, x_A bis x_D, sind auf der horizontalen Achse markiert.



1) Ordnen Sie den beiden Begriffen jeweils die zutreffende Produktionsmenge aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Kostenkehre	
Betriebsminimum	

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c) Der Erlös beim Verkauf des Fruchtsafts *Mangomix* kann durch eine quadratische Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ mit $x \geq 0$

x ... Absatzmenge in hl
$E(x)$ ... Erlös bei der Absatzmenge x in €

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Der Koeffizient a muss _____①_____ sein, weil der Graph von E _____②_____.

①	
positiv	☐
negativ	☐
gleich null	☐

②	
durch den Ursprung geht	☐
keinen Wendepunkt hat	☐
nach unten geöffnet ist	☐

2) Weisen Sie nach, dass der maximale Erlös bei der Absatzmenge $x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$ erzielt wird.

d) Der Grenzgewinn für den Fruchtsaft *Mangomix* kann durch die Funktion G' beschrieben werden:

$G'(x) = -0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220$

x ... Absatzmenge in hl
$G'(x)$ ... Grenzgewinn bei der Absatzmenge x in €/hl

1) Ermitteln Sie diejenige Absatzmenge, bei der der maximale Gewinn erzielt wird.

Die Fixkosten betragen 1.215 €.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion G unter Berücksichtigung der Fixkosten.

Es soll derjenige Bereich für die Absatzmenge ermittelt werden, in dem der Gewinn mindestens 1.000 € beträgt.

3) Ermitteln Sie diesen Bereich.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + 105$

Gleichung: $K'(25) = 30$ *oder* $1\,875 \cdot a + 50 \cdot b + 105 = 30$

a2) Bei einer Produktionsmenge von 25 hl liegt die Kostenkehre.

oder:

Bei einer Produktionsmenge von 25 hl geht der Kostenverlauf von degressiv zu progressiv über.

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}04$; $b = -3$

b1)

Kostenkehre	B
Betriebsminimum	C

A	Produktionsmenge x_A
B	Produktionsmenge x_B
C	Produktionsmenge x_C
D	Produktionsmenge x_D

c1)

①	
negativ	☒

②	
nach unten geöffnet ist	☒

c2) $E'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$0 = 2 \cdot a \cdot x_0 + b$
$x_0 = -\frac{b}{2 \cdot a}$

oder:

Die Nullstellen der Erlösfunktion sind 0 und $-\frac{b}{a}$.
Die Stelle des Maximums liegt in der Mitte bei $-\frac{b}{2 \cdot a}$.

d1) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 29{,}280...$ $(x_2 = -62{,}613...)$

Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von rund 29,28 hl erzielt.

d2) $G(x) = \int(-0{,}12 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 220)\,\mathrm{d}x = -0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x + C$

Da $G(0) = -F$, gilt: $G(x) = -0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1\,215$

d3) $G(x) = 1\,000$ *oder* $-0{,}04 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 220 \cdot x - 1\,215 = 1\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 11{,}565...$ $x_2 = 44{,}950...$ $(x_3 = -106{,}516...)$

Im Bereich [11,57 hl; 44,95 hl] beträgt der Gewinn mindestens 1.000 €.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung
a2) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B: für das richtige Berechnen der Koeffizienten
b1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
c1) 1 × C: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken
c2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
d1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Absatzmenge, bei der maximaler Gewinn erzielt wird
d2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Gewinnfunktion unter Berücksichtigung der Fixkosten
d3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Bereichs

Sozialausgaben (2)*

Aufgabennummer: B_482

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

a) Die Sozialausgaben sollen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren ab 1990 näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion S_1. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von S_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Ermitteln Sie mithilfe von S_1 eine Prognose für die Sozialausgaben im Jahr 2020.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) 1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\sqrt[5]{\frac{87,8}{71,2}} - 1 \approx 0,043$$

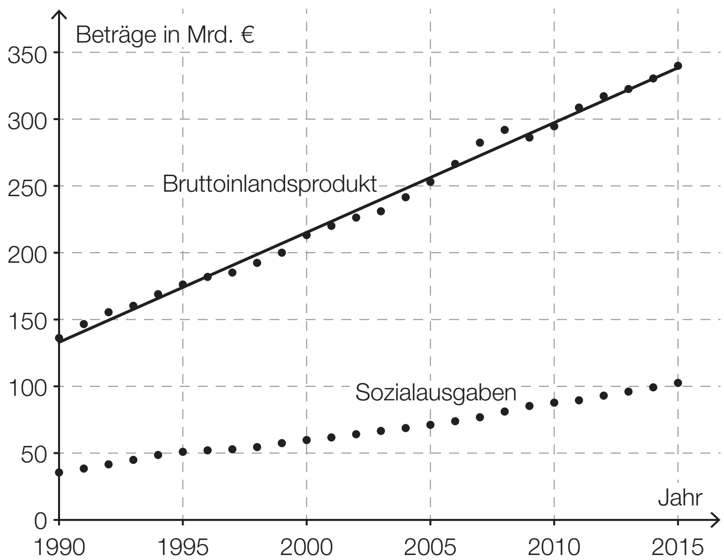
Eine Sozialwissenschaftlerin geht von der Annahme aus, dass die Sozialausgaben in Österreich seit dem Jahr 2015 jährlich um 2,5 % bezogen auf das jeweilige Vorjahr steigen.

Dieses Modell soll durch eine Funktion S_2 beschrieben werden.

t ... Zeit ab 2015 in Jahren
$S_2(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion S_2.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2015.

c) In der nachstehenden Abbildung sind das Bruttoinlandsprodukt und die Sozialausgaben Österreichs für den Zeitraum von 1990 bis 2015 dargestellt.
Weiters ist die Regressionsgerade für das Bruttoinlandsprodukt für diesen Zeitraum eingezeichnet.

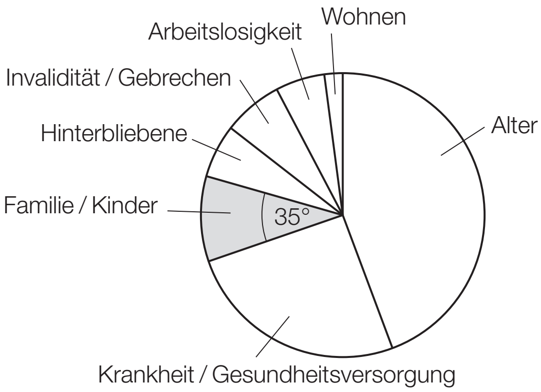


1) Ermitteln Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden für das Bruttoinlandsprodukt.

Die Sozialquote ist das Verhältnis der Sozialausgaben zum Bruttoinlandsprodukt.

2) Ermitteln Sie die Sozialquote für das Jahr 2015.

d) Die Verteilung der Sozialausgaben von insgesamt 102,5 Milliarden Euro für das Jahr 2015 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Bereich „Familie / Kinder“ ist markiert.



1) Ermitteln Sie den Betrag, der im Jahr 2015 für den Bereich „Familie / Kinder“ ausgegeben worden ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$S_1(t) = 2{,}61 \cdot t + 35{,}3$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ für das Jahr 1990)
$S_1(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

a2) Gemäß diesem Modell steigen die Sozialausgaben um rund 2,61 Milliarden Euro pro Jahr.

a3) $S_1(30) = 2{,}61 \cdot 30 + 35{,}3 = 113{,}64...$
Für das Jahr 2020 sind Sozialausgaben in Höhe von rund 113,6 Milliarden Euro zu erwarten.

b1) Im Zeitraum von 2005 bis 2010 stiegen die Sozialausgaben um durchschnittlich rund 4,3 % pro Jahr.

b2) $S_2(t) = 102{,}5 \cdot 1{,}025^t$

c1) Steigung $k \approx \frac{340 - 140}{25} = 8$
Toleranzbereich: [7; 9]

c2) Sozialquote für 2015: $\frac{102{,}5}{340} = 0{,}301...$
Toleranzbereich: [0,285; 0,320]

d1) $102{,}5 \cdot \frac{35°}{360°} = 9{,}9...$
Für den Bereich „Familie/Kinder" sind im Jahr 2015 rund 10 Mrd. Euro ausgegeben worden.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für das richtige Interpretieren des Wertes der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose
b1) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
c1) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Wertes der Steigung (Toleranzbereich: [7; 9])
c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Sozialquote (Toleranzbereich: [0,285; 0,320])
d1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Betrags

Kfz-Bestand (1)*

Aufgabennummer: B_300

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$\sqrt[20]{\frac{6{,}3}{4{,}5}} = 1{,}0169...$

$1{,}0169... - 1 = 0{,}0169... \approx 1{,}7\ \%$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang.

Jemand berechnet weiters:

$2 = 1{,}0169...^t$

$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0169...)} = 41{,}20... \approx 41{,}2$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Der Kfz-Bestand kann nicht unbeschränkt wachsen.

Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands kann in einem Modell beschränkten Wachstums durch die Funktion K_B beschrieben werden:

$K_B(t) = 9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992

$K_B(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

Der Graph der Funktion K_B soll durch die Datenpunkte für die Jahre 1992 und 2012 verlaufen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Parameter b und λ der Funktion K_B ermittelt werden können.

2) Ermitteln Sie die Parameter b und λ.

3) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells eine Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020.

d) In einem logistischen Modell wird die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands durch die Funktion K_L beschrieben:

$$K_L(t) = \frac{22{,}5}{3 + 2 \cdot e^{-0{,}06264 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_L(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

1) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich der Kfz-Bestand gemäß diesem Modell langfristig dem Wert 7,5 Millionen annähert.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$K(t) = 0{,}084 \cdot t + 4{,}6$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

a2) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand um 84 000 Kraftfahrzeuge pro Jahr zu.

a3) $K(t) = 8$ *oder* $0{,}084 \cdot t + 4{,}6 = 8$
$t = 40{,}47...$

Gemäß diesem Modell ist nach etwa 40,5 Jahren mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen.

Die Lösung kann entweder als Zeit nach Ende des Jahres 1992 oder als Kalenderjahr angegeben werden.

b1) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand pro Jahr um rund 1,7 % zu.

b2) Gemäß diesem Modell verdoppelt sich der Kfz-Bestand nach (jeweils) rund 41,2 Jahren.

c1) $K_B(0) = 4{,}5$
$K_B(20) = 6{,}3$

oder:

$9 - b = 4{,}5$
$9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot 20} = 6{,}3$

c2) $b = 9 - 4{,}5 = 4{,}5$
$$\lambda = \frac{\ln(4{,}5) - \ln(2{,}7)}{20} = 0{,}025541...$$

c3) $K_B(28) = 6{,}79...$

Gemäß diesem Modell beträgt der Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020 rund 6,8 Millionen.

d1) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-0{,}06264 \cdot t}$ gegen null, der Nenner also gegen 3 und damit der Funktionswert gegen 7,5.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist
b1) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × C2: für die richtige Interpretation der Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Parameter b und λ
c3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020
d1) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kredit und Sparbuch*

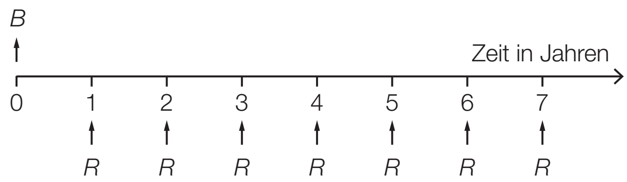
Aufgabennummer: B_469		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Die Begriffe *Kredit* und *Sparbuch* werden in dieser Aufgabe in vereinfachter Form ohne Berücksichtigung von Gebühren oder Steuern verwendet.

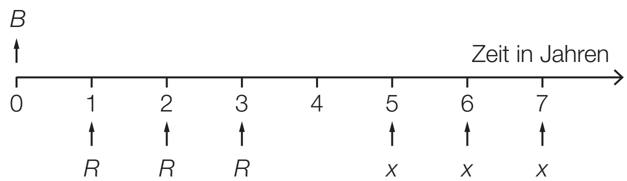
a) Die unten stehenden Zeitachsen beschreiben die Rückzahlungen von 2 Krediten, die nach 7 Jahren vollständig getilgt sind.

Bei beiden Krediten sind der Zinssatz, die Kredithöhe B und die Ratenhöhe R jeweils gleich hoch.

Kredit 1:



Kredit 2:



1) Argumentieren Sie, dass die Ratenhöhe x höher sein muss als die Ratenhöhe R.

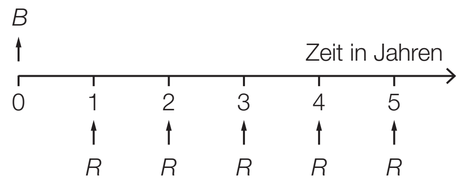
Die Kredithöhe B beträgt € 10.000. Der Zinssatz beträgt 3 % p.a.

2) Berechnen Sie die Ratenhöhe R.

3) Berechnen Sie für Kredit 2 die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Kredit in der Höhe B wird mit einem Jahreszinssatz i verzinst.
Die Höhe der jährlichen Rate beträgt R.



Nachdem die erste Rate R zurückgezahlt wurde, beträgt die Restschuld B_1.

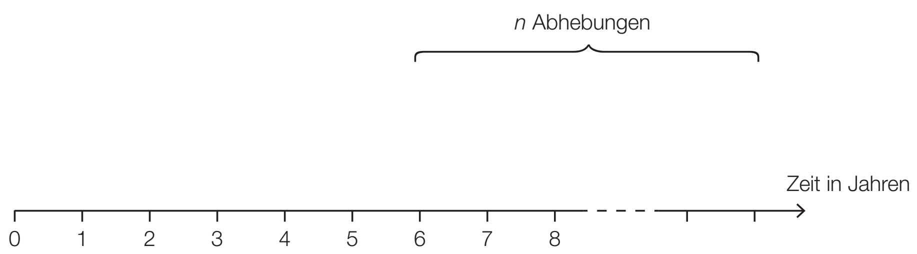
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von B_1 aus B, R und i.

B_1 = ____

c) Jemand zahlt in 4 aufeinanderfolgenden Jahren jeweils zu Jahresbeginn einen Betrag in Höhe von € 300 auf ein Sparbuch ein. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p.a.

Beginnend 3 Jahre nach der letzten Einzahlung wird jeweils jährlich ein Betrag in Höhe von € 150 abgehoben.
Insgesamt finden n Abhebungen statt. Die letzte Abhebung setzt sich dabei aus den € 150 und einem Restbetrag x mit € $0 < x <$ € 150 zusammen.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Zeitachse so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$K = 300 \cdot 1{,}015^6 + 300 \cdot 1{,}015^5 + 300 \cdot 1{,}015^4 + 300 \cdot 1{,}015^3 \approx 1\,283{,}33$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von K im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Berechnen Sie die Anzahl n der Abhebungen.

Möglicher Lösungsweg

a1) Bei Kredit 2 wird eine Ratenzahlung ausgesetzt, dadurch muss die verbleibende Ratenhöhe x größer sein als die ursprüngliche Ratenhöhe R.

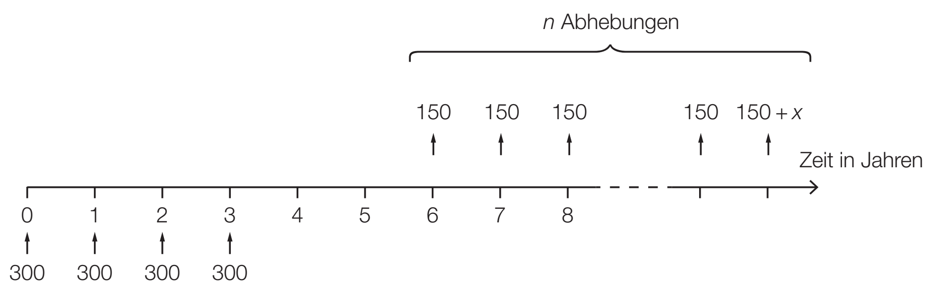
a2) $10\,000 = R \cdot \frac{1{,}03^7 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^7}$
$R = 1\,605{,}063...$
Die Ratenhöhe R beträgt € 1.605,06.

a3) $10\,000 \cdot 1{,}03^4 - 1\,605{,}06 \cdot 1{,}03^3 - 1\,605{,}06 \cdot 1{,}03^2 - 1\,605{,}06 \cdot 1{,}03 = 6\,145{,}175...$
Die Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt 4 beträgt € 6.145,18.

Wird bei der Berechnung der Höhe der Restschuld die ungerundete Ratenhöhe verwendet, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.

b1) $B_1 = B \cdot (1 + i) - R$

c1)



c2) K ist das angesparte Kapital nach 6 Jahren.

c3) $1\,283{,}33 = 150 \cdot \frac{1{,}015^n - 1}{0{,}015} \cdot \frac{1}{1{,}015^{n-1}}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 9{,}0...$
Es finden 9 Abhebungen statt.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für die richtige Argumentation
a2) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Ratenhöhe R
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe der Restschuld zum Zeitpunkt $t = 4$ Jahre
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von B_1
c1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Zeitachse
c2) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
c3) 1 × B: für die richtige Berechnung von n

Käseproduktion*

Aufgabennummer: B_468

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Produktionsleiter einer kleinen Käserei hat für eine bestimmte Käsesorte die täglichen Produktionskosten genauer untersucht.

a) Für die der Kostenfunktion K zugehörigen Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}03 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 5$

x … Produktionsmenge in kg
$K'(x)$ … Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in €/kg

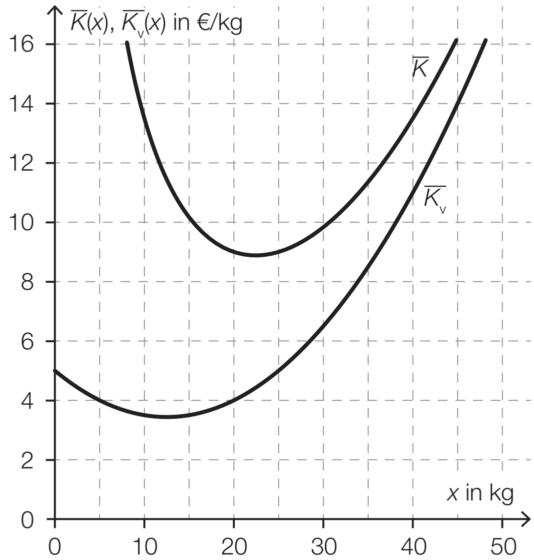
Bei einer Produktionsmenge von 5 kg entstehen Gesamtkosten von € 120.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.
2) Berechnen Sie die Kostenkehre.
3) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$$\frac{K(10) - K(5)}{10 - 5} = 3$$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ und der variablen Stückkostenfunktion $\overline{K}_v$ dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Betriebsoptimum ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die kurzfristige Preisuntergrenze ab. Geben Sie die zugehörige Einheit an.

c) Der Gewinn kann durch eine Polynomfunktion G beschrieben werden.

$G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... Absatzmenge in kg
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in €

Bei einer Absatzmenge von 5 kg werden € 35 Verlust erzielt.
Bei einer Absatzmenge von 25 kg beträgt der Gewinn € 200.
Der maximale Gewinn wird bei einer Absatzmenge von 30 kg erzielt und beträgt € 215.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten von G ermittelt werden können.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K(x) = \int (0{,}03 \cdot x^2 - 0{,}5 \cdot x + 5)\,\mathrm{d}x = 0{,}01 \cdot x^3 - 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + F$

$K(5) = 120$ *oder* $0{,}01 \cdot 5^3 - 0{,}25 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + F = 120 \quad \Rightarrow \quad F = 100$

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^3 - 0{,}25 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 100$

x ... Produktionsmenge in kg
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

a2) $K''(x) = 0{,}06 \cdot x - 0{,}5$

$K''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8{,}33...$

Die Kostenkehre liegt bei rund 8,3 kg.

a3) Wird die Produktion von 5 kg auf 10 kg gesteigert, so nehmen die Gesamtkosten um durchschnittlich € 3 pro kg zu.

b1) Betriebsoptimum: 22 kg
Toleranzbereich: [21 kg; 23 kg]

b2) kurzfristige Preisuntergrenze: 3,40 €/kg
Toleranzbereich: [3,10 €/kg; 3,70 €/kg]

c1) $G(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$G'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $G(5) = -35$
II: $G(25) = 200$
III: $G(30) = 215$
IV: $G'(30) = 0$

oder:

I: $5^3 \cdot a + 5^2 \cdot b + 5 \cdot c + d = -35$
II: $25^3 \cdot a + 25^2 \cdot b + 25 \cdot c + d = 200$
III: $30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d = 215$
IV: $3 \cdot 30^2 \cdot a + 2 \cdot 30 \cdot b + c = 0$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}01;\; b = 0{,}25;\; c = 12;\; d = -100$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion (mit Integrationskonstante)
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kostenkehre
a3) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
b1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Betriebsoptimums im Toleranzbereich [21 kg; 23 kg] mit der Angabe der richtigen Einheit
b2) 1 × C2: für das richtige Ablesen der kurzfristigen Preisuntergrenze im Toleranzbereich [3,10 €/kg; 3,70 €/kg] mit der Angabe der richtigen Einheit
c1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Informationen zum Gewinn bei den Absatzmengen 5 kg, 25 kg und 30 kg
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der Ableitungsfunktion G'
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

Strandbar*

Aufgabennummer: B_488		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Eine kleine Strandbar bietet zwei Eisdesserts an: Eiskaffee und Bananensplit.

x ... Anzahl der Eiskaffees
y ... Anzahl der Bananensplits

a) Für einen Eiskaffee benötigt man 2 Kugeln Vanilleeis und 1 Portion Obers.
Für ein Bananensplit benötigt man 3 Kugeln Vanilleeis und 1 Portion Obers.
Es ist Vanilleeis für maximal 80 Kugeln vorhanden.
Der Obersvorrat reicht für die Herstellung von maximal 30 Eisdesserts.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das diesen Sachverhalt beschreibt.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die Herstellung von 5 Eiskaffees und 25 Bananensplits möglich ist.

b) Die Zielfunktion E beschreibt den Gesamterlös in Euro bei einem Verkauf von x Eiskaffees und y Bananensplits.

$E(x, y) = p_1 \cdot x + p_2 \cdot y$

Der Preis eines Bananensplits ist um 20 % höher als der Preis eines Eiskaffees.

1) Erstellen Sie mithilfe von p_1 eine Formel zur Berechnung von p_2.

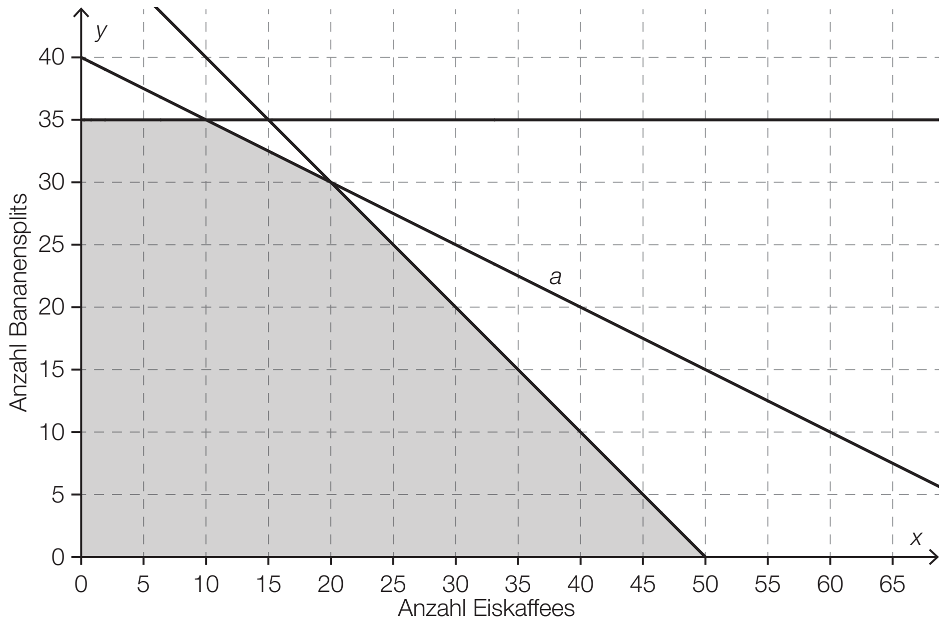
$p_2 =$ ____________________________________

Der Gesamterlös bei einem Verkauf von 10 Eiskaffees und 5 Bananensplits beträgt € 72.

2) Ermitteln Sie p_1 und p_2.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im nächsten Sommer werden die Rezepte und die Preise verändert. In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Herstellung von x Eiskaffees und y Bananensplits dargestellt.



1) Vervollständigen Sie die nachstehende Gleichung der Geraden a durch Eintragen der fehlenden Zahl.

$x + \boxed{} \cdot y = 80$

Ein Eiskaffee wird um € 4,60 und ein Bananensplit um € 6,00 verkauft.
Die Kosten für die Herstellung betragen € 1,10 für einen Eiskaffee und € 1,50 für ein Bananensplit.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Gewinns in Euro.

3) Ermitteln Sie diejenigen Verkaufsmengen, bei denen der Gewinn maximal ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) I: $2 \cdot x + 3 \cdot y \leq 80$
II: $x + y \leq 30$

a2) Es ist nicht möglich, weil die Ungleichung I in diesem Fall nicht erfüllt ist.
$2 \cdot 5 + 3 \cdot 25 > 80$

b1) $p_2 = 1{,}2 \cdot p_1$

b2) $72 = p_1 \cdot 10 + (1{,}2 \cdot p_1) \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 4{,}5$
$p_2 = 1{,}2 \cdot 4{,}5 = 5{,}4$

c1) $x + \boxed{2} \cdot y = 80$

c2) $G(x, y) = 3{,}5 \cdot x + 4{,}5 \cdot y$

c3) $G(0, 35) = 157{,}5$
$G(10, 35) = 192{,}5$
$G(20, 30) = 205$
$G(50, 0) = 175$
Der maximale Gewinn wird bei einem Verkauf von 20 Eiskaffees und 30 Bananensplits erzielt.

Eine grafische Lösungsmethode ist ebenfalls zulässig.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Ungleichungssystems
Die Angabe der Nichtnegativitätsbedingungen ist nicht erforderlich.
a2) 1 × D: für das richtige nachweisliche Überprüfen
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b2) 1 × B: für das richtige Ermitteln von p_1 und p_2
c1) 1 × A1: für das richtige Vervollständigen der Gleichung
c2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Zielfunktion
c3) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Verkaufsmengen, bei denen der Gewinn maximal ist

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Obsthändler*

Aufgabennummer: B_489

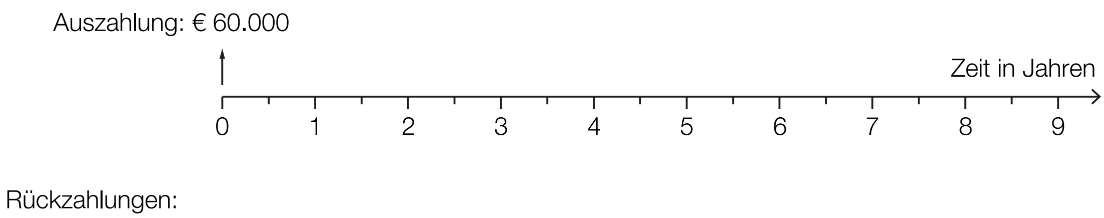
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Obsthändler plant die Renovierung seiner Geschäftsräume.

a) Die Renovierung soll durch einen Kredit in Höhe von € 60.000 finanziert werden.

Das Angebot einer Bank sieht folgende Rückzahlungen vor:
- eine Einmalzahlung in Höhe von € 15.000 am Ende des 1. Jahres
- eine weitere Einmalzahlung in Höhe von € 20.000 am Ende des 3. Jahres
- 6 Halbjahresraten in Höhe von jeweils R, die erste Rate ist am Ende des 4. Jahres fällig

1) Veranschaulichen Sie diese Rückzahlungen auf der nachstehenden Zeitachse.



2) Berechnen Sie die Ratenhöhe R bei einem Semesterzinssatz von 3 % p. s.

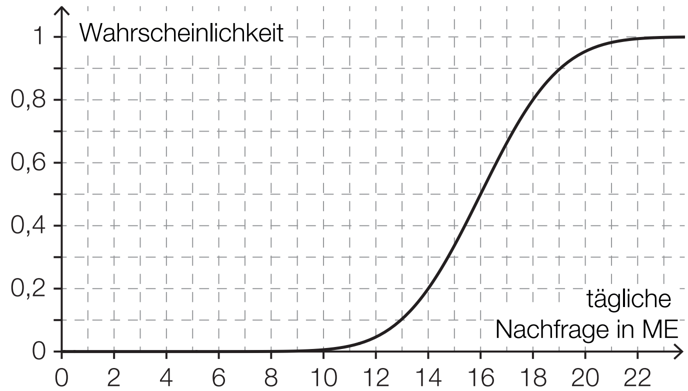
b) Der Obsthändler überlegt, die Renovierung erst in 2 Jahren durchzuführen, um bis dahin Geld anzusparen. Er geht davon aus, dass er monatlich nachschüssig € 2.400 auf ein Konto einzahlen könnte. Dadurch möchte er innerhalb von 2 Jahren € 60.000 ansparen.

1) Berechnen Sie denjenigen effektiven Jahreszinssatz i, bei dem der Obsthändler sein Sparziel genau erreichen würde.

2) Begründen Sie ohne Berechnung, warum der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger ist, wenn die monatlichen Einzahlungen vorschüssig erfolgen.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die tägliche Nachfrage X nach einer bestimmten Obstsorte ist bei diesem Obsthändler annähernd normalverteilt. Der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der Abbildung den Erwartungswert μ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 14)$ ab.

μ = ______________________ ME

$P(X \leq 14)$ = ______________________

2) Ermitteln Sie mithilfe der abgelesenen Werte die Standardabweichung von X.

Der Obsthändler möchte herausfinden, welche Menge dieser Obstsorte er lagern sollte (Bestandsmenge). Zur Ermittlung der optimalen Bestandsmenge kann das sogenannte *Zeitungsjungen-Modell* verwendet werden.
Laut diesem Modell ist die Bestandsmenge q dann optimal, wenn Folgendes gilt:
Die Wahrscheinlichkeit, dass die tägliche Nachfrage höchstens q ist, beträgt $\frac{p-c}{p}$, also:

$P(X \leq q) = \frac{p-c}{p}$
q … optimale Bestandsmenge in ME
c … Einkaufspreis in GE/ME
p … Verkaufspreis in GE/ME

3) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung für $c = 2$ GE/ME und $p = 5$ GE/ME die zugehörige optimale Bestandsmenge.

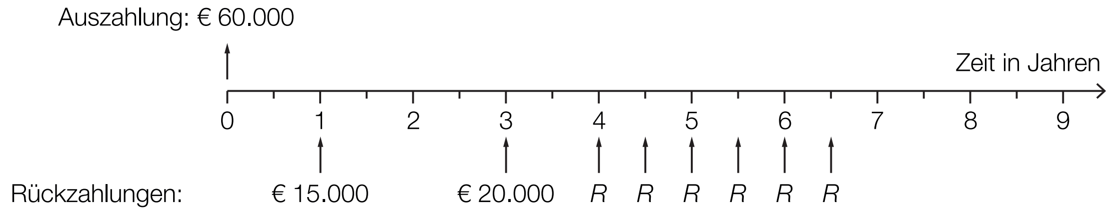
Man betrachtet den Ausdruck $\frac{p - c}{p}$ mit $p \neq 0$.

4) Kreuzen Sie die auf diesen Ausdruck zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Wenn man für p und c die gleiche positive Zahl einsetzt, ist der Ausdruck $\frac{p - c}{p}$ nicht definiert.	☐
Der Ausdruck $\frac{p - c}{p}$ kann auch in der Form $p - c : p$ angeschrieben werden.	☐
Wenn sowohl p als auch c verdoppelt werden, bleibt der Wert des Ausdrucks $\frac{p - c}{p}$ unverändert.	☐
Wenn p das Doppelte von c ist, dann hat der Ausdruck $\frac{p - c}{p}$ den Wert $\frac{1}{3}$.	☐
Der Ausdruck $\frac{p - c}{p}$ kann für $p \neq 1$ zu $1 - c$ vereinfacht werden.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $60\,000 = \frac{15\,000}{1{,}03^2} + \frac{20\,000}{1{,}03^6} + R \cdot \frac{1{,}03^6 - 1}{0{,}03} \cdot \frac{1}{1{,}03^{13}} \quad \Rightarrow \quad R = 6\,609{,}203...$

Die Ratenhöhe beträgt € 6.609,20.

b1) q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

$$60\,000 = 2\,400 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $q_{12} = 1{,}00353...$

$i = q_{12}^{12} - 1 = 0{,}04319...$

Der effektive Jahreszinssatz beträgt rund 4,32 %.

b2) Im Falle vorschüssiger Einzahlungen wird jede Einzahlung 1 Monat länger verzinst. Da der Endwert gleich hoch ist, muss im Vergleich zu nachschüssigen Einzahlungen der zugehörige effektive Jahreszinssatz niedriger sein.

c1) $\mu = 16$ ME
$P(X \leq 14) = 0{,}2$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz: $\sigma = 2{,}376...$
Die Standardabweichung beträgt rund 2,38 ME.

c3) $\frac{5-2}{5} = 0{,}6$

Ablesen derjenigen Menge q, für die gilt: $P(X \leq q) = 0{,}6$
$q \approx 16{,}6$ ME
Toleranzbereich: [16,4; 16,8]

c4)

Wenn sowohl p als auch c verdoppelt werden, bleibt der Wert des Ausdrucks $\frac{p-c}{p}$ unverändert.	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen der Rückzahlungen
a2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz
1 × B: für das richtige Berechnen der Ratenhöhe
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen des effektiven Jahreszinssatzes
b2) 1 × D: für das richtige Begründen
c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Erwartungswerts und der Wahrscheinlichkeit
c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Standardabweichung
c3) 1 × C2: für das richtige Ermitteln der optimalen Bestandsmenge
(Toleranzbereich: [16,4; 16,8])
c4) 1 × C3: für das richtige Ankreuzen

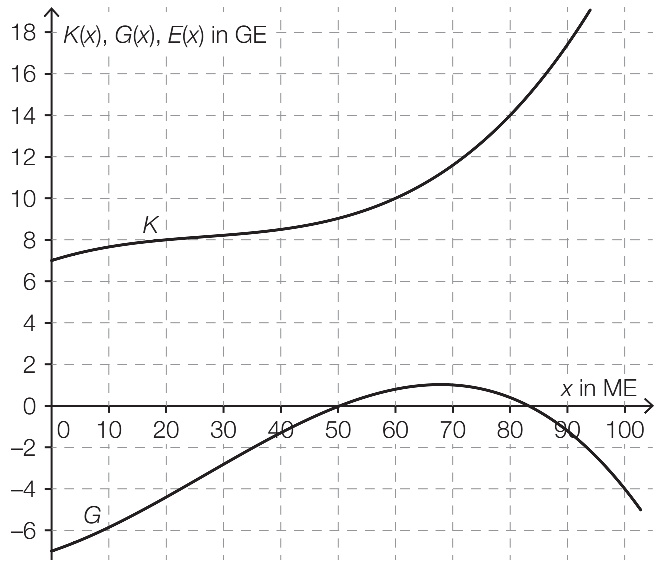
Produktion von CD-Rohlingen und DVD-Rohlingen*

Aufgabennummer: B_490

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Unbeschriebene CDs und DVDs werden als *Rohlinge* bezeichnet.

a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der Gewinnfunktion G für die Produktion von CD-Rohlingen dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen linearen Erlösfunktion E ein.

2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem die CD-Rohlinge verkauft werden.

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den maximalen Gewinn G_{max} ab.

$G_{max} \approx$ ________________________ GE

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für bestimmte hochwertige DVD-Rohlinge ist das Unternehmen Monopolist.

Für die Preisfunktion der Nachfrage p_N gilt:

$p_N(x) = a \cdot x + b$

x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

1) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die Sättigungsmenge angibt. *[1 aus 5]*

$\frac{a}{b}$	☐
$\frac{b}{a}$	☐
$-\frac{a}{b}$	☐
$-\frac{b}{a}$	☐
$-b-a$	☐

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Erlösfunktion E für spezielle DVD-Rohlinge dargestellt. Zusätzlich ist die Tangente an den Graphen von E in einem Punkt P eingezeichnet.

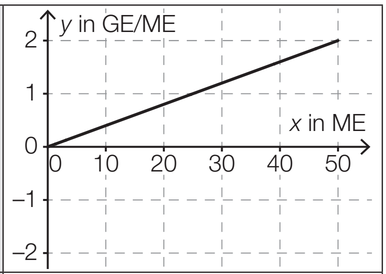
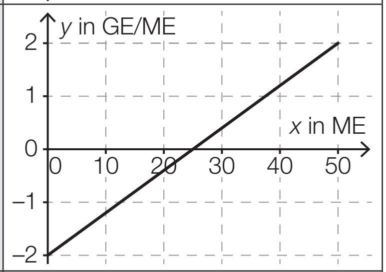
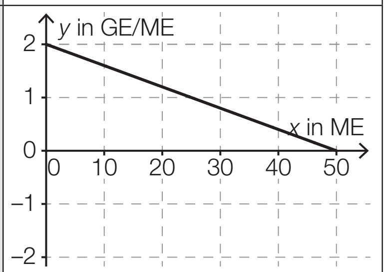
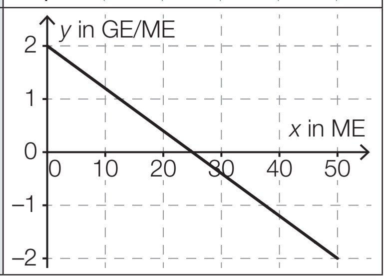
1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Steigung k der Tangente.

k = ______________________ GE/ME

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Tangente im gegebenen Sachzusammenhang.

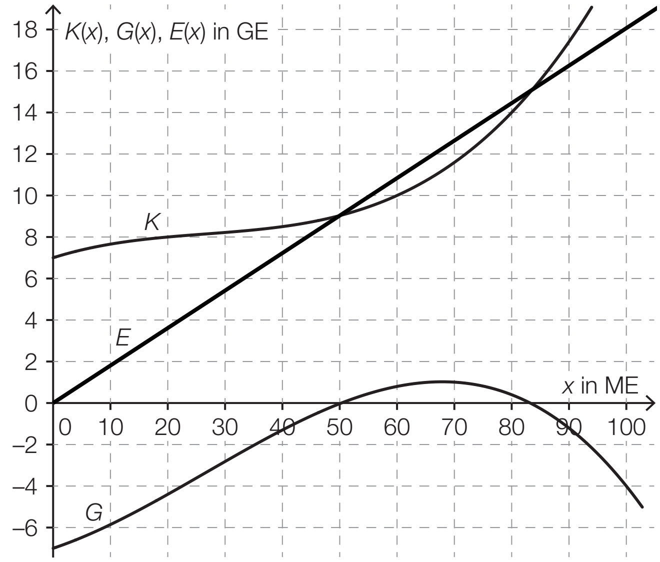
3) Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils den zugehörigen Graphen aus A bis D zu.
[2 zu 4]

Grenzerlösfunktion E'	
Preisfunktion der Nachfrage p_N	

A	
B	
C	
D	

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $p = \frac{E(100)}{100} = \frac{18}{100} = 0{,}18$

Der Preis beträgt 0,18 GE/ME.

Toleranzbereich: [0,16; 0,20]

a3) $G_{max} \approx 1$ GE

Toleranzbereich: [0,8; 1,2]

b1)

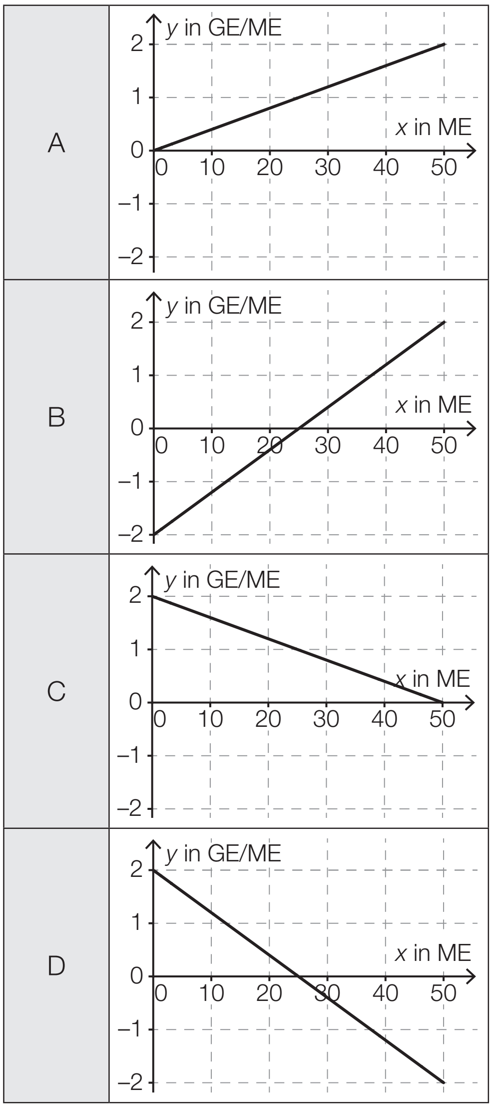
$-\frac{b}{a}$	☒

c1) k = 1,2 GE/ME

c2) Wird bei einem Absatz von 10 ME der Absatz um 1 ME erhöht, dann steigt der Erlös um rund 1,2 GE.

c3)

Grenzerlösfunktion E'	D
Preisfunktion der Nachfrage p_N	C



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Preises (Toleranzbereich: [0,16; 0,20])
a3) 1 × C: für das richtige Ablesen des maximalen Gewinns (Toleranzbereich: [0,8; 1,2])
b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × C1: für das richtige Bestimmen der Steigung
c2) 1 × C2: für das richtige Interpretieren des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
c3) 1 × C3: für das richtige Zuordnen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schlafdauer*

Aufgabennummer: B_492

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es wurden verschiedene Untersuchungen zur durchschnittlichen täglichen Schlafdauer unterschiedlicher Personengruppen durchgeführt.

a) Das Ergebnis einer Befragung von 50 Personen zur Schlafdauer ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Schlafdauer in Stunden	6	7	8	9	10
Anzahl der Personen	3	16	20	10	1

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Schlafdauer dieser 50 Personen.

Bei 9 Personen wurden die Schlafdauer und die Fernsehzeit erhoben:

Schlafdauer in Stunden	6	7	7	8	8	9	9	10	10
Fernsehzeit in Stunden	4	4	2	3	3	2	2	1	2

Die Fernsehzeit soll in Abhängigkeit von der Schlafdauer beschrieben werden.

2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

3) Interpretieren Sie das Vorzeichen der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

4) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Fernsehzeit bei einer Schlafdauer von 7,5 h.

b) Die durchschnittliche tägliche Schlafdauer X von älteren Personen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 364 min und der Standardabweichung σ = 50 min.

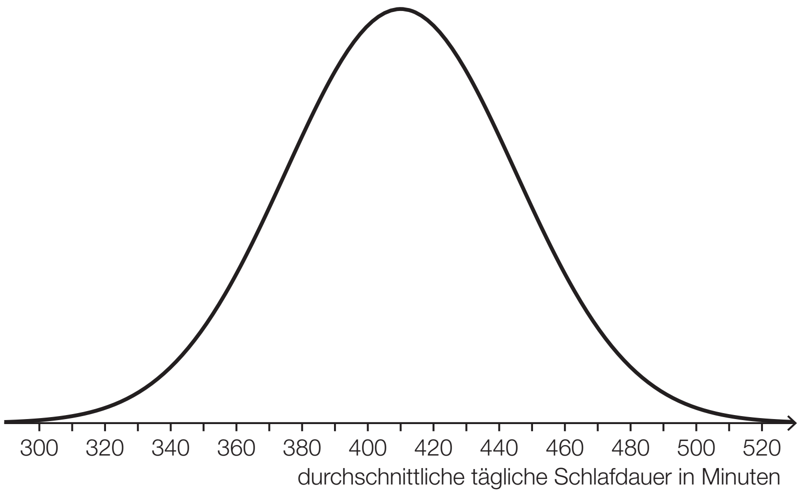
1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte ältere Person eine durchschnittliche tägliche Schlafdauer zwischen 300 min und 480 min hat.

2) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$P(X \geq 400) = P\left(X \leq \boxed{}\right)$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für die Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren ist die durchschnittliche tägliche Schlafdauer annähernd normalverteilt. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

μ = ______________________ min

Für eine andere Altersgruppe beträgt der Erwartungswert 399 min. Die Standardabweichung ist die gleiche wie in der Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren.

2) Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Dichtefunktion für diese Altersgruppe vom oben abgebildeten Graphen unterscheidet.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 7{,}8$ h

a2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = -0{,}5857 \cdot x + 7{,}3714$ *(Koeffizienten gerundet)*

x … Schlafdauer in Stunden
$f(x)$ … Fernsehzeit bei der Schlafdauer x in Stunden

a3) Wird die Schlafdauer erhöht, so sinkt die Fernsehzeit.

a4) $f(7{,}5) = 2{,}9...$

Bei einer Schlafdauer von 7,5 h beträgt die Fernsehzeit gemäß diesem Modell rund 3 h.

b1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(300 < X < 480) = 0{,}889...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 89 %.

b2) $P(X \geq 400) = P\left(X \leq \boxed{328}\right)$

c1) $\mu = 410$ min
Toleranzbereich: [405; 415]

c2) Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist im Vergleich zum abgebildeten Graphen nach links verschoben.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des arithmetischen Mittels
a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
a3) 1 × C: für das richtige Interpretieren des Vorzeichens der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a4) 1 × B3: für das richtige Berechnen der Fernsehzeit
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit
b2) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahl
c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Erwartungswerts (Toleranzbereich: [405; 415])
c2) 1 × C2: für das richtige Beschreiben

Streaming*

Aufgabennummer: B_501

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Fernsehsender entschließt sich, einen Streaming-Dienst für Filme auf den Markt zu bringen. Damit können Filme über das Internet abgespielt werden.
Die Zeit nach der Markteinführung in Monaten wird mit t bezeichnet.

a) Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

Die Anzahl der Kunden steigt im 1. Jahr nach der Markteinführung pro Monat jeweils um etwa 20 % bezogen auf die Anzahl des jeweiligen Vormonats.

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion.
2) Berechnen Sie die Anzahl der Kunden für $t = 7$.
3) Berechnen Sie, wie lange es nach der Markteinführung dauert, bis die Anzahl der Kunden erstmals 8 000 übersteigt.

b) In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Kunden für einen bestimmten Zeitraum angegeben.

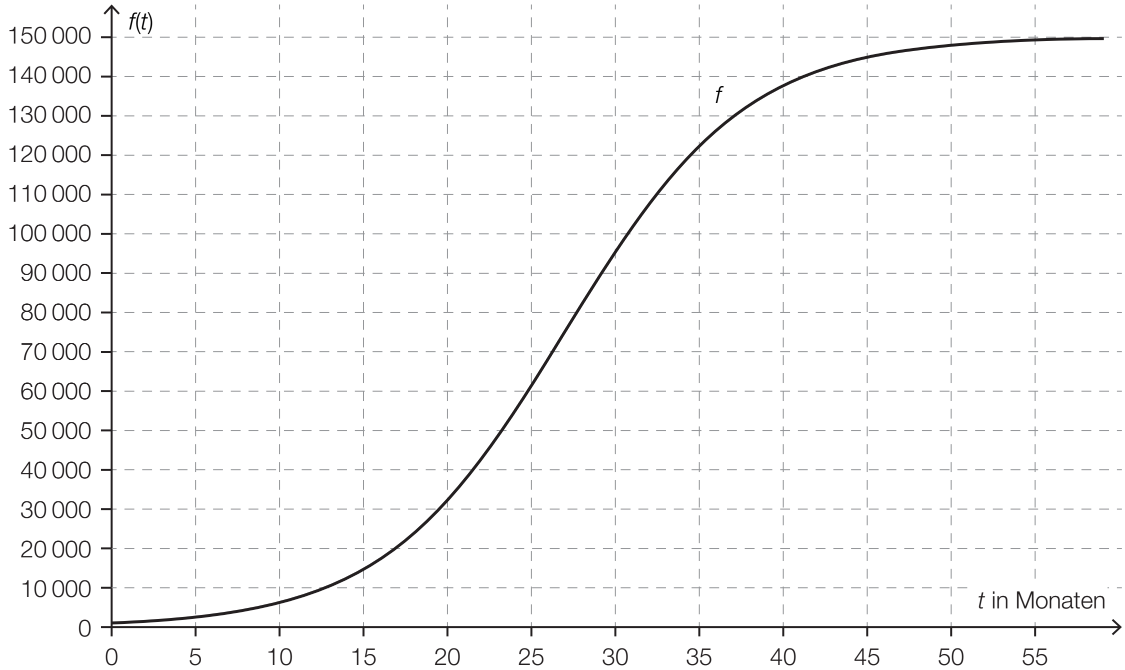
Zeit t in Monaten	18	20	24	26	28
Anzahl der Kunden	23 800	32 200	54 600	68 000	81 900

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die über einen längeren Zeitraum betrachtete zeitliche Entwicklung der Anzahl der Kunden kann näherungsweise durch die logistische Funktion *f* beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Zeitpunkt des stärksten Wachstums der Anzahl der Kunden ab.

Für die Funktion *f* gilt: $f(t) = \frac{150\,000}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$

Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

2) Ermitteln Sie die Parameter c und λ der Funktion *f*.

Möglicher Lösungsweg

a1) $N(t) = 1\,000 \cdot 1{,}2^t$

a2) $N(7) = 3\,583{,}1...$

Zur Zeit $t = 7$ nutzen rund 3583 Kunden das Angebot.

a3) $N(t) = 8\,000$ *oder* $1\,000 \cdot 1{,}2^t = 8\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 11{,}40...$

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$A(t) = 5\,820 \cdot t - 82\,919$ *(Koeffizienten gerundet)*

c1) 27 Monate nach der Markteinführung wächst die Anzahl der Kunden am stärksten.
Toleranzbereich: [25; 29]

c2) $f(0) = 1\,000$ *oder* $\frac{150\,000}{1 + c} = 1\,000 \Rightarrow c = 149$

$f(27) = 75\,000$ *oder* $\frac{150\,000}{1 + 149 \cdot e^{-\lambda \cdot 27}} = 75\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = 0{,}185...$

Die Verwendung anderer Punkte auf dem Graphen von f *für das Ermitteln des Parameters* λ *ist ebenfalls als richtig zu werten.*

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
a2) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Anzahl der Kunden
a3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Zeitdauer
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Zeitpunkts des stärksten Wachstums (Toleranzbereich: [25; 29])
c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Parameters c
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Parameters λ

Wohnanlage*

Aufgabennummer: B_502

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Wohnanlage wird saniert.

a) Die Kosten für die Sanierung in Höhe von € 52.647,60 werden proportional zur Wohnungsgröße aufgeteilt.
Die jeweiligen Größen der 4 Wohnungen sind: 52 m^2, 60 m^2, 78 m^2 und 102 m^2.

1) Berechnen Sie den Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung in Euro.

b) Zur Finanzierung der Sanierung nehmen die Wohnungseigentümer einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf.
Sie vereinbaren mit der Bank, den Kredit durch 6 vorschüssige Jahresraten R zu tilgen. Die erste Jahresrate ist nach 3 Jahren fällig. Für die Rückzahlung wird der Jahreszinssatz i vereinbart.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom (Kreditbetrag und Jahresraten) auf einer Zeitachse.

2) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung von R. Verwenden Sie dabei den Jahreszinssatz i.

Unmittelbar vor dem Bezahlen der 1. Jahresrate entscheiden sich die Wohnungseigentümer dafür, bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen den Kredit mit nur 3 Jahresraten zu tilgen.

3) Argumentieren Sie, dass diese neuen Jahresraten weniger als doppelt so hoch wie die zuvor vereinbarten Jahresraten sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine andere Bank unterbreitet den Wohnungseigentümern zur Rückzahlung eines Kredits ein Angebot, bei dem der Kredit bei einem fixen Jahreszinssatz in 5 Jahren vollständig getilgt wird.
Im Folgenden ist ein Teil des Tilgungsplans dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 20.000,00
1	€ 600,00		€ 600,00	
2	€ 600,00		€ 5.500,00	€ 15.100,00
3			€ 5.500,00	€ 10.053,00
4			€ 5.500,00	€ 4.854,59
5				€ 0,00

1) Berechnen Sie den Jahreszinssatz des Kredits.

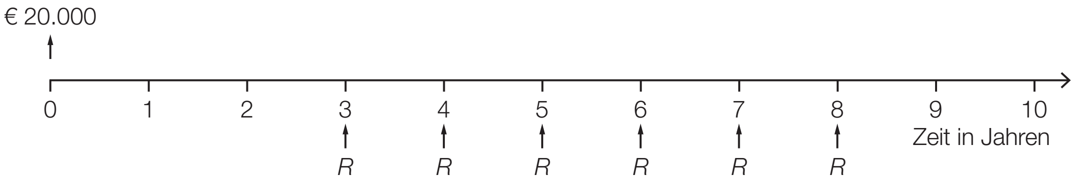
2) Tragen Sie im obigen Tilgungsplan die fehlenden Beträge in die grau markierten Zellen ein.

Möglicher Lösungsweg

a1) $52\,647{,}60 \cdot \frac{102}{52 + 60 + 78 + 102} = 18\,390{,}60$

Der Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung beträgt € 18.390,60.

b1)



b2) $20\,000 \cdot (1 + i)^3 = R \cdot \frac{(1 + i)^6 - 1}{i} \cdot \frac{1}{(1 + i)^5}$

Auch eine Verwendung des Aufzinsungsfaktors $q = 1 + i$ *ist als richtig zu werten.*

b3) Da das Geld früher zurückgezahlt wird, fallen weniger Zinsen an, und damit sind die Raten weniger als doppelt so hoch.

c1) $i = \frac{600}{20\,000} = 0{,}03 = 3~\%$

c2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0	– – –	– – –	– – –	€ 20.000,00
1	€ 600,00	**€ 0,00**	€ 600,00	
2	€ 600,00		€ 5.500,00	€ 15.100,00
3			€ 5.500,00	€ 10.053,00
4			€ 5.500,00	€ 4.854,59
5	**€ 145,64**	**€ 4.854,59**	**€ 5.000,23**	€ 0,00

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Kostenanteils
b1) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen des Zahlungsstroms auf der Zeitachse
b2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung
b3) 1 × D: für das richtige Argumentieren
c1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Jahreszinssatzes
c2) 1 × A: für das richtige Eintragen des Tilgungsanteils im Jahr 1
1 × B2: für das richtige Eintragen der 3 Beträge in die letzte Zeile des Tilgungsplans

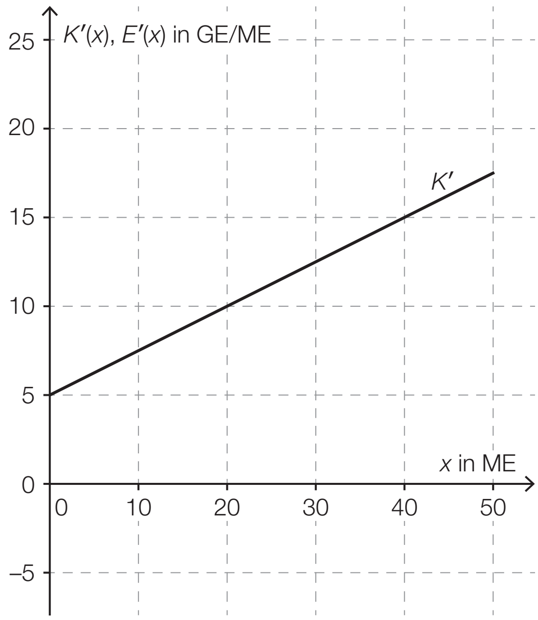
Scharniere*

Aufgabennummer: B_503

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt Scharniere her.

a) In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der linearen Grenzkostenfunktion K' für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren dargestellt.



1) Erstellen Sie eine Gleichung der Grenzkostenfunktion K'.

Die Fixkosten für die Herstellung von *Clip*-Scharnieren betragen 50 GE.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K.

Die Grenzerlösfunktion E' für *Clip*-Scharniere ist gegeben durch:

$E'(x) = -0{,}5 \cdot x + 20$

x ... Absatzmenge in ME
$E'(x)$ ... Grenzerlös bei der Absatzmenge x in GE/ME

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Grenzerlösfunktion E' im Intervall [0; 50] ein.

4) Interpretieren Sie die Nullstelle der Grenzerlösfunktion E' in Bezug auf den Erlös.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Durchschnittskosten für die Herstellung des Scharniers *Modul* lassen sich durch die Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$ mit $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ beschreiben:

$\overline{K}(x) = 0{,}25 \cdot x + 3 + \frac{1}{x}$

x ... Produktionsmenge in ME
$\overline{K}(x)$ ... Durchschnittskosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

Es werden folgende Rechenschritte ausgeführt:

$\overline{K}'(x) = 0{,}25 - \frac{1}{x^2}$

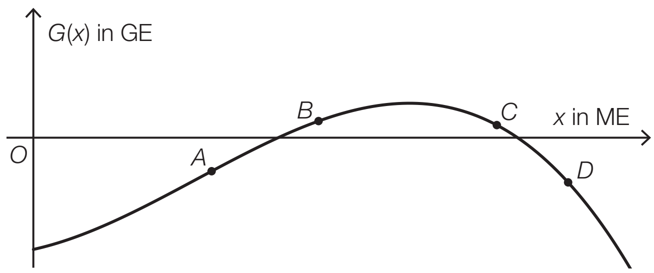
$0{,}25 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{0{,}25}}$

$x_1 = 2\,, \quad (x_2 = -2)$

1) Interpretieren Sie die Lösung $x_1 = 2$ im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Zeigen Sie mithilfe der Regel zum Ableiten von Potenzfunktionen, dass man als Ableitung von $\frac{1}{x}$ den Ausdruck $-\frac{1}{x^2}$ erhält.

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion G für das Scharnier *Top* dargestellt.
Auf dem Graphen der Gewinnfunktion G sind die Punkte A, B, C und D eingezeichnet.



1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den zutreffenden Punkt aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$	
$G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$	

A	Punkt A
B	Punkt B
C	Punkt C
D	Punkt D

d) Der Gewinn für das Scharnier *Cardo* kann durch die Funktion G beschrieben werden:

$$G(x) = -0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}28 \cdot x^2 + 1{,}75 \cdot x - 50$$

x ... Absatzmenge in ME
$G(x)$ ... Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

1) Ermitteln Sie die untere Gewinngrenze.

2) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

Möglicher Lösungsweg

a1) $K'(x) = 0{,}25 \cdot x + 5$

x ... Produktionsmenge in ME

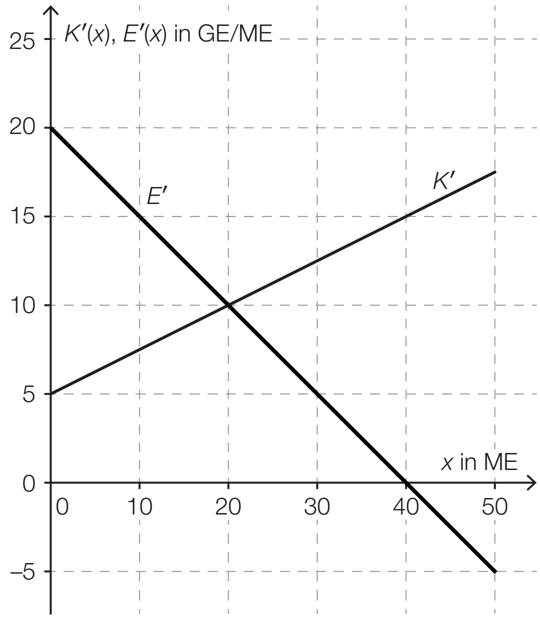
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE

a2) $K(x) = \int (0{,}25 \cdot x + 5)\,\mathrm{d}x = 0{,}125 \cdot x^2 + 5 \cdot x + C$

$K(0) = 50 \quad \Rightarrow \quad C = 50$

$K(x) = 0{,}125 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 50$

a3)



a4) Die Nullstelle der Grenzerlösfunktion ist diejenige Absatzmenge, bei der der Erlös maximal ist.

b1) Bei dieser Produktionsmenge handelt es sich um das Betriebsoptimum.

oder:

Bei dieser Produktionsmenge sind die Durchschnittskosten minimal.

b2) $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

c1)

$G(x) > 0$ und $G'(x) > 0$	B
$G(x) < 0$ und $G'(x) < 0$	D

A	Punkt *A*
B	Punkt *B*
C	Punkt *C*
D	Punkt *D*

d1) $G(x) = 0$ *oder* $-0{,}01 \cdot x^3 + 0{,}28 \cdot x^2 + 1{,}75 \cdot x - 50 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 13{,}48...$ $(x_2 = 27{,}83...;\ x_3 = -13{,}31...)$
Die untere Gewinngrenze liegt bei rund 13,5 ME.

d2) $G'(x) = 0$ *oder* $-0{,}03 \cdot x^2 + 0{,}56 \cdot x + 1{,}75 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 21{,}39...$ $(x_2 = -2{,}72...)$
$G(21{,}39...) = 17{,}67...$
Der maximale Gewinn beträgt rund 17,7 GE.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung der Grenzkostenfunktion
a2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Kostenfunktion
a3) 1 × A3: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Grenzerlösfunktion
a4) 1 × C: für das richtige Interpretieren der Nullstelle der Grenzerlösfunktion in Bezug auf den Erlös
b1) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × D: für das richtige Zeigen
c1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
d1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der unteren Gewinngrenze
d2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des maximalen Gewinns

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

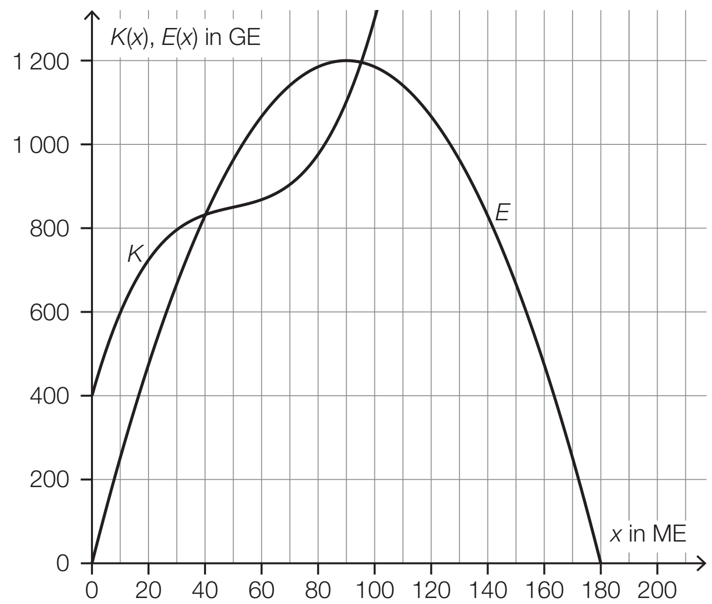
Scheiben für PKWs*

Aufgabennummer: B_527

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Betrieb stellt Frontscheiben und Heckscheiben für PKWs her.

a) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der quadratischen Erlösfunktion E für Frontscheiben eines bestimmten Typs dargestellt.



1) Stellen Sie eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion E auf.
2) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage auf.
3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Gewinnzone ab.

[______ ; ______]

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

b) Die variablen Kosten bei der Produktion von Heckscheiben eines bestimmten Typs können durch die Funktion K_v beschrieben werden.

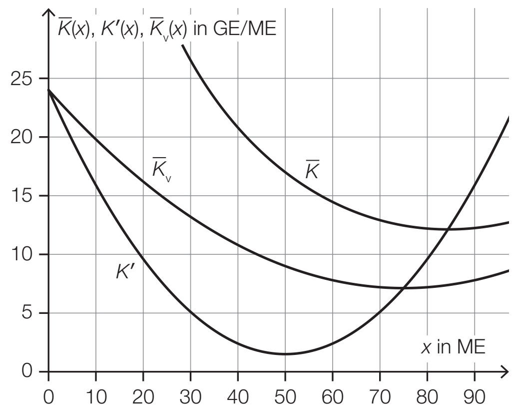
$K_v(x) = 0{,}0029 \cdot x^3 - 0{,}45 \cdot x^2 + 24 \cdot x$

x ... produzierte Menge in ME
$K_v(x)$ ... variable Kosten bei der produzierten Menge x in GE

Die Fixkosten betragen 450 GE.

1) Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze.

In der nebenstehenden Abbildung sind der Graph der Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}$, der Graph der Grenzkostenfunktion K' und der Graph der variablen Durchschnittskostenfunktion $\overline{K}_v$ dargestellt.



2) Kreuzen Sie diejenige Größe an, die nicht unmittelbar aus der obigen Abbildung abgelesen werden kann. *[1 aus 5]*

Kostenkehre	☐
Fixkosten	☐
Betriebsminimum	☐
Betriebsoptimum	☐
kurzfristige Preisuntergrenze	☐

Die Preisfunktion der Nachfrage p_N für Heckscheiben dieses Typs ist gegeben durch:

$p_N(x) = -0{,}16 \cdot x + 30$

x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

3) Geben Sie den Höchstpreis an.

4) Berechnen Sie den Cournot'schen Preis.

Möglicher Lösungsweg

a1) $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$

$E(180) = 0$
$E(90) = 1\,200$

oder:

$a \cdot 180^2 + b \cdot 180 = 0$
$a \cdot 90^2 + b \cdot 90 = 1\,200$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{4}{27} = -0{,}148...$

$b = \frac{80}{3} = 26{,}6...$

$E(x) = -\frac{4}{27} \cdot x^2 + \frac{80}{3} \cdot x$

a2) $p_N(x) = -\frac{4}{27} \cdot x + \frac{80}{3}$

a3) [40; 95]
Toleranzbereich für die obere Gewinngrenze: [93; 97]

b1) $\overline{K}(x) = 0{,}0029 \cdot x^2 - 0{,}45 \cdot x + 24 + \frac{450}{x}$
$\overline{K}'(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 87{,}678...$
$\overline{K}(87{,}678...) = 11{,}970...$

Die langfristige Preisuntergrenze beträgt rund 11,97 GE/ME.

b2)

Fixkosten	☒

b3) Höchstpreis: 30 GE/ME

b4) $G(x) = p_N(x) \cdot x - K(x) = -0{,}0029 \cdot x^3 + 0{,}29 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 450$
$G'(x) = -0{,}0087 \cdot x^2 + 0{,}58 \cdot x + 6$

$G'(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad -0{,}0087 \cdot x^2 + 0{,}58 \cdot x + 6 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = -9{,}102...)$, $x_2 = 75{,}768...$
$p_N(75{,}768...) = 17{,}876...$

Der Cournot'sche Preis beträgt rund 17,88 GE/ME.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion *E*.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p_N.
a3) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Gewinnzone.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der langfristigen Preisuntergrenze.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b3) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Höchstpreises.
b4) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Cournot'schen Preises.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Waldführungen*

Aufgabennummer: B_526

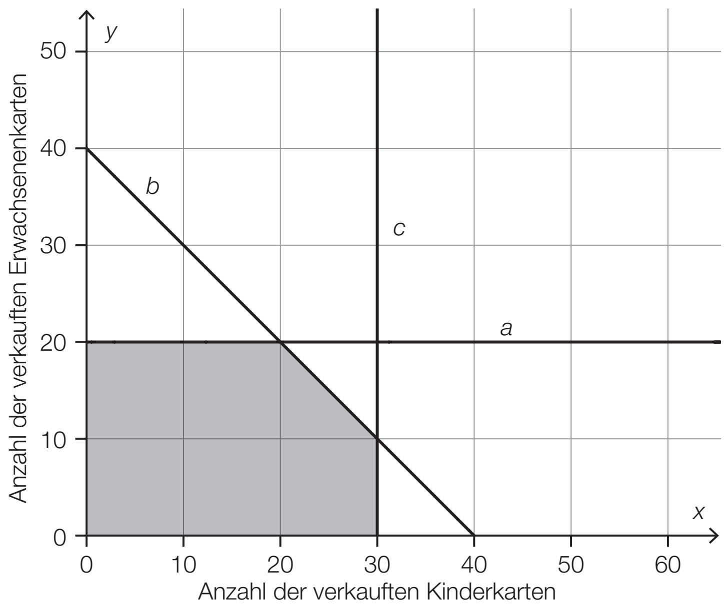
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Naturschutzzentrum bietet verschiedene Waldführungen an.

a) Bei einer Tagestour nehmen Kinder und Erwachsene teil. Insgesamt können bei einer Tour maximal 30 Personen teilnehmen.
Aus Sicherheitsgründen müssen dabei mindestens so viele Erwachsene wie Kinder teilnehmen.

1) Erstellen Sie ein Ungleichungssystem, das die Bedingungen für die Teilnahme von x Kindern und y Erwachsenen beschreibt.

b) Für eine Familientour werden die möglichen Verkaufszahlen von Erwachsenenkarten und Kinderkarten untersucht. In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Anzahl der verkauften Kinderkarten und Erwachsenenkarten dargestellt.



* ehemalige Klausuraufgabe

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Der Lösungsbereich liegt ___①___, da ___②___ für die Familientour verkauft werden können.

①	
unterhalb der Geraden *a*	☐
unterhalb der Geraden *b*	☐
links von der Geraden *c*	☐

②	
höchstens 30 Kinderkarten	☐
höchstens 20 Kinderkarten	☐
mindestens 40 Karten	☐

Die Zielfunktion Z beschreibt den Erlös in Euro bei einer Familientour:

$Z(x, y) = 4 \cdot x + 6 \cdot y$

x ... Anzahl der verkauften Kinderkarten
y ... Anzahl der verkauften Erwachsenenkarten

Dieser Erlös soll maximiert werden.

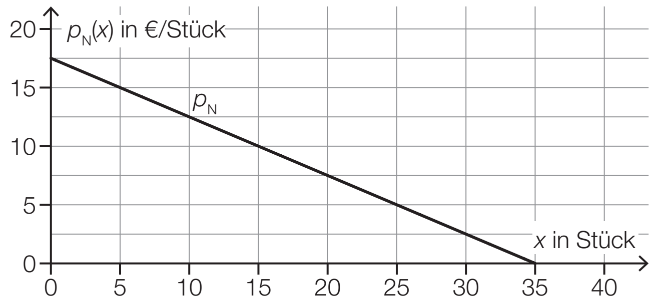
2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, auf der der optimale Wert der Zielfunktion im Lösungsbereich angenommen wird.

3) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die optimalen Verkaufszahlen ab.

4) Ermitteln Sie den maximalen Erlös.

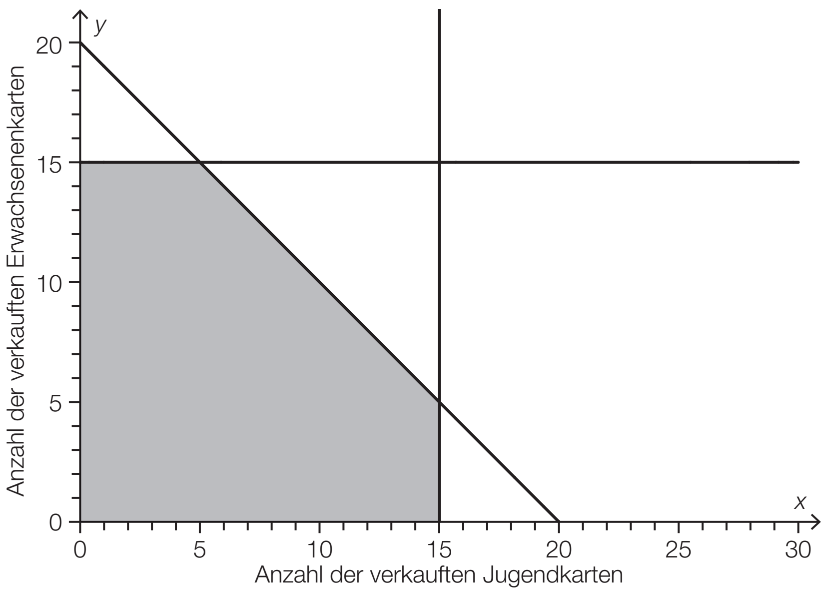
c) In den Sommerferien werden Abenteuertouren angeboten. Für diese Touren werden die möglichen Verkaufszahlen von Jugendkarten und Erwachsenenkarten untersucht.

Die tägliche Nachfrage nach Jugendkarten ist vom Preis der Karten abhängig. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der zugehörigen Preisfunktion der Nachfrage p_N für die Jugendkarten.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung diejenige Nachfrage nach Jugendkarten ab, bei der der Preis 12,50 €/Stück beträgt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich für die Anzahl der verkauften Jugendkarten und Erwachsenenkarten bei Abenteuertouren dargestellt.



2) Überprüfen Sie nachweislich, ob die oben ermittelte Nachfrage nach Jugendkarten an einem Tag erfüllt werden kann, an dem 13 Erwachsenenkarten verkauft werden.

Möglicher Lösungsweg

a1) I: $x + y \leq 30$

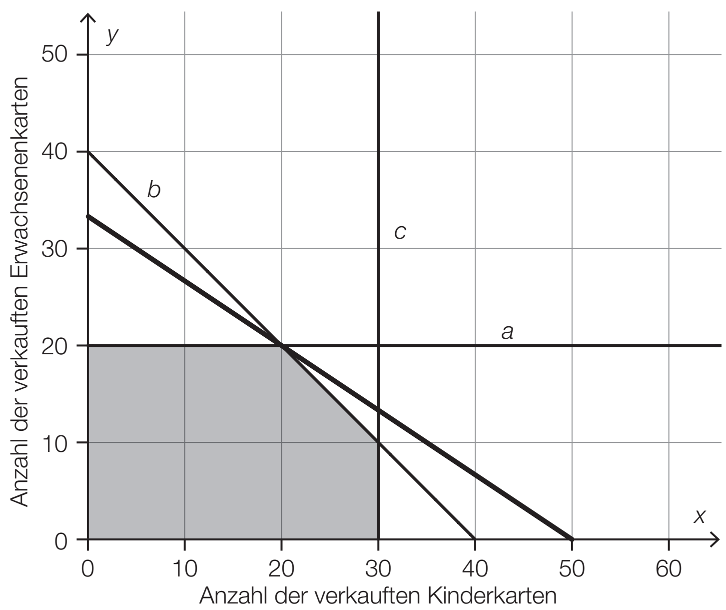
II: $x \leq y$

b1)

①	
links von der Geraden *c*	☒

②	
höchstens 30 Kinderkarten	☒

b2)



b3) optimale Verkaufszahlen:
20 Kinderkarten
20 Erwachsenenkarten

b4) $Z(20, 20) = 4 \cdot 20 + 6 \cdot 20 = 200$

Der maximale Erlös beträgt € 200.

c1) Bei einem Preis von 12,50 €/Stück beträgt die Nachfrage nach Jugendkarten 10 Stück.

c2) Bei einem Verkauf von 13 Erwachsenenkarten ist ein Verkauf von 10 Jugendkarten nicht möglich, da der Punkt (10|13) nicht im Lösungsbereich liegt.

oder:

Beim einem Verkauf von 13 Erwachsenenkarten können nur mehr 7 Jugendkarten verkauft werden.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung I (Einschränkung bezüglich Personenanzahl).
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung II (Einschränkung bezüglich des Verhältnisses der Anzahl der Kinder zur Anzahl der Erwachsenen).
b1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.
b2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen derjenigen Geraden, auf der der optimale Wert der Zielfunktion Z im Lösungsbereich angenommen wird.
b3) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen optimalen Verkaufszahlen.
b4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des maximalen Erlöses.
c1) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Nachfrage.
c2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

Zinsentwicklung*

Aufgabennummer: B_528

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Zinssätze für Kredite und Spareinlagen unterliegen zeitabhängigen Schwankungen.

a) Der Zinssatz für einen Kredit bei einer Bank ist unter anderem auch davon abhängig, welchen Verwendungszweck dieser hat.
Konsumkredite dienen der Finanzierung von Konsumgütern oder Dienstleistungen.
Immobilienkredite dienen der Wohnbaufinanzierung.

In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Zinssätze für beide Verwendungszwecke im Zeitraum von 2000 bis 2004 in Österreich dargestellt.

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004
Zinssatz für Konsumkredite in % p. a.	6,63	6,69	6,06	5,42	5,18
Zinssatz für Immobilienkredite in % p. a.	5,87	5,93	5,35	4,41	3,90

Datenquelle: https://www.oenb.at/Statistik/Standardisierte-Tabellen/zinssaetze-und-wechselkurse/Zinssaetze-der-Kreditinstitute.html [04.08.2021].

1) Stellen Sie eine Gleichung der Regressionsgeraden für den Zusammenhang zwischen dem Zinssatz für Konsumkredite x und dem Zinssatz für Immobilienkredite y im angegebenen Zeitraum auf.

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsgerade ein geeignetes Modell darstellt, um diesen Zusammenhang zu beschreiben.

Der Zinssatz im Jahr 2005 betrug für Konsumkredite 4,89 % p. a. und für Immobilien kredite 3,58 % p. a.

3) Berechnen Sie die Differenz zwischen dem tatsächlichen Zinssatz für Immobilienkredite im Jahr 2005 und dem mithilfe der Regressionsgeraden ermittelten entsprechenden Zinssatz.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei Abschluss eines Kreditvertrags kann festgelegt werden, ob der Zinssatz während der gesamten Laufzeit konstant bleibt oder ob sich der Zinssatz entsprechend der aktuellen Marktlage immer wieder verändert.
In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt aus einem Tilgungsplan dargestellt.

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80		€ 7.000,00	

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich der Zinssatz innerhalb der dargestellten 3 Jahre verändert hat.

2) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Beträge im Jahr 3 ein.

c) Ein Geldbetrag B wird 2 Jahre lang mit dem Jahreszinssatz i_0 verzinst, danach weitere 3 Jahre mit einem geänderten Jahreszinssatz i_1.

1) Stellen Sie eine Formel für den Endwert E am Ende dieser 5 Jahre auf. Verwenden Sie dabei B, i_0 und i_1.

E = ____

2) Berechnen Sie für $i_0 = 3\ \%$ und $i_1 = 1\ \%$ denjenigen gleichbleibenden Jahreszinssatz i, bei dem der Betrag B innerhalb von 5 Jahren auf den gleichen Endwert E anwächst.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$y = 1{,}3031 \cdot x - 2{,}7216$ *(Koeffizienten gerundet)*
x ... Zinssatz für Konsumkredite in % p. a.
y ... Zinssatz für Immobilienkredite in % p. a.

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$r = 0{,}9909...$

Der Korrelationskoeffizient liegt sehr nahe bei 1, daher besteht ein starker positiver linearer Zusammenhang zwischen dem Zinssatz für Konsumkredite und dem Zinssatz für Immobilienkredite.

a3) Mit $x = 4{,}89$ erhält man:
$1{,}3031... \cdot 4{,}89 - 2{,}7216... = 3{,}65...$
tatsächlicher Zinssatz: 3,58
Differenz der Zinssätze: $3{,}65... - 3{,}58 = 0{,}07...$
Auch –0,07... ist als richtig zu werten.

b1) Zinssatz im Jahr 1: $\frac{2\,100}{50\,000} = 0{,}042$
Zinssatz im Jahr 2: $\frac{1\,894{,}2}{45\,100} = 0{,}042$
Zinssatz im Jahr 3: $\frac{1\,399{,}8}{39\,994{,}2} = 0{,}035...$
Der Zinssatz hat sich im Jahr 3 verändert.

b2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				€ 50.000,00
1	€ 2.100,00	€ 4.900,00	€ 7.000,00	€ 45.100,00
2	€ 1.894,20	€ 5.105,80	€ 7.000,00	€ 39.994,20
3	€ 1.399,80	**€ 5.600,20**	€ 7.000,00	**€ 34.394,00**

c1) $E = B \cdot (1 + i_0)^2 \cdot (1 + i_1)^3$

c2) $B \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}01^3 = B \cdot (1 + i)^5$
$i = 0{,}01795... = 1{,}795...\ \%$

Eine Berechnung von i *mithilfe eines arithmetischen Mittels ist als falsch zu werten.*

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Regressionsgeraden.
a2) Ein Punkt für das richtige Beurteilen mithilfe des Korrelationskoeffizienten.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Differenz.
b1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
b2) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Beträge.
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Jahreszinssatzes i.

Abfindung

Vier Geschwister haben gemeinsam ein Haus geerbt.
Martha übernimmt das Haus und muss dafür ihren Geschwistern Andreas, Beate und Christian zum Zeitpunkt der Übernahme Geldbeträge in Höhe von jeweils € 80.000 auszahlen. Ein solcher Geldbetrag wird *Abfindung* genannt.

a) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Andreas soll durch 3 Zahlungen erfolgen:

€ 25.000 nach 3 Jahren,
€ 30.000 nach 6 Jahren und
€ 35.000 nach 9 Jahren.

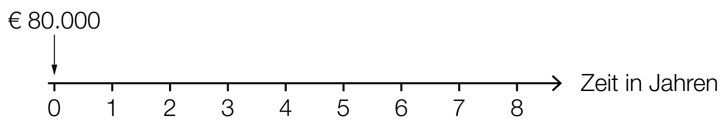
1) Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des zugehörigen Jahreszinssatzes i auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie diesen Jahreszinssatz i. *[0/1 P.]*

b) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Beate soll durch Zahlungen erfolgen, die durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

$$80\,000 = 20\,000 + R \cdot \frac{1{,}02^4 - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^6}$$

1) Stellen Sie den Betrag € 20.000 und die Raten R auf der nachstehenden Zeitachse dar. *[0/1 P.]*



c) Die Auszahlung der Abfindung in Höhe von € 80.000 an Christian soll durch Quartalsraten in Höhe von jeweils € 4.000 und eine Restzahlung erfolgen. Die erste Zahlung erfolgt nach 1 Jahr. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

$1{,}02^{\frac{1}{4}} - 1 = 0{,}004962...$

2) Berechnen Sie die Anzahl der vollen Quartalsraten. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung, die 1 Quartal nach der letzten vollen Quartalsrate ausgezahlt wird. *[0/1 P.]*

d) Zur Finanzierung der Hausübernahme nimmt Martha einen Kredit auf.

Die vorletzte Zeile des Tilgungsplans lautet:

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
15	€ 319,43	€ 9.680,57	€ 10.000,00	€ 966,95

1) Zeigen Sie, dass der Zinssatz 3 % p. a. beträgt. *[0/1 P.]*

2) Vervollständigen Sie die nachstehende letzte Zeile des Tilgungsplans. *[0/1 P.]*

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
16				€ 0,00

Möglicher Lösungsweg

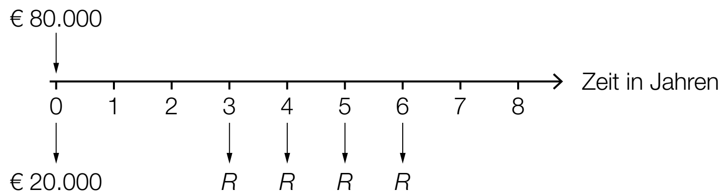
a1) $80\,000 = \frac{25\,000}{(1+i)^3} + \frac{30\,000}{(1+i)^6} + \frac{35\,000}{(1+i)^9}$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$i = 0{,}01893...$
Der Jahreszinssatz beträgt rund 1,89 %.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Jahreszinssatzes.

b1)



b1) Ein Punkt für das richtige Darstellen auf der Zeitachse.

c1) Der (äquivalente) Quartalszinssatz beträgt rund 0,4962... %.

c2) Quartalsaufzinsungsfaktor $q_4 = 1{,}02^{\frac{1}{4}}$

$80\,000 \cdot 1{,}02 = 4\,000 \cdot \frac{q_4^n - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{n-1}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 21{,}4...$
Es werden 21 volle Quartalsraten ausgezahlt.

c3) $\left(80\,000 \cdot 1{,}02 - 4\,000 \cdot \frac{q_4^{21} - 1}{q_4 - 1} \cdot \frac{1}{q_4^{20}}\right) \cdot q_4^{21} = 1\,799{,}003...$
Die Höhe der Restzahlung beträgt € 1.799,00.

c1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der vollen Quartalsraten.
c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe der Restzahlung.

d1) Restschuld im Jahr 14: 966,95 + 9680,57 = 10647,52

Zinssatz: $i = \frac{319{,}43}{10647{,}52} = 0{,}030... \approx 3\,\%$

d2)

Jahr	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
16	**€ 29,01**	**€ 966,95**	**€ 995,96**	€ 0,00

d1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
d2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der letzten Zeile des Tilgungsplans.

Farben und Lacke

Ein Unternehmen stellt verschiedene Farben und Lacke her.

a) Die Gesamtkosten für die Produktion von Acrylfarbe werden durch eine Kostenfunktion K mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.

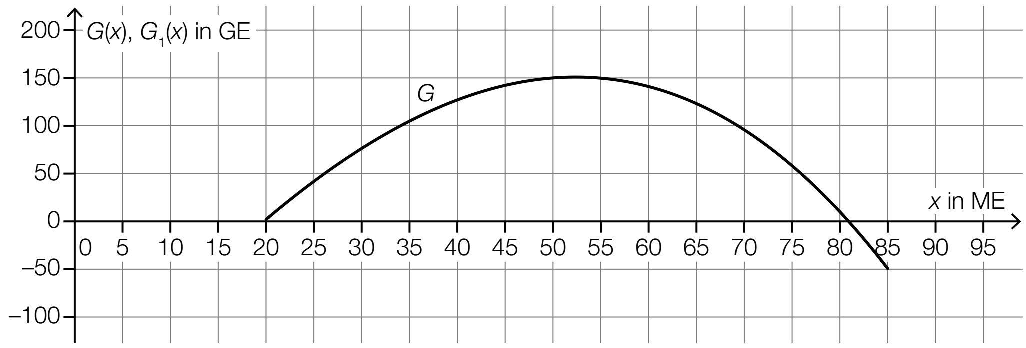
1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Wenn ___①___ ist, dann kann K keine ertragsgesetzliche Kostenfunktion sein, weil in diesem Fall ___②___.

①	
$b < 0$	☐
$c < 0$	☐
$b < c$	☐

②	
die Fixkosten negativ sind	☐
keine Kostenkehre existiert	☐
die Grenzkosten bei der Produktionsmenge 0 negativ sind	☐

b) Der Graph der Gewinnfunktion G für Acrylfarbe ist in der nachstehenden Abbildung im Intervall [20; 85] dargestellt.



x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Die Fixkosten steigen um 50 GE. Die variablen Kosten und der Erlös bleiben unverändert. Der Gewinn unter diesen veränderten Bedingungen wird durch die Gewinnfunktion G_1 beschrieben.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der neuen Gewinnfunktion G_1 im Intervall [20; 85] ein. *[0/1 P.]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die untere Gewinngrenze ab, die sich unter diesen veränderten Bedingungen ergibt. *[0/1 P.]*

c) Für einen bestimmten Kunstharzlack beträgt der Höchstpreis 60 €/L. Bei einem Preis von 20 €/L können 200 L dieses Lacks abgesetzt werden.
Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der Absatzmenge kann für diesen Lack durch die lineare Preis-Absatz-Funktion p beschrieben werden.

x … Absatzmenge in L
$p(x)$ … Preis bei der Absatzmenge x in €/L

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Preis-Absatz-Funktion p auf. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Preis-Absatz-Funktion p im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Sättigungsmenge. *[0/1 P.]*

d) Das Unternehmen stellt auch Wandfarbe her.
In einem Heimwerker-Ratgeber wird empfohlen, mehr Farbe als vom Hersteller angegeben zu kaufen. Konkret werden dort folgende Empfehlungen gegeben:

- Für die zusätzlichen Flächen bei Tür- und Fensterrahmen sollten um insgesamt 10 % mehr Farbe als vom Hersteller angegeben gekauft werden.
- Um ganz sicher genug Farbe zu haben, sollte diese berechnete Menge anschließend nochmals um 20 % erhöht werden.

Auf den Farbkübeln ist angegeben, dass für 1 m^2 Wandfläche 0,14 L Farbe benötigt werden.

Es soll eine Formel für die Farbmenge M (in Litern) aufgestellt werden, die man für eine Wandfläche von A Quadratmetern benötigt. Dabei sollen die obigen Empfehlungen des Heimwerker-Ratgebers berücksichtigt werden.

1) Stellen Sie diese Formel auf.

M = ____ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

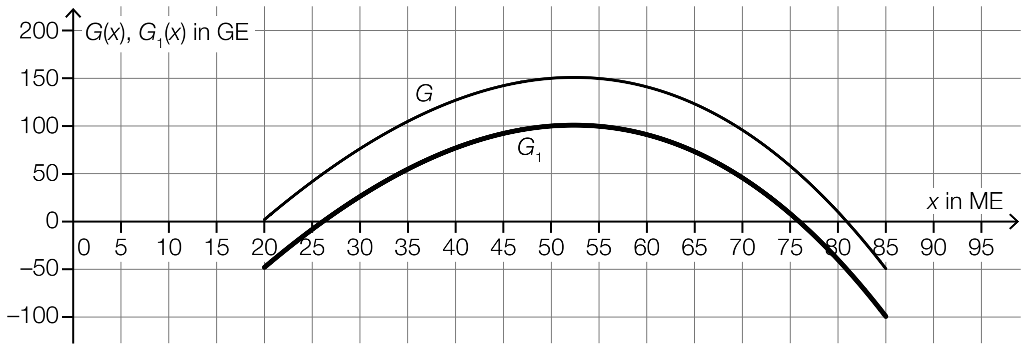
a1)

①	
$c < 0$	☒

②	
die Grenzkosten bei der Produktionsmenge 0 negativ sind	☒

a1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

b1)



b2) Die untere Gewinngrenze liegt bei rund 26 ME.
Toleranzbereich: [25; 28]

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen von G_1 im Intervall [20; 85].
b2) Ein Punkt für das richtige Ablesen der unteren Gewinngrenze.

c1) $p(x) = k \cdot x + d$
$p(0) = 60$
$d = 60$

$p(200) = 20$
$k \cdot 200 + 60 = 20$
$k = -0{,}2$

$p(x) = -0{,}2 \cdot x + 60$

c2) Die Steigung –0,2 gibt an, dass eine Preissenkung um 0,2 €/L zu einer Absatzsteigerung um 1 L führt.

oder:

Soll die Absatzmenge um 1 L gesteigert werden, so muss der Preis um 0,2 €/L gesenkt werden.

c3) $p(x) = 0$ *oder* $-0{,}2 \cdot x + 60 = 0$
$x = 300$

Die Sättigungsmenge beträgt 300 L.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von p.
c2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Sättigungsmenge.

d1) $M = 0{,}14 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}2 \cdot A = 0{,}1848 \cdot A$

d1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Thermometer

Ein digitales Thermometer wird zur Messung der Temperatur des Wassers in einem Becken verwendet. Ausgehend von einem Startwert nähert sich die angezeigte Temperatur der tatsächlichen Temperatur des Wassers an.

a) Der zeitliche Verlauf der angezeigten Temperatur bei einer bestimmten Messung kann durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = 38 - 6 \cdot 0{,}758^t$

t … Zeit nach Beginn der Messung in s
$f(t)$ … angezeigte Temperatur zur Zeit t in °C

1) Interpretieren Sie die Zahl 38 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Sobald die momentane Änderungsrate der angezeigten Temperatur unter 0,01 °C/s sinkt, ertönt ein Piepton.

2) Berechnen Sie, wie viele Sekunden nach Beginn der Messung der Piepton ertönt. *[0/1 P.]*

b) Zu Beginn einer anderen Messung zeigt das digitale Thermometer eine Temperatur von 33,0 °C an. Nach 4 s zeigt es eine Temperatur von 36,0 °C an.
Der zeitliche Verlauf der angezeigten Temperatur bei dieser Messung kann durch die Funktion g beschrieben werden.

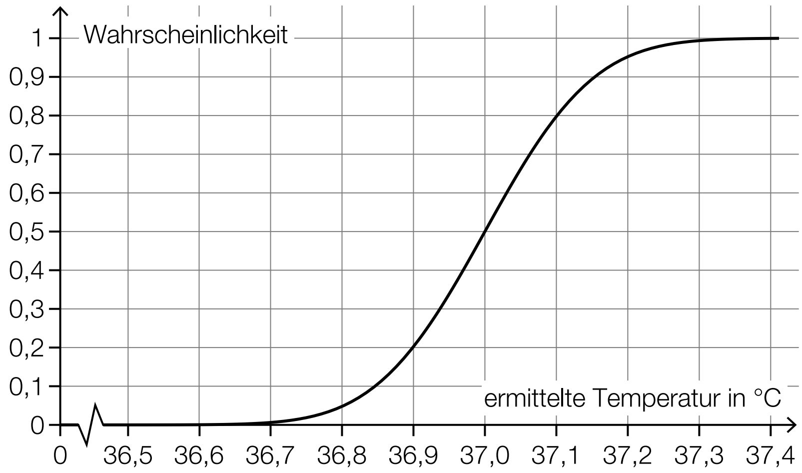
$g(t) = c - a \cdot e^{-0{,}275 \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn der Messung in s
$g(t)$ … angezeigte Temperatur zur Zeit t in °C

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a und c. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Parameter a und c. *[0/1 P.]*

c) Ein Unternehmen produziert Thermometer. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle werden die produzierten Thermometer unter jeweils gleichen Bedingungen getestet.
Die ermittelten Temperaturen können als annähernd normalverteilt angenommen werden.
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

μ = ____________________ °C *[0/1 P.]*

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit ab, dass die ermittelte Temperatur höchstens 36,9 °C beträgt. *[0/1 P.]*

3) Ermitteln Sie die Standardabweichung σ. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Die tatsächliche Temperatur des Wassers beträgt 38 °C.

oder:

Der Grenzwert der angezeigten Temperatur beträgt 38 °C.

a2) $f'(t) = 1{,}6624... \cdot 0{,}758^t$
$0{,}01 = 1{,}6624... \cdot 0{,}758^t$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 18{,}4...$
Nach etwa 18 s ertönt der Piepton.

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeit, nach der der Piepton ertönt.

b1) I: $g(0) = 33$
II: $g(4) = 36$

oder:

I: $c - a = 33$
II: $c - a \cdot e^{-0{,}275 \cdot 4} = 36$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 4{,}49...$
$c = 37{,}49...$

b1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Parameter *a* und *c*.

c1) $\mu = 37{,}0$ °C

c2) Die Wahrscheinlichkeit beträgt 20 %.

c3) $\mu = 37$ und $P(X \leq 36{,}9) = 0{,}2$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\sigma = 0{,}118\ldots$

Auch ein näherungsweises Ermitteln der Standardabweichung mithilfe der Abbildung ist als richtig zu werten. (Toleranzbereich: [0,11; 0,13])

c1) Ein Punkt für das richtige Ablesen des Erwartungswerts μ.
c2) Ein Punkt für das richtige Ablesen der Wahrscheinlichkeit.
c3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Standardabweichung σ.

Autokauf (3)

Clara möchte ein neues Auto kaufen.

a) Eine Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einer Laufzeit von 7 Jahren an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 216.

1) Berechnen Sie den Monatszinssatz i_{12} für diesen Kredit. *[0/1 P.]*

Mit dem monatlichen Aufzinsungsfaktor $q_{12} = 1 + i_{12}$ führt Clara die nachstehende Berechnung durch.

$$X = 15000 \cdot q_{12}^{24} - 216 \cdot \frac{q_{12}^{24} - 1}{q_{12} - 1}$$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von X im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Eine andere Bank bietet Clara einen Kredit in Höhe von € 15.000 mit einem Zinssatz von 6,2 % p.a. an. Die Rückzahlung erfolgt durch nachschüssige Monatsraten in Höhe von je € 219,35.

1) Berechnen Sie den zu 6,2 % p.a. äquivalenten Monatszinssatz. *[0/1 P.]*

2) Vervollständigen Sie den nachstehenden Ausschnitt des zugehörigen Tilgungsplans. *[0/1 P.]*

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 15.000,00
1				

c) Clara hat vor 5 Jahren den Geldbetrag B_1 und vor 3 Jahren den Geldbetrag B_2 auf ein Konto eingezahlt. Der Zinssatz beträgt 1 % p. a.

1) Ordnen Sie den beiden Beschreibungen jeweils den passenden Ausdruck aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum heutigen Zeitpunkt berechnet.	
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum Zeitpunkt der Einzahlung von B_2 berechnet.	

A	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^3$
B	$B_1 + B_2 \cdot 1{,}01^{-2}$
C	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^2$
D	$B_1 \cdot 1{,}01^2 + B_2$

d) Der Wert eines Autos verringert sich im Laufe der Zeit. Für ein bestimmtes Auto ist dessen Wert nach 1 Jahr und nach 3 Jahren in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Zeit nach dem Kauf in Jahren	1	3
Wert des Autos in €	15000	10000

Der Wert des Autos kann im Zeitintervall [1; 3] näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

t ... Zeit nach dem Kauf in Jahren
$f(t)$ ... Wert des Autos zur Zeit t in €

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion f auf. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

Autokauf

a1) $15000 = 216 \cdot \frac{q_{12}^{84} - 1}{q_{12} - 1} \cdot \frac{1}{q_{12}^{84}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$q_{12} = 1{,}00463...$
$i_{12} = 0{,}46...\ \%$

a2) X ist die Restschuld nach 24 Monaten (2 Jahren) in Euro.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Monatszinssatzes.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) $i_{12} = \sqrt[12]{1{,}062} - 1 = 0{,}005025...$

Der zu 6,2 % p. a. äquivalente Monatszinssatz beträgt rund 0,503 %.

Eine Berechnung des äquivalenten Monatszinssatzes als $\frac{6{,}2\ \%}{12} = 0{,}5166...\ \%$ *ist als falsch zu werten.*

b2)

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 15.000,00
1	**€ 75,38**	**€ 143,97**	**€ 219,35**	**€ 14.856,03**

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des äquivalenten Monatszinssatzes.
b2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Ausschnitts des Tilgungsplans.

c1)

Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum heutigen Zeitpunkt berechnet.	A
Es wird die Summe der Werte der beiden Spareinlagen zum Zeitpunkt der Einzahlung von B_2 berechnet.	D

A	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^3$
B	$B_1 + B_2 \cdot 1{,}01^{-2}$
C	$B_1 \cdot 1{,}01^5 + B_2 \cdot 1{,}01^2$
D	$B_1 \cdot 1{,}01^2 + B_2$

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

d1) $f(t) = k \cdot t + d$

$$k = \frac{10\,000 - 15\,000}{3 - 1} = -2\,500$$

$$d = 15\,000 + 2\,500 = 17\,500$$

$$f(t) = -2\,500 \cdot t + 17\,500$$

d2) Gemäß diesem Modell nimmt der Wert des Autos um € 2.500 pro Jahr ab.

d1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *f*.
d2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Sonnencreme

a) Sonnencreme soll vor den UV-A- und UV-B-Strahlen der Sonne schützen.
Für Sonnencremes gelten folgende zwei Kriterien:

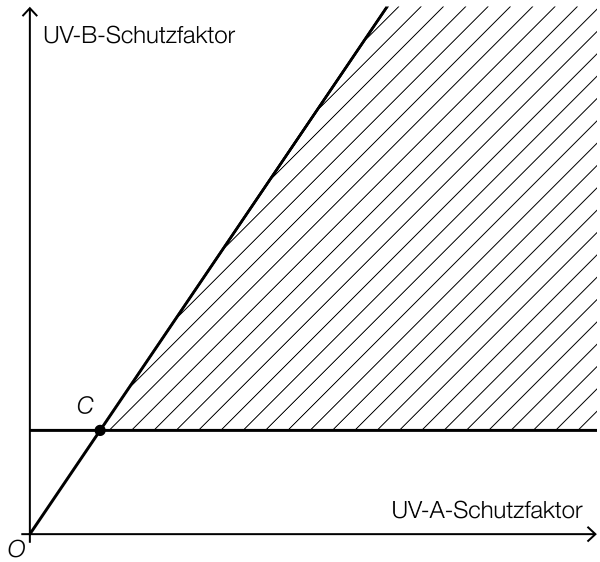
I: Der UV-A-Schutzfaktor muss mindestens ein Drittel des UV-B-Schutzfaktors betragen.
II: Der UV-B-Schutzfaktor muss mindestens 6 betragen.

a ... UV-A-Schutzfaktor
b ... UV-B-Schutzfaktor

1) Stellen Sie die zwei Ungleichungen auf, die diesen beiden Kriterien entsprechen.

[0/1/2 P.]

In der nachstehenden Abbildung ist der zugehörige Lösungsbereich dargestellt.



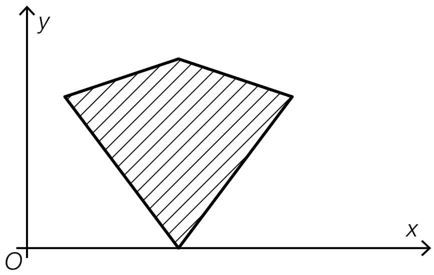
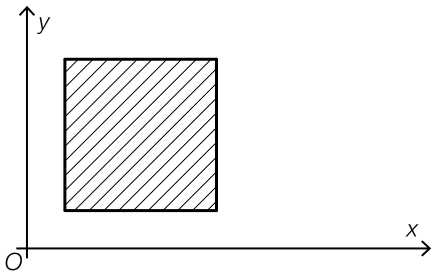
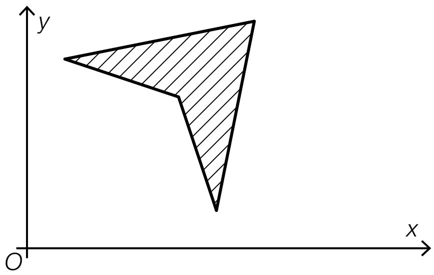
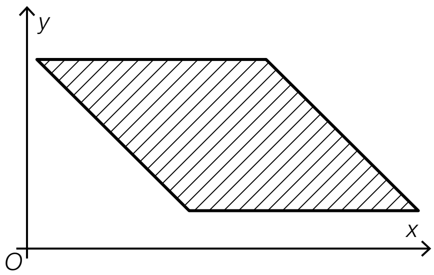
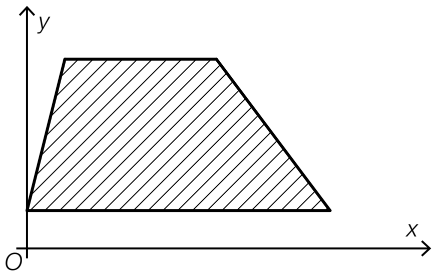
2) Geben Sie die Koordinaten des Punktes C an.

$C = (\_\_\_\_\_ | \_\_\_\_\_)$ *[0/1 P.]*

b) Die Produktionsmengen der Sonnencreme der Marken *Smile* und *Dance* werden durch vier lineare Ungleichungen eingeschränkt.

x ... Produktionsmenge der Marke *Smile*
y ... Produktionsmenge der Marke *Dance*

1) Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die <u>keinen</u> möglichen Lösungsbereich darstellt.
[1 aus 5] *[0/1 P.]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

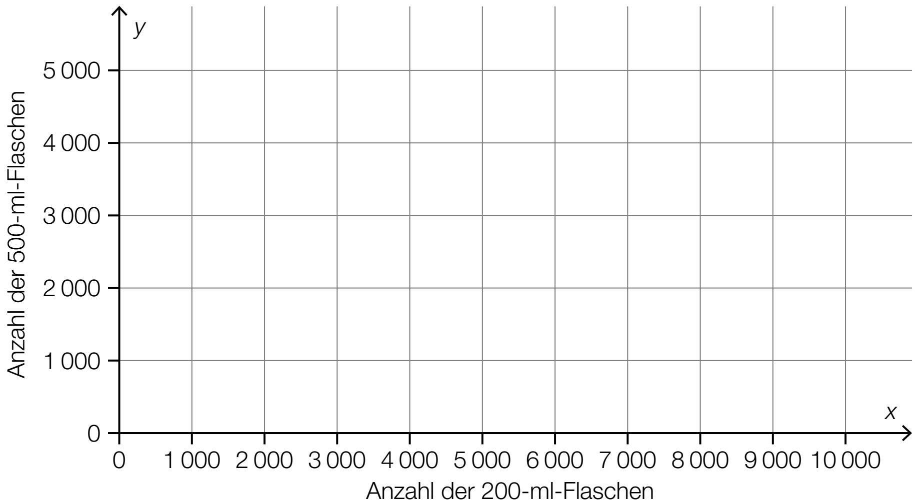
c) Die Sonnencreme der Marke *Sun Protect* soll in 200-ml-Flaschen und in 500-ml-Flaschen abgefüllt werden. Dabei gilt das folgende Ungleichungssystem:

I: $x + y \geq 5000$
II: $0{,}2 \cdot x + 0{,}5 \cdot y \leq 2000$
III: $y \geq 1500$

x ... Anzahl der 200-ml-Flaschen
y ... Anzahl der 500-ml-Flaschen

1) Interpretieren Sie die Ungleichung I im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Lösungsbereich des Ungleichungssystems ein. *[0/1 P.]*



Wenn die Nichtnegativitätsbedingungen ($x \geq 0$, $y \geq 0$) zum Ungleichungssystem hinzugefügt werden, ändert sich der Lösungsbereich des Ungleichungssystems nicht.

3) Begründen Sie, warum diese Aussage richtig ist. *[0/1 P.]*

Die 200-ml-Flaschen der Marke *Sun Protect* werden um 3,80 €/Stück verkauft.
Die 500-ml-Flaschen der Marke *Sun Protect* werden um 8,75 €/Stück verkauft.

4) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion Z zur Beschreibung des Erlöses auf.

$Z(x, y) =$ ____________________________________ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

Sonnencreme

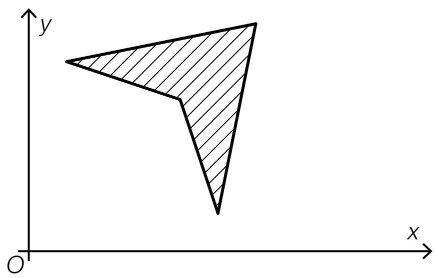
a1) I: $a \geq \frac{b}{3}$

II: $b \geq 6$

a2) $C = (2|6)$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung I.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung II.
a2) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Koordinaten.

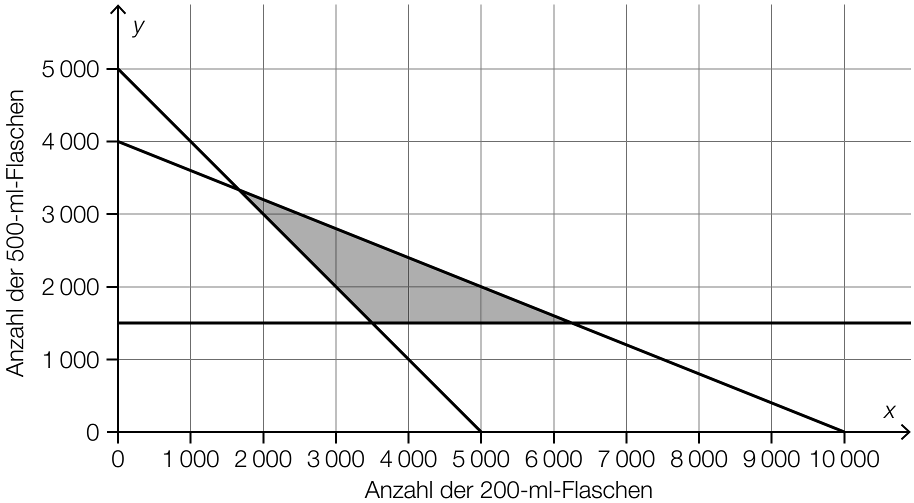
b1)

	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) Es sollen mindestens 5 000 Flaschen abgefüllt werden.

c2)



c3) Der Lösungsbereich, der durch die Ungleichungen I bis III bestimmt wird, liegt bereits zur Gänze im 1. Quadranten des Koordinatensystems.

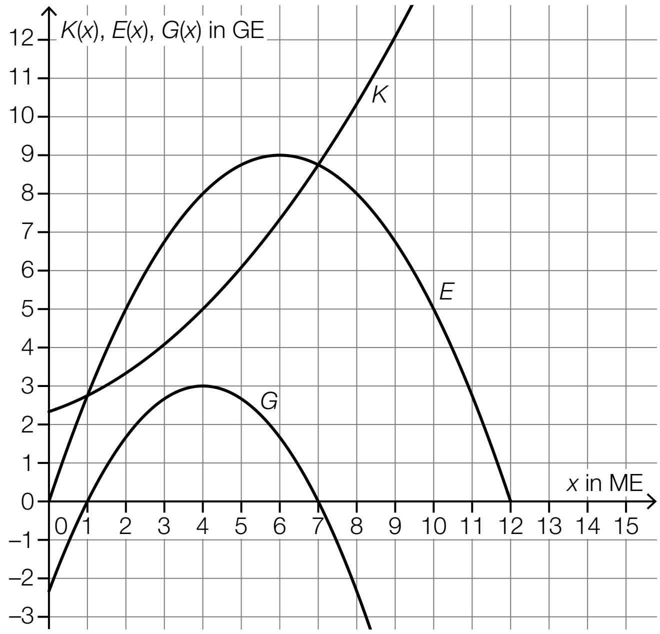
c4) $Z(x, y) = 3{,}80 \cdot x + 8{,}75 \cdot y$

c1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
c2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Lösungsbereichs.
c3) Ein Punkt für das richtige Begründen.
c4) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion.

Trinkflaschen

Ein Unternehmen produziert Trinkflaschen aus verschiedenen Materialien.

a) In der nachstehenden Abbildung sind für die Produktion von Trinkflaschen aus Glas die Graphen der Kostenfunktion *K*, der Erlösfunktion *E* und der Gewinnfunktion *G* dargestellt.



1) Markieren Sie in der obigen Abbildung auf der *x*-Achse den Gewinnbereich. *[0/1 P.]*

2) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der quadratischen Erlösfunktion *E* auf. *[0/1 P.]*

3) Kreuzen Sie den Cournot'schen Preis an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

1 GE/ME	☐
2 GE/ME	☐
3 GE/ME	☐
4 GE/ME	☐
6 GE/ME	☐

b) Für Trinkflaschen aus Edelstahl ist die Kostenfunktion K bekannt:

$K(x) = 0{,}035 \cdot x^3 - 0{,}32 \cdot x^2 + 1{,}2 \cdot x + 4$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Grenzkosten 2,8 GE/ME betragen. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die absolute Änderung der Gesamtkosten bei einer Steigerung der Produktion von 8 ME auf 9 ME. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Kostenkehre. *[0/1 P.]*

c) Das Unternehmen entwickelt neue Thermosflaschen. In verschiedenen Versuchen wurde untersucht, wie schnell Tee in diesen Thermosflaschen abkühlt.
Diese Versuche ergaben, dass die Temperatur des Tees zu einem bestimmten Messzeitpunkt annähernd normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt $\mu = 64$ °C.
Bei 4 % aller Versuche betrug die Temperatur des Tees zu diesem Messzeitpunkt weniger als 60 °C.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ. *[0/1 P.]*

Bei einem dieser Versuche wurde die nachstehende Funktion T ermittelt.

$T(t) = 20 + 77 \cdot 0{,}93^t$

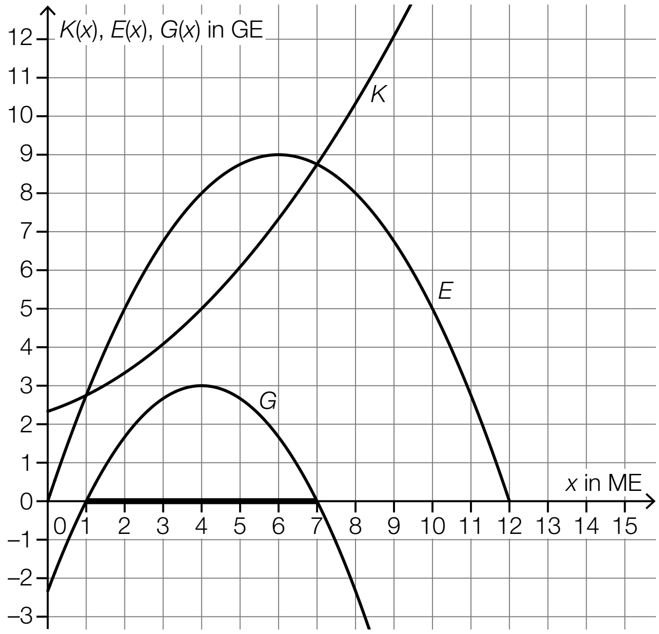
t … Zeit seit dem Einfüllen des Tees in h
$T(t)$ … Temperatur des Tees zur Zeit t in °C

2) Geben Sie diejenige Temperatur an, die der Tee beim Einfüllen zur Zeit $t = 0$ hatte.

____________________ °C *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$

$E(12) = 0$
$E(6) = 9$

oder:

$a \cdot 12^2 + b \cdot 12 = 0$
$a \cdot 6^2 + b \cdot 6 = 9$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -0{,}25$
$b = 3$

$E(x) = -0{,}25 \cdot x^2 + 3 \cdot x$

a3)

2 GE/ME	☒

a1) Ein Punkt für das Markieren des richtigen Gewinnbereichs.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion E.
a3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

b1) $K'(x) = 0{,}105 \cdot x^2 - 0{,}64 \cdot x + 1{,}2$

$K'(x) = 2{,}8$ *oder* $0{,}105 \cdot x^2 - 0{,}64 \cdot x + 1{,}2 = 2{,}8$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 8 \quad (x_2 = -1{,}90...)$

Bei einer Produktionsmenge von 8 ME betragen die Grenzkosten 2,8 GE/ME.

b2) $K(9) - K(8) = 3{,}355$

Die absolute Änderung der Gesamtkosten beträgt 3,355 GE.

b3) $K''(x) = 0{,}21 \cdot x - 0{,}64$

$K''(x) = 0$ *oder* $0{,}21 \cdot x - 0{,}64 = 0$
$x = 3{,}047...$

Die Kostenkehre liegt bei rund 3,05 ME.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Produktionsmenge.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der absoluten Änderung der Gesamtkosten.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Kostenkehre.

c1) X ... Temperatur des Tees in °C

$P(X < 60) = 0{,}04$
Berechnung von σ mittels Technologieeinsatz:

$\sigma = 2{,}28...$

Die Standardabweichung beträgt rund 2,3 °C.

c2) 97 °C

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung σ.
c2) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Temperatur.

Umbaufinanzierung

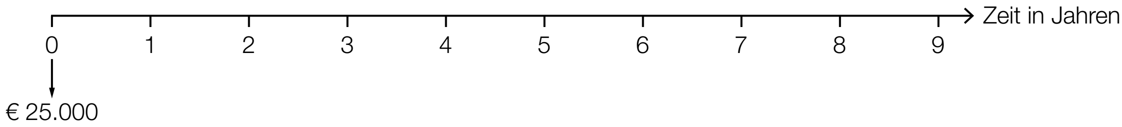
Maria und Johanna bauen ihre gemeinsame Wohnung um und benötigen für die Umbaufinanzierung einen Kredit in Höhe von € 25.000.

a) Maria überlegt sich eine Rückzahlungsvariante.

Sie überlegt, den Kredit in Höhe von € 25.000 durch folgende Rückzahlungen zu tilgen:

- einmalige Rückzahlung in Höhe von € 8.000, die 2 Jahre nach Auszahlung des Kredits erfolgt
- 3 Jahresraten in Höhe von jeweils € 6.500, beginnend 3 Jahre nach der einmaligen Rückzahlung

1) Tragen Sie auf der nachstehenden Zeitachse alle Rückzahlungen ein. *[0/1 P.]*



2) Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der der zugrundeliegende Jahreszinssatz *i* berechnet werden kann. *[0/1 P.]*

b) Johanna überlegt sich eine andere Rückzahlungsvariante.

Sie überlegt, den Kredit in Höhe von € 25.000 durch folgende Rückzahlungen zu tilgen:

- 5 Jahresraten in Höhe von jeweils € 5.000, beginnend 1 Jahr nach Auszahlung des Kredits
- Restzahlung, die 1 Jahr nach der letzten Jahresrate erfolgt

Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

1) Berechnen Sie die Höhe der Restzahlung. *[0/1 P.]*

c) Maria und Johanna erhalten von ihrer Bank einen Tilgungsplan für die Rückzahlung des Kredits mit gleich bleibenden monatlichen Annuitäten.
In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt dieses Tilgungsplans dargestellt.

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
37	€ 26,06	€ 423,94	€ 450,00	€ 9.998,09
38			€ 450,00	

1) Ermitteln Sie den Monatszinssatz für den Monat 37. *[0/1 P.]*

Für den Monat 38 beträgt der Monatszinssatz 0,2 %.

2) Vervollständigen Sie die Zeile für den Monat 38. *[0/1 P.]*

d) Für den Kredit in Höhe von € 25.000 bietet eine andere Bank Maria und Johanna eine Tilgung mit einem Monatszinssatz von 0,375 % an.
Sie verhandeln mit der Bank über einen Zahlungsaufschub.

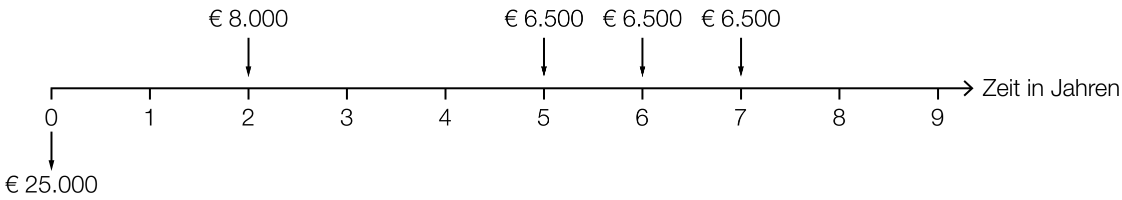
1) Berechnen Sie, nach wie vielen Monaten ohne Rückzahlungen die Restschuld erstmals € 30.000 übersteigen würde. *[0/1 P.]*

Maria und Johanna wollen nun doch von Anfang an am Ende jedes Monats genau so viel zurückzahlen, dass die Restschuld am Ende jedes Monats gleich dem ursprünglichen Kreditbetrag von € 25.000 ist.

2) Ermitteln Sie, wie hoch die monatlichen Rückzahlungen dazu sein müssen. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $25\,000 \cdot (1 + i)^7 = 8\,000 \cdot (1 + i)^5 + 6\,500 \cdot (1 + i)^2 + 6\,500 \cdot (1 + i) + 6\,500$

oder:

$$25\,000 \cdot (1 + i)^7 = 8\,000 \cdot (1 + i)^5 + 6\,500 \cdot \frac{(1 + i)^3 - 1}{i}$$

Auch ein Aufstellen der Gleichung unter Verwendung des Aufzinsungsfaktors q ist als richtig zu werten.

a1) Ein Punkt für das richtige Eintragen aller Rückzahlungen.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

b1) $\left(25\,000 \cdot 1{,}03^5 - 5\,000 \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{0{,}03}\right) \cdot 1{,}03 = 2\,509{,}257...$

Die Höhe der Restzahlung beträgt € 2.509,26.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe der Restzahlung.

c1) $\frac{26{,}06}{9\,998{,}09 + 423{,}94} = 0{,}00250...$

Der Monatszinssatz für den Monat 37 beträgt rund 0,25 %.

c2)

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
37	€ 26,06	€ 423,94	€ 450,00	€ 9.998,09
38	**€ 20,00**	**€ 430,00**	€ 450,00	**€ 9.568,09**

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Monatszinssatzes für den Monat 37.
c2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Zeile für den Monat 38.

d1) $25\,000 \cdot 1{,}00375^n = 30\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 48{,}7...$

Nach 49 Monaten würde die Restschuld erstmals € 30.000 übersteigen.

Für die Punktevergabe ist eine Rundung auf ganze Monate nicht erforderlich.

d2) $25\,000 \cdot 0{,}00375 = 93{,}75$

Die monatlichen Rückzahlungen müssen € 93,75 betragen.

d1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der Monate.
d2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Höhe der monatlichen Rückzahlungen.

Vogelhäuschen

Lara und Julian wollen Vogelhäuschen herstellen und auf einem Weihnachtsmarkt verkaufen.

a) Lara und Julian wollen x Vogelhäuschen *Rustikal* und y Vogelhäuschen *Modern* herstellen.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Die Bedingung „sie wollen mindestens ______①______ Vogelhäuschen *Rustikal* wie Vogelhäuschen *Modern* herstellen“ kann durch die Ungleichung ______②______ beschrieben werden.

①	
doppelt so viele	☐
halb so viele	☐
1,5-mal so viele	☐

②	
$3 \cdot x - 2 \cdot y \geq 0$	☐
$2 \cdot x - y \leq 0$	☐
$x - 2 \cdot y \geq 0$	☐

Für die Herstellung eines Vogelhäuschens *Rustikal* benötigen sie 1 h.
Für die Herstellung eines Vogelhäuschens *Modern* benötigen sie 1,5 h.

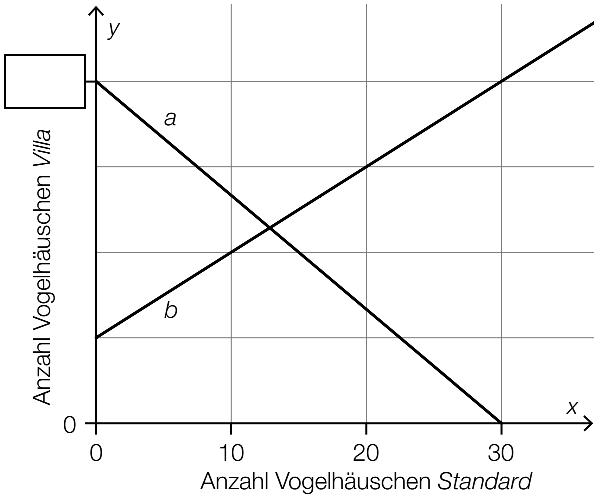
Insgesamt wollen sie höchstens 80 h für den Bau der Vogelhäuschen aufwenden.

2) Stellen Sie eine Ungleichung auf, die diese Bedingung für den Bau der Vogelhäuschen beschreibt. *[0/1 P.]*

b) Lara und Julian wollen x Vogelhäuschen *Standard* und y Vogelhäuschen *Villa* herstellen.

Die Bedingungen für die Herstellung dieser Vogelhäuschen können durch die Ungleichungen I, II und III und die Nichtnegativitätsbedingungen (IV und V) beschrieben werden (siehe nachstehende Tabelle und nachstehende Abbildung).

Ungleichung	Begrenzungsgerade
I: $2 \cdot x + 3 \cdot y \geq 60$	a
II: $y \geq$ ____________	b
III: $x \leq 20$	c
IV: $x \geq 0$	y-Achse
V: $y \geq 0$	x-Achse



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[0/1 P.]*

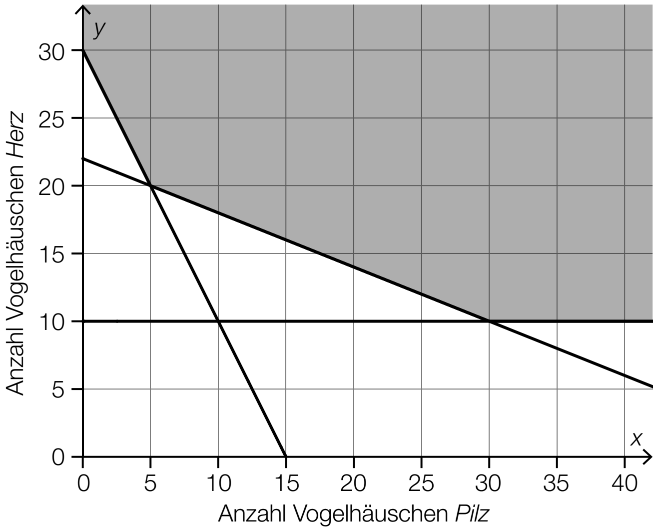
2) Vervollständigen Sie in der obigen Tabelle die Ungleichung II. *[0/1 P.]*

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Begrenzungsgerade c ein. *[0/1 P.]*

4) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung den Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems. *[0/1 P.]*

c) Lara und Julian wollen x Vogelhäuschen *Pilz* und y Vogelhäuschen *Herz* herstellen.

Die Bedingungen für die Herstellung dieser Vogelhäuschen können durch ein Ungleichungssystem beschrieben werden. Der Lösungsbereich dieses Ungleichungssystems ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Vogelhäuschen werden aus Holzplatten gleicher Dicke hergestellt.
Für ein Vogelhäuschen *Pilz* benötigen Lara und Julian eine 20 cm × 100 cm große rechteckige Holzplatte.
Für ein Vogelhäuschen *Herz* benötigen sie eine 50 cm × 50 cm große quadratische Holzplatte.

Der Holzbedarf in cm^2 soll möglichst gering sein.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion Z zur Beschreibung des Holzbedarfs in cm^2 auf. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, auf der im Lösungsbereich der minimale Wert der Zielfunktion angenommen wird. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

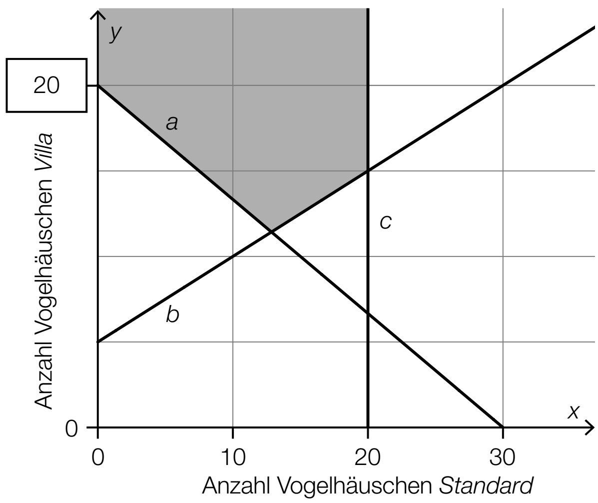
①	
doppelt so viele	☒

②	
$x - 2 \cdot y \geq 0$	☒

a2) $x + 1{,}5 \cdot y \leq 80$

a1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung.

b1, b3 und b4)



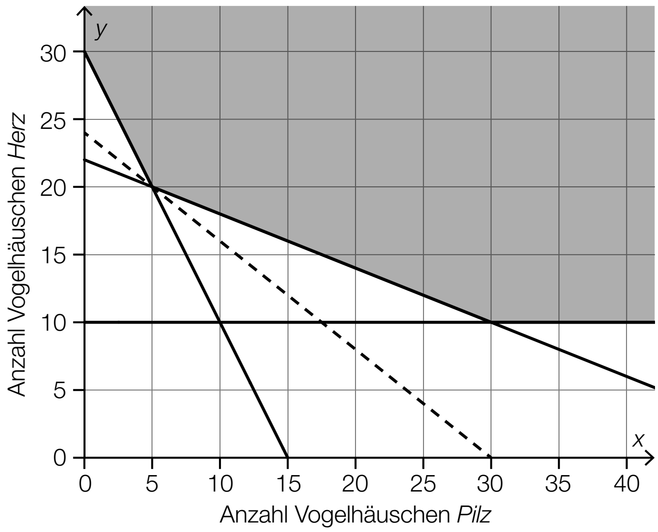
b2) $y \geq \frac{1}{2} \cdot x + 5$

b1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
b2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Ungleichung II.
b3) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Begrenzungsgeraden *c*.
b4) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Lösungsbereichs.

c1) Holzbedarf für ein Vogelhäuschen *Pilz*: 20 cm × 100 cm = 2 000 cm²
Holzbedarf für ein Vogelhäuschen *Herz*: 50 cm × 50 cm = 2 500 cm²

$Z(x, y) = 2000 \cdot x + 2500 \cdot y$

c2)

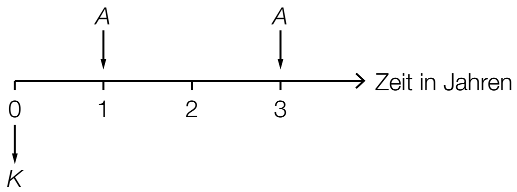


c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion *Z*.
c2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Geraden.

Tischlerei

a) Für den Kauf einer Sägemaschine wird der Kreditbetrag K aufgenommen. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

Der Kredit wird durch zwei gleich hohe Zahlungen A getilgt (siehe nachstehende Zeitachse).



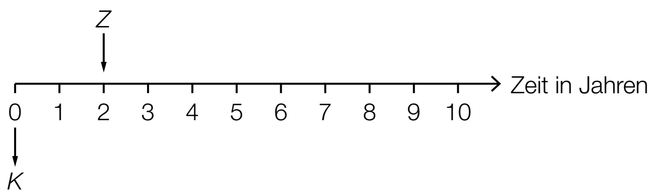
1) Stellen Sie mithilfe von K eine Formel für A auf.

A = ____ *[0/1 P.]*

Alternativ kann der Kreditbetrag K durch eine Einmalzahlung Z und 5 jährliche Raten R zurückgezahlt werden. Der Zinssatz beträgt 2 % p. a.

Es gilt: $K \cdot 1{,}02^3 = Z \cdot 1{,}02 + R \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^5}$

Der Kreditbetrag K und die Einmalzahlung Z sind auf der nachstehenden Zeitachse dargestellt.



2) Zeichnen Sie auf der obigen Zeitachse die Raten R ein. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie R für K = € 60.000 und Z = € 20.000. *[0/1 P.]*

b) Eine Schleifmaschine wird um den Betrag S gekauft. Die Bezahlung erfolgt mit den Beträgen B_1 und B_2.

Es gilt: $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-7}$
q ... monatlicher Aufzinsungsfaktor ($q > 1$)

Alternativ könnte die Zahlung auch mit den Beträgen B_1 und B_3 erfolgen.

Es gilt: $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_3 \cdot q^{-3}$

1) Argumentieren Sie, dass B_3 kleiner als B_2 ist. *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die <u>nicht</u> zur Gleichung $S = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-7}$ äquivalent ist. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$S \cdot q^{10} = B_1 \cdot q^5 + B_2 \cdot q^3$	☐
$S \cdot q^7 = B_1 \cdot q^2 + B_2$	☐
$S \cdot q^6 = B_1 \cdot q + B_2 \cdot q^{-1}$	☐
$S \cdot q^5 = B_1 + B_2 \cdot q^{-2}$	☐
$S \cdot q^2 = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-3}$	☐

c) Für den Kauf einer Fräsmaschine wird ein Kredit in Höhe von € 45.000 aufgenommen. Dieser Kredit wird durch nachschüssige Semesterraten in Höhe von je € 3.500 und eine Restzahlung getilgt. Der Semesterzinssatz beträgt 0,8 %.

Für die Rückzahlung des Kredits wurde der nachstehende Tilgungsplan erstellt.

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 45.000
1	€ 360	€ 3.140	€ 3.500	

1) Vervollständigen Sie im obigen Tilgungsplan die Zeile für das Semester 1. *[0/1 P.]*

Es werden 13 nachschüssige Semesterraten gezahlt. Ein Semester nach Zahlung der letzten Semesterrate wird der Kredit durch eine Restzahlung vollständig getilgt.

2) Vervollständigen Sie im nachstehenden Tilgungsplan die Zeilen für die Semester 13 und 14. *[0/1 P.]*

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
13	€ 44,94	€ 3.455,06	€ 3.500,00	
14	€ 17,30			€ 0,00

Für eine alternative Rückzahlung wird folgende Berechnung durchgeführt:

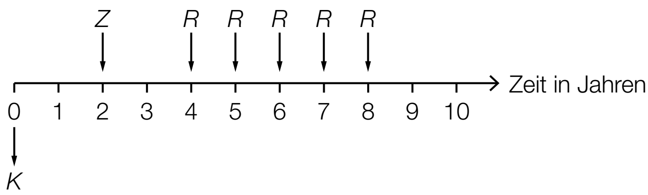
$\sqrt[6]{1{,}008} - 1 \approx 0{,}0013$

3) Interpretieren Sie das Ergebnis der obigen Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \frac{K}{1{,}02^{-1} + 1{,}02^{-3}}$

a2)



a3) $60\,000 \cdot 1{,}02^3 = 20\,000 \cdot 1{,}02 + R \cdot \frac{1{,}02^5 - 1}{1{,}02 - 1} \cdot \frac{1}{1{,}02^5}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$R = 9\,180{,}619...$

Die Ratenhöhe beträgt € 9.180,62.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Raten *R*.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *R*.

b1) Der Betrag B_3 ist kleiner als B_2, weil dieser früher gezahlt wird und damit weniger Zinsen anfallen.

Auch eine rechnerische Argumentation ist als richtig zu werten.

b2)

$S \cdot q^2 = B_1 \cdot q^{-5} + B_2 \cdot q^{-3}$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1)

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
0	---	---	---	€ 45.000
1	€ 360	€ 3.140	€ 3.500	**€ 41.860**

c2)

Semester	Zinsanteil	Tilgungsanteil	halbjährliche Annuität	Restschuld
13	€ 44,94	€ 3.455,06	€ 3.500,00	**€ 2.162,50**
14	€ 17,30	**€ 2.162,50**	**€ 2.179,80**	€ 0,00

Wird der Tilgungsplan vollständig oder mithilfe der Restschuld im Semester 12 durchgerechnet, ergeben sich aufgrund der Rundung geringfügig abweichende Werte.

c3) Es wird der (äquivalente) Monatszinssatz berechnet.

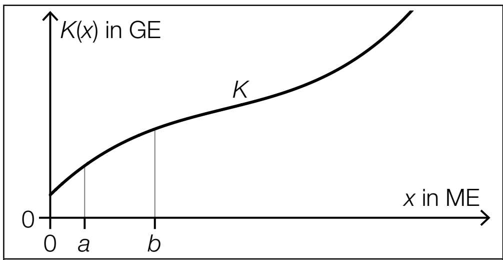
c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Zeile für das Semester 1.
c2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Zeilen für die Semester 13 und 14.
c3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

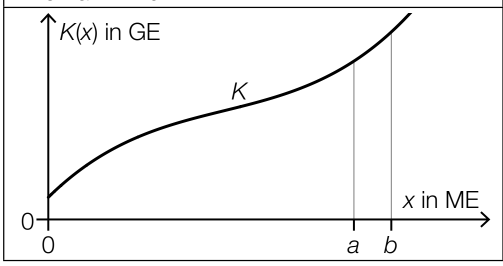
Fahrradhelme

a) In den zwei unten stehenden Abbildungen ist jeweils der Graph der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K für Fahrradhelme des Modells *Green Protection* dargestellt.

x … Produktionsmenge in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Abbildungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*





A	Die Gesamtkosten sind bei *a* ME höher als bei *b* ME.
B	Die Grenzkosten sind bei *a* ME geringer als bei *b* ME.
C	Die Kostenkehre liegt zwischen *a* ME und *b* ME.
D	Die Durchschnittskosten sind bei *a* ME höher als bei *b* ME.

Für die zugehörige Grenzkostenfunktion K' gilt:

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 0{,}4 \cdot x + 18$

Bei einer Produktion von 40 ME betragen die Gesamtkosten 664 GE.

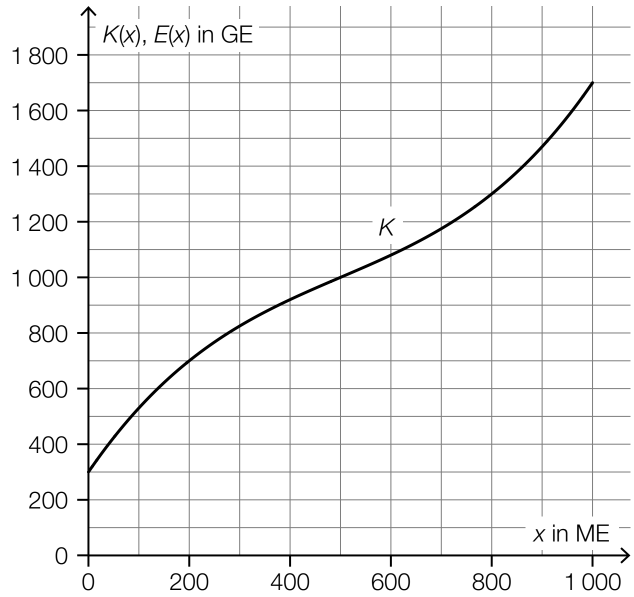
2) Berechnen Sie die Fixkosten. *[0/1 P.]*

b) Für die Erlösfunktion E für Fahrradhelme des Modells *Silver Protection* gilt:

$E(x) = -0{,}0045 \cdot x^2 + 5{,}45 \cdot x$

x … Absatzmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Absatzmenge x in GE

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion K für Fahrradhelme des Modells *Silver Protection* dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion E im Intervall [0; 1 000] ein. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Gewinn bei einem Absatz von 500 ME. *[0/1 P.]*

Es wird die nachstehende Berechnung durchgeführt.

$\frac{E(700)}{700} = 2{,}3$

3) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Das Ergebnis dieser Berechnung entspricht ___①___ bei einem Absatz von 700 ME in der Einheit ___②___.

①	
dem Grenzerlös	☐
dem Preis	☐
den Durchschnittskosten	☐

②	
GE	☐
ME	☐
GE/ME	☐

c) Für die quadratische Gewinnfunktion G für Fahrradhelme des Modells *Gold Protection* gilt:

$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … Absatzmenge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

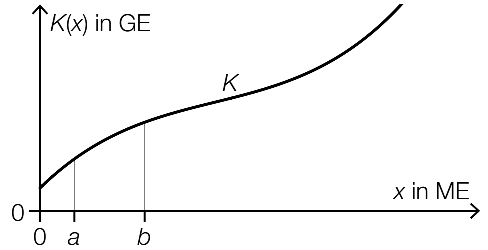
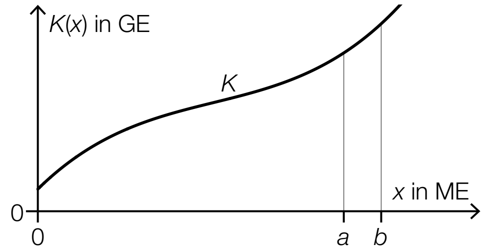
Die Fixkosten betragen 220 GE.
Der Break-even-Point liegt bei einem Absatz von 50 ME.
Der maximale Gewinn wird bei einem Absatz von 300 ME erzielt.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c. *[0/1/2 P.]*

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

	D
	B

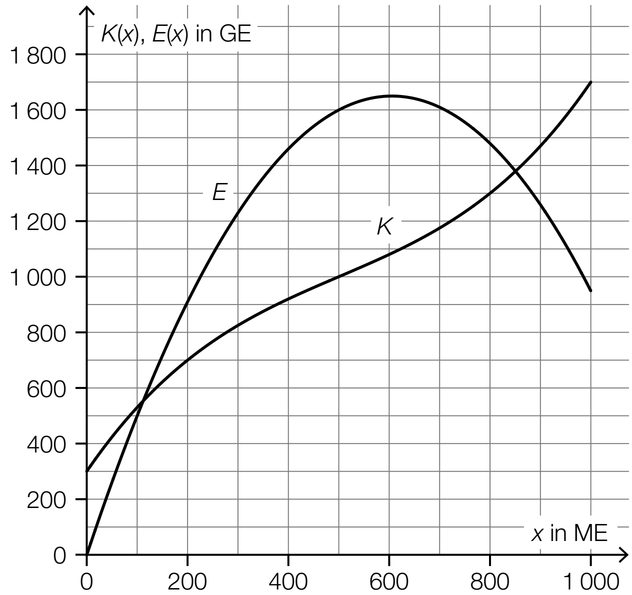
A	Die Gesamtkosten sind bei *a* ME höher als bei *b* ME.
B	Die Grenzkosten sind bei *a* ME geringer als bei *b* ME.
C	Die Kostenkehre liegt zwischen *a* ME und *b* ME.
D	Die Durchschnittskosten sind bei *a* ME höher als bei *b* ME.

a2) $K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}2 \cdot x^2 + 18 \cdot x + F$
$K(40) = 664$ *oder* $0{,}001 \cdot 40^3 - 0{,}2 \cdot 40^2 + 18 \cdot 40 + F = 664$
$F = 200$ GE

Die Fixkosten betragen 200 GE.

a1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Fixkosten.

b1)



b2) $G(500) = E(500) - K(500) = 600$
Toleranzbereich: [570; 630]

Der Gewinn bei einem Absatz von 500 ME beträgt rund 600 GE.

b3)

①	
dem Preis	☒

②	
GE/ME	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion *E*.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Gewinns.
b3) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

c1) $G'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

I: $G(0) = -220$
II: $G(50) = 0$
III: $G'(300) = 0$

oder:

I: $c = -220$
II: $2500 \cdot a + 50 \cdot b + c = 0$
III: $600 \cdot a + b = 0$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -0{,}008$
$b = 4{,}8$
$c = -220$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Fixkosten und des Break-even-Points.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Ableitung.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten.

Keramik

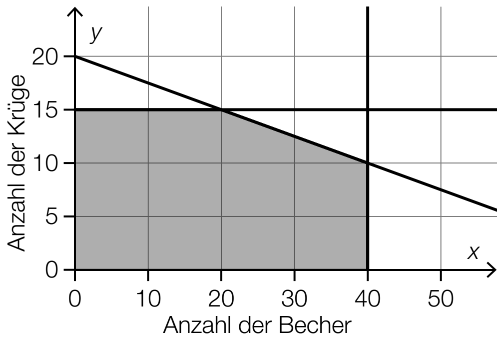
Ein Betrieb stellt Haushaltsgegenstände aus Keramik her.

a) Es sollen mindestens so viele Vasen wie Schüsseln hergestellt werden.

Für die Herstellung einer Vase werden 200 g Ton und für die Herstellung einer Schüssel 400 g Ton benötigt. Für Vasen und Schüsseln sollen insgesamt pro Woche nicht mehr als 16 kg Ton verbraucht werden.

1) Stellen Sie die beiden Ungleichungen auf, die diese Produktionseinschränkungen für x Vasen und y Schüsseln beschreiben. *[0/1/2 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die wöchentliche Herstellung von x Bechern und y Krügen dargestellt.



In einer bestimmten Woche sollen so viele Becher wie möglich hergestellt werden.

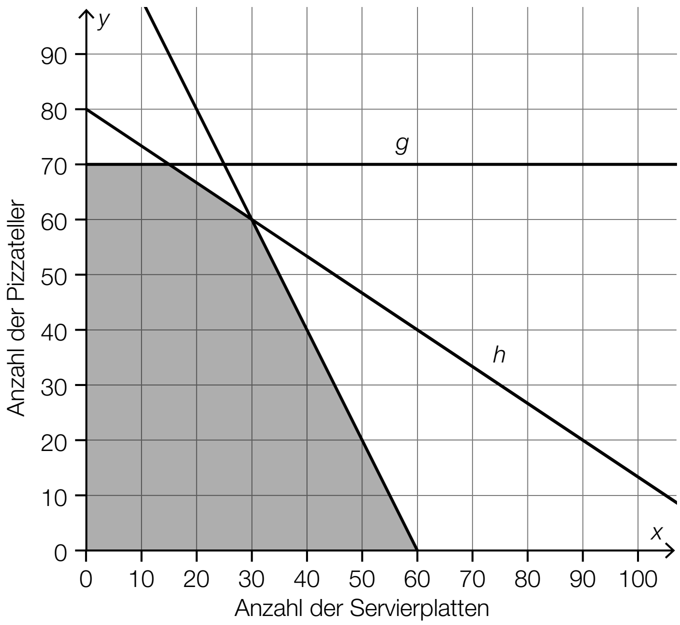
1) Geben Sie an, wie viele Krüge in dieser Woche maximal hergestellt werden können.

__________ Krüge *[0/1 P.]*

In einer Aktionswoche ist die Herstellung von 30 Bechern und 15 Krügen geplant.

2) Argumentieren Sie, dass diese Herstellung <u>nicht</u> möglich ist. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Lösungsbereich der Produktionseinschränkungen für die wöchentliche Herstellung von x Servierplatten und y Pizzatellern dargestellt.



Der Preis für eine Servierplatte beträgt € 40 und der Preis für einen Pizzateller beträgt € 30.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Zielfunktion zur Beschreibung des Erlöses auf.

$E(x, y) =$ ____________________________________ *[0/1 P.]*

Der maximale Erlös wird bei einer Produktion von 30 Servierplatten und 60 Pizzatellern erzielt.

Das Hinzufügen oder Weglassen von Bedingungen kann zur Änderung der Produktionsmengen für den maximalen Erlös führen. Sowohl der Preis für eine Servierplatte als auch der Preis für einen Pizzateller bleiben unverändert.

2) Kreuzen Sie diejenige Änderung an, bei der sich die Produktionsmengen für den maximalen Erlös ändern. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Es gilt zusätzlich: $x \leq 50$	☐
Die zur Geraden g gehörende Bedingung wird weggelassen.	☐
Es gilt zusätzlich: $y \leq 60$	☐
Die zur Geraden h gehörende Bedingung wird weggelassen.	☐
Es gilt zusätzlich: $x \leq 40$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) I: $x \geq y$
II: $0{,}2 \cdot x + 0{,}4 \cdot y \leq 16$ *oder* II: $200 \cdot x + 400 \cdot y \leq 16\,000$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung mithilfe der Information bezüglich der Mindestanzahl der Vasen.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung mithilfe der Information bezüglich des maximalen Tonverbrauchs.

b1) 10 Krüge

b2) Diese Herstellung ist nicht möglich, da der Punkt $(30 \mid 15)$ nicht im Lösungsbereich liegt.

b1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Anzahl.
b2) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.

c1) $E(x, y) = 40 \cdot x + 30 \cdot y$

c2)

Die zur Geraden *h* gehörende Bedingung wird weggelassen.	☒

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Zielfunktion *E*.
c2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bauteile

In einem Betrieb werden verschiedene Bauteile hergestellt.

a) Die Kostenfunktion K für das Bauteil A ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

x ... produzierte Menge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Menge x in GE

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die passende Gleichung aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Der Graph der Grenzkostenfunktion und der Graph der Stückkostenfunktion schneiden einander bei 10 ME.	
Die Stückkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 10 GE/ME.	

A	$\frac{K(10)}{10} = K'(10)$
B	$\frac{K'(10)}{10} = 10$
C	$K''(10) = 0$
D	$K(10) = 100$

b) Für die Kostenfunktion K und die Gewinnfunktion G für das Bauteil B gilt im Intervall [0; 25]:

$K(x) = 2 \cdot x^3 - 60 \cdot x^2 + 700 \cdot x + 6000$
$G(x) = -40 \cdot x^2 + 1200 \cdot x - 6000$

x ... produzierte und verkaufte Menge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Menge x in GE
$G(x)$ ... Gewinn bei der Menge x in GE

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall der Produktionsmenge, in dem die Grenzkosten maximal 700 GE/ME betragen. *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, deren Lösung das Betriebsminimum ist. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 700 = 0$	☐
$12 \cdot x - 120 = 0$	☐
$2 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 700 = 0$	☐
$4 \cdot x - 60 = 0$	☐
$6 \cdot x^2 - 120 \cdot x = 0$	☐

Für die Produktion des Bauteils B gilt:

1 ME = 10000 Stück
1 GE = 100 Euro

Es wird genau diejenige Menge produziert, bei der der Gewinn maximal ist.

3) Berechnen Sie den Gewinn pro Stück bei dieser Menge. Geben Sie das Ergebnis in Euro/Stück an. *[0/1 P.]*

Für die zugehörige Erlösfunktion E gilt: $E(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x$

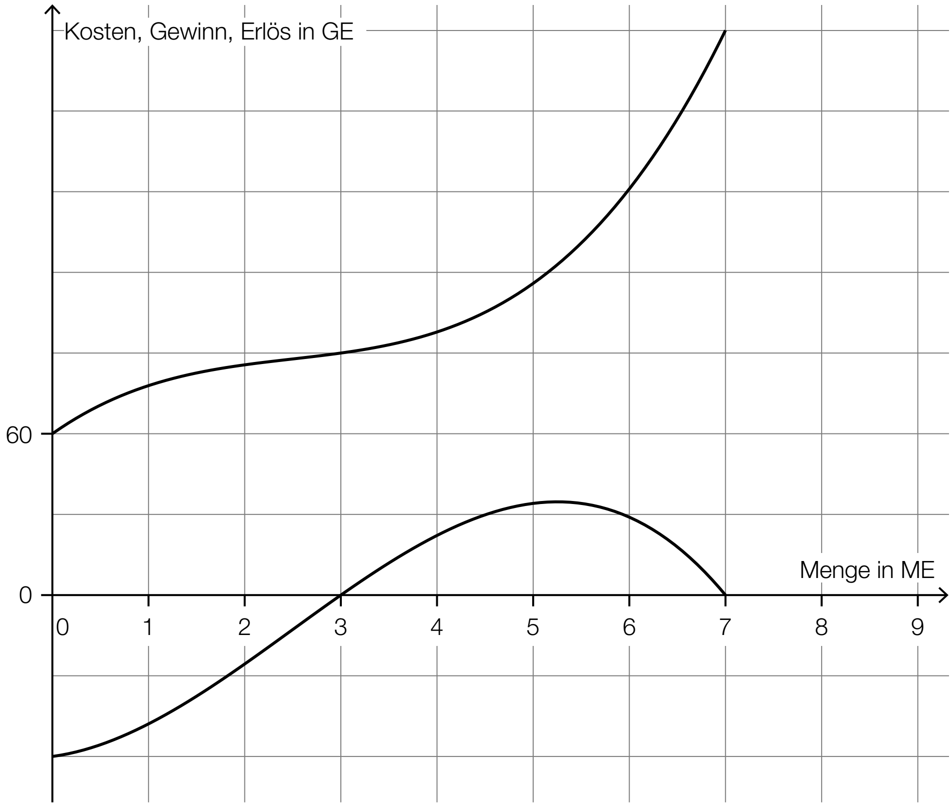
4) Ermitteln Sie die Parameter a, b und c. *[0/1 P.]*

a = ____________________

b = ____________________

c = ____________________

c) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion und der Graph der Gewinnfunktion für das Bauteil *C* dargestellt.



Die zugehörige Erlösfunktion ist linear.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Erlösfunktion ein. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie den Preis, zu dem das Bauteil *C* verkauft wird. *[0/1 P.]*

d) Für die Preis-Absatz-Funktion für das Bauteil *D* gilt:

$p(x) = p_H - 20 \cdot x$

x ... abgesetzte Menge in ME
$p(x)$ ... Preis bei der abgesetzten Menge x in GE/ME
p_H ... Höchstpreis in GE/ME

Der Preis bei einem Verkauf von 5 ME beträgt 300 GE/ME.

1) Berechnen Sie den Höchstpreis p_H. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Preis-Absatz-Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

Der Graph der Grenzkostenfunktion und der Graph der Stückkostenfunktion schneiden einander bei 10 ME.	A
Die Stückkosten bei einer Produktion von 10 ME betragen 10 GE/ME.	D

A	$\frac{K(10)}{10} = K'(10)$
B	$\frac{K'(10)}{10} = 10$
C	$K''(10) = 0$
D	$K(10) = 100$

a1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

b1) $K'(x) = 700$ *oder* $6 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 700 = 700$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 0$
$x_2 = 20$

Im Intervall [0; 20] betragen die Grenzkosten maximal 700 GE/ME.

Die Angabe in Intervallschreibweise ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b2)

$4 \cdot x - 60 = 0$	☒

b3) $G'(x) = 0$ *oder* $-80 \cdot x + 1\,200 = 0$
$x = 15$

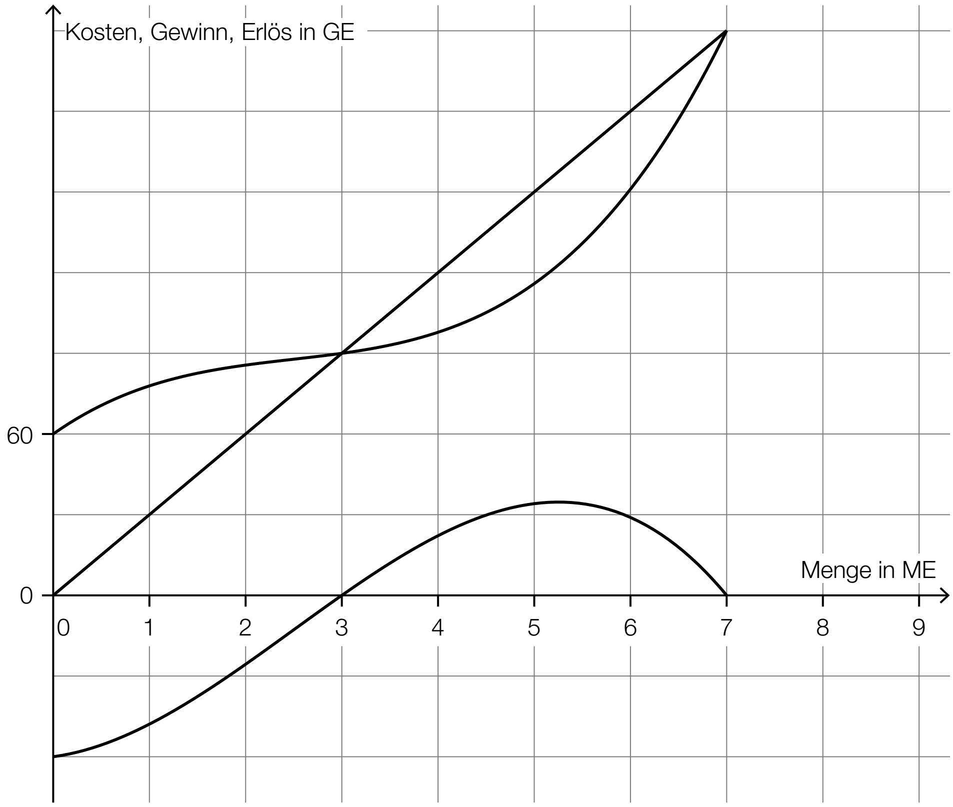
$G(15) = 3\,000$

15 ME = 150 000 Stück
3 000 GE = 300.000 Euro
$\frac{300.000 \text{ Euro}}{150\,000 \text{ Stück}} = 2$ Euro/Stück

b4) $a = 2$
$b = -100$
$c = 1900$

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Intervalls.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Gewinns pro Stück in der Einheit Euro/Stück.
b4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Parameter *a*, *b* und *c*.

c1)



c2) $\frac{60}{2} = 30$
Der Preis beträgt 30 GE/ME.

c1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Preises.

d1) $300 = p_H - 20 \cdot 5$
$p_H = 400$ GE/ME

d2) Die Steigung –20 gibt an, dass eine Preissenkung um 20 GE/ME zu einer Absatzsteigerung um 1 ME führt.

oder:

Soll die abgesetzte Menge um 1 ME gesteigert werden, so muss der Preis um 20 GE/ME gesenkt werden.

d1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Höchstpreises p_H.
d2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Swimmingpool (2)

a) Lea möchte einen Pool kaufen. Sie hat dafür über einen Zeitraum von 5 Jahren bei einem konstanten Jahreszinssatz 4 Einzahlungen Z auf ein Konto getätigt und so bis heute € 2.468,39 gespart.

Dabei gilt:

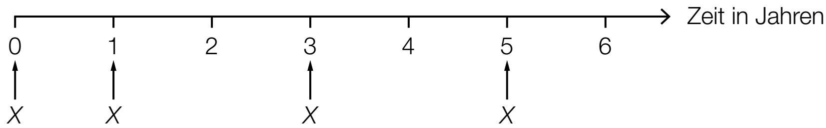
$$Z + Z \cdot 1{,}0102^2 + Z \cdot 1{,}0102^4 + Z \cdot 1{,}0102^5 = 2\,468{,}39$$

1) Lesen Sie den Jahreszinssatz i ab.

i = ____________________ % p.a. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Höhe von Z. *[0/1 P.]*

b) Melisa möchte einen Pool kaufen. Sie hat dafür 4 Einzahlungen X auf ein Konto getätigt (siehe nachstehende Zeitachse).



Für verschiedene Zeitpunkte soll der Wert dieser Einzahlungen berechnet werden.
Der jährliche Aufzinsungsfaktor wird mit q bezeichnet.

1) Ordnen Sie den beiden Werten jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 1	
Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 3	

A	$X + X \cdot q + \frac{X}{q^2} + \frac{X}{q^4}$
B	$X + X \cdot q^2 + X \cdot q^3 + \frac{X}{q^2}$
C	$X \cdot q + X \cdot q^3 + X \cdot q^4 + \frac{X}{q}$
D	$X + \frac{X}{q} + \frac{X}{q^3} + \frac{X}{q^5}$

c) Konstantin möchte einen Pool kaufen. Er nimmt dafür einen Kredit in Höhe von € 20.000 auf, den er durch 120 Monatsraten in Höhe von jeweils € 198,71 zurückzahlen möchte. Die 1. Zahlung erfolgt 1 Monat nach Auszahlung des Kredits.

1) Berechnen Sie den Monatszinssatz für diesen Kredit. *[0/1 P.]*

d) Simon möchte einen Pool kaufen. Er nimmt dafür einen Kredit auf, den er durch nachschüssige monatliche Annuitäten bei einem Monatszinssatz i_{12} zurückzahlen soll.
Die Höhe der monatlichen Annuitäten ändert sich dabei.

In der nachstehenden Tabelle ist ein Ausschnitt des zugehörigen Tilgungsplans dargestellt.

Monat	Zinsanteil	Tilgungsanteil	monatliche Annuität	Restschuld
12				€ 6.766,03
13				€ 6.492,13
14				€ 6.492,13
15			A_{15}	€ 6.217,55

1) Geben Sie denjenigen Monat an, in dem der Tilgungsanteil € 0 beträgt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. *[0/1 P.]*

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von A_{15} auf.
Verwenden Sie dabei i_{12} sowie die Werte für die Restschuld im Monat 14 und im Monat 15.

A_{15} = ____ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $i = 1{,}02\ \%$ p. a.

a2) $Z \cdot (1 + 1{,}0102^2 + 1{,}0102^4 + 1{,}0102^5) = 2\,468{,}39$
$Z = 599{,}999...$

Die Höhe von Z beträgt € 600,00.

a1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Jahreszinssatzes i.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe von Z.

b1)

Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 1	A
Wert aller Einzahlungen zum Zeitpunkt 3	B

A	$X + X \cdot q + \frac{X}{q^2} + \frac{X}{q^4}$
B	$X + X \cdot q^2 + X \cdot q^3 + \frac{X}{q^2}$
C	$X \cdot q + X \cdot q^3 + X \cdot q^4 + \frac{X}{q}$
D	$X + \frac{X}{q} + \frac{X}{q^3} + \frac{X}{q^5}$

b1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1) $20\,000 = 198{,}71 \cdot \frac{(1 + i_{12})^{120} - 1}{i_{12}} \cdot \frac{1}{(1 + i_{12})^{120}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $i_{12} = 0{,}0030...$

Der Monatszinssatz beträgt rund 0,3 %.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Monatszinssatzes.

d1) Der Tilgungsanteil im Monat 14 beträgt € 0, weil die Restschuld am Ende des Monats 14 gleich groß wie am Ende des Monats 13 ist.

d2) $A_{15} = 6\,492{,}13 - 6\,217{,}55 + 6\,492{,}13 \cdot i_{12}$

oder:

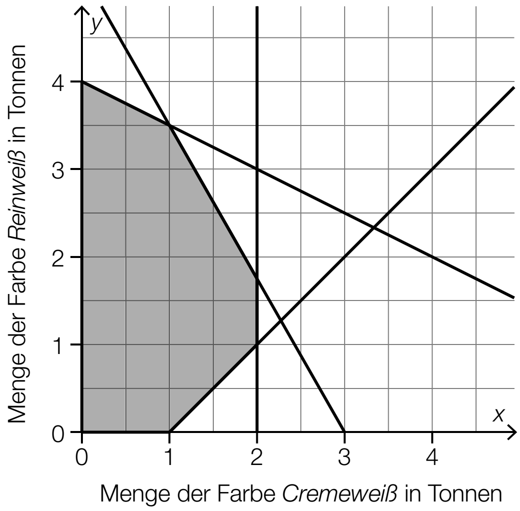
$A_{15} = 274{,}58 + 6\,492{,}13 \cdot i_{12}$

d1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Monats und das richtige Begründen.
d2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Wandfarben

In einem Betrieb werden Wandfarben produziert.

a) Täglich werden x Tonnen der Farbe *Cremeweiß* und y Tonnen der Farbe *Reinweiß* produziert.
In der nachstehenden Abbildung sind die Mengenbeschränkungen für die Produktion dieser beiden Farben dargestellt.



Beide Farben werden zum Preis von 4,50 Euro pro Kilogramm verkauft.
Die Zielfunktion Z beschreibt den Erlös beim Verkauf von x Tonnen der Farbe *Cremeweiß* und y Tonnen der Farbe *Reinweiß*.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Gerade ein, auf der im Lösungsbereich der maximale Wert der Zielfunktion angenommen wird. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den maximalen Erlös. *[0/1 P.]*

Es wird vorgeschlagen, bei der Produktion folgende zusätzliche Bedingung zu berücksichtigen:
Von der Farbe *Cremeweiß* sollen täglich um höchstens 2 Tonnen mehr als von der Farbe *Reinweiß* produziert werden.

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob der in der obigen Abbildung dargestellte Lösungsbereich durch diese zusätzliche Bedingung verkleinert wird. *[0/1 P.]*

b) Es sollen x Tonnen der Farbe *Ozeanblau* und y Tonnen der Farbe *Nachtblau* produziert werden.

Für die Produktion von 1 Tonne der Farbe *Ozeanblau* werden 0,16 ME blaues Farbpulver verbraucht.
Für die Produktion von 1 Tonne der Farbe *Nachtblau* werden 0,2 ME blaues Farbpulver verbraucht.
Insgesamt sollen höchstens 12 ME des blauen Farbpulvers verbraucht werden.
Von der Farbe *Ozeanblau* soll um mindestens ein Drittel mehr als von der Farbe *Nachtblau* produziert werden.

1) Stellen Sie die zwei Ungleichungen auf, die diesen Sachverhalt beschreiben. *[0/1/2 P.]*

c) Die Zeit, die Farbe zum Trocknen braucht (Trocknungszeit), hängt unter anderem von der Temperatur ab. Für eine bestimmte Farbe wurden die in der nachstehenden Tabelle angegebenen Daten ermittelt.

Temperatur in °C	15	18	20	22	27
Trocknungszeit in h	5,8	4,2	3,2	3,4	1,9

Die Trocknungszeit soll in Abhängigkeit von der Temperatur näherungsweise durch die lineare Funktion g beschrieben werden.

T ... Temperatur in °C
$g(T)$ ... Trocknungszeit bei der Temperatur T in h

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion g auf. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von g im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

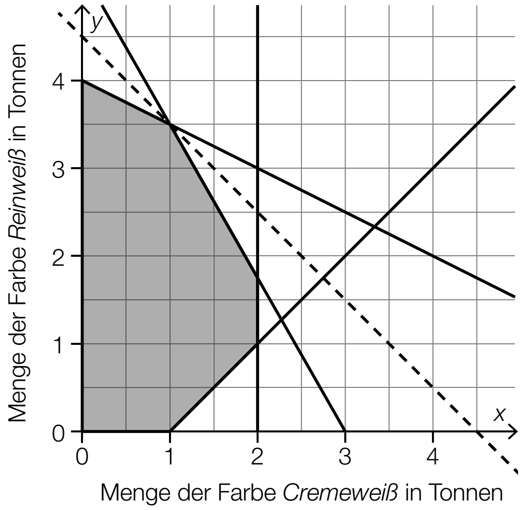
In einem anderen Modell kann die Trocknungszeit in Abhängigkeit von der Temperatur näherungsweise durch die quadratische Funktion f beschrieben werden.

$f(T) = \frac{1}{60} \cdot T^2 - T + 17 \quad \text{mit} \quad 15 \leq T \leq 27$
T ... Temperatur in °C
$f(T)$ ... Trocknungszeit bei der Temperatur T in h

3) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion f diejenige Temperatur, bei der die lokale Änderungsrate der Trocknungszeit –0,3 h/°C beträgt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

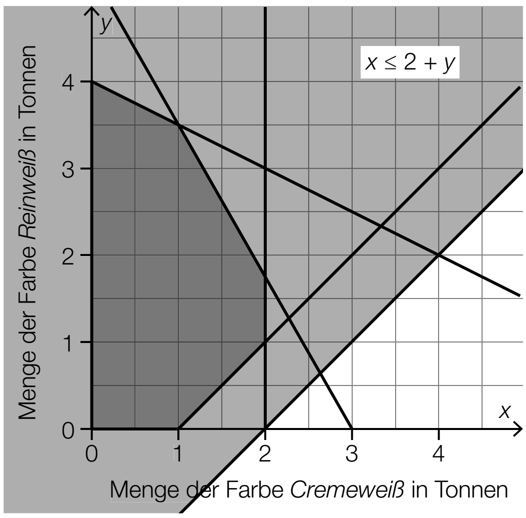
a1)



a2) $4\,500 \cdot 1 + 4\,500 \cdot 3{,}5 = 20\,250$

Der maximale Erlös beträgt 20.250 Euro.

a3) Die durch die Ungleichung $x \leq 2 + y$ festgelegte Halbebene enthält den Lösungsbereich zur Gänze (siehe nachstehende Abbildung).



Der Lösungsbereich wird daher durch die zusätzliche Bedingung nicht verkleinert.

a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Geraden.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des maximalen Erlöses.
a3) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

b1) I: $0{,}16 \cdot x + 0{,}2 \cdot y \leq 12$
II: $x \geq \frac{4}{3} \cdot y$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung I.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Ungleichung II.

c1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$g(T) = -0{,}30 \cdot T + 9{,}91$ *(Koeffizienten gerundet)*

c2) Wird die Temperatur um 1 °C erhöht, so verringert sich die Trocknungszeit um rund 0,30 h.

c3) $f'(T) = -0{,}3$ *oder* $\frac{1}{30} \cdot T - 1 = -0{,}3$
$T = 21$
Bei einer Temperatur von 21 °C beträgt die lokale Änderungsrate der Trocknungszeit –0,3 h/°C.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion *g*.
c2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
c3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Temperatur.

Handcreme*

Ein Unternehmen produziert verschiedene Handcremen.

a) Von der Nachfrage nach Handcremen der Marke *Hand Aktiv* ist bekannt:

Bei einem Preis von 4,2 GE/ME werden 500 ME nachgefragt.
Wird der Preis auf 3,2 GE/ME gesenkt, so verdoppelt sich die nachgefragte Menge.

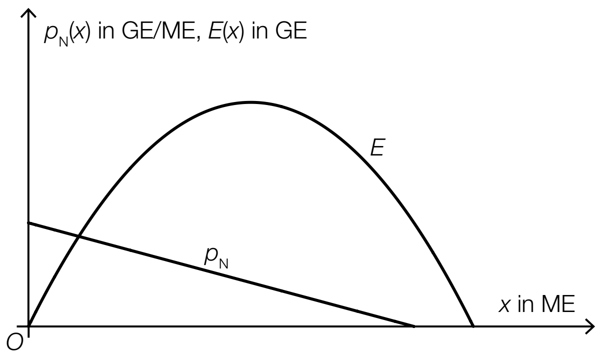
Der Zusammenhang zwischen der nachgefragten Menge und dem Preis soll durch die lineare Preisfunktion der Nachfrage p_N beschrieben werden.

x ... nachgefragte Menge in ME
$p_N(x)$ ... Preis bei der nachgefragten Menge x in GE/ME

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion p_N auf. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Sättigungsmenge. *[0/1 P.]*

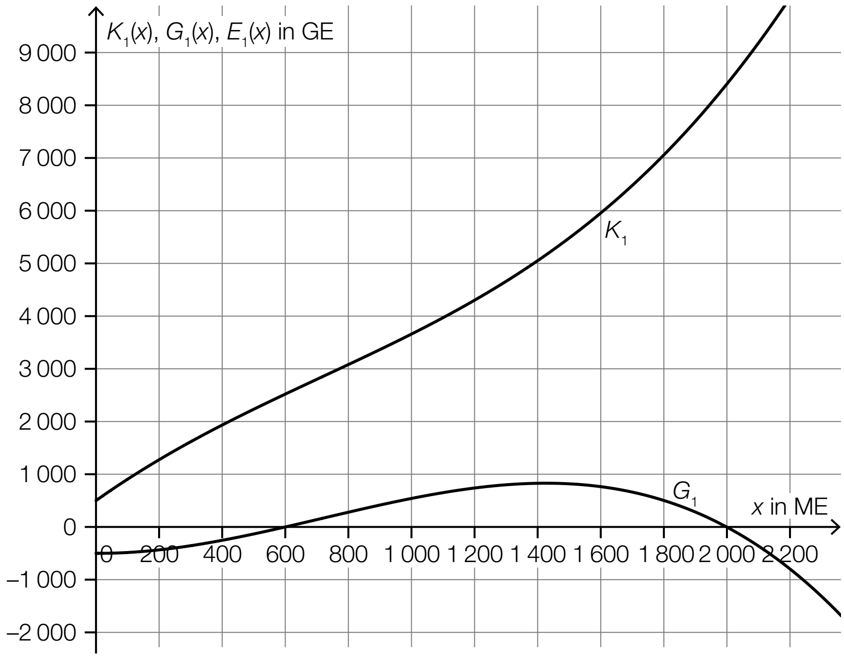
In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p_N und der Graph einer Funktion E dargestellt.



3) Begründen Sie, warum E <u>nicht</u> die zu p_N passende Erlösfunktion sein kann. *[0/1 P.]*

b) Die Handcreme *Kamille Classic* wird zu einem fixen Preis verkauft.

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Kostenfunktion K_1 und der Gewinnfunktion G_1 dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen Erlösfunktion E_1 ein. *[0/1 P.]*

c) Für die Grenzkostenfunktion K_2' bei der Produktion der Handcreme *Handrepair* gilt:

$K_2'(x) = 0{,}0003 \cdot x^2 + b \cdot x + 40$

x ... Produktionsmenge in ME
$K_2'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in GE/ME

Die Fixkosten betragen 500 GE.

1) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung der zugehörigen Kostenfunktion K_2 die fehlenden Zahlen ein.

$K_2(x) = \boxed{} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2 + \boxed{} \cdot x + \boxed{}$ *[0/1 P.]*

Bei der Produktion von 100 ME betragen die Gesamtkosten 3 600 GE.

2) Berechnen Sie b. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $p_N(x) = k \cdot x + d$
$p_N(500) = 4{,}2$
$p_N(1\,000) = 3{,}2$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$k = -0{,}002$
$d = 5{,}2$

$p_N(x) = -0{,}002 \cdot x + 5{,}2$

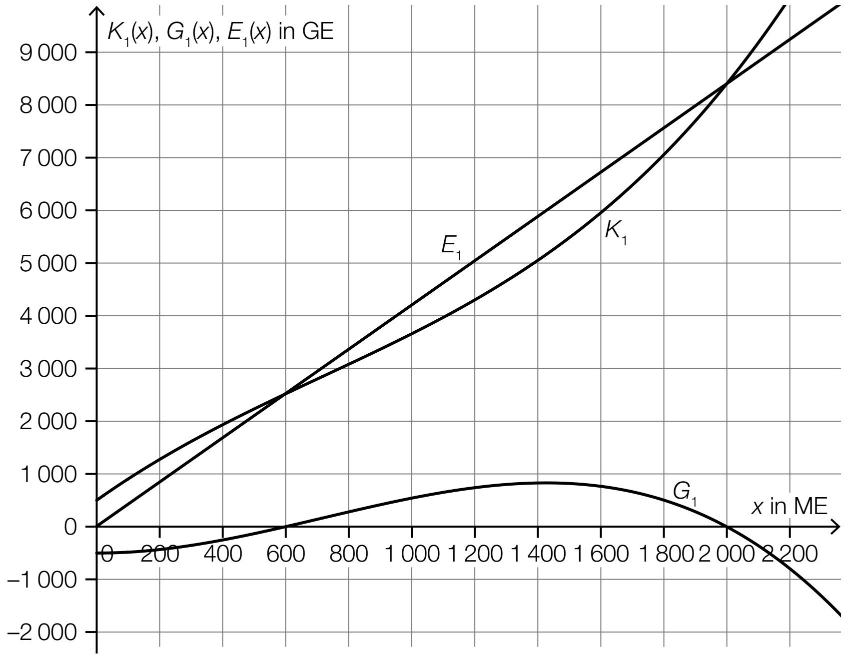
a2) $p_N(x) = 0$ *oder* $-0{,}002 \cdot x + 5{,}2 = 0$
$x = 2\,600$

Die Sättigungsmenge beträgt 2 600 ME.

a3) Die Nullstelle von p_N und die positive Nullstelle von E müssten übereinstimmen.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion p_N.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Sättigungsmenge.
a3) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1)



b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion E_1.

c1) $K_2(x) = \boxed{0{,}0001} \cdot x^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2 + \boxed{40} \cdot x + \boxed{500}$

c2) $K_2(100) = 3600$ *oder* $0{,}0001 \cdot 100^3 + \frac{1}{2} \cdot b \cdot 100^2 + 40 \cdot 100 + 500 = 3600$
$b = -0{,}2$

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von b.

Neuwagen*

a) Lorena möchte einen Neuwagen um € 20.000 kaufen. Sie hat dafür auf einem Sparbuch einen Betrag von € 18.500 angespart. Der Zinssatz beträgt 2,1 % p. a.

1) Berechnen Sie, wie lange dieser Betrag auf dem Sparbuch veranlagt werden müsste, um einen Wert von € 20.000 zu erreichen. *[0/1 P.]*

Bei einer anderen Veranlagung werden Lorena die Jahreszinssätze i und j angeboten. Dabei gilt:

$$18\,500 \cdot (1+i)^n \cdot (1+j)^{m-n} = 20\,000 \quad \text{mit} \quad m \geq n > 0$$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von m im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

b) Mario hat vor 6 Jahren ein Konto eröffnet, um für einen Neuwagen zu sparen. Er zahlte 4 Jahre lang nachschüssige Quartalsraten auf dieses Konto ein. Die restlichen 2 Jahre tätigte er keine Einzahlungen mehr.

R ... Höhe der nachschüssigen Quartalsraten
i_4 ... Quartalszinssatz
q_4 ... vierteljährlicher Aufzinsungsfaktor

1) Tragen Sie die zwei fehlenden Hochzahlen in der nachstehenden Formel zur Berechnung des heutigen Kontostands K ein.

$$K = R \cdot \frac{q_4^{\boxed{}} - 1}{q_4 - 1} \cdot q_4^{\boxed{}}$$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie R für $K = € 6.916,22$ und $i_4 = 0,5\ \%$. *[0/1 P.]*

c) Helena erhält von einem Autohändler ein Zahlungsangebot für einen Neuwagen mit einem Kaufpreis von € 20.990. Dieses Zahlungsangebot kann durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden.

$$20\,990 \cdot q_{12}^{36} = 5\,200 \cdot q_{12}^{36} + 220 \cdot \frac{q_{12}^{36} - 1}{q_{12} - 1} + 9\,870$$

q_{12} ... monatlicher Aufzinsungsfaktor

1) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die Höhe der Zahlung nach 1 Monat und die Höhe der Zahlung nach 36 Monaten ein. *[0/1 P.]*

Zeit in Monaten	Höhe der Zahlung in €
0	5 200
1	
...	...
36	

Helena will auch noch andere Zahlungsangebote des Autohändlers vergleichen. Dabei muss sie den gegebenen positiven Quartalszinssatz i_4 in den äquivalenten Monatszinssatz i_{12} umrechnen.

2) Kreuzen Sie die richtige Umrechnung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$i_{12} = \sqrt[4]{1 + i_4} - 1$	☐
$i_{12} = (1 + i_4)^{\frac{1}{3}} - 1$	☐
$i_{12} = (1 + i_4)^4 - 1$	☐
$i_{12} = \sqrt[3]{1 + i_4}$	☐
$i_{12} = \frac{i_4}{3}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $18\,500 \cdot 1{,}021^t = 20\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 3{,}7...$

Der Betrag müsste rund 4 Jahre lang auf dem Sparbuch veranlagt werden.

a2) m ist die gesamte Laufzeit der Veranlagung in Jahren.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung von m im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

b1) $K = R \cdot \frac{q_4^{\boxed{16}} - 1}{q_4 - 1} \cdot q_4^{\boxed{8}}$

b2) $R \cdot \frac{1{,}005^{16} - 1}{0{,}005} \cdot 1{,}005^8 = 6\,916{,}22$

$R = € \ 400{,}00...$

b1) Ein Punkt für das Eintragen der zwei richtigen Hochzahlen.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von R.

c1)

Zeit in Monaten	Höhe der Zahlung in €
0	5 200
1	220
...	...
36	10 090

c2)

$i_{12} = (1 + i_4)^{\frac{1}{3}} - 1$	☒

c1) Ein Punkt für das Eintragen der zwei richtigen Zahlen.
c2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.