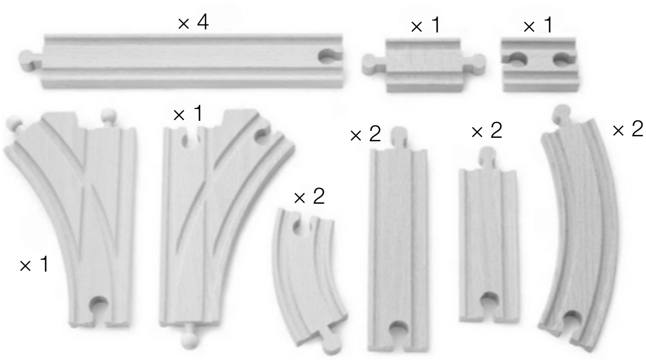
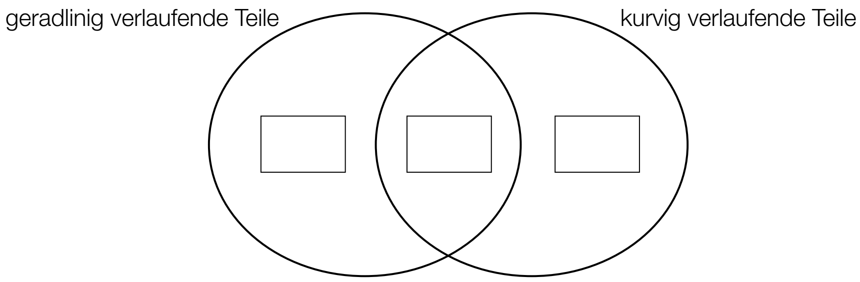
Holzzug

Holzzüge sind nach wie vor bei Kindern sehr beliebt.

a) In einer bestimmten Zubehörpackung für einen Holzzug sind folgende 16 Teile enthalten:

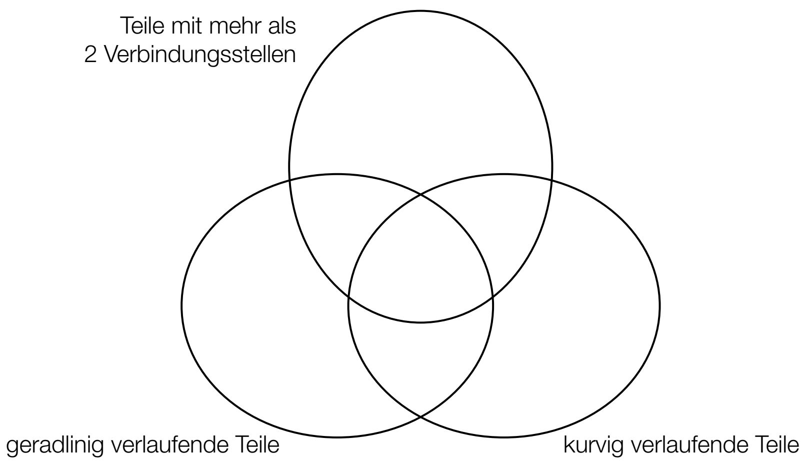


1) Tragen Sie im nachstehenden Venn-Diagramm die jeweiligen Anzahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

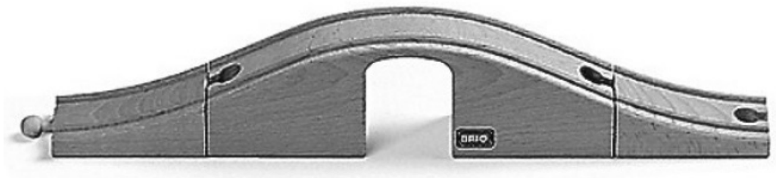


2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Teile dieser Zubehörpackung nur geradlinig verlaufen. *[0/1 P.]*

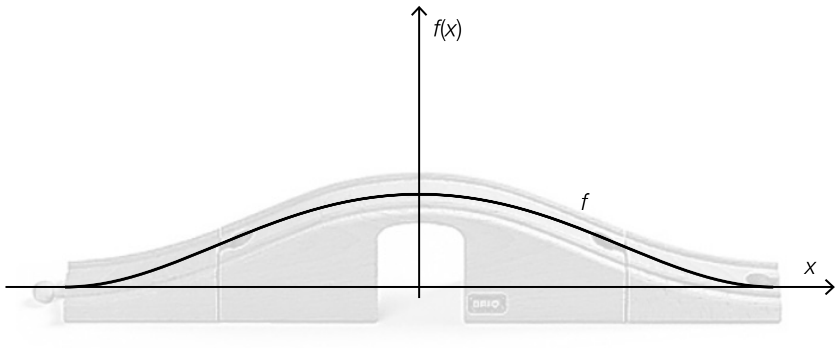
3) Markieren Sie im nachstehenden Venn-Diagramm alle Bereiche, in denen Teile dieser Zubehörpackung enthalten sind. *[0/1 P.]*



b) In der nachstehenden Abbildung ist eine Brücke für einen Holzzug dargestellt.



Der Verlauf der oberen Begrenzungslinie soll durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kreuzen Sie denjenigen Funktionstyp an, der auf f zutreffen kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

quadratische Funktion	☐
Polynomfunktion 3. Grades	☐
Polynomfunktion 4. Grades	☐
lineare Funktion	☐
Logarithmusfunktion	☐

2) Geben Sie die Anzahl der Stellen von f an, für die sowohl $f''(x) = 0$ als auch $f'(x) \neq 0$ gilt.

Anzahl der Stellen: ____________________ *[0/1 P.]*

c) Der Holzzug überwindet auf einem ansteigenden Teil mit einer horizontalen Länge von 216 mm einen Höhenunterschied von 54 mm.

1) Ermitteln Sie die mittlere Steigung entlang dieses ansteigenden Teiles in Prozent. *[0/1 P.]*

d) Ein bestimmter Hersteller bietet geradlinig verlaufende Teile nur in folgenden Längen an:

54 mm, 72 mm, 108 mm, 144 mm, 216 mm

Diese Längen (in mm) sind Glieder der arithmetischen Folge (a_n).

$a_1 = 54$ und $a_{n+1} = a_n + 18$

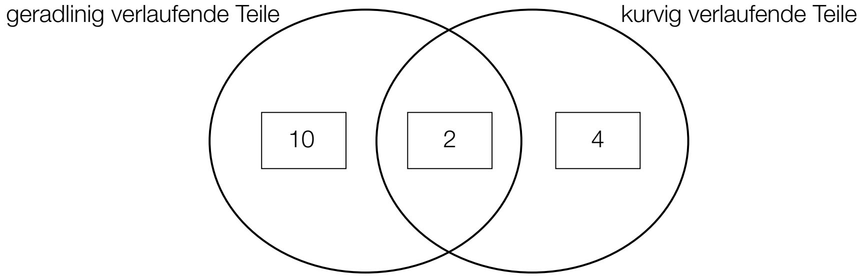
1) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz der Folge (a_n). *[0/1 P.]*

2) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle die fehlenden Werte von n ein. *[0/1 P.]*

n	1				
a_n	54	72	108	144	216

Möglicher Lösungsweg

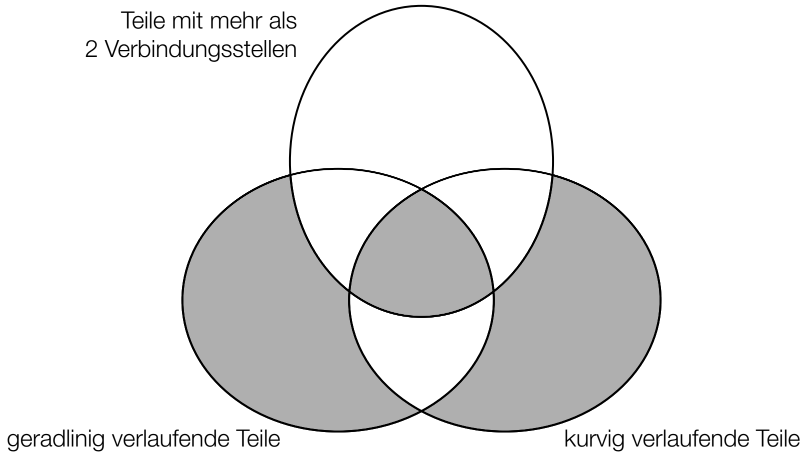
a1)



a2) $\frac{10}{16} = 0{,}625 = 62{,}5\ \%$

62,5 % der Teile dieser Zubehörpackung verlaufen nur geradlinig.

a3)



a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Anzahlen.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
a3) Ein Punkt für das Markieren der richtigen Bereiche.

b1)

Polynomfunktion 4. Grades	☒

b2) Anzahl der Stellen: 2

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b2) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Anzahl.

c1) $\frac{54}{216} = 0{,}25 = 25\ \%$
Die mittlere Steigung beträgt 25 %.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der mittleren Steigung in Prozent.

d1) $a_n = 54 + (n - 1) \cdot 18$ *oder* $a_n = 36 + 18 \cdot n$

d2)

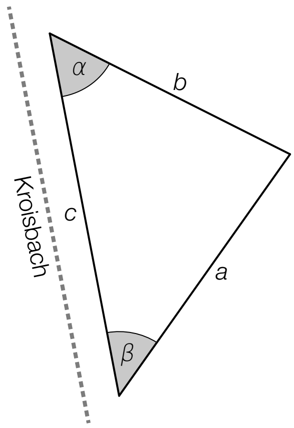
n	1	**2**	**4**	**6**	**10**
a_n	54	72	108	144	216

d1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des expliziten Bildungsgesetzes.
d2) Ein Punkt für das Eintragen der 4 richtigen Werte.

Der Grazbach

Der Kroisbach und der Leonhardbach sind Bäche in Graz, die nach ihrem Zusammenfluss den Grazbach bilden.

a) Vor dem Zusammenfluss zum Grazbach fließt der Kroisbach unter einer Straße. Diese Straße begrenzt zusammen mit zwei anderen Straßen einen dreieckigen Platz mit den Seitenlängen *a*, *b* und *c*. (Siehe nachstehende Abbildung – Ansicht von oben.)



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf. Verwenden Sie dabei *a*, *b* und *c*.

α = ____ *[0/1 P.]*

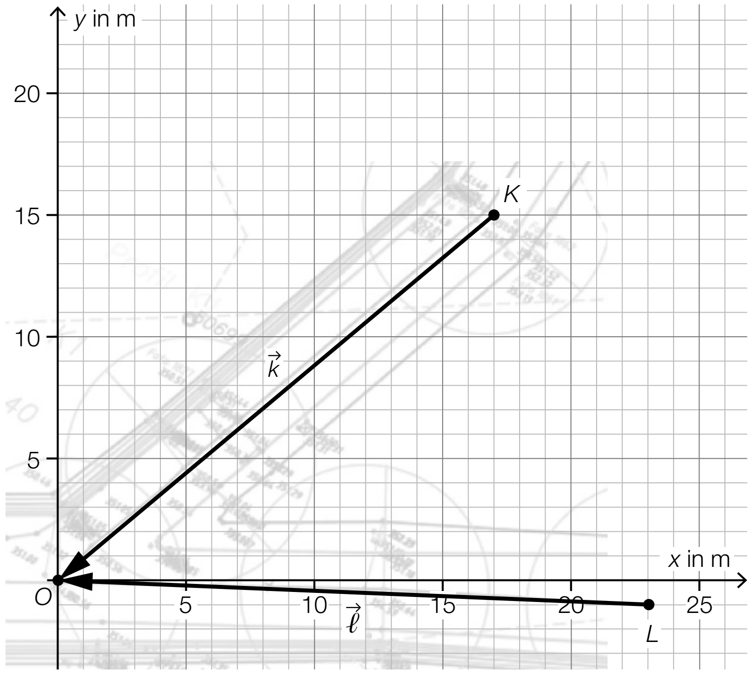
Die folgenden Abmessungen dieses dreieckigen Platzes sind bekannt:
$c = 54$ m, $b = 39{,}6$ m, $\alpha = 51{,}8°$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{54 \cdot 39{,}6 \cdot \sin(51{,}8°)}{2} \approx 840$$ *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung markierten Winkel β. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Bereich des Zusammenflusses in einem Vermessungsplan modellhaft dargestellt. Im Koordinatenursprung O fließen die beiden Bäche zusammen.



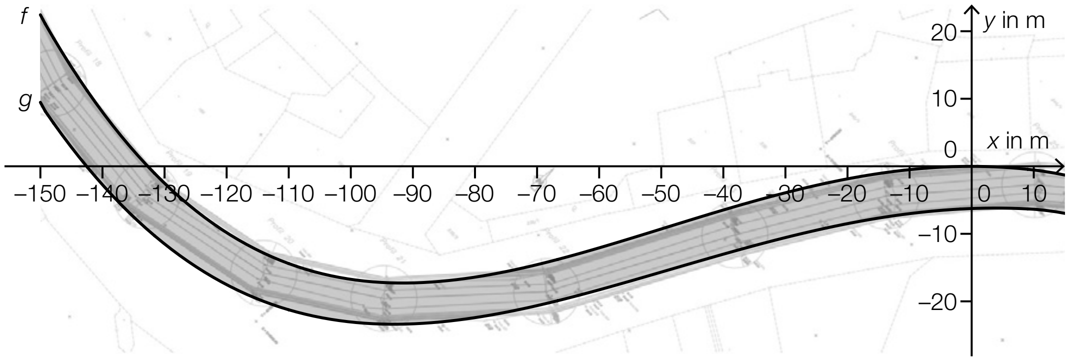
Der Kroisbach fließt vom Punkt P zum Punkt K.

Es gilt: $\overrightarrow{PK} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Punkt P ein. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie denjenigen spitzen Winkel, den die Vektoren $\vec{\ell}$ und $\vec{k}$ miteinander einschließen. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist ein Abschnitt des Kanals des Grazbachs in einem Vermessungsplan modellhaft dargestellt.



Ein Vermesser modelliert die Begrenzungslinien des Kanals im Intervall [–150; 15] mit den Graphen der Funktionen f und g.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche auf.

$A =$ ________________________________ *[0/1 P.]*

Für die Polynomfunktion 4. Grades f gilt: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2$

Der Graph von f hat den Tiefpunkt $T = (-92{,}2 \mid -17{,}6)$ und schneidet die x-Achse an der Stelle $x = -133{,}5$.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.
[0/1/2 P.]

Die Funktion g ist ebenfalls eine Polynomfunktion 4. Grades.

3) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf die Funktion g im Intervall [–150; 15] zutrifft.
[1 aus 5] *[0/1 P.]*

g hat genau 2 Nullstellen.	☐
g ändert genau 1-mal das Monotonieverhalten.	☐
g hat nur negative Funktionswerte.	☐
g hat genau 1 lokale Extremstelle.	☐
g ändert genau 1-mal das Krümmungsverhalten.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right)$

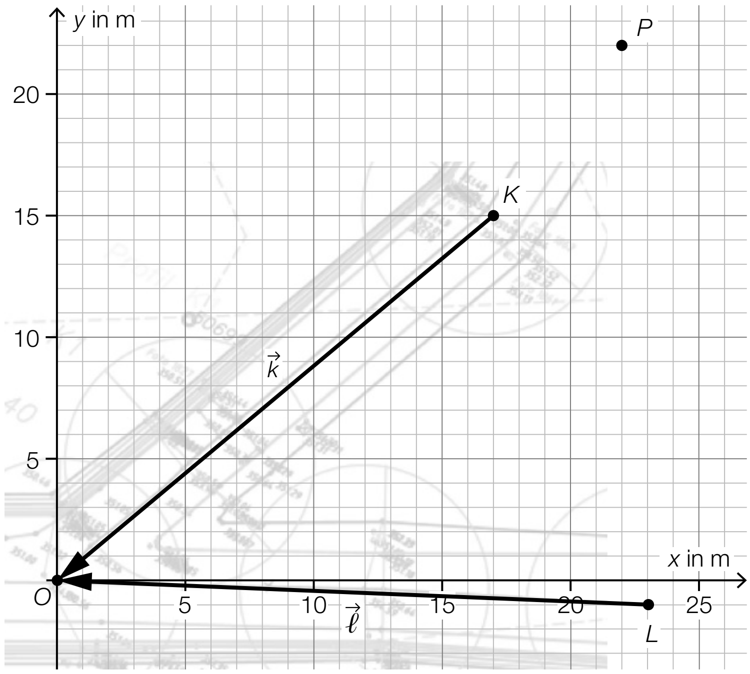
a2) Der Flächeninhalt des dreieckigen Platzes beträgt rund 840 m².

a3) $a = \sqrt{54^2 + 39{,}6^2 - 2 \cdot 54 \cdot 39{,}6 \cdot \cos(51{,}8°)} = 42{,}8...$

$\beta = \arcsin\left(\frac{39{,}6 \cdot \sin(51{,}8°)}{42{,}8...}\right) = 46{,}5...°$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren des Ergebnisses unter Angabe der zugehörigen Einheit.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels β.

b1)



b2) $\vec{k} = \begin{pmatrix} -17 \\ -15 \end{pmatrix}$

$\vec{\ell} = \begin{pmatrix} -23 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\arccos\left(\frac{\vec{\ell} \cdot \vec{k}}{|\vec{\ell}| \cdot |\vec{k}|}\right) = 43{,}9...°$

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Punktes P.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des spitzen Winkels.

c1) $A = \int_{-150}^{15} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

c2) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x$

I: $f(-92{,}2) = -17{,}6$
II: $f(-133{,}5) = 0$
III: $f'(-92{,}2) = 0$

oder:

I: $a \cdot (-92{,}2)^4 + b \cdot (-92{,}2)^3 + c \cdot (-92{,}2)^2 = -17{,}6$
II: $a \cdot (-133{,}5)^4 + b \cdot (-133{,}5)^3 + c \cdot (-133{,}5)^2 = 0$
III: $4 \cdot a \cdot (-92{,}2)^3 + 3 \cdot b \cdot (-92{,}2)^2 + 2 \cdot c \cdot (-92{,}2) = 0$

c3)

g ändert genau 1-mal das Krümmungsverhalten.	☒

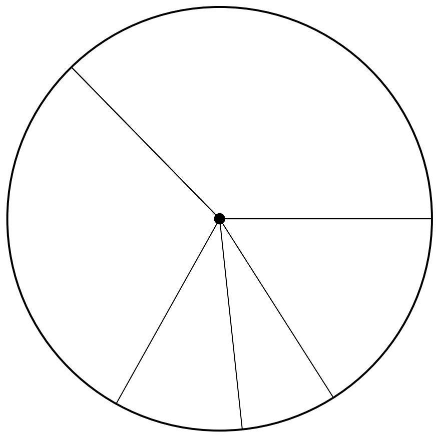
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung.
c3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Erneuerbare Energie in Österreich

a) Im Jahr 2015 teilte sich die Energieproduktion aus erneuerbaren Energieträgern in Österreich in folgende 5 Bereiche auf:
Wasserkraft, Holzbrennstoffe, Fernwärme, Biokraftstoffe und sonstige Energieträger.

Der Anteil der Wasserkraft an der gesamten Energieproduktion betrug in diesem Jahr 37,3 %.

1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Kreisdiagramm denjenigen Sektor, der der Energieproduktion aus Wasserkraft entspricht. *[0/1 P.]*



b) In der nachstehenden Tabelle sind die Werte der Energieproduktion durch Photovoltaik und Windkraft in Österreich in Terajoule (TJ) für die Jahre 2008 bis 2015 angegeben.

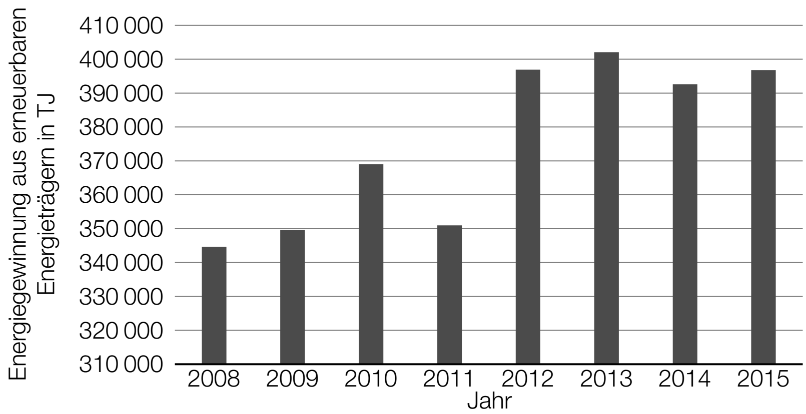
Jahr	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Energieproduktion durch Photovoltaik und Windkraft in TJ	7349	7211	7750	7597	10078	13605	16672	20799

Die Energieproduktion soll in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Jahr 2008. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist die Entwicklung der Energiegewinnung aus allen erneuerbaren Energieträgern in Österreich für den Zeitraum von 2008 bis 2015 dargestellt.



Lukas betrachtet diese Abbildung und behauptet: „Im Jahr 2013 wurde in Österreich rund doppelt so viel Energie aus erneuerbaren Energieträgern gewonnen wie im Jahr 2011. Das erkenne ich daran, dass die Säule für das Jahr 2013 rund doppelt so hoch wie jene für das Jahr 2011 ist."

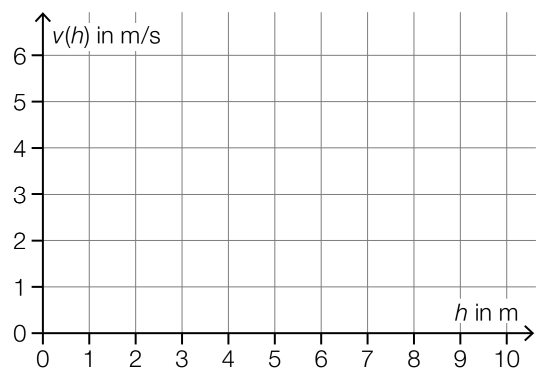
1) Erklären Sie, warum diese Argumentation falsch ist. *[0/1 P.]*

d) Die Leistung von Windkraftwerken ist unter anderem von der Windgeschwindigkeit abhängig. Die Windgeschwindigkeit kann in Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden für einen bestimmten Standort näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden.

$v(h) = 2{,}5 \cdot \ln(h)$ mit $h \geq 1$

h ... Höhe über dem Erdboden in m
$v(h)$ ... Windgeschwindigkeit in der Höhe h in m/s

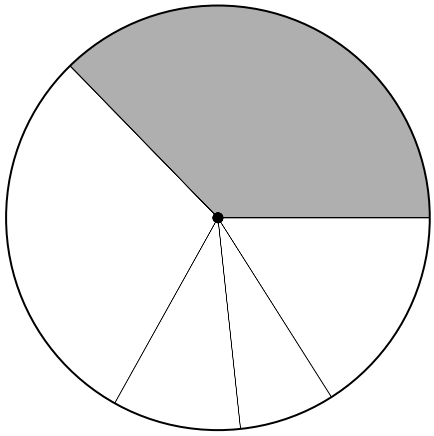
1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion v ein. *[0/1 P.]*



2) Berechnen Sie diejenige Höhe, in der die Windgeschwindigkeit 8 m/s beträgt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a1) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Sektors.

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 1\,922{,}6 \cdot t + 4\,653{,}4$ *(Parameter gerundet)*

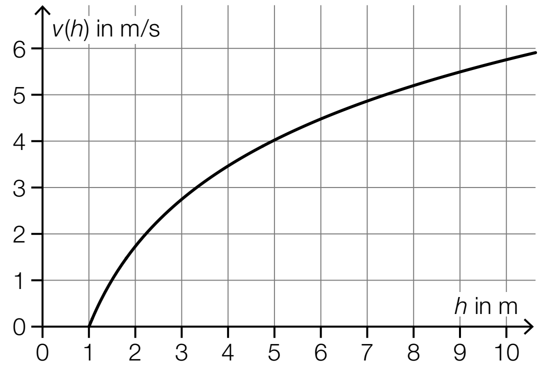
b2) Gemäß diesem Modell steigt die Energieproduktion durch Photovoltaik und Windkraft um rund 1 923 TJ pro Jahr.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion *f*.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

c1) Die Argumentation ist falsch, weil der abgebildete Wertebereich nicht bei 0, sondern bei 310 000 beginnt.

c1) Ein Punkt für das richtige Erklären.

d1)



d2) $v(h) = 8$ *oder* $2{,}5 \cdot \ln(h) = 8$
$h = 24{,}53...$

In einer Höhe von rund 24,5 m beträgt die Windgeschwindigkeit 8 m/s.

d1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen von v.
d2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe.

Regentage in Gmunden

Aufgabennummer: B_253

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

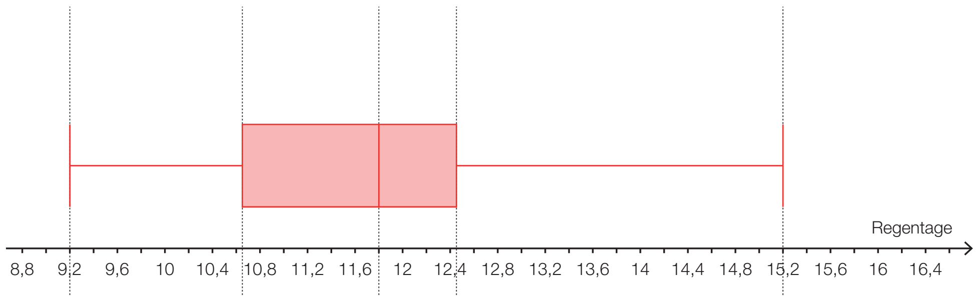
Die angeführte Tabelle zeigt die durchschnittliche Anzahl der Regentage in Gmunden (Oberösterreich) für die Monate Juni bis September.

Monat	durchschnittliche Anzahl der Regentage
Juni	15,2
Juli	13,8
August	12,3
September	11,0

a) Eine Familie macht im Juli Sommerurlaub in Gmunden und bleibt 5 Tage.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass während ihrer Urlaubstage nicht mehr als ein Regentag vorkommt. Vorausgesetzt wird dabei eine annähernde Unabhängigkeit der Regentage.

b) In einem Hotel kostet eine bestimmte Zimmerkategorie € 75 pro Übernachtung. Der Hotelier hat für den Monat August nun folgende Idee:
Hotelgäste sollen für jeden Regentag nur mehr die Hälfte bezahlen. Damit der durchschnittliche Zimmerpreis von € 75 erhalten bleibt, erhöht der Hotelier den offiziellen Zimmerpreis.
– Berechnen Sie, wie hoch er den neuen Zimmerpreis ansetzen muss.

c) Die untenstehende Grafik zeigt einen Boxplot über die durchschnittliche Anzahl von Regentagen pro Monat während eines Jahres in Gmunden.



– Lesen Sie aus dem Boxplot folgende Kenngrößen ab: Spannweite, Median, unteres Quartil, oberes Quartil.
– Interpretieren Sie die Lage des Medians in Bezug auf die Verteilung der Daten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Anzahl der Regentage ist 0 oder 1.
$P(0 \text{ oder } 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.
Die Wahrscheinlichkeiten können mit der Formel für die Binomialverteilung ausgerechnet werden.
Wahrscheinlichkeit für einen Regentag: $p_R = \frac{13{,}8}{31} = 0{,}445$
$P(X = 0) = P(\text{„}\textit{nur regenfreie Tage}\text{“}) = (1 - 0{,}445)^5 = 0{,}053$
$P(X = 1) = 5 \cdot 0{,}445 \cdot (1 - 0{,}445)^4 = 0{,}211$
$P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}264$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,264 (bzw. 26,4 %) wird die Familie nicht mehr als einen Regentag in ihrem Urlaub haben.
(Eine Lösung auf der Basis 1 Monat = 30 Tage kann auch akzeptiert werden.)

b) Formel für den Erwartungswert: $E(X) = \sum x_i \cdot p_i$
A … Preis des Angebots
Wahrscheinlichkeit für einen Regentag im August: $p_R = \frac{12{,}3}{31} = 0{,}397$
$75 = 0{,}397 \cdot A \cdot 0{,}5 + (1 - 0{,}397) \cdot A$
$75 = 0{,}8015 \cdot A$
$A = 93{,}56$
Der Hotelier müsste einen Preis von € 93,56 pro Übernachtung veranschlagen, um mit einem durchschnittlichen Preis von € 75 pro Übernachtung auszusteigen.

c) Die Spannweite liegt zwischen 9,2 und 15,2 Regentagen, sie beträgt also 6 Regentage. Der Median liegt bei 11,8 Regentagen, das untere Quartil etwa bei 10,6 und das obere Quartil bei 12,4 Regentagen.
Der Median liegt nicht in der Mitte des Boxplots, sondern näher am linken Rand. Die Verteilung der Daten ist daher nicht symmetrisch. Die Daten rechts vom Median sind breiter gestreut.
(Für die Kennzahlen können aufgrund der Ablesegenauigkeit auch ähnliche Werte angegeben werden.)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Tourismus

Quelle: Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik (ZAMG)

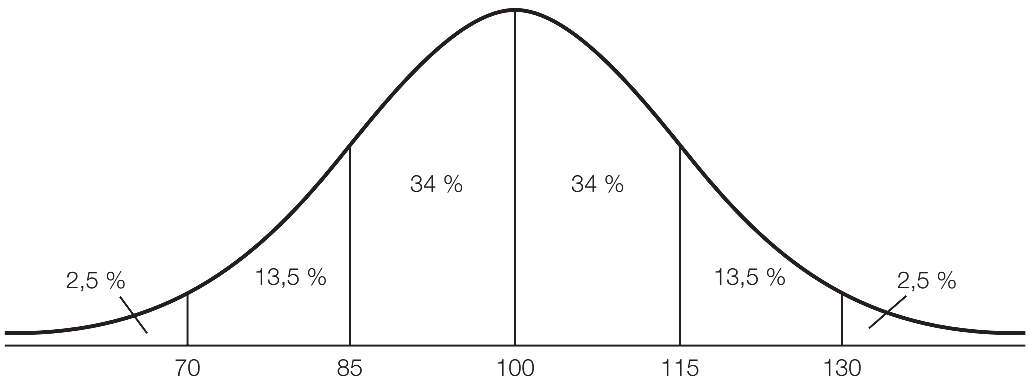
Intelligenzquotient

Aufgabennummer: B_236

Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine Kenngröße zur Bewertung des allgemeinen intellektuellen Leistungsvermögens (Intelligenz) eines Menschen. Er vergleicht die Intelligenz eines Menschen mit der mittleren Intelligenz der Gesamtbevölkerung im selben Zeitraum und im vergleichbaren Alter.

a) Interpretieren Sie den IQ als normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mu = 100$:
– Lesen Sie den ungefähren Wert der Standardabweichung aus der unten stehenden Grafik ab.
– Lesen Sie die IQ-Untergrenze der intelligentesten 16 % ab.
– Schätzen Sie aus der Grafik ab, wie viel Prozent der Personen einen höheren IQ als 90 haben.



b) Bei einem IQ-Test erreichte eine Gruppe von 5 Schülerinnen und Schülern Werte von 90, 95, 100, 105 und 110 IQ-Punkten, eine andere Gruppe 85, 90, 95, 105 und 125 IQ-Punkte.

– Berechnen Sie die arithmetischen Mittel sowie die Streuungsmaße *Spannweite* und *Standardabweichung* (auf eine Dezimalstelle gerundet) der beiden Stichproben.
– Interpretieren Sie die Unterschiede.

c) Eine Gruppe von 10 Schülerinnen und Schülern machte einen Intelligenztest. Dieselben Schüler/innen füllten einen Fragebogen aus, der Aufschluss über das Selbstbewusstsein gibt (je höher die Punktezahl, desto größer das Selbstbewusstsein). Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

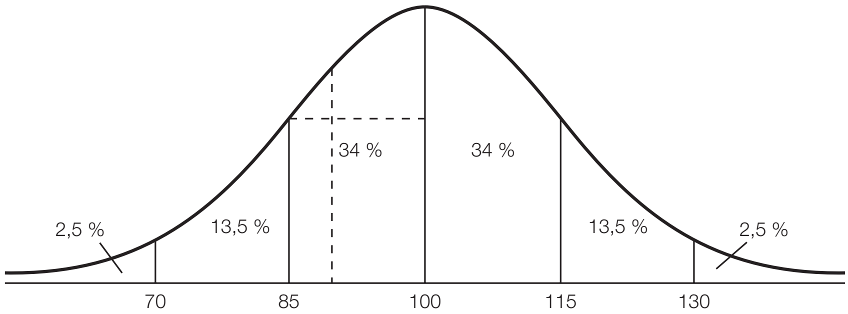
IQ-Punkte x	101	96	120	105	103	90	107	98	110	103
Selbstbewusstsein y	3	1	4	3	4	2	5	2	4	2

– Ermitteln Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
– Stellen Sie die Punktwolke und die Regressionsgerade grafisch dar.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Selbstbewusstsein eines Schülers oder einer Schülerin mit einem IQ von 110.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Standardabweichung $\sigma \approx 15$ IQ-Punkte
Die IQ-Untergrenze der intelligentesten 16 % liegt bei 115 IQ-Punkten.



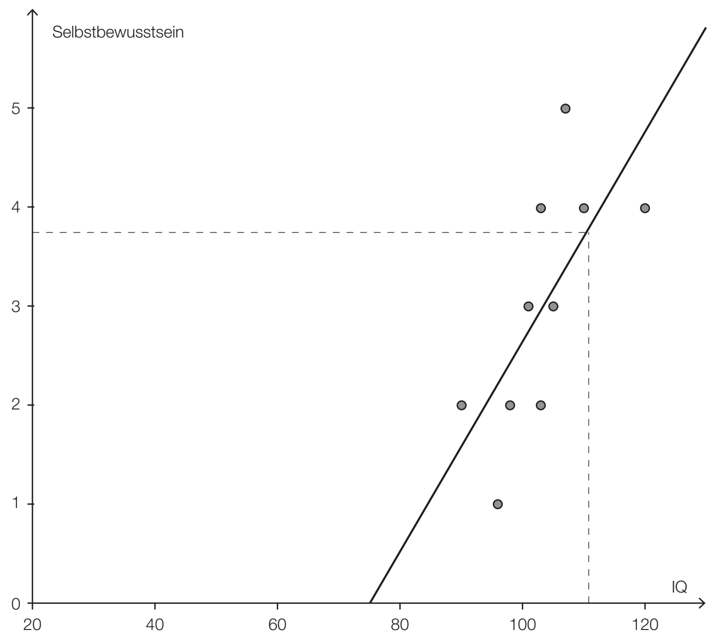
Abschätzen z. B. durch Aufteilen der Fläche unterhalb der Kurve:
Ca. $\frac{1}{4}$ der Fläche zwischen den Grenzen 85 und 100 liegt links von der strichlierten Linie.
$\frac{3}{4}$ von 34 % ≈ 25 %
Etwa 75 % haben einen höheren IQ als 90.

b)

	Gruppe 1	Gruppe 2
arithmetisches Mittel in IQ-Punkten	100	100
Spannweite in IQ-Punkten	20	40
Standardabweichung in IQ-Punkten	7,905… ≈ 7,9	15,811… ≈ 15,8

Das arithmetische Mittel ist bei beiden Gruppen gleich.
Die Spannweite und die Standardabweichung sind bei Gruppe 2 doppelt so groß wie bei Gruppe 1.
Die Testergebnisse der Gruppe 2 (2. Stichprobe) sind um das arithmetische Mittel breiter gestreut. Sie liegen weniger dicht beisammen.

c) Gleichung der Regressionsgeraden:
$-640x + 6\,041y = -47$
bzw. $y = 0{,}106x - 7{,}944$ (auf 3 Dezimalstellen gerundet)
(mit GeoGebra ermittelt – kann bei anderer Technologie geringfügig abweichen)



Bei Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners reicht eine Handskizze.

Ein Schüler oder eine Schülerin mit einem IQ von 110 erreicht auf der Skala für das Selbstbewusstsein einen Wert von etwa 3,8.

Ableseungenauigkeiten (vor allem bei Handzeichnung) sind zu tolerieren.
Auch eine Berechnung mithilfe der Gleichung ist möglich.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 2
c) leicht	c) 3

Thema: Psychologie

Quelle: http://www.dezimmer.net/HTML/1974iq5-korrelation.htm

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Großtrappen

Aufgabennummer: B_131

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein LIFE-Projekt in Ostösterreich widmet sich dem Schutz der Großtrappen, einer gefährdeten Vogelart. Zu Beginn des Beobachtungszeitraums wurden in Niederösterreich und im Burgenland 140 Tiere gezählt. 5 Jahre später waren es bereits 244.

a) – Argumentieren Sie, warum ein lineares bzw. ein unbegrenztes exponentielles Wachstumsmodell die Entwicklung der Tierpopulation zwar beschreibt, dies aber langfristig gesehen nicht der Realität entspricht.

b) Nehmen Sie ein begrenztes exponentielles Wachstum mit einer Obergrenze von $G = 1\,000$ an. Es gilt folgende Funktion:

$$y(t) = G - c \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

t … Zeitdauer in Jahren (a)
$y(t)$ … Anzahl der Tiere nach t Jahren
c … Anzahl der Tiere, um die der Anfangsbestand bis zur Obergrenze zunehmen kann

– Berechnen Sie den Stand der Population nach 20 Jahren unter der Voraussetzung, dass die Entwicklung der Vogelpopulation diesem Modell folgt.

c) In der Realität wird das Wachstum der Großtrappen-Population besser durch die folgende logistische Funktion beschrieben:

$$y(t) = \frac{1\,000}{1 + 6{,}143 \cdot e^{-0{,}1369 \cdot t}}$$

t … Zeitdauer in Jahren (a)
$y(t)$ … Anzahl der Tiere nach t Jahren

– Stellen Sie diese Funktion grafisch dar.
– Lesen Sie aus der Grafik ungefähr ab, wann sich der Bestand seit dem Beginn der Beobachtungszeit auf 280 Tiere verdoppelt hat.
– Überprüfen Sie durch Ablesung des Zeitraums bis zur nächsten Verdopplung, ob die Zeitdauer, in der sich der jeweilige Bestand an Tieren verdoppelt, in diesem Modell konstant bleibt.

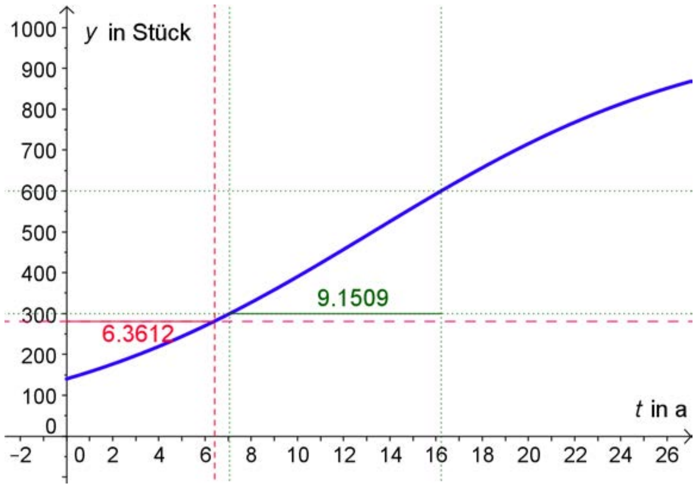
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Wachstum hängt vom Lebensraum und den darin vorhandenen Lebensbedingungen für Großtrappen ab. Langfristig gesehen wird das räumlich begrenzte Schutzgebiet zwar die Vermehrung der Tiere fördern, aber auch nach oben hin einschränken.
Daher kann die Zahl der Vögel zwar anfänglich möglicherweise nach einem linearen oder einem unbegrenzten exponentiellen Wachstum verlaufen, aber nicht unendlich steigen, wie es bei diesen beiden Wachstumsmodellen der Fall wäre.

b) $140 = 1\,000 - c \cdot e^{0} \rightarrow c = 860$
$244 = 1\,000 - c \cdot e^{5 \cdot \lambda} \rightarrow \lambda = -0{,}02577\ldots \approx -0{,}0258$
Funktionsgleichung: $y(t) = 1\,000 - 860 \cdot e^{-0{,}0258 \cdot t}$
Prognose $t = 20$ Jahre $\rightarrow$ rund 486 Tiere

c)



– Die Verdopplung vom Anfangsbestand von 140 auf 280 Tiere benötigt etwas mehr als 6 Jahre.
– Die Verdopplung von 300 auf 600 Tiere benötigt nach diesem Modell einen Zeitraum von etwas mehr als 9 Jahren.
Bei diesem Modell ist die Dauer, in der sich ein Bestand verdoppelt, nicht konstant.

Ableseungenauigkeiten werden toleriert, insbesondere bei Grafikrechnern und Handskizzen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 4
c) 3

Thema: Biologie

Quellen: –

Ressourcen*

Aufgabennummer: B_512

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Im Zeitraum von 1970 bis 2010 hat der jährliche globale Rohstoffverbrauch von 22 Milliarden Tonnen auf 70 Milliarden Tonnen zugenommen.[1]
Im selben Zeitraum hat sich die Weltbevölkerung auf 7 Milliarden verdoppelt.

a) 1) Berechnen Sie auf Basis dieser Angaben den durchschnittlichen jährlichen Rohstoffverbrauch pro Person im Jahr 1970.

Die zeitliche Entwicklung des globalen Rohstoffverbrauchs kann durch eine arithmetische Folge oder durch eine geometrische Folge modelliert werden.

Im Modell *A* wird das jährliche prozentuelle Wachstum bezogen auf das jeweilige Vorjahr als konstant angenommen.

2) Erstellen Sie für das Modell *A* ein explizites Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wählen Sie $n = 1$ für das Jahr 1970, d. h., $n = 41$ entspricht dem Jahr 2010.

Im Modell *B* wird das jährliche absolute Wachstum als konstant angenommen.

3) Erstellen Sie für das Modell *B* ein rekursives Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wählen Sie $n = 1$ für das Jahr 1970, d. h., $n = 41$ entspricht dem Jahr 2010.

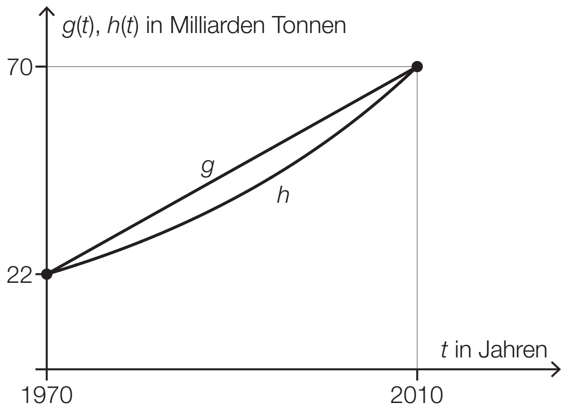
Für das Jahr 2050 wird ein jährlicher globaler Rohstoffbedarf von 180 Milliarden Tonnen angenommen.

4) Tragen Sie die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

180 Milliarden Tonnen = $1{,}8 \cdot 10^{\boxed{}}$ kg

* ehemalige Klausuraufgabe
[1] Vgl. http://derstandard.at/2000041471018/Weltweiter-Rohstoffverbrauch-seit-1970-mehr-als-verdreifacht [26.11.2020].

b) Die zeitliche Entwicklung des jährlichen globalen Rohstoffverbrauchs kann durch die streng monoton steigende lineare Funktion g oder durch die streng monoton steigende Exponentialfunktion h modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Für ______①______ von g und h gilt: ______②______.

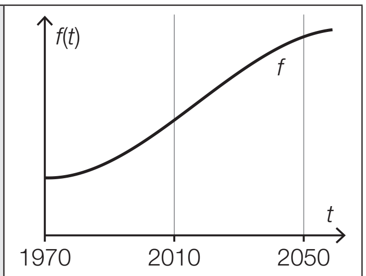
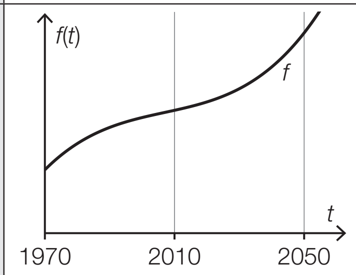
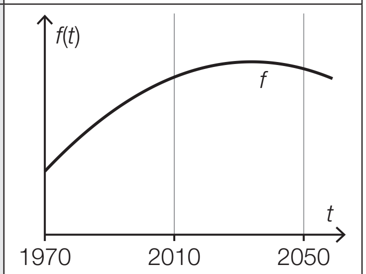
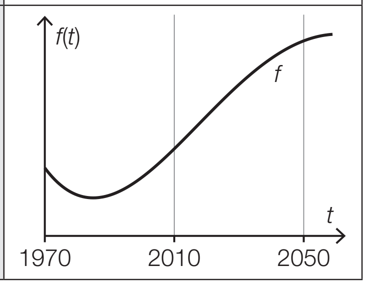
①	
genau 1 Stelle	☐
genau 2 Stellen	☐
mehr als 2 Stellen	☐

②	
$g(t) = h(t) = 0$	☐
$g'(t) = h'(t)$	☐
$g''(t) = h''(t)$	☐

c) Die zeitliche Entwicklung des jährlichen globalen Rohstoffverbrauchs kann durch verschiedene Polynomfunktionen modelliert werden.

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den entsprechenden Funktionsgraphen aus A bis D zu.

Für alle t mit $2010 < t < 2050$ gilt: $f''(t) > 0$	
Für genau ein t mit $1970 < t < 2050$ gilt: $f'(t) = 0$ und $f''(t) < 0$	

A	
B	
C	
D	

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{22 \cdot 10^9}{3{,}5 \cdot 10^9} = 6{,}28...$

Der durchschnittliche jährliche Rohstoffverbrauch pro Person betrug im Jahr 1970 rund 6,3 Tonnen.

a2) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

b_n ... jährlicher Rohstoffverbrauch im Jahr n in Milliarden Tonnen

$b_1 = 22$
$b_{41} = 70$
$q = \sqrt[40]{\frac{70}{22}} = 1{,}02935...$
$b_n = 22 \cdot 1{,}0294^{n-1}$

a3) $a_{n+1} = a_n + d$

a_n ... jährlicher Rohstoffverbrauch im Jahr n in Milliarden Tonnen

$a_1 = 22$
$a_{41} = 70$
$d = \frac{70-22}{40} = 1{,}2$
$a_{n+1} = a_n + 1{,}2$ (mit $a_1 = 22$)

Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn das Startglied $a_1 = 22$ beim rekursiven Bildungsgesetz nicht angegeben ist.

a4) 180 Milliarden Tonnen = $1{,}8 \cdot 10^{\boxed{14}}$ kg

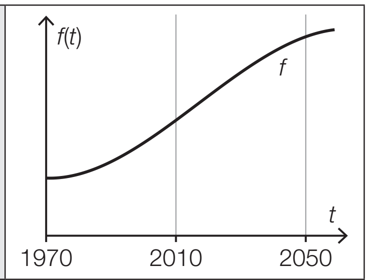
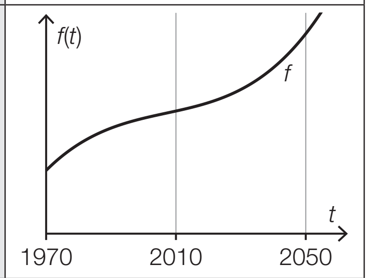
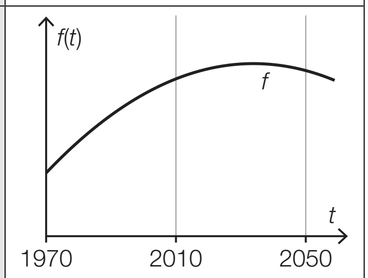
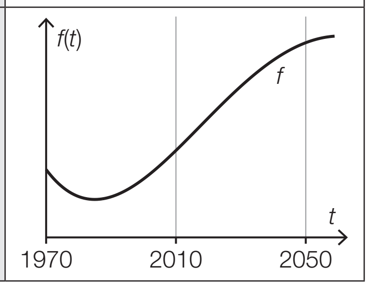
b1)

1	
genau 1 Stelle	☒

2	
$g'(t) = h'(t)$	☒

c1)

Für alle t mit $2010 < t < 2050$ gilt: $f''(t) > 0$	B
Für genau ein t mit $1970 < t < 2050$ gilt: $f'(t) = 0$ und $f''(t) < 0$	C

A	
B	
C	
D	

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des durchschnittlichen jährlichen Rohstoffverbrauchs pro Person im Jahr 1970.
a2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des expliziten Bildungsgesetzes der geometrischen Folge.
a3) Ein Punkt für das richtige Erstellen des rekursiven Bildungsgesetzes der arithmetischen Folge.
a4) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
b1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.
c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Fernsehturm

Aufgabennummer: B_250

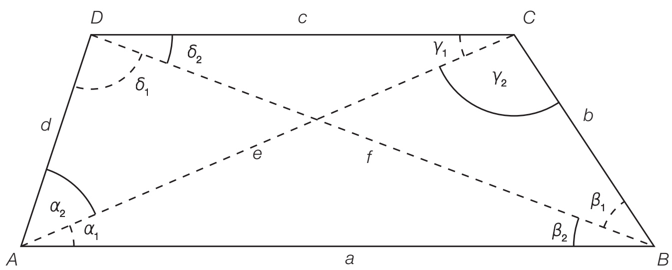
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Turm steht senkrecht auf einem horizontalen Platz.

a) Auf diesem Turm befindet sich eine senkrechte Antenne, deren Höhe gemessen werden soll. Von einem Messgerät, das sich auf dem horizontalen Platz s Meter (m) vom Turm entfernt befindet, erscheint die Antenne unter einem Sehwinkel α. Der Fußpunkt der Antenne erscheint unter einem Höhenwinkel β.

– Zeichnen Sie die angegebenen Größen in die obige Skizze ein.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Antennenhöhe, abhängig von den Größen s, α und β, auf.

b) Der Platz, auf dem der Turm steht, hat die Form eines Trapezes. Die nachstehende Grafik zeigt den Platz im Maßstab 1 : 600 und die Seitenlängen sind in cm gezeichnet.

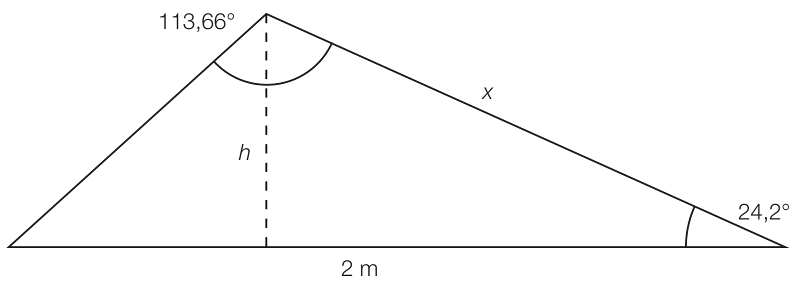


– Bestimmen Sie mithilfe der Darstellung die Länge der Seite a in Metern (m).
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge der Diagonale f bei gegebener Seitenlänge d und a und den Winkeln α_1 und α_2.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$\frac{\sin(\delta_1)}{e} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	☐
$\frac{\sin(\gamma_2)}{a} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	☐
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\beta_1)}{c}$	☐
$\frac{\sin(\gamma_1)}{d} = \frac{\sin(\delta_1)}{c}$	☐
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	☐

c) Für Konzerte wird der Platz vor dem Turm in Sektoren aufgeteilt. Die nachstehende Skizze veranschaulicht die Fläche eines bestimmten Sektors, wobei die Seitenlängen in Metern (m) angegeben sind.

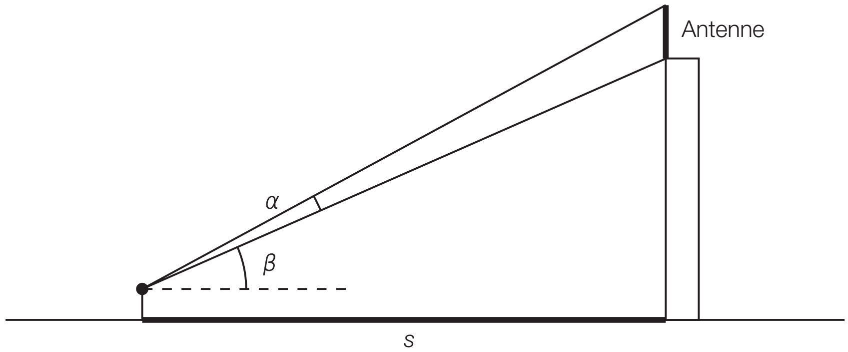


– Berechnen Sie die Seitenlänge x aus den gegebenen Größen.
– Begründen Sie mathematisch, warum die Berechnung der Länge x mit $x = \sin(24{,}2°) \cdot h$ falsch ist.
– Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



Höhe der Antenne = $\tan(\alpha + \beta) \cdot s - \tan(\beta) \cdot s$

b) a = 9 cm entspricht 54 m Messtoleranz: ± 0,4 cm

Abhängig von den Druckeinstellungen kann die Länge der Seite a auf dem Ausdruck geringfügig abweichen.

Die Länge der Diagonale f kann mit dem Cosinussatz berechnet werden:

$$f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	☒

c) $x = \frac{2}{\sin(113{,}66°)} \cdot \sin\left(180° - 113{,}66° - 24{,}2°\right) = 1{,}465\ldots$

Die Seitenlänge x beträgt rund 1,47 m.

Der Sinus von dem Winkel 24,2° entspricht dem Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse. Wenn man $x = \sin(24{,}2°) \cdot h$ umformt auf $\sin(24{,}2°) = \frac{x}{h}$, erkennt man, dass die Seiten im Verhältnis vertauscht sind.

$$A = \frac{2 \cdot 1{,}47 \cdot \sin(24{,}2°)}{2} = 0{,}600\ldots$$

Der Flächeninhalt beträgt rund 0,60 m².

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Ferienwohnungen

Im Zuge der Urlaubsplanung vergleicht Familie Hadek verschiedene Angebote für Ferienwohnungen.

a) Die 1. Woche in der Ferienwohnung *Rosenhof* kostet 1.200 Euro.
Jede weitere Woche kostet um 10 % weniger als die vorangegangene Woche.

Die Kosten der n-ten Woche können durch eine Folge beschrieben werden.

1) Geben Sie an, ob es sich dabei um eine arithmetische oder eine geometrische Folge handelt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. *[0/1 P.]*
2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese Folge. *[0/1 P.]*
3) Berechnen Sie die Kosten für die 4. Woche in dieser Ferienwohnung. *[0/1 P.]*

b) Die jeweiligen Kosten der n-ten Woche in den Ferienwohnungen *Seeblick* und *Bergschlössl* können durch Folgen beschrieben werden.

Die 1. Woche in der Ferienwohnung *Bergschlössl* kostet 1.750 Euro.
Jede weitere Woche ist um 100 Euro billiger als die jeweils vorangegangene Woche.

Die 1. Woche in der Ferienwohnung *Seeblick* kostet 1.450 Euro.
Jede weitere Woche ist um 50 Euro billiger als die jeweils vorangegangene Woche.

1) Ordnen Sie den beiden Ferienwohnungen jeweils den zutreffenden Zusammenhang aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Bergschlössl	
Seeblick	

A	(a_n) mit $a_n = a_{n+1} - 100$
B	(b_n) mit $b_{n+1} = b_{n-3} - 200$
C	(c_n) mit $c_{n+2} = c_{n+1} + 50$
D	(d_n) mit $d_{n-1} = d_{n+1} + 200$

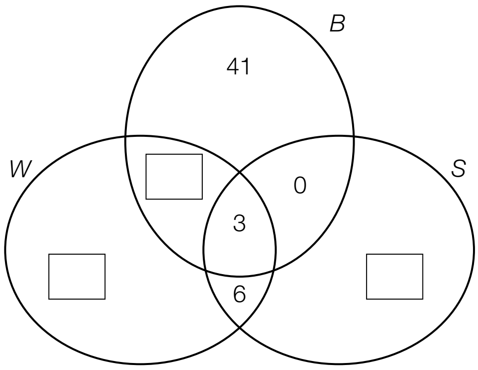
2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Kosten der n-ten Woche in der Ferienwohnung *Bergschlössl*. *[0/1 P.]*
3) Ermitteln Sie für die Ferienwohnung *Bergschlössl* diejenige Woche, die erstmals um mindestens 25 % billiger als die 1. Woche ist. *[0/1 P.]*

c) Im Ferienort Almdorf werden Ferienwohnungen mit verschiedenen Ausstattungen angeboten.

45 Ferienwohnungen verfügen über eine Waschmaschine.
62 Ferienwohnungen verfügen über einen Balkon.
20 Ferienwohnungen verfügen über eine Sauna.

Jede Ferienwohnung verfügt über mindestens eine der obigen Ausstattungen.

Im nachstehenden Venn-Diagramm sollen die Ferienwohnungen im Ferienort Almdorf nach ihren Ausstattungen eingeteilt werden.



W ... Menge der Ferienwohnungen, die über eine Waschmaschine verfügen
B ... Menge der Ferienwohnungen, die über einen Balkon verfügen
S ... Menge der Ferienwohnungen, die über eine Sauna verfügen

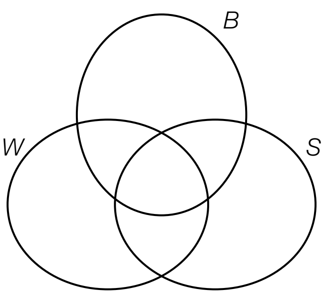
1) Tragen Sie im obigen Venn-Diagramm die fehlenden Anzahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

Familie Hadek möchte eine Ferienwohnung im Ferienort Almdorf, die über einen Balkon und eine Waschmaschine verfügt. Ob die Ferienwohnung über eine Sauna verfügt, ist Familie Hadek egal.

2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Ferienwohnungen im Ferienort Almdorf für Familie Hadek infrage kommen. *[0/1 P.]*

Im Ferienort Buchensee verfügt jede Ferienwohnung über mindestens 2 der obigen Ausstattungen.

3) Markieren Sie im nachstehenden Venn-Diagramm denjenigen Bereich, in dem die Ferienwohnungen im Ferienort Buchensee enthalten sind. *[0/1 P.]*



Möglicher Lösungsweg

a1) Es handelt sich um eine geometrische Folge, da jede weitere Woche um 10 % weniger als die vorangegangene Woche kostet.

oder:

Es handelt sich um eine geometrische Folge, da der Quotient aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist.

a2) $b_n = 1\,200 \cdot 0{,}9^{n-1}$

a3) $b_4 = 1\,200 \cdot 0{,}9^3 = 874{,}8$

Die Kosten für die 4. Woche in dieser Ferienwohnung betragen 874,80 Euro.

a1) Ein Punkt für das richtige Angeben und das richtige Begründen.
a2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des expliziten Bildungsgesetzes.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Kosten für die 4. Woche.

b1)

Bergschlössl	D
Seeblick	B

A	(a_n) mit $a_n = a_{n+1} - 100$
B	(b_n) mit $b_{n+1} = b_{n-3} - 200$
C	(c_n) mit $c_{n+2} = c_{n+1} + 50$
D	(d_n) mit $d_{n-1} = d_{n+1} + 200$

b2) $k_n = 1\,750 - (n - 1) \cdot 100$

oder:

$k_n = 1\,850 - 100 \cdot n$

b3) $1\,750 - (n - 1) \cdot 100 = 0{,}75 \cdot 1\,750$

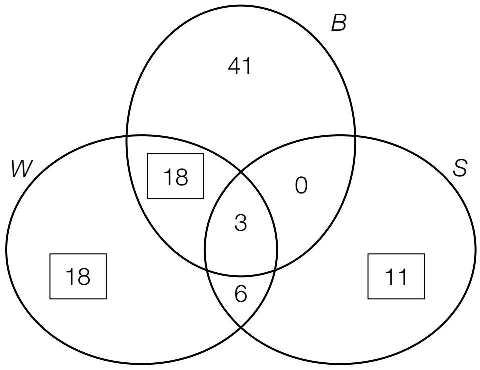
$1\,850 - 100 \cdot n = 1\,312{,}5$

$n = \frac{1\,850 - 1\,312{,}5}{100} = 5{,}375$

Die 6. Woche ist diejenige Woche, die erstmals um mindestens 25 % billiger als die 1. Woche ist.

b1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
b2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des expliziten Bildungsgesetzes.
b3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Woche.

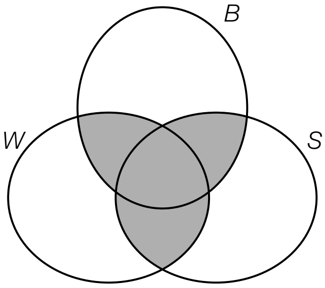
c1)



c2) $\frac{18 + 3}{45 + 11 + 41} = 0{,}2164...$

Für Familie Hadek kommen rund 21,6 % der Ferienwohnungen im Ferienort Almdorf infrage.

c3)



c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Anzahlen.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
c3) Ein Punkt für das Markieren des richtigen Bereichs.

Beleuchtungskörper

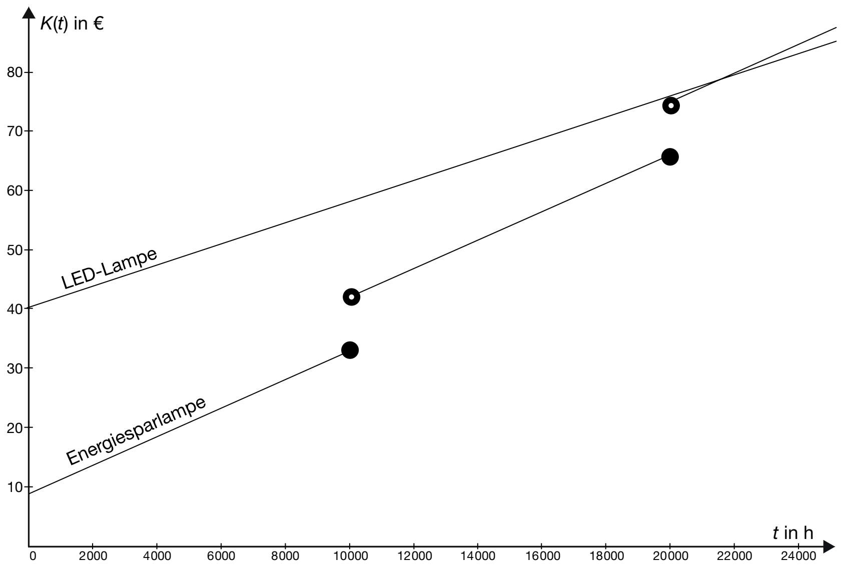
Aufgabennummer: B_226

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Aus Gründen des Klimaschutzes ist man bemüht, energiesparende Beleuchtungskörper zu verwenden. Um unterschiedliche Lichtquellen vergleichen zu können, muss man nicht nur ihre Leistung in Watt (W), sondern auch ihren abgestrahlten Lichtstrom in Lumen (lm) kennen.

a) Eine 12-Watt-Energiesparlampe und eine 9-Watt-LED-Lampe haben den gleichen Lichtstrom.
Die Graphen stellen die Kosten für diese beiden Lampen abhängig von der Betriebsdauer dar.
– Vergleichen Sie die Graphen hinsichtlich Anschaffungskosten, durchschnittlicher Lebensdauer und Betriebskosten.
– Lesen Sie aus der Grafik ab, ab welcher Betriebsdauer sich die Anschaffung einer LED-Lampe auszahlt.

$K(t)$ … Kosten in Euro (€) nach t Betriebsstunden
t … Betriebsdauer in Stunden (h)



b) Für Kindergarten-Gruppenräume schreibt die europäische Beleuchtungsnorm als Mindest-Beleuchtungsstärke 300 Lumen pro Quadratmeter (lm/m²) vor.
Ein Kindergarten mit einer auszuleuchtenden Fläche von 740 m² soll mit einer neuen Beleuchtung ausgestattet werden.
Gehen Sie bei den folgenden Berechnungen von einem Strompreis von € 0,18 pro Kilowattstunde aus und nehmen Sie an, dass in 1 Jahr 1 200 Betriebsstunden anfallen. (Hinweis: Energie = Leistung × Zeit.)

Es stehen 2 Systeme zur Wahl:

	Anschaffungspreis	angegebene Leistung	Lichtstrom
Gehäuse mit 4 Leuchtstoffröhren	€ 80,50	56 W	4 800 lm
LED-Lichtpaneel	€ 275,00	45 W	4 500 lm

– Berechnen Sie für beide Varianten die Anschaffungskosten und die Energiekosten für 1 Jahr.

Hinweis zur Aufgabe:
Geben Sie die Ergebnisse so an, dass sie klar nachvollziehbar sind und der Aufgabenstellung entsprechen.

Möglicher Lösungsweg

a) LED-Lampe:
Anschaffungskosten: ca. € 40
lange Lebensdauer – mehr als 24 000 Betriebsstunden
Betriebskosten: geringer als Energiesparlampe, weil Steigung kleiner

Energiesparlampe:
Anschaffungskosten: ca. € 10
Lebensdauer ca. 10 000 Betriebsstunden, dann muss eine neue gekauft werden (→ Sprungstelle)
Betriebskosten: größer als LED-Lampe

Bis ca. 22 000 Betriebsstunden ist die Energiesparlampe billiger, darüber lohnt sich die Anschaffung einer LED-Lampe.

Es sind auch andere Lösungen richtig, z. B.:

Anschaffungskosten: Eine LED-Lampe ist etwa 4-mal so teuer wie eine Energiesparlampe.
Lebensdauer: Eine LED-Lampe hält ca. 2,5-mal so lange wie eine Energiesparlampe.
Betriebskosten: LED: ca. € 17/10 000 h; Energiesparlampe: ca. € 22/10 000 h
Ab ca. 22 000 h zahlt sich die Anschaffung einer LED-Lampe aus.

b) Vorgabe: mindestens 300 lm/m²
bei 740 m² Fläche: 300 · 740 = 222 000 lm

Leuchtstoffröhren:
Ein Gehäuse mit 4 Leuchtstoffröhren hat 4 800 lm, daher werden 222 000 : 4 800 = 47 Stück (aufgerundet auf Ganze) gebraucht.

Anschaffungskosten:	47 · 80,50 = € 3.783,50
Leistung:	47 · 56 W = 2 632 W = 2,632 kW
Energie:	2,632 kW · 1 200 h = 3 158,4 kWh
Energiekosten:	3 158,4 · 0,18 = € 568,51

LED-Lichtpaneele:
Ein Lichtpaneel hat 4 500 lm, daher werden 222 000 : 4 500 = 50 Stück (aufgerundet auf Ganze) gebraucht.

Anschaffungskosten:	50 · 275 = € 13.750,00
Leistung:	50 · 45 W = 2 250 W = 2,25 kW
Energie:	2,25 kW · 1 200 h = 2 700 kWh
Energiekosten:	2 700 · 0,18 = € 486,00

Leuchtstoffröhren haben Anschaffungskosten von € 3.783,50 und jährliche Energiekosten von € 568,51.
LED-Paneele haben Anschaffungskosten von € 13.750,00 und jährliche Energiekosten von € 486,00.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4

Thema: Alltag

Quellen: —

Känguruspringe

Aufgabennummer: B-C9_15

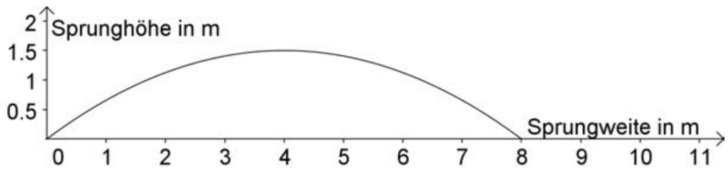
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In Australien leben heute ca. 60 Känguruarten, die sich bei höheren Geschwindigkeiten meist springend fortbewegen. Die kleinste Art ist das Zottelige Hasenkänguru mit ca. 35 cm Körpergröße, die größte das Rote Riesenkänguru mit ca. 1,8 m Körpergröße.

Bei allen Känguruarten ist die maximale Sprungweite etwa das 7-Fache ihrer Körpergröße.

– Erstellen Sie eine Funktion, die die ungefähre maximale Sprunglänge in Abhängigkeit von der Körpergröße angibt.
– Stellen Sie diese Funktion von der kleinsten bis zur größten Känguruart grafisch dar.

b) Der nachstehende Graph zeigt den Sprung eines Kängurus.



Der Sprung kann mit einer Polynomfunktion 2. Grades im angegebenen Definitionsbereich beschrieben werden.

– Berechnen Sie die Funktionsgleichung mithilfe quadratischer Regression. Runden Sie die Koeffizienten auf Hundertstel.
– Lesen Sie die benötigten Werte aus dem Graphen ab.

c) In einem Volksschulhort gibt es das Brettspiel *Känguruhüpfen* zum spielerischen Addieren im Zahlenraum 12.
Am Start stehen maximal 11 Kängurus, die mit den Nummern von 2 bis 12 beschriftet sind. Jede/r Spieler/in sucht sich ein Känguru aus. Es wird reihum mit 2 sechsseitigen Würfeln gewürfelt. Nach jedem Wurf werden die Augenzahlen addiert und das Känguru, dessen Nummer mit der Augensumme der beiden Würfel übereinstimmt, darf ein Feld vorhüpfen.

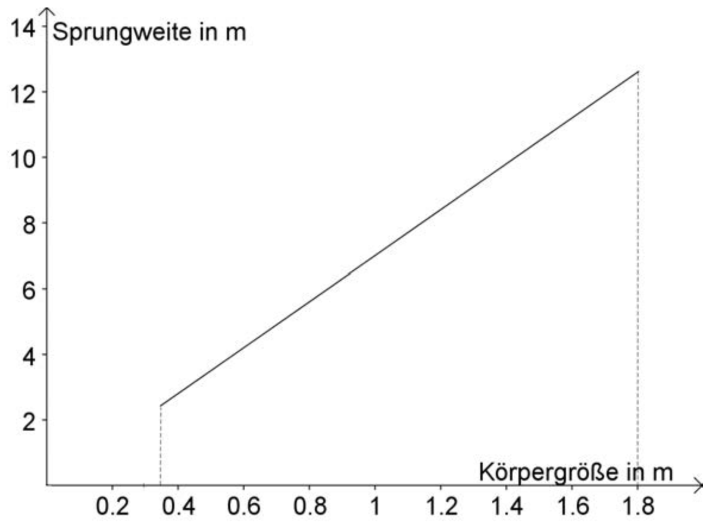
– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Chance, ein Feld vorzurücken, für alle Kängurus gleich groß ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) lineare Funktion: $f(x) = 7x$

x … Körpergröße in m
$f(x)$ … Sprungweite in m



b) Koordinaten der Nullstellen und des Hochpunktes ablesen:
$N_1 = (0|0)$, $N_2 = (8|0)$, $H = (4|1{,}5)$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}093\ldots$
$b = 0{,}75$
$c = 0$

Funktionsgleichung: $y = -0{,}09 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x$

(Da die Koordinaten der Punkte, vor allem des Hochpunkts, abgelesen werden, ist eine angemessene Ungenauigkeit zu tolerieren.)

c) Es genügt, exemplarisch zu zeigen, dass die Anzahl der Möglichkeiten für 2 Zahlen unterschiedlich groß und damit die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten unterschiedlich hoch ist.

Zum Beispiel:
2 = 1 + 1
3 = 1 + 2 oder 2 + 1
4 = 1 + 3 oder 3 + 1 oder 2 + 2
usw.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

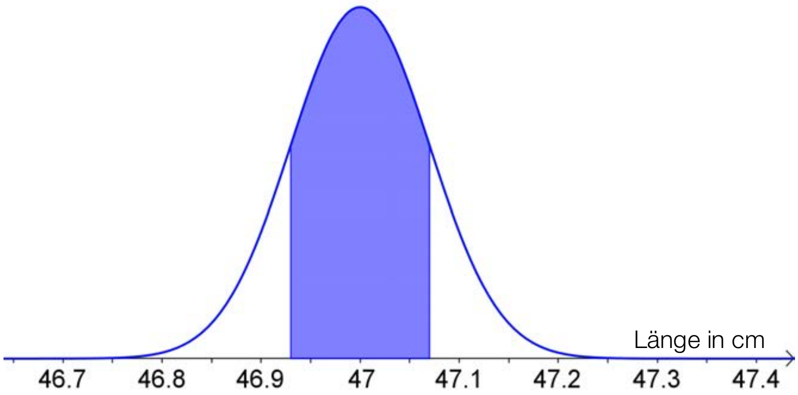
Blockflöte

Aufgabennummer: B_239

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Blockflöte ist ein Holzblasinstrument.

a) Für die Qualität des Klanges ist die Länge einer Blockflöte sehr wichtig. Die Längen der produzierten Blockflöten können annähernd als normalverteilt angenommen werden. Die unten blau dargestellte Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit der Sigmaumgebung um den Erwartungswert ($\mu \pm \sigma$).



– Lesen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung aus der Grafik ab.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge einer Blockflöte kleiner als 46,9 cm ist.

b) Die Tonhöhe eines Tones, der mit einer Holzblockflöte erzeugt wird, ändert sich mit der Temperatur. Die Tonhöhenänderung wird in Cent angegeben.
Eine Messung hat folgende Werte ergeben:

Temperatur in °C	19	21	24	25	29	31
Tonhöhenänderung in Cent	0	6	15	18	30	36

Der Zusammenhang zwischen Temperatur und Tonhöhenänderung soll mithilfe einer Funktion modelliert werden.

T … Temperatur in °C
$f(T)$ … Tonhöhenänderung in Cent bei der Temperatur T in °C

– Zeichnen Sie die in der Tabelle gegebenen Datenpunkte in ein geeignetes Koordinatensystem.

– Kreuzen Sie diejenige Funktion an, die den Zusammenhang korrekt beschreibt. *[1 aus 5]*

$f(T) = 3T - 57$	☐
$f(T) = -3T + 19$	☐
$f(T) = 6T + 19$	☐
$f(T) = 6T + 57$	☐
$f(T) = 3T + 19$	☐

– Erklären Sie, warum die Messdaten durch ein lineares und nicht durch ein exponentielles Modell beschrieben werden können.

c) Die Schallgeschwindigkeit beeinflusst die Tonhöhe der Blockflöte. Der Zusammenhang zwischen der Schallgeschwindigkeit und der Temperatur kann durch die folgende Funktion c dargestellt werden:

$$c(T) = 331{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}}$$

T ... Temperatur in °C
$c(T)$ ... Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) bei einer Temperatur T in °C

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Schallgeschwindigkeit von 19 °C bis 35 °C.
– Dokumentieren Sie, wie man die Steigung der Tangente an die Funktion c an der Stelle $T = 20$ °C berechnen kann.

d) In einer Schulklasse von 31 Schülerinnen/Schülern spielen 15 Blockflöte, 12 Querflöte und 14 Gitarre. 6 Schüler/innen spielen Blockflöte und Querflöte, 7 spielen Querflöte und Gitarre, 5 spielen Blockflöte und Gitarre. 4 Schüler/innen spielen sowohl Blockflöte als auch Querflöte und Gitarre.

B ... Menge der Schüler/innen, die Blockflöte spielen
Q ... Menge der Schüler/innen, die Querflöte spielen
G ... Menge der Schüler/innen, die Gitarre spielen

– Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm, das den beschriebenen Sachverhalt darstellt.

– Ordnen Sie den beiden angegebenen Mengen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$B \setminus (Q \cup G)$	
$(B \cap Q) \setminus G$	

A	die Menge der Schüler/innen, die Gitarre oder Querflöte, aber nicht Blockflöte spielen
B	die Menge der Schüler/innen, die Querflöte und Blockflöte, aber nicht Gitarre spielen
C	die Menge der Schüler/innen, die Querflöte, aber nicht Gitarre und nicht Blockflöte spielen
D	die Menge der Schüler/innen, die Blockflöte, aber nicht Querflöte und nicht Gitarre spielen

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

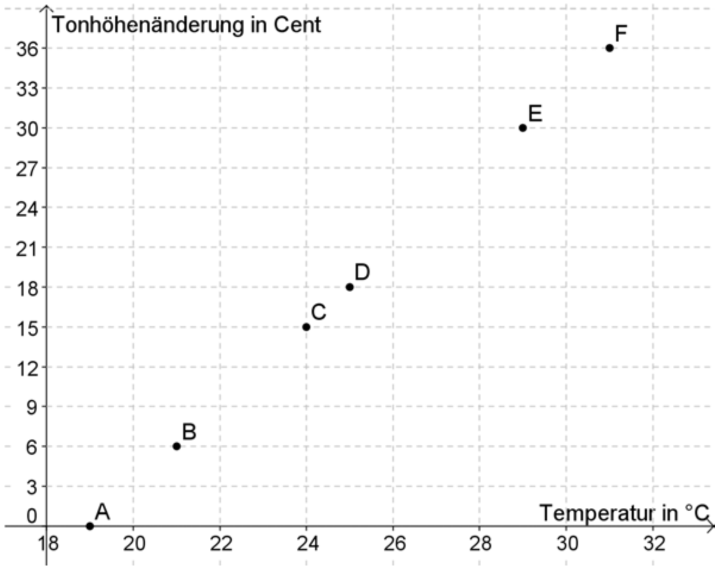
Möglicher Lösungsweg

a) $\mu = 47$ cm Toleranz für μ: ± 0,01 cm
$\sigma = 0{,}075$ cm Toleranz für σ: ± 0,01 cm

$P(X \leq 46{,}9) \approx 0{,}0912$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 9,12 % wird eine Blockflöte, die kleiner als 46,9 cm ist, produziert.

b)



$f(T) = 3T - 57$	☒

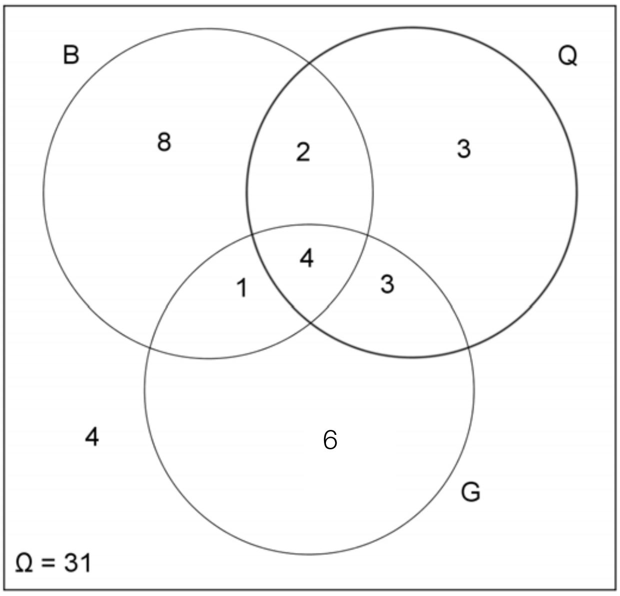
Die Tonhöhe steigt konstant um 3 Cent pro Grad. Bei einer Exponentialfunktion würde pro Grad die gleiche relative Änderung stattfinden.

c) $\frac{c(35) - c(19)}{35 - 19} \approx 0{,}579$

Die Schallgeschwindigkeit ändert sich um rund 0,579 m/s pro Grad Celsius.

Die Steigung der Tangente der Stelle $T = 20$ entspricht der 1. Ableitung der Funktion an dieser Stelle. Durch Einsetzen der Temperatur 20 °C in die 1. Ableitung erhält man die Steigung der Tangente.

d)



Am Venn-Diagramm erkennt man, dass es insgesamt 27 Schüler/innen gibt, die ein oder mehrere Instrumente spielen. Also gibt es 4 Schüler/innen, die keines dieser Instrumente spielen.

$B \setminus (Q \cup G)$	D
$(B \cap Q) \setminus G$	B

A	die Menge der Schüler/innen, die Gitarre oder Querflöte, aber nicht Blockflöte spielen
B	die Menge der Schüler/innen, die Querflöte und Blockflöte, aber nicht Gitarre spielen
C	die Menge der Schüler/innen, die Querflöte, aber nicht Gitarre und nicht Blockflöte spielen
D	die Menge der Schüler/innen, die Blockflöte, aber nicht Querflöte und nicht Gitarre spielen

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) schwer
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2
d) 2

Thema: Musik

Quellen: http://de.wikipedia.org/wiki/Blockfl%C3%B6te
http://www.sengpielaudio.com/Rechner-tonhoehenaenderung.htm

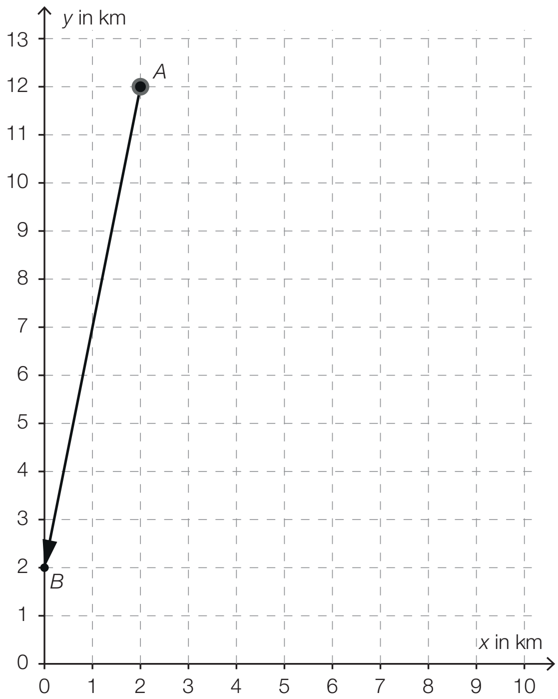
Fahrradrennen

Aufgabennummer: B_251

Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Es findet ein Fahrradrennen statt.

a) Die Rennstrecke führt geradlinig von *A* über *B* nach *C*. *C* hat die Koordinaten $(8|y_0)$. Die Richtung von *B* nach *C* ist durch den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ gegeben.



– Berechnen Sie die Länge des Weges von *A* nach B.
– Zeichnen Sie den Punkt *C* in die nebenstehende Grafik ein.
– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $-\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$ berechnet wird.

b) Auf der Rennstrecke befindet sich ein gerades Straßenstück mit 10 % Gefälle.

– Erklären Sie mithilfe des Steigungsbegriffes, was „10 % Gefälle" bedeutet.
– Berechnen Sie den Neigungswinkel des Straßenstücks.

c) Der zurückgelegte Weg einer Rennfahrerin wird bei einem Bremsmanöver gemessen.

t in s	1	3	5
s in m	10,17	23,73	28,25

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in Metern (m)

Der zurückgelegte Weg kann durch eine quadratische Funktion s mit
$s(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie mithilfe der gegebenen Messwerte ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c.
– Lösen Sie dieses Gleichungssystem.
– Berechnen Sie mithilfe der Funktion s die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [2; 4].
– Erklären Sie, welche Größe mit der 1. Ableitung der Funktion s zum Zeitpunkt $t = 3$ berechnet werden kann.

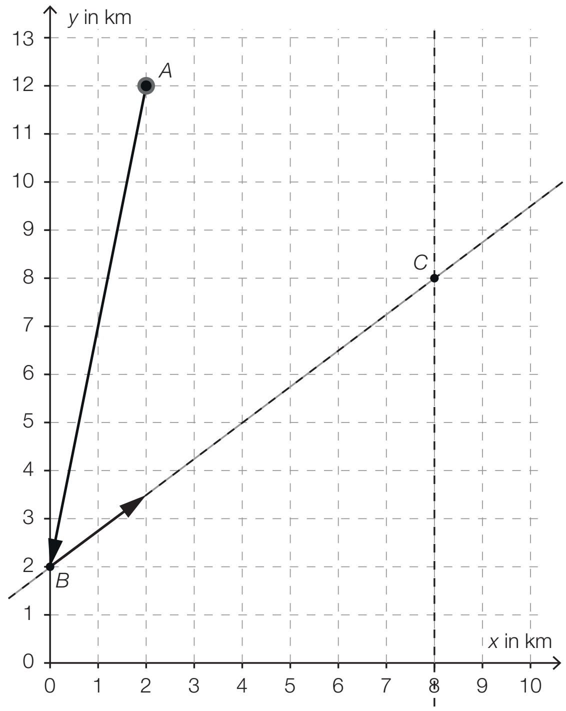
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 10^2} = 10{,}20$

Die Länge der Strecke vom Punkt A zum Punkt B beträgt 10,2 km.

Man berechnet den Vektor $\overrightarrow{CA}$ (Länge und Richtung der geradlinigen Verbindung von C nach A).
Eine grafische Erklärung im Koordinatensystem ist ebenfalls zulässig.



b) Die Steigung gibt das Verhältnis der vertikalen zur horizontalen Distanz an. Ein Gefälle von 10 % bedeutet, dass pro 100 m in horizontaler Richtung die Straße um 10 Höhenmeter fällt.

$\arctan(0{,}1) \approx 5{,}71$
Der Neigungswinkel der Straße beträgt ca. 5,71°.

c) Das Einsetzen der Messwerte in die Funktion liefert die folgenden 3 Gleichungen:

I: $10{,}17 = a + b + c$
II: $23{,}73 = a \cdot 9 + b \cdot 3 + c$
III: $28{,}25 = a \cdot 25 + b \cdot 5 + c$

Durch Lösen mit Technologieeinsatz erhält man die folgenden Koeffizienten:
$a = -1{,}13$ $\quad b = 11{,}3$ $\quad c = 0$

$s(t) = -1{,}13 \cdot t^2 + 11{,}3 \cdot t$

mittlere Geschwindigkeit in m/s: $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(2)}{2} = 4{,}52$

Die 1. Ableitung an der Stelle $t = 3$ gibt die Momentangeschwindigkeit der Rennfahrerin zu diesem Zeitpunkt an.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 4

Thema: Sport

Quellen: –

Fahrzeugtests (2)

Aufgabennummer: B_159

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

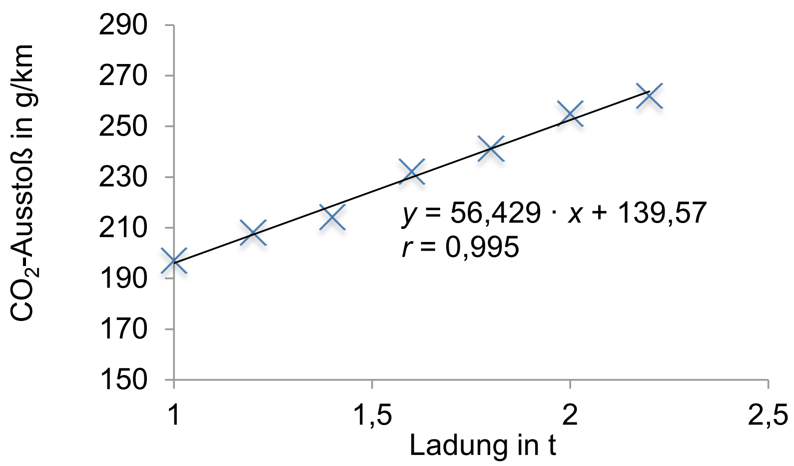
Die Firma *Cargo-Car* führt in der Entwicklungsphase eines neuen Transporters Tests durch.

a) In Testreihen wurde der Kraftstoffverbrauch – abhängig von der Ladung – erhoben. In der folgenden Tabelle ist für 8 Testfahrten die Reichweite pro Liter Kraftstoffverbrauch bei einer vorgegebenen Ladung in Tonnen angegeben:

Reichweite in km	12,46	12,10	11,81	11,32	10,94	10,81	10,79	10,23
Ladung in t	1	1,05	1,3	1,4	1,52	1,7	1,9	2,1

– Geben Sie an, welche Variable hier als unabhängig und welche als abhängig anzunehmen ist.
– Ermitteln Sie die lineare Regressionsgerade und stellen Sie diese mit den gegebenen Daten dar.
– Beschreiben Sie, wie man die Regressionsgerade zu einer Punktewolke ermittelt.

b) Bei der Auswertung einer Testreihe ergab sich folgende Regressionsgerade *y*:



Ein Mitarbeiter möchte die geschätzte CO_2-Emission bei einer Ladung von 1,5 Tonnen und bei einer Ladung von 2,5 Tonnen ermitteln.

– Berechnen Sie die gesuchten Werte.
– Interpretieren Sie den in der Grafik angegebenen Korrelationskoeffizienten *r*.

c) Tests zur Haltbarkeit neuer Bremsbeläge eines bestimmten Transporter-Typs haben ergeben, dass deren Zuverlässigkeit mithilfe der Funktion R beschrieben werden kann:

$R(t) = e^{-0{,}02 \cdot t}$

t ... Benützungsdauer in Stunden
$R(t)$ ... Prozentsatz der Bremsbeläge, die nach der Benützungsdauer t noch intakt sind

– Weisen Sie nach, dass nach einer Benützungsdauer von durchschnittlich 50 Stunden ca. 36,8 % der Bremsbeläge noch intakt sind.

Die Formel $R(t) = e^{-0{,}02 \cdot t}$ wird nach t umgeformt. Dabei wird ein Fehler gemacht.

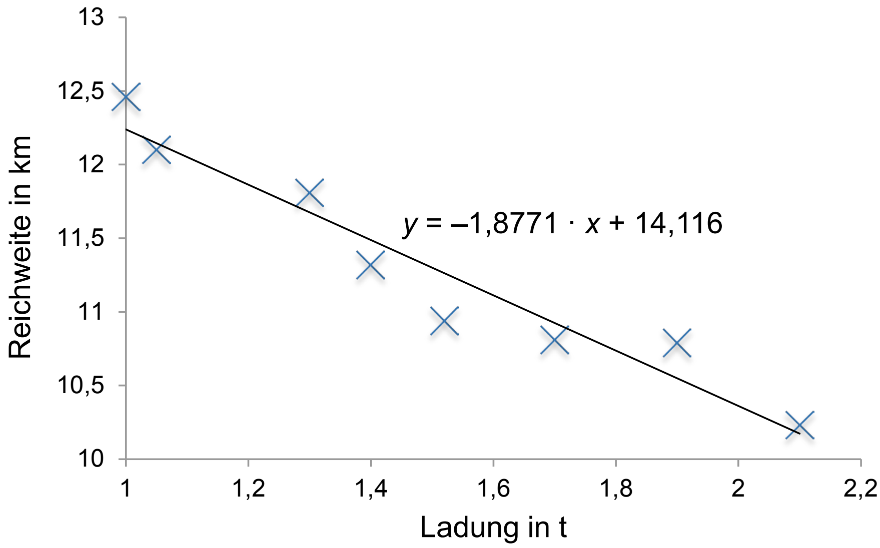
– Kennzeichnen Sie die fehlerhafte Zeile.
– Formen Sie die Gleichung mathematisch richtig um.

1. $R(t) = e^{-0{,}02 \cdot t}$
2. $\ln(R) = \frac{1}{0{,}02 \cdot t}$
3. $t = \frac{1}{0{,}02 \cdot \ln(R)}$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Abhängigkeit der Reichweite von einer vorgegebenen Ladung untersucht. Die Ladung ist daher die unabhängige Variable *x*, die Reichweite ist die abhängige Variable *y*.



Es werden die Differenzen zwischen den *y*-Werten der Punktewolke (des Streudiagramms) und den noch unbekannten *y*-Werten der Regressionsgeraden ermittelt. Diese Differenzen werden quadriert und summiert. Die Summe wird anschließend minimiert. Damit lässt sich die Gerade finden, die von den Punkten des Streudiagramms den geringsten Abstand hat.
(Auch die Erklärung mithilfe einer Skizze ist als richtig zu werten.)

b) Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 1,5 t beträgt 224,2... g/km ≈ 224 g/km.
Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 2,5 t beträgt 280,6... g/km ≈ 281 g/km.

Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}995$ liegt sehr nahe bei 1. Das bedeutet, dass der Zusammenhang sehr gut durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.
Das positive Vorzeichen deutet auf einen steigenden Trend.

c) $t = 50$ wird in die gegebene Gleichung eingesetzt:
$R(50) = 0{,}3678\ldots \approx 36{,}8\ \%$

Der Fehler befindet sich in der 2. Zeile. (Begründung: Der negative Exponent wurde falsch interpretiert bzw. eine logarithmische Rechenregel falsch angewendet.)

Korrekte Umformung:

1. $R(t) = e^{-0{,}02 \cdot t}$
2. $\ln(R) = -0{,}02 \cdot t$
3. $t = \frac{-\ln(R)}{0{,}02}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Messreihen

Quellen: —

Geocaching

Aufgabennummer: B_244

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Geocaching ist eine Suche nach einem „Schatz“ (= Cache) mithilfe von GPS (Global Positioning System).

a) Im Jahr 2000 wurde in den USA der erste Cache versteckt. Bis zum Jahr 2012 lässt sich die Anzahl der Caches weltweit näherungsweise durch die folgende Funktion n modellieren:

$n(t) = 3{,}329^t$

t … Zeit in Jahren nach 2000
$n(t)$ … Anzahl der Geocaches nach t Jahren

– Bestimmen Sie die jährliche prozentuelle Zunahme im Zeitraum von 2000 bis 2012.
– Berechnen Sie, wie viele Caches im Jahr 2010 versteckt waren.

Die Landfläche der Erde beträgt etwa $1{,}489 \cdot 10^8$ Quadratkilometer (km²).

– Berechnen Sie, in welchem Jahr im Durchschnitt auf jedem Quadratmeter der Erdoberfläche ein Cache versteckt wäre, wenn die Entwicklung ungebremst weiterginge.

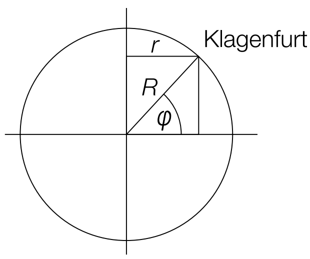
b) Entlang eines Rundwanderweges sind 4 Caches versteckt. Der Rundwanderweg ist annähernd durch die Koordinaten der Cacheverstecke (Einheit 1 km) dargestellt:

Ausgangspunkt = Endpunkt $A = (-4|3)$
Cacheverstecke $B = (-3|0)$, $C = (1|-2)$, $D = (4|1)$, $E = (2|4)$

– Zeichnen Sie den Wanderweg in ein Koordinatensystem ein.
– Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ vom Ausgangspunkt zum 1. Cache auf.
– Dokumentieren Sie, wie man die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnet.

c) Ein Cache wird in Klagenfurt auf der geografischen Breite von $\varphi \approx 46°$ versteckt. Der Erdradius R beträgt ca. 6 371 km.

– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Radius r desjenigen Breitenkreises, auf dem der Cache liegt.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Wachstumsgesetz: $n(t) = 3{,}329^t$
$n(t) = (1 + \frac{p}{100})^t$
jährliche Zunahme: ca. 233 %

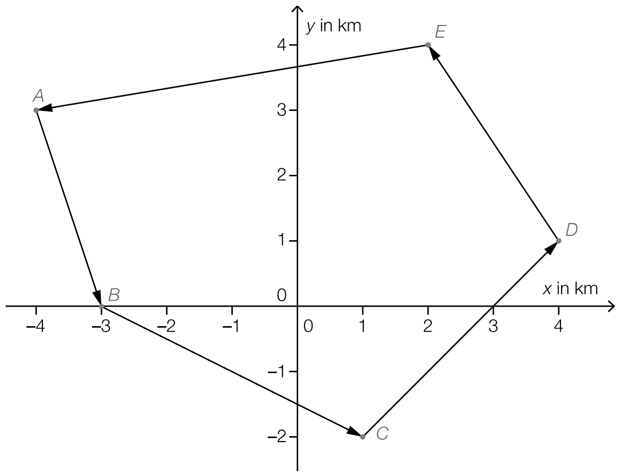
$n(10) = 3{,}329^{10}$
$n(10) = 167\,162{,}\ldots$

Im Jahr 2010 waren etwa 167 000 Caches versteckt.

$n(t) = 3{,}329^t$
$1{,}489 \cdot 10^8\ \text{km}^2 = 1{,}489 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2$
$1{,}489 \cdot 10^{14} = 3{,}329^t \quad |\ \log$
$t = 27{,}134\ldots$
$t \approx 27$ Jahre

Im Jahr 2027 wäre auf jedem Quadratmeter der Erdoberfläche ein Cache versteckt.

b)



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ = Länge (Betrag) des Vektors

Die Berechnung erfolgt mit dem pythagoräischen Lehrsatz, wobei als Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks die Koordinaten des Vektors eingesetzt werden.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$

c) rechtwinkeliges Dreieck
$\cos(\varphi) = \frac{r}{R}$
$r = R \cdot \cos(\varphi)$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 1

Thema: Geocaching

Quellen: —

Kinderhort

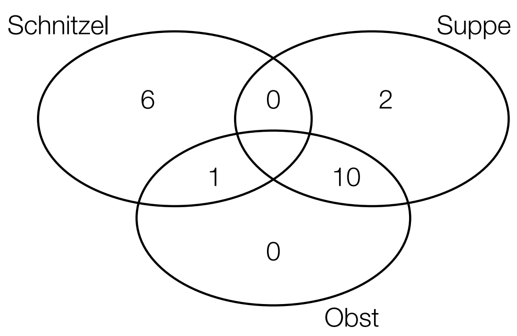
Aufgabennummer: B_234

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Kinderhort sind 36 Kinder für die Nachmittagsbetreuung angemeldet. 22 Kinder kommen aus der Volksschule, 7 aus der Neuen Mittelschule (NMS), 4 aus der AHS-Unterstufe und 3 aus der Sonderschule.

a) – Berechnen Sie die relativen Häufigkeiten der Kinder aus den verschiedenen Schulen.
– Erstellen Sie ein geeignetes Diagramm, das die Schultypen der Kinder wiedergibt.

b) An einem bestimmten Tag sind beim Mittagessen 26 Kinder anwesend. Es gibt als Mittagessen Nudelsuppe, Schnitzel und Obst. Im untenstehenden Venn-Diagramm ist dargestellt, wie sich die Kinder ihr Menü zusammenstellen. Es gibt kein Kind, das überhaupt nichts isst.



– Vervollständigen Sie das obige Mengendiagramm durch Eintragen der fehlenden Anzahl.
– Ermitteln Sie, wie viele Portionen Suppe, Hauptspeise und Nachspeise verzehrt wurden, wenn auch die beiden Hortpädagoginnen alle 3 Gerichte essen.

c) An einem anderen Tag notiert ein Praktikant, wie viele Minuten die Kinder für die Hausübung brauchen:

70, 32, 25, 15, 18, 20, 60, 22, 15, 30, 27, 30, 60, 12, 33, 75, 33, 35, 40, 48, 30, 20, 65, 10, 35, 95, 18, 32, 23, 29, 24

– Ermitteln Sie das arithmetische Mittel, den Median, die Standardabweichung und die Quartile.
– Argumentieren Sie, ob in diesem Fall das arithmetische Mittel oder der Median aussagekräftiger ist.

d) Unter den Hortkindern aus der NMS und der AHS werden 2 Karten für ein Konzert verlost. Ein Kind darf höchstens 1 Karte gewinnen.

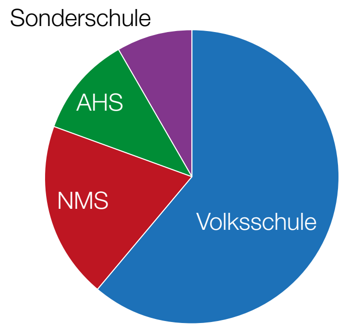
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
  (1) beide Kinder, die eine Konzertkarte gewinnen, aus der NMS sind,
  (2) das 1. Kind, das bei der Verlosung gewinnt, aus der AHS und das 2. Kind, das bei der Verlosung gewinnt, aus der NMS ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

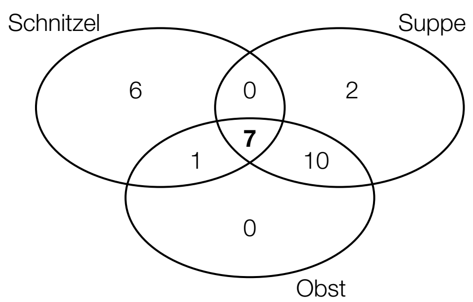
a)

VS	NMS	AHS	SS
22	7	4	3
$\frac{22}{36} \approx 61{,}11\ \%$	19,44 %	11,11 %	8,33 %



(Auch Säulen- oder Balkendiagramm möglich. Bei grafikfähigem Taschenrechner reicht eine Handskizze.)

b)



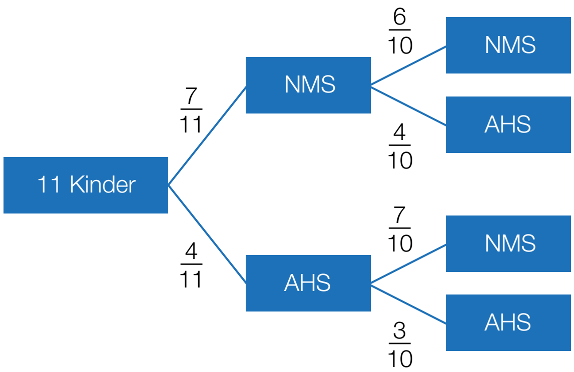
2 Kinder essen nur Suppe, 10 Kinder essen nur Suppe und Obst, 6 Kinder essen nur Schnitzel, 1 Kind isst nur Schnitzel und Obst. 7 Kinder essen alle 3 Gerichte.
Es werden insgesamt 16 Portionen Schnitzel, 21 Portionen Suppe und 20 Portionen Obst verzehrt.

c) arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 34{,}87$ min
Median: 30 min
Standardabweichung $s = 20{,}07$ min
$Q_1 = 20$ min*, Q_2 = Median = 30 min, $Q_3 = 40$ min*

* Die Ergebnisse für Q_1 und Q_3 können von den angegebenen Werten abweichen, da verschiedene Technologien mit unterschiedlichen Definitionen rechnen.

In diesem Fall ist der Median aussagekräftiger, weil es offensichtlich einige Kinder gibt, die sehr lange brauchen. Es liegt eine schiefe Verteilung vor, die vom arithmetischen Mittel nicht gut repräsentiert wird.

d) 7 Kinder aus der NMS, 4 Kinder aus der AHS



$\frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{42}{110}$

Wahrscheinlichkeit, dass beide aus der NMS sind: ≈ 38,2 %

$\frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{110}$

Wahrscheinlichkeit, dass das 1. Kind aus der AHS und das 2. Kind aus der NMS ist: ≈ 25,5 %

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 1 Zahlen und Maße
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) –
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 2
c) leicht	c) 4
d) mittel	d) 2

Thema: Alltag

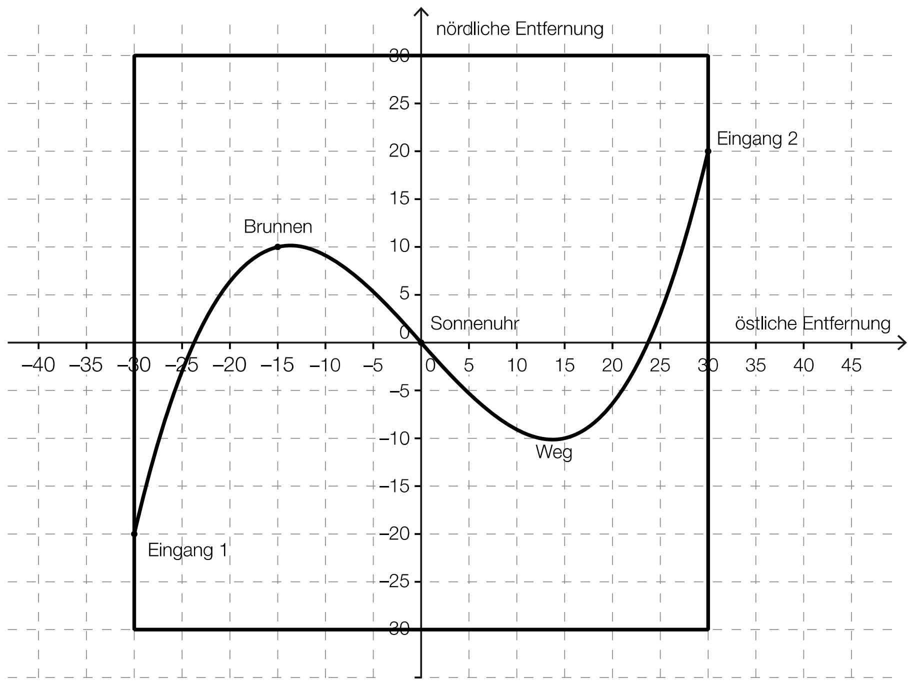
Quelle: –

Kinderspielplatz (1)

Aufgabennummer: B_247

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein quadratischer Kinderspielplatz soll neu angelegt werden. In der Mitte des Kinderspielplatzes ist eine große Sonnenuhr, ein Brunnen ist bereits vorhanden. Wie in der nachstehenden Abbildung zu sehen ist, soll ein Weg vom Eingang 1 zum Brunnen führen, weiter zur Sonnenuhr und von dort zum Eingang 2.



a) Der Weg kann durch eine Polynomfunktion f dritten Grades modelliert werden.

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Entfernung von der Sonnenuhr in östlicher Richtung in Metern (m)
$f(x)$ ... Entfernung von der Sonnenuhr in nördlicher Richtung in m

– Stellen Sie dasjenige lineare Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten a, b, c und d der Polynomfunktion berechnen kann. (Entnehmen Sie die notwendigen Informationen der Abbildung.)
– Lösen Sie das Gleichungssystem.
– Zeigen Sie, dass der Wendepunkt der Polynomfunktion f genau an der Stelle der Sonnenuhr liegt.

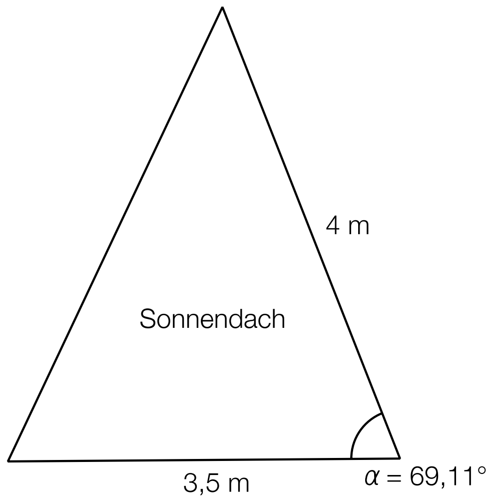
b) Die Funktion A mit $A(d) = \frac{d^2}{2}$ beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt des quadratischen Spielplatzes und dessen Diagonale.
Ein Mitarbeiter behauptet: „Wenn wir den Flächeninhalt des Spielplatzes verdoppeln wollen, müssen wir die Diagonale verdoppeln.“

– Überprüfen Sie, ob die Behauptung des Mitarbeiters richtig ist.

c) Ein Kind läuft außerhalb des Weges geradlinig vom Eingang 1 zur Sonnenuhr und dann zum Brunnen.

– Stellen Sie denjenigen Vektor auf, der den geradlinigen Weg vom Eingang 1 zur Sonnenuhr beschreibt.
– Berechnen Sie die Entfernung, die das Kind läuft.

d) Um den Kindern im Sommer einen Schatten bieten zu können, wird ein dreieckiges Sonnendach angebracht. Für die Produktion des Sonnendachs rechnet man mit 10 % Verschnitt. 1 m² des verwendeten Stoffes kostet € 11,95.



– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sonnendaches.
– Berechnen Sie die Kosten des Stoffes für das Sonnendach.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) (–30|–20) einsetzen liefert I: $-20 = (-30)^3 \cdot a + (-30)^2 \cdot b + (-30) \cdot c + d$
(–15|10) einsetzen liefert II: $10 = (-15)^3 \cdot a + (-15)^2 \cdot b + (-15) \cdot c + d$
(0|0) einsetzen liefert III: $0 = d$
(30|20) einsetzen liefert IV: $20 = 30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a \approx 0{,}001975$
$b = 0$
$c \approx -1{,}1111$
$d = 0$

Im Wendepunkt muss $f''(x)$ gleich null sein.
$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$
Da $b = 0$ ist, ergibt Einsetzen von $x = 0$ für $f''(x)$ null.

b) Behauptung: $A(2d) = 2A(d)$

$$A(2d) = \frac{(2d)^2}{2} = \frac{4d^2}{2} = 4 \cdot \frac{d^2}{2} = 4A(d)$$

Also ist die Behauptung falsch. Der Flächeninhalt wird vervierfacht, wenn die Diagonale verdoppelt wird.

Jede Begründung, dass durch das Verdoppeln der Diagonale eine Vervierfachung entsteht, ist richtig.

c) Verbindungsvektor Eingang 1 – Sonnenuhr: $\binom{0}{0} - \binom{-30}{-20} = \binom{30}{20}$
Länge: $\sqrt{30^2 + 20^2} \approx 36{,}06$

Verbindungsvektor Sonnenuhr – Brunnen: $\binom{-15}{10} - \binom{0}{0} = \binom{-15}{10}$
Länge: $\sqrt{(-15)^2 + 10^2} \approx 18{,}03$

Gesamtlänge in Metern: $36{,}06 + 18{,}03 = 54{,}09$

d) Flächeninhalt des Sonnendaches in m²: $A = \frac{4 \cdot 3{,}5 \cdot \sin(69{,}11°)}{2} = 6{,}539...$

Der Flächeninhalt des Sonnendaches beträgt rund 6,54 m².

Kosten des Stoffes: $A \cdot 1{,}1 \cdot 11{,}95 = 85{,}966...$

Die Kosten des Stoffes für das Sonnendach betragen € 85,97.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: http://www.esvocampingshop.com/de/zeltstoff-de/sonnensegelstoff-de.html

Kindersport

Aufgabennummer: B_227

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Kinder im Kindergarten- und Volksschulalter wurden befragt, welche Sportart sie am liebsten haben.

a) Die Befragung von Fünfjährigen wurde in der nebenstehenden Tabelle festgehalten.

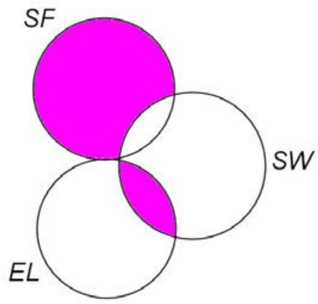
Sportart	Anzahl der Meldungen
Schifahren (*SF*)	gesamt 20
Schwimmen (*SW*)	gesamt 28
Eislaufen (*EL*)	gesamt 16
nur Schifahren und Eislaufen	5
nur Schwimmen und Eislaufen	3
nur Schifahren und Schwimmen	7
alle drei	4

– Erstellen Sie ein Mengendiagramm mithilfe der Daten der Tabelle.

– Geben Sie an, wie viele Kinder in dieser Gruppe insgesamt befragt wurden, wie viele nur eine Sportart und wie viele mehr als eine Sportart gewählt haben.

b) Das Ergebnis der Befragung von Vierjährigen ist im nebenstehenden Mengendiagramm grafisch dargestellt.

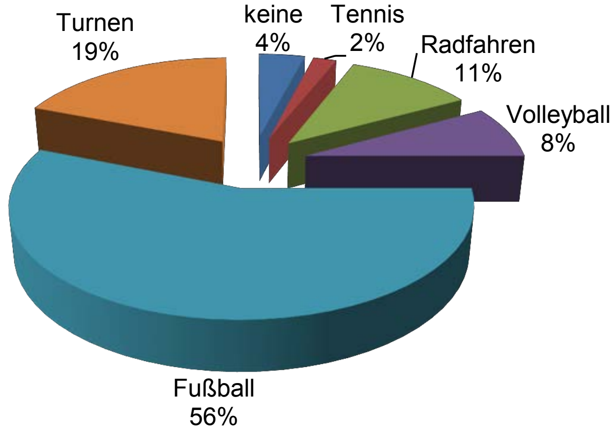
Sportarten: *SF* … Schifahren
SW … Schwimmen
EL … Eislaufen



– Beschreiben Sie mithilfe von Mengensymbolen den farbigen Bereich des Mengendiagramms, der die von den Kindern genannten Sportarten wiedergibt.

c) In einer Volksschule wurden 167 Burschen und 133 Mädchen nach der bevorzugten Sportart befragt. Die Befragung hat das folgende Diagramm ergeben.

– Zeichnen Sie mithilfe der Daten aus dem Kreisdiagramm ein Säulen- oder Balkendiagramm mit den absoluten Häufigkeiten.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

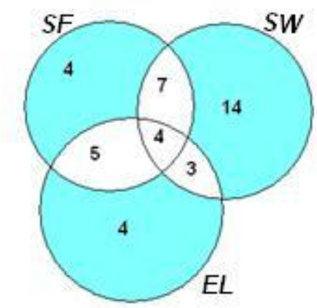
Möglicher Lösungsweg

a) Es sind 41 fünfjährige Kinder befragt worden.
22 Kinder mögen nur eine Sportart, 19 Kinder machen mehr als eine Sportart gerne, davon 15 Kinder zwei Sportarten und vier Kinder drei Sportarten.

b) Die farbige Fläche kann durch folgenden Ausdruck beschrieben werden:

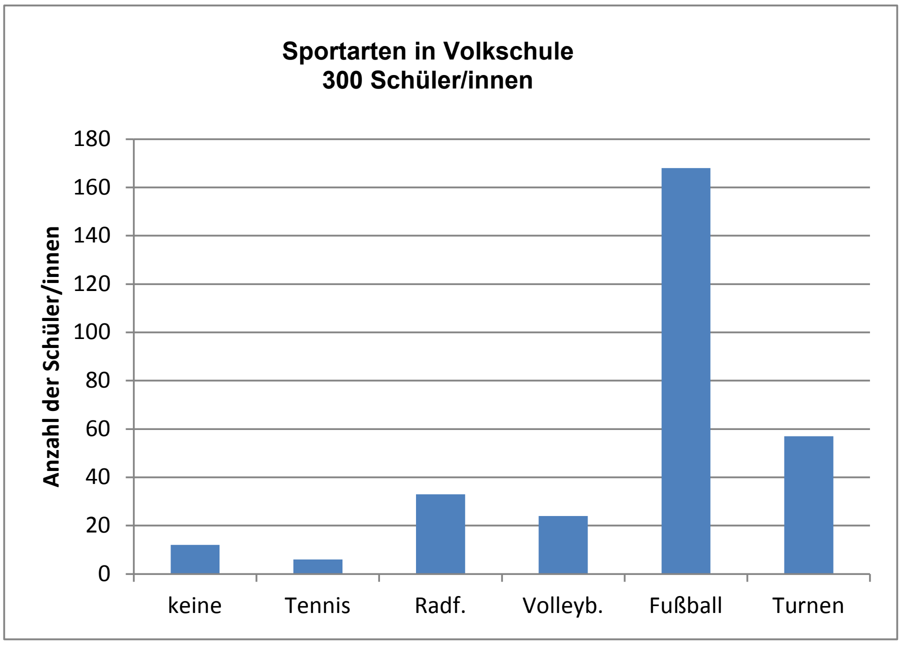
$(SF \setminus SW) \cup (SW \cap EL)$

Es sind hier auch andere Darstellungen möglich und richtig!



c) In der Schule gibt es insgesamt 167 + 133 = 300 Schülerinnen und Schüler.

Sportart	keine	Tennis	Radf.	Volleyb.	Fußball	Turnen
%	4	2	11	8	56	19
absolut	12	6	33	24	168	57



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 1 Zahlen und Maße
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Sport

Quellen: —

Körpergröße von Kindern

Aufgabennummer: B-C9_03

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Tabelle gibt die durchschnittlich gemessene Körpergröße am Ende eines Lebensjahres von Buben im Kindesalter im Laufe ihrer Entwicklung an. Als Geburtsgröße wird eine durchschnittliche Größe von 50 cm angenommen.

t … Alter in Jahren (a)

G … Körpergröße in Zentimetern (cm)

$\frac{\Delta G}{\Delta t}$ … jährliche Änderungsrate in cm/a

t in a	G in cm	$\frac{\Delta G}{\Delta t}$ in cm/a
1	77	27
2	89	12
3	97	8
4	104	7
5	111	7
6	117	6

a) – Stellen Sie die Körpergröße G in Abhängigkeit vom Alter t als Punktediagramm in einem Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie den Zusammenhang der beiden Größen über eine lineare Regression und zeichnen Sie die Trendlinie.
– Beschreiben Sie, was der Korrelationskoeffizient der ermittelten Funktion G aussagt.

b) – Argumentieren Sie, ob die mittlere jährliche Änderungsrate annähernd dem Gesetz einer arithmetischen Folge, einer geometrischen Folge oder keiner von beiden gehorcht.

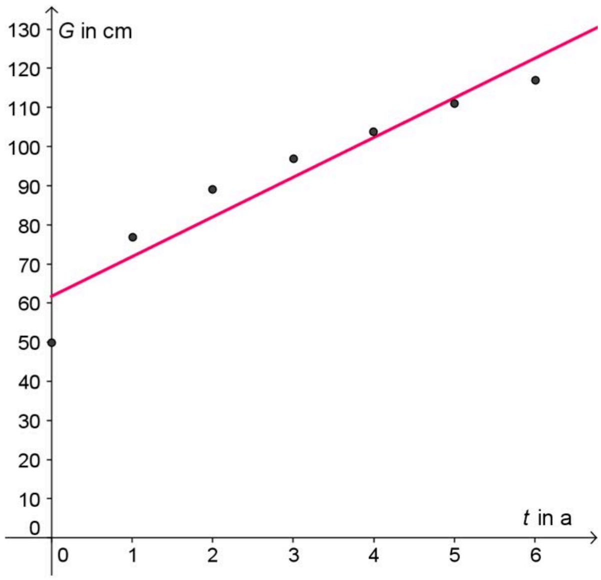
c) Die Körpergröße der Kinder ist näherungsweise normalverteilt. Buben im Alter von 8 Jahren haben eine Körpergröße mit einem Erwartungswert von $\mu = 130$ cm bei einer Standardabweichung von $\sigma = 10$ cm.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Bub dieses Alters eine Körpergröße zwischen 135 cm und 145 cm hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$G(t) = 10{,}14t + 61{,}71$

Der Korrelationskoeffizient $r \approx 0{,}956$ lässt einen linearen Zusammenhang von Alter und Körpergröße vermuten.

b) Die jährlichen Änderungsraten der Körpergrößen bilden weder eine arithmetische noch eine geometrische Folge.
Würden die Zuwächse eine arithmetische Folge bilden, so müsste die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder gleich groß bleiben. Das ist nicht der Fall.
Wären sie Glieder einer geometrischen Folge, so müsste der Quotient aufeinanderfolgender Glieder gleich groß sein. Das ist nicht der Fall.
Man kann nur erkennen, dass die jährliche Wachstumsänderung in den ersten Lebensjahren groß ist und dass sich die jährliche Zunahme an Körpergröße in den folgenden Jahren wenig verändert.

c) $\mu = 130$ cm, $\sigma = 10$ cm
$P(135 \leq X \leq 145) = 0{,}24173$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Buben von 8 Jahren mit einer Körpergröße zwischen 135 cm und 145 cm anzutreffen, beträgt ca. 24 %.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 1

Thema: Biologie

Quelle: einige Werte aus: http://blikk.it/angebote/primarmathe/ma0323.htm

Reisekosten

Aufgabennummer: B_193

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Tarife bei Fahrten mit dem Zug hängen normalerweise von der zurückgelegten Fahrtstrecke ab. Die in dieser Aufgabe verwendeten Bezeichnungen sind:

x … Fahrtstrecke in Kilometern (km)
$T(x)$ … Tarif in Euro (€) für die Fahrtstrecke x

a) In der nachstehenden Tabelle sind die 2012 gültigen Tarife für eine Fahrt mit der ÖBB (2. Klasse ohne Vorteilsticket) ausgehend vom Bahnhof Wien West zum angegebenen Endbahnhof angeführt.

Bahnhof	Fahrtstrecke x in km	Tarif in €
St. Pölten	60	11,00
Linz	190	31,20
Salzburg	317	47,50
Innsbruck	572	58,30
Landeck	647	58,70
Bregenz	770	64,30

– Bestimmen Sie mittels Regressionsrechnung eine Polynomfunktion 3. Grades, die die Abhängigkeit des Tarifs von der zu fahrenden Fahrtstrecke beschreibt.
– Stellen Sie die Funktion gemeinsam mit den angegebenen Werten in einem Diagramm dar und achten Sie dabei auf eine sinnvolle Skalierung der Achsen.

b) Im Kurzstreckenbereich kann die Abhängigkeit des Tarifs von der zurückgelegten Fahrtstrecke mithilfe folgender Funktion beschrieben werden:

$T(x) = 0{,}19x$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 0,19 im gegebenen Sachzusammenhang.

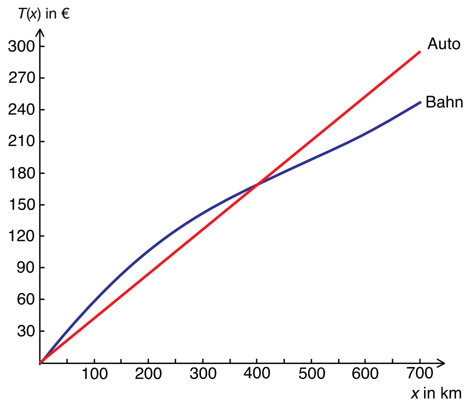
c) Die folgende Funktion T gibt den Tarif in Abhängigkeit von der Fahrtstrecke x entlang einer anderen Bahnstrecke an:

$T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 3 \cdot 10^{-4}x^2 + 0{,}2305x - 0{,}8711$

x … Fahrtstrecke in km
$T(x)$ … Tarif in € für die Fahrtstrecke x

– Ermitteln Sie mithilfe der Differenzialrechnung diejenige Fahrtstrecke, für die der Preiszuwachs am geringsten ist.
– Berechnen Sie den Preiszuwachs für diese Fahrtstrecke.

d) Eine Firma schickt 3 Angestellte auf Dienstreise. Als Kostenersatz müssen den Angestellten entweder € 0,42 pro gefahrenem Kilometer für ein gemeinsames Auto oder jeweils der Bahntarif 2. Klasse ohne Vorteilsticket rückerstattet werden. In der nebenstehenen Grafik sind die Bahnkosten für 3 Personen und das für den PKW zu erstattende Kilometergeld dargestellt.

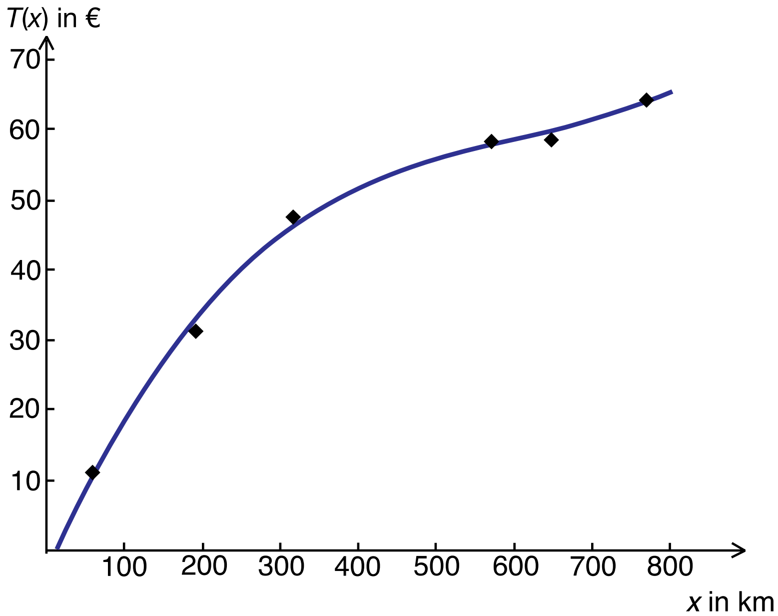


– Geben Sie an, wann die Firma Kilometergeld und wann sie Bahnkostenersatz leisten sollte, um ihre Kosten gering zu halten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 0{,}0004x^2 + 0{,}2557x - 3{,}5482$



b) $T(x) = 0{,}19x$
0,19 ist die Steigung der linearen Tariffunktion. Sie gibt den Tarif pro gefahrenem Kilometer an. Ein Kilometer kostet also € 0,19.

c) Die Preissteigerung pro Kilometer entspricht der Steigung der Tangente an die Tariffunktion, die man mit der 1. Ableitung berechnen kann. Zur Berechnung der geringsten Preissteigerung muss die 2. Ableitung berechnet und gleich null gesetzt werden. Es wird also die x-Koordinate des Wendepunkts der Tariffunktion berechnet.
$T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 3 \cdot 10^{-4}x^2 + 0{,}2305x - 0{,}8711$
$T'(x) = 6 \cdot 10^{-7}x^2 - 6 \cdot 10^{-4}x + 0{,}2305$
$T''(x) = 1{,}2 \cdot 10^{-6}x - 6 \cdot 10^{-4}$
$1{,}2 \cdot 10^{-6}x - 6 \cdot 10^{-4} = 0$
$1{,}2 \cdot 10^{-6}x = 6 \cdot 10^{-4}$
$x = 500$ km
Preiszuwachs an der Stelle $x = 500$:
$T'(500) = 6 \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 - 6 \cdot 10^{-4} \cdot 500 + 0{,}2305 = 0{,}0805$
Der Preiszuwachs an dieser Stelle beträgt ungefähr € 0,08 pro km.

d) Die Grafik zeigt, dass bis zu einer Strecke von ca. 400 km der Bahntarif höher liegt als das Kilometergeld. Die Firma hat bei Strecken bis zu 400 km geringere Kosten, wenn die 3 Angestellten gemeinsam mit dem Auto fahren. Für Strecken, die länger als 400 km sind, ist für die Firma der Bahnkostenersatz günstiger.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) 1 Zahlen und Maße
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 1
c) schwer	c) 3
d) leicht	d) 1

Thema: Verkehr

Quelle: http://www.oebb.at (Tarife und km-Angaben)

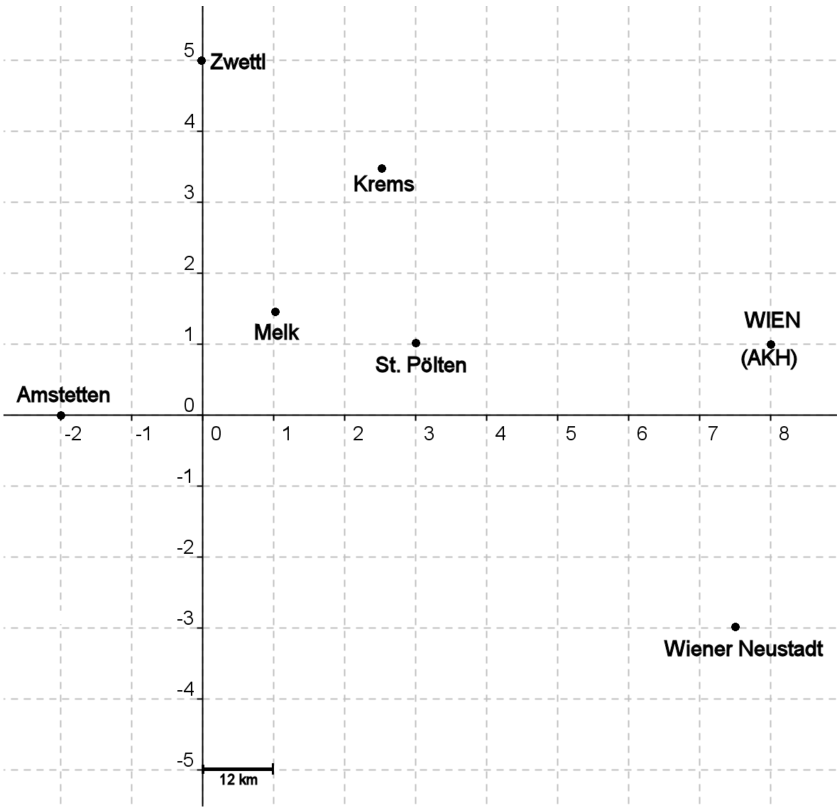
Rettungshubschrauber

Aufgabennummer: B_246

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Einsatz von Hubschraubern ermöglicht schnelle und sichere Krankentransporte.

Im nachstehenden Koordinatensystem sind Krankenhäuser eingezeichnet, die über einen Hubschrauberlandeplatz verfügen. Bei der Darstellung entspricht eine Einheit im Koordinatensystem einer Strecke von 12 km.



a) – Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Koordinaten des Krankenhauses Krems ab.
– Stellen Sie denjenigen Vektor auf, der den geradlinigen Flug eines Hubschraubers vom Krankenhaus Krems zum AKH Wien beschreibt.

b) Ein Hubschrauber startet beim Krankenhaus Wiener Neustadt. Der Flug wird durch die folgenden Vektoren beschrieben:

Zuerst $\begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$, dann $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und schließlich $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

– Zeichnen Sie den Hubschrauberflug in der obigen Abbildung ein.

c) Der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ beschreibt den Hubschrauberflug vom Krankenhaus St. Pölten zum Krankenhaus Zwettl.

– Berechnen Sie die Länge dieses Hubschrauberflugs in Kilometern.

d) Ein Hubschrauber fliegt vom Krankenhaus Melk Richtung Krankenhaus Krems.

– Zeichnen Sie den entsprechenden Einheitsvektor dieser Richtung ausgehend vom Krankenhaus Melk in die obige Abbildung ein.
– Dokumentieren Sie, wie man diesen Einheitsvektor berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

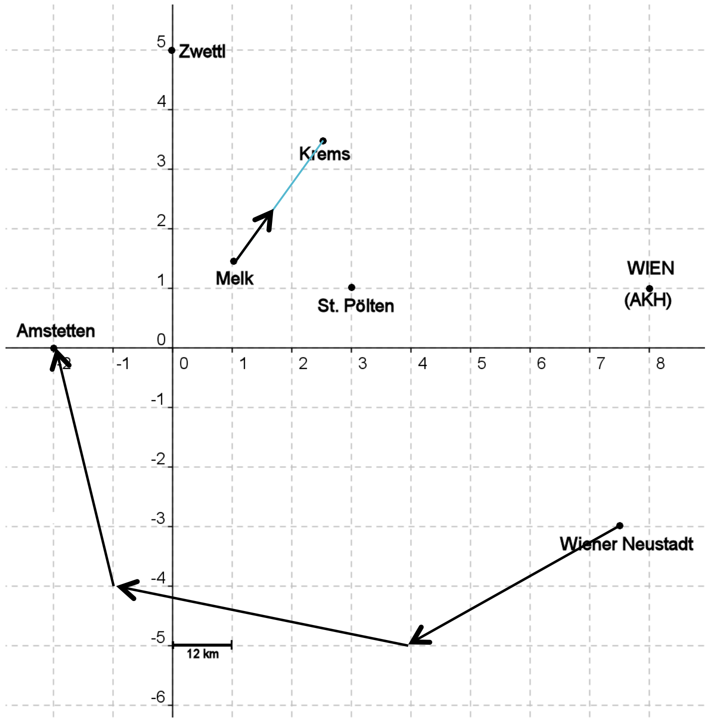
Möglicher Lösungsweg

a) Krems (2,5|3,5) *Ablesetoleranz: ± 0,1 Einheiten*

Krems – Wien: $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$

Lösung auch grafisch möglich.

b)



c) St. Pölten – Zwettl = $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
Länge (Betrag) = 5 Einheiten, das entspricht einer Entfernung von 60 km Luftlinie.

d) Die Koordinaten des Vektors Melk – Krems werden durch den Betrag dieses Vektors dividiert.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) —
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1
d) 2

Thema: Verkehr

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Saftpackung

Aufgabennummer: B_232

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Saftpackung hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge *a* und der Füllhöhe *h* (Abb. 1). Sie enthält 1 Liter Saft.

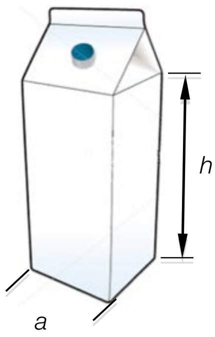


Abb. 1

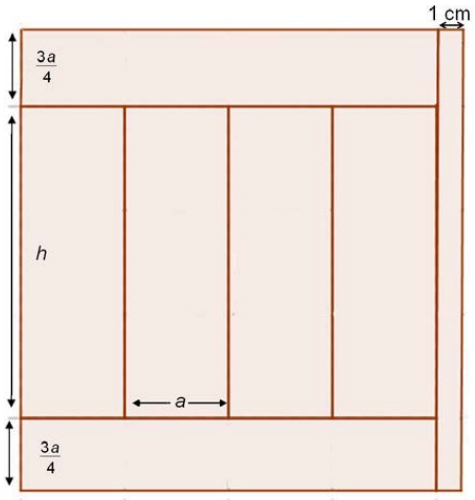


Abb. 2

Die Packung wird aus einem beschichteten Karton in Rechteckform gefertigt (Abb. 2), dessen Fläche sich mit der folgenden Formel berechnen lässt:

$$A = 6a^2 + \frac{3a}{20} + \frac{4}{a} + \frac{1}{10a^2}$$

A … Flächeninhalt in dm²
a … Länge der Seitenkante in dm

a) – Zeigen Sie die Richtigkeit der angegebenen Formel für A. Verwenden Sie dazu die Angaben aus Abb. 2 und die Formel $V = a^2 \cdot h$ für das Volumen V der eingefüllten Flüssigkeit bei einer Füllmenge von V = 1 Liter.

b) Die Abb. 3 zeigt die Abhängigkeit der für die 1-Liter-Packung benötigten Kartonfläche A von der Seitenkante *a*.

– Interpretieren Sie den Verlauf der Funktion in einer sinnvollen Definitionsmenge.

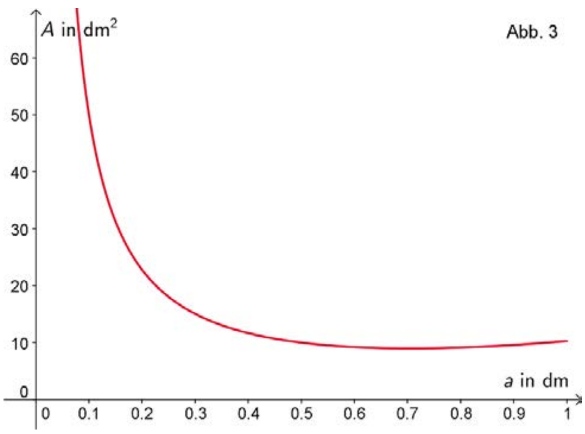
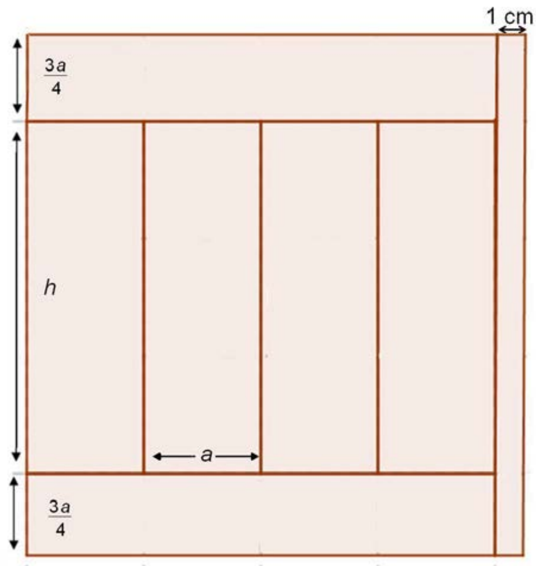


Abb. 3

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Fläche des Materials, aus dem die Packung hergestellt wird, setzt sich aus Rechtecken zusammen.

Beachtung von $a^2 \cdot h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{a^2}$

$A = 4a \cdot h + \frac{6a}{4} \cdot 4a + 0{,}1\,(\frac{6a}{4} + h)$

Das Ausmultiplizieren und Vereinfachen liefert:

$A = 6a^2 + 0{,}15a + \frac{4}{a} + \frac{0{,}1}{a^2}$

In Bruchform:

$A = 6a^2 + \frac{3a}{20} + \frac{4}{a} + \frac{1}{10a^2}$

b) Die Funktion A ist für $a = 0$ nicht definiert: Die Seitenkante a der Saftpackung kann nicht null sein. Der Definitionsbereich von A enthält daher reelle Zahlen $a > 0$.

Sehr kleine Werte von a bedeuten, dass die Füllhöhe groß sein muss, die Packung ist hoch und schmal.
Je größer a wird, desto kleiner wird die Füllhöhe der 1-Liter-Packung. Die Packung wird breiter und niedriger. Theoretisch könnte a beliebig groß werden, allerdings strebt h dann gegen null.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) schwer	a) 3
b) mittel	b) 3

Thema: Alltag

Quelle: Daten und Bildidee von http://www.tetrapak.com/at/

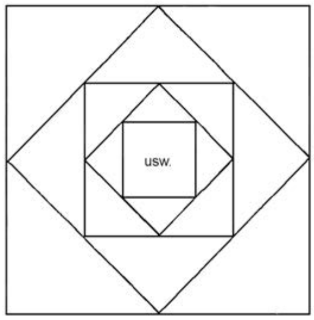
Seriationsmaterial

Aufgabennummer: B_242

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In einem Kindergarten gibt es verschiedene Materialien, mit denen die Kinder spielerisch Größenverhältnisse erforschen können. Eines dieser Materialien besteht aus quadratischen Platten aus festem Schaumstoff, deren Seitenlängen S_n eine geometrische Folge bilden (Abb. 1). Jedes Quadrat berührt das nächstgrößere mit seinen Eckpunkten genau im Mittelpunkt der Seiten. Die größte Platte hat eine Seitenlänge von 1 Meter (m).

Abb. 1



a) – Berechnen Sie die Seitenlänge der 2. Platte in Zentimetern (cm).

b) – Begründen Sie, warum der nachstehende Graph in Abb. 2 die geometrische Folge, die in Abb. 1 dargestellt ist, beschreibt.

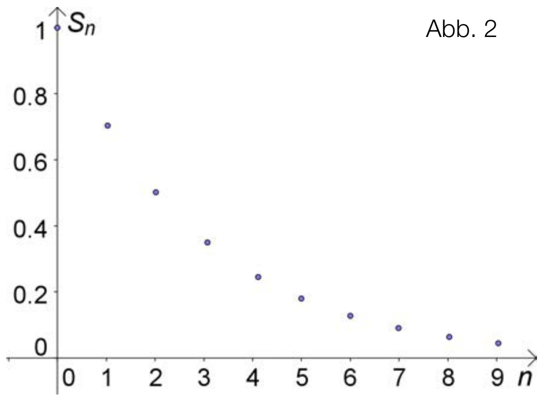


Abb. 2

c) Ein Spielmaterial besteht aus Holzstäben, deren Länge jeweils um 5 cm zunimmt. Der kürzeste Stab ist 10 cm lang.

– Erstellen Sie eine Formel, mit der man die Länge a_n eines beliebigen Stabes berechnen kann.
– Beschreiben Sie alle Variablen, die in der Formel vorkommen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Seitenlänge der zweiten Platte ist die Diagonale eines Quadrats mit der halben Seitenlänge der ersten:
$a_0 = 100$ cm
$a_1 = 50 \cdot \sqrt{2} \approx 71$ cm

b) Der Graph in Abb. 2 beschreibt eine geometrische Folge mit abnehmenden Gliedern. Die Zahlenwerte der dargestellten Folgeglieder stimmen mit den Seitenlängen S_n in Abb. 1 überein.

Jede schlüssige, korrekte Begründung gilt als richtig.

c) Bei den Holzstäben handelt es sich um eine arithmetische Folge.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot k$ mit $n \in \{1, 2, 3, ...\}$

a_1 … Länge des 1. Stabes in cm
k … Längenzunahme in cm
a_n … Länge des n-ten Stabes in cm

$a_n = 10 + (n - 1) \cdot 5$

Es können auch andere Bezeichnungen gewählt werden.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Weinbau (2)*

Aufgabennummer: B_413		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Aus nostalgischen Gründen werden in einem kleinen Weingut Trauben der Sorte *Welschriesling* mit einer renovierten Handpresse gepresst.
Der zylinderförmige Korb, in dem die Weintrauben gepresst werden, hat dabei die folgenden Abmessungen:
Höhe h = 80 cm, Innenradius r = 42 cm.

– Überprüfen Sie nachweislich mithilfe der Volumsformel des Drehzylinders, ob die nachstehenden Aussagen jeweils richtig sind.

Aussage 1: „Wäre die Presse 1,6 m hoch (bei gleichem Durchmesser), so würde sie das doppelte Volumen fassen."
Aussage 2: „Hätte die Presse einen Innenradius von 84 cm (bei gleicher Höhe), so würde sie das doppelte Volumen fassen."

Der Korb ist zu 95 % mit Trauben gefüllt. Aus diesen Trauben werden 350 Liter Traubenmost gepresst.

– Berechnen Sie den prozentuellen Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Volumen der Trauben.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Während der Vergärung von Traubenmost zu Wein wird CO_2 gebildet. In der nachstehenden Tabelle sind 6 Messwerte eines Vergärungsprozesses angegeben.

Zeit in Sekunden	CO_2-Druck in Kilopascal
0	90
100	100
200	115
300	135
400	155
500	190

Die Abhängigkeit des CO_2-Drucks von der Zeit soll beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen exponentiellen Regressionsfunktion.

c) Weine der Sorten *Zweigelt* und *Grüner Veltliner* werden in Kisten zu 12 Flaschen und Kartons zu 6 Flaschen verkauft. Die Preise pro Flasche sind unabhängig von der Packungsgröße.

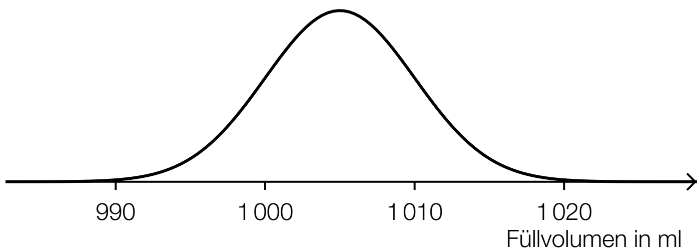
1 Kiste *Zweigelt* und 1 Karton *Grüner Veltliner* kosten insgesamt € 47,40.
2 Kisten *Grüner Veltliner* und 1 Karton *Zweigelt* kosten insgesamt € 72.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem der Preis für eine Flasche *Zweigelt* und der Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner* berechnet werden können.
– Berechnen Sie den Preis für eine Flasche *Zweigelt* und den Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner*.

d) Der Wein wird mit einem manuellen Reihenfüller in Flaschen abgefüllt. Das Füllvolumen der Flaschen kann dabei als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,005$ Milliliter (ml) und der Standardabweichung $\sigma = 5$ ml angenommen werden.

– Ermitteln Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem 95 % der Füllvolumina liegen.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion dieser Normalverteilung dargestellt.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Flasche ein Füllvolumen von mindestens 1 000 ml hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Aussage 1 ist richtig, weil das Volumen direkt proportional zur Höhe ist.
Aussage 2 ist falsch, weil das Volumen nicht direkt proportional zum Radius ist.
Bei Verdoppelung des Radius erhält man das vierfache Volumen.

Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.

Volumen der Trauben im Korb in Litern: $0{,}95 \cdot 4{,}2^2 \cdot \pi \cdot 8 = 421{,}1...$
relativer Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Traubenvolumen:
$\frac{350}{421{,}1...} = 0{,}8310... \approx 83{,}1\ \%$

b) Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$p(t) = 87{,}24 \cdot 1{,}00149^t$ *(Parameter gerundet)*

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Parameter bei der Ermittlung der Regressionsfunktion erhalten.

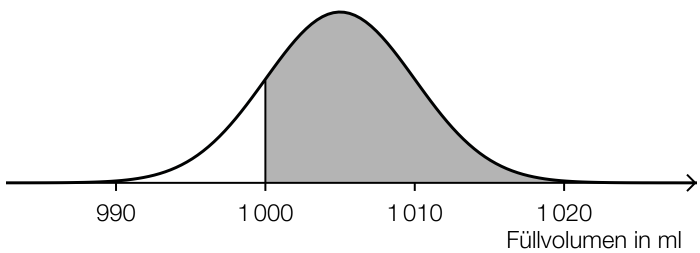
c) z ... Preis für 1 Flasche *Zweigelt*
g ... Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*

I: $12 \cdot z + 6 \cdot g = 47{,}40$
II: $24 \cdot g + 6 \cdot z = 72$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$z = 2{,}80$
$g = 2{,}30$

Preis für 1 Flasche *Zweigelt*: € 2,80
Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*: € 2,30

d) Ermittlung des symmetrischen Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a < X < \mu + a) = 0{,}95 \Rightarrow [995{,}2;\ 1\,014{,}8]$
(Ein Ermitteln der Intervallgrenzen mithilfe der 2σ-Umgebung ist ebenfalls zulässig.)



Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für den richtigen Nachweis zur Aussage 1
1 × D2: für den richtigen Nachweis zur Aussage 2
Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.
1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Anteils

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln einer Gleichung der exponentiellen Regressionsfunktion

c) 1 × A: für das richtige Erstellen eines Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Preise

d) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Intervalls
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

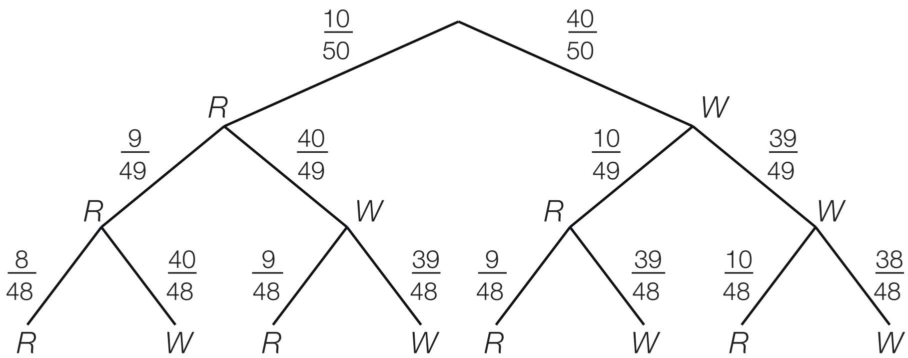
Spielefest (1)

Aufgabennummer: B_249

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Praxisgruppe betreut ein Spielefest in einer Volksschulklasse, bei dem die Kinder verschiedene Spielstationen besuchen können.

a) In einer Kiste befinden sich 10 rote und 40 weiße Kugeln. Jedes Kind darf 3-mal blind hineingreifen und jeweils 1 Kugel herausholen. Dann werden die Kugeln für das nächste Kind wieder hineingelegt.
Das nachstehende Baumdiagramm stellt diesen Sachverhalt für ein Kind dar.



– Kennzeichnen Sie im Baumdiagramm alle Möglichkeiten, 2 rote Kugeln (*R*) und 1 weiße Kugel (*W*) zu ziehen.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind 3 rote Kugeln zieht.

b) Bei einer Station werfen die Kinder aus einer bestimmten Entfernung 5 Tennisbälle in einen Kübel. Peter hat eine Trefferquote von 80 % pro Wurf.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Peter höchstens 4-mal trifft.

c) Beim Kirschkernweitspucken bekommt jedes Kind 2 Kirschen, deren Kerne es möglichst weit spucken soll. Die Flugbahn eines Kirschkerns kann modellhaft mit einer Polynomfunktion 2. Grades angenommen werden.
Thomas spuckt einen Kern aus einer Höhe von 1 m in einem Winkel von 45° nach oben weg. Der Kern fällt nach 8 m zu Boden.

– Erstellen Sie eine Skizze der Flugbahn.
– Stellen Sie mithilfe der gegebenen Bedingungen ein Gleichungssystem auf, mit dem die Funktionsgleichung für die Flugbahn berechnet werden kann.
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung.

d) Beim Spielefest haben 24 Kinder mitgemacht. Insgesamt waren 18 Kinder beim Ballwerfen (Menge *BW*). Beim Kirschkernspucken (Menge *KS*) waren insgesamt 14 Kinder. 10 Kinder waren sowohl beim Ballwerfen als auch beim Kirschkernspucken.

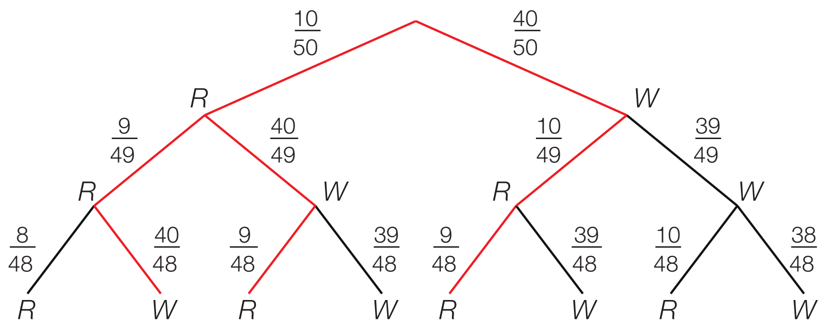
– Erstellen Sie ein Venn-Diagramm, das diesen Sachverhalt beschreibt.
– Lesen Sie aus diesem Diagramm ab, wie viele Kinder keine dieser beiden Spielstationen besucht haben.
– Beschreiben Sie, was diese Mengenverknüpfungen im Sachzusammenhang aussagen:

(1) $M_1 = KS \setminus BW$
(2) $M_2 = KS \cap BW$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Es gibt 3 Möglichkeiten, 1 weiße Kugel und 2 rote Kugeln zu ziehen.

X … Anzahl der roten Kugeln

$P(X = 3) = \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{8}{48} = 0{,}006\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, 3 rote Kugeln zu ziehen, liegt bei etwa 0,6 %.

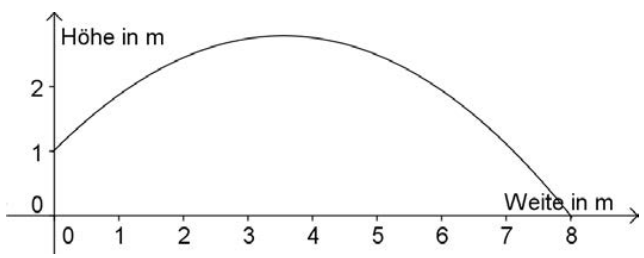
b) X … Treffer
$p = 0{,}8$; $n = 5$

$P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - \binom{5}{5} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 = 1 - 0{,}32768 = 0{,}67232$

Peter trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 67,2 % höchstens 4-mal.

Auch eine Berechnung ohne Gegenwahrscheinlichkeit ist zulässig.

c)

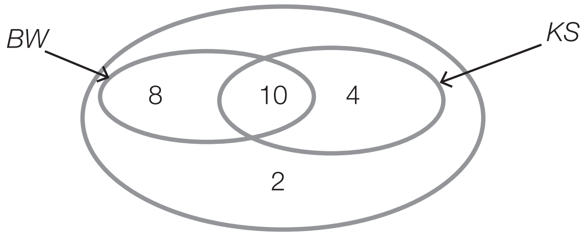


allgemeine Form der Parabelgleichung: $y = ax^2 + bx + c$ $\quad y' = 2ax + b$
Man braucht 3 Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten a, b und c.

Punkt $(0\|1)$	(1) $c = 1$
Punkt $(8\|0)$	(2) $64a + 8b + c = 0$
$\tan(45°) = 1$	(3) $b = 1$

$f(x) = -\frac{9}{64}x^2 + x + 1$

d)



2 Kinder haben keine der beiden Stationen besucht.

(1) $M_1 = KS \setminus BW$ … Menge der Kinder, die beim Kirschkernspucken, aber nicht beim Ballwerfen mitgemacht haben

(2) $M_2 = KS \cap BW$ … Menge der Kinder, die sowohl beim Kirschkernspucken als auch beim Ballwerfen teilgenommen haben

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 3
d) 4

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Spracherwerb

Aufgabennummer: B_248

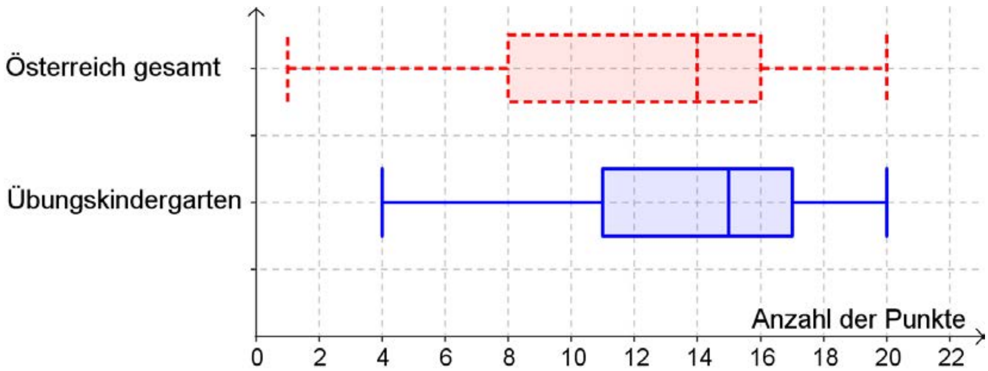
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Früh- und Kindergartenpädagogik beschäftigt sich mit der Sprachentwicklung von Kindern im Vorschulalter.

a) In einem Kindergarten mit 220 Kindern wird die Verwendung der Sprachen Deutsch, Englisch und Türkisch erhoben. 35 Kinder sprechen ausschließlich Deutsch. 76 Kinder sprechen nur Deutsch und Englisch, 48 Kinder sprechen alle 3 Sprachen. Es gibt kein Kind, das als einzige Sprache Englisch spricht. Insgesamt sprechen 95 Kinder Türkisch, 174 Kinder Deutsch und 155 Kinder Englisch.

– Veranschaulichen Sie die Verteilung der Sprachen mithilfe eines vollständig ausgefüllten Venn-Diagramms.
– Ermitteln Sie, wie viele Kinder keine der 3 Sprachen sprechen.

b) In der nachstehenden Abbildung werden sowohl die österreichweiten Ergebnisse einer Sprachtestung an Vorschulkindern als auch die Ergebnisse eines Übungskindergartens dargestellt.
Ist die beim Test erreichte Punktezahl kleiner als 10, besteht sonderpädagogischer Förderbedarf.

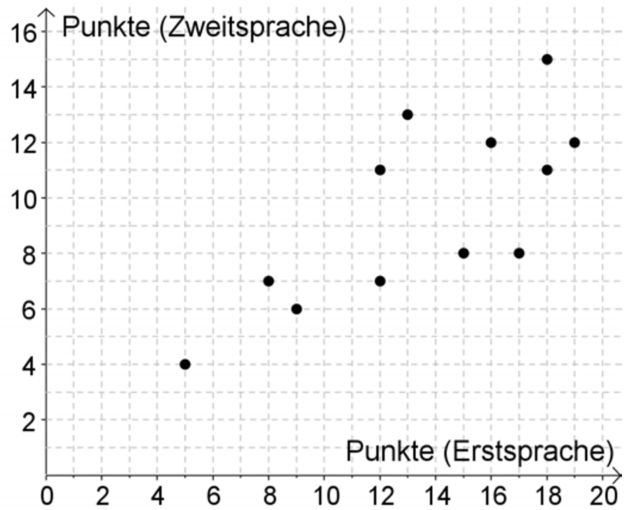


– Lesen Sie den Median für die österreichweiten Ergebnisse ab.
– Ermitteln Sie die Spannweite für die österreichweiten Ergebnisse.
– Begründen Sie, warum die folgende Aussage in einer Zeitung nicht aus dem Boxplot der gesamtösterreichischen Ergebnisse geschlossen werden kann: „In Österreich haben nur 20 % aller Vorschulkinder sprachlichen Förderbedarf."
– Vergleichen Sie die österreichweiten Ergebnisse mit jenen des Übungskindergartens bezüglich des Anteils der Kinder mit Förderbedarf.

c) Es wird vermutet, dass der Zweitspracherwerb beim Kind umso erfolgreicher verläuft, je besser das Kind seine Erstsprache (Muttersprache) beherrscht.

In einer Vorschulgruppe wurden dazu 12 zweisprachige Kinder in ihrer Muttersprache und ihrer Zweitsprache getestet. Bei den Tests waren jeweils 20 Punkte maximal erreichbar. Das Ergebnis der beiden Tests ist in der nachstehenden Tabelle und in der unten stehenden Abbildung dargestellt:

Punkte Erstsprache	5	8	9	12	12	13	15	16	17	18	18	19
Punkte Zweitsprache	4	7	6	7	11	13	8	12	8	11	15	12

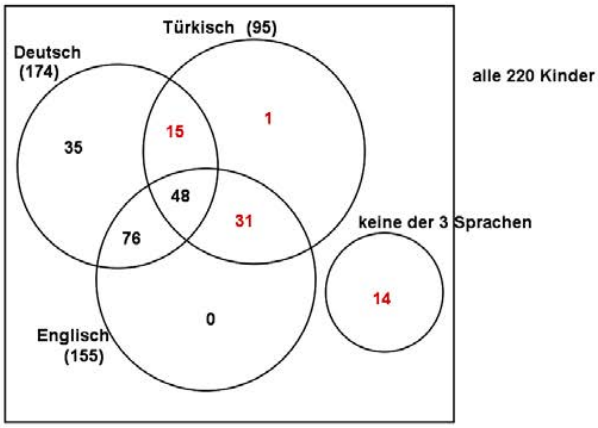


– Bestimmen Sie die Regressionsgerade.
– Zeichnen Sie die Regressionsgerade im obigen Koordinatensystem ein, sodass die Erstsprache die unabhängige und die Zweitsprache die abhängige Variable ist.
– Beurteilen Sie den Wert des Korrelationskoeffizienten im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Venn-Diagramm:



keine der 3 Sprachen: 14 Kinder

b) Median = 14 Punkte

Spannweite = 19 Punkte

Zwischen dem Minimum = 1 Punkt und dem 1. Quartil (= 8 Punkte) liegen bereits 25 % aller Testergebnisse und damit mehr als 20 %.

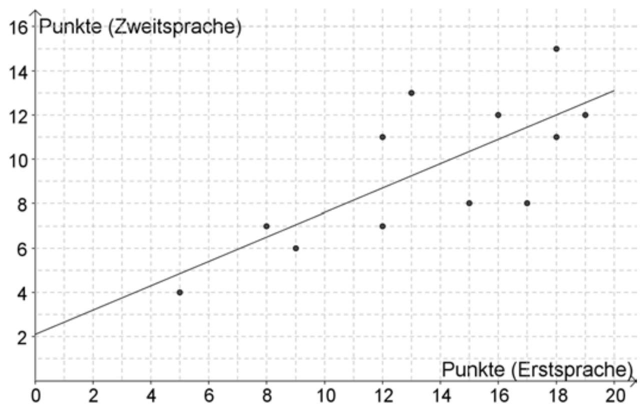
Im Übungskindergarten ist der Anteil an Kindern mit Förderbedarf niedriger als 25 % (1. Quartil = 11 Punkte) und damit niedriger als bei der österreichweiten Untersuchung.

c) Regressionsgerade: $y = 0{,}55 \cdot x + 2{,}1$

r berechnen $\Longrightarrow$ $r = 0{,}74$

$\Longrightarrow$ positiver Zusammenhang

In diesem Test hat sich gezeigt, dass gute Kenntnisse der Erstsprache das Erlernen der Zweitsprache begünstigen.
Die Streuung der Werte ist allerdings relativ groß.



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 3

Thema: Psychologie

Quellen: –

Stadtlauf (1)

Aufgabennummer: B_245

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

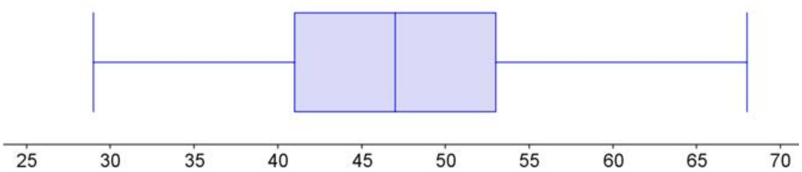
In einer Stadt findet jährlich ein Laufwettbewerb statt.

a) Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern einer Maturaklasse hat am Stadtlauf teilgenommen. In der folgenden Tabelle sind ihre Laufzeiten in Minuten aufgelistet:

46	50	43	49	59	61
53	54	53	56	67	39

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und den Median der Laufzeiten.
– Begründen Sie, warum der Median gegenüber extremen Einzelwerten („Ausreißern“) stabiler ist als das arithmetische Mittel.

b) Die nachstehende Grafik zeigt einen Boxplot über die Laufzeiten aller Teilnehmer/innen des Stadtlaufs. Die Laufzeiten sind in Minuten angegeben.

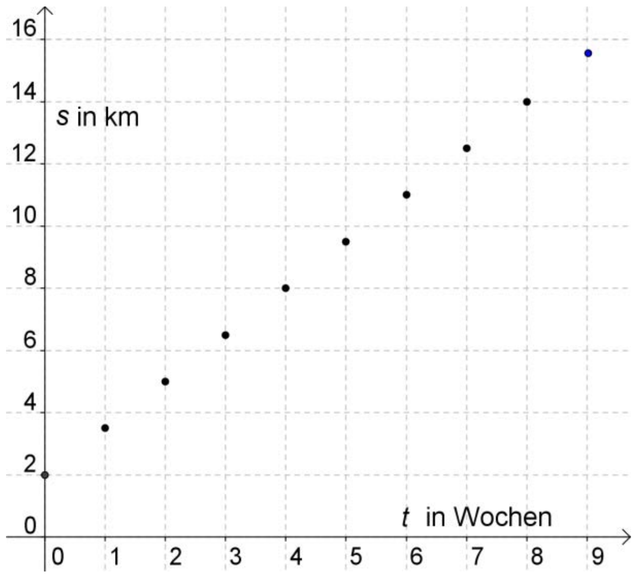


– Lesen Sie die ungefähren Werte der 5 Kenngrößen des Boxplots ab.
– Interpretieren Sie anhand der abgelesenen Kenngrößen das obere Quartil in Bezug auf die erreichten Laufzeiten.
– Begründen Sie, warum man anhand des Boxplots keine Aussage über die Anzahl der Teilnehmer/innen machen kann.

c) Erfahrungsgemäß nehmen etwa 6,3 % der Hobbyläufer/innen Dopingmittel.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens 1 Person Dopingmittel verwendet hat, wenn n zufällig ausgewählte Personen getestet werden.

d) Sabine und Tobias absolvieren ein Trainingsprogramm für den nächsten Stadtlauf.
Sabines tägliches Training ist für einen Zeitraum von 9 Wochen in der nebenstehenden Grafik dargestellt.
Tobias beginnt ebenfalls mit 2 km täglich und erhöht seine Laufstrecke jede Woche um 30 % in Bezug auf den jeweils vorigen Wert.



– Erstellen Sie mithilfe der Grafik eine Formel für Sabines Trainingsprogramm.
– Erstellen Sie eine Formel, mit der Sie die Laufstrecke von Tobias nach beliebig vielen Wochen berechnen können.
– Zeichnen Sie das Trainingsprogramm von Tobias in die Grafik ein.
– Lesen Sie ab, in welcher Trainingswoche Sabine und Tobias ungefähr das gleiche Laufpensum absolvieren.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) arithmetisches Mittel: 52,5 Minuten
Median: 53 Minuten

Das arithmetische Mittel wird aus allen vorkommenden Einzelwerten berechnet, daher wirken sich extreme Einzelwerte relativ stark aus.
Der Median ist die Mitte der geordneten Datenliste. Extreme Einzelwerte am oberen oder unteren Ende wirken sich auf den Median nicht aus. Daher ist der Median stabiler gegenüber Ausreißern.

Auch andere sinngemäß richtige Erklärungen sind zulässig.

b) Minimum: 29 Minuten (min), Maximum: 68 min, Median: 47 min, 1. Quartil: 41 min, 3. Quartil: 53 min

Mindestens 25 % der Läufer/innen haben Laufzeiten zwischen 53 min und 68 min erreicht (Spanne: 15 min). Die langsamste Laufzeit lag bei 68 min.

Aus dem Boxplot kann man nur Extremwerte und Quartile ablesen. Daher kann man eine Aussage über die Verteilung der Laufzeiten machen, aber nicht über die Anzahl der Läufer/innen.

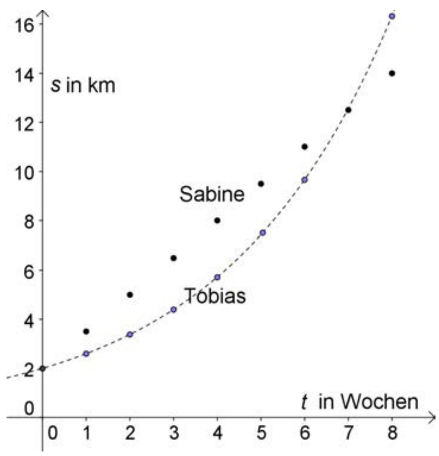
Auch andere sinngemäß richtige Interpretationen und Begründungen sind zulässig.

c) X … Anzahl der Personen, die Dopingmittel verwendet haben

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}063)^n$

d) Sabine: arithmetische Folge
$s_{\text{Sabine}}(t) = 1{,}5 \cdot t + 2$ t … Anzahl der Trainingswochen

Tobias: geometrische Folge
$s_{\text{Tobias}}(t) = 2 \cdot 1{,}3^t$ t … Anzahl der Trainingswochen



In der 7. Woche absolvieren beide das gleiche Laufpensum.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) –
d) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 3
c) mittel	c) 1
d) leicht	d) 4

Thema: Sport

Quellen: –

Tagestemperatur

Aufgabennummer: B_252		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Die nachstehend angeführten 3 Messwerte wurden an einem Vormittag aufgezeichnet und sollen mithilfe einer abschnittsweise definierten linearen Funktion T in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

t in h	T in °C
6	8
9	10
12	16

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden (h)
$T(t)$ ... Temperatur nach t Stunden in Grad Celsius (°C)

Es wird angenommen, dass in den Intervallen [6; 9] und [9; 12] die Temperatur jeweils linear zunimmt.

– Stellen Sie den Temperaturverlauf im Intervall [6; 12] grafisch dar.
– Stellen Sie die Funktion T abhängig von der Zeit t im Intervall [6; 12] auf.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Funktion T die Temperatur um 11:30 Uhr.

b) An einem Tag im Oktober hat man einen Temperaturverlauf gemessen, der durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden kann.

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden
$f(t)$ ... Temperatur zum Zeitpunkt t in °C

t	2	5	8	11	14	17	20	23
$f(t)$	5,4	4,3	8,3	12,2	15,3	14	9,1	7,2

– Erstellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine zu den angegebenen Werten passende Polynomfunktion 3. Grades. (Runden Sie dabei die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.)
– Berechnen Sie den Differenzenquotient dieser Polynomfunktion für das Intervall [6; 12].
– Beschreiben Sie, was dieser Differenzenquotient für das Intervall im Sachzusammenhang aussagt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ansatz über $T(t) = k \cdot t + d$

$k_1 = \frac{10-8}{9-6} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ Punkt einsetzen: $8 = \frac{2}{3} \cdot 6 + d_1$

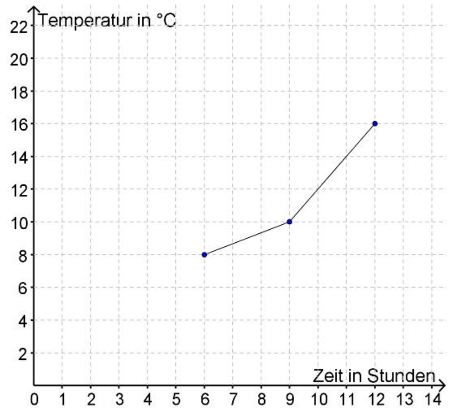
$\Rightarrow d_1 = 4$

$k_2 = \frac{16-10}{12-9} = 2 \Rightarrow$ Punkt einsetzen: $10 = 2 \cdot 9 + d_2$

$\Rightarrow d_2 = -8$

$$T(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t + 4 \text{ für } t \in [6; 9] \\ 2t - 8 \text{ für } t \in [9; 12] \end{cases}$$

$T(11{,}5) = 2 \cdot 11{,}5 - 8 = 15$
Um 11:30 Uhr ergibt das Modell 15 °C.



b) Mittels Technologieeinsatz kommt man zur folgenden Gleichung:

$f(t) = -0{,}0057 \cdot t^3 + 0{,}1446 \cdot t^2 - 0{,}2598 \cdot t + 4{,}4186$

Der Differenzenquotient wird gebildet mit: $\frac{f(12) - f(6)}{12-6} = 0{,}9066 \approx 0{,}91$

Der Differenzenquotient sagt aus, dass die Temperatur im Intervall [6; 12] durchschnittlich um rund 1 °C pro Stunde zunimmt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) schwer	a) 3
b) mittel	b) 3

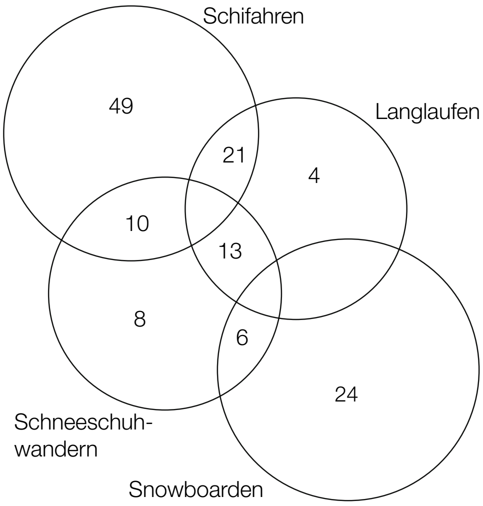
Thema: Sonstiges

Quellen: —

Wintersportwoche

Aufgabennummer: B_243		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

a) Die Teilnehmer/innen einer Wintersportwoche können sich für eine oder zwei Sportarten entscheiden.
Vier Sportarten stehen zur Auswahl.
Im nebenstehenden Venn-Diagramm ist dargestellt, wie sich die Schüler/innen einer Schule entschieden haben.



– Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wie viele Schüler/innen insgesamt an der Sportwoche teilnehmen.
– Lesen Sie ab, wie viele Schüler/innen Schifahren gewählt haben.
– Kennzeichnen Sie die Menge aller Schüler/innen, die Schifahren oder Snowboarden, aber nicht Langlaufen gewählt haben.

b) Sabine wartet an der Talstation einer 6er-Sesselbahn auf ihre Gruppe. Sie beobachtet, wie viele Personen jeweils auf einem Sessel sitzen.
Die Beobachtung der Belegung von 100 aufeinanderfolgenden 6er-Sesseln einer Sesselbahn ist in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst:

Anzahl der Sessel	1	3	7	11	29	34	15
Personenbelegung pro 6er-Sessel	0	1	2	3	4	5	6

– Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm zur Darstellung der erfassten Daten.

c) Die fortgeschrittenen Snowboarder/innen vergnügen sich in einem Obstacle-Course. Der Querschnitt eines Hindernisses wird durch die Funktion h modelliert.

$h(x) = (5{,}69 \cdot 10^{-4}) \cdot x^4 - (9{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot x^2$ mit $-9 \leq x \leq 9$

x … Koordinate der Querschnittsgrundlinie in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe an der Stelle x in Metern (m)

– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen der Funktion h.
– Berechnen Sie die Steigung an der Stelle $x = 8$.

d) Eine schwarze Piste für geübte Schifahrer/innen hat ein durchschnittliches Gefälle von 60 %.

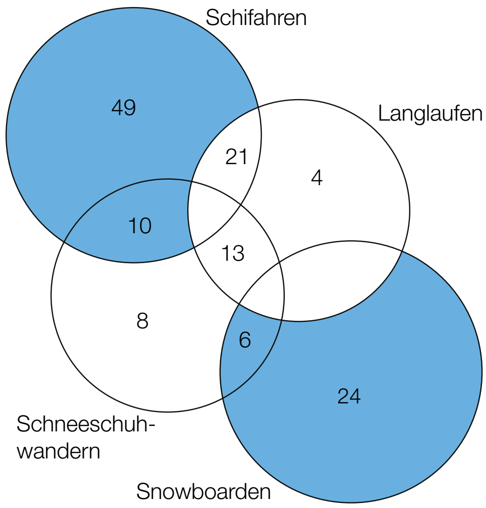
– Erklären Sie anhand einer Skizze, was dieser Wert bedeutet.
– Berechnen Sie den durchschnittlichen Steigungswinkel dieser Piste.
– Überprüfen Sie anhand eines selbst gewählten Beispiels, ob ein doppelt so großes Gefälle auch einen doppelt so großen Steigungswinkel bedeutet.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

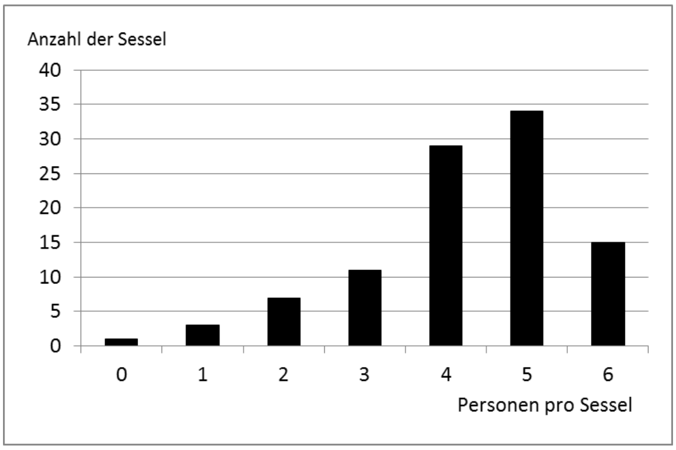
Möglicher Lösungsweg

a) 85 Schüler/innen haben nur eine Sportart gewählt.
50 Schüler/innen haben zwei Sportarten gewählt.
Summe: 135
Insgesamt nehmen 135 Schüler/innen teil.

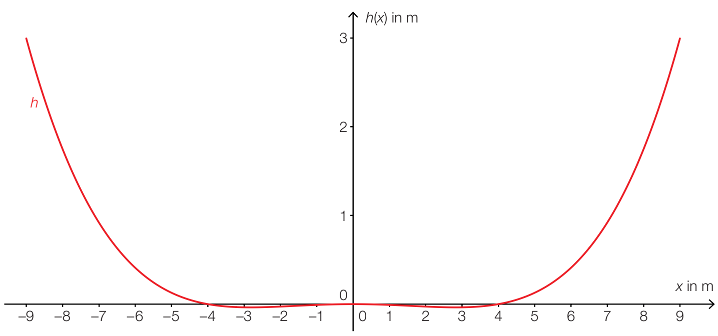
80 Schüler/innen haben Schifahren gewählt.



b) z. B. Säulendiagramm



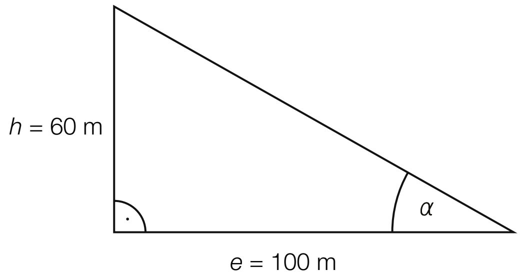
c) $h(x) = (5{,}69 \cdot 10^{-4}) \cdot x^4 - (9{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot x^2$



$h'(x) = (2{,}276 \cdot 10^{-3}) \cdot x^3 - (1{,}82 \cdot 10^{-2}) \cdot x$

$h'(8) = 1{,}019... \approx 1{,}02$

d) Ein Gefälle von 60 % bedeutet bei einer waagrechten Entfernung e = 100 m einen Höhenunterschied h von 60 m.



Der Steigungswinkel α wird mit dem Tangens berechnet:

$k = \tan(\alpha) = \frac{h}{e}$

$k = 60\ \% = 0{,}6$
$\alpha = \arctan(0{,}6) = 30{,}9\ldots$
$\alpha \approx 31°$

z. B. Steigung verdoppeln: $k = 1{,}2$
Steigungswinkel: $\beta = \arctan(1{,}2) \approx 50{,}2° \neq 62°$

Auch andere schlüssige Argumentationen sind zulässig.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 1
c) mittel	c) 2
d) mittel	d) 3

Thema: Sport

Quellen: —

Kinderlieder*

Aufgabennummer: B_511

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Pädagogin fragt die 26 Kinder ihrer Gruppe, ob sie das Kinderlied *Aramsamsam* und ob sie das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen.
7 Kinder kennen beide Kinderlieder.
Insgesamt 13 Kinder kennen das Kinderlied *Aramsamsam*.
3 Kinder kennen keines der beiden Kinderlieder.

a) Die Pädagogin wählt 2 verschiedene Kinder aus den 26 Kindern ihrer Gruppe zufällig aus.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder sowohl das Kinderlied *Aramsamsam* als auch das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen.

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$$P(E) = \frac{3}{26} \cdot \frac{2}{25}$$

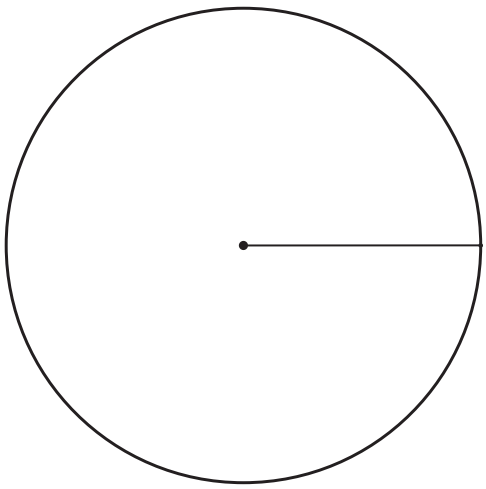
* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Tabelle sollen für diesen Sachverhalt die zugehörigen Prozentsätze für die Gruppe von 26 Kindern eingetragen werden.

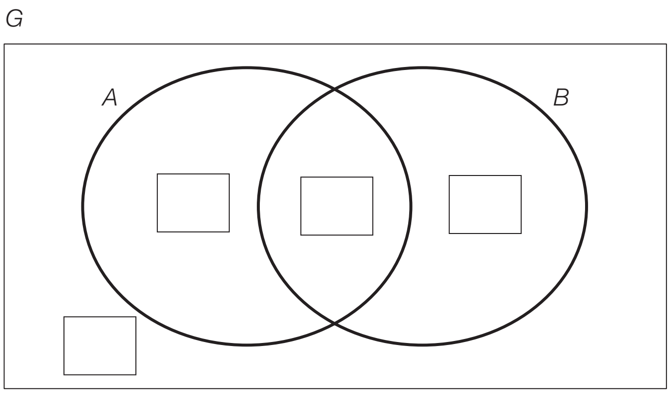
kennen genau eines der beiden Kinderlieder	%
kennen beide Kinderlieder	%
kennen keines der beiden Kinderlieder	11,54 %

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Zahlen ein.

2) Vervollständigen Sie das nachstehende Kreisdiagramm so, dass es den durch die Tabelle beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



c) 1) Vervollständigen Sie das nachstehende Venn-Diagramm durch Eintragen aller Anzahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen.



G ... Menge aller Kinder der Gruppe
A ... Menge der Kinder, die das Kinderlied *Aramsamsam* kennen
B ... Menge der Kinder, die das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen

2) Ermitteln Sie die Anzahl der Elemente der Menge $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Mit den Kindern, denen beide Kinderlieder bekannt sind, singt die Pädagogin das bis dahin allen Kindern der Gruppe unbekannte Kinderlied *Twinkle, twinkle, little star*.

T ... Menge der Kinder, die das Kinderlied *Twinkle, twinkle, little star* mit der Pädagogin singen

3) Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$T \subseteq (A \cup B)$	☐
$T \subseteq (A \cap B)$	☐
$T \subseteq (G \setminus B)$	☐
$T \not\subseteq (B \setminus A)$	☐
$T \not\subseteq (A \setminus B)$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{7}{26} \cdot \frac{6}{25} = 0{,}06461...$

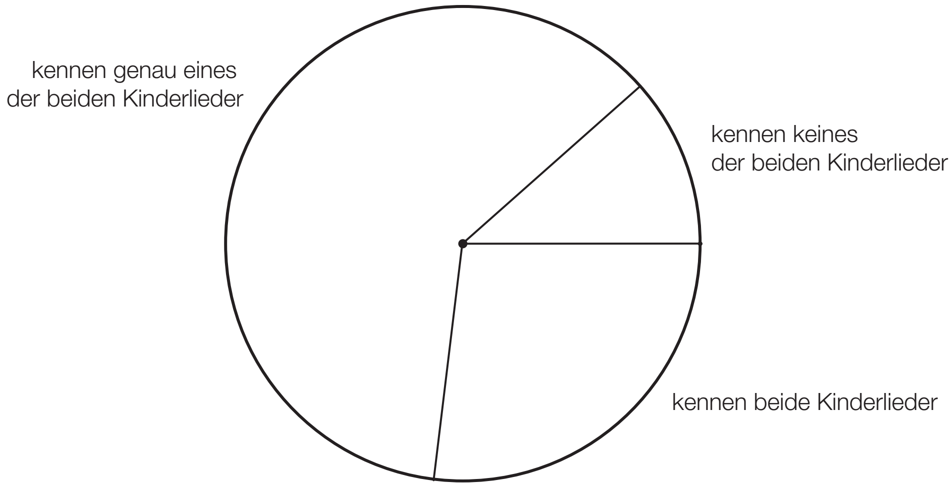
Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder sowohl das Kinderlied *Aramsamsam* als auch das Kinderlied *Backe, backe Kuchen* kennen, beträgt rund 6,46 %.

a2) Beide Kinder kennen keines der beiden Kinderlieder.

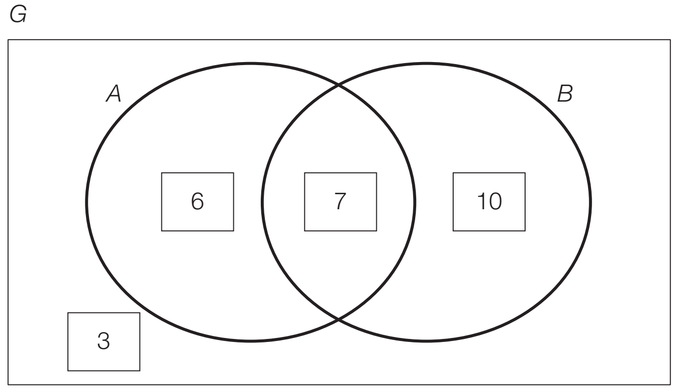
b1)

kennen genau eines der beiden Kinderlieder	**61,54 %**
kennen beide Kinderlieder	**26,92 %**
kennen keines der beiden Kinderlieder	11,54 %

b2)



c1)



c2) 6 + 10 = 16

c3)

$T \subseteq (G \setminus B)$	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
b1) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Zahlen.
b2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Kreisdiagramms.
c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Venn-Diagramms.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Anzahl der Elemente.
c3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Eignungsprüfung

Aufgabennummer: B_238

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

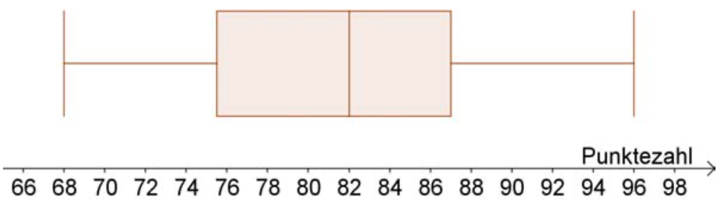
Um eine Bildungsanstalt besuchen zu können, muss eine Eignungsprüfung positiv abgelegt werden.

a) Die Schüler/innen einer ersten Klasse erzielten bei der Eignungsprüfung folgende Punktezahlen:

70, 73, 73, 74, 74, 75, 76, 76, 77, 81, 82, 83, 85, 85, 86, 87, 87, 87, 88, 89, 90, 90, 90, 91, 92, 95, 95, 96, 97

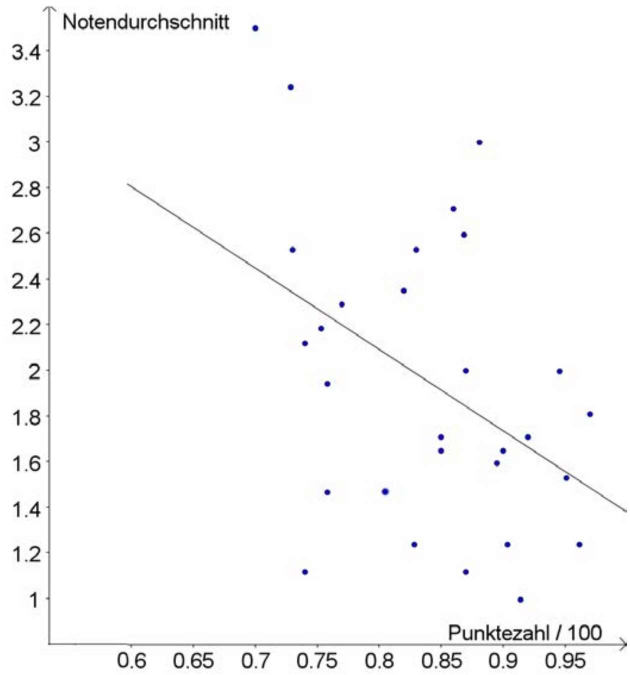
– Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und die Standardabweichung σ.

b) Das Ergebnis einer anderen Klasse ist in einem Boxplot dargestellt.



– Lesen Sie die statistischen Kennzahlen *Median* und *Quartilsabstand* für diese Klasse ab.
– Interpretieren Sie den Boxplot hinsichtlich der prozentuellen Verteilung der Punkte.

c) Ein gutes Abschneiden bei der Eignungsprüfung ist keine Garantie für eine erfolgreiche Schullaufbahn.
Der Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der Eignungsprüfung einer Klasse und dem jeweiligen Notendurchschnitt am Ende des 2. Jahrgangs wurde in einem Punktwolken-Diagramm mit Regressionsgerade dargestellt:



– Kreuzen Sie den zu dieser Regression passenden Korrelationskoeffizienten an. *[1 aus 5]*

$r \approx -1{,}4$	☐
$r \approx -0{,}9$	☐
$r \approx -0{,}4$	☐
$r \approx 0{,}5$	☐
$r \approx 0{,}9$	☐

– Beurteilen Sie den Schulerfolg von Schülerinnen/Schülern, die bei der Eignungsprüfung zwischen 70 und 75 Punkte erreichten, und von Schülerinnen/Schülern, die dabei mehr als 90 Punkte erreichten.
– Geben Sie für jene Schüler/innen, die einen Notendurchschnitt ≤ 1,5 hatten, die Spannweite der Ergebnisse der Eignungsprüfung an.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) mittels Technologieeinsatz:
– arithmetisches Mittel $\bar{x}$ = 84,28 Punkte
– Standardabweichung σ = 7,79 Punkte

b) Median: 82 Punkte
1. Quartil: ca. 76 Punkte
3. Quartil: 87 Punkte
Quartilsabstand: ca. 11 Punkte

25 % der Schüler/innen erreichten Ergebnisse zwischen 68 und 76 Punkten, 25 % zwischen 76 und 82 Punkten, 25 % zwischen 82 und 87 Punkten und 25 % zwischen 87 und 96 Punkten.

c)

$r \approx -0{,}4$	☒

Der Notendurchschnitt der Schüler/innen, die zwischen 70 und 75 Punkte erreichten, ist breit gestreut – von ausgezeichnet bis sehr schwach.
Die Schüler/innen, die mehr als 90 Punkte erreichten, haben einen Notendurchschnitt von maximal 2,0.

Schüler/innen mit Notendurchschnitt ≤ 1,5:
– schlechtestes Ergebnis: 73 Punkte
– bestes Ergebnis: 97 Punkte
– Spannweite: 24 Punkte

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 3

Thema: Sonstiges

Quelle: anonymisierte Daten der BAKIP/BASOP St. Pölten

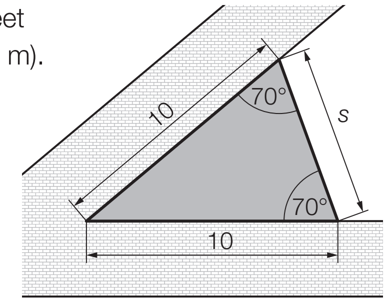
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schlosspark*

Aufgabennummer: B_507

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In einem Schlosspark wird ein dreieckiges Blumenbeet angelegt (siehe nebenstehende Abbildung – Maße in m).



1) Ergänzen Sie den nachstehenden Ausdruck durch Eintragen der richtigen Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen.

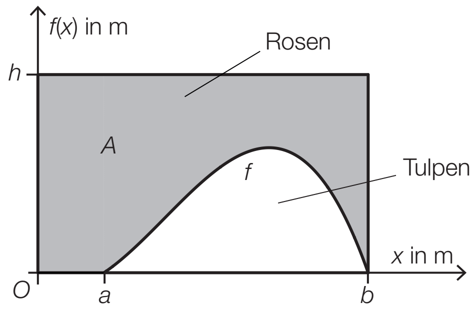
$$s = \sqrt{\square + \square - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos(\square)}$$

Das Blumenbeet soll mit einem Vlies gegen Unkraut abgedeckt werden. Das Abdecken des Blumenbeets kostet pro Quadratmeter € 1,42.

2) Berechnen Sie die Kosten für das Abdecken des Blumenbeets.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein rechteckiges Blumenbeet mit den Seitenlängen b und h ist in einen Bereich für Rosen und einen Bereich für Tulpen unterteilt. Die Begrenzungslinie zwischen diesen Bereichen kann modellhaft durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

A = ____

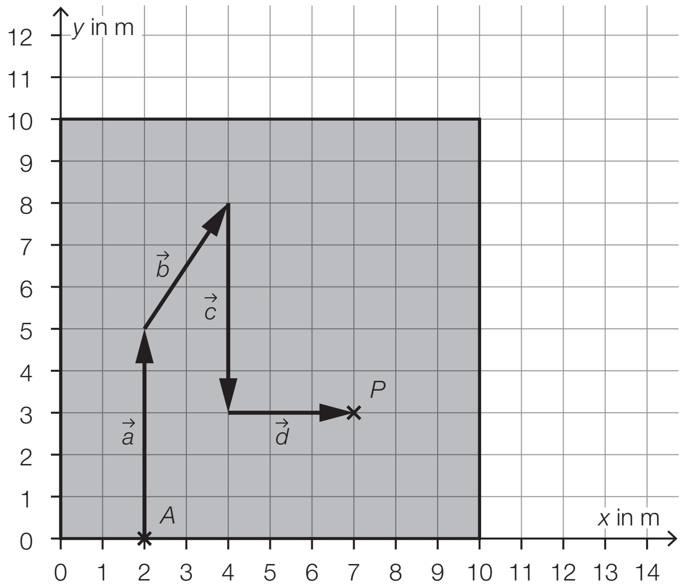
f ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.
Folgende Punkte liegen auf dem Graphen von f: $(3|0{,}8)$, $(5|2{,}7)$, $(7|3{,}7)$, $(9|2{,}3)$.

2) Berechnen Sie mithilfe dieser Punkte die Koeffizienten a, b, c und d.

c) Im Schlosspark gibt es ein Labyrinth aus Hecken. Der Weg durch das Labyrinth wird durch Aneinanderreihen der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{h}$ (in alphabetischer Reihenfolge) beschrieben. Dabei beginnt jeder Vektor an der Spitze des vorherigen Vektors.

Es gilt: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Maße in m)

In der nachstehenden Abbildung ist die quadratische Grundfläche des Labyrinths dargestellt. Der Startpunkt A des Weges durch das Labyrinth, die ersten vier Vektoren und der Punkt P sind bereits eingezeichnet.



1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

2) Ermitteln Sie die Länge des Weges durch das Labyrinth vom Startpunkt A zum Punkt P.

3) Vervollständigen Sie ausgehend vom Punkt P den Weg durch das Labyrinth durch Einzeichnen der Vektoren $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ und $\vec{h}$.

4) Kreuzen Sie die auf die gegebenen Vektoren nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind Gegenvektoren.	☐
Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{g}$ haben den gleichen Betrag.	☐
Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{h}$ sind parallel.	☐
Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ haben den gleichen Betrag.	☐
Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ stehen normal aufeinander.	☐

d) Im Schlosspark wird Schilf gepflanzt. In den ersten Wochen nach der Pflanzung wird die Höhe einer bestimmten Pflanze notiert.

Zeit t nach der Pflanzung in Wochen	1	2	3	4	5	6
Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm	30	34	39	44	48	52

Die Höhe dieser Pflanze soll in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion h beschrieben werden.

t ... Zeit nach der Pflanzung in Wochen
$h(t)$ ... Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion h.
2) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Höhe der Pflanze 20 Wochen nach der Pflanzung.

Möglicher Lösungsweg

a1) $s = \sqrt{\boxed{10^2} + \boxed{10^2} - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos\left(\boxed{40°}\right)}$

Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn im 3. Kästchen das Grad-Zeichen fehlt.

a2) $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin(40°) \cdot 1{,}42 = 45{,}637...$

Die Kosten für das Abdecken des Blumenbeets betragen € 45,64.

b1) $A = b \cdot h - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

b2) I: $f(3) = 0{,}8$
II: $f(5) = 2{,}7$
III: $f(7) = 3{,}7$
IV: $f(9) = 2{,}3$

oder:

I: $a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 0{,}8$
II: $a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 2{,}7$
III: $a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d = 3{,}7$
IV: $a \cdot 9^3 + b \cdot 9^2 + c \cdot 9 + d = 2{,}3$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{32} = -0{,}03125$

$b = \frac{57}{160} = 0{,}35625$

$c = -\frac{59}{160} = -0{,}36875$

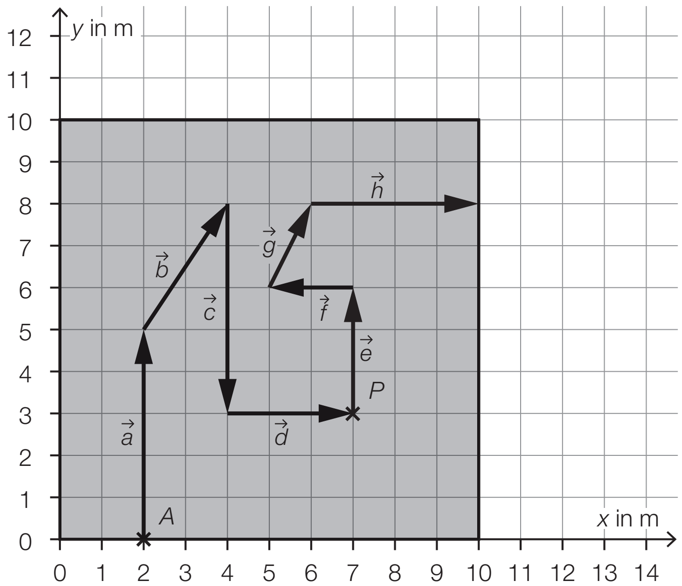
$d = -\frac{73}{160} = -0{,}45625$

c1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{pmatrix}$

c2) $5 + \sqrt{2^2 + 3^2} + 5 + 3 = 16{,}60...$

Die Länge des Weges durch das Labyrinth vom Startpunkt *A* zum Punkt *P* beträgt rund 16,6 m.

c3)



c4)

Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{g}$ haben den gleichen Betrag.	☒

d1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$h(t) = 4{,}49 \cdot t + 25{,}47$ *(Koeffizienten gerundet)*

d2) $h(20) = 115{,}1...$

Die Höhe der Pflanze 20 Wochen nach der Pflanzung beträgt rund 115 cm.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Ergänzen der drei richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Kosten.
b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten a, b, c und d.
c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Länge des Weges.
c3) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Weges.
c4) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
d1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Gleichung der Funktion h.
d2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe der Pflanze.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kraftstoffverbrauch

Aufgabennummer: B_176

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Kraftstoffverbrauch eines Kraftfahrzeugs ist unter anderem abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit.

v … Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde (km/h)
$K(v)$ … Kraftstoffverbrauch bei einer konstanten Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

a) Die nachstehende Tabelle zeigt den bei einer Testfahrt festgestellten Kraftstoffverbrauch eines LKWs bei verschiedenen Geschwindigkeiten.

v in km/h	30	50	60
$K(v)$ in L/100 km	10	9,4	11,8

Der Kraftstoffverbrauch bei dieser Testfahrt kann in einem Bereich von 30 km/h bis 70 km/h annähernd durch eine quadratische Funktion der Form $K(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ beschrieben werden.

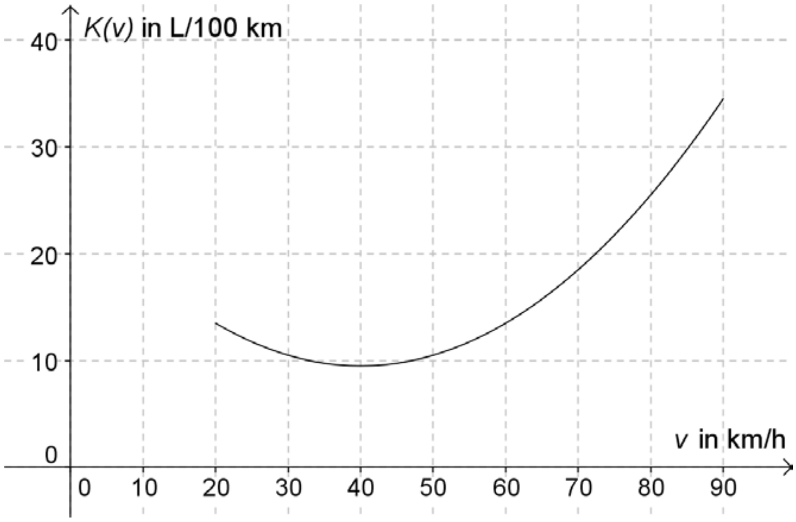
– Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Berechnung der Koeffizienten a, b und c auf.
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung $K(v)$.

b) Der Kraftstoffverbrauch eines Kleinlastwagens lässt sich im Intervall [30 km/h; 70 km/h] näherungsweise durch folgende Funktion K beschreiben:

$K(v) = 0{,}005 \cdot v^2 - 0{,}4 \cdot v + 14{,}3$

– Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, bei der der Kraftstoffverbrauch minimal ist.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Kraftstoffverbrauch eines Kleintransporters in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beim Fahren mit gleichbleibendem Gang.



– Veranschaulichen Sie in der Grafik die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h.
– Lesen Sie die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei 60 km/h ab.

d) Bei einem Test eines PKWs ergaben sich für den 4. Gang folgende Verbrauchswerte:

v in km/h	80	90	100	110	120
$K(v)$ in L/100 km	5,1	5,65	6,25	6,9	7,6

Zur Beschreibung des Kraftstoffverbrauchs kann man ab 80 km/h ein Modell verwenden, bei dem der Verbrauch mit zunehmender Geschwindigkeit konstant steigt.

– Argumentieren Sie, welcher Funktionstyp diesem Modell gerecht wird.
– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Funktion mittels Regression.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

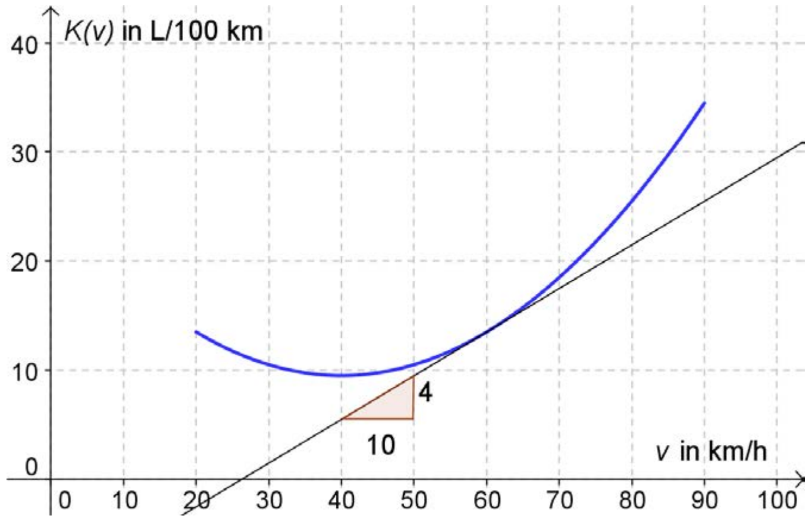
a) $10 = 30^2 \cdot a + 30 \cdot b + c$
$9{,}40 = 50^2 \cdot a + 50 \cdot b + c$
$11{,}8 = 60^2 \cdot a + 60 \cdot b + c$

$K(v) = 0{,}009 \cdot v^2 - 0{,}75 \cdot v + 24{,}4$

b) $K'(v) = 0{,}01 \cdot v - 0{,}4 = 0$
$v = 40$
$K''(v) > 0$

Bei 40 km/h ist der Kraftstoffverbrauch minimal.

c)



Die momentane Änderung des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h beträgt 0,4 L/100 km pro km/h.

Eine angemessene Ungenauigkeit wird toleriert.

d) Der passende Funktionstyp ist eine lineare Funktion, da die Steigung konstant ist.

Berechnung eines linearen Modells mittels Technologieeinsatz:

$K(v) = 0{,}0625 \cdot v + 0{,}05$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —
d) 5 Stochastik

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 1
c) mittel	c) 2
d) mittel	d) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

Klassische Gitarre

Aufgabennummer: B_233

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Gitarre wird standardmäßig gleichstufig (= gleichtemperiert) gestimmt. Dabei wird die Oktave (= Tonumfang von 8 Tönen) in 12 identische Halbtonschritte aufgeteilt.

Halbtonschritt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Bezeichnung des Tons	c	cis/ des	d	dis/ es	e	f	fis/ ges	g	gis/ as	a	ais/ b	h

Die mathematische Vorschrift zur Bestimmung der Frequenz f der Töne auf der gesamten Tonleiter der gleichstufigen Stimmung ist eine geometrische Folge und lautet:

$$f_i = f_0 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$$

i … Anzahl der Halbtonschritte ausgehend vom gewählten Ausgangston (Das Vorzeichen von i ist bei Tönen, die höher sind als der Ausgangston, positiv und bei Tönen, die tiefer sind als der Ausgangston, negativ.)
f_0 … Frequenz eines beliebigen Ausgangstons in Hertz (Hz)
f_i … Frequenz beim i-ten Halbtonschritt in Hz

a) Der gemeinsame Ton, auf den die Instrumente eines Ensembles gestimmt werden, ist das eingestrichene „a“ mit einer Frequenz von 440 Hz („Kammerton“).

– Berechnen Sie mithilfe obenstehender Tabelle ausgehend vom Kammerton „a“ die Frequenz des tieferen Tons „e“.

b) – Zeigen Sie anhand der Formel den Zusammenhang zwischen den Frequenzen zweier Töne, die sich genau um 1 Oktave unterscheiden.

c) – Erstellen Sie eine Formel, mit der man ausgehend von einem beliebigen Ton mit der Frequenz f_n die Frequenz des nächsthöheren Halbtons berechnen kann.

d) Der tiefste Ton einer Gitarre ist das tiefe „E“ mit einer Frequenz von 82,41 Hz, der höchste auf einer klassischen Gitarre spielbare Ton hat eine Frequenz von 987,77 Hz.

– Berechnen Sie, wie viele Halbtonschritte der Tonumfang einer klassischen Gitarre umfasst.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f_i = f_0 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$

Das „e“ ist 5 Halbtonschritte tiefer:

$f_{-5} = 440 \cdot 2^{-\frac{5}{12}} = 440 \cdot 2^{-0{,}4167} = 329{,}627\ldots$

Die Frequenz des Tons „e“ beträgt ca. 329,63 Hz.

b) Für $i = 12$ (1 ganze Oktave höher) gilt: $f(12) = f_0 \cdot 2^1$.
Für $i = -12$ (1 ganze Oktave tiefer) gilt: $f(-12) = f_0 \cdot 2^{-1}$.

D. h., der um 1 Oktave höhere Ton hat die doppelte Frequenz bzw. der um 1 Oktave tiefere Ton hat die halbe Frequenz.
(*Beide Antworten sind als richtig zu werten*.)

c) Potenzschreibweise: $f_{n+1} = f_n \cdot 2^{\frac{1}{12}}$
oder Wurzelschreibweise: $f_{n+1} = f_n \cdot \sqrt[12]{2}$
(Anmerkung: In Musikbüchern steht in der Regel die Wurzelschreibweise.)

d) $f_i = f_0 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$

$987{,}77 = 82{,}41 \cdot 2^{\frac{i}{12}}$

$\frac{987{,}77}{82{,}41} = 2^{\frac{i}{12}} \quad |\ \lg \text{ (oder } \ln)$

$i = 42{,}99$

Der Tonumfang einer klassischen Gitarre umfasst 43 Halbtonschritte.
(Berechnung auch mit Technologie erlaubt.)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 1
d) 2

Themen: Alltag, Musik

Quellen: –

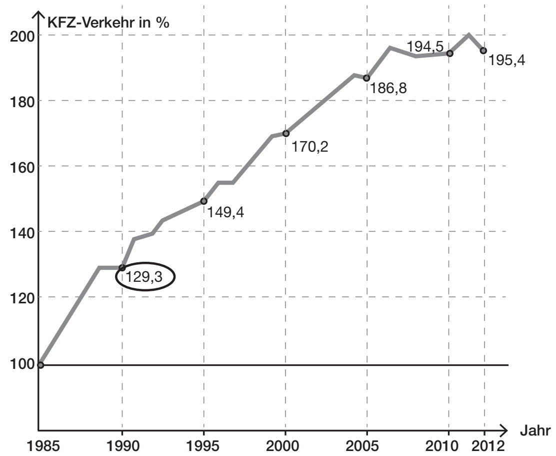
Straßenverkehr in Tirol (2)*

Aufgabennummer: B_277

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Verkehrsaufkommen wird seit vielen Jahren statistisch erfasst.

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung des KFZ-Verkehrs von 1985 bis 2012 in Tirol.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der in der Grafik markierten Zahl 129,3 in diesem Sachzusammenhang.

– Erstellen Sie basierend auf den Daten der Grafik eine quadratische Regressionsfunktion. Wählen Sie dabei für das Jahr 1985 den Zeitpunkt $t = 0$.

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den KFZ-Verkehr im Jahr 2013.

b) Die Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn kann für den Zeitraum 2000 bis 2007 durch die lineare Regressionsfunktion f beschrieben werden:

$f(t) = 617 \cdot t + 28\,017$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2000
$f(t)$ ... Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten zur Zeit t

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Koeffizienten 617 in diesem Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Auf einer österreichischen Transitroute wurden im Jahr 2003 insgesamt 1 700 000 Fahrten gezählt. Im Jahr 2011 waren es bereits 2 006 000 Fahrten.

– Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Anzahl der Fahrten auf dieser Route mit einer Exponentialfunktion der Form $y(t) = a \cdot b^t$ beschreibt.

  t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2003
  $y(t)$ ... Zahl der jährlichen Fahrten zur Zeit t

– Erklären Sie den Unterschied zwischen exponentiellem und linearem Wachstum.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 129,3 bedeutet, dass der Verkehr im Jahr 1990 gegenüber dem Jahr 1985 um 29,3 % zugenommen hat.

quadratische Regression: $r(t) = -0{,}09 \cdot t^2 + 6{,}11 \cdot t + 99{,}93$
2013 entspricht $t = 28$: $r(28) = 197{,}50\ldots \approx 197{,}5$.

Die Regressionsfunktion prognostiziert ein KFZ-Verkehrsaufkommen von rund 197,5 % bezogen auf das KFZ-Verkehrsaufkommen im Jahr 1985.

b) 617 entspricht der jährlichen Zunahme der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn.

c) $a = 1\,700\,000$
$b = \sqrt[8]{\frac{2\,006\,000}{1\,700\,000}} = 1{,}0209\ldots \approx 1{,}021$
$y(t) = 1\,700\,000 \cdot 1{,}021^t$

Bei einem linearen Modell ist die absolute Änderung pro Zeiteinheit konstant. Bei einem exponentiellen Modell ändert sich die Größe in jeweils gleichen Zeitschritten immer um denselben Faktor.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation der markierten Zahl
1 × A: für das richtige Erstellen der Regressionsfunktion
1 × B: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Jahr 2013
b) 1 × C: für die richtige Interpretation des Koeffizienten)
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × D: für die richtige Erklärung

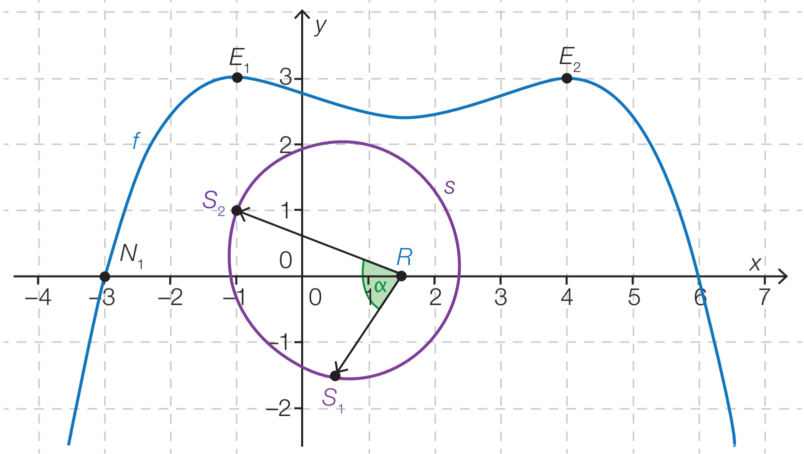
Armageddon

Aufgabennummer: B_295

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zur Programmierung eines Weltraum-Computerspiels werden einige geometrische Überlegungen benötigt.

Die nachstehende Abbildung zeigt die Flugbahn *s* zweier Patrouillenschiffe S_1 und S_2 um eine Raumstation *R*. Die Flugbahn eines feindlichen Raumschiffs wird durch den Graphen der Funktion *f* beschrieben. (In der Abbildung sind die Nullstelle N_1 sowie die Extrempunkte E_1 und E_2 des Funktionsgraphen von *f* eingezeichnet.)



a) – Erklären Sie, warum die Flugbahn *s* kein Graph einer Funktion ist.

Die Funktion *f* ist eine Polynomfunktion vierten Grades mit $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion *f* ermittelt werden können.

b) Für die Funktion *f* gilt:

$$f(x) = -\frac{3}{196}x^4 + \frac{9}{98}x^3 - \frac{3}{196}x^2 - \frac{18}{49}x + \frac{135}{49}$$

Während des Spielverlaufs schießt das feindliche Raumschiff am Wendepunkt der Funktion *f* in der Nähe von E_2 einen Laserstrahl tangential in Richtung S_2.

– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Tangente, die den Laserstrahl beschreibt.
– Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Raumschiff S_2 vom Laserstrahl getroffen wird.

c) Zu einem bestimmten Zeitpunkt hat die Raumstation die Koordinaten $R = (1{,}5\,|\,0)$ und das erste Patrouillenschiff die Koordinaten $S_1 = (0{,}5\,|\,y > 0)$.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der fehlenden y-Koordinate des Patrouillenschiffs, wenn der Abstand vom Patrouillenschiff S_1 zur Raumstation R genau d Einheiten beträgt.

$y =$ ____________________________

– Ermitteln Sie den Winkel α, den die beiden Vektoren $\overrightarrow{RS_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RS_2} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ einschließen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Bei der Flugbahn s handelt es sich um keinen Graphen einer Funktion, weil es x-Werte gibt, denen mehr als ein y-Wert zugeordnet wird.

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Nullstelle: $N_1 = (-3|0)$
Extrempunkte: $E_1 = (-1|3)$ $E_2 = (4|3)$

$f(-3) = 0$: I: $81a - 27b + 9c - 3d + e = 0$
$f(-1) = 3$: II: $a - b + c - d + e = 3$
$f'(-1) = 0$: III: $-4a + 3b - 2c + d = 0$
$f(4) = 3$: IV: $256a + 64b + 16c + 4d + e = 3$
$f'(4) = 0$: V: $256a + 48b + 8c + d = 0$

b) Berechnung des Wendepunktes:

$f''(x) = -\frac{9}{49}x^2 + \frac{27}{49}x - \frac{3}{98}$
$-\frac{9}{49}x^2 + \frac{27}{49}x - \frac{3}{98} = 0$
$x_1 = 2{,}943\ldots \approx 2{,}94$
$(x_2 = 0{,}056\ldots)$
$f(2{,}943\ldots) = 2{,}734\ldots$
$W = (2{,}94|2{,}73)$

Aufstellen der Funktionsgleichung der Tangente:
$y = kx + d$
$k = f'(2{,}943\ldots) = 0{,}36820\ldots$, $d = y - kx = 1{,}65049\ldots$
$y = 0{,}3682x + 1{,}6505$

Einsetzen der Koordinaten von S_2 in die Tangentengleichung:
$1 = 0{,}3682 \cdot (-1) + 1{,}6505$
$1 = 1{,}2822$
Der Laserstrahl trifft nicht das Raumschiff S_2.

c) $\overrightarrow{RS_1} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y \end{pmatrix}$

$(-1)^2 + y^2 = d^2$

$y = \sqrt{d^2 - 1}$

$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + (-1,5)^2} \cdot \sqrt{(-2,5)^2 + 1^2}}$

$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3,25} \cdot \sqrt{7,25}}$

$\alpha \approx 78,11°$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 3
c) leicht	c) 2

Thema: Informatik

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Flächeninhalt eines Parallelogramms*

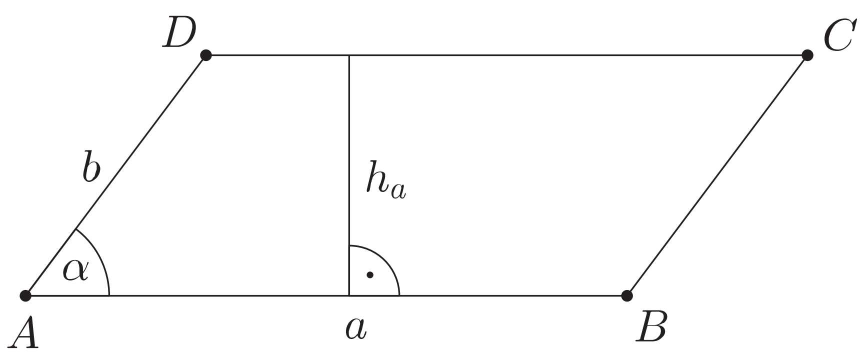
Aufgabennummer: B_259

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Grundstück hat die Gestalt eines Parallelogramms *ABCD*. Zur Berechnung des Flächeninhalts dieses Grundstücks stehen folgende Formeln zur Verfügung:

(1) $A = a \cdot h_a$
(2) $A = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

Entnehmen Sie die Bezeichnungen der nachstehenden, nicht maßstabgetreuen Skizze.



a) – Erklären Sie, warum diese beiden Formeln gleichwertig sind.

b) Für das Grundstück werden folgende Maße angegeben: $b = 52{,}7$ m, $\alpha = 53°$, $A = 4\,133$ m².

– Berechnen Sie die Länge der Seite a.
– Berechnen Sie die Länge der Diagonale BD.

c) Die Länge der Seite a wird verdreifacht und die Länge der zugehörigen Höhe h_a halbiert.

– Ermitteln Sie die Änderung des Flächeninhalts in Prozent.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Zeichnet man die Höhe h_a im Eckpunkt D ein, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck.
In diesem gilt: $\sin(\alpha) = \frac{h_a}{b}$.
$h_a = b \cdot \sin(\alpha)$
$A = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

b) $a = \frac{A}{b \cdot \sin(\alpha)} = 98{,}19\ldots \quad \Rightarrow \quad a \approx 98{,}2 \text{ m}$

$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)} = 78{,}68\ldots \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \approx 78{,}7 \text{ m}$

c) $A_{neu} = 3 \cdot a \cdot \frac{h_a}{2} = 1{,}5 \cdot a \cdot h_a = 1{,}5 \cdot A_{alt}$

Der neue Flächeninhalt ist um 50 % größer als der alte.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung zur Gleichwertigkeit der Formeln
b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge der Seite a
1 × B2: für die richtige Berechnung der Länge der Diagonale $\overline{BD}$
c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Änderung in Prozent

E-Reader*

Aufgabennummer: B_224

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1 310
6	1 700
7	2 055
8	2 280
9	2 470
10	2 500
11	2 540
12	2 545

a) Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall [3; 7], so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

– Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall [3; 7].
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

b) Betrachtet man nur die ersten 3 Zahlenpaare, so zeigt sich ein annähernd exponentieller Verlauf. Dieser kann durch

$$V_1(t) = 93{,}7 \cdot 1{,}94^t$$

oder durch

$$V_2(t) = 93{,}7 \cdot e^{0{,}662688 \cdot t}$$

dargestellt werden.

t ... Zeit in Wochen
$V_1(t)$, $V_2(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

– Erklären Sie, warum beide Funktionen V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben.
– Berechnen Sie die Verdoppelungszeit in diesem exponentiellen Wachstumsmodell.

* ehemalige Klausuraufgabe

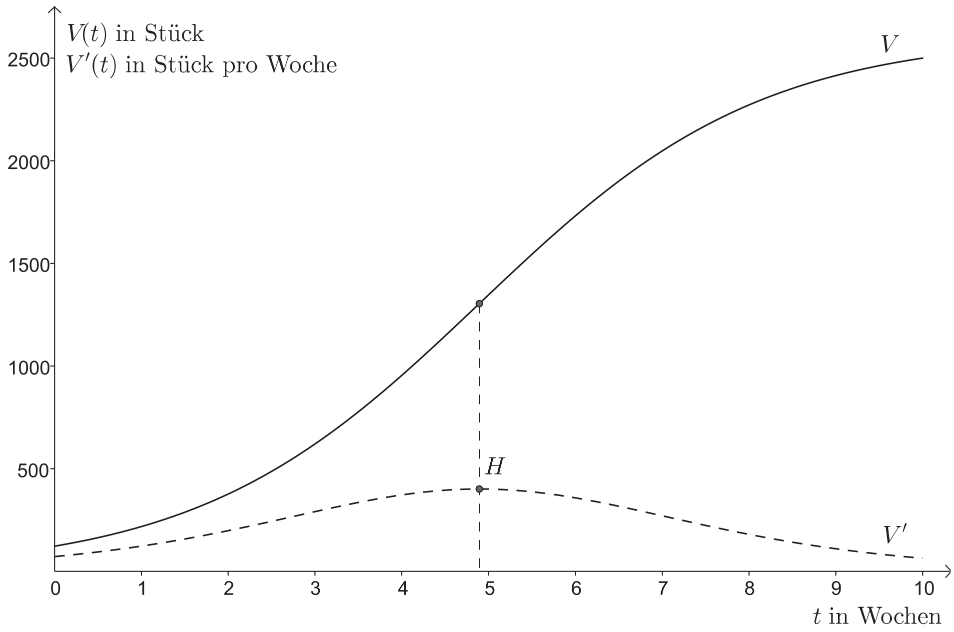
c) Betrachtet man alle 12 Zahlenpaare, so lässt sich die Entwicklung der Anzahl der insgesamt verkauften E-Reader näherungsweise durch eine logistische Funktion V beschreiben:

$$V(t) = \frac{2608}{1 + 20{,}28 \cdot e^{-0{,}6151 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen
$V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

– Begründen Sie anhand der gegebenen Funktion, warum die Funktionswerte sich mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern.
– Berechnen Sie, um wie viel der logistische Funktionswert $V(8)$ vom gegebenen Tabellenwert bei 8 Wochen abweicht.

In der nachstehenden Grafik sind die logistische Funktion V sowie deren Ableitungsfunktion V' grafisch dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der Koordinaten des Hochpunktes H der Ableitungsfunktion V' im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Regressionsgerade mittels Technologieeinsatz:

$V(t) = 348{,}1 \cdot t - 396{,}5$

t ... Zeit in Wochen
$V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

In diesem Zeitraum werden nach diesem Modell pro Woche rund 348 Stück verkauft.

b) Da $1{,}94 \approx e^{0{,}662688}$, beschreiben V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf.

Verdoppelungszeit: $T = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}94)} = 1{,}045...$
Die Verdoppelungszeit beträgt rund 1,05 Wochen.

c) Da für großes t der Wert $e^{-0{,}6151 \cdot t}$ gegen null geht, nähert sich der Nenner der Zahl 1 und $V(t)$ damit 2608.

Funktionswert nach 8 Wochen: $V(8) \approx 2272$
Abweichung vom gegebenen Tabellenwert: $2280 - 2272 = 8$

Der logistische Funktionswert weicht um ca. 8 Stück vom gegebenen Tabellenwert ab.

Die 1. Koordinate von H ist nach diesem Modell derjenige Zeitpunkt, in dessen Nähe am meisten E-Reader pro Woche verkauft wurden. Die 2. Koordinate entspricht in etwa der Anzahl der verkauften E-Reader in dieser Woche.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang

b) 1 × D: für die richtige Erklärung, warum V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben
1 × B: für die richtige Berechnung der Verdoppelungszeit mithilfe der Funktion V_1 oder V_2

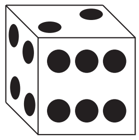
c) 1 × D: für die richtige Begründung, warum sich die Funktionswerte mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern
1 × B: für die richtige Berechnung der Abweichung
1 × C: für die richtige Interpretation der Koordinaten des Hochpunktes im Sachzusammenhang

Brettspiele*

Aufgabennummer: B_257

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Beim Würfeln mit einem fairen Spielwürfel treten die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.



a) Bei einem Brettspiel wird zu Beginn des Spiels mit einem fairen Spielwürfel gewürfelt. Um das Spiel beginnen zu können, muss man einen Sechser würfeln. In einem Durchgang hat man maximal 3 Versuche zur Verfügung. Sobald man einen Sechser gewürfelt hat, ist die nächste Spielerin / der nächste Spieler an der Reihe.

- Stellen Sie alle möglichen Ausgänge („Sechser“ oder „kein Sechser“) für einen Durchgang für eine Spielerin/einen Spieler in einem Baumdiagramm dar.
- Tragen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm ein.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Spielerin/ein Spieler in einem Durchgang das Spiel beginnen kann.

b) Bei einem Brettspiel wird mit einem fairen Spielwürfel gewürfelt und man rückt mit der Spielfigur so viele Felder vor, wie die gewürfelte Augenzahl angibt. Würfelt man im ersten Wurf einen Sechser, so würfelt man ein zweites Mal und rückt die dabei gewürfelte Augenzahl zusätzlich vor.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Felder, die man vorrücken darf.

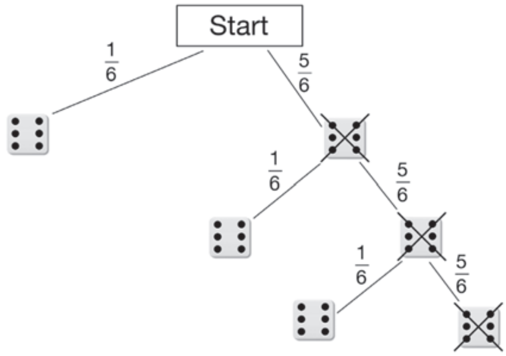
- Stellen Sie eine Tabelle auf, der man alle möglichen Werte dieser Zufallsvariablen X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnehmen kann.
- Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
- Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswertes in diesem Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{216} \approx 42{,}1\ \%$

b)

x_i	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

$E(X) = \frac{15}{6} + \frac{57}{36} \approx 4{,}08$

Der Erwartungswert gibt an, um wie viele Felder man im Mittel vorrücken darf, wenn man oft spielt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für die richtige Darstellung des Baumdiagramms
1 × A2: für das richtige Eintragen der Wahrscheinlichkeiten
1 × A3: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × A: für die richtige und vollständige Angabe der Werte der Zufallsvariablen
1 × B1: für die richtige und vollständige Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten
1 × B2: für die richtige Berechnung des Erwartungswertes
1 × C: für die richtige Interpretation des Erwartungswertes in diesem Sachzusammenhang

Donauüberquerung

Aufgabennummer: B_229

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Motorfähre verkehrt zwischen den sich an der Donau genau gegenüberliegenden Anlegestellen in Dürnstein und in Rossatz. An dieser Stelle ist die Donau etwa 200 Meter breit und hat eine gleichmäßige Strömungsgeschwindigkeit v_s von rund 1,6 Metern pro Sekunde (m/s). (Reibungseinflüsse sollen vernachlässigt werden.)

a) Die Vektorgrafiken Abb. 1 und Abb. 2 stellen ein Boot dar, das einen Fluss überquert.
– Interpretieren Sie, welche Aussagen die Grafiken vermitteln.

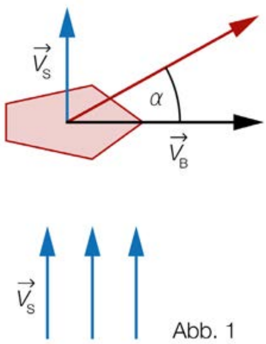


Abb. 1

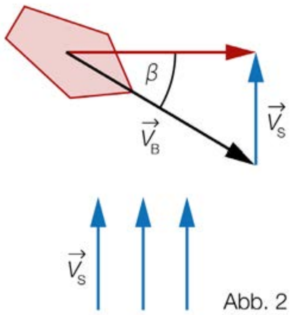


Abb. 2

$\vec{v}_S$ … Strömungsgeschwindigkeit
$\vec{v}_B$ … Geschwindigkeit des Boots

b) Die Motorfähre auf der Donau bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Es gilt:

$$s = v \cdot t$$

s … Weg in Metern (m)
v … Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
t … Zeit in Sekunden (s)

– Berechnen Sie, in welchem Winkel der Steuermann gegen die Strömung steuern muss, wenn das Boot eine Geschwindigkeit v_B relativ zum Wasser von durchschnittlich 3 m/s hat und es von Rossatz aus genau in Dürnstein landen soll.
– Ermitteln Sie auch die Dauer der Überfahrt in Minuten.

c) Ein geübter Schwimmer, der beim Schwimmen in ruhendem Gewässer eine Geschwindigkeit von 1,2 m/s erreicht, möchte auf der Bootsroute von Rossatz nach Dürnstein die Donau überqueren.
– Argumentieren Sie mithilfe von Vektordiagrammen, ob der Schwimmer eine Chance hat, die Anlegestelle in Dürnstein auf kürzestem Weg zu erreichen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Abb. 1: Das Boot fährt normal zur Fließrichtung des Wassers. Dabei wird es durch die Strömung um den Winkel α abgetrieben.

Abb. 2: Das Boot steuert mit einem Winkel β gegen die Flussströmung, sodass es auf kürzestem Wege zum gegenüberliegenden Ufer gelangt.

b) Geschwindigkeit: $\vec{v} = \vec{v_B} + \vec{v_S}$

pythagoräischer Lehrsatz: $v = \sqrt{v_B^2 - v_S^2}$

$\sqrt{3^2 - 1{,}6^2} = 2{,}5377 \approx 2{,}54$

$v \approx 2{,}54$ m/s

Fahrzeit: $t = \frac{s}{v}$

$\frac{200}{2{,}54} = 78{,}74$

$t = 78{,}74$ s $\approx 1{,}31$ min

Genau um jenen Winkel, um den das Boot abgetrieben wird, muss gegengesteuert werden:

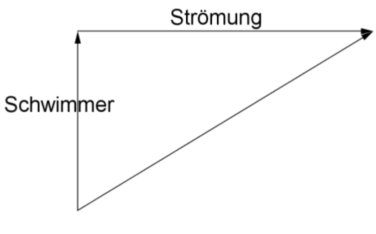
$\sin(\beta) = \frac{v_S}{v_B}$

$\frac{1{,}6}{3} = 0{,}5333\ldots$

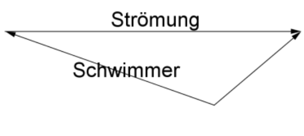
$\beta \approx 32{,}2°$

Der Steuermann muss rund 32,2° gegen die Strömung steuern, um genau gegenüber anzukommen.

c) Vektoren in geeignetem Größenverhältnis darstellen



Wenn der Schwimmer normal zur Strömung schwimmt, dann wird er von der Strömung abgetrieben.



Wenn er mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m/s schräg gegen die Strömung schwimmt, egal in welchem Winkel, so wird er wegen der größeren Strömungsgeschwindigkeit ebenfalls abgetrieben.

Er hat keine Chance, normal zur Flussrichtung von Rossatz nach Dürnstein zu gelangen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 3
c) leicht	c) 2

Thema: Verkehr

Quellen: –

Marketingausgaben*

Aufgabennummer: B_304

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

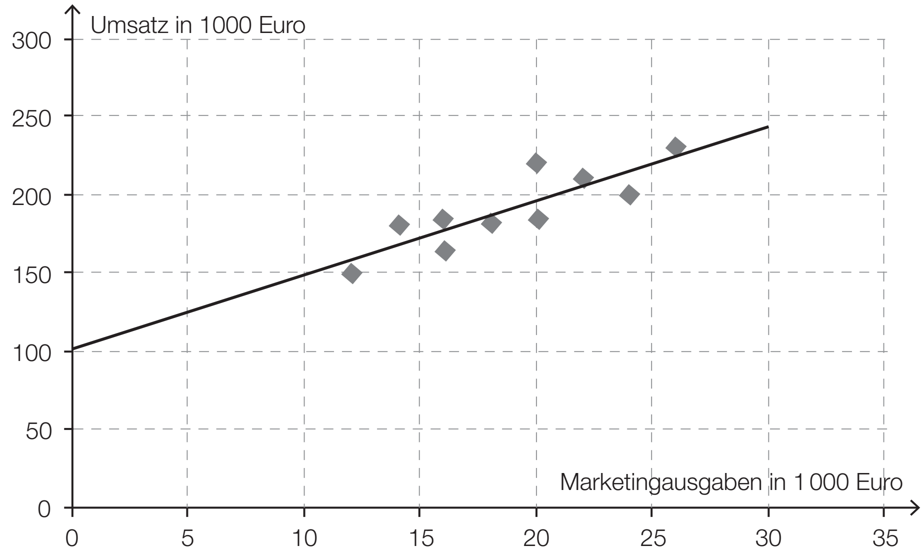
Die Marketingabteilung einer Handelskette möchte wissen, ob ihre Werbemaßnahmen wirken. Die Buchhaltung liefert Informationen über die monatlichen Umsätze. Die Umsätze von 10 aufeinanderfolgenden Monaten mit den entsprechenden Marketingausgaben liefern folgende Daten (Beträge in 1.000 Euro):

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marketingausgaben	24	16	20	26	14	16	20	12	18	22
Umsatz	200	184	220	230	180	164	185	150	182	210

a) – Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen Marketingausgaben und Umsatz.
   – Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

b) – Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Regressionsgeraden, die den Umsatz in Abhängigkeit von den Marketingausgaben beschreibt.
   – Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im Hinblick auf den Umsatz und die Marketingausgaben.

c) In der nachstehenden Grafik sind die Datenpunkte und die dazugehörige Regressionsgerade dargestellt.



   – Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Umsatz ab, den die Handelskette bei Marketingausgaben von € 10.000 erwarten kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}86$

Die gegebenen Daten lassen einen positiven linearen Zusammenhang zwischen Marketingausgaben und Umsatz vermuten.

b) mittels Technologieeinsatz: $y = 4{,}786 \cdot x + 100{,}523$

Steigen die Marketingausgaben um € 1.000, dann steigt der Umsatz um ca. € 4.786.

c) ca. € 150.000
Toleranzbereich: [€ 140.000; € 160.000]

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten
1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Ablesen des Wertes

Lernen*

Aufgabennummer: B_256

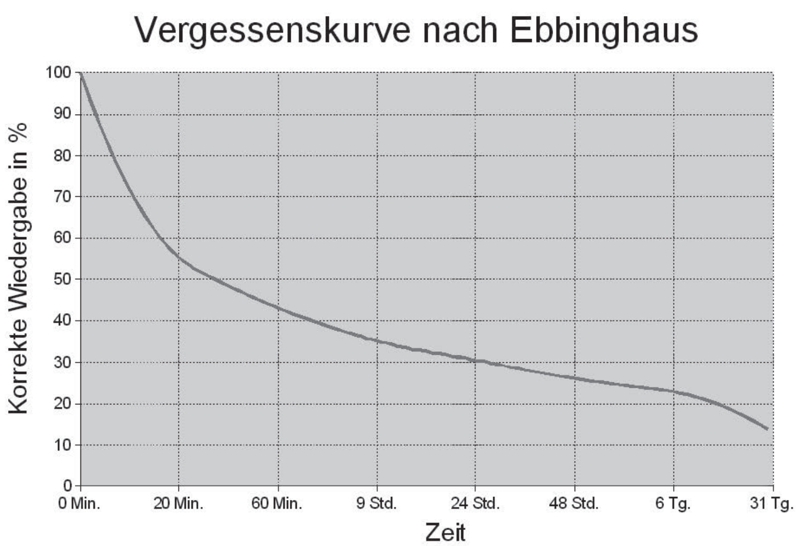
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In einer Schülergruppe wurden die jeweilige Lernzeit (in Minuten) und die erreichte Punktezahl bei einer Leistungsüberprüfung notiert:

Lernzeit in Minuten	20	34	27	18	16	23	32	22
erreichte Punktezahl	64	84	88	72	61	70	92	77

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die erreichte Punktezahl soll in Abhängigkeit von der Lernzeit beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie die Steigung der Regressionsgeraden in diesem Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells, welche Punktezahl man erwarten kann, wenn man 30 Minuten lernt.

b) Die *Vergessenskurve nach Ebbinghaus* veranschaulicht, wie viel Wissen nach einer bestimmten Zeit noch vorhanden ist.
Im Internet findet man dazu die folgende Grafik:



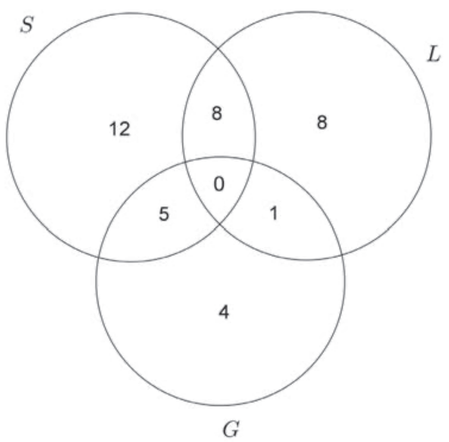
Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AVergessenskurve.png
Namensnennung: Rdb [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html) or CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)], via Wikimedia Commons [23.12.2014]

– Lesen Sie ab, nach welcher Zeit die korrekte Wiedergabe auf 30 % gesunken ist.
– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der korrekten Wiedergabe im Zeitintervall von 20 Minuten bis 9 Stunden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Jugendliche wurden befragt, in welcher Körperhaltung sie Vokabeln lernen.
Folgende Kategorien standen zur Auswahl: sitzend (*S*), liegend (*L*) oder gehend (*G*).
Mehrfachnennungen waren möglich.

Im nachstehenden Venn-Diagramm sind die vollständigen Ergebnisse dieser Erhebung dargestellt:



– Kennzeichnen Sie die Menge $(S \cup G) \setminus L$ im oben stehenden Venn-Diagramm.
– Erklären Sie die Bedeutung der Null im oben stehenden Venn-Diagramm im Sachzusammenhang.
– Lesen Sie aus dem oben stehenden Venn-Diagramm ab, wie viele Jugendliche sich nur für eine Kategorie entschieden haben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$y = 1{,}497x + 40{,}082$
Gemäß dem Modell erreicht man um rund 1,5 Punkte mehr, wenn man 1 Minute länger lernt.

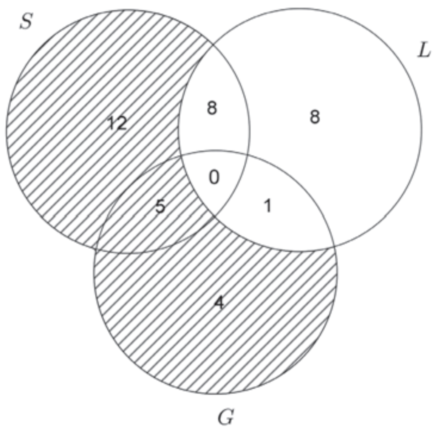
Berechnung: $1{,}497 \cdot 30 + 40{,}082 = 84{,}9... \approx 85$
Gemäß dem Modell erhält man rund 85 Punkte, wenn man 30 Minuten lernt.

b) Die korrekte Wiedergabe sinkt nach rund 24 Stunden auf 30 %. Toleranzbereich: [24; 30].

Differenzenquotient: $\frac{35-55}{9-\frac{1}{3}} \approx -2{,}3$
Toleranzbereich beim Ablesen: [54; 56] bzw. [34; 36]

Die mittlere Änderungsrate der Wiedergabe beträgt im Zeitintervall [20 min; 9 h] –2,3 % pro Stunde.

c)



Es gibt keine Jugendlichen, die alle 3 Kategorien genannt haben.
Es haben sich insgesamt 24 Jugendliche für nur eine Kategorie entschieden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung in diesem Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung der Punktezahl

b) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [24; 30]
1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate

c) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen der gesuchten Menge
1 × D: für die richtige Erklärung der Bedeutung der Null im Venn-Diagramm
1 × C2: für das richtige Ablesen, wie viele Jugendliche sich nur für eine Kategorie entschieden haben

Segeln*

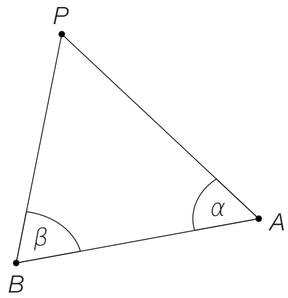
Aufgabennummer: B_321

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Entfernungen werden beim Segeln in nautischen Meilen (NM) angegeben. Die davon abgeleitete Geschwindigkeitseinheit nautische Meilen pro Stunde wird *Knoten* genannt.

a) Ein Segelboot fährt, nachdem es vom Punkt P gestartet ist und den Punkt A passiert hat, zum Punkt B. Von dort fährt es zum Punkt P zurück (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).

Die folgenden Abmessungen sind bekannt: $\alpha = 63°$, $\overline{PA} = 3{,}3$ NM und $\overline{AB} = 2{,}7$ NM.

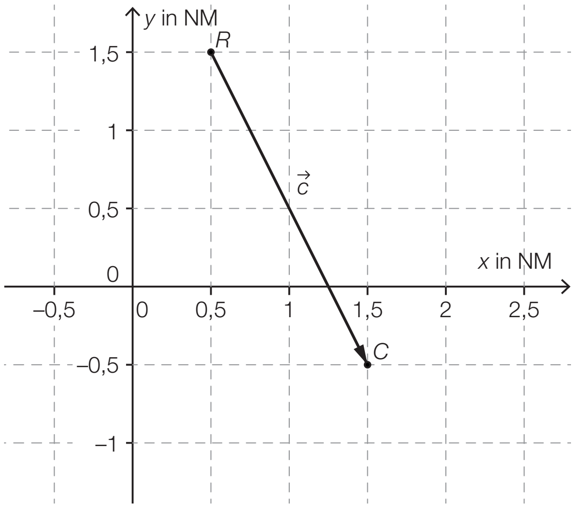


– Berechnen Sie die Entfernung $\overline{BP}$.
– Berechnen Sie die Dauer dieser Umrundung, wenn das Segelboot mit einer mittleren Geschwindigkeit von 6,8 Knoten fährt.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Entfernung $\overline{BP}$ auf, wenn anstatt der Entfernung $\overline{AB}$ der Winkel β bekannt wäre.

$\overline{BP}$ = ____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Segelboot startet im Punkt R und fährt geradlinig zum Punkt C. Dort findet eine Kursänderung statt, um den Punkt D zu erreichen.



– Lesen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{c}$ ab.
– Zeichnen Sie den Punkt D ein, der ausgehend vom Punkt C mit dem Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ angefahren wird.
– Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{c} \cdot \vec{d}$.
– Interpretieren Sie dieses Skalarprodukt geometrisch.

c) Die Vortriebskraft F_V beim Segeln lässt sich mit folgender Formel annähernd berechnen:

$$F_V = \frac{A \cdot \rho \cdot v_W^2}{4}$$

F_V ... Vortriebskraft in Newton (N)
A ... Segelfläche in m²
v_W ... Windgeschwindigkeit am Segel in m/s
ρ ... Dichte der Luft (ρ = 1,225 kg/m³)

– Berechnen Sie, wie groß die Segelfläche sein muss, damit bei einer Windgeschwindigkeit von 5 m/s eine Vortriebskraft von 153 N erreicht wird.
– Geben Sie an, wie sich die Vortriebskraft verändert, wenn sich die Windgeschwindigkeit verdoppelt und die anderen Parameter konstant bleiben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overline{BP} = \sqrt{3{,}3^2 + 2{,}7^2 - 2 \cdot 3{,}3 \cdot 2{,}7 \cdot \cos(63°)} = 3{,}176\ldots \approx 3{,}18$

Die Entfernung zwischen dem Punkt B und dem Punkt P beträgt rund 3,18 NM.

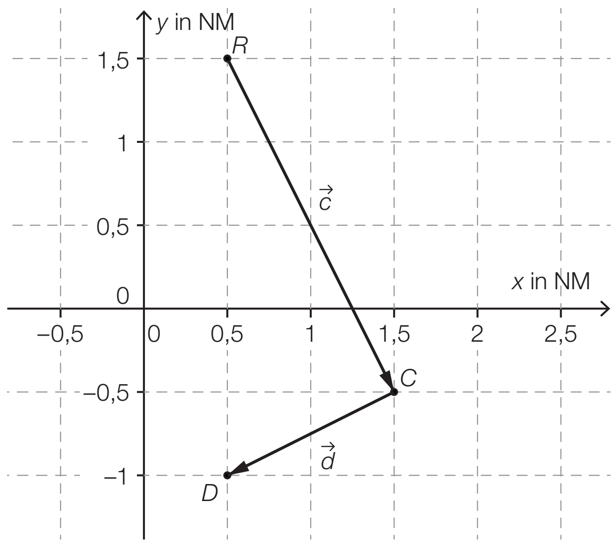
$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BP} = 9{,}176\ldots$

$t = \frac{9{,}176\ldots}{6{,}8} = 1{,}349\ldots \approx 1{,}35$

Die Umrundung dauert etwa 1,35 Stunden.

Sinussatz: $\frac{\overline{PA}}{\sin(\beta)} = \frac{\overline{BP}}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \overline{BP} = \frac{\overline{PA} \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



$\vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = 0$

Die beiden Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ stehen normal aufeinander.

c) $A = \frac{4 \cdot F_V}{1{,}225 \cdot v_W^2} = \frac{4 \cdot 153}{1{,}225 \cdot 5^2} = 19{,}9\ldots \approx 20$

Die Segelfläche muss dazu rund 20 m² groß sein.

Eine Verdoppelung der Windgeschwindigkeit führt zu einer Vervierfachung der Vortriebskraft.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Entfernung $\overline{BP}$
1 × B2: für die richtige Berechnung der Dauer dieser Umrundung
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Koordinaten des Vektors $\vec{c}$
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Punkts D
1 × B: für die richtige Berechnung des Skalarprodukts
1 × C2: für die richtige geometrische Interpretation des Skalarprodukts

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts der Segelfläche
1 × C: für die richtige Beschreibung

Schwangerschaft*

Aufgabennummer: B_322

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Nach der Ausbildung der inneren Organe verwendet man für das ungeborene Kind den Begriff *Fötus*.

a) Bei Ultraschalluntersuchungen wird die Scheitel-Steiß-Länge (SSL) von Föten bestimmt. In der nachstehenden Tabelle sind die durchschnittlichen Längen in Zentimetern (cm) in der jeweiligen Schwangerschaftswoche angegeben:

Schwangerschaftswoche	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SSL in cm	4,1	5,4	7,4	8,7	10,1	11,9	13,3	14,1	14,8	16,2

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die Länge soll in Abhängigkeit von der Schwangerschaftswoche beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang.

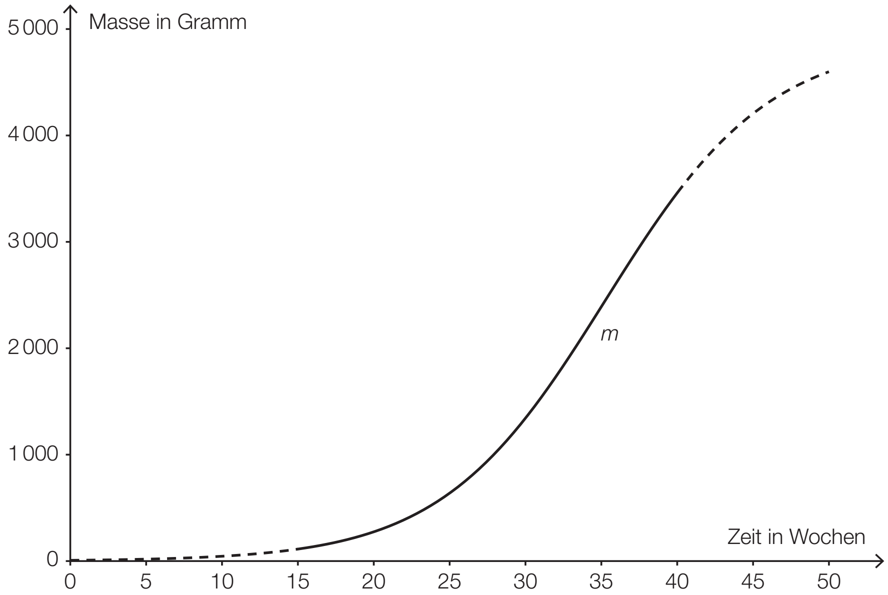
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die zunehmende Masse eines Fötus kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{4900}{1 + 681 \cdot e^{-0{,}185 \cdot t}} \quad \text{mit} \quad 15 \leq t \leq 40$$

t … Zeit seit Beginn der Schwangerschaft in Wochen
$m(t)$ … Masse des Fötus zur Zeit t in Gramm (g)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



– Berechnen Sie die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$.
– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Massezunahme des Fötus am größten ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$y = 1{,}36 \cdot x - 10{,}42$

Gemäß dem Modell nimmt die Scheitel-Steiß-Länge durchschnittlich rund 1,36 cm pro Woche zu.

b) $m(25) = 638{,}3\ldots \approx 638$
Die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$ beträgt rund 638 g.

Die stärkste Massezunahme erfolgt an der Wendestelle $m''(t) = 0$.
Lösung dieser Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 35{,}26\ldots \approx 35{,}3$
Nach etwa 35,3 Wochen ist die Massezunahme am größten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang

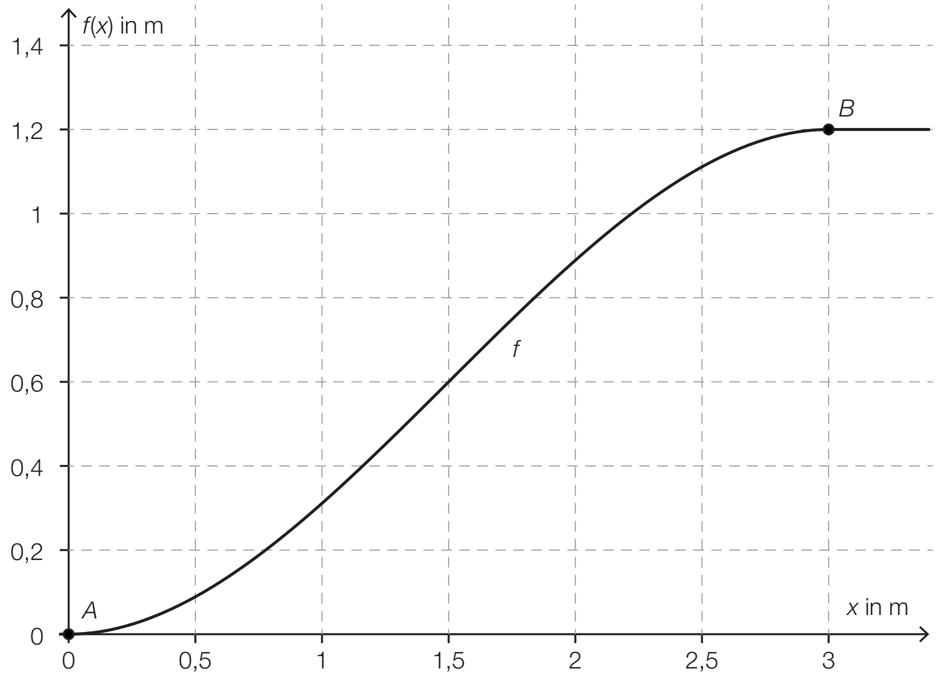
b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Masse des Fötus
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Zeitpunktes, zu dem die Massezunahme am größten ist (In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Wendestelle die größte Massezunahme vorliegt. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)

Minigolf*

Aufgabennummer: B_323

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Minigolfball soll von der horizontalen Abschlagfläche auf eine höhergelegene horizontale Plattform gerollt werden. Der Verlauf der Bahn im Querschnitt kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Die Bahn soll in den Punkten A und B knickfrei auf die jeweilige Ebene führen (siehe nachstehende Abbildung). Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an diesen Stellen den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.



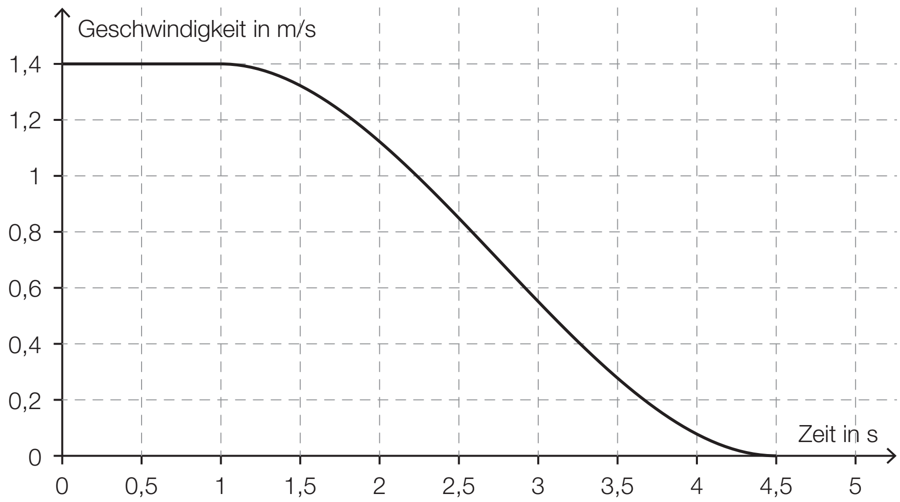
– Geben Sie an, welche Steigung die Funktion f in den Punkten A und B haben muss.
– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion f.
– Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion f.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Balles auf einer Minigolfbahn dargestellt. Während der ersten Sekunde hat der Ball eine konstante Geschwindigkeit. Danach kann die abnehmende Geschwindigkeit näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = \frac{1}{245} \cdot (16 \cdot t^3 - 132 \cdot t^2 + 216 \cdot t + 243) \quad \text{mit } 1 \leq t \leq 4{,}5$$

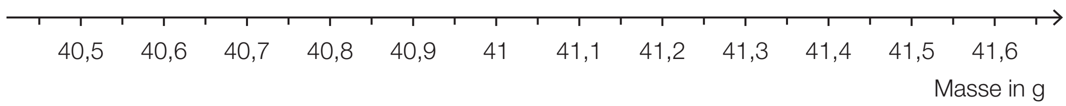
t … Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ … Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)



– Erklären Sie, was die momentane Änderungsrate der Funktion v zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 in diesem Sachzusammenhang angibt.
– Berechnen Sie den zurückgelegten Weg des Balles in den ersten 4,5 Sekunden.

c) Die Masse von Minigolfbällen eines bestimmten Typs ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 41 g und der Standardabweichung σ = 0,1 g. Wenn ein Minigolfball mehr als 41,25 g wiegt, wird er aussortiert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Minigolfball aussortiert wird.
– Zeichnen Sie den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung in der nachstehenden Abbildung ein. Berücksichtigen Sie dabei den Erwartungswert und die Standardabweichung.



– Beschreiben Sie, wie sich eine kleinere Standardabweichung auf den Graphen der Dichtefunktion auswirken würde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Steigung der Funktion f muss in den Punkten A und B null sein.

I. $f'(0) = 0$
II. $f'(3) = 0$
III. $f(0) = 0$
IV. $f(3) = 1,2$

Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{4}{45}$; $b = \frac{2}{5}$; $c = 0$; $d = 0$

b) Die momentane Änderungsrate der Funktion v zum Zeitpunkt t_0 ist die Beschleunigung des Balles zu diesem Zeitpunkt.

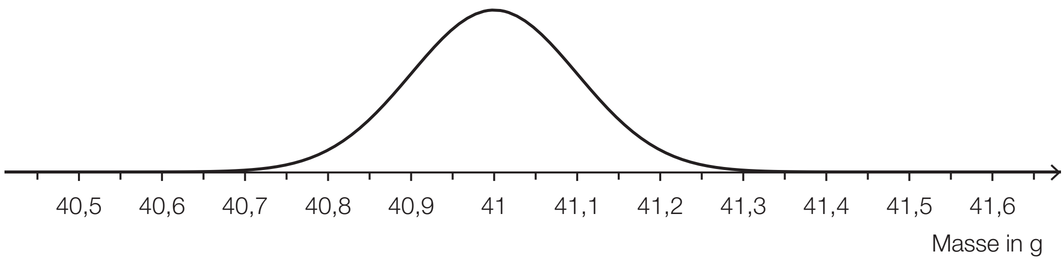
Der zurückgelegte Weg entspricht dem Flächeninhalt unter dem Graphen im Intervall [0; 4,5].
Flächeninhalt des Rechtecks: $A_1 = 1,4 \cdot 1 = 1,4$
Flächeninhalt unter dem Graphen der Polynomfunktion im Intervall [1; 4,5]:

$A_2 = \int_1^{4,5} v(t)\,\mathrm{d}t = 2,45$

$A = A_1 + A_2 = 3,85$

Der zurückgelegte Weg des Balles beträgt 3,85 m.

c) P(„Minigolfball wird aussortiert") = $1 - P(X < 41,25) = 0,0062\ldots \approx 0,6\ \%$



Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß'sche Glockenkurve schmäler und höher.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für die richtige Modellbildung zur Steigung der Funktion f
   1 × A2: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
   1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × D: für die richtige Erklärung
   1 × A: für einen richtigen Ansatz (Aufteilen in 2 Teilflächen)
   1 × B: für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
   1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Dichtefunktion (Glockenkurve mit Maximum an der Stelle μ und Wendepunkten an den Stellen $\mu \pm \sigma$ erkennbar)
   1 × C: für die richtige Beschreibung

Sport

Aufgabennummer: B_275

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In vielen sportlichen Disziplinen erreichen Athletinnen und Athleten neue Bestmarken und sind dabei oft extremen Belastungen ausgesetzt.

a) In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Marathon-Weltrekordzeit dargestellt.

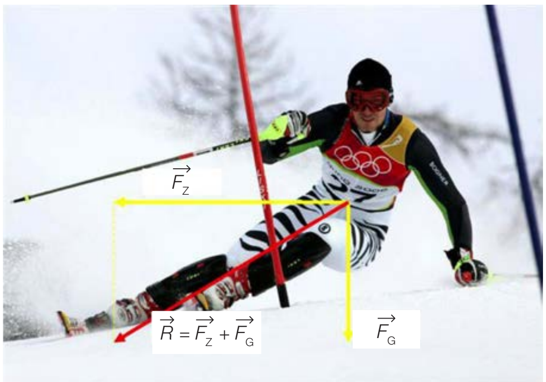
Jahr	2002	2003	2007	2008	2011	2013	2014
Marathon-Weltrekordzeit in h:min:s	2:05:38	2:04:55	2:04:26	2:03:59	2:03:38	2:03:23	2:02:57

– Ermitteln Sie mit diesem Datensatz die Gleichung derjenigen Regressionsfunktion, die die Marathon-Weltrekordzeit in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren annähert. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002.

– Ermitteln Sie anhand dieses Modells, in welchem Jahr voraussichtlich die Zwei-Stunden-Marke erreicht werden wird.

b) Ein Skifahrer ist in der Kurvenfahrt der Zentrifugalkraft und der Gewichtskraft ausgesetzt. Die Formeln für den Betrag der beiden Kräfte lauten:

$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$ und $F_G = m \cdot g$



m … Masse des Skifahrers in kg
v … Betrag der Geschwindigkeit des Skifahrers in m/s
r … Betrag des Kurvenradius des Skifahrers in m
g … Erdbeschleunigung ($g = 9{,}81$ m/s²)
F_Z ... Betrag der Zentrifugalkraft in Newton (N)
F_G ... Betrag der Gewichtskraft in Newton (N)

– Erklären Sie anhand der Formel für F_Z, wie sich F_Z ändert, wenn der Skifahrer die Kurve mit halbem Radius bei gleichbleibender Geschwindigkeit durchfährt.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Je größer r ist, desto größer ist F_Z.	☐
Fährt ein Skifahrer mit 25 % größerer Masse m und mit einem um 25 % geringeren Kurvenradius, dann nimmt F_Z um den Faktor 1,4 zu.	☐
Eine Zunahme von v wirkt sich exponentiell auf F_Z aus.	☐
Bei einem Skifahrer mit halber Masse m nimmt F_Z um den Faktor $\sqrt{2}$ zu.	☐
Bei doppeltem v und doppeltem r wird F_Z doppelt so groß.	☐

In einer bestimmten Kurve gilt: $\frac{F_Z}{F_G} = \frac{3}{1}$.

– Stellen Sie für den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{R}$ eine Formel in Abhängigkeit von m auf.

$R =$ ____________________

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz ermittelt:
$y(t) = -0{,}003242\ldots \cdot t + 2{,}089268\ldots$

$-0{,}00324 \cdot t + 2{,}08927 = 2 \;\Rightarrow\; t = 27{,}552\ldots$

Gemäß diesem linearen Modell wird im Jahr 2029 die Zwei-Stunden-Marke erreicht werden.

b) Durch die Halbierung des Kurvenradius bei gleichbleibender Geschwindigkeit verdoppelt sich der Betrag der Zentrifugalkraft, die auf den Skifahrer wirkt.

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
Bei doppeltem v und doppeltem r wird F_Z doppelt so groß.	☒

$F_Z = 3 \cdot F_G$
für den Betrag der Kraft $\vec{R}$ gilt:
$R = \sqrt{(3 \cdot F_G)^2 + F_G^2} = \sqrt{10} \cdot F_G = \sqrt{10} \cdot g \cdot m \approx 31 \cdot m$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel

Punkteanzahl:

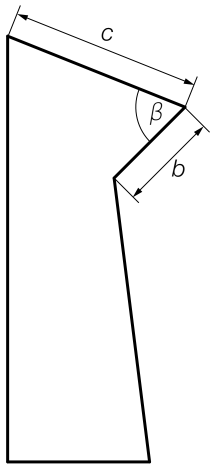
a) 2
b) 3

Thema: Sonstiges

Quelle: http://www.dsv-datenzentrale.de/rahmentrainingsplan/45-Kurvenfahrt__Dynamisches_Gleichgewicht_Fliehkraf-,e_441,r_33.htm

Klettern

a) In der nachstehenden Abbildung ist eine Kletterwand modellhaft in der Ansicht von der Seite dargestellt.



Für die Strecke *f* gilt:

$f^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(\beta)$

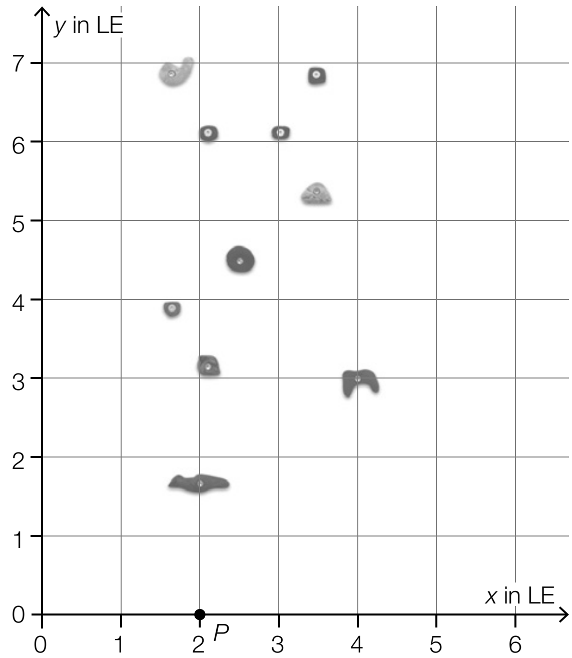
1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Strecke *f* ein. *[0/1 P.]*

Die von *f*, *b* und *c* begrenzte Fläche soll eingefärbt werden.

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts *A* dieser Fläche auf. Verwenden Sie dabei *b*, *c* und *β*.

$A =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

b) Lilli verwendet eine App zur Planung ihrer Routen beim Klettern auf einer Kletterwand. In der nachstehenden Abbildung ist die Kletterwand mit Griffen und Tritten in einem Koordinatensystem dargestellt.



x, y ... Koordinaten in Längeneinheiten (LE)

Lilli plant eine Route für einen Aufstieg. Sie startet im Punkt P, danach führt die Route über die Punkte Q und R zum Punkt S.

Es gilt: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}8 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diese Route als Abfolge von Vektoren ein. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\overrightarrow{QR}$. *[0/1 P.]*

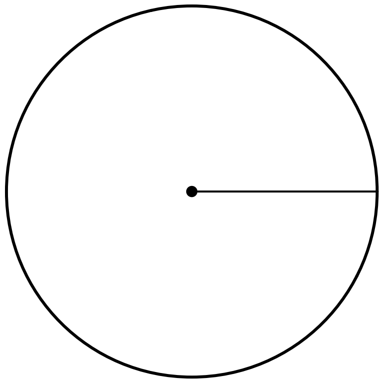
3) Ermitteln Sie den Vektor $\overrightarrow{PS}$.

$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

c) Der Deutsche Alpenverein gibt an, dass sich im Jahr 2016 in Kletterhallen 53 Seilkletterunfälle, 119 Boulderunfälle und 14 sonstige Unfälle ereignet haben.

Datenquelle: https://www.alpenverein.de/bergsport/sicherheit/unfallstatistik/klettern-unfall-unfallstatistik-kletterhalle-kletterunfall_aid_30268.html [19.01.2023].

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Kreisdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[0/1 P.]*

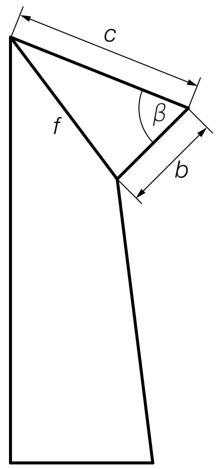


d) David verbraucht beim Klettern 130 Kilokalorien (kcal) in 15 min.
1 cm^3 eines bestimmten Softdrinks führt dem Körper 400 Kalorien (cal) zu.
David hat 1 Woche lang jeden Tag 1,5 L dieses Softdrinks getrunken und seinem Körper damit eine bestimmte Energiemenge zugeführt.

1) Berechnen Sie, wie lange David klettern müsste, um diese Energiemenge zu verbrauchen. Geben Sie das Ergebnis in Stunden an. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

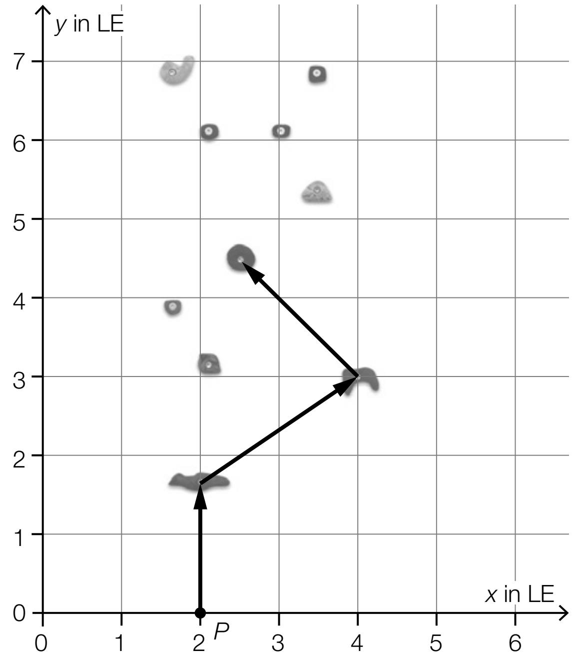
a1)



a2) $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\beta)$

a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Strecke *f*.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b1)



b2) $\left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{2^2 + 1{,}2^2}$

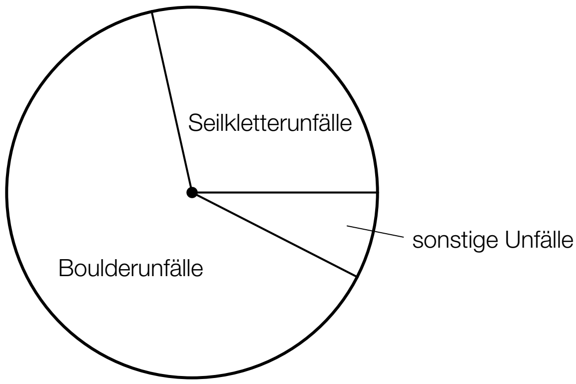
$\left|\overrightarrow{QR}\right| = 2{,}33\ldots$ LE

b3) $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$

Wird der Vektor grafisch ermittelt, kann es beim Ergebnis zu geringfügigen Abweichungen kommen.

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Vektoren.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Betrags des Vektors $\overrightarrow{QR}$.
b3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Vektors $\overrightarrow{PS}$.

c1)



c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Kreisdiagramms.

d1) zugeführte Energiemenge in kcal:
$1\,500 \cdot 0{,}4 \cdot 7 = 4\,200$

verbrauchte Energiemenge in kcal/min:
$\frac{130}{15} = \frac{26}{3}$

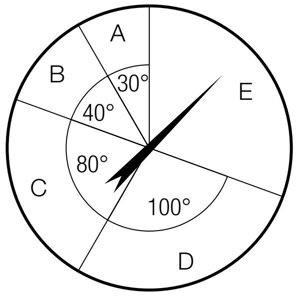
Zeit in min:
$\frac{4\,200}{\frac{26}{3}} = 484{,}6...$

Zeit in h:
$\frac{484{,}6...}{60} = 8{,}0...$
David müsste rund 8 Stunden klettern, um diese Energiemenge zu verbrauchen.

d1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeit in Stunden.

Spielshow

a) Ein Glücksrad ist in die Sektoren A, B, C, D und E unterteilt.
In der Mitte des Glücksrads ist ein drehbarer Zeiger montiert, der im Rahmen einer Spielshow gedreht wird.
(Siehe nebenstehende Abbildung.)



Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger des Glücksrads nach einer Drehung auf einen bestimmten Sektor zeigt, ist direkt proportional zum Winkel des jeweiligen Sektors.

Zeigt der Zeiger auf den Sektor A, so werden 10 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor B, so werden 16 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor C, so werden 20 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor D, so werden 25 Punkte gewonnen.
Zeigt der Zeiger auf den Sektor E, so werden 31 Punkte verloren.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Punkte, die nach einmaligem Drehen des Zeigers gewonnen bzw. verloren werden.

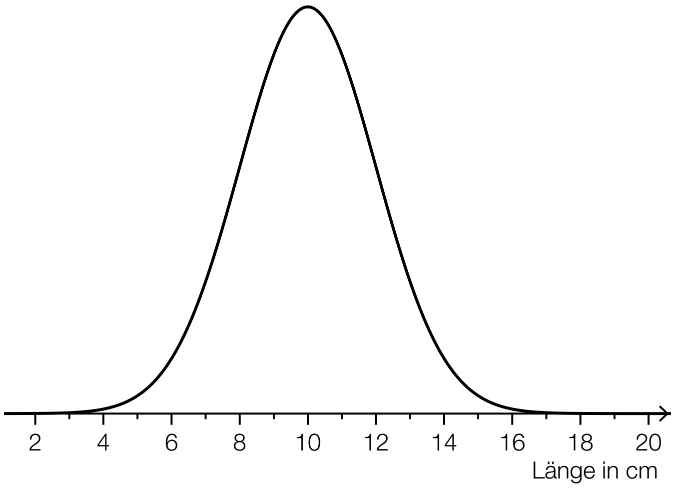
1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle durch Eintragen der fehlenden Wahrscheinlichkeiten. *[0/1 P.]*

Sektor	A	B	C	D	E
x_i	10	16	20	25	–31
$P(X = x_i)$					

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. *[0/1 P.]*

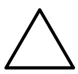
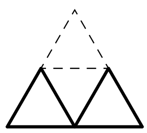
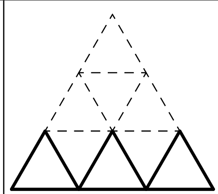
3) Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Im Rahmen einer Spielshow sollen die teilnehmenden Personen von einer Holzlatte ein 10 cm langes Stück Holz absägen. Dabei darf kein Messgerät verwendet werden.
Die Länge der abgesägten Holzstücke ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 10$ cm. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes abgesägtes Holzstück um mindestens 3 cm zu lang ist. *[0/1 P.]*

c) Im Rahmen einer Spielshow müssen die teilnehmenden Personen aus Spielkarten Kartenhäuser bauen. Dabei muss das jeweilige Kartenhaus in jeder Runde um ein Stockwerk höher gebaut werden.

1 Stockwerk	2 Stockwerke	3 Stockwerke
		
$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$

In der obigen Abbildung sind die Spielkarten im jeweils untersten Stockwerk fett dargestellt.
Die Anzahl der Spielkarten im jeweils untersten Stockwerk bildet die arithmetische Folge (a_n) mit $a_1 = 3$.

1) Geben Sie die Folgenglieder a_2 und a_3 an. *[0/1 P.]*

2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese Folge. *[0/1 P.]*

3) Ermitteln Sie das Folgenglied a_{10}. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

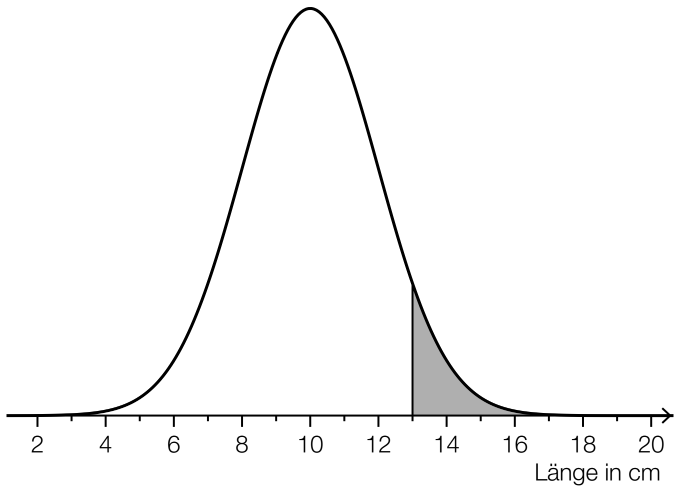
Sektor	A	B	C	D	E
x_i	10	16	20	25	–31
$P(X = x_i)$	$\frac{30}{360} = 0{,}083...$	$\frac{40}{360} = 0{,}111...$	$\frac{80}{360} = 0{,}222...$	$\frac{100}{360} = 0{,}277...$	$\frac{110}{360} = 0{,}305...$

a2) $E(X) = 10 \cdot \frac{30}{360} + 16 \cdot \frac{40}{360} + 20 \cdot \frac{80}{360} + 25 \cdot \frac{100}{360} - 31 \cdot \frac{110}{360} = 4{,}52...$

a3) Der Erwartungswert gibt an, dass im Mittel rund 4,5 Punkte pro Spiel gewonnen werden (wenn das Spiel sehr oft durchgeführt wird).

a1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Tabelle.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts.
a3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1)



b1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.

c1) $a_2 = 6$
$a_3 = 9$

c2) $a_n = 3 + 3 \cdot (n - 1)$

oder:

$a_n = 3 \cdot n$

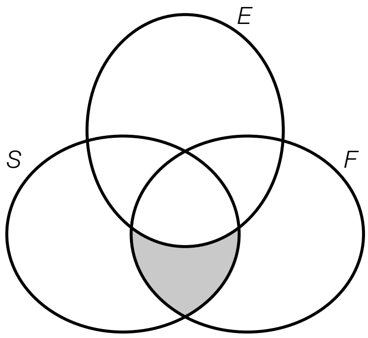
c3) $a_{10} = 30$

c1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Folgenglieder a_2 und a_3.
c2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des expliziten Bildungsgesetzes.
c3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Folgenglieds a_{10}.

Biologieunterricht

Im Biologieunterricht werden verschiedene Tierarten und ihre Lebensweisen betrachtet.

a) Mit dem nachstehenden Venn-Diagramm können verschiedene Tierarten nach bestimmten Merkmalen eingeteilt werden.



S ... Menge der Tierarten, die Säugetiere sind
E ... Menge der Tierarten, die Eier legen können
F ... Menge der Tierarten, die (selbstständig) fliegen können

Der grau markierte Bereich entspricht der Menge der Tierarten, die Fledertiere sind.

1) Geben Sie für jede der drei Mengen S, E und F an, ob die Menge der Tierarten, die Fledertiere sind, eine Teilmenge der jeweiligen Menge ist. *[0/1 P.]*

Die Menge der Tierarten, die Vögel sind, wird mit V bezeichnet.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von $V \setminus F \neq \{\,\}$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Es gibt eine Menge von Tierarten, die sowohl Säugetiere sind als auch Eier legen können, aber nicht fliegen können.

3) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der dieser Menge entspricht. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$F \setminus (S \cap E)$	☐
$S \setminus (F \cap E)$	☐
$(S \cup E) \setminus F$	☐
$(E \setminus F) \cap S$	☐
$E \cup (S \setminus F)$	☐

Es gibt keine Tierarten, die Säugetiere sind und sowohl Eier legen als auch fliegen können.

4) Tragen Sie die Zahl 0 in den entsprechenden Bereich im obigen Venn-Diagramm ein. *[0/1 P.]*

b) Auf einem Arbeitsblatt sind die Körperlängen verschiedener Säugetiere sowie deren Sprungweiten angegeben (siehe nachstehende Tabelle).

	Körperlänge in m	Sprungweite in m
Fuchs	0,7	2,8
Känguru	1,4	10
Löwe	1,8	4,5
Mauswiesel	0,2	1,2
Mensch (Weltrekord)	1,8	8,9
Tiger	2	5

Datenquelle: https://www.zoo.ch/sites/default/files/media/file/Weitspringen.pdf [03.08.2022].

Die Sprungweite soll in Abhängigkeit von der Körperlänge betrachtet werden.
Mathias behauptet, dass die obige Tabelle die Wertetabelle einer entsprechenden Funktion ist.

1) Begründen Sie, warum die Behauptung von Mathias falsch ist. *[0/1 P.]*

Susanne vermutet, dass die Sprungweite in Abhängigkeit von der Körperlänge näherungsweise durch die quadratische Funktion *f* beschrieben werden kann.

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der quadratischen Funktion *f* auf. *[0/1 P.]*

c) Mäuse vermehren sich unter bestimmten Bedingungen sehr schnell. Die Anzahl der Jungtiere, die in einer Generation geboren werden, kann näherungsweise durch das nachstehende rekursive Bildungsgesetz beschrieben werden.

$a_n = a_{n-1} \cdot 5$ und $a_1 = 20$
a_n ... Anzahl der Jungtiere in der n-ten Generation

1) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Folge (a_n). *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, in der wievielten Generation erstmals 500 Jungtiere geboren werden. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Menge der Tierarten, die Fledertiere sind, ist eine Teilmenge von S und von F, aber nicht von E.

a2) Nur ein Teil der Vögel kann fliegen.

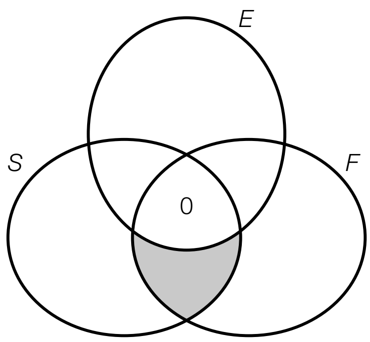
oder:

Es gibt auch Vögel, die nicht fliegen können.

a3)

$(E \setminus F) \cap S$	☒

a4)



a1) Ein Punkt für das richtige Angeben.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung im gegebenen Sachzusammenhang.
a3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
a4) Ein Punkt für das Eintragen der Zahl 0 im richtigen Bereich.

b1) Da der Löwe und der Mensch bei gleicher Körperlänge unterschiedliche Sprungweiten haben, handelt es sich nicht um eine eindeutige Zuordnung. Daher kann die angegebene Tabelle nicht die Wertetabelle einer Funktion sein.

b2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = -5{,}399 \cdot x^2 + 14{,}93 \cdot x - 2{,}582$ *(Koeffizienten gerundet)*

b1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der quadratischen Funktion *f*.

c1) $a_n = 20 \cdot 5^{n-1}$ *oder* $a_n = 4 \cdot 5^n$

c2) $500 = 20 \cdot 5^{n-1}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 3$

In der 3. Generation werden erstmals 500 Jungtiere geboren.

c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des expliziten Bildungsgesetzes.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Generation.

Bundes institut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Fertigbetonelement mit dreieckiger Grundfläche*

Aufgabennummer: B_341

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Grundfläche eines Fertigbetonelements hat die Form eines Dreiecks mit den Seiten a, b und c, von dem die folgenden Informationen bekannt sind:

- Der Umfang beträgt 150 cm.
- Die Seite c ist doppelt so lang wie die Seite a.
- Die Seite b ist um 10 cm länger als die Seite a.

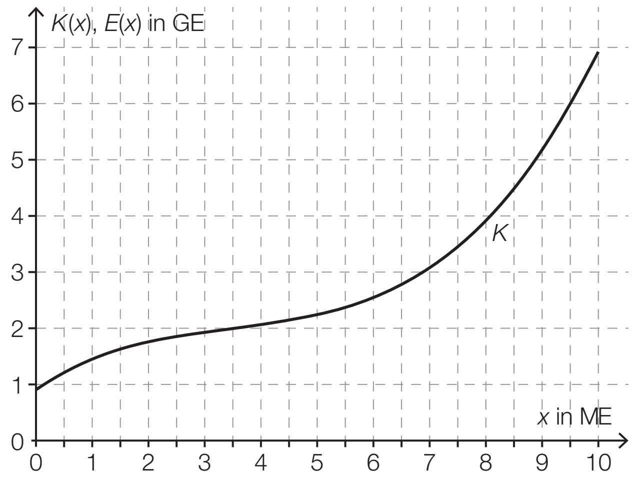
– Erstellen Sie ein Gleichungssystem mit den Unbekannten a, b und c, um die Seitenlängen des angegebenen Dreiecks zu bestimmen.
– Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.
– Berechnen Sie den größten Winkel in diesem Dreieck.

b) Bei einer Produktion von Fertigbetonelementen ist die Kostenfunktion näherungsweise eine Polynomfunktion 3. Grades.
Das Produkt wird zu einem fixen Preis pro Mengeneinheit verkauft.

– Erklären Sie, warum die Stelle des maximalen Gewinns unabhängig von den Fixkosten ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Funktionsgraph einer Kostenfunktion K dargestellt. Das Produkt wird zu einem fixen Preis pro Mengeneinheit (ME) verkauft.



– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen derjenigen Erlösfunktion ein, für die die untere Grenze des Gewinnbereichs bei 3,5 ME liegt.
– Geben Sie an, zu welchem Preis pro ME das Produkt in diesem Fall verkauft werden muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

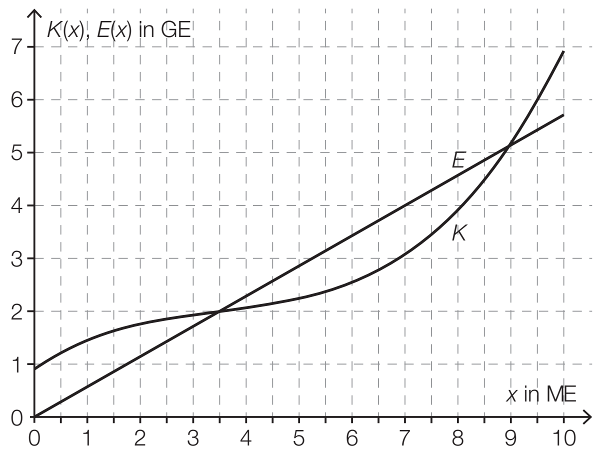
a) $a + b + c = 150$
$c = 2 \cdot a$
$b = a + 10$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 35$ cm
$b = 45$ cm
$c = 70$ cm

Der größte Winkel des Dreiecks γ liegt gegenüber von c:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad \Rightarrow \quad \gamma = 121{,}58...° \approx 121{,}6°$

b) Die Änderung der Fixkosten entspricht der Addition bzw. Subtraktion einer konstanten Funktion zur Gewinnfunktion. Sie bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen, wodurch sich die Maximumstelle nicht verändert.

c)



Aus dem Graphen der Erlösfunktion liest man beispielsweise ab, dass 3,5 ME um insgesamt 2 GE verkauft werden. Der Preis pro ME ist daher rund 0,57 GE.
Toleranzbereich: [0,54; 0,60]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
1 × B1: für die richtige Berechnung der Seitenlängen
1 × B2: für die richtige Berechnung des größten Winkels

b) 1 × D: für eine richtige Erklärung

c) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
1 × A2: für die richtige Angabe des Preises pro ME im Toleranzbereich [0,54; 0,60]

Vektorgrafiken*

Aufgabennummer: B_347

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Vektorgrafik besteht im Gegensatz zur Pixelgrafik nicht aus einzelnen Bildpunkten (Pixeln), sondern wird durch geometrische Primitive (Linie, Kreis, Polygone, Splines …) definiert.

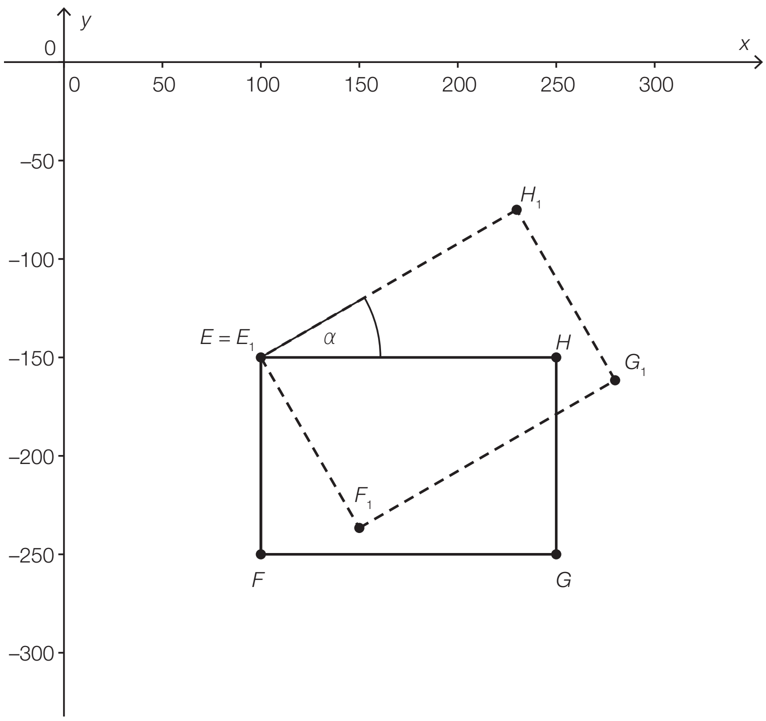
a) Rechtecke können in einer Vektorgrafik durch Angabe der Eckpunkte als geschlossene Streckenzüge definiert werden.
Es gibt zwei Rechtecke *ABCD* mit:

- $A = (50|-100)$ und $B = (250|-250)$ sind zwei benachbarte Eckpunkte.
- Die Seite *BC* ist halb so lang wie die Seite *AB*.

– Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts *C* für eines dieser Rechtecke.

b) Ein Vorteil von Vektorgrafiken ist, dass geometrische Transformationen sehr einfach und ohne Qualitätsverlust durchgeführt werden können.

Das in der nachstehenden Grafik dargestellte Rechteck $E_1F_1G_1H_1$ entstand aus dem Rechteck *EFGH* durch Drehung um den Eckpunkt $E = (100|-150)$ gegen den Uhrzeigersinn.



– Zeigen Sie rechnerisch unter Verwendung der Punkte $E = (100|-150)$, $H = (250|-150)$ und $H_1 = (230|-75)$, dass der Drehwinkel gerundet 30° beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist.

d) Splines sind stückweise zusammengesetzte Funktionen, deren Graphen knickfrei ineinander übergehen. Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Ein kubischer Spline, der aus 2 Funktionen 3. Grades zusammengesetzt ist, ist für das Intervall [0; 2] folgendermaßen definiert:

$s_0(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{3} \cdot x$ für $0 \leq x \leq 1$

$s_1(x) = \frac{4}{3} \cdot (x-1)^3 - 2 \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{3} \cdot (x-1) + 1$ für $1 \leq x \leq 2$

– Zeigen Sie, dass der Übergang von s_0 auf s_1 knickfrei erfolgt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 200 \\ -150 \end{pmatrix}$

Normalvektor zu $\overrightarrow{AB}$ mit halber Länge: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 75 \\ 100 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 325 \\ -150 \end{pmatrix}$

Der Punkt C hat die Koordinaten $(325|-150)$.

Auftragen des Normalvektors in die andere Richtung ist ebenfalls zulässig. Man erhält dann: $C = (175|-350)$.

b) $\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EH_1} = \begin{pmatrix} 130 \\ 75 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EH_1}}{|\overrightarrow{EH}| \cdot |\overrightarrow{EH_1}|} \Rightarrow \alpha = 29{,}98\ldots° \approx 30°$$

c) Für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = -a_x \cdot a_y + a_y \cdot a_x = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist, stehen sie normal aufeinander.

d) $s_0(1) = s_1(1) = 1$

$s_0'(x) = -2 \cdot x^2 + \frac{5}{3} \Rightarrow s_0'(1) = -\frac{1}{3}$

$s_1'(x) = 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + \frac{23}{3} \Rightarrow s_1'(1) = -\frac{1}{3}$

Die beiden Funktionen haben also an der Stelle $x = 1$ den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung, der Übergang ist also knickfrei.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermitteln des Normalvektors mit halber Länge)
1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten des Punkts C für eines dieser Rechtecke

b) 1 × B: für den richtigen rechnerischen Nachweis

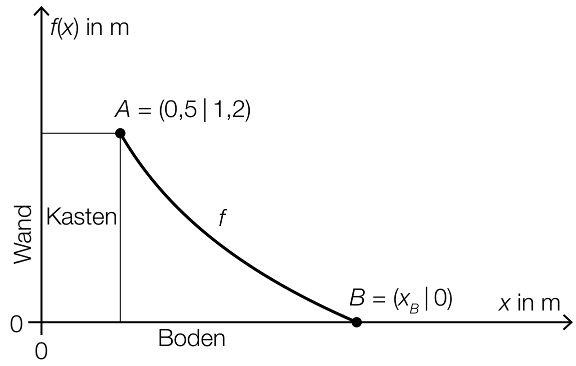
c) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

d) 1 × D: für den richtigen Nachweis (Funktionswert und Steigung)

Piratenschiff

Piratenschiff ist ein Spiel im Turnunterricht.
Für dieses Spiel wird ein Parcours mit Turngeräten als Hindernissen aufgebaut, in dem Fangen gespielt wird.

a) An einen Kasten (Turngerät) wird eine Matte gelegt. In der nachstehenden Abbildung ist der Verlauf der Matte zwischen den Punkten A und B durch den Graphen der Funktion f modellhaft dargestellt.



Es gilt:

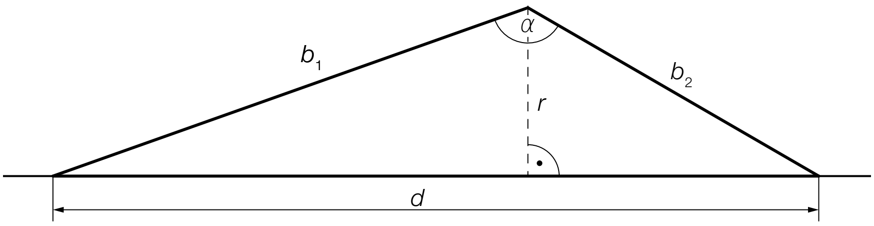
$f(x) = a - 1{,}209 \cdot \ln(x + 0{,}5)$

x ... horizontale Entfernung von der Wand in m
$f(x)$ ... Höhe über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m
a ... Parameter

1) Ermitteln Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Stelle x_B. *[0/1 P.]*

b) Auf einer Reckstange, die in der Höhe r montiert ist, werden zwei Langbänke mit den Längen b_1 und b_2 eingehängt (siehe nachstehende modellhafte Skizze in der Ansicht von der Seite).



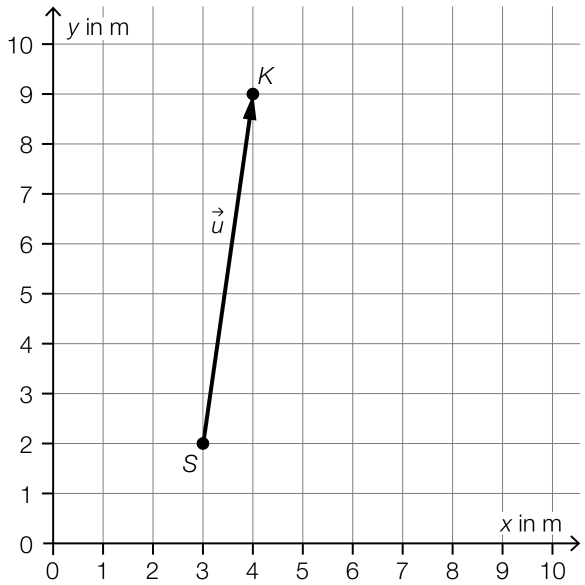
1) Vervollständigen Sie die nachstehende Formel zur Berechnung des Winkels α. Verwenden Sie dabei r, b_1 und b_2.

$$\alpha = \arccos\left(\boxed{}\right) + \arccos\left(\boxed{}\right)$$ *[0/1 P.]*

Es gilt:
$b_1 = 4{,}5$ m, $b_2 = 3$ m und $\alpha = 131°$

2) Berechnen Sie die Länge d. *[0/1 P.]*

c) Tim und Angela skizzieren einen Plan, um ihre Strategie beim Spiel *Piratenschiff* festzulegen (siehe nachstehende Abbildung).



Beide starten im Punkt S.
Tim möchte vom Punkt S geradlinig zum Punkt K laufen.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{u}$. *[0/1 P.]*

Angela folgt vom Punkt S aus dem Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Vektor $\vec{w}$ als Pfeil ausgehend vom Punkt S ein. *[0/1 P.]*

4) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{w}$. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $f(0{,}5) = 1{,}2$ *oder* $a - 1{,}209 \cdot \ln(0{,}5 + 0{,}5) = 1{,}2$
$a = 1{,}2$

a2) $f(x) = 0$ *oder* $1{,}2 - 1{,}209 \cdot \ln(x + 0{,}5) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_B = 2{,}198...$ m

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters *a*.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Stelle x_B.

b1) $\alpha = \arccos\left(\frac{r}{b_1}\right) + \arccos\left(\frac{r}{b_2}\right)$

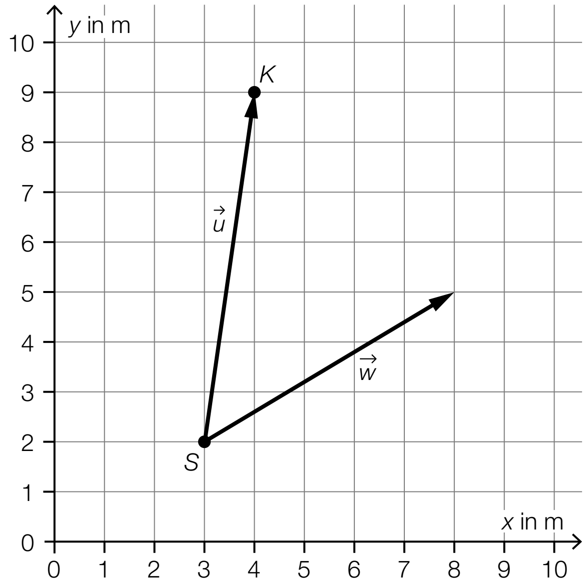
b2) $d = \sqrt{4{,}5^2 + 3^2 - 2 \cdot 4{,}5 \cdot 3 \cdot \cos(131°)}$
$d = 6{,}85...$ m

b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge *d*.

c1) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

c2) $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 7^2}$
$|\vec{u}| = 7{,}071...\text{ m}$

c3)



c4) $\arccos\left(\dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 7^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2}}\right) = 50{,}9...°$

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge des Vektors $\vec{u}$.
c3) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Vektors $\vec{w}$.
c4) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Größe von Mädchen*

Aufgabennummer: B_353

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Tabelle ist angegeben, wie groß Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Körpergröße (in Zentimetern)
0	51,5
1	74,0
2	85,4
3	95,4
4	102,8
5	109,5
6	115,3

a) – Stellen Sie die durchschnittliche Körpergröße in Abhängigkeit vom Alter in einem Koordinatensystem dar. Verwenden Sie dazu die Angaben aus der obigen Tabelle.

b) – Bestimmen Sie den absoluten Größenzuwachs im 3. Lebensjahr anhand der gegebenen Daten.
– Beschreiben Sie, was mit der folgenden Rechnung im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt wird:
$$\frac{102{,}8 - 95{,}4}{95{,}4}$$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Tabelle sehen Sie, wie schwer Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Masse (in Kilogramm)
1	9,3
2	12,2
3	14,5
4	16,6
5	19,0
6	21,0

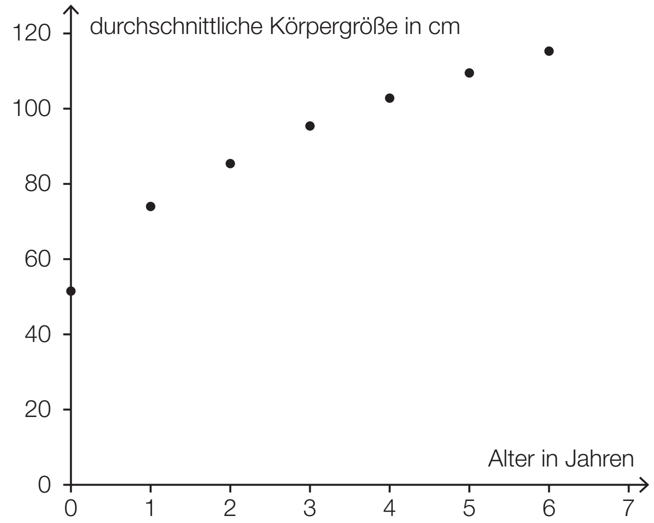
Aufgrund der gegebenen Daten kann man vermuten, dass die Abhängigkeit der durchschnittlichen Masse von der durchschnittlichen Körpergröße annähernd durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann. Die Werte für die durchschnittliche Körpergröße entnehmen Sie der im Einleitungstext gegebenen Tabelle.

– Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten für den linearen Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Körpergröße und durchschnittlicher Masse.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) 95,4 – 85,4 = 10
Der absolute Größenzuwachs im 3. Lebensjahr beträgt 10 cm.

Es wird der relative Zuwachs der durchschnittlichen Körpergröße im 4. Lebensjahr ermittelt.

c) Berechnung des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}9961$

Der Korrelationskoeffizient liegt nahe bei 1 und lässt daher einen starken positiven linearen Zusammenhang vermuten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige grafische Darstellung

b) 1 × B: für das richtige Bestimmen des absoluten Größenzuwachses
1 × C: für die richtige Beschreibung im Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten
1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten

Gummibärchen ziehen*

Aufgabennummer: B_354

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Gummibärchen werden in unterschiedlichen Farben hergestellt.

a) In einer Packung mit insgesamt 132 Gummibärchen sind 27 orangefärbige Gummibärchen. Carina nimmt ohne hinzusehen ein Gummibärchen aus der Packung. Ist dieses zufällig ausgewählte Gummibärchen orangefärbig, wird es sofort gegessen. Ein andersfärbiges Gummibärchen legt sie wieder in die Packung zurück. Das macht sie 2-mal hintereinander.

– Veranschaulichen Sie die möglichen Ausgänge dieses Zufallsexperiments in einem mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Carina 2 orangefärbige Gummibärchen zieht.

b) Stefan nimmt ohne hinzusehen ein Gummibärchen aus einer Packung, die verschiedenfärbige Gummibärchen enthält. Ist dieses zufällig ausgewählte Gummibärchen weiß, legt er es zurück, ist es ein andersfärbiges, wird es sofort gegessen. Das macht er 10-mal hintereinander.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der dabei gezogenen weißen Gummibärchen.

– Erklären Sie, warum dieses Zufallsexperiment nicht durch eine Binomialverteilung beschrieben werden kann.

c) Eine kleine Packung Gummibärchen enthält 5 rote Gummibärchen und je 1 grünes, 1 gelbes und 1 weißes Gummibärchen. Es wird ein Gummibärchen nach dem anderen zufällig aus der Packung genommen und nicht wieder zurückgelegt. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.
Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der benötigten Züge, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.

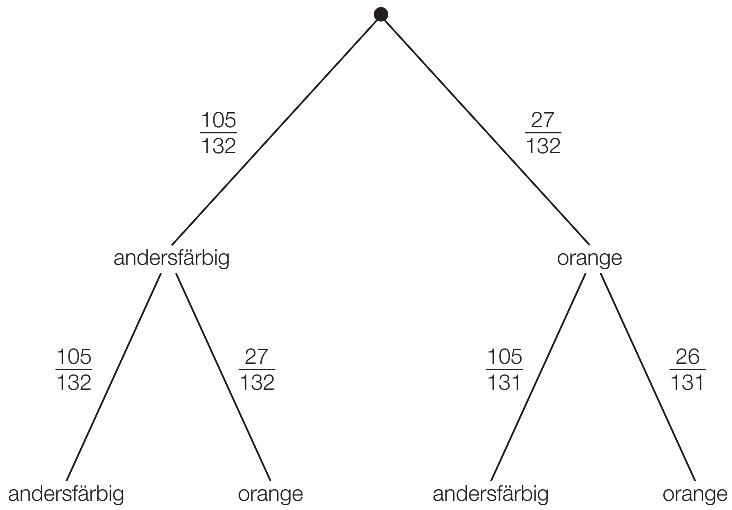
– Erstellen Sie eine Tabelle, der man die möglichen Werte dieser Zufallsvariablen X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten entnehmen kann.
– Berechnen Sie den Erwartungswert von X.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswertes im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



P(„2 orangefärbige Gummibärchen“) $= \frac{27}{132} \cdot \frac{26}{131} = 0{,}04059\ldots \approx 4{,}06\ \%$

b) Die Verwendung der Binomialverteilung setzt voraus, dass die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Versuchsausgangs jeweils konstant bleibt. Bei jedem Zug, bei dem kein weißes Gummibärchen gezogen wird, ändert sich die Gesamtzahl in der Packung und damit die Wahrscheinlichkeit des Versuchsausgangs.

c)

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{56}$	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{5} = \frac{1}{56}$

$E(X) = 1 \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{15}{56} + 3 \cdot \frac{5}{56} + 4 \cdot \frac{1}{56} = 1{,}5$

Der Erwartungswert gibt an, wie viele Züge man im Mittel benötigt, bis ein rotes Gummibärchen gezogen wird.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen in einem mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm
   1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × D: für die richtige Erklärung

c) 1 × A: für die richtige und vollständige Angabe der Werte der Zufallsvariablen
   1 × B1: für die richtige und vollständige Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten
   1 × B2: für die richtige Berechnung des Erwartungswertes
   1 × C: für die richtige Interpretation des Erwartungswertes im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

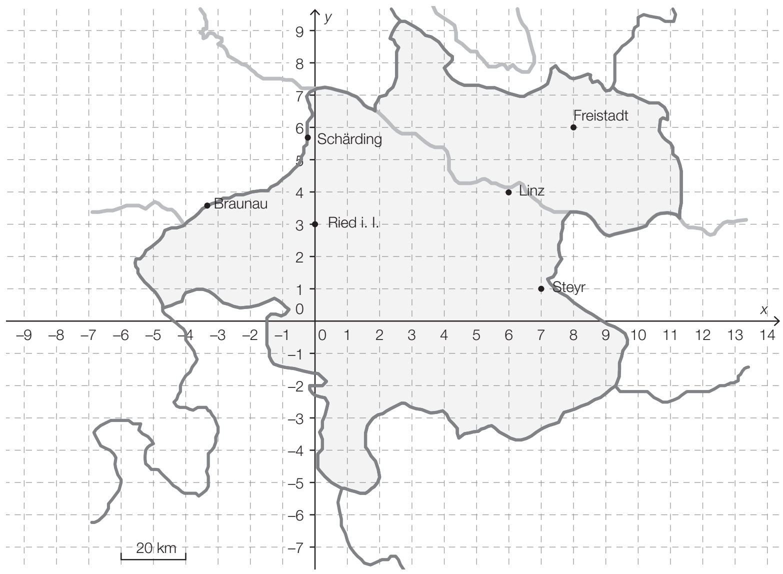
Brieftauben*

Aufgabennummer: B_355

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Brieftauben werden bei Wettkämpfen an einen Ort gebracht, von dem sie selbstständig wieder zurück nach Hause fliegen. Bei der vorliegenden Aufgabe wird angenommen, dass Brieftauben stets den kürzesten Weg nach Hause suchen.

Die nachstehende Grafik zeigt einige Städte in Oberösterreich, in denen es Taubenzüchter/innen gibt, in einem Koordinatensystem. Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einer Entfernung von 10 Kilometern.



a) Eine Taube wird in Freistadt losgelassen und fliegt auf direktem Weg nach Steyr.

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Vektors (Pfeil von Anfangspunkt zu Endpunkt des Fluges), der die Flugstrecke der Taube beschreibt.

b) Eine Brieftaube fliegt von Ried i. I. in ihre Heimatstadt. Dieser Flug wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

– Lesen Sie die Heimatstadt dieser Brieftaube ab.
– Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{v}$.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine Taube startet in Linz. Sie fliegt eine Strecke von 67,08 km Länge in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Vektors, den die Taube von Linz bis zu ihrem Ziel entlangfliegt. Geben Sie die Koordinaten dabei in den Längeneinheiten des obigen Koordinatensystems an.

d) Die Berechnung des Skalarprodukts zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ergibt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} = 0$

– Ermitteln Sie a.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Freistadt: $F = (8|6)$
Steyr: $S = (7|1)$
$\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) Heimatstadt dieser Brieftaube: Freistadt (8|6)

$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = 8{,}544\ldots \approx 8{,}54$

c) Einheitsvektor: $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$6{,}708 \cdot \vec{e} = \frac{6{,}708}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

d) $3 \cdot 2 + (-1) \cdot a = 0 \Rightarrow a = 6$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors

b) 1 × C: für das richtige Ablesen der Heimatstadt (Name oder Koordinaten)
1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags des Vektors

c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (Länge des Vektors muss verändert werden)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors in den Längeneinheiten des gegebenen Koordinatensystems

d) 1 × A: für das richtige Ermitteln von *a*

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

WhatsApp*

Aufgabennummer: B_356

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

WhatsApp ist ein Anwendungsprogramm für internetfähige Mobiltelefone zum Austausch von Nachrichten.

a) Zu Beginn des Jahres 2012 verzeichnete WhatsApp in einem Land 9,3 Millionen Nutzer/innen, zu Beginn des Jahres 2013 waren es 20 Millionen Nutzer/innen, zu Beginn des Jahres 2014 waren es 32 Millionen Nutzer/innen.

Jemand behauptet, dass für diesen Zeitraum ein exponentielles Wachstum vorliegt.

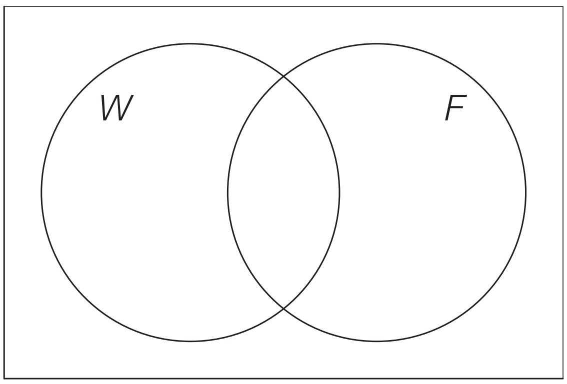
– Modellieren Sie mithilfe der Werte für 2012 und 2014 eine Exponentialfunktion A, die die Anzahl der WhatsApp-Nutzer/innen beschreibt.

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2012
$A(t)$ ... Anzahl der WhatsApp-Nutzer/innen zur Zeit t in Millionen

– Berechnen Sie, innerhalb welcher Zeitspanne sich die Anzahl der Nutzer/innen in diesem Modell jeweils verdoppelt.
– Beurteilen Sie, ob dieses Modell den Wert für 2013 gut wiedergibt, wenn Abweichungen bis zu 1 Million Nutzerinnen/Nutzern toleriert werden.

b) In einer Klasse mit 28 Schülerinnen/Schülern wird erhoben, welche sozialen Netzwerke genutzt werden. 12 nutzen WhatsApp (W), 15 nutzen Facebook (F) und 4 keines dieser beiden.

– Vervollständigen Sie das nachstehende Mengendiagramm durch Eintragen der richtigen Anzahlen.

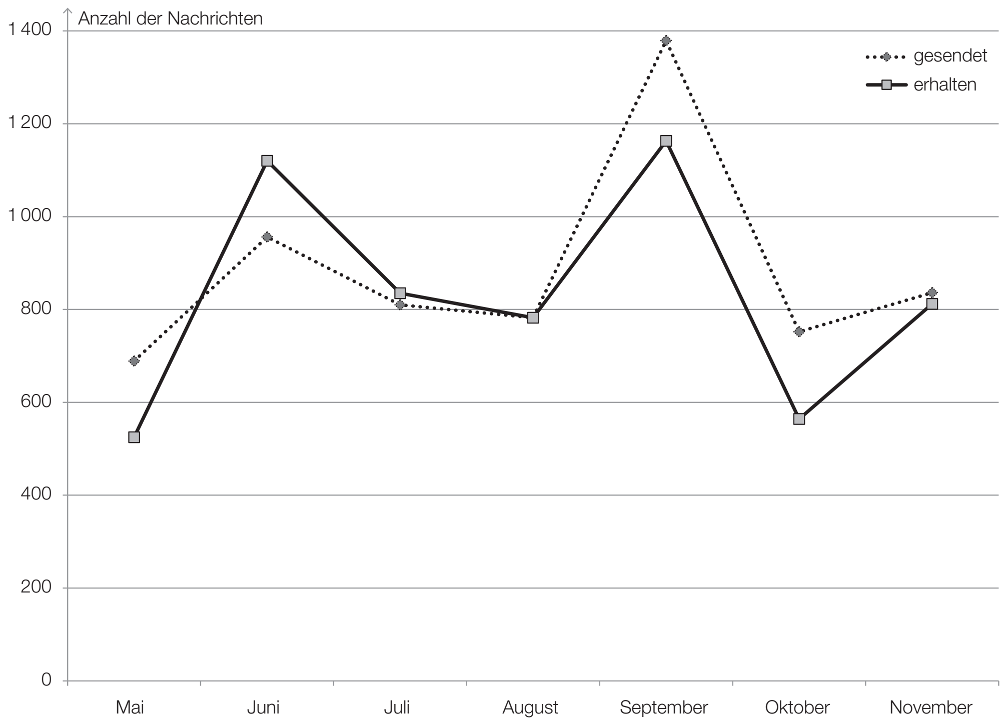


– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Schüler/innen dieser Klasse sowohl WhatsApp als auch Facebook nutzen.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) WhatsApp bietet die Möglichkeit, das persönliche Nutzerverhalten statistisch zu erfassen.

Die Aktivitäten eines bestimmten Nutzers (Anzahl der gesendeten bzw. erhaltenen Nachrichten im jeweiligen Monat) auf WhatsApp können Sie der nachstehenden Abbildung entnehmen.



– Lesen Sie aus der oben stehenden Abbildung ab, wie viele Nachrichten der Nutzer im August und September insgesamt gesendet hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $A(t) = A_0 \cdot a^t$

$A_0 = 9{,}3$

$32 = 9{,}3 \cdot a^2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{32}{9{,}3}} = 1{,}85495...$

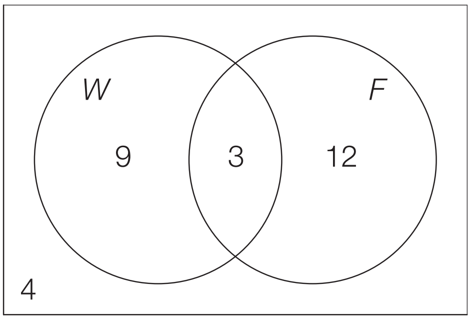
$2 \cdot A_0 = A_0 \cdot a^T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = 1{,}121...$

Die Anzahl der Nutzer/innen verdoppelt sich gemäß diesem Modell in jeweils rund 1,12 Jahren.

$A(1) = 17{,}25... \approx 17{,}3$

Diesem Modell zufolge hätte es zu Beginn des Jahres 2013 in diesem Land rund 17,3 Millionen Nutzer/innen gegeben. Die Abweichung vom tatsächlichen Wert (20 Millionen) ist größer als 1 Million, daher eignet sich das Modell hier nicht gut.

b)



$\frac{3}{28} = 0{,}10714... \approx 10{,}71\ \%$

Rund 10,71 % der Schüler/innen dieser Klasse nutzen sowohl WhatsApp als auch Facebook.

c) $780 + 1\,380 = 2\,160$

Toleranzbereich: [2 100; 2 200]

Im August und September wurden insgesamt rund 2 160 Nachrichten gesendet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Modellieren der Exponentialfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Verdoppelungszeit
1 × D: für die richtige Beurteilung

b) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Mengendiagramms
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

c) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [2 100; 2 200]

Skispringen (2)*

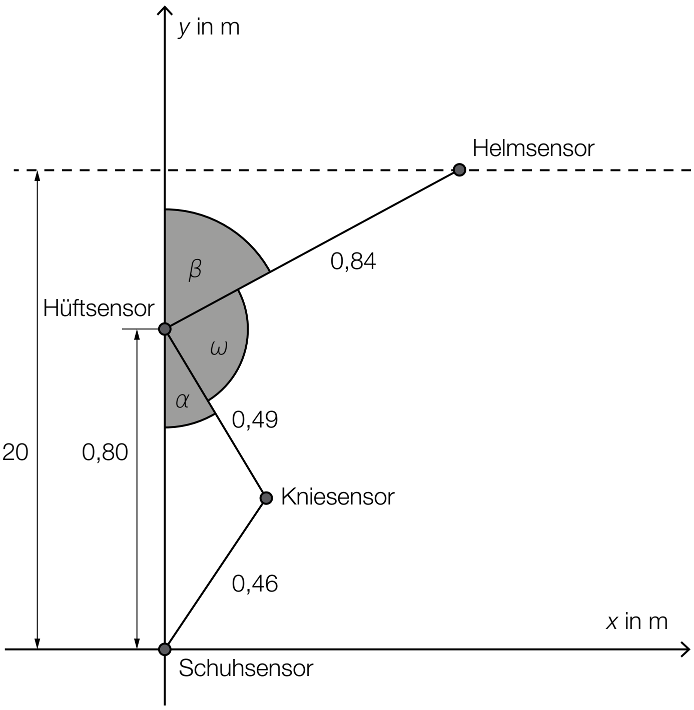
Aufgabennummer: B_380

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Für die Analyse eines Bewegungsablaufs beim Skispringen wurden 4 Sensoren an der Ausrüstung eines Skispringers befestigt.

1. Sensor: Schuh
2. Sensor: Knie
3. Sensor: Hüfte
4. Sensor: Helm

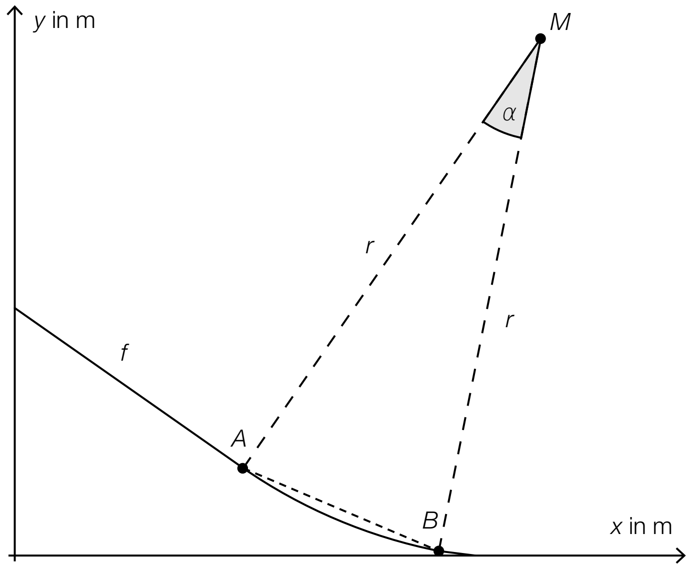
In der nachstehenden Abbildung sind die Positionen der Sensoren für eine Position im Bewegungsablauf des Skispringers in einem Koordinatensystem dargestellt (Angaben in Metern).



– Berechnen Sie den Winkel ω.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Anlauf der Mühlenkopfschanze in Willingen (Deutschland) ist in der nachstehenden Abbildung vereinfacht als Graph einer Funktion *f* dargestellt.



A und *B* sind Punkte eines Kreises mit Mittelpunkt *M* und Radius $r = 105{,}6$ m.
Die geradlinige Strecke *AB* hat eine Länge von 43,4 m.

– Berechnen Sie den Winkel α.
– Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Strecke *AB* kürzer als der Kreisbogen von *A* nach *B* ist.

c) Der Zusammenhang zwischen der Absprunggeschwindigkeit und der Sprungweite soll untersucht werden. Es wird vermutet, dass die Sprungweite linear von der Absprunggeschwindigkeit abhängt.

Es stehen folgende Messdaten zur Verfügung:

Absprunggeschwindigkeit in km/h	88,0	89,9	90,2	91,2	91,5	91,9	92,5
Sprungweite in m	110,0	112,5	113,7	115,8	116,6	118,7	120,0

– Bestimmen Sie für diese Datenpaare eine Gleichung der linearen Regressionsfunktion.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a) $0{,}46^2 = 0{,}49^2 + 0{,}8^2 - 2 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}8 \cdot \cos(\alpha)$

$\alpha = \arccos\left(\frac{0{,}46^2 - 0{,}49^2 - 0{,}8^2}{-2 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}8}\right)$

$\alpha = 31{,}49\ldots°$

$\cos(\beta) = \frac{0{,}4}{0{,}84}$

$\beta = 61{,}56\ldots°$

$\omega = 180° - \alpha - \beta$

$\omega = 86{,}94\ldots° \approx 86{,}9°$

b) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{r} = \frac{21{,}7}{105{,}6}$

$\alpha = 23{,}716\ldots°$

Kreisbogen b von A nach B:

$b = \frac{\alpha \cdot r \cdot \pi}{180°}$

$b = \frac{23{,}716\ldots° \cdot 105{,}6 \cdot \pi}{180°} = 43{,}711\ldots$

prozentueller Unterschied zwischen der Länge der Strecke AB und dem Kreisbogen b:

$\frac{43{,}711\ldots - 43{,}4}{43{,}711\ldots} = 0{,}00712\ldots \approx 0{,}71\ \%$

Die Streckenlänge $\overline{AB}$ ist um rund 0,71 % kürzer als der Kreisbogen b.

c) Ermittlung der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 2{,}3 \cdot x - 90{,}6$ *(Koeffizienten gerundet)*

x … Absprunggeschwindigkeit in km/h

$f(x)$ … Sprungweite bei einer Absprunggeschwindigkeit x in m

Wird die Absprunggeschwindigkeit um 1 km/h erhöht, so ist die Sprungweite gemäß dem Modell um rund 2,3 m größer.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für einen richtigen Lösungsansatz (z. B.: mittels Cosinussatz)
   1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels ω

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Winkels α
   1 × B2: für das richtige Bestimmen des prozentuellen Unterschieds

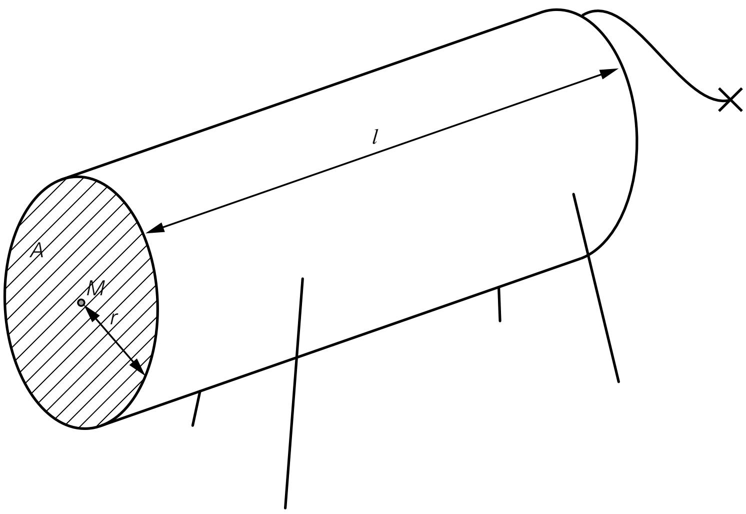
c) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Gleichung der Regressionsfunktion
   1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Modell-Kuh*

Aufgabennummer: B_385		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Um in einer Faustformel einen Zusammenhang zwischen Brustumfang und Volumen einer Kuh herzustellen, wird die Kuh modellhaft als Zylinder mit einer kreisförmigen Querschnittsfläche und der Länge l angenommen.



Dazu muss der Flächeninhalt A der Kreisfläche durch den Umfang u des Kreises ausdrückt werden.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A in Abhängigkeit vom Umfang u auf.

A = ______________________________

In diesem Modell wird die Länge l des Zylinders als das 9-Fache des Radius r angenommen.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V in Abhängigkeit vom Umfang u auf.

V = ______________________________

Der Brustumfang einer Kuh ist um 10 % größer als jener einer anderen Kuh.

– Bestimmen Sie, um wie viel Prozent das Volumen dieser Kuh größer ist als das Volumen der anderen Kuh.

* ehemalige Klausuraufgabe

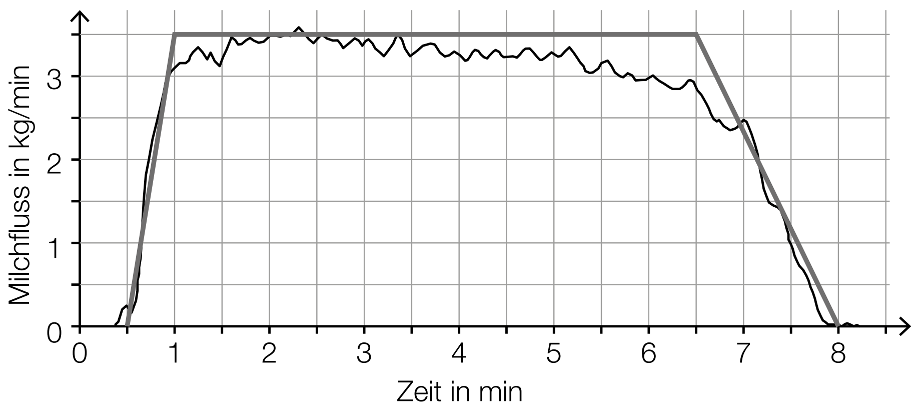
b) Die nachstehende Tabelle gibt den Brustumfang und die Lebendmasse von 8 Kühen an.

Brustumfang in cm	Lebendmasse in kg
153	240
155	303
161	285
163	320
165	373
167	318
169	387
170	358

In einem vereinfachten Modell kann für Brustumfänge von 150 cm bis 170 cm ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden angegebenen Größen angenommen werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Die Lebendmasse soll in Abhängigkeit vom Brustumfang beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells die Lebendmasse, die man bei einem Brustumfang von 160 cm erwarten kann.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Milchfluss während eines Melkvorgangs in Kilogramm pro Minute (kg/min) in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten (min).
Für weitere Berechnungen wird der Milchfluss durch einen Streckenzug in Form eines Trapezes modelliert. Dieser Streckenzug ist ebenfalls eingezeichnet.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Grafik die während dieses Melkvorgangs insgesamt gemolkene Milchmenge.
– Bestimmen Sie näherungsweise die während dieses Melkvorgangs insgesamt gemolkene Milchmenge.

Möglicher Lösungsweg

a) $u = 2 \cdot r \cdot \pi \;\Rightarrow\; r = \dfrac{u}{2 \cdot \pi}$

$A = r^2 \cdot \pi$

$\Rightarrow\; A = \dfrac{u^2}{4 \cdot \pi}$

$l = 9 \cdot r$

$V = A \cdot 9 \cdot r$

$V = \dfrac{u^2}{4 \cdot \pi} \cdot \dfrac{9 \cdot u}{2 \cdot \pi} = \dfrac{9 \cdot u^3}{8 \cdot \pi^2}$

$V_{neu} = \dfrac{9 \cdot (1{,}1 \cdot u)^3}{8 \cdot \pi^2} = \dfrac{9 \cdot 1{,}1^3 \cdot u^3}{8 \cdot \pi^2} = 1{,}1^3 \cdot V = 1{,}331 \cdot V$

Wenn der Umfang um 10 % steigt, nimmt gemäß diesem Modell das Volumen um 33,1 % zu.

b) Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$y = 6{,}50 \cdot x - 736$ *(Koeffizienten gerundet)*

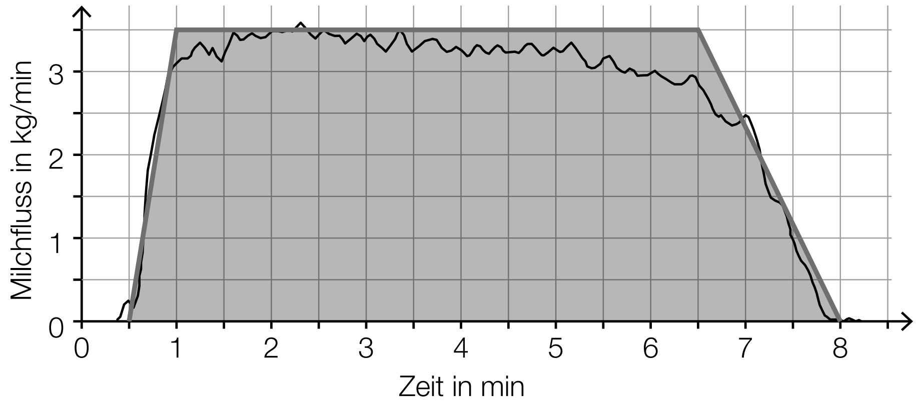
x … Brustumfang in cm
y … Lebendmasse in kg

Gemäß dem Modell steigt die Lebendmasse pro Zentimeter Brustumfang um rund 6,50 kg.

x = 160 cm:
$6{,}50\ldots \cdot 160 - 736{,}\ldots = 304{,}2\ldots \approx 304$

Gemäß dem Modell kann man bei einem Brustumfang von 160 cm eine Lebendmasse von rund 304 kg erwarten.

c)



Auch das Veranschaulichen der Milchmenge als Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der horizontalen Achse ist als richtig zu werten.

Die gemolkene Milchmenge entspricht dem Flächeninhalt A des Trapezes:

$$A = \frac{(7{,}5 + 5{,}5) \cdot 3{,}5}{2} = 22{,}75$$

Es wurden 22,75 kg Milch gemolken.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Formel für A in Abhängigkeit von u
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Formel für V in Abhängigkeit von u
1 × A3: für das richtige Bestimmen des prozentuellen Unterschieds

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C: für eine richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung der Lebendmasse bei 160 cm Brustumfang

c) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Milchmenge als Fläche zwischen dem Streckenzug bzw. dem Graphen der Funktion und der horizontalen Achse
1 × B: für das richtige Bestimmen der insgesamt gemolkenen Milchmenge

Lieblingsspielformen*

Aufgabennummer: B_388

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Gruppe von Kindergartenkindern wurde nach ihren Lieblingsspielformen befragt. Zur Auswahl standen: Konstruktionsspiele, Bewegungsspiele und Regelspiele. Dabei waren Mehrfachnennungen möglich. Das Ergebnis kann man der nachstehenden Tabelle entnehmen.

Lieblingsspielform	Anzahl der Nennungen
Konstruktionsspiele (K)	7
Bewegungsspiele (B)	14
Regelspiele (R)	7

Tabelle 1

Einige dieser Kinder haben sich für genau 2 Spielformen entschieden.

Lieblingsspielform	Anzahl der Nennungen
Konstruktionsspiele und Bewegungsspiele	3
Konstruktionsspiele und Regelspiele	1
Bewegungsspiele und Regelspiele	2

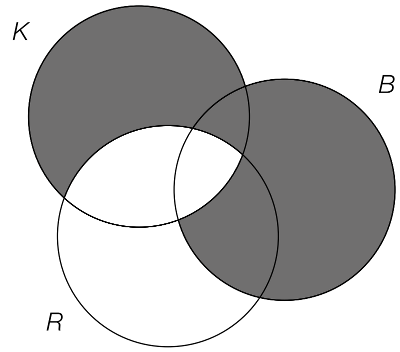
Tabelle 2

2 Kinder haben sogar alle 3 Spielformen genannt.

a) – Veranschaulichen Sie die Ergebnisse dieser Befragung in einem Venn-Diagramm (Mengendiagramm). Tragen Sie die entsprechenden Anzahlen in das Venn-Diagramm ein.
– Ermitteln Sie, wie viele Kinder sich insgesamt für nur eine Spielform als Lieblingsspielform entschieden haben.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im nachstehenden Venn-Diagramm ist eine bestimmte Menge grau hervorgehoben.

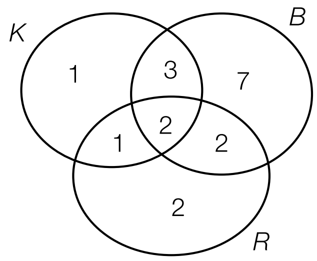


– Geben Sie die grau hervorgehobene Menge des obigen Mengendiagramms mithilfe der Mengensymbolik (Mengenoperationen: Vereinigung, Durchschnitt, Differenz) an.
– Beschreiben Sie die grau hervorgehobene Menge im gegebenen Sachzusammenhang in Worten.

c) – Erstellen Sie mithilfe von Tabelle 1 ein Säulen- oder ein Balkendiagramm mit den absoluten Häufigkeiten der Nennung von Konstruktionsspielen, Bewegungsspielen und Regelspielen.

Möglicher Lösungsweg

a)

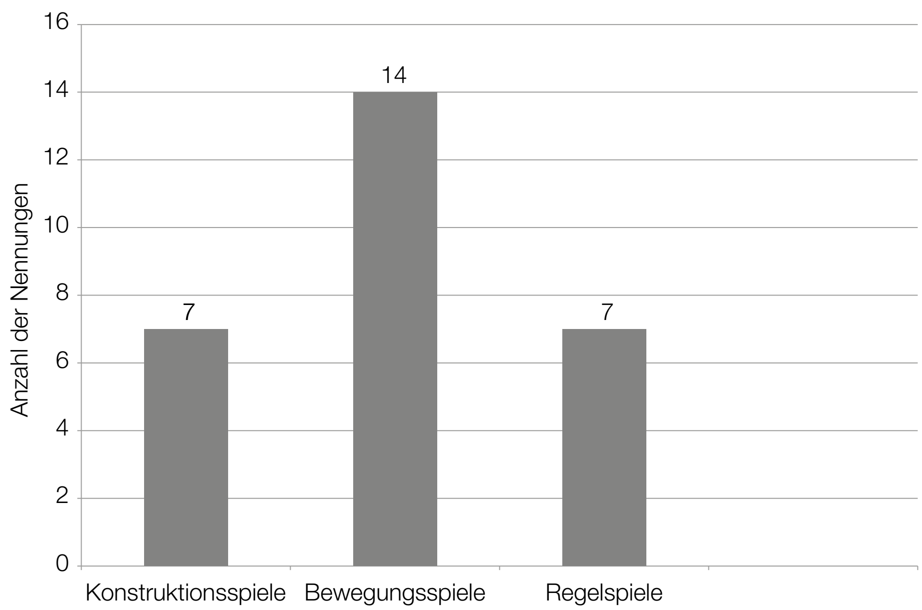


Dem Diagramm zu entnehmen: 1 + 7 + 2 = 10.
10 Kinder haben sich für eine einzige Spielform als Lieblingsspielform entschieden.

b) $(K \cup B) \setminus (K \cap R)$

Die hervorgehobene Menge ist die Menge aller Kinder, die Bewegungsspiele oder Konstruktionsspiele als Lieblingsspielform genannt haben, ohne die Kinder, die sowohl Konstruktionsspiele als auch Regelspiele als Lieblingsspielform genannt haben.

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Ergebnisse in einem Venn-Diagramm mit den entsprechenden Anzahlen
   1 × B: für das richtige Ermitteln der Anzahl der Kinder, die sich insgesamt für eine einzige Spielform als Lieblingsspielform entschieden haben

b) 1 × A: für die richtige Angabe mithilfe der Mengensymbolik
   1 × C: für die richtige Beschreibung in Worten

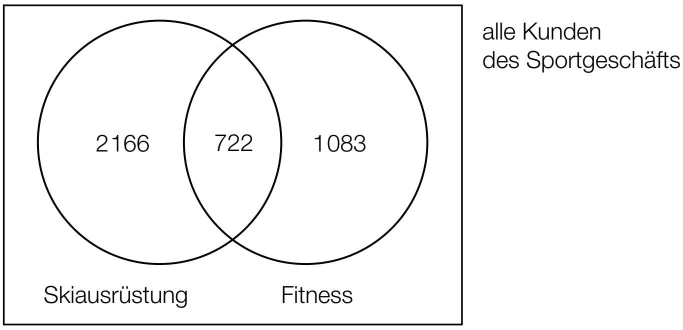
c) 1 × A: für das richtige Erstellen eines Säulen- oder Balkendiagramms

Sportgeschäft

Aufgabennummer: B_263

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Während des Winterschlussverkaufs wurde die Anzahl der Kunden eines Sportgeschäfts, die in verschiedenen Abteilungen eingekauft haben, aufgezeichnet. Insgesamt haben 5 776 Kunden im Sportgeschäft eingekauft.



– Berechnen Sie die Anzahl der Kunden, die weder in der Abteilung *Skiausrüstung* noch in der Abteilung *Fitness* eingekauft haben.
– Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils den richtigen Prozentsatz aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Der Prozentsatz der Kunden, die nur Skiausrüstung kaufen, beträgt …	
Der Prozentsatz der Kunden, die sowohl Skiausrüstung als auch Fitnessartikel kaufen, beträgt …	

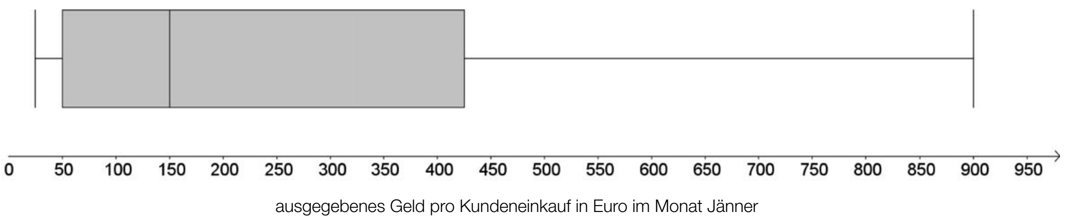
A	50 %
B	12,5 %
C	37,5 %
D	18,75 %

b) Ein Sportgeschäft verleiht tageweise Ski. Erfahrungsgemäß müssen bei etwa 6 % der zurückgebrachten Paar Ski Reparaturen durchgeführt werden.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Zufallsauswahl von 10 Paar ausgeliehenen Ski mindestens 2 Paar Ski repariert werden müssen.

c) Für den einkommensschwachen Monat Februar möchte ein Sportgeschäft eine Marketing-Strategie entwickeln. Dafür wird ausgewertet, wie viel Geld die einzelnen Kunden bei einem Einkauf im Monat Jänner jeweils ausgegeben haben.

Das Ergebnis der Auswertung wird im nachstehenden Boxplot dargestellt.



– Lesen Sie den Median und den Interquartilsabstand ab.
– Interpretieren Sie den Boxplot hinsichtlich desjenigen Anteils an Kunden, die zwischen € 150 und € 425 pro Kundeneinkauf ausgegeben haben.

d) Als Werbestrategie wird den Besuchern ein Gewinnspiel angeboten. Jeder Besucher darf mit einem fairen Spielwürfel, bei dem die Augenzahlen 1 bis 6 mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, einmal würfeln. Zeigt der Würfel die Augenzahl 6, gewinnt man einen 10-Euro-Gutschein, bei der Augenzahl 5 gewinnt man einen 5-Euro-Gutschein. Bei jeder anderen Augenzahl gewinnt man nichts.

– Berechnen Sie den Erwartungswert des Gewinns eines Besuchers.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Erwartungswerts im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $5\,776 - (2\,166 + 722 + 1\,083) = 1\,805$

Es haben 1 805 Personen weder in der Abteilung *Skiausrüstung* noch in der Abteilung *Fitness* eingekauft.

Der Prozentsatz der Kunden, die nur Skiausrüstung kaufen, beträgt …	C
Der Prozentsatz der Kunden, die sowohl Skiausrüstung als auch Fitnessartikel kaufen, beträgt …	B

A	50 %
B	12,5 %
C	37,5 %
D	18,75 %

b) mit Technologieeinsatz berechnet: $P(X \geq 2) = 0{,}1176\ldots$

$$\left(P(X \geq 2) = \sum_{k=2}^{10} \binom{10}{k} \cdot 0{,}06^k \cdot 0{,}94^{10-k} = 0{,}1176\ldots\right)$$

Mit rund 11,8 % Wahrscheinlichkeit müssen mindestens 2 Paar Ski repariert werden.

c) Median = € 150
Interquartilsabstand = € 375

Man kann am Boxplot ablesen, dass etwa 25 % der Kunden zwischen € 150 und € 425 im Jänner für Einkäufe ausgegeben haben.

d) $E(\text{„Gewinn"}) = 10 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} = 2{,}50$

Der Erwartungswert beträgt € 2,50.

Der Erwartungswert beschreibt den mittleren Gewinn pro Person unter der Annahme, dass eine große Anzahl an Personen an diesem Spiel teilnimmt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 2
c) leicht	c) 2
d) mittel	d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

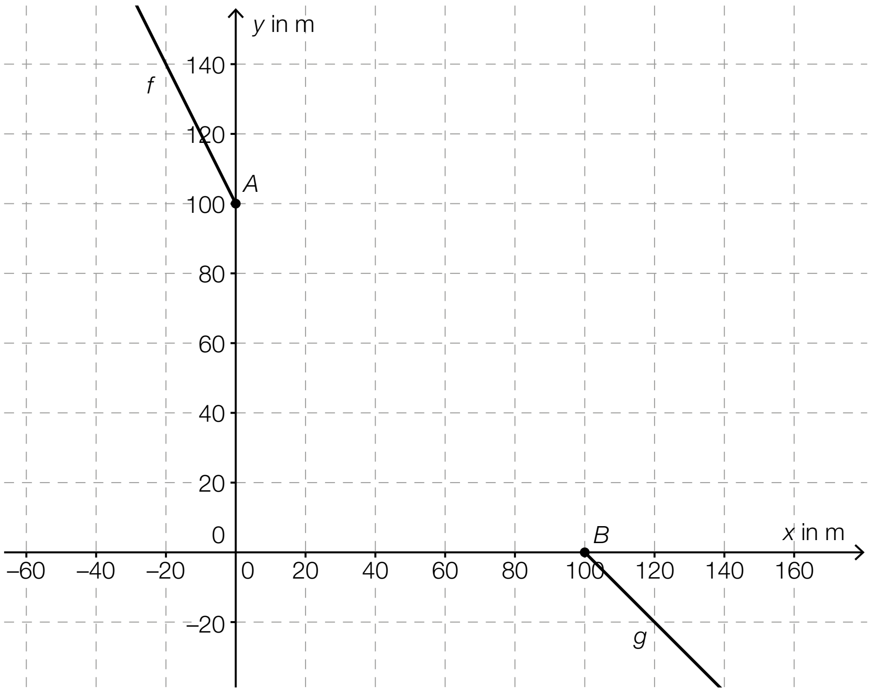
Straßenbau (2)*

Aufgabennummer: B_408

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Zwischen zwei Punkten A und B soll eine Verbindungsstraße errichtet werden.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Bauplan in einem Koordinatensystem in der Draufsicht (von oben betrachtet).



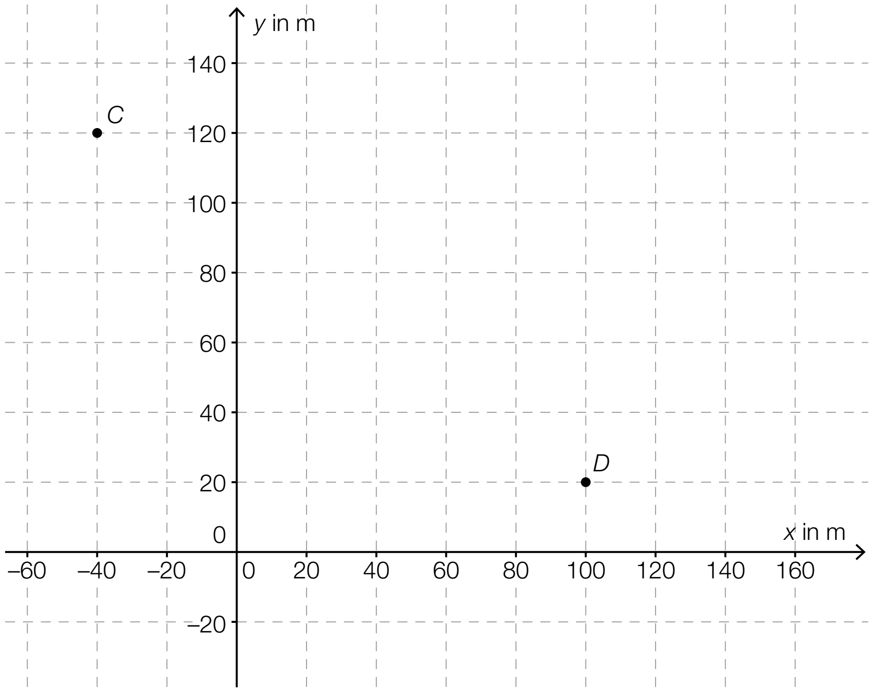
Zu Punkt A führt eine Straße, die durch den Graphen der linearen Funktion f dargestellt ist. Zu Punkt B führt eine Straße, die durch den Graphen der linearen Funktion g dargestellt ist.

Die neue Straße, die A und B verbindet, soll durch den Graphen einer Polynomfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Diese Polynomfunktion soll im Punkt A die gleiche Steigung wie f und im Punkt B die gleiche Steigung wie g haben.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion h.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten von h.

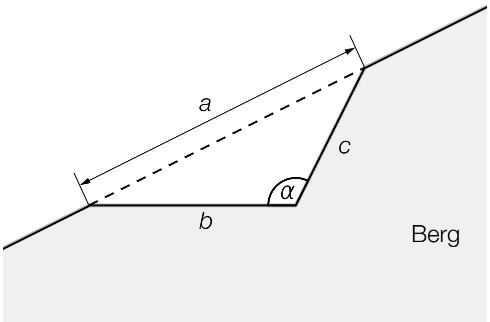
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Zwischen zwei Punkten C und D soll eine geradlinige Verbindungsstraße errichtet werden (siehe nachstehendes Koordinatensystem).



– Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{CD}$.
– Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\overrightarrow{CD}$.

c) Ein Straßenabschnitt soll an einem Berghang entlangführen. Der Querschnitt der geplanten Trasse ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Seite b ist 15 m und die Seite c ist 11,8 m lang. Der Winkel beträgt $\alpha = 116{,}6°$.

– Berechnen Sie den Flächeninhalt des von a, b und c eingeschlossenen Dreiecks.
– Berechnen Sie die Länge der Seite a.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $h(0) = 100$
II: $h(100) = 0$
III: $h'(0) = -2$
IV: $h'(100) = -1$

oder:

I: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 100$
II: $a \cdot 100^3 + b \cdot 100^2 + c \cdot 100 + d = 0$
III: $3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 + c = -2$
IV: $3 \cdot a \cdot 100^2 + 2 \cdot b \cdot 100 + c = -1$

Berechnen der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}0001$
$b = 0{,}02$
$c = -2$
$d = 100$

b) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ -100 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{140^2 + (-100)^2} = 172{,}0... \approx 172$

c) $A = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} \approx 79{,}132...$

Der Flächeninhalt beträgt rund 79,13 m².

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)}$
$a = 22{,}86...$
Die Seite *a* ist rund 22,9 m lang.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *A* und *B*
1 × A2: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Steigung im Punkt *A* bzw. *B*
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors
1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags des Vektors

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Länge der Seite *a*

Fairtrade*

Aufgabennummer: B_399

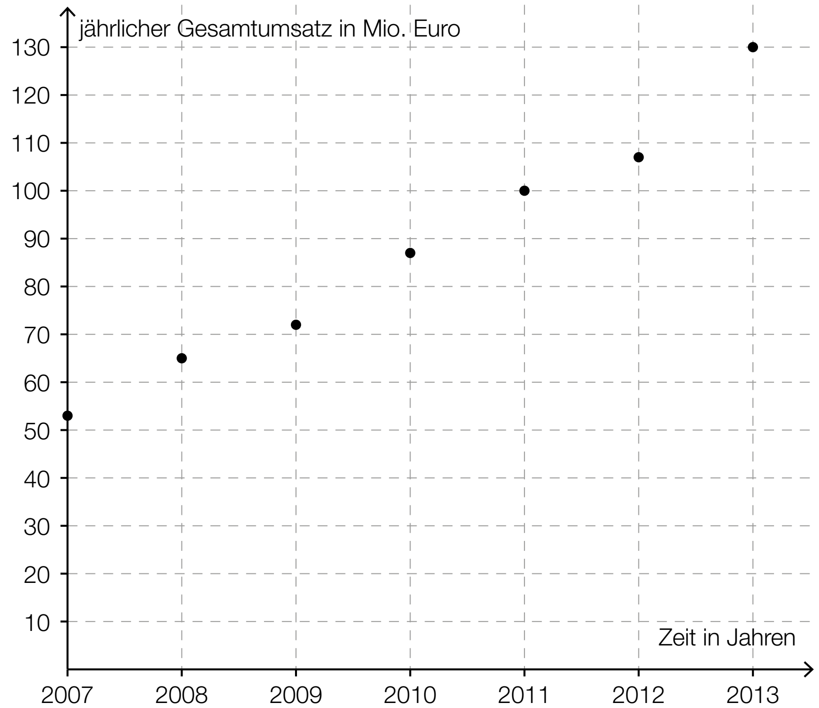
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Gesamtumsatz von Fairtrade-Produkten in Österreich ist in den letzten Jahren deutlich gestiegen:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
jährlicher Gesamtumsatz in Millionen (Mio.) Euro	53	65	72	87	100	107	130

Quelle: http://www.fairtrade.at/fileadmin/AT/Materialien/2013_FAIRTRADE_Inside_Zahlen_Fakten.pdf [05.09.2016].

a) Die nachstehende Abbildung zeigt diese Gesamtumsatzentwicklung.



Der jährliche Gesamtumsatz soll in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.
– Zeichnen Sie den Graphen der Regressionsfunktion im obigen Koordinatensystem ein.
– Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Gesamtumsatzentwicklung ist.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells den zu erwartenden jährlichen Gesamtumsatz im Jahr 2020.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Betrachtet man nur den Zeitraum von 2009 bis 2013, so kann die Entwicklung des Gesamtumsatzes näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(t) = 13{,}6 \cdot t + 72$

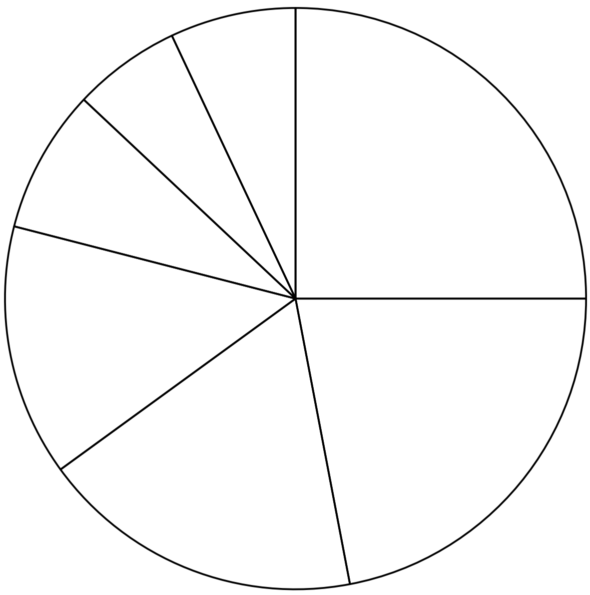
t ... Zeit in Jahren ab 2009 ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2009)
$f(t)$ ... jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro

– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Im Jahr 2012 teilte sich der Gesamtumsatz auf folgende 7 Bereiche auf:
Baumwolle, frische Früchte, Fruchtsäfte, Kaffee, Rosen, Süßwaren und Rest.

Der Umsatz an Kaffee betrug in diesem Jahr 18 % des Gesamtumsatzes.

– Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm denjenigen Sektor, der dem Umsatz an Kaffee entspricht.



Der Umsatz an Süßwaren betrug 2012 etwa 24 Mio. Euro.

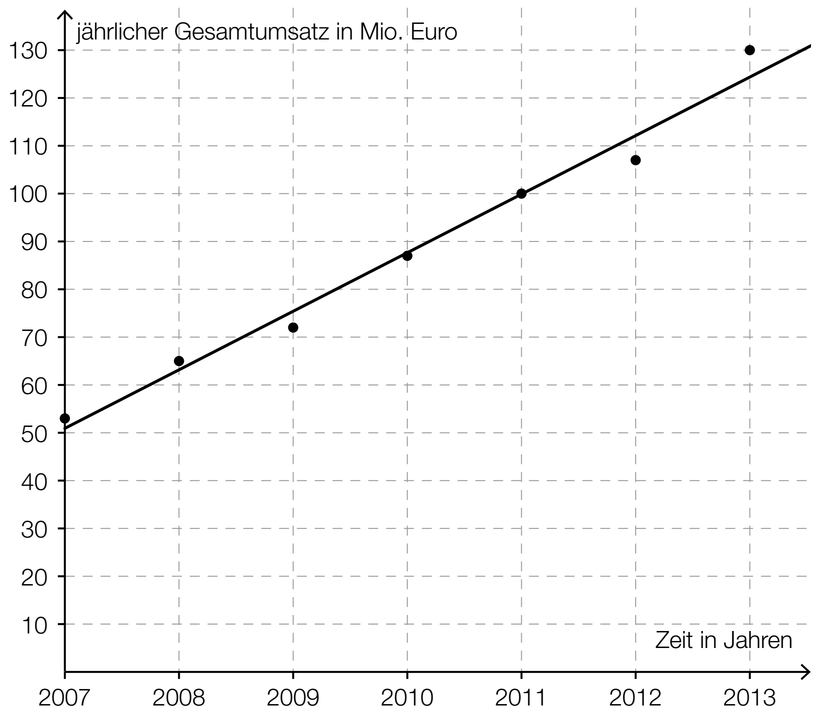
– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Umsatz an Süßwaren in Bezug auf den Gesamtumsatz im Jahr 2012 (siehe Tabelle) betrug.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 12{,}25 \cdot t + 50{,}96$ (Koeffizienten gerundet)

t … Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2007)
$f(t)$ … jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro



Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}991$

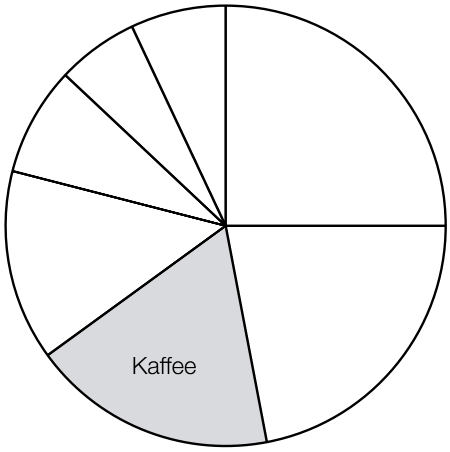
Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$f(13) = 210{,}2\ldots$

Gemäß diesem Modell wird der jährliche Gesamtumsatz im Jahr 2020 rund 210 Millionen Euro betragen.

b) Gemäß diesem Modell steigt der jährliche Gesamtumsatz pro Jahr um 13,6 Millionen Euro.

c)



$\frac{24}{107} = 0{,}2242... \approx 22{,}4\ \%$

Der Umsatz an Süßwaren betrug im Jahr 2012 rund 22,4 Prozent des Gesamtumsatzes.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × B2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Regressionsfunktion
1 × D: für die richtige Beurteilung mithilfe des Korrelationskoeffizienten
1 × B3: für die richtige Berechnung des jährlichen Gesamtumsatzes im Jahr 2020

b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Sektors, der den Umsatz an Kaffee darstellt
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lego*

Aufgabennummer: B_409		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Legosteine sind Bausteine aus Kunststoff, die von einem dänischen Unternehmen produziert werden.

a) Könnte man 40 Milliarden Legosteine gleicher Höhe aufeinanderstecken, so würde der dabei entstehende „Turm“ bis zum Mond reichen. Die Entfernung des Monds von der Erde beträgt etwa 384 400 km.

– Berechnen Sie die Höhe eines Legosteins, der dieser Überlegung zugrunde liegt, in Zentimetern.

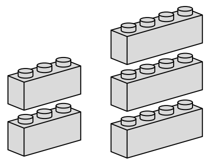
b) Am 80. Jahrestag der Gründung des Unternehmens gab es auf der Welt etwa 564,6 Milliarden Legosteine.

– Kreuzen Sie diejenige Zahl an, die nicht diesem Wert entspricht. *[1 aus 5]*

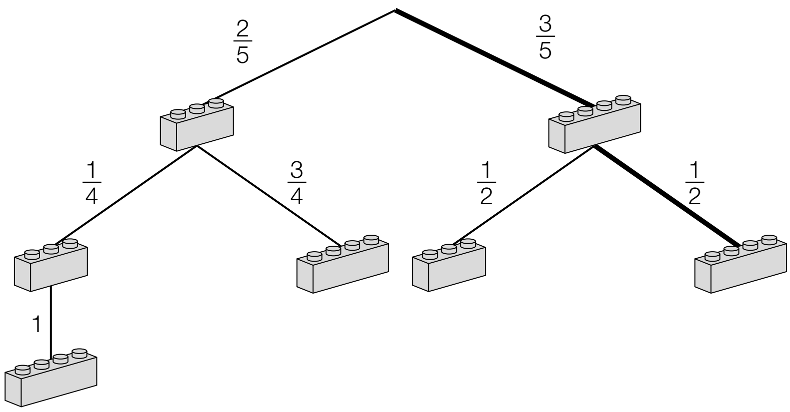
$0{,}5646 \cdot 10^{12}$	☐
$56\,460 \cdot 10^{7}$	☐
$56{,}46 \cdot 10^{10}$	☐
$564{,}6 \cdot 10^{9}$	☐
$564\,600 \cdot 10^{5}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Tobias spielt mit 5 Legosteinen: 2 Steine mit 3 Noppen in einer Reihe und 3 Steine mit 4 Noppen in einer Reihe (siehe nachstehende Abbildung).



Er zieht zufällig (also ohne die Anzahl der Noppen zu sehen oder zu ertasten) einen Legostein nach dem anderen und legt sie aneinander. Er zieht so lange, bis die entstehende Mauer mindestens 7 Noppen lang ist.
Das nachstehende Baumdiagramm zeigt seine möglichen Züge und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.



– Beschreiben Sie, welches Ereignis *E* durch den fett gezeichneten Pfad beschrieben wird.

Die Zufallsvariable *X* beschreibt die gesamte Anzahl der Noppen in der Mauer.

– Bestimmen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Baumdiagramms und tragen Sie diese in der nachstehenden Tabelle ein.

x_i	7	8	10
$P(X = x_i)$			

Die Zufallsvariable *Y* beschreibt die Anzahl der Züge, die Tobias benötigt, um eine Mauer mit mindestens 7 Noppen zu erhalten.

– Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsvariablen *Y*.

d) Legosteine unterscheiden sich in der Farbe und in der Anzahl der Noppen.
Es gelten folgende Bezeichnungen:

N … Menge aller Legosteine mit genau 6 Noppen
R … Menge aller Legosteine, die rot sind

– Beschreiben Sie die Bedeutung der Menge $N \cap R$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Beschreiben Sie die Bedeutung der Menge $R \setminus N$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{3{,}844 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 10^{10}} = 0{,}961$

Man geht bei dieser Überlegung von einer Höhe von rund 0,96 cm aus.

b)

$564\,600 \cdot 10^5$	☒

c) E ist das Ereignis, dass 2 Steine mit 4 Noppen gezogen werden.

x_i	7	8	10
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{10}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{10}$

y_i	2	3
$P(Y = y_i)$	0,9	0,1

$E(Y) = 2 \cdot 0{,}9 + 3 \cdot 0{,}1 = 2{,}1$

d) $N \cap R$ ist die Menge aller Legosteine, die rot sind und genau 6 Noppen haben.

$R \setminus N$ ist die Menge aller Legosteine, die rot sind und nicht genau 6 Noppen haben.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe der Legosteine in cm

b) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

c) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B1: für das richtige Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten
1 × A: für die richtige Modellbildung
1 × B2: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts

d) 1 × C1: für die richtige Beschreibung von $N \cap R$ im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Beschreibung von $R \setminus N$ im gegebenen Sachzusammenhang

Prismen und Linsen*

Aufgabennummer: B_411

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

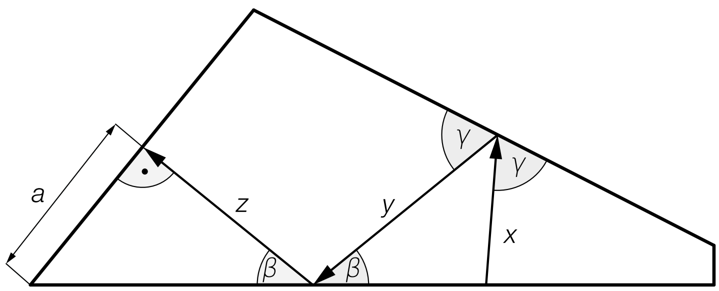
Der Verlauf eines Lichtstrahls durch ein Glasprisma wird als *Strahlengang* bezeichnet.

a) In einem Spezialglas beträgt die Lichtgeschwindigkeit 205 337 300 m/s.

In einem aus diesem Glas gefertigten Prisma beträgt die Länge des Strahlengangs 5 cm.

– Berechnen Sie, wie viele Sekunden es dauert, bis ein Lichtstrahl dieses Prisma durchquert hat.

b) Ein Strahlengang durch ein Glasprisma einer Filmkamera kann folgendermaßen dargestellt werden:



Hinweis: Die Skizze ist nicht maßstabgetreu!

$a = 0{,}50$ cm
$x = 0{,}55$ cm
$\beta = 40°$
$\gamma = 68°$

– Berechnen Sie die Länge $x + y + z$ des Strahlengangs.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Bei der Abbildung eines Gegenstands mithilfe einer Sammellinse gelten folgende Beziehungen:

$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ und $b = \frac{g \cdot f}{g - f}$

B ... Höhe des Bildes
G ... Höhe des Gegenstands
b ... Abstand des Bildes von der Linse
g ... Abstand des Gegenstands von der Linse
f ... Brennweite der Linse

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Wenn $g = 3 \cdot f$ gilt, dann ist B größer als G.	☐
Wenn $g = 3 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist B kleiner als G.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist B größer als G.	☐

d) Ein Unternehmen fertigt Linsen aus Glas für industrielle Anwendungen. Die Dicke spezieller Linsen (gemessen in der Linsenmitte) erweist sich als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ:

$\mu = 12{,}000$ mm
$\sigma = 0{,}060$ mm

– Berechnen Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem die Dicke einer zufällig ausgewählten Linse mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

Eine Linse erreicht Präzisionsqualität, wenn die Abweichung vom Erwartungswert nicht mehr als ±0,040 mm beträgt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Linse Präzisionsqualität hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

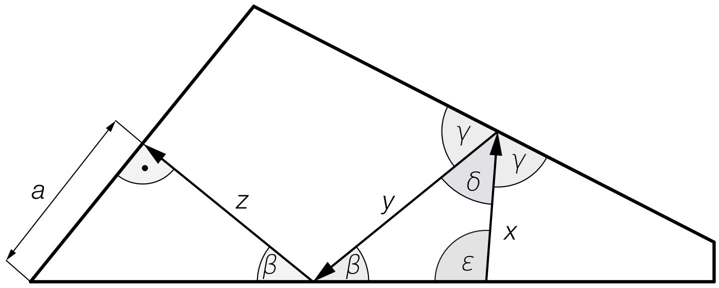
a) $\frac{0{,}05\text{ m}}{205\,337\,300\text{ m/s}} = 2{,}43... \cdot 10^{-10}\text{ s} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-10}\text{ s}$

b) $z = \frac{0{,}5}{\tan(40°)} = 0{,}595...$

$\delta = 180° - 2 \cdot \gamma = 44°$
$\varepsilon = 180° - \beta - \delta = 96°$

$y = \frac{0{,}55 \cdot \sin(96°)}{\sin(40°)} = 0{,}850...$

$x + y + z = 1{,}996...$



Die Länge des Strahlengangs beträgt rund 2,00 cm.

c)

Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☒

d) Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a < X < \mu + a) = 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad [11{,}901;\ 12{,}099]$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(11{,}960 < X < 12{,}040) = 0{,}495... \approx 50\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer in Sekunden

b) 1 × A1: für die richtige Modellierung am rechtwinkeligen Dreieck zur Berechnung von z
1 × A2: für die richtige Modellierung am schiefwinkeligen Dreieck zur Berechnung von y
1 × B: für die richtige Berechnung der Länge des Strahlengangs

c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

d) 1 × B1: für die richtige Berechnung des symmetrischen Intervalls
1 × B2: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

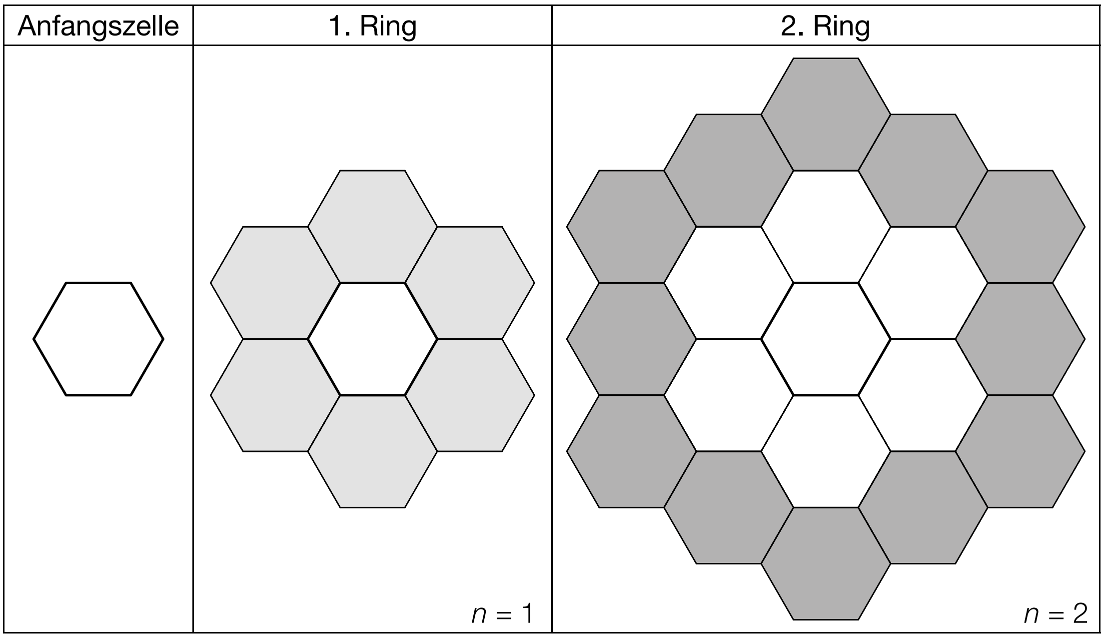
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bienenwaben*

Aufgabennummer: B_404

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bienen bauen ihre Waben, indem sie mit einer einzigen sechseckigen Zelle (Anfangszelle) starten und dann weitere sechseckige Zellen ringförmig um die erste Zelle bauen.



a) Die Anzahlen der Zellen in den jeweiligen Ringen bilden eine arithmetische Folge. Die Anfangszelle wird dabei nicht als Ring gezählt.

– Geben Sie die ersten 4 Glieder dieser arithmetischen Folge an.
– Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge auf.
– Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge auf.

b) Mit der Formel $s_n = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2$ kann man berechnen, wie viele Zellen insgesamt bis zum n-ten Ring gebildet worden sind.
Eine Wabe besteht aus insgesamt 271 Zellen.

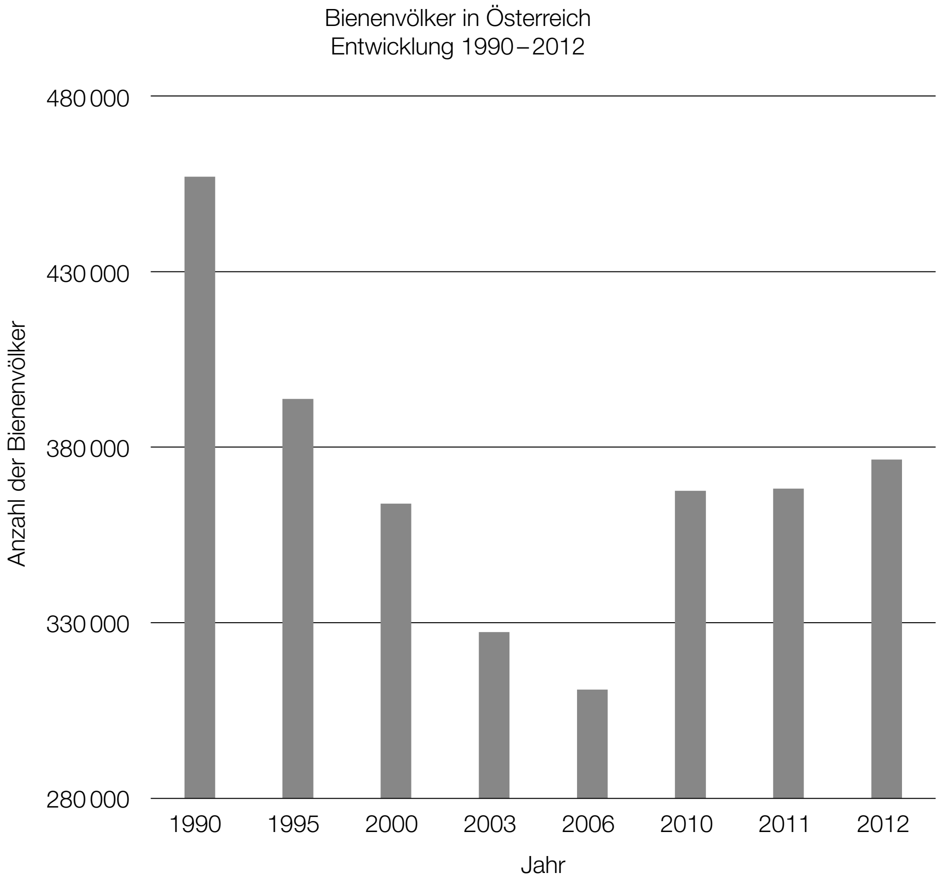
– Ermitteln Sie, aus wie vielen Ringen diese Wabe besteht.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Auf einer Fläche von 1 dm^2 befinden sich durchschnittlich 850 Zellen. Eine Zelle enthält im Mittel 0,3 Milliliter (ml) Honig mit einer Dichte von 1,4 g/ml. Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

– Berechnen Sie die Masse des Honigs, die man auf einer Fläche von 3 dm^2 erwarten kann.

d) In der nachstehenden Abbildung ist die Entwicklung der Bienenvölker in Österreich dargestellt.



Datenquelle: http://www.biene-oesterreich.at/struktur-der-bienenhaltung-in-oesterreich+2500+1135143?env=Y2Q9Mg [20.04.2016].

Ein Betrachter der vorliegenden Darstellung behauptet: „Im Jahr 2010 gab es rund 3-mal so viele Bienenvölker wie im Jahr 2006. Das erkenne ich daran, dass die Säule für das Jahr 2010 rund 3-mal so hoch ist wie jene für das Jahr 2006."

– Erklären Sie, warum diese Argumentation falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Glieder der Folge: $a_1 = 6$, $a_2 = 12$, $a_3 = 18$, $a_4 = 24$

rekursives Bildungsgesetz:
$a_1 = 6$
$a_{n+1} = a_n + 6$

explizites Bildungsgesetz:
$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 6$

oder:

$a_n = 6 \cdot n$

b) $271 = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2$
Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 9$

Diese Wabe besteht aus 9 Ringen.

c) Honigvolumen auf einer Fläche von 3 dm² in ml: $850 \cdot 0{,}3 \cdot 3 = 765$
$765 \text{ ml} \cdot 1{,}4 \text{ g/ml} = 1\,071 \text{ g}$

Auf einer Fläche von 3 dm² sind 1 071 g Honig zu erwarten.

d) Die Argumentation ist falsch, weil der abgebildete Wertebereich nicht bei 0, sondern bei 280 000 „beginnt".

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Angeben der ersten 4 Glieder der Folge
1 × A2: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes
1 × A3: für das richtige Aufstellen des expliziten Bildungsgesetzes

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Anzahl der Ringe

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Masse in Gramm

d) 1 × D: für die richtige Erklärung

Silvesterlauf*

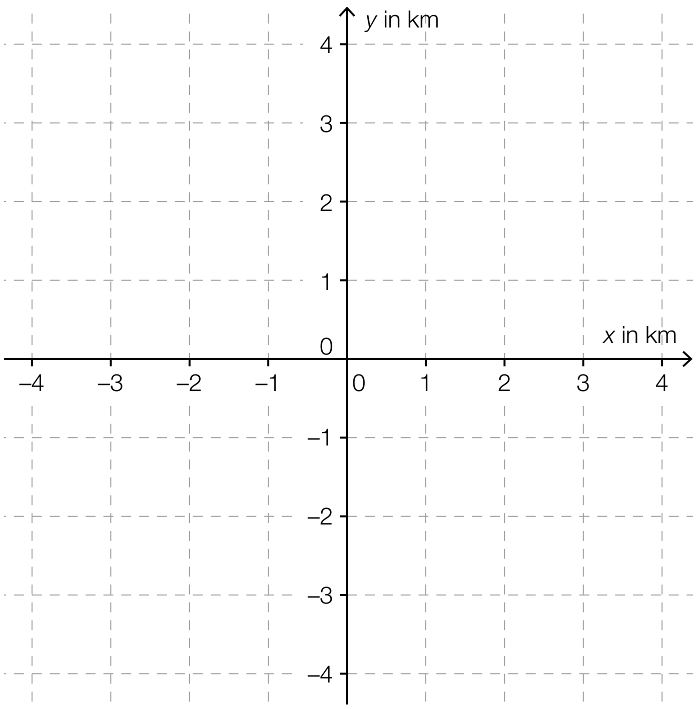
Aufgabennummer: B_403

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die ebene Laufstrecke eines Silvesterlaufs startet bei A und führt in geradlinigen Streckenabschnitten über die Kontrollpunkte B, C und D zum Ziel E.
Die Koordinaten dieser Punkte (in km) in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem sind angegeben:

Ausgangspunkt $A = (-1|1)$
1. Kontrollpunkt $B = (1|3)$
2. Kontrollpunkt $C = (2|-2)$
3. Kontrollpunkt $D = (1|-2)$
Zielpunkt $E = (1|1)$

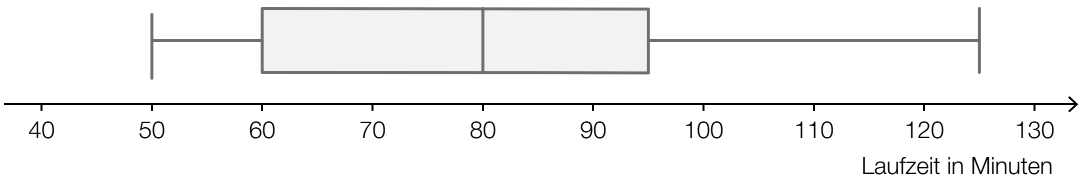
– Veranschaulichen Sie diese Laufstrecke im nachstehenden Koordinatensystem.



– Erklären Sie, warum für das folgende Skalarprodukt gilt: $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$
– Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{BC}$.
– Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{BC}$.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für die Gesamtwertung wurden die Zeiten aller 130 Läufer/innen dokumentiert und im nachstehenden Boxplot zusammengefasst.



– Lesen Sie den Median der Laufzeiten ab.

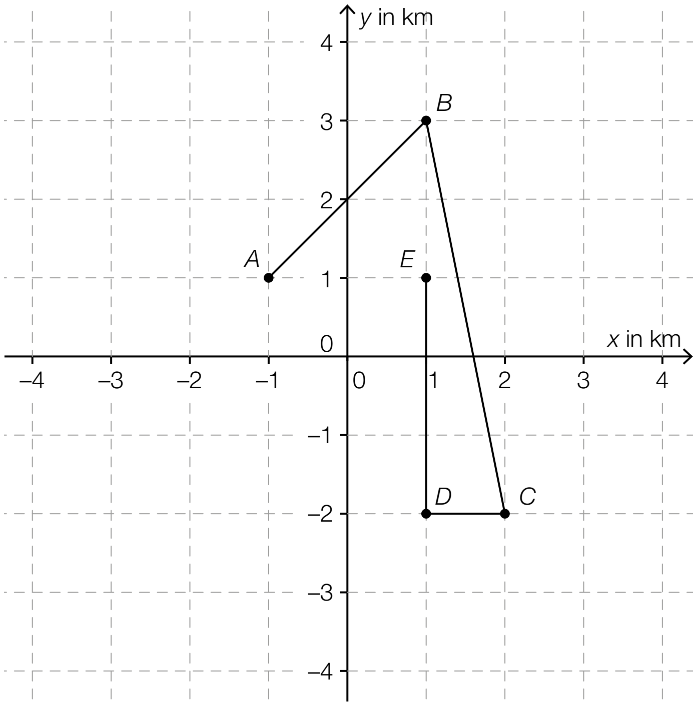
Elisabeth erreichte bei diesem Silvesterlauf in der Gesamtwertung den 20. Platz.

– Lesen Sie aus dem obigen Boxplot das kleinste Intervall ab, in dem Elisabeths Laufzeit mit Sicherheit liegen muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Das Skalarprodukt $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$, weil die beiden Vektoren normal aufeinander stehen.

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} = 5{,}09...$

Die Streckenlänge $\overline{BC}$ beträgt rund 5,1 km.

b) Median der Laufzeiten: 80 min

Elisabeth gehört zum Viertel der schnellsten Läufer/innen, ihre Laufzeit liegt also im Intervall von 50 min bis 60 min.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Laufstrecke im gegebenen Koordinatensystem
   1 × D: für die richtige Erklärung
   1 × B1: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{BC}$
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{BC}$

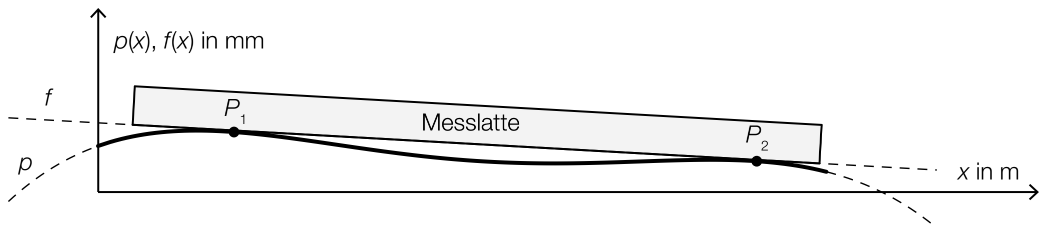
b) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Medians der Laufzeiten
   1 × C2: für das richtige Ablesen des kleinsten Intervalls, in dem Elisabeths Laufzeit mit Sicherheit liegen muss

Bodenunebenheiten*

Aufgabennummer: B_405

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um Unebenheiten eines Bodens festzustellen, wird eine Messlatte verwendet.



Das Profil des Bodens kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion p beschrieben werden, die Unterkante der Messlatte kann durch den Graphen einer linearen Funktion f beschrieben werden.

a) Die Messlatte berührt den Boden in den Punkten $P_1 = (x_1|p(x_1))$ und $P_2 = (x_2|p(x_2))$. Die Steigung der linearen Funktion f ist k.

Eine der folgenden Aussagen stimmt nicht mit der obigen Abbildung überein.

– Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$k = \frac{p(x_2) - p(x_1)}{x_2 - x_1}$	☐
$p'(x_1) = 0$	☐
$p'(x_2) = k$	☐
$p'(x_1) = p'(x_2)$	☐
$f(x_1) = p(x_1)$	☐

b) – Begründen Sie, warum der Grad der in der obigen Abbildung dargestellten Polynomfunktion p größer oder gleich 4 sein muss.

* ehemalige Klausuraufgabe

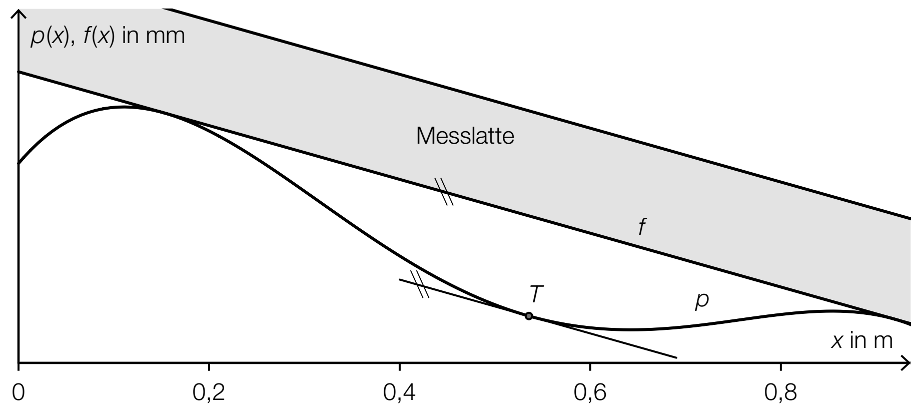
c) Der Graph der Polynomfunktion p mit $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ verläuft durch die folgenden 5 Punkte:

$A = (0|1{,}8)$, $B = (0{,}25|2{,}1)$, $C = (0{,}5|0{,}4)$, $D = (0{,}75|0{,}7)$, $E = (1|0{,}5)$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$ ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion p auf.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion p.

d) Um die Unebenheit eines anderen Bodens zu ermitteln, soll der Punkt T bestimmt werden. Im Punkt T ist die Tangente an den Graphen von p parallel zur Geraden f (siehe nachstehende Skizze).



Es gilt:

$p(x) = -70{,}000 \cdot x^4 + 150{,}000 \cdot x^3 - 100{,}000 \cdot x^2 + 17{,}000 \cdot x + 3{,}000$
$f(x) = -4{,}046 \cdot x + 4{,}378$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$, $f(x)$ ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

– Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die x-Koordinate des Punktes T berechnet werden kann.
– Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes T.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

$p'(x_1) = 0$	☒

b) Der Graph der Funktion hat mindestens 2 Wendepunkte.

oder:

Die Funktion hat mindestens 3 lokale Extrema.

oder:

Es gibt mindestens 4 Schnittpunkte mit einer geeigneten Geraden.

c) $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

I: $p(0) = 1{,}8$
II: $p(0{,}25) = 2{,}1$
III: $p(0{,}5) = 0{,}4$
IV: $p(0{,}75) = 0{,}7$
V: $p(1) = 0{,}5$

oder:

I: $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 1{,}8$
II: $a \cdot 0{,}25^4 + b \cdot 0{,}25^3 + c \cdot 0{,}25^2 + d \cdot 0{,}25 + e = 2{,}1$
III: $a \cdot 0{,}5^4 + b \cdot 0{,}5^3 + c \cdot 0{,}5^2 + d \cdot 0{,}5 + e = 0{,}4$
IV: $a \cdot 0{,}75^4 + b \cdot 0{,}75^3 + c \cdot 0{,}75^2 + d \cdot 0{,}75 + e = 0{,}7$
V: $a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + e = 0{,}5$

Berechnung der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:

$a = -69{,}333...$
$b = 146{,}666...$
$c = -95{,}666...$
$d = 17{,}033...$
$e = 1{,}8$

d) $p'(x) = f'(x)$
$p'(x) = -4{,}046$

$-280 \cdot x^3 + 450 \cdot x^2 - 200 \cdot x + 17 = -4{,}046$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = 0{,}1527...)$
$x_2 = 0{,}5357...$
$(x_3 = 0{,}9187...)$

Die x-Koordinate des Punktes T ist 0,5357...

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × D: für die richtige Begründung

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung zur Berechnung der x-Koordinate des Punktes T
1 × B: für die richtige Berechnung der x-Koordinate des Punktes T

Sport und Gesundheit*

Aufgabennummer: B_254

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Höhe eines Golfballs über dem horizontalen Boden in Abhängigkeit von der Zeit seit dem Abschlag kann näherungsweise durch eine Funktion h beschrieben werden:

$$h(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

t ... Zeit seit dem Abschlag in s
$h(t)$ ... Höhe des Golfballs über dem Boden zur Zeit t in m
v_0 ... Abschlaggeschwindigkeit in m/s
α ... Abschlagwinkel
g ... Erdbeschleunigung in m/s² (konstant)

– Zeigen Sie, dass der Golfball zur Zeit $t = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$ die maximale Höhe über dem Boden erreicht.
– Berechnen Sie für $v_0 = 60$ m/s, $\alpha = 30°$ und $g = 9{,}81$ m/s² denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Golfball wieder auf dem Boden aufkommt.

Die Schlagweite w (in m) kann mithilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$w = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

– Argumentieren Sie ausgehend von dieser Formel, dass bei konstanter Abschlaggeschwindigkeit v_0 die Schlagweite maximal ist, wenn $\alpha = 45°$ beträgt.
– Geben Sie an, wie sich die Schlagweite bei konstantem Abschlagwinkel α verändert, wenn man die Abschlaggeschwindigkeit v_0 verdreifacht.

b) Die *Vitalkapazität* ist eine Kenngröße für die Funktion der Lunge.

Ein sportmedizinisches Institut berechnet den Sollwert der Vitalkapazität eines erwachsenen Mannes mithilfe folgender Formel:

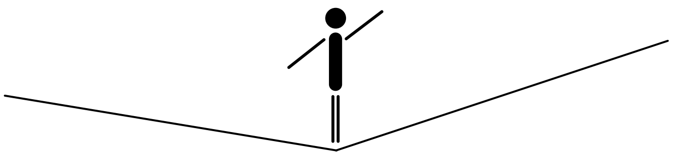
$$V_m = (27{,}63 - 0{,}112 \cdot x) \cdot y$$

V_m ... Sollwert der Vitalkapazität in cm³
x ... Alter in Jahren
y ... Körpergröße in cm

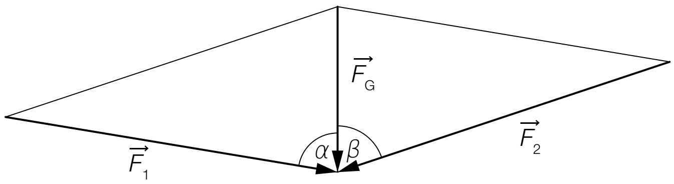
– Ermitteln Sie, um wie viel Liter der Sollwert der Vitalkapazität eines 180 cm großen erwachsenen Mannes in einem Zeitraum von 10 Jahren sinkt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) *Slacklinen* ist eine Trendsportart, bei der man auf einem gespannten Gurtband, der sogenannten *Slackline*, balanciert.
Eine Slackline wird über einen See gespannt. Ein sportlicher Badegast versucht, über die Slackline den See zu queren, ohne dabei ins Wasser zu fallen.



Das zugehörige Kräfteparallelogramm ist nachfolgend dargestellt:



$\vec{F}_G$ ... Gewichtskraft der Person auf dem Seil
$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ... Seilkräfte

Im Folgenden wird für Kräfte die Schreibweise $|\vec{F}| = F$ verwendet.

– Berechnen Sie F_2 für $F_G = 588{,}6$ Newton, $\alpha = 82°$ und $\beta = 75°$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $h'(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t$

$h'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$

(Da es sich beim Graphen der Funktion h *um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, muss der Nachweis, dass es sich dabei um eine Maximumstelle handelt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, nicht erbracht werden.)*

$0 = 60 \cdot \sin(30°) \cdot t - \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$(t_1 = 0)$, $t_2 = 6{,}11...$

Der Golfball kommt nach etwa 6,1 s wieder auf dem Boden auf.

Die Wurfweite ist umso größer, je größer $\sin(2 \cdot \alpha)$ ist; der maximale Wert dieses Ausdrucks ist 1:

$\sin(2 \cdot \alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°$

Die Schlagweite ist bei dreifacher Abschlaggeschwindigkeit 9-mal so groß.

b) Der Sollwert der Vitalkapazität sinkt um $0{,}112 \cdot 10 \cdot 180\ \text{cm}^3 = 0{,}2016$ L.

c) $F_2 = \frac{588{,}6 \cdot \sin(82°)}{\sin(23°)} = 1\,491{,}7...$

$F_2 \approx 1\,492$ N

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für den richtigen Nachweis zur maximalen Höhe
1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts
1 × D2: für die richtige Argumentation
1 × C: für die richtige Beschreibung

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln desjenigen Wertes, um den der Sollwert der Vitalkapazität sinkt
1 × A: für das richtige Übertragen des Ergebnisses in die Einheit Liter

c) 1 × B: für die richtige Berechnung von F_2

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Wohnungen (1)*

Aufgabennummer: B_423

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder erstellt Statistiken zu den Trends auf dem Immobilienmarkt. Es werden die ortsüblichen Kaufpreise und Mieten erhoben. Die Höhe der Kaufpreise bzw. der Mieten hängt in der Regel stark von der Größe, der Ausstattung und der Lage der Wohnungen ab.

a) Für eine österreichische Landeshauptstadt hat der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder die Mietpreise in Euro pro m² für Wohnungen bis zu 60 m² mit gutem Wohnwert erhoben:

Ende des Jahres ...	Mietpreis in Euro pro m²
2003	8,10
2004	7,90
2005	8,20
2006	8,50
2007	8,80
2008	9,30
2009	9,60
2010	9,70
2011	10,30
2012	10,80

Der Mietpreis in Euro pro m² soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe von linearer Regression eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 2003.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den Mietpreis pro m² für das Ende des Jahres 2018.

Ein anderes Modell verwendet zur Beschreibung der Mietpreisentwicklung die Funktion B.

$B(t) = 7{,}77 \cdot 1{,}035^t$

t ... Zeit in Jahren ab Ende des Jahres 2003
$B(t)$ ... Mietpreis zur Zeit t in Euro pro m²

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2001 lebten im Bundesland Tirol in 303 632 Wohnungen 661 026 Personen. Die nachstehende Tabelle gibt die Anzahl dieser Wohnungen aufgelistet nach dem Merkmal „Anzahl der Wohnräume“ an.

Anzahl der Wohnräume	Anzahl der Wohnungen
1	19 372
2	28 973
3	61 002
4	80 331
5	56 878
6	57 076
Summe	303 632

– Beschreiben Sie in Worten, was durch folgende Ausdrücke im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:

(1) $\frac{661\,026}{303\,632} \approx 2{,}18$

(2) $\frac{1 \cdot 19\,372 + 2 \cdot 28\,973 + 3 \cdot 61\,002 + 4 \cdot 80\,331 + 5 \cdot 56\,878 + 6 \cdot 57\,076}{303\,632} \approx 3{,}98$

c) Der durchschnittliche Preis für Eigentumswohnungen mit gutem Wohnwert wurde in einer Landeshauptstadt jeweils am Ende des Jahres erhoben.

Die nachstehende Tabelle gibt die prozentuelle Steigerung des Preises pro m^2 am Ende des Jahres gegenüber dem Preis pro m^2 am Ende des jeweiligen Vorjahres für die Jahre 2009 bis 2013 an.

Ende des Jahres ...	Preissteigerung gegenüber dem Preis pro m^2 am Ende des jeweiligen Vorjahres
2009	5,5 %
2010	1,2 %
2011	7,1 %
2012	6,7 %
2013	5,4 %

Am Ende des Jahres 2013 kostete eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert durchschnittlich € 3.362 pro m^2.

– Berechnen Sie den durchschnittlichen Preis pro m^2 für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert am Ende des Jahres 2010.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Lösung mittels Technologieeinsatz:
$M(t) = 0{,}32 \cdot t + 7{,}69$ (Koeffizienten gerundet)

Die Mietpreise pro m² sind im angegebenen Zeitraum um durchschnittlich rund € 0,32 pro Jahr angestiegen.

$M(15) = 12{,}454... \approx 12{,}45$
Gemäß diesem Modell beträgt der Mietpreis pro m² am Ende des Jahres 2018 rund € 12,45.

Der Änderungsfaktor 1,035 gibt an, dass die Mietpreise pro m² jährlich um 3,5 % steigen.

b) Der Ausdruck (1) gibt die durchschnittliche Anzahl der Personen pro Wohnung (rund 2,18) an.
Der Ausdruck (2) gibt die durchschnittliche Anzahl der Wohnräume pro Wohnung (rund 3,98) an.

c) $\frac{3362}{1{,}054 \cdot 1{,}067 \cdot 1{,}071} = 2791{,}2... \approx 2791$
Der durchschnittliche Preis pro m² für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert lag am Ende des Jahres 2010 bei rund € 2.791.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln einer Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C1: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Ende des Jahres 2018
1 × C2: für die richtige Interpretation des Werts 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (1) im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (2) im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Preises pro m² am Ende des Jahres 2010

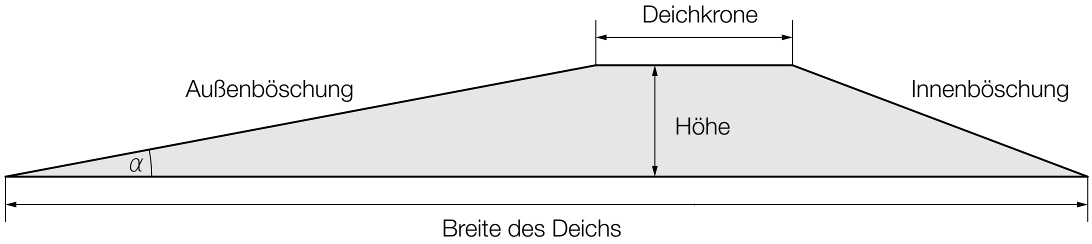
Deiche an der Nordseeküste*

Aufgabennummer: B_425

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um das Land vor Sturmfluten zu schützen, baut man Schutzwälle, sogenannte Deiche.

a) Auf einer Informationstafel ist ein Deichquerschnitt skizziert (nicht maßstabgetreu). Der Deich hat eine Höhe von 6 m, die Deichkrone ist 5 m breit. Der Inhalt seiner Querschnittsfläche beträgt 192 m².



– Berechnen Sie die Breite dieses Deichs.

Die Außenböschung ist 36,5 m lang.

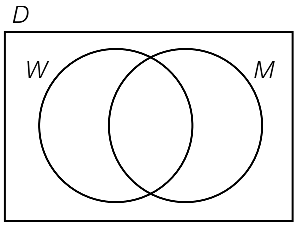
– Bestimmen Sie den Neigungswinkel α der Außenböschung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In einer Region werden die Deiche in Deichabschnitte unterteilt.

22 Deichabschnitte werden von Schafen beweidet, aber nicht gemäht.
60 Deichabschnitte werden gemäht, aber nicht von Schafen beweidet.
27 Deichabschnitte werden sowohl von Schafen beweidet als auch gemäht.
19 Deichabschnitte werden gar nicht gepflegt.

D … Menge aller Deichabschnitte
W … Menge der Deichabschnitte, die von Schafen beweidet werden
M … Menge der Deichabschnitte, die gemäht werden



– Kennzeichnen Sie $W \cap M$ im obigen Mengendiagramm.
– Beschreiben Sie die Bedeutung von $W \cap M$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Geben Sie die Menge derjenigen Deichabschnitte, die gar nicht gepflegt werden, in Mengensymbolik an.
– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Deichabschnitte gar nicht gepflegt werden.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = \frac{(c + d) \cdot h}{2}$

A ... Inhalt der Querschnittsfläche
c ... Breite der Deichkrone
d ... Breite des Deichs
h ... Höhe

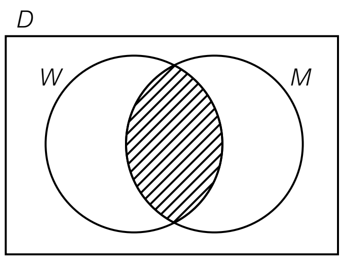
$d = \frac{2 \cdot A}{h} - c = \frac{2 \cdot 192}{6} - 5 = 59$

Der Deich ist 59 m breit.

$\sin(\alpha) = \frac{6}{36,5} \Rightarrow \alpha = 9,461...°$

Der Winkel α beträgt rund 9,46°.

b)



Das sind die Deichabschnitte, die sowohl von Schafen beweidet als auch gemäht werden.

$D \setminus (W \cup M)$

$19 + 22 + 27 + 60 = 128$

$\frac{19}{128} = 0,148... \approx 15~\%$

Rund 15 % der Deichabschnitte werden gar nicht gepflegt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung der Deichbreite
   1 × B1: für die richtige Berechnung der Deichbreite
   1 × B2: für das richtige Bestimmen des Neigungswinkels der Außenböschung

b) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen der Schnittmenge
   1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
   1 × A: für die richtige Angabe in Mengensymbolik
   1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

Ausbreitung von Licht*

Aufgabennummer: B_428

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Bei einem physikalischen Experiment wird Licht durch einen Spalt geschickt und dabei abgelenkt.
Man interessiert sich für Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$ und $\sin(\alpha) = \frac{(n + 0{,}5) \cdot \lambda}{d}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

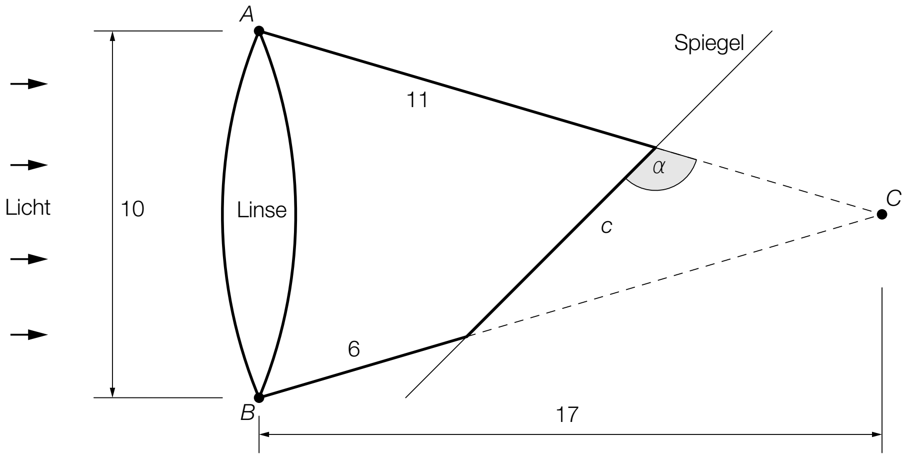
λ ... Wellenlänge des Lichts in m ($\lambda > 0$)
d ... Spaltbreite in m ($d > 0$)

– Geben Sie an, welche Beziehung zwischen d und λ erfüllt sein muss, damit diese Gleichung für $n = 0$ eine Lösung für α hat.

Bei einem bestimmten Experiment gilt: $d = 0{,}01$ mm
$\lambda = 632$ nm

– Ermitteln Sie diejenigen natürlichen Zahlen n, für die diese Gleichung eine Lösung für α hat.

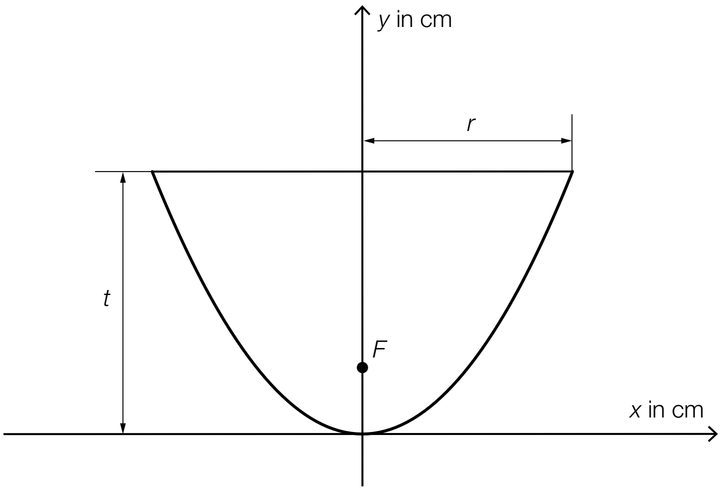
b) Bei einem Experiment wird das von einer Sammellinse gebündelte Licht auf einen schräg gestellten Spiegel gerichtet (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze, alle Abmessungen in cm). Es gilt: $\overline{AC} = \overline{BC}$.



– Berechnen Sie die Länge c.
– Berechnen Sie den stumpfen Winkel α.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Viele Scheinwerfer haben die Form eines Rotationsparaboloids, das durch Rotation einer Parabel mit der Gleichung $y = a \cdot x^2$ um die y-Achse entsteht. Dabei befindet sich die Lampe des Scheinwerfers im Brennpunkt $F = \left(0 \middle| \frac{1}{4 \cdot a}\right)$ (siehe nachstehende Abbildung).



– Berechnen Sie die Koordinaten des Brennpunkts F für $r = 12$ cm und $t = 15$ cm.

Jemand behauptet: „Verdoppelt man bei gleichbleibender Tiefe t eines Rotationsparaboloids den Radius r, so vervierfacht sich dadurch die y-Koordinate des Brennpunkts."

– Überprüfen Sie diese Behauptung nachweislich auf ihre Richtigkeit.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Nenner muss größer gleich dem Zähler sein, also: $0{,}5 \cdot \lambda \leq d$.

$$\frac{(n + 0{,}5) \cdot 632 \cdot 10^{-9}}{0{,}01 \cdot 10^{-3}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad n \leq 15{,}3\ldots$$

Daher gibt es für $n = 0, 1, 2, \ldots, 15$ jeweils eine Lösung für α.

b) Berechnung der Schenkel des gleichschenkeligen Dreiecks und des Winkels zwischen den Schenkeln: $s = \sqrt{17^2 + 5^2} = 17{,}72\ldots$

$\gamma = 2 \cdot \arctan\left(\frac{5}{17}\right) = 32{,}77\ldots°$

Mit dem Cosinussatz ergibt sich die Länge c:

$\sqrt{(s - 11)^2 + (s - 6)^2 - 2 \cdot (s - 11) \cdot (s - 6) \cdot \cos(\gamma)} = 7{,}07\ldots$

$c \approx 7{,}1$ cm

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{s - 6}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1 \approx 63{,}7\ldots°),\ \alpha_2 = 116{,}2\ldots°$$

c) Da P ein Punkt der Parabel ist, gilt: $15 = 144 \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{15}{144}$.

Die Koordinaten des Brennpunkts lauten somit:

$$F = \left(0 \middle| \frac{1}{4 \cdot \frac{15}{144}}\right) = (0|2{,}4)$$

Ist $R = (r|t)$ ein Punkt der Parabel, dann muss $t = a \cdot r^2$, also $a = \frac{t}{r^2}$ sein.

Die y-Koordinate von F lautet: $y_F = \frac{r^2}{4 \cdot t}$.

Eine Verdoppelung des Radius bewirkt somit eine Vervierfachung der y-Koordinate.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Angeben der Beziehung zwischen d und λ
1 × A: für das richtige Ermitteln der entsprechenden Werte von n

b) 1 × A: für die richtige Modellbildung (z. B. mithilfe eines gleichschenkeligen Dreiecks und eines allgemeinen Dreiecks)
1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge c
1 × B2: für die richtige Berechnung des Winkels α

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der y-Koordinate des Brennpunkts
1 × D: für die richtige Überprüfung

Fundamentale Wechselwirkungen*

Aufgabennummer: B_429		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

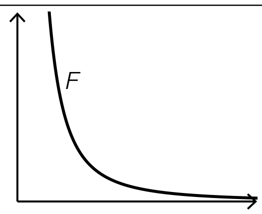
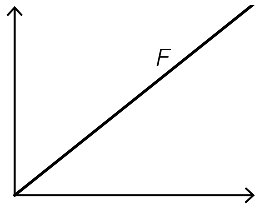
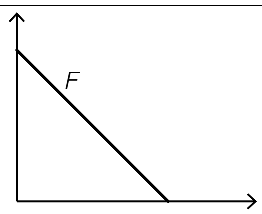
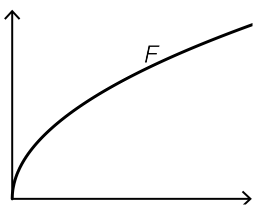
a) Mithilfe des Gravitationsgesetzes kann man den Betrag F der Gravitationskraft zwischen 2 Körpern berechnen:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F ... Betrag der Gravitationskraft
m_1 ... Masse des 1. Körpers
m_2 ... Masse des 2. Körpers
G ... Gravitationskonstante ($G > 0$)
r ... Abstand der beiden Körper

– Ordnen Sie den beiden Abhängigkeiten jeweils die zutreffende Grafik aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Betrag F der Gravitationskraft abhängig vom Abstand r (m_1 und m_2 konstant)	
Betrag F der Gravitationskraft abhängig von der Masse m_1 (m_2 und r konstant)	

A	
B	
C	
D	

* ehemalige Klausuraufgabe

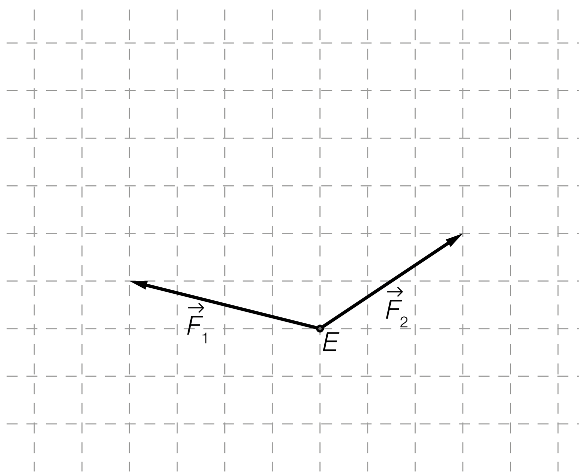
b) Die „elektromagnetische Wechselwirkung“ ist 10000-Milliarden-mal so groß wie die „schwache Wechselwirkung“.

– Ergänzen Sie in der nachstehenden Tabelle die fehlende Hochzahl für die „schwache Wechselwirkung“.

Wechselwirkung	Stärke
elektromagnetische Wechselwirkung	1
schwache Wechselwirkung	$10^{\boxed{}}$
Gravitation	10^{-39}

– Ermitteln Sie, um welchen Faktor die „schwache Wechselwirkung“ stärker als die Gravitation ist.

c) In der nachstehenden Grafik sind 2 Kräfte, die auf ein Teilchen im Punkt E wirken, dargestellt.



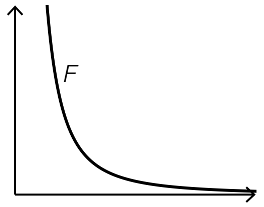
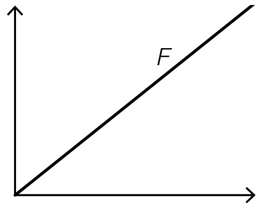
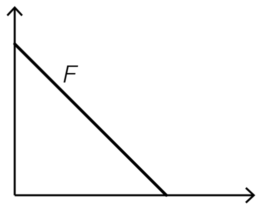
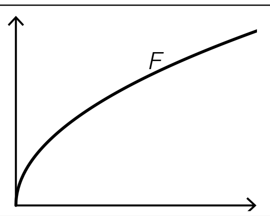
– Zeichnen Sie die Gesamtkraft, die sich aus der Summe der beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ ergibt, ausgehend vom Punkt E in der obigen Grafik ein.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

Betrag F der Gravitationskraft abhängig vom Abstand r (m_1 und m_2 konstant)	A
Betrag F der Gravitationskraft abhängig von der Masse m_1 (m_2 und r konstant)	B

A	
B	
C	
D	

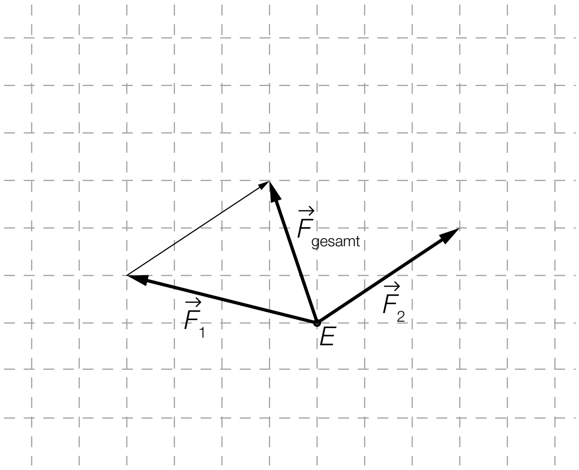
b)

Wechselwirkung	Stärke
elektromagnetische Wechselwirkung	1
schwache Wechselwirkung	10^{-13}
Gravitation	10^{-39}

$$\frac{10^{-13}}{10^{-39}} = 10^{26}$$

Die „schwache Wechselwirkung" ist um den Faktor 10^{26} stärker als die Gravitation.

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Zuordnung

b) 1 × A: für das richtige Ergänzen der fehlenden Hochzahl
1 × B: für das richtige Ermitteln des Faktors

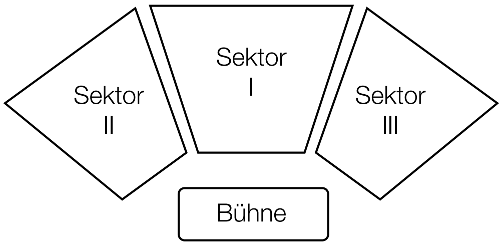
c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der Gesamtkraft

Sitzreihen*

Aufgabennummer: B_436

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Schule plant eine Theateraufführung im Turnsaal. Der Schulwart hat die Idee, die Zuschauerstühle wie folgt um die Bühne aufzubauen (siehe nachstehende Abbildung).



a) Im Sektor I stehen in der ersten Sitzreihe 8 Stühle. In jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 3.

– Begründen Sie mathematisch, warum die Anzahlen der Stühle in den jeweiligen Sitzreihen eine arithmetische Folge a_n bilden.
– Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für a_n auf.

b) Im Sektor II stehen in der ersten Sitzreihe 5 Stühle, in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 1.

– Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz auf, mit dem man die Anzahl der Stühle in der n-ten Sitzreihe berechnen kann.

Die Gesamtanzahl der Stühle in den ersten n Sitzreihen des Sektors II ist $\frac{(9 + n) \cdot n}{2}$.

– Berechnen Sie, aus wie vielen Sitzreihen der Sektor II besteht, wenn 126 Stühle für diesen Sektor verwendet werden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für den Sektor III ist eine Sitzordnung vorgesehen, bei der die Anzahl der Stühle in der n-ten Sitzreihe durch folgendes explizites Bildungsgesetz beschrieben wird:

$a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahlen 5 und 4 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie, wie viele Stühle in der 7. Sitzreihe stehen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Differenz der Anzahlen der Stühle zweier aufeinanderfolgender Sitzreihen ist konstant.

$a_1 = 8$ und $a_{n+1} = a_n + 3$

b) $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 1$
$a_n = 4 + n$

$126 = \frac{(9 + n) \cdot n}{2}$
$n^2 + 9 \cdot n - 252 = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n_1 = 12$ (und $n_2 = -21$)

Der Sektor II besteht aus 12 Sitzreihen.

c) 5 … Anzahl der Stühle in der ersten Sitzreihe
4 … in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 4

$a_7 = 5 + (7 - 1) \cdot 4 = 29$

Es stehen 29 Stühle in der 7. Sitzreihe.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige mathematische Begründung
1 × A: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen des expliziten Bildungsgesetzes
1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Sitzreihen in Sektor II

c) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Stühle in der 7. Sitzreihe

Höhe der Wolkenuntergrenze*

Aufgabennummer: B_110

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Höhe der Wolkenuntergrenze kann auf verschiedene Arten näherungsweise bestimmt werden.

a) Die Höhe der Wolkenuntergrenze wurde früher mithilfe eines Nachtwolkenscheinwerfers bestimmt. Folgende Anweisung musste man dabei befolgen:

„Platzieren Sie auf einer horizontalen Ebene den Scheinwerfer in einem Punkt P so, dass sein Lichtstrahl senkrecht nach oben gerichtet ist.
Dort erzeugt er auf der Wolkenuntergrenze in der Höhe h einen punktförmigen Lichtfleck L.
Begeben Sie sich in einen anderen Punkt Q dieser Ebene und messen Sie die Streckenlänge $\overline{PQ}$.
Messen Sie den Höhenwinkel α, unter dem der Lichtfleck L nun von Punkt Q aus gesehen wird."

– Veranschaulichen Sie den beschriebenen Sachverhalt mithilfe einer Skizze. Beschriften Sie P, Q, L, h und α in dieser Skizze.
– Erstellen Sie eine Formel, mit deren Hilfe man die Höhe der Wolkenuntergrenze h mit den gemessenen Größen bestimmen kann.

h = ____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein *Ceilometer* ist ein Messgerät, mit dem man aufgrund einer Lichtlaufzeitmessung die Höhe der Wolkenuntergrenze bestimmen kann. Dabei gilt:

$h = \frac{c \cdot t}{2}$

h … Höhe der Wolkenuntergrenze in m
t … Lichtlaufzeit in s
$c \approx 300\,000\,000$ m/s ... Lichtgeschwindigkeit

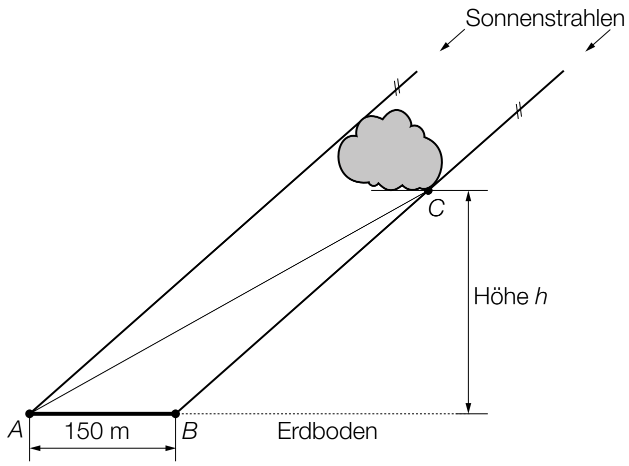
Das Gerät misst eine Lichtlaufzeit von 10 μs.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die Höhe der Wolkenuntergrenze h in Metern korrekt ermittelt wird. *[1 aus 5]*

$\frac{300 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{2}$	☐
$\frac{300 \cdot 10^{6} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{5}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{8} \cdot 10 \cdot 10^{9}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{-5}}{2}$	☐

c) Eine Wolke wirft einen 150 m langen Schatten auf den Erdboden. Von A aus sieht man die Wolke unter dem Sehwinkel $\alpha = 4°$. Der Einfallswinkel der parallelen Sonnenstrahlen gegenüber der Horizontalen beträgt $\beta = 30°$.

Die folgende Abbildung stellt diese Situation vereinfacht und nicht maßstabgetreu dar:

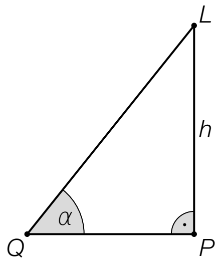


– Tragen Sie die gegebenen Winkel α und β in die obige Abbildung ein.
– Berechnen Sie die Entfernung $\overline{BC}$.
– Berechnen Sie die Höhe h.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

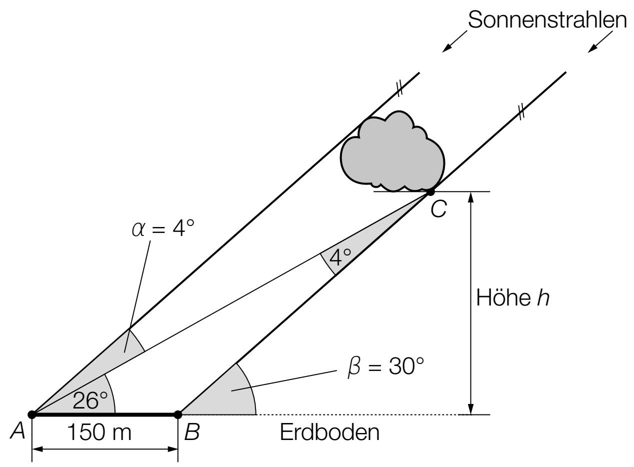


$h = \overline{PQ} \cdot \tan(\alpha)$

b)

$\frac{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5}}{2}$	☒

c)



$$\frac{\overline{BC}}{\sin(26°)} = \frac{150}{\sin(4°)}$$

$$\overline{BC} = \frac{150}{\sin(4°)} \cdot \sin(26°) = 942{,}6...$$

Die Entfernung $\overline{BC}$ beträgt rund 943 m.

$$\sin(\beta) = \frac{h}{\overline{BC}}$$

$$h = \overline{BC} \cdot \sin(\beta) = 471{,}3...$$

Die Höhe h beträgt rund 471 m.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen in der Skizze
1 × A2: für das richtige Erstellen der Formel

b) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

c) 1 × C: für das richtige Eintragen der beiden gegebenen Winkel
1 × B1: für die richtige Berechnung der Entfernung $\overline{BC}$
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe h

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Würfel (2)*

Aufgabennummer: B_115

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das im Folgenden beschriebene Spiel wird mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.

Es werden 2 Spielwürfel gleichzeitig geworfen und es wird deren Augensumme bestimmt. Nun sollen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

– Tragen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in die nachstehende Tabelle ein.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit											

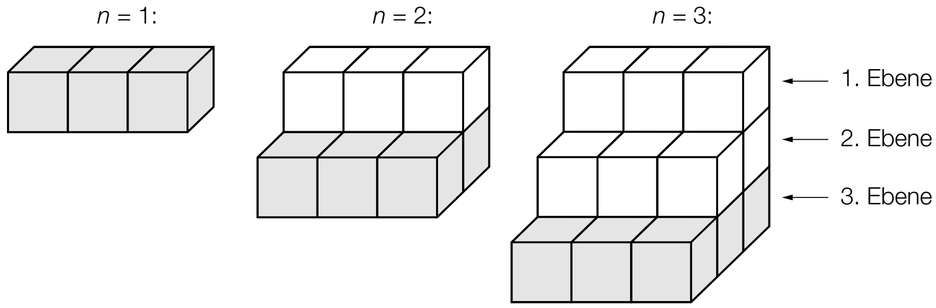
Es wird Ihnen nun folgendes Spiel vorgeschlagen:

Sie gewinnen, wenn die Augensumme 5, 6, 7 oder 8 beträgt.
oder
Sie gewinnen mit allen übrigen Augensummen.

– Ermitteln Sie, welche der beiden Möglichkeiten die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Mit Würfeln wird eine Treppe gebaut:



Das obige Bauschema soll auf diese Art fortgesetzt werden.

– Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz, mit dem man die Anzahl der Würfel in der n-ten Ebene berechnen kann.
– Bestimmen Sie, wie viele Würfel in der 7. Ebene liegen.

Die Anzahl s_n der Würfel, die für eine solche Treppe aus n Ebenen insgesamt benötigt wird, kann mithilfe der folgenden Formel bestimmt werden:

$s_n = 1{,}5 \cdot (n^2 + n)$

– Berechnen Sie, aus wie vielen Ebenen eine solche Treppe besteht, wenn man insgesamt 360 Würfel verbaut.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$P(\text{„Augensumme ist 5, 6, 7 oder 8“}) = \frac{4+5+6+5}{36} = \frac{20}{36}$

$P(\text{„übrige Augensummen“}) = 1 - \frac{20}{36} = \frac{16}{36}$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Augensumme 5, 6, 7 oder 8 zu erhalten, ist größer.

b) $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 3$

$a_7 = 21$

$360 = 1{,}5 \cdot (n^2 + n)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$n_1 = 15$, $(n_2 = -16)$
Die Treppe besteht aus 15 Ebenen, wenn man insgesamt 360 Würfel verbaut.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten
1 × B: für das richtige Ermitteln, welche der beiden Möglichkeiten die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit hat

b) 1 × A: für das richtige Erstellen des rekursiven Bildungsgesetzes
1 × B1: für das richtige Bestimmen der Anzahl der Würfel in der 7. Ebene
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der Ebenen

Wiener Öffis*

Aufgabennummer: B_187

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Wien betreibt das fünftgrößte Straßenbahnnetz weltweit und das fünftgrößte U-Bahn-Netz in der Europäischen Union. Seit 1995 steigt die Zahl der Passagiere ständig an.

a)

Jahr	2002	2005	2008	2011
Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen	722,4	746,8	803,7	875,0

– Interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\frac{875{,}0 - 722{,}4}{722{,}4} \approx 0{,}21$$

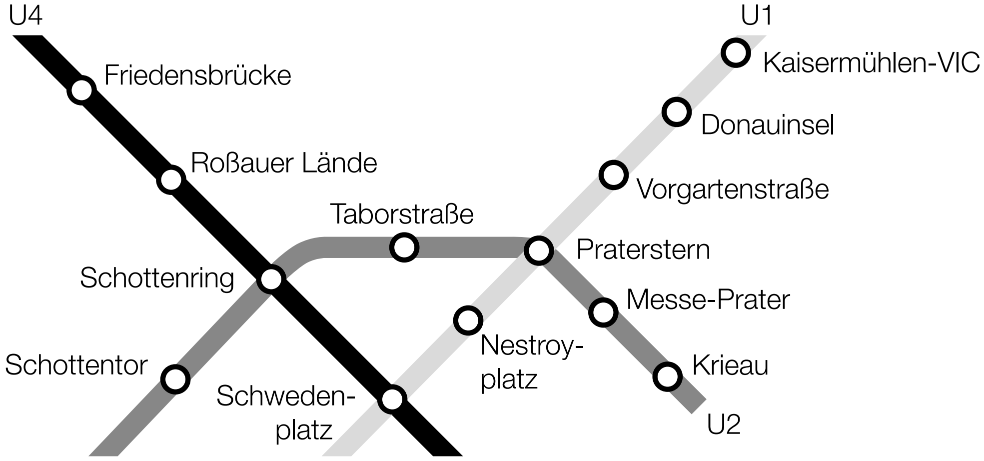
Es wird angenommen, dass der Zusammenhang zwischen der Zeit t in Jahren und der Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen pro Jahr näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002.

– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für die Fahrgastzahl im Jahr 2018.

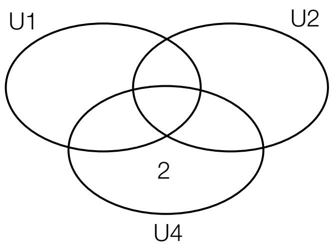
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im Folgenden ist ein kleiner Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes abgebildet:



Die Mengen der Haltestellen der Linien U1, U2 und U4, die in diesem Ausschnitt dargestellt sind, werden mit U1, U2 bzw. U4 bezeichnet.

– Tragen Sie in jeden Teilbereich des nachstehenden Diagramms die entsprechende Anzahl an Haltestellen für den abgebildeten Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes ein.



– Geben Sie die Namen derjenigen Haltestellen an, die in der folgenden Menge liegen:
$U1 \setminus (U2 \cup U4)$

Aus dem abgebildeten Ausschnitt des Wiener U-Bahn-Netzes wird eine Haltestelle zufällig ausgewählt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich um eine Haltestelle handelt, die an mehr als einer U-Bahn-Linie liegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Fahrgastzahl der Wiener Linien im Jahr 2011 ist um rund 21 % größer als jene im Jahr 2002.

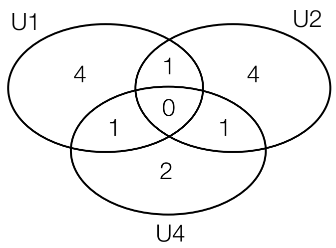
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 17{,}157 \cdot t + 709{,}77$ *(Koeffizienten gerundet)*

$f(16) = 984{,}27...$

Im Jahr 2018 sind nach diesem Modell rund 984,3 Millionen Fahrgäste zu erwarten.

b)



Dies sind die Haltestellen *Kaisermühlen-VIC*, *Donauinsel*, *Vorgartenstraße* und *Nestroy-platz*.

E ... eine zufällig ausgewählte Haltestelle liegt an mehr als einer U-Bahn-Linie

$P(E) = \frac{3}{13} = 0{,}230...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 23 %.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für die Fahrgastzahl im Jahr 2018

b) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Diagramms
1 × C: für die richtige Angabe der Haltestellen
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Papierflieger*

Aufgabennummer: B_020

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Für die Flugeigenschaften eines Papierfliegers ist unter anderem der Strömungskoeffizient c mitbestimmend.

$$c = \frac{F_W}{\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot A}$$

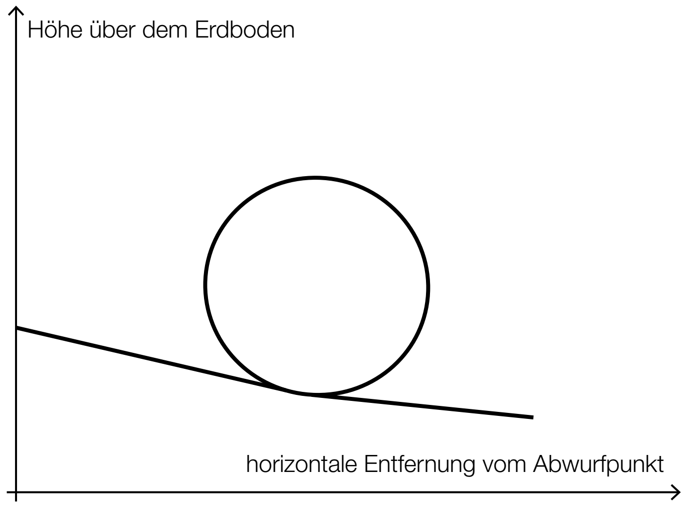
c ... Strömungskoeffizient
F_W ... Strömungswiderstand
A ... Flächeninhalt der angeströmten Fläche
v ... Strömungsgeschwindigkeit
ϱ ... Dichte der Luft

1) Formen Sie die obige Formel nach F_W um.

F_W = ____

2) Beschreiben Sie, wie sich F_W verändert, wenn v verdoppelt wird und alle anderen Größen unverändert bleiben.

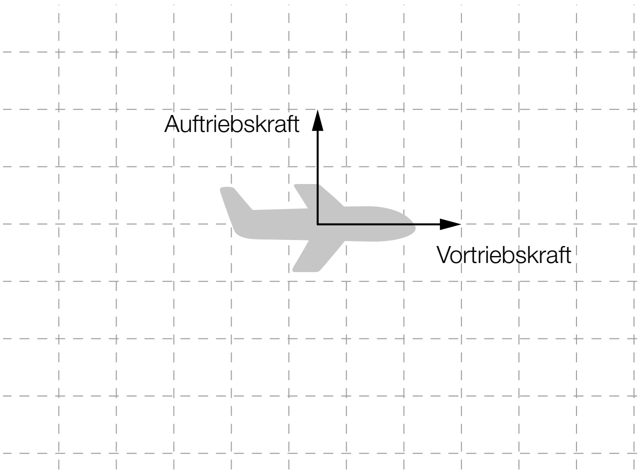
b) Im nachstehenden Diagramm ist modellhaft die Flugbahn eines Papierfliegers dargestellt, wenn dieser einen sogenannten Looping fliegt.



1) Begründen Sie, warum die dargestellte Flugbahn nicht als Funktionsgraph aufgefasst werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

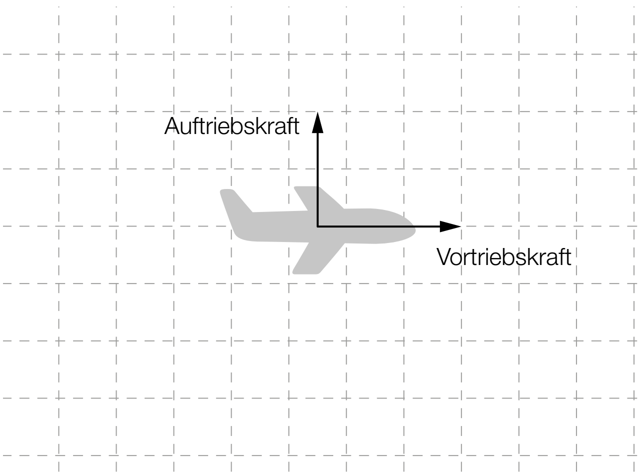
c) Bei einem angetriebenen Flugzeug wirken unter anderem die Auftriebskraft und die Vortriebskraft ein. In der nachstehenden Abbildung sind die zugehörigen Kraftvektoren als Pfeile dargestellt.



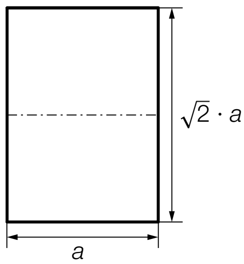
1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die aus Auftriebskraft und Vortriebskraft resultierende Kraft als Pfeil ein.

Bei einem angetriebenen Flugzeug gilt während einer Flugphase:
Der Strömungswiderstand ist der Gegenvektor zur Vortriebskraft.
Die Schwerkraft ist der Gegenvektor zur Auftriebskraft.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Vektor für die Schwerkraft und den Vektor für den Strömungswiderstand als Pfeile ein.



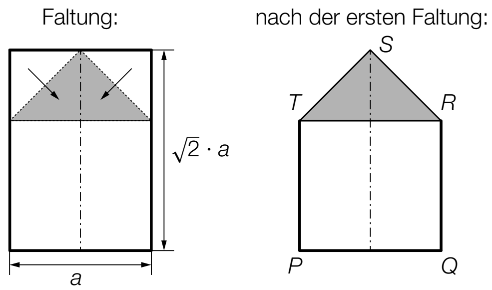
d) Zum Falten von Papierfliegern wird sehr oft Papier in einem DIN-Format verwendet. Für diese Formate gilt, dass die Seitenlängen im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen (siehe nachstehende Abbildung).



Ein solches Papier wird entlang der Blattmitte (siehe strichpunktiert eingezeichnete Linie) gefaltet.

1) Zeigen Sie, dass die Seitenlängen des dabei entstandenen Rechtecks wieder im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen.

In der nachstehenden Abbildung ist der erste Faltschritt für einen Papierflieger aus einem Papier in einem DIN-Format dargestellt. (Die eingezeichnete strichpunktierte Linie verläuft entlang der Mitte.)



2) Begründen Sie, warum das in der obigen Abbildung grau markierte Dreieck *RST* rechtwinkelig ist.

Der Papierflieger soll nach der ersten Faltung bemalt werden.

3) Erstellen Sie mithilfe von *a* eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts *A* des Fünfecks *PQRST*.

$A =$ ______________________________

Bei Papier im DIN-A4-Format ist die kürzere Seite 210 mm lang.

4) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fünfecks *PQRST* für ein Papier im DIN-A4-Format in cm^2.

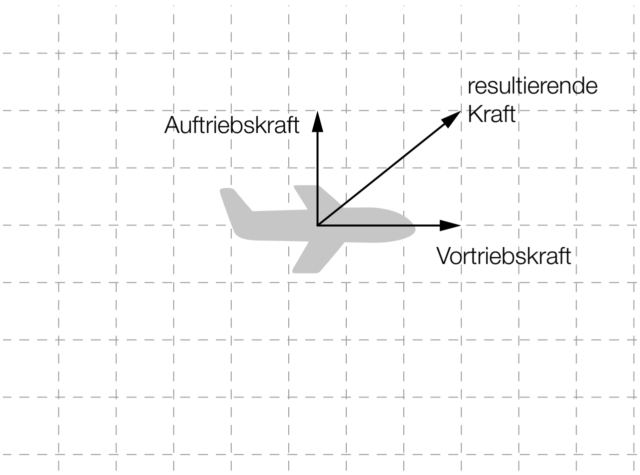
Möglicher Lösungsweg

a1) $F_W = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot A$

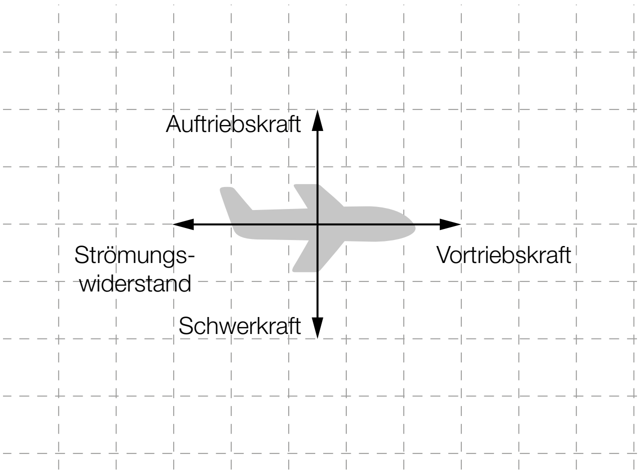
a2) Wird v verdoppelt, so wird F_W vervierfacht.

b1) Dies ist keine Funktion, weil man nicht jeder horizontalen Entfernung vom Abwurfpunkt genau eine Höhe über dem Erdboden zuordnen kann.

c1)



c2)



Sind die Vektoren als Pfeile ausgehend von anderen Anfangspunkten eingezeichnet, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.

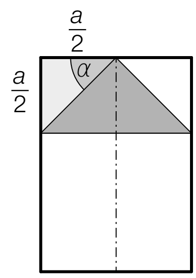
d1) Wird das Papier so wie eingezeichnet gefaltet, so ergibt sich für die Seitenlängen des entstehenden Rechtecks:

längere Seite: a

kürzere Seite: $\frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Die beiden Seitenlängen stehen also im Verhältnis $\frac{a}{\sqrt{2}} : a = 1 : \sqrt{2}$.

d2)



Da das kleine linke Dreieck (siehe obige Skizze) gleichschenkelig und rechtwinkelig ist, gilt für den eingezeichneten Winkel $\alpha = 45°$. Dasselbe gilt auch im kongruenten Dreieck rechts, und somit gilt für den Winkel an der Spitze des markierten Dreiecks: $180° - 2 \cdot \alpha = 90°$.

d3) $A = (a \cdot \sqrt{2} \cdot a) - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \sqrt{2} \cdot a^2 - \frac{a^2}{4}$

d4) $A = \sqrt{2} \cdot 21^2 - \frac{21^2}{4} = 513{,}41...$

Der Flächeninhalt der zu bemalenden Fläche beträgt rund 513 cm^2.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Umformen der Formel
1 × C: für die richtige Beschreibung

b) 1 × D: für die richtige Begründung

c) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen der resultierenden Kraft als Pfeil
1 × A2: für das richtige Einzeichnen der beiden Gegenvektoren als Pfeile

d) 1 × D1: für den richtigen Nachweis
1 × D2: für die richtige Begründung
1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A
1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts in cm^2

Schokoriegel*

Aufgabennummer: B_107

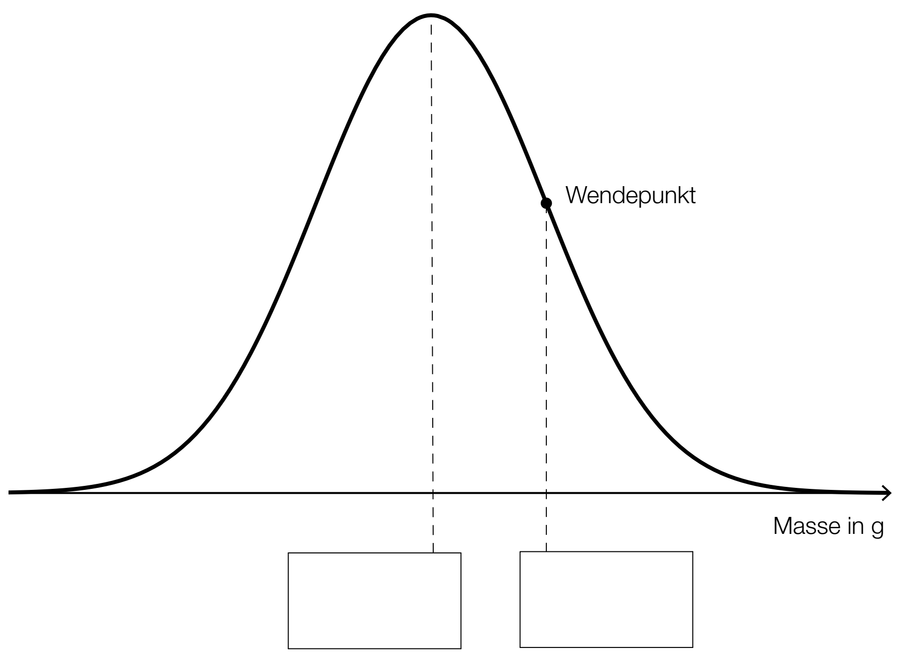
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Schokoriegel wurden bisher in Packungen zu 5 Stück zu einem Preis von € 1,79 pro Packung verkauft. Nun werden sie in Packungen zu 6 Stück zu einem Preis von € 2,49 pro Packung verkauft.

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent ein einzelner Schokoriegel in der neuen Packung teurer ist als ein einzelner Schokoriegel in der alten Packung.

b) Die Masse von bestimmten Schokoriegeln ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 48 g und einer Standardabweichung von 1,3 g.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

2) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Masse eines zufällig ausgewählten Schokoriegels weniger als 45 g beträgt.

3) Berechnen Sie, welche Masse ein zufällig ausgewählter Schokoriegel mindestens hat, wenn er zu den schwersten 20 % der Schokoriegel zählt.

* ehemalige Klausuraufgabe

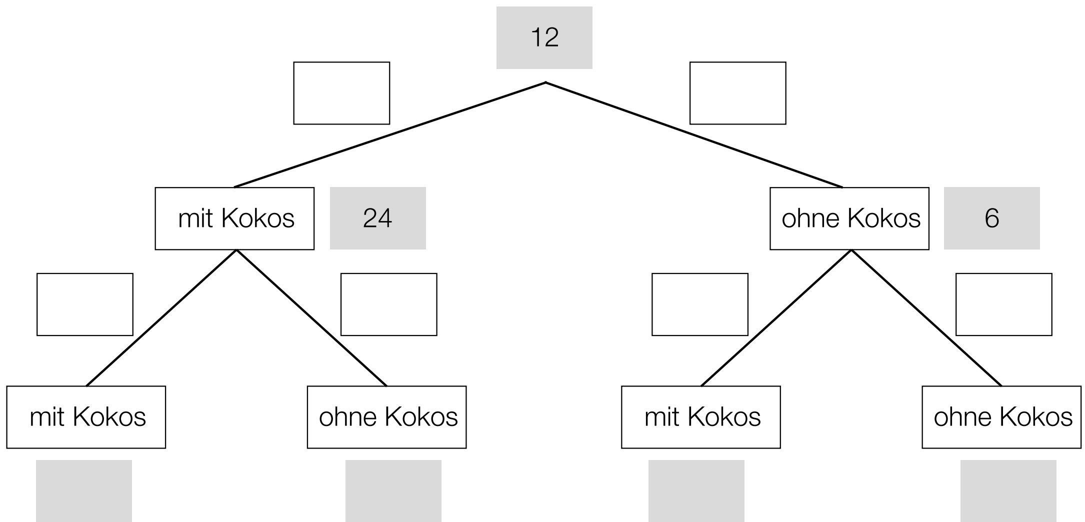
c) In einer Schale sind zwei verschiedene Sorten Schokoriegel: 5 Riegel mit Kokos, 10 Riegel ohne Kokos.

Man bietet Ihnen folgendes Spiel an:

Sie erhalten 12 Spielmünzen. Sie müssen ohne Hinsehen 2-mal hintereinander einen Schokoriegel aus der Schale ziehen und behalten. Jedes Mal, wenn Sie einen Schokoriegel mit Kokos ziehen, wird die Anzahl Ihrer Spielmünzen verdoppelt, andernfalls wird sie halbiert.

1) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeiten in die weißen Kästchen ein.

2) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels in die grauen Kästchen ein.



Im Folgenden betrachtet man die Zufallsvariable X:

X … Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels

3) Tragen Sie in der nachstehenden Tabelle alle auftretenden Werte für X und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ein.

Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels			
Wahrscheinlichkeit			

4) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

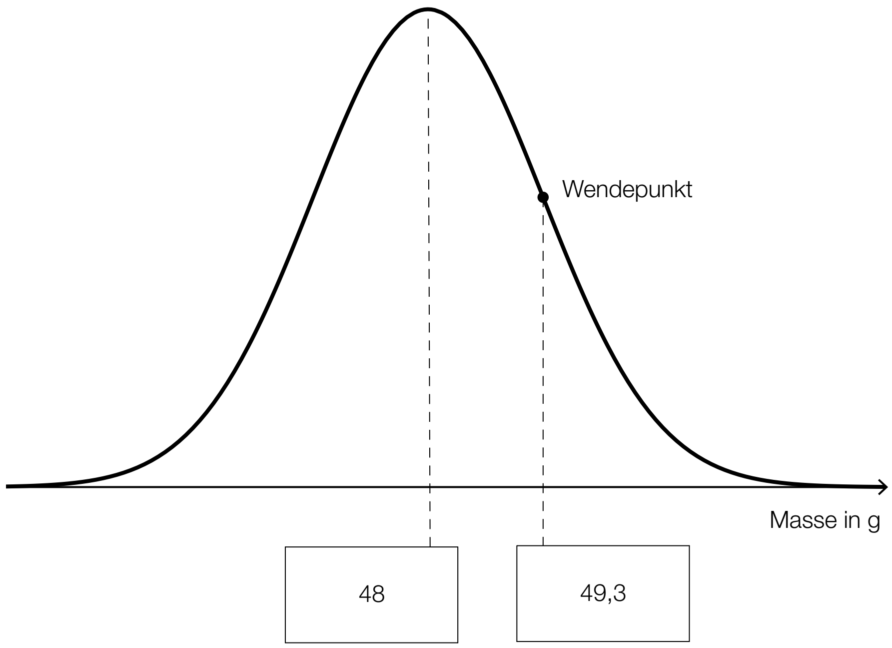
Möglicher Lösungsweg

a1) Preis pro Schokoriegel:

alte Packung: 1,79 : 5 = 0,358
neue Packung: 2,49 : 6 = 0,415

0,415 : 0,358 = 1,159...
Die Preiserhöhung beträgt rund 16 %.

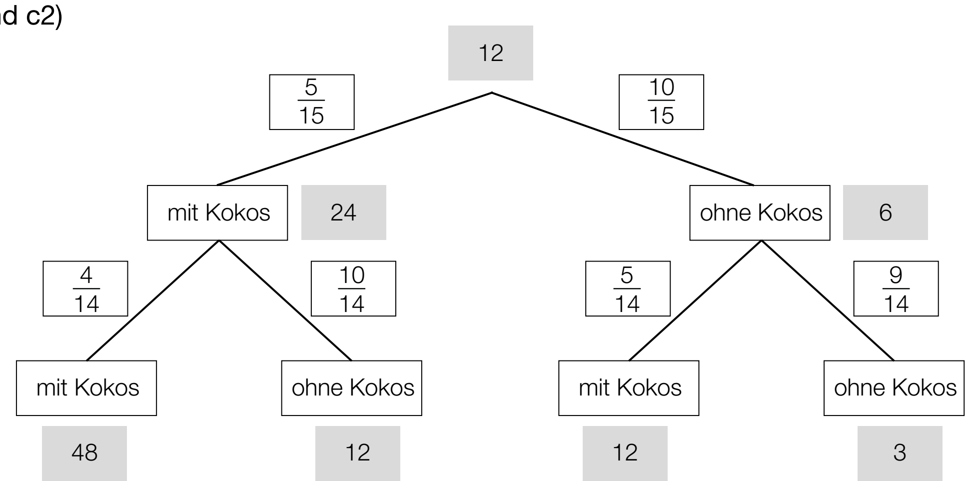
b1)



b2) X ... Masse in g
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X < 45) = 0{,}01050\ldots$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 1,05 %.

b3) $P(X \leq a) = 0{,}80$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 49{,}09\ldots$
Die Masse beträgt rund 49,1 g.

c1 und c2)



c3)

Anzahl Ihrer Spielmünzen am Ende des Spiels	48	12	3
Wahrscheinlichkeit	$\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} = \frac{2}{21}$	$2 \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{10}{21}$	$\frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$

c4) $E(X) = 48 \cdot \frac{2}{21} + 12 \cdot \frac{10}{21} + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{81}{7} = 11{,}57...$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

b) 1 × A: für das richtige Eintragen der beiden fehlenden Zahlen
1 × B1: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × B2: für die richtige Berechnung der Mindestmasse

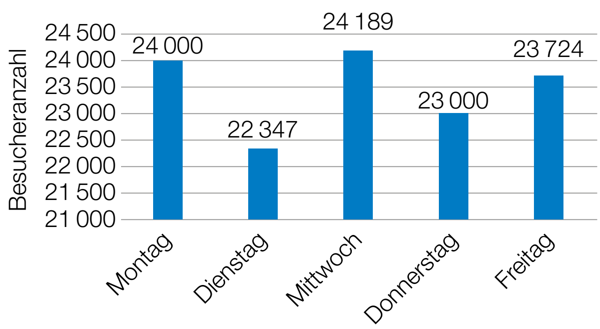
c) 1 × A1: für das richtige Eintragen der Wahrscheinlichkeiten
1 × A2: für das richtige Eintragen der Anzahl der Spielmünzen am Ende des Spiels
1 × A3: für das richtige Eintragen der Werte für X und der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten
1 × B: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts

Museum

Aufgabennummer: B_255		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Ein Museum in einer Stadt führt verschiedene Recherchen durch.

a) Das nachstehende Säulendiagramm wird in einer Zeitung veröffentlicht. Es veranschaulicht, wie sich die Besucherzahlen des Vorjahres auf die einzelnen Wochentage verteilen. Die Zeitung schreibt: „Man kann aus dem Diagramm ablesen, dass die Besucheranzahl am Dienstag weniger als die Hälfte wie am Mittwoch beträgt."



– Argumentieren Sie anhand der Grafik, warum diese Aussage nicht stimmt.

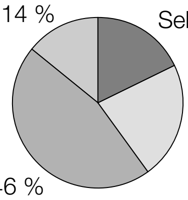
– Berechnen Sie die Einnahmen aus dem Vorjahr, wenn davon ausgegangen wird, dass 80 % der Besucher/innen den regulären Preis von € 3,50 und 20 % der Besucher/innen einen ermäßigten Preis von € 2 bezahlten.

Das Museum hatte 52 Wochen pro Jahr an 5 Tagen pro Woche geöffnet. Die durchschnittliche tägliche Besucherzahl im Museum soll berechnet werden.

– Kreuzen Sie die richtige Berechnung an. *[1 aus 5]*

$(24\,000 + 22\,347 + 24\,189 + 23\,000 + 23\,724) \cdot 5 \cdot 52$	☐
$\frac{24\,000 + 22\,347 + 24\,189 + 23\,000 + 23\,724}{52} \cdot 5$	☐
$\left(\frac{24\,000}{5} + \frac{22\,347}{5} + \frac{24\,189}{5} + \frac{23\,000}{5} + \frac{23\,724}{5}\right) \cdot 52$	☐
$\frac{24\,000 + 22\,347 + 24\,189 + 23\,000 + 23\,724}{5 \cdot 52}$	☐
$\frac{24\,000 \cdot 52}{5} + \frac{22\,347 \cdot 52}{5} + \frac{24\,189 \cdot 52}{5} + \frac{23\,000 \cdot 52}{5} + \frac{23\,724 \cdot 52}{5}$	☐

b) Um die Meinung der Besucher/innen über die Attraktivität der Ausstellungsstücke festzustellen, wird eine Umfrage mit einem Fragebogen durchgeführt.
Die Besucher/innen können die Attraktivität der Ausstellungsstücke mit den Kategorien „Sehr gut“, „Gut“, „Zufriedenstellend“ und „Nicht zufriedenstellend“ bewerten. Das folgende Kreisdiagramm gibt eine Zusammenfassung der Ergebnisse wieder.



– Berechnen Sie, wie viele Personen an der Umfrage teilgenommen haben, wenn 63 Personen die Kategorie „Nicht zufriedenstellend“ angekreuzt haben.
– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Anzahl derjenigen, die mit „Sehr gut“ stimmten, kleiner ist als die Anzahl derjenigen, die mit „Gut“ abgestimmt haben.

c) Bei einer Ausstellung eines berühmten französischen Künstlers werden die Kunstwerke $B1$ bis $B7$ nach den folgenden Kategorien aufgestellt:
„Ölgemälde“ $Ö = \{B1; B2; B4; B5; B7\}$
„Kunstwerke bis zum 30. Lebensjahr des Künstlers“ $K30 = \{B2; B4; B5; B6\}$
„Kunstwerke, die höher als 2 m sind“ $H2m = \{B2; B3; B4; B6\}$

– Erstellen Sie ein Venn-Diagramm, aus dem man die thematische Gliederung (Kategorien) aller Bilder ablesen kann.
– Ordnen Sie den beiden Verknüpfungsmengen jeweils die zutreffende Menge aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$Ö \cap K30 \cap H2m$	
$Ö \setminus (K30 \cup H2m)$	

A	$\{B1; B7\}$
B	$\{B2; B4\}$
C	$\{B4; B5\}$
D	$\{B6; B7\}$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Säule bei „Dienstag" ist zwar weniger als halb so hoch wie jene bei „Mittwoch", da die vertikale Achse jedoch nicht bei 0 beginnt, kann daraus nicht gefolgert werden, dass die Besucheranzahl am Dienstag weniger als halb so hoch wie am Mittwoch war.

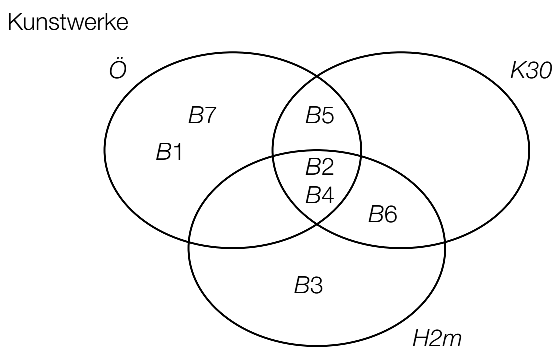
$24\,000 + 22\,347 + 24\,189 + 23\,000 + 23\,724 = 117\,260$ Besucher/innen im Jahr
$117\,260 \cdot 0{,}80 \cdot 3{,}50 + 117\,260 \cdot 0{,}20 \cdot 2 = 375\,232$
Die Einnahmen mit Eintrittskarten betrugen im Vorjahr € 375.232.

[...]	
[...]	
[...]	
$\frac{24\,000 + 22\,347 + 24\,189 + 23\,000 + 23\,724}{5 \cdot 52}$	☒
[...]	

b) $\frac{63}{0{,}14} = 450$
Es haben insgesamt 450 Personen an der Umfrage teilgenommen.

$\frac{0{,}22 - 0{,}18}{0{,}22} = 0{,}\overline{18} \approx 18\ \%$
Es sind um rund 18 % weniger Personen in der Kategorie „Sehr gut" als in der Kategorie „Gut".

c)



$Ö \cap K30 \cap H2m$	B
$Ö \setminus (K30 \cup H2m)$	A

A	$\{B1; B7\}$
B	$\{B2; B4\}$
C	$\{B4; B5\}$
D	$\{B6; B7\}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 1 Zahlen und Maße
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Brettspiel

Aufgabennummer: B_288

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Spiel gewinnt diejenige Person, die als erstes ein vorgegebenes Muster auf ihrem Spielbrett mit roten und grünen Farbsteinen ausgelegt hat.
Bei einem Spielzug wird zuerst mit 2 Zahlenwürfeln („normale" Würfeln mit den Augenzahlen 1 bis 6) geworfen. Die aus den Augenzahlen gebildete Summe (Augensumme) bestimmt, wie viele Farbsteine man auf das Spielbrett legen darf.
Anschließend wird für jeden zu legenden Farbstein die Farbe gewürfelt. Dazu wird ein spezieller Farbwürfel mit 4 grünen und 2 roten Seiten verwendet.
Ein Spielzug besteht daher aus dem Werfen der 2 Zahlenwürfel und dem darauffolgenden mehrmaligen Werfen des Farbwürfels.

a) Die Augensumme der beiden Zahlenwürfel kann als Zufallsvariable X betrachtet werden.

- Erstellen Sie eine Tabelle, in der man für alle möglichen Augensummen der beiden Würfel die jeweilige Wahrscheinlichkeit ablesen kann.
- Interpretieren Sie den Ausdruck $\sum_{i=2}^{12} (i \cdot P(X = i)) = 7$ im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Ein Kind darf den Farbwürfel 3-mal werfen.

- Erstellen Sie ein Baumdiagramm, in dem die möglichen Farbabfolgen und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten dargestellt sind.
- Dokumentieren Sie, wie man mithilfe des Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass 3 rote Farbsteine auf das Spielbrett gelegt werden dürfen, bestimmen kann.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind bei 3-maligem Werfen des Farbwürfels 1 roten Stein und 2 grüne Steine auf das Spielbrett legen darf.

c) Ein Kind wirft in einem Spielzug 7-mal den Farbwürfel.

– Ordnen Sie den beiden gegebenen Ausdrücken jeweils das passende Ereignis aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\sum_{k=0}^{4} \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k}$	
$\sum_{k=0}^{5} \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}$	

A	Es werden weniger als 5 grüne Steine gelegt.
B	Es werden maximal 5 rote Steine gelegt.
C	Es werden weniger als 5 rote Steine gelegt.
D	Es werden maximal 5 grüne Steine gelegt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind mindestens 4-mal die Farbe Grün würfelt.

d) Ein Kind steht kurz vor dem Gewinn des Spiels. Es benötigt im nächsten Spielzug zum Fertigstellen des Musters noch genau 2 rote Steine.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind nach dem Würfeln genau 2 Steine, die beide rot sind, zur Verfügung hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

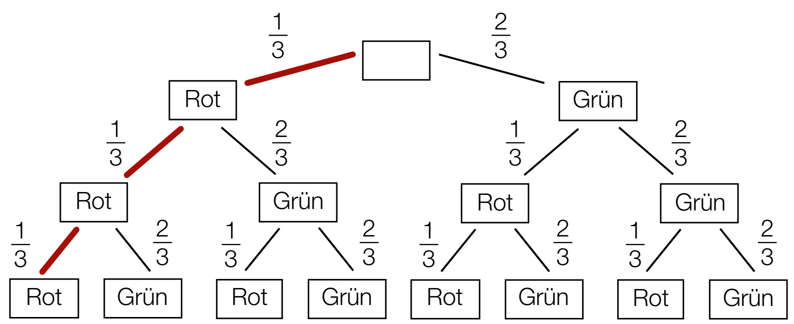
Möglicher Lösungsweg

a)

Augensumme x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mit dem Ausdruck wird der Erwartungswert der Zufallsvariablen X berechnet. Man kann erwarten, dass man bei oftmaliger Wiederholung des Spielzugs im Mittel 7 Farbsteine pro Runde auf das Spielbrett legen darf.

b)



Am Baumdiagramm wählt man den Ast, der nur aus roten Würfelergebnissen besteht (in der Abbildung mit Rot markiert). Entlang des Astes werden die Wahrscheinlichkeiten multipliziert.

$P(\text{„1 Rot“, „2 Grün“}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{4}{9} = 0{,}\overline{4}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind bei 3 Würfen 1-mal die Farbe Rot und 2-mal die Farbe Grün würfelt, beträgt rund 44,4 %.

c)

$\sum_{k=0}^{4} \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-k}$	C
$\sum_{k=0}^{5} \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}$	D

A	Es werden weniger als 5 grüne Steine gelegt.
B	Es werden maximal 5 rote Steine gelegt.
C	Es werden weniger als 5 rote Steine gelegt.
D	Es werden maximal 5 grüne Steine gelegt.

X ... Anzahl der Würfe, bei denen die Farbe Grün gewürfelt wird

Binomialverteilung mit $n = 7$ und $p = \frac{2}{3}$:
$P(X \geq 4) = 0{,}8267\ldots \approx 82{,}7\ \%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 82,7 % wird bei 7 Würfen mit dem Farbwürfel mindestens 4-mal die Farbe Grün geworfen.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass das Kind die Augensumme 2 und mit dem Farbwürfel 2-mal die Farbe Rot wirft, wird gebildet mit:

P(„Augensumme = 2“) · P(„der Farbwürfel zeigt bei beiden Würfeln Rot“)

$= \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 0{,}0030\ldots$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 0,3 % hat das Kind genau 2 Steine, die beide rot sind.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

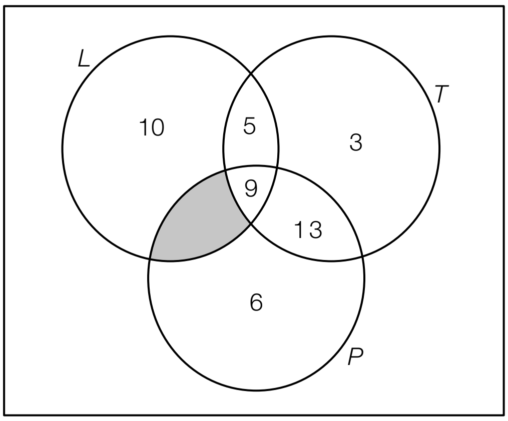
Allergie

Aufgabennummer: B_289		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Es kommen immer mehr Kinder mit unterschiedlichen Allergien in den Kindergarten.

a) Im Kindergarten befinden sich insgesamt 53 Kinder mit mindestens einer Allergie. Es werden generell die verschiedenen Allergien in die Gruppen Lebensmittelallergie (L), Tierhaarallergie (T) und Pollenallergie (P) eingeteilt. Das folgende Venn-Diagramm zeigt die Verteilung der Kinder auf die einzelnen Allergiegruppen.

– Bestimmen Sie die Anzahl der Kinder in der grau markierten Schnittmenge.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Menge $L\setminus(T \cup P)$ im gegebenen Sachzusammenhang.



b) Einem Kind wurde ein Antiallergikum verschrieben. 48 Stunden nach der Einnahme dieses Antiallergikums sind noch 0,1 % des Wirkstoffs der verabreichten Dosis vorhanden.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion auf, die die Abnahme der Menge des Wirkstoffs des Antiallergikums in Abhängigkeit von der Zeit in Stunden nach der Einnahme beschreibt. Es wird von einer Anfangsmenge N_0 ausgegangen.
– Bestimmen Sie die Halbwertszeit der Menge des Wirkstoffs des Antiallergikums.

c) Im Monat Juni wird die Häufigkeit von allergischen Reaktionen auf Pollen bei einer Gruppe von 35 Kindern aufgezeichnet.

Anzahl der allergischen Reaktionen	0	1	2	3	4
Anzahl der Kinder	5	6	8	10	6

– Berechnen Sie die relative Häufigkeit der Kinder, die 2 allergische Reaktionen zeigen.
– Geben Sie an, welche statistische Kenngröße mit dem Ausdruck $\frac{5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4}{35}$ berechnet wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $53 - 10 - 5 - 9 - 3 - 13 - 6 = 7$
Es sind 7 Kinder in der Schnittmenge.

$L \setminus (T \cup P)$ ist die Menge aller Kinder, die nur an einer Lebensmittelallergie leiden.

b) $N(t) = N_0 \cdot a^t$
t ... Zeit in Stunden nach der Einnahme
$N(t)$ ... Menge des Wirkstoffs zur Zeit t

$0{,}001 = a^{48} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[48]{0{,}001} = 0{,}8659\ldots$
$N(t) = N_0 \cdot 0{,}8659\ldots^t$ oder $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}1439\ldots \cdot t}$

$0{,}5 = 0{,}8659\ldots^t \quad \Rightarrow \quad t = 4{,}816\ldots$
Die Halbwertszeit beträgt rund 4,82 Stunden.

c) $\frac{8}{35} = 0{,}2285\ldots$
Von den Kindern die an einer Pollenallergie leiden, haben rund 22,9 % 2 allergische Reaktionen im Monat Juni.

Mit dem Ausdruck wird das arithmetische Mittel der Anzahl von allergischen Reaktionen auf Pollen pro Kind berechnet.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 2
c) leicht	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Süßigkeiten

Aufgabennummer: B_290

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Es wird eine neue Süßigkeiten-Produktion geplant, die aus Kugeln mit Schokolade- bzw. mit Kaffee-Füllung besteht.

a) Der Wert der Maschine, die die Kugeln herstellt, nimmt im Laufe der Zeit ab. Diese Wertabnahme kann mit einer Folge beschrieben werden. Die einzelnen Folgenglieder geben den Wert der Maschine im entsprechenden Jahr an. Die Maschine hat im 1. Jahr einen Wert von € 97.500. Zu Beginn jedes weiteren Jahres verringert sich der Wert der Maschine jeweils um € 7.500.

- Geben Sie an, um welchen Folgentyp es sich hierbei handelt. Begründen Sie Ihre Auswahl.
- Berechnen Sie die ersten 3 Folgenglieder.
- Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz dieser Folge auf.
- Berechnen Sie, wann die Maschine € 60.000 wert ist.

b) In einer Packung befinden sich 31 Schokolade-Kugeln und 23 Kaffee-Kugeln. Eine Person zieht 3-mal hintereinander zufällig eine Kugel aus der Packung. Da die Person keine Kaffee-Kugeln mag, legt sie eine gezogene Kaffee-Kugel sofort wieder zurück in die Packung. Schokolade-Kugeln werden nicht zurückgelegt.

- Veranschaulichen Sie diesen Sachzusammenhang in einem mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm.
- Kennzeichnen Sie im Baumdiagramm alle Pfade, in denen genau eine Schokolade-Kugel gezogen wird.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Person 3-mal hintereinander eine Kaffee-Kugel zieht.

c) Verschiedene Packungen enthalten eine unterschiedliche Anzahl an Schokolade-Kugeln. Es werden 34 Packungen untersucht. Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viele Packungen eine bestimmte Anzahl an Schokolade-Kugeln enthält.

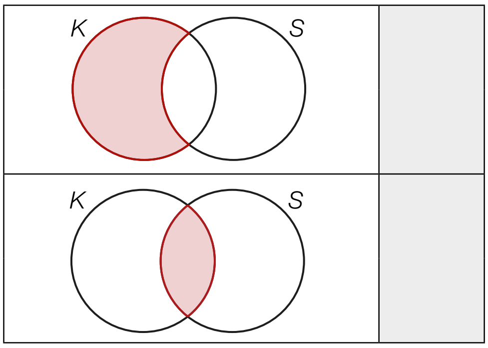
Anzahl an Packungen	8	7	6	6	5	2
Anzahl an Schokolade-Kugeln pro Packung	30	32	33	34	36	38

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Anzahl an Schokolade-Kugeln pro Packung.
– Berechnen Sie den relativen Anteil der Packungen, die 30 Schokolade-Kugeln enthalten bezogen auf alle untersuchten Packungen.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der Summe
$30 \cdot 8 + 32 \cdot 7 + 33 \cdot 6 + 34 \cdot 6 + 36 \cdot 5 + 38 \cdot 2$ im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Bei einer Umfrage kosten 50 Personen die Süßigkeiten. Die nachstehende Tabelle gibt das Ergebnis dieser Umfrage an.

	„Mir schmeckt keine Kugel."	„Mir schmecken nur Schokolade-Kugeln."	„Mir schmecken nur Kaffee-Kugeln."	„Mir schmecken beide Kugeln."
Anzahl der Nennungen	5	10	9	26

– Übertragen Sie die Informationen aus der obigen Tabelle in ein Venn-Diagramm.
– Ordnen Sie den beiden Venn-Diagrammen jeweils diejenige Mengenschreibweise aus A bis D zu, die die markierte Teilmenge beschreibt. *[2 zu 4]*



A	$S \cap K$
B	$K \setminus S$
C	$S \setminus K$
D	$S \cup K$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

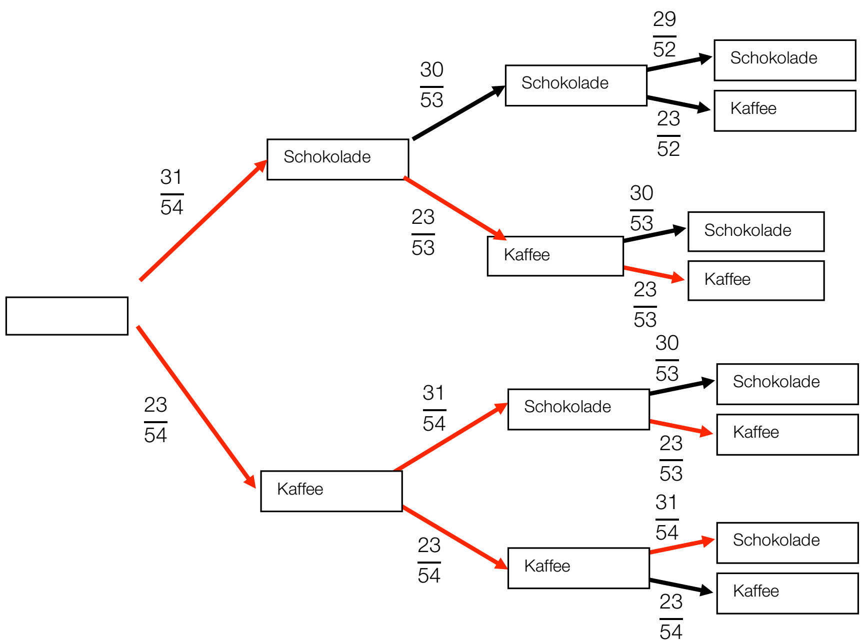
a) $a_1 = € \; 97.500$
$a_2 = € \; 90.000$
$a_3 = € \; 82.500$

Es handelt sich um eine arithmetische Folge, da die Differenz zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist.

$a_n = 97\,500 - (n - 1) \cdot 7\,500$

$60\,000 = 97\,500 - (n - 1) \cdot 7\,500$
$n = 6$
Zu Beginn des 6. Jahres hat die Maschine einen Wert von € 60.000.

b)



X … Anzahl der hintereinander gezogenen Kaffee-Kugeln

$P(X = 3) = \frac{23}{54} \cdot \frac{23}{54} \cdot \frac{23}{54} = 0{,}0772\ldots \approx 7{,}7\ \%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 7,7 % zieht die Person 3-mal hintereinander eine Kaffee-Kugel.

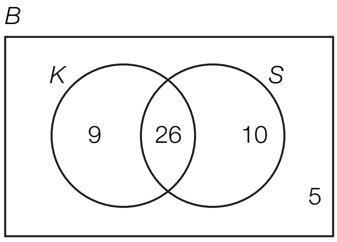
c) $\dfrac{30 \cdot 8 + 32 \cdot 7 + 33 \cdot 6 + 34 \cdot 6 + 36 \cdot 5 + 38 \cdot 2}{34} = 33$

$\dfrac{8}{34} = 0{,}2352\ldots \approx 23{,}5\ \%$

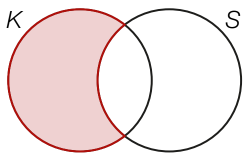
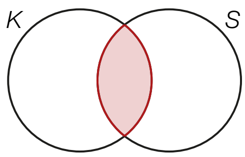
Rund 23,5 % der Packungen enthalten 30 Schokolade-Kugeln.

Mit dieser Summe wird die Gesamtanzahl der Schokolade-Kugeln in den 34 Packungen berechnet.

d)



B ... Menge aller befragten Personen
K ... Menge der Personen, denen Kaffee-Kugeln schmecken
S ... Menge der Personen, denen Schokolade-Kugeln schmecken

	B
	A

A	$S \cap K$
B	$K \setminus S$
C	$S \setminus K$
D	$S \cup K$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 3
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bastelarbeit im Kindergarten*

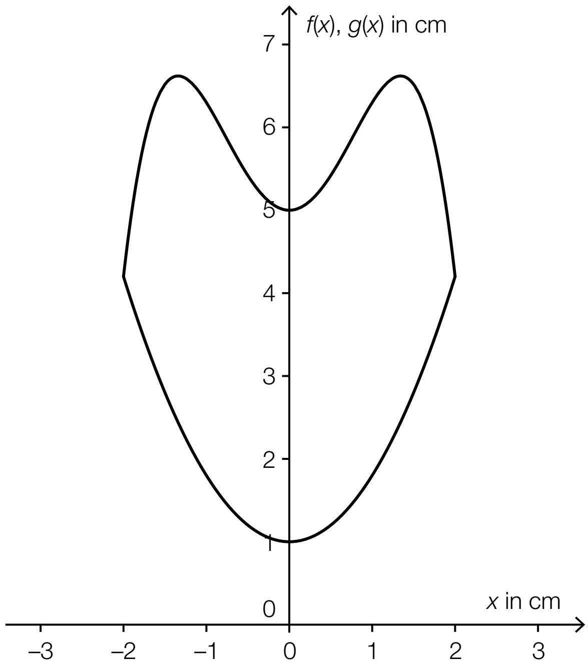
Aufgabennummer: B_336		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Als Werkarbeit in einem Kindergarten sollen Katzenköpfe aus Modelliermasse gestaltet werden. Als Vorlage dazu dient eine Ausstechform. Die Begrenzungslinien dieser Ausstechform können durch die Graphen der Funktionen f und g beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}5 \cdot x^4 + 1{,}8 \cdot x^2 + 5$
$g(x) = 0{,}8 \cdot x^2 + 1$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

Die Graphen dieser Funktionen sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



a) 1) Argumentieren Sie mithilfe der Funktionsgleichungen, dass der Graph der Funktion f die obere Begrenzungslinie und der Graph der Funktion g die untere Begrenzungslinie beschreibt (und nicht umgekehrt).

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Modelliermasse erhält man in quaderförmigen Packungen mit folgenden Maßen:
(B) 95 mm × (T) 25 mm × (H) 200 mm

1) Berechnen Sie das Volumen einer Packung Modelliermasse in cm^3.

Jedes Kind soll mithilfe der Form einen 2 cm dicken Katzenkopf ausstechen können.

2) Berechnen Sie, wie viele Packungen Modelliermasse man mindestens benötigt, damit alle 24 Kinder der Gruppe jeweils einen Katzenkopf basteln können.

c) Um die Werkarbeit der Kinder schön verpacken zu können, sollen Schachteln mit rechteckiger Grundfläche gefaltet werden. Jeder Katzenkopf soll in eine solche Schachtel gelegt werden. Eine Seite der Schachtel-Grundfläche muss mindestens 4 cm lang sein.

1) Berechnen Sie die Mindestabmessung der anderen Seite der Grundfläche.

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Graph der Funktion g ist eine (nach oben offene) quadratische Parabel, also die untere Begrenzungslinie.

oder:

$f(0) = 5$ und $g(0) = 1$

Diese Aufgabenstellung erlaubt vielfältige Lösungsmöglichkeiten.

b1) Volumen einer Packung Modelliermasse in cm³:
$V = 9{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 20 = 475$

Das Volumen einer Packung Modelliermasse beträgt 475 cm³.

b2) Volumen eines modellierten Katzenkopfes in cm³: $V = 2 \cdot \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \frac{448}{15} \approx 29{,}87$

Volumen von 24 modellierten Katzenköpfen in cm³: $24 \cdot \frac{448}{15} = 716{,}8$

Da eine Packung 475 cm³ beinhaltet, benötigt man also mindestens 2 Packungen Modelliermasse.

c1) Der Tiefpunkt $(0|1)$ von g kann der Abbildung entnommen werden: $g(0) = 1$.

Berechnung der Maximumstellen von f:
$f'(x) = -2 \cdot x^3 + 3{,}6 \cdot x$

Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$:
$x_1 = 0$ (Minimumstelle)
$x_{2,3} = \pm\sqrt{1{,}8}$ (Maximumstellen)

Mindestabmessung in cm: $f(\sqrt{1{,}8}) - g(0) = \frac{281}{50} = 5{,}62$
Die andere Seite der Grundfläche muss mindestens 5,62 cm lang sein.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für die richtige Argumentation

b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Volumens einer Packung Modelliermasse in cm^3
b2) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (benötigtes Volumen für einen modellierten Katzenkopf als Produkt aus Inhalt der Querschnittsfläche und Dicke)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl an Packungen, die mindestens benötigt werden

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Mindestabmessung der anderen Seite der Grundfläche

Puppenrutsche*

Aufgabennummer: B_373

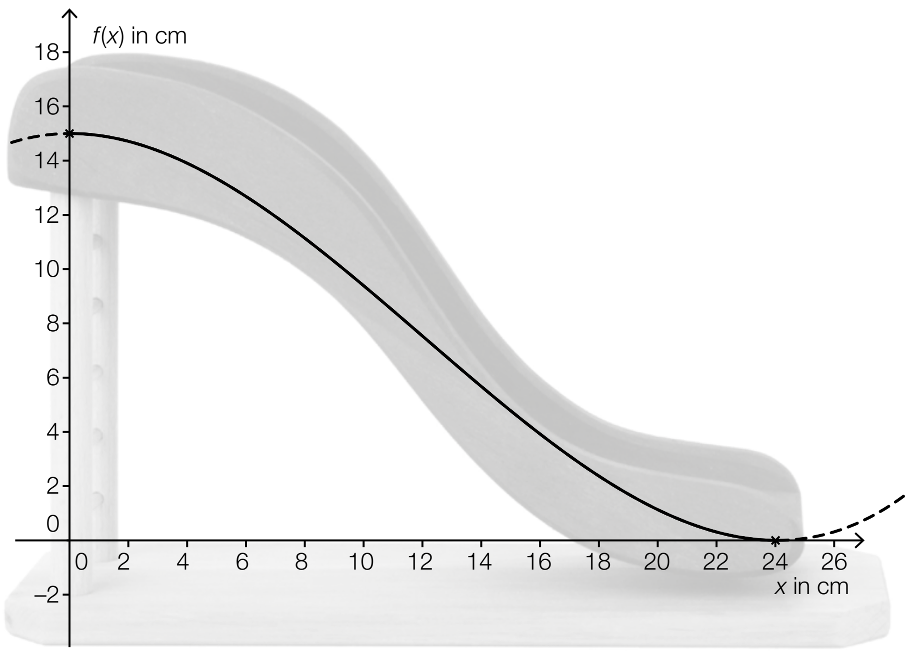
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der unten stehenden Abbildung ist eine Puppenrutsche dargestellt. Das seitliche Profil dieser Puppenrutsche kann annähernd durch eine Polynomfunktion 3. Grades f modelliert werden:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $0 \leq x \leq 24$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

Der Graph der Funktion f hat an den Stellen $x = 0$ und $x = 24$ jeweils eine horizontale Tangente.



Bildquelle: http://www.spielzeug-truhe.de/artikel-277.htm [01.12.2014] (adaptiert).

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Das seitliche Profil einer anderen Spielzeugrutsche kann durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = \frac{1}{108} \cdot (x^3 - 18 \cdot x^2 + 864)$ mit $0 \leq x \leq 12$

x, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der die Rutsche am steilsten ist.

2) Begründen Sie allgemein, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

Möglicher Lösungsweg

a1) I: $f(0) = 15$
II: $f(24) = 0$
III: $f'(0) = 0$
IV: $f'(24) = 0$

oder:

I: $d = 15$
II: $a \cdot 24^3 + b \cdot 24^2 + c \cdot 24 + d = 0$
III: $c = 0$
IV: $3 \cdot a \cdot 24^2 + 2 \cdot b \cdot 24 + c = 0$

b1) Berechnung der Wendestelle:
Lösen der Gleichung: $g''(x_0) = 0$
$x_0 = 6$ cm

b2) Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Die Extremstellen der Polynomfunktion 3. Grades entsprechen den Nullstellen der 1. Ableitung. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann die Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Aufstellen von Gleichung I und II
1 × A2: für das richtige Aufstellen von Gleichung III und IV

b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wendestelle
1 × D: für die richtige Begründung

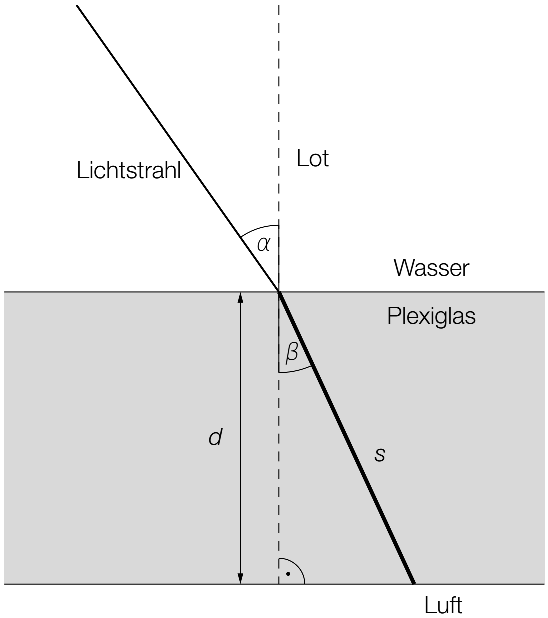
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Tauchgang*

Aufgabennummer: B_416

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die nachstehende Grafik zeigt den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.



α ... Winkel zwischen Lichtstrahl und Lot im Wasser
β ... Winkel zwischen Lichtstrahl und Lot im Plexiglas

Der Zusammenhang zwischen α und β kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$\sin(\alpha)$ verhält sich zu $\sin(\beta)$ wie 1,49 zu 1,33.

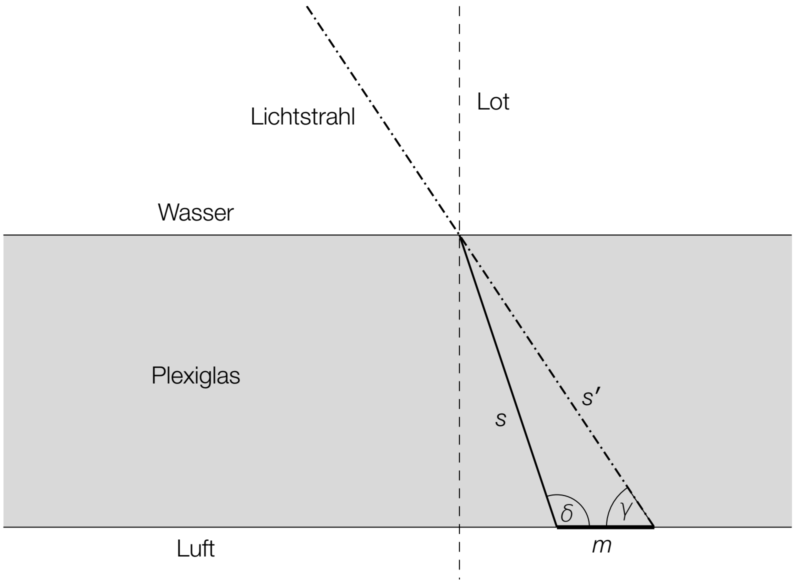
1) Berechnen Sie den Winkel β, wenn gilt: $\alpha = 35°$.

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge s, wenn die Dicke d und der Winkel β bekannt sind.

$s =$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die nachstehende nicht maßstabgetreue Grafik zeigt den Verlauf eines anderen Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.



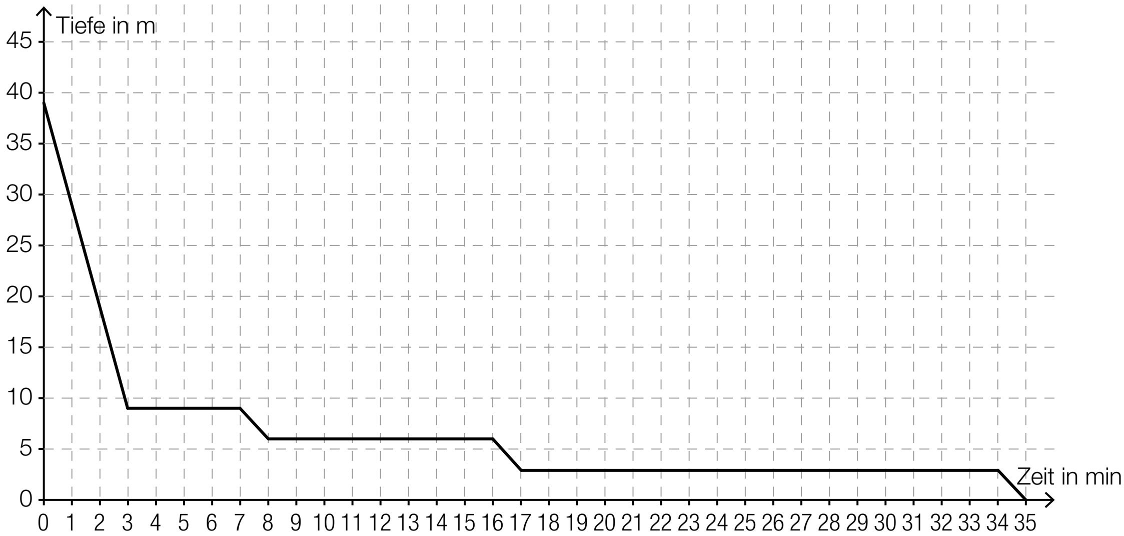
s ... Weg, den der Lichtstrahl im Plexiglas zurücklegt
s' ... Weg, den der Lichtstrahl ohne Ablenkung zurücklegen würde

Dabei gilt: $s = 4{,}52$ mm und $s' = 4{,}77$ mm. Außerdem kennt man den Winkel $\gamma = 57°$.

1) Berechnen Sie den stumpfen Winkel δ.

2) Berechnen Sie die Länge der Strecke m.

c) Das nachstehende Diagramm zeigt, wie bei einem bestimmten Tauchgang aus 39 m Tiefe aufgetaucht wurde.



1) Interpretieren Sie die waagrechten Abschnitte des Graphen im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Markieren Sie im obigen Diagramm ein Zeitintervall, in dem die Auftauchgeschwindigkeit rund 10 m/min beträgt.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{1{,}49}{1{,}33}$

$\beta = 30{,}79...° \approx 30{,}8°$

a2) $s = \frac{d}{\cos(\beta)}$

b1) Sinussatz:

$\frac{s}{\sin(\gamma)} = \frac{s'}{\sin(\delta)}$

$(\delta_1 = 62{,}25...°)$
$\delta_2 = 117{,}74...°$

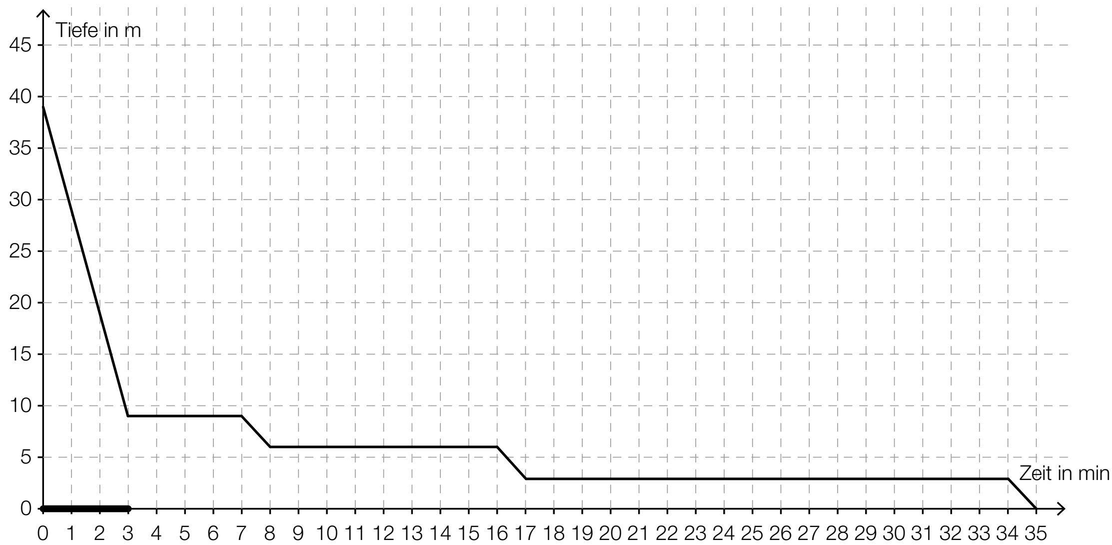
Wird der spitze Winkel nicht erwähnt und nur der stumpfe als Lösung angegeben, so ist dies ebenfalls richtig.

b2) Winkel, den s und s' einschließen: $180° - \delta_2 - \gamma = 5{,}258...° \approx 5{,}26°$

Cosinussatz: $m^2 = s^2 + s'^2 - 2 \cdot s \cdot s' \cdot \cos(5{,}26°)$
$m = \sqrt{s^2 + s'^2 - 2 \cdot s \cdot s' \cdot \cos(5{,}26°)} = 0{,}493...$
$m \approx 0{,}49$ mm

c1) Die waagrechten Abschnitte sind diejenigen Zeitabschnitte, in denen die Taucherin/der Taucher auf gleicher Tiefe bleibt.

c2) Auftauchgeschwindigkeit 10 m/min:



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels β
a2) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung von δ
b2) 1 × B2: für die richtige Berechnung von m

c1) 1 × C1: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
c2) 1 × C2: für die richtige Markierung des Intervalls

Staudamm (2)*

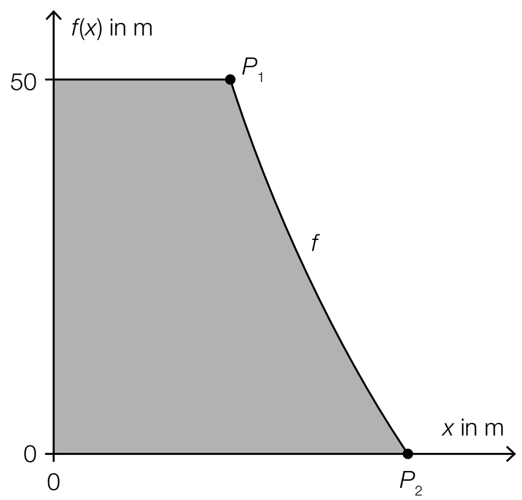
Aufgabennummer: B_442

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Staudamm hat den unten – nicht maßstabgetreu – dargestellten Querschnitt mit den Punkten $P_1 = (10|50)$ und $P_2 = (20|0)$. Alle Angaben erfolgen in Metern. Der Verlauf zwischen den Punkten P_1 und P_2 wird durch den Graphen der Funktion f beschrieben:

$f(x) = a + b \cdot \ln(x)$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m



1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Parameter a und b ermittelt werden können.

Es wurden folgende Werte für a bzw. b ermittelt:

$a = 216{,}1$
$b = -72{,}1$

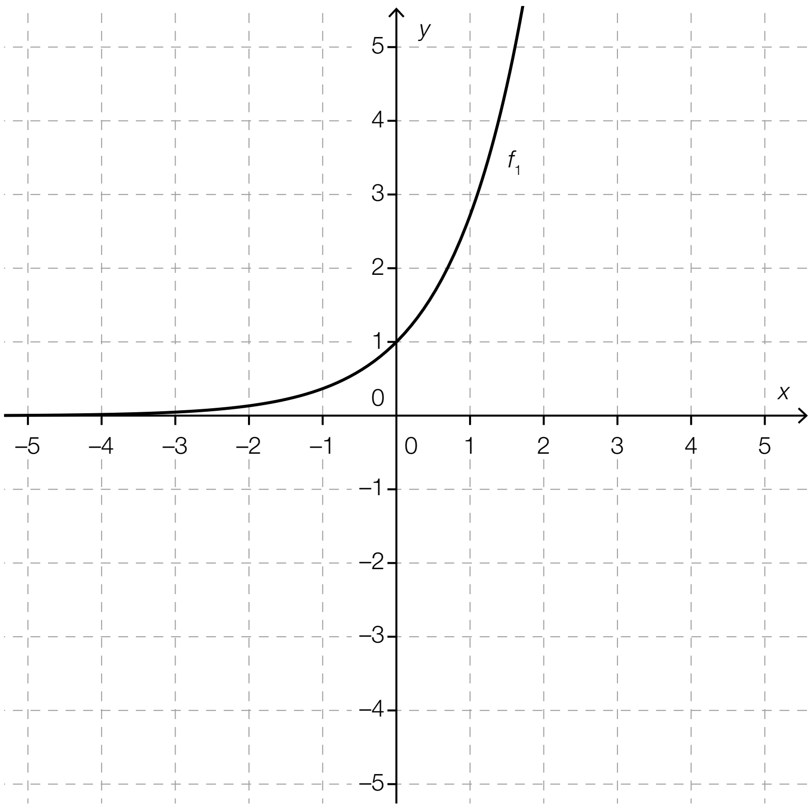
2) Berechnen Sie die Breite des Staudamms auf halber Höhe.

3) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Staudamms (graue Fläche).

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im unten stehenden Diagramm ist der Graph einer Exponentialfunktion f_1 eingezeichnet.

1) Zeichnen Sie in diesem Diagramm den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion f_2 ein.



2) Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Gerade $y = x$ für den Zusammenhang der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 hat.

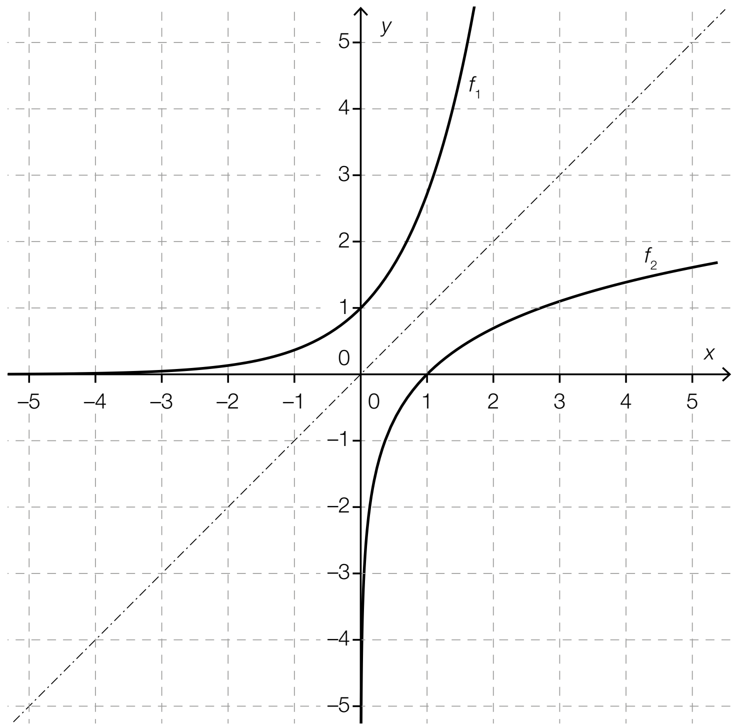
Möglicher Lösungsweg

a1) I: $50 = a + b \cdot \ln(10)$
II: $0 = a + b \cdot \ln(20)$

a2) $25 = 216{,}1 - 72{,}1 \cdot \ln(x) \quad \Rightarrow \quad x = 14{,}16\ldots \approx 14{,}2$
Die Breite in halber Höhe beträgt rund 14,2 m.

a3) $A = 10 \cdot 50 + \int_{10}^{20} (216{,}1 - 72{,}1 \cdot \ln(x))\,\mathrm{d}x = 722{,}31\ldots \approx 722{,}3$
Der Inhalt der Querschnittsfläche beträgt rund 722,3 m².

b1)



b2) Die Funktionsgraphen liegen symmetrisch zur Geraden $y = x$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite in halber Höhe
1 × A2: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Inhalts der Querschnittsfläche
1 × B2: für die richtige Berechnung des Inhalts der Querschnittsfläche

b1) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Umkehrfunktion f_2
b2) 1 × C: für die richtige Beschreibung zur Bedeutung der Geraden $y = x$

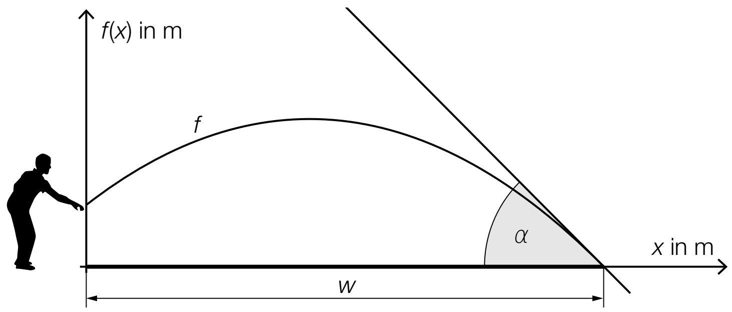
Boule*

Aufgabennummer: B_444

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Boule ist eine Sportart, bei der Kugeln geworfen werden. Ziel ist es, mit den eigenen Kugeln möglichst nah an eine Zielkugel zu gelangen.

a) Peter wirft eine Kugel. Die Flugbahn dieser Kugel kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = -0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

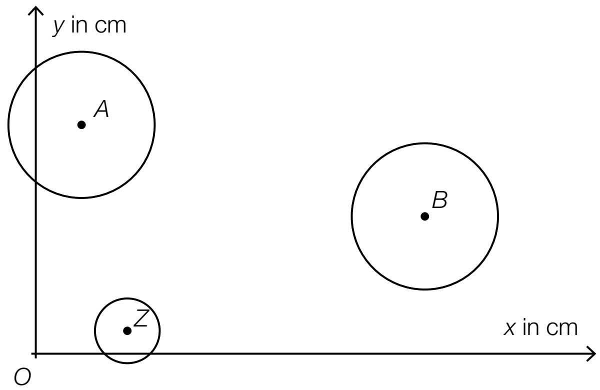
1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1,1 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang.
2) Berechnen Sie die Wurfweite w.

Peter möchte, dass der Aufprallwinkel α der Kugel im Intervall [42°; 44°] liegt.

3) Überprüfen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, ob der Aufprallwinkel α in diesem Intervall liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für eine genauere Analyse eines Boule-Spiels wird mithilfe einer Drohne ein Luftbild aufgenommen.



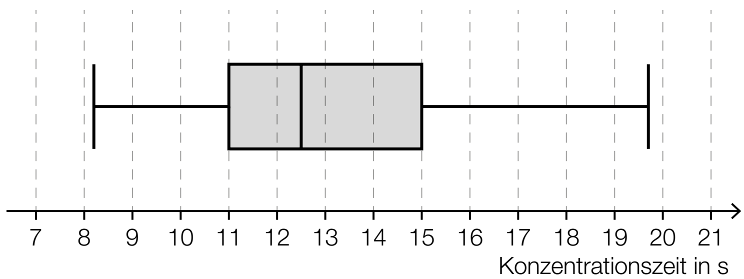
$A = (2|10)$ ... Auflagepunkt der ersten Kugel
$B = (17|6)$ ... Auflagepunkt der zweiten Kugel
$Z = (4|1)$ ... Auflagepunkt der Zielkugel

1) Berechnen Sie die Länge der Strecke BZ.

Während des Spiels bewegt sich die erste Kugel entlang der Strecke AB 3 cm in Richtung B.

2) Berechnen Sie die Koordinaten der neuen Position des Auflagepunkts der ersten Kugel.

c) Die Zeit, die benötigt wird, um sich vor einem Wurf zu konzentrieren, nennt man Konzentrationszeit.
Im nachstehenden Boxplot sind die Konzentrationszeiten von Emma bei mehreren Würfen zusammengefasst.



1) Lesen Sie aus dem Boxplot den Interquartilsabstand der Konzentrationszeiten von Emma ab.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Abwurfhöhe beträgt 1,1 m.

a2) $f(x) = 0$ *oder* $-0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -1{,}241...)$
$x_2 = 9{,}239...$

Die Wurfweite w beträgt rund 9,24 m.

a3) $\alpha = |\arctan(f'(9{,}239...))| = 45{,}1...°$

Der Aufprallwinkel α liegt also nicht im gegebenen Intervall.

b1) $\overline{BZ} = \sqrt{13^2 + 5^2} = 13{,}92...$

Die Länge der Strecke BZ beträgt rund 13,9 cm.

b2) Ansatz: $A_{\text{neu}} = A + 3 \cdot \overrightarrow{AB}_0$ *oder* $\overrightarrow{OA}_{\text{neu}} = \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{AB}_0$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}$

$\overrightarrow{AB}_0 = \frac{1}{\sqrt{241}} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$

$A_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{241}} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}89... \\ 9{,}22... \end{pmatrix}$

Der neue Auflagepunkt der ersten Kugel hat gerundet die Koordinaten $(4{,}9\,|\,9{,}2)$.

c1) Interquartilsabstand: 4 s

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl 1,1 im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wurfweite w
a3) 1 × D: für die richtige Überprüfung mithilfe der Differenzialrechnung
b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge der Strecke BZ
b2) 1 × A: für den richtigen Ansatz mithilfe des Einheitsvektors
1 × B2: für die richtige Berechnung der Koordinaten
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen des Interquartilsabstands

Lauftraining*

Aufgabennummer: B_449

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Anna, Beate und Clara bereiten sich auf einen Laufwettbewerb vor. Dabei verfolgen sie unterschiedliche Trainingspläne.

a) Anna und Beate überlegen sich folgende Trainingspläne:

		Trainingstag			
		1	2	3	4
Länge der Trainingsstrecke in km	Anna	1,5	1,65	1,815	
	Beate	1,5	2	2,5	

1) Zeigen Sie, dass die Längen der Trainingsstrecken von Anna an den ersten 3 Tagen eine geometrische Folge bilden.
2) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf.

Die Längen der Trainingsstrecken von Beate an den ersten 3 Tagen bilden eine arithmetische Folge.

3) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf.

4) Ergänzen Sie unter Verwendung der jeweiligen Bildungsgesetze die fehlenden Werte in der letzten Spalte der obigen Tabelle.

b) Clara berechnet die Längen ihrer Trainingsstrecken folgendermaßen:

$c_n = 2{,}75 + 0{,}125 \cdot n$

n … Trainingstag
c_n … Länge der Trainingsstrecke am n-ten Tag in km

1) Berechnen Sie, am wievielten Trainingstag Claras Trainingsstrecke eine Länge von 8 km hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{1{,}65}{1{,}5} = 1{,}1 \quad \frac{1{,}815}{1{,}65} = 1{,}1$

Es handelt sich um eine geometrische Folge, da die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder der Folge gleich sind.

a2) Anna: $a_1 = 1{,}5 \quad a_{n+1} = 1{,}1 \cdot a_n$

a3) Beate: $b_1 = 1{,}5 \quad b_{n+1} = b_n + 0{,}5$

a4) Tabellenwert für Anna: 1,9965
Tabellenwert für Beate: 3

b1) $8 = 2{,}75 + 0{,}125 \cdot n \quad \Rightarrow \quad n = 42$

Am 42. Trainingstag läuft Clara eine Strecke von 8 km.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für den richtigen Nachweis
a2) 1 × A1: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes für Annas Trainingsstrecken
a3) 1 × A2: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes für Beates Trainingsstrecken
a4) 1 × A3: für das richtige Ergänzen der fehlenden Tabellenwerte
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung

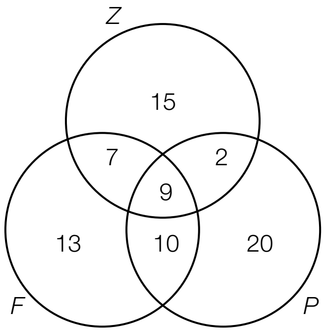
Studienabschlüsse*

Aufgabennummer: B_450

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Mehrere Personen wurden befragt, warum sie ihr Studium nicht abgeschlossen haben. Zur Auswahl standen folgende 3 Gründe: „Zeitprobleme", „private Gründe" und „fachliche Defizite". Mehrfachnennungen waren möglich.

Die Ergebnisse der Befragung von 76 Personen sind im nachstehenden Venn-Diagramm dargestellt.

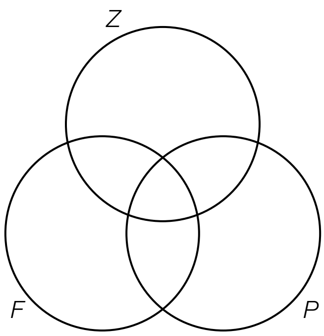


Z ... Menge aller Personen, die Zeitprobleme angegeben haben
P ... Menge aller Personen, die private Gründe angegeben haben
F ... Menge aller Personen, die fachliche Defizite angegeben haben

1) Beschreiben Sie die Menge $(F \cap Z) \setminus P$ im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Ermitteln Sie, wie viele Personen genau 1 der 3 Gründe angegeben haben.

3) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Venn-Diagramm die Menge derjenigen Personen, die sowohl Zeitprobleme als auch private Gründe als auch fachliche Defizite angegeben haben.



* ehemalige Klausuraufgabe

b) Folgende Tabelle gibt die jeweilige Anzahl der Studienabschlüsse an öffentlichen Universitäten in Österreich in den Jahren 2007 bis 2014 an:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Anzahl der Studienabschlüsse an öffentlichen Universitäten	22121	23910	27232	27926	31115	34460	37312	34300

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Bildung in Zahlen 2014/15. Tabellenband.* Wien: Statistik Austria 2016, S. 320.

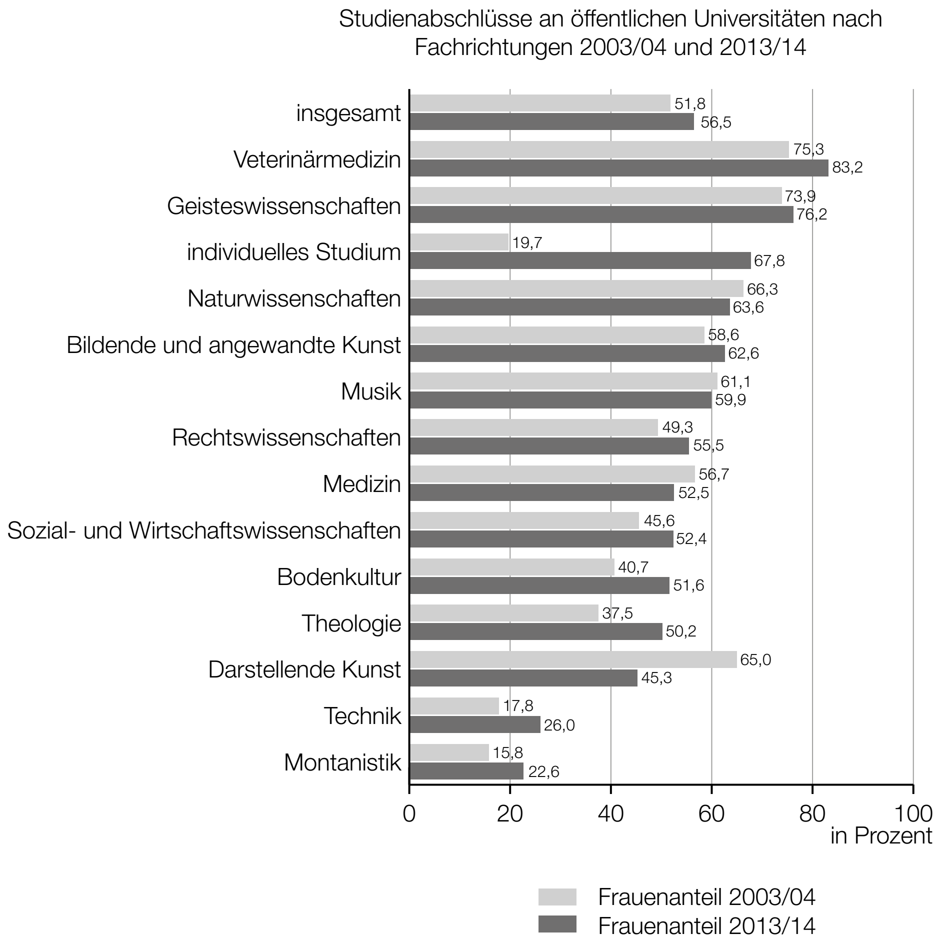
Jemand vermutet, dass sich die Anzahl der Studienabschlüsse in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch eine lineare Funktion beschreiben lässt.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die Regressionsfunktion ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung der Anzahl der Studienabschlüsse zu beschreiben.

3) Ermitteln Sie, mit wie vielen Studienabschlüssen gemäß diesem Modell im Jahr 2020 zu rechnen ist.

c) Folgendes Diagramm zeigt den Frauenanteil bei den Studienabschlüssen an öffentlichen Universitäten in Österreich für zwei verschiedene Studienjahre:



Quelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/soziales/gender-statistik/bildung/index.html [14.02.2017] (adaptiert).

1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm ab, in welchen Fachrichtungen der Frauenanteil im Studienjahr 2013/14 geringer als im Studienjahr 2003/04 war.

Jemand behauptet:
„Im Bereich *individuelles Studium* ist der Frauenanteil in den dargestellten Studienjahren von 19,7 % auf 67,8 % gestiegen. Das heißt, dass 2013/14 viel mehr Frauen als 2003/04 ein *individuelles Studium* abgeschlossen haben."

2) Erklären Sie, warum diese Argumentation unzulässig ist.

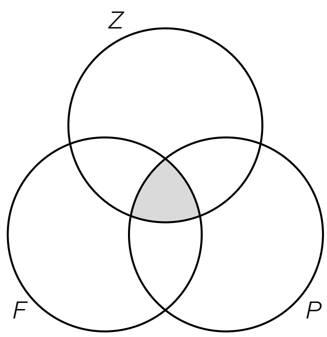
Möglicher Lösungsweg

a1) $(F \cap Z)\backslash P$ beschreibt die Menge aller Personen, die sowohl Zeitprobleme als auch fachliche Defizite, jedoch keine privaten Probleme als Gründe für das Nichtabschließen des Studiums angeführt haben.

a2) $13 + 15 + 20 = 48$

48 Personen haben genau 1 der 3 Gründe angegeben.

a3)



b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 2\,109 \cdot t + 22\,416$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit ab 2007 in Jahren
$f(t)$ ... Anzahl der Studienabschlüsse zur Zeit t

b2) Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}957...$ liegt nahe bei 1 und lässt daher einen starken positiven linearen Zusammenhang vermuten.

b3) $f(13) = 49\,830{,}2...$

Gemäß diesem Modell ist im Jahr 2020 mit rund 49 830 Studienabschlüssen zu rechnen.

c1) In den Fachrichtungen *Naturwissenschaften*, *Musik*, *Medizin* und *Darstellende Kunst* war der Frauenanteil 2013/2014 geringer als 2003/2004.

c2) Ohne zu wissen, wie viele Personen in den beiden Jahren ein *individuelles Studium* insgesamt absolviert haben (Grundwerte), ist ein Rückschluss auf die Anzahl der Frauen nicht möglich.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C1: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × C2: für das richtige Ermitteln der Anzahl der Personen
a3) 1 × C3: für das richtige Kennzeichnen der Menge im Venn-Diagramm
b1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
b2) 1 × D: für das richtige Beurteilen mithilfe des Korrelationskoeffizienten
b3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Anzahl der Studienabschlüsse
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen
c2) 1 × D: für die richtige Erklärung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bahnsteige (2)*

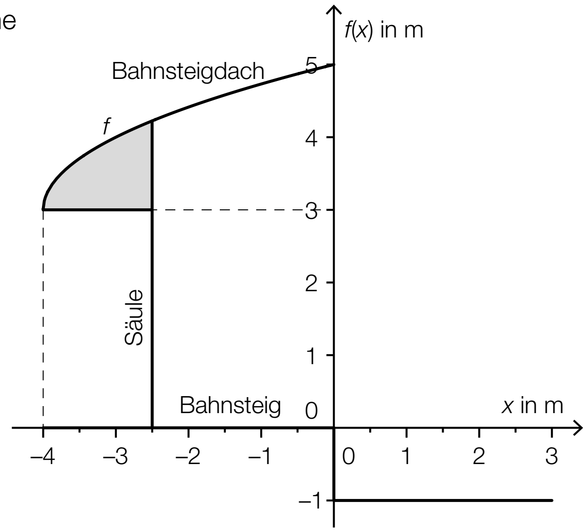
Aufgabennummer: B_451

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Auf dem Bahnhof Linz wird eine Betonkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs verwendet.

Bildquelle: BMBWF

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine vereinfachte Darstellung der Betonkonstruktion.

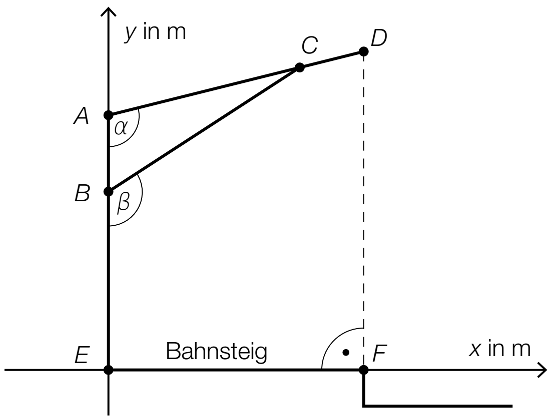


1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche.

$A =$ ______________________

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Skizze ist eine Holzkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe von $\overline{AE}$, $\overline{AD}$ und α eine Formel zur Berechnung von $\overline{DF}$.

$\overline{DF}$ = ____

Es gilt: $A = (0|4)$, $B = (0|2{,}8)$, $\alpha = 104°$ und $\beta = 123°$

2) Berechnen Sie die Länge $\overline{BC}$.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \int_{-4}^{-2{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x - 3 \cdot 1{,}5$

b1) $\overline{DF} = \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \sin(\alpha - 90°)$

b2) $\overline{AB} = 1{,}2$ m

$$\frac{1{,}2}{\sin(19°)} = \frac{\overline{BC}}{\sin(104°)} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = 3{,}576\ldots \text{ m} \approx 3{,}58 \text{ m}$$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Länge $\overline{BC}$

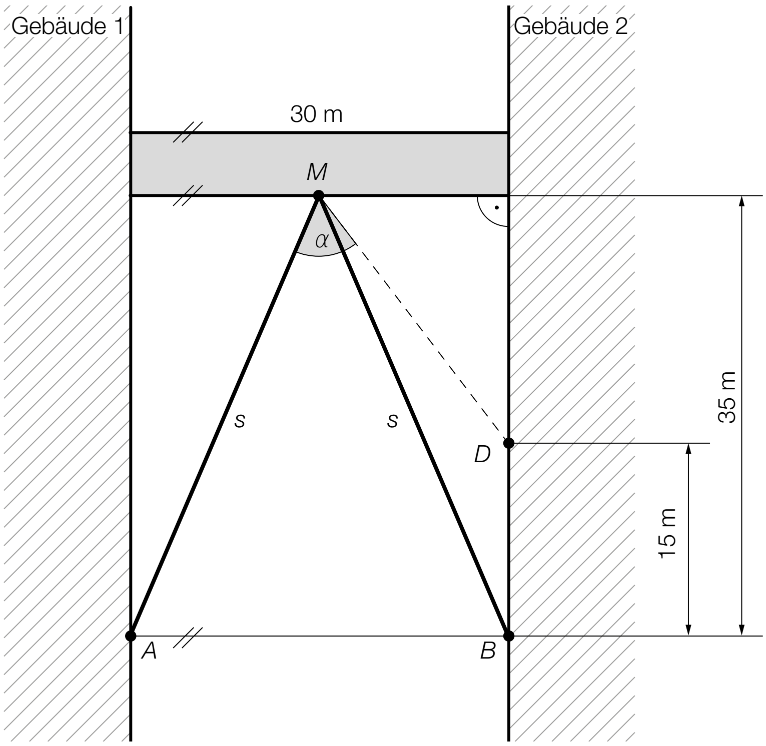
Brücken zwischen Gebäuden (2)*

Aufgabennummer: B_466

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Gebäude können durch Brücken verbunden werden.

a) Eine 30 m lange Brücke wird im Punkt M auf zwei Stützen der Länge s gelagert (siehe nachstehende Abbildung).



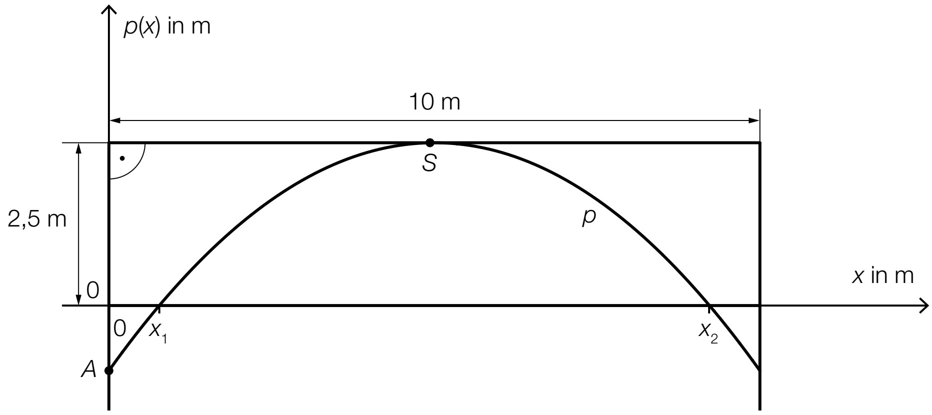
1) Berechnen Sie die Länge s einer Stütze.

Die Stütze MB soll durch eine neue Stütze MD ersetzt werden.

2) Berechnen Sie den Winkel α.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine Brücke soll zwei Gebäude verbinden. Die Brücke mit 10 m Länge wird auf einem parabelförmigen Bogen gelagert, der als Graph einer Funktion p mit $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ modelliert werden kann. Der Bogen wird im Punkt $A = (0|-1)$ an der linken Gebäudemauer befestigt, der Scheitel ist im Punkt $S = (5|2{,}5)$ (siehe nachstehende Abbildung).



1) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion p.

2) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mit dem folgenden Ausdruck berechnet werden kann:
$10 \cdot 2{,}5 - \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,\mathrm{d}x$

Im Punkt A wird die Tangente an den Graphen der Funktion p gelegt. Diese Tangente schließt mit der senkrechten Achse den spitzen Winkel β ein.

3) Kreuzen Sie die zutreffende Formel zur Berechnung des Winkels β an. *[1 aus 5]*

$\beta = 90° - \arctan(p'(0))$	☐
$\beta = \arctan\left(\frac{5}{3{,}5}\right)$	☐
$\beta = p'(0)$	☐
$\beta = \tan\left(\frac{5}{p(0)}\right)$	☐
$\beta = \tan(p'(0))$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $s = \sqrt{15^2 + 35^2} = \sqrt{1\,450} = 38{,}078...$

Die Länge einer Stütze beträgt rund 38,08 m.

a2) Ansatz: $\overline{AD}^2 = s^2 + \overline{MD}^2 - 2 \cdot s \cdot \overline{MD} \cdot \cos(\alpha)$

$\overline{AD} = \sqrt{15^2 + 30^2} = \sqrt{1\,125}$
$\overline{MD} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25$

$1\,125 = 1\,450 + 625 - 2 \cdot \sqrt{1\,450} \cdot 25 \cdot \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60{,}06...°$

Der Winkel beträgt rund 60,1°.

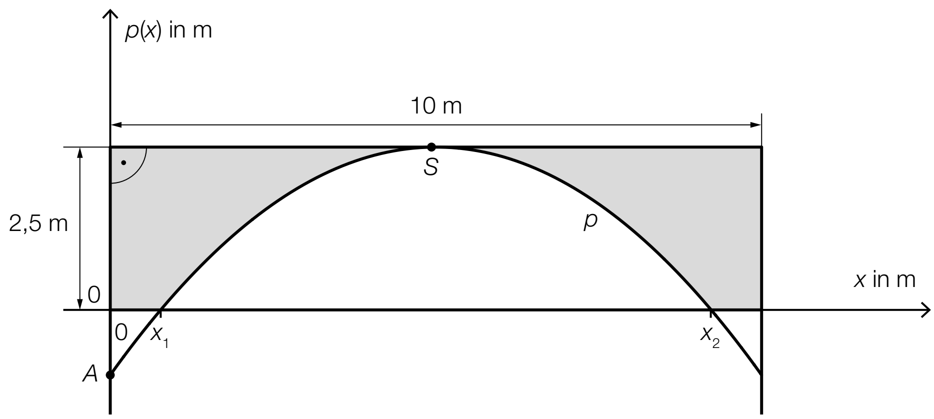
b1) $p(0) = -1$
$p(5) = 2{,}5$
$p(10) = -1$

oder:

$c = -1$
$a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 2{,}5$
$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = -1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{7}{50}, \; b = \frac{7}{5}, \; c = -1$

b2)



b3)

$\beta = 90° - \arctan(p'(0))$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge s
a2) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Winkels α
1 × B2: für die richtige Berechnung des Winkels α
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten
b2) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen der Fläche
b3) 1 × C2: für das richtige Ankreuzen

Internet (2)*

Aufgabennummer: B_467

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) In der nachstehenden Tabelle sind Daten zur weltweiten Nutzung des Internets angegeben.

Zeit t seit dem Ende des Jahres 1995 in Jahren	1	2	3	4	5
Anzahl der Internetnutzer/innen in Millionen	16	36	70	147	248

Datenquelle: https://www.internetworldstats.com/emarketing.htm [27.08.2019].

Die Anzahl der Internetnutzer/innen in Millionen soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung dieser Exponentialfunktion f in der Form $f(t) = a \cdot b^t$.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Im Jahr 2012 betrug die weltweit über das Internet übertragene Datenmenge 333,6 Millionen Terabyte.

1) Tragen Sie die fehlende Zahl in Gleitkommadarstellung der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ in der nachstehenden Umwandlung ein.

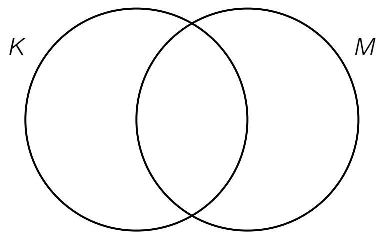
333,6 Millionen Terabyte = ______________________ Byte

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine Verbindung mit dem Internet erfolgt über ein sogenanntes *Modem*. Dieses kann eine Verbindung mit dem Internet kabelgebunden oder über ein Mobilfunknetz herstellen.

Ein bestimmtes Modem kann eine Verbindung mit dem Internet nur kabelgebunden und nicht über ein Mobilfunknetz herstellen.

1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Mengendiagramm denjenigen Bereich, in dem dieses Modem enthalten ist.



K ... Menge aller Modems, die eine Verbindung mit dem Internet kabelgebunden herstellen können
M ... Menge aller Modems, die eine Verbindung mit dem Internet über ein Mobilfunknetz herstellen können

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 8{,}63 \cdot 1{,}99^t$ *(Parameter gerundet)*

t ... Zeit seit dem Ende des Jahres 1995 in Jahren
$f(t)$ ... Anzahl der Internetnutzer/innen zur Zeit t in Millionen

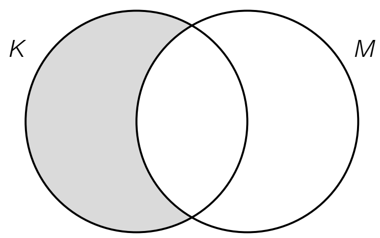
Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Parameter bei der Ermittlung der Regressionsfunktion erhalten.

a2) Der Parameter a gibt an, wie viele Millionen Menschen gemäß diesem Modell am Ende des Jahres 1995 (zur Zeit $t = 0$) das Internet genutzt haben.

b1) 333,6 Millionen Terabyte = $3{,}336 \cdot 10^{20}$ Byte

Auch eine Verwendung des Zusammenhangs 1 Terabyte = $1\,024^4$ Byte ist als richtig zu werten.

c1)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Funktionsgleichung mittels exponentieller Regression
a2) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang
b1) 1 × A: für das richtige Eintragen der Zahl
c1) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Bereichs

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

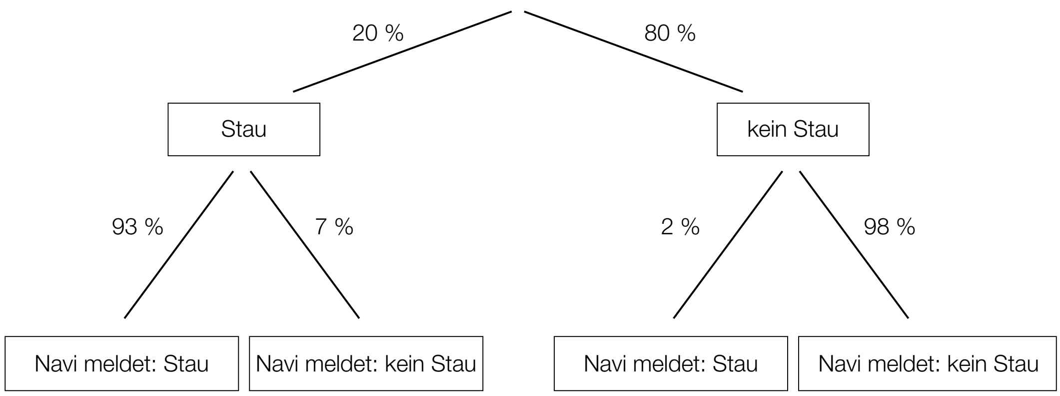
Navigationsgeräte*

Aufgabennummer: B_465

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Moderne Navigationsgeräte (Navis) haben eine Reihe von Zusatzfunktionen.

a) Für einen bestimmten Straßenabschnitt ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Stau auftritt, konstant.
Die Meldung „Stau" oder „kein Stau" am Navi ist jedoch nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit richtig. Dieser Sachverhalt ist im nachstehenden Baumdiagramm dargestellt.



1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Fahrt auf diesem Straßenabschnitt ein Stau auftritt und dieser vom Navi gemeldet wird.

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird: $P(E) = 0{,}2 \cdot 0{,}93 + 0{,}8 \cdot 0{,}02$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Entlang einer 45 km langen Teststrecke auf einer Autobahn sind insgesamt 8 Radarboxen in gleichen Abständen zur Überwachung der Geschwindigkeit aufgestellt. Eine dieser Radarboxen steht am Anfang und eine am Ende der Strecke.

Die Abstände der Radarboxen vom Streckenanfang lassen sich durch eine Folge $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ modellieren.

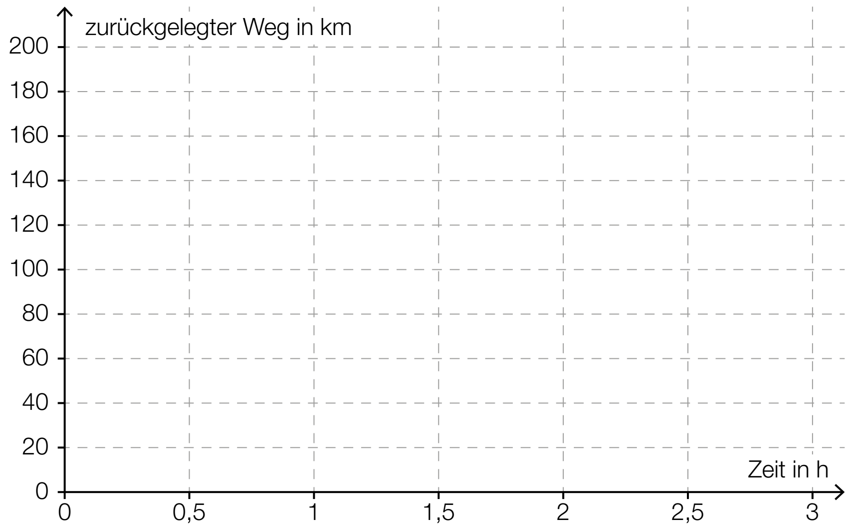
1) Geben Sie an, welche Art von Folge hierfür in Frage kommt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
2) Stellen Sie für diese Folge ein explizites Bildungsgesetz auf.

Die 8 Radarboxen werden unabhängig voneinander mit der Wahrscheinlichkeit 0,95 vom Navi erkannt.

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Radarboxen auf dieser Strecke nicht erkannt werden.

c) Entlang einer 200 km langen Strecke fährt jemand die erste Hälfte des Weges mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h und die zweite Hälfte des Weges mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h.
Die Geschwindigkeiten auf den beiden Weghälften werden dabei modellhaft als jeweils konstant angenommen.

1) Stellen Sie diese Fahrt im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm dar.



Jemand behauptet, dass die mittlere Geschwindigkeit für die gesamte Fahrt 75 km/h beträgt.

2) Zeigen Sie, dass diese Behauptung falsch ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) P(„Stau tritt auf und wird vom Navi gemeldet") = $0{,}2 \cdot 0{,}93 = 0{,}186$

a2) E ... das Navi meldet einen Stau auf diesem Straßenabschnitt

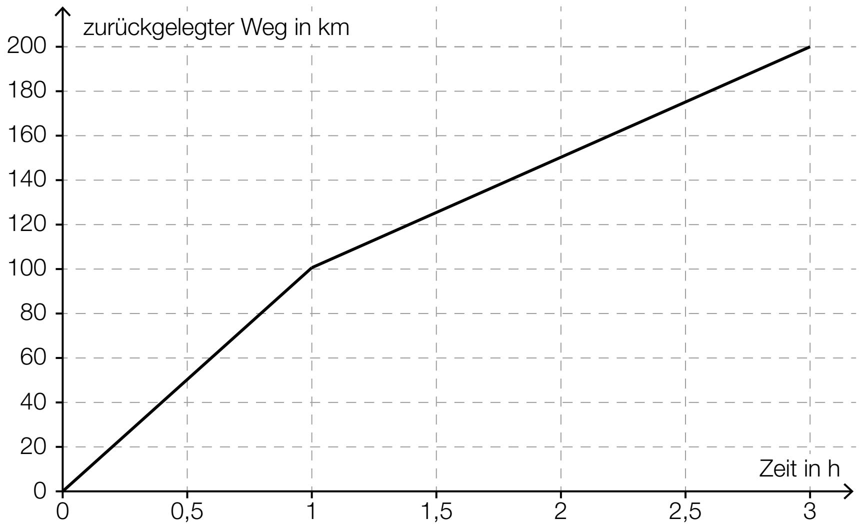
b1) Da die Abstände zwischen den Radarboxen gleich groß sind, lassen sich ihre Abstände vom Streckenanfang als arithmetische Folge modellieren.

b2) $a_n = \frac{45}{7} \cdot (n - 1)$

b3) Binomialverteilung mit $p = 0{,}05$, $n = 8$:
X ... Anzahl der nicht erkannten Radarboxen

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X = 2) = 0{,}0514...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 5,1 %.

c1)



c2) $\frac{200 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 66{,}66... \text{ km/h} \neq 75 \text{ km/h}$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 66,7 km/h, daher ist die Behauptung falsch.

Lösungsschlüssel

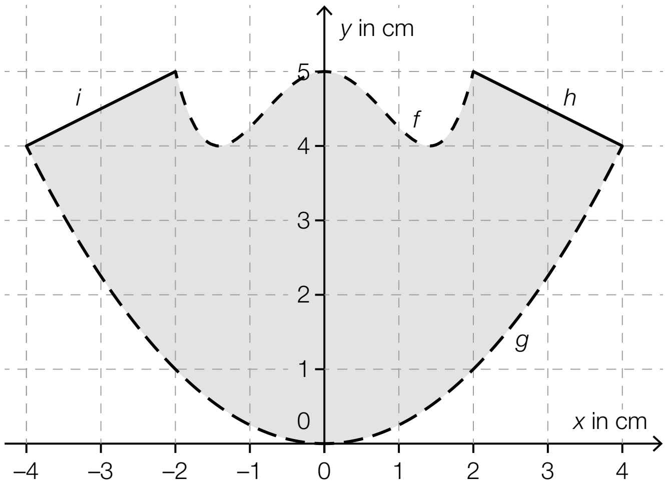
a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
a2) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang
b1) 1 × D: für das richtige Angeben und die richtige Begründung
b2) 1 × A: für das richtige Aufstellen des expliziten Bildungsgesetzes
b3) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c1) 1 × A: für das richtige Darstellen der Fahrt im Weg-Zeit-Diagramm
c2) 1 × D: für den richtigen Nachweis

Skulptur*

Aufgabennummer: B_464

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Skulptur wird von oben betrachtet. Die Deckfläche ist waagrecht und eben. Sie ist in der nachstehenden Abbildung in einem Koordinatensystem dargestellt. Dabei ist die Deckfläche symmetrisch zur *y*-Achse und wird durch die Graphen der Funktionen *f*, *g*, *h* und *i* begrenzt.



a) 1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts *A* der grau markierten Deckfläche.

$A =$ ______________________________

b) Für die Funktion *f* gilt:

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$

Es gilt: $f'(1) = -1$

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten *a*, *b* und *c*.

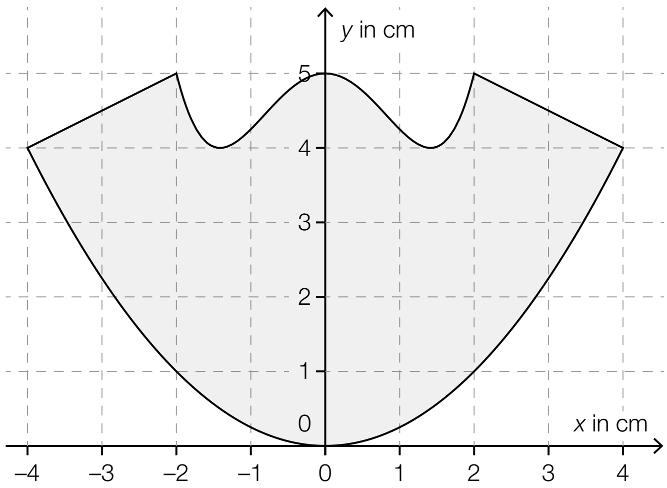
2) Berechnen Sie die Koeffizienten *a*, *b* und *c*.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Auf die Deckfläche der Skulptur soll ein Viereck nach bestimmten Vorgaben gemalt werden.

Ausgehend vom Punkt (0|3) wird der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Pfeil aufgezeichnet.
Vom Endpunkt dieses Pfeils ausgehend wird nun der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ als Pfeil aufgezeichnet.

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie oben beschrieben als Pfeile ein.



Der Vektor $\vec{c}$ entsteht durch Spiegelung des Vektors $\vec{a}$ an der y-Achse.

2) Ergänzen Sie die Koordinaten dieses Vektors:

$\vec{c} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$

Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie oben beschrieben als Pfeile eingezeichnet und spiegelt man diese Pfeile an der y-Achse, so entsteht das Viereck.

3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = 2 \cdot \left(\int_0^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (h(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\right)$

oder:

$A = \int_{-4}^{-2} (i(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (h(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$

b1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$

$f(0) = 5$
$f(2) = 5$
$f'(1) = -1$

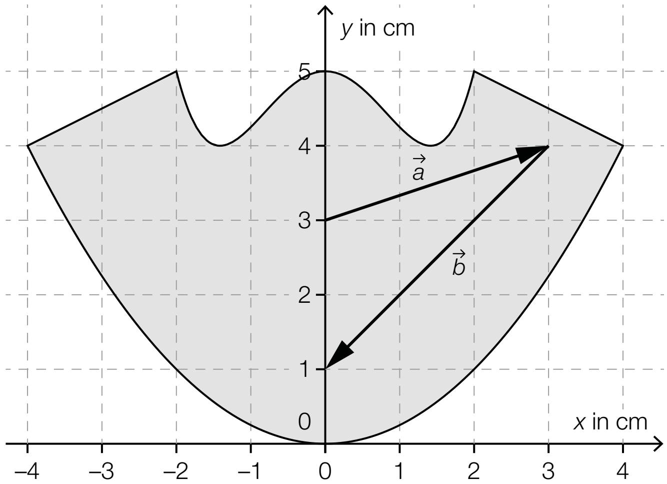
oder:

$c = 5$
$16 \cdot a + 4 \cdot b + c = 5$
$4 \cdot a + 2 \cdot b = -1$

Die Verwendung anderer Punkte auf dem Graphen von f *für das Erstellen des Gleichungssystems ist ebenfalls als richtig zu werten.*

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}25$
$b = -1$
$c = 5$

c1)



c2) $\vec{c} = \begin{pmatrix} \boxed{-3} \\ \boxed{1} \end{pmatrix}$

c3) $A = 18 - 3 - 9 = 6$
Der Flächeninhalt beträgt 6 cm^2.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von A
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten
c1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der Vektoren als Pfeile
c2) 1 × C: für das richtige Ergänzen der Koordinaten des gespiegelten Vektors
c3) 1 × B: für das richtige Bestimmen des Flächeninhalts

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Goldener Schnitt

Aufgabennummer: B_291

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Strecke (vgl. Abbildung 1) wird in die zwei Teile a und b geteilt ($a > b$).
Gilt $a : b = (a + b) : a$, dann bezeichnet man das Teilungsverhältnis $\phi = a : b$ als den *Goldenen Schnitt*.

Abbildung 1

a) – Zeigen Sie, dass für $b = 1$ gilt: $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Wenn man von einem Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, ein Quadrat A abtrennt (Abbildung 2), dann entspricht das Seitenverhältnis des verbleibenden Rechtecks B ebenfalls dem Goldenen Schnitt.

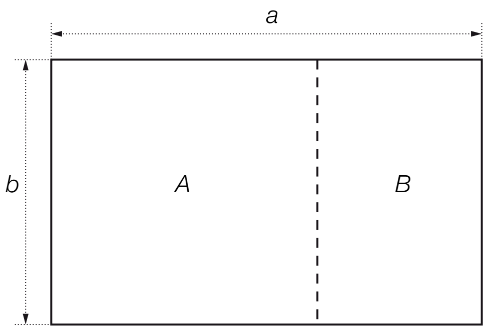


Abbildung 2

– Zeigen Sie diese Eigenschaft für den Fall $b = 1$.

b) Ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, wird als *Goldenes Rechteck* bezeichnet. In Abbildung 3 wird ein Goldenes Rechteck fortlaufend durch Abtrennung eines Quadrats geteilt. Anschließend wird in den einzelnen Quadraten ein Viertelkreis gezeichnet. Dadurch entsteht eine sogenannte *Goldene Spirale*.

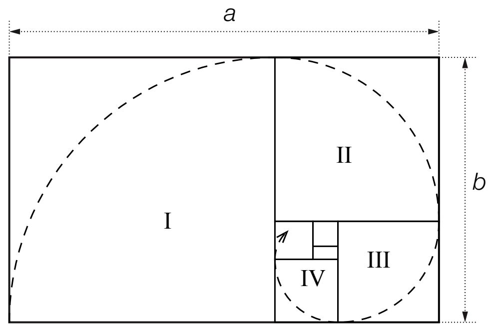


Abbildung 3

– Berechnen Sie die Länge dieser Spirale für die Quadrate I bis IV, wenn die Seitenlängen des Rechtecks $a = 144$ cm und $b = 89$ cm betragen.

c) Schon nach dem antiken Schönheitsideal gilt ein Mensch als wohlproportioniert, wenn die Höhe des Nabels die Körpergröße im Goldenen Schnitt teilt. In einer Bevölkerungsgruppe entsprechen 87 % diesem Ideal.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerungsgruppe mindestens 3 diesem Ideal entsprechen.

In einer anderen Bevölkerungsgruppe wurden die Daten von 5 Personen erhoben:

x = Höhe bis zum Nabel in cm	105	115	108	121	114
y = Körpergröße in cm	159	174	161	182	171

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

d) Das Seitenverhältnis eines rechteckigen digitalen Bilderrahmens mit einer Diagonale von $d = 10$ Zoll entspricht mit 1,6 in etwa dem Goldenen Schnitt.

– Berechnen Sie die Breite (= längere Rechteckseite) des Bildschirms in Zentimetern (1 Zoll = 2,54 cm).

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für $b = 1$ gilt:

$a : 1 = (a + 1) : a \;\Rightarrow\; a^2 = a + 1 \;\Rightarrow\; a^2 - a - 1 = 0$

$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Die zweite Lösung $a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ kann aufgrund der Voraussetzung $a > 1$ nicht auftreten.

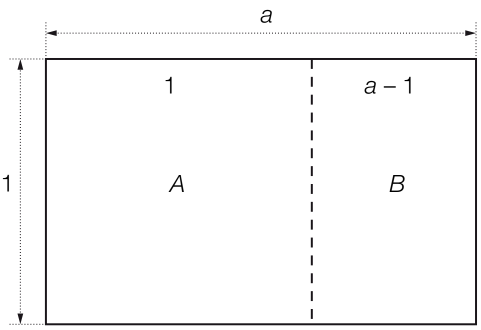
$a : 1 = \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Für das ursprüngliche Rechteck gilt:

$\frac{a}{1} = \frac{a + 1}{a} \;\Rightarrow a - 1 = \frac{1}{a}$

und durch den Kehrwert $1 : (a - 1) = a : 1$

Somit entspricht das Seitenverhältnis des Rechtecks B dem Goldenen Schnitt.



Alternativer Lösungsweg:

Im ursprünglichen Rechteck gilt: $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Das Seitenverhältnis des Rechtecks B entspricht genau dann dem Goldenen Schnitt, wenn gilt:

$\frac{1}{a - 1} = \frac{a}{1}$

$\frac{1}{a - 1} = \frac{a}{1} \;\Leftrightarrow\; 1 = (a - 1) \cdot a \;\Leftrightarrow\; a^2 - a - 1 = 0$

Diese Gleichung ist für $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ laut Voraussetzung erfüllt.

b) Radien der Viertelkreise: $r_{\mathrm{I}} = 89$, $r_{\mathrm{II}} = 144 - 89 = 55$, $r_{\mathrm{III}} = 89 - 55 = 34$, $r_{\mathrm{IV}} = 55 - 34 = 21$

Länge der Spirale: $\frac{\pi}{2} \cdot 89 + \frac{\pi}{2} \cdot 55 + \frac{\pi}{2} \cdot 34 + \frac{\pi}{2} \cdot 21 = 99{,}5 \cdot \pi \approx 312{,}59$ cm

c) Binomialverteilung mit $p = 0{,}87$ und $n = 5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9820\ldots \approx 98{,}2$ %

Ermitteln der Gleichung mittels Technologieeinsatz:

$y = 1{,}5064 \cdot x - 0{,}2163$ *(Parameter gerundet)*

d) $d = 25{,}4$ cm; $\frac{\text{Breite}}{\text{Höhe}} = \frac{b}{h} = 1{,}6 \Rightarrow h = \frac{b}{1{,}6}$

Pythagoras: $d^2 = b^2 + h^2 = b^2 + \left(\frac{b}{1{,}6}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{d^2}{1 + \left(\frac{1}{1{,}6}\right)^2}$

Breite $b = 21{,}539\ldots \approx 21{,}54$ cm

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: Elam, Kimberley: *Proportion und Komposition. Geometrie im Design.* New York: Princeton Architectural Press 2006.

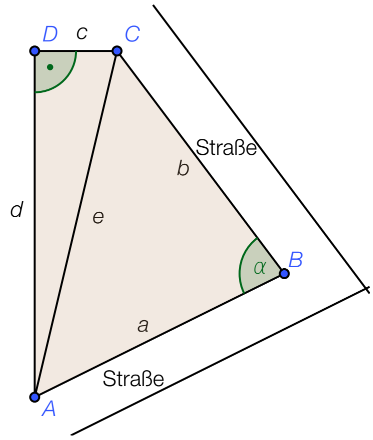
Vergnügungspark (4)

Aufgabennummer: B_293

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein neuer Vergnügungspark wird geplant.

a) Das zur Verfügung stehende viereckige Gelände wird an zwei Seiten durch die geradlinig verlaufenden Straßenstücke a = 486 m und b = 480 m begrenzt. Die beiden anderen Begrenzungslinien (c = 143 m und d) schließen einen rechten Winkel ein. Die Eckpunkte A und C des Geländes sind 621 m voneinander entfernt.

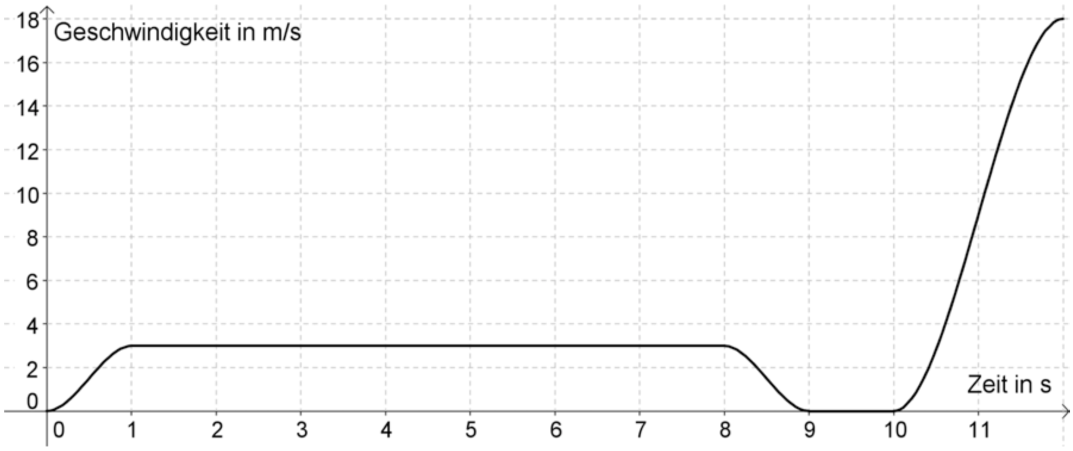


– Berechnen Sie den Winkel α, den die beiden Straßenstücke miteinander einschließen.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des gesamten Geländes unter Verwendung der gegebenen Größen.

A = ______________________________

b) Im Park wird eine Achterbahn gebaut. Das nachstehende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zeigt den Verlauf der Geschwindigkeit für die ersten 12 s der Fahrt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Zeitintervall [0; 9] im gegebenen Sachzusammenhang.

– Beschreiben Sie die Bedeutung der negativen Steigung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Zeitintervall [8; 9].

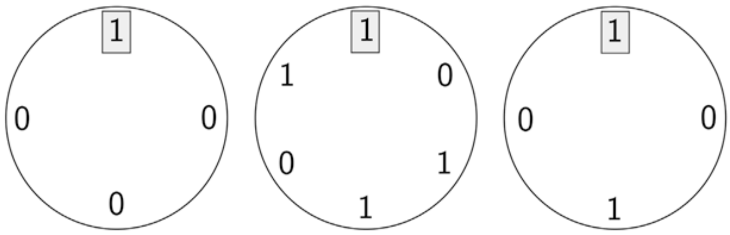
Im Zeitintervall [10; 12] kann der Verlauf der Geschwindigkeit durch die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -4{,}5 \cdot t^3 + 148{,}5 \cdot t^2 - 1\,620 \cdot t + 5\,850$

t ... Zeit in s mit $10 \leq t \leq 12$
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

– Berechnen Sie die maximale Beschleunigung in diesem Zeitintervall.

c) Im Vergnügungspark wird es einen Glücksspielautomaten mit den 3 nachstehend dargestellten Rädern geben.



Wirft man eine 1-Euro-Münze ein, drehen sich die Räder unabhängig voneinander und kommen nach einer kurzen Zeit zum Stillstand, wobei pro Rad genau eine zufällige Zahl sichtbar ist. Die Zufallsvariable X bezeichnet die Anzahl der sichtbaren Einsen auf den 3 Rädern.

– Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils die passende Berechnung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$P(X = 1)$	
$P(X \geq 1)$	

A	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
B	$1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
D	$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Erscheint auf allen 3 Rädern die Zahl 1, so ist der Gewinn G = € 5. Erscheint auf allen 3 Rädern die Zahl 0, so ist der Gewinn G = € 2. Bei allen anderen Resultaten verfällt der Einsatz, also G = € –1.

– Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn für diesen Glücksspielautomaten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\alpha = \arccos\left(\frac{e^2 - a^2 - b^2}{-2 \cdot a \cdot b}\right) \approx 80°$

$$A_1 = \frac{c \cdot d}{2}$$

$$A_2 = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{c \cdot d}{2} + \frac{a \cdot b \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

b) Die Fläche entspricht dem Weg, den die Bahn im Zeitintervall [0; 9] zurücklegt.

Die negative Steigung bedeutet eine Verzögerung der Geschwindigkeit.

$a(t) = v'(t) = -13{,}5 \cdot t^2 + 297 \cdot t - 1620$
$a'(t) = -27 \cdot t + 297 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 11$
$a(11) = 13{,}5\ \text{m/s}^2$

c)

$P(X = 1)$	C
$P(X \geq 1)$	B

A	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
B	$1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
C	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
D	$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

Gewinnerwartung =
$5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = € -0{,}125$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 4
c) mittel	c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

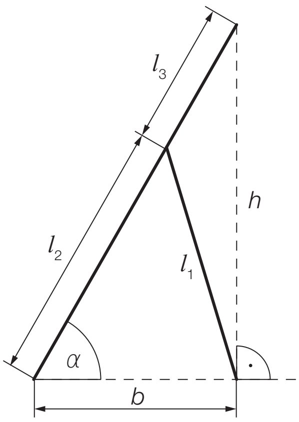
Hochstuhl für Kinder*

Aufgabennummer: B_476

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das nebenstehende Bild zeigt einen Hochstuhl für Kleinkinder.

In der nachstehenden Abbildung sind Teile des Hochstuhls schematisch dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe von l_1, l_2 und b eine Formel zur Berechnung von α.

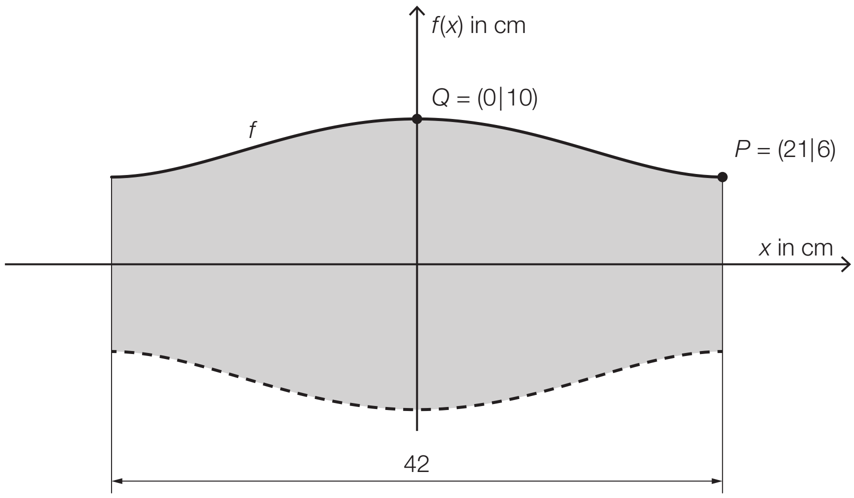
α = ______________________________

2) Markieren Sie in der obigen Abbildung die Winkel β und γ, für die gilt:

$$\frac{\sin(\beta)}{h} = \frac{\sin(\gamma)}{l_3}$$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist ein Modell der Rückenlehne eines bestimmten Hochstuhls dargestellt.



Die obere Begrenzungslinie lässt sich näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ beschreiben. Im Punkt P verläuft die Tangente an den Graphen der Funktion f waagrecht.

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu P und Q ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.
2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

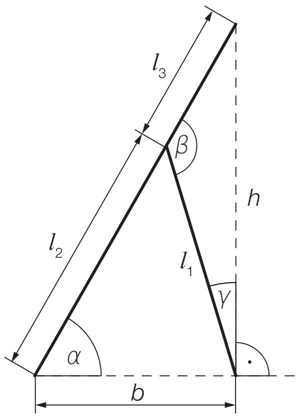
Die untere Begrenzungslinie entsteht durch Spiegelung des Graphen der Funktion f an der x-Achse.

3) Ermitteln Sie den Inhalt der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + l_2^2 - l_1^2}{2 \cdot b \cdot l_2}\right)$

a2)



b1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$

I: $f(0) = 10$

II: $f(21) = 6$

III: $f'(21) = 0$

oder:

I: $10 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c$

II: $6 = a \cdot 21^4 + b \cdot 21^2 + c$

III: $0 = 4 \cdot a \cdot 21^3 + 2 \cdot b \cdot 21$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{4}{194\,481} = 0{,}00002056...$

$b = -\frac{8}{441} = -0{,}01814...$

$c = 10$

b3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$2 \cdot \int_{-21}^{21} f(x)\,\mathrm{d}x = 683{,}2$

Der Flächeninhalt beträgt 683,2 cm².

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

a2) 1 × C: für das richtige Markieren der beiden Winkel

b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *P* und *Q*

1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung

b2) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Koeffizienten

b3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Inhalts der Fläche

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Weihnachtsmarkt*

Aufgabennummer: B_479

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Auf einem Weihnachtsmarkt werden Lebkuchensterne, Marmelade und Socken verkauft. Während des ersten Tages wurden 25 Personen bedient. Jede dieser Personen kaufte mindestens ein Produkt.

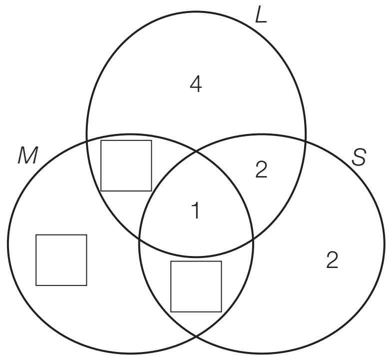
L ... Menge der Personen, die Lebkuchensterne kauften
M ... Menge der Personen, die Marmelade kauften
S ... Menge der Personen, die Socken kauften

6 Personen kauften sowohl Marmelade als auch Lebkuchensterne, aber keine Socken.
8 Personen kauften Socken.

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Venn-Diagramm durch Eintragen der fehlenden Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen.

2) Markieren Sie im nachstehenden Venn-Diagramm die Menge $(L \cap S) \setminus M$.

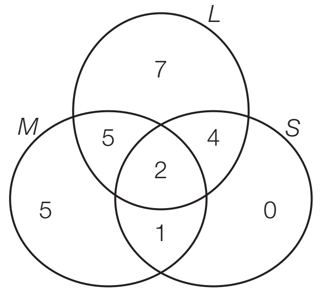
3) Beschreiben Sie die Menge $(L \cap S) \setminus M$ im gegebenen Sachzusammenhang.

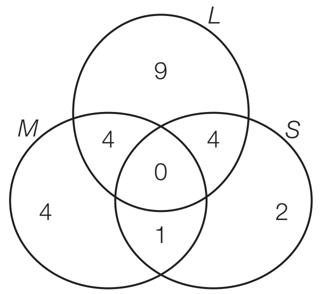


* ehemalige Klausuraufgabe

Auch für die folgenden Tage wurden Venn-Diagramme erstellt.

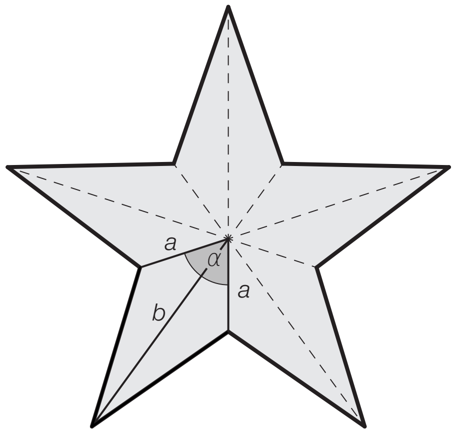
4) Ordnen Sie den beiden Venn-Diagrammen jeweils die passende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*





A	Es gab mehr Personen, die genau 2 verschiedene Produkte kauften, als Personen, die nur Lebkuchensterne kauften.
B	Es gab gleich viele Personen, die sowohl Socken als auch Lebkuchensterne kauften, wie Personen, die nur Marmelade kauften.
C	Es gab mehr Personen, die alle 3 Produkte kauften, als Personen, die nur Marmelade kauften.
D	Es gab weniger Personen, die sowohl Lebkuchensterne als auch Socken kauften, als Personen, die sowohl Marmelade als auch Socken kauften.

b) In der nachstehenden Abbildung ist eine Ausstechform für Lebkuchensterne dargestellt. Es handelt sich dabei um einen regelmäßigen 5-zackigen Stern.



Zur Berechnung der Länge einer Strecke x wird folgender Ausdruck aufgestellt:

$x = \sqrt{a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(\alpha)}$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Strecke x ein.

Für eine bestimmte Ausstechform gilt:

$a = 2$ cm
$b = 5$ cm
$\alpha = 72°$

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines mit dieser Ausstechform ausgestochenen Lebkuchensterns.

c) Aus einem Teig werden mit einer Ausstechform Lebkuchenherzen ausgestochen. Der Flächeninhalt eines solchen Lebkuchenherzens beträgt A (in cm²), die Dicke beträgt d (in cm). N Lebkuchenherzen haben insgesamt ein Volumen V (in cm³).

1) Erstellen Sie aus A, V und d eine Formel zur Berechnung von N.

N = ____

d) Jemand beobachtete auf dem Weihnachtsmarkt das Kaufverhalten und bestimmte die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

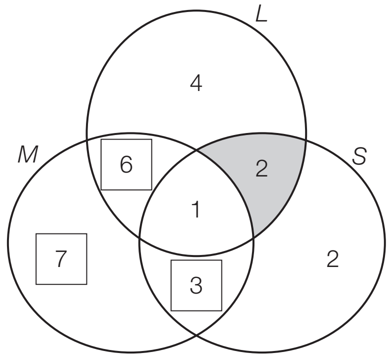
Anzahl *n* der Marmeladegläser	Wahrscheinlichkeit für den Kauf von *n* Marmeladegläsern pro Person
0	0,24
1	0,38
2	0,16
3	0,12
4	
≥ 5	0

1) Vervollständigen Sie die obige Tabelle durch Eintragen des fehlenden Wertes.

2) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der gekauften Marmeladegläser pro Person.

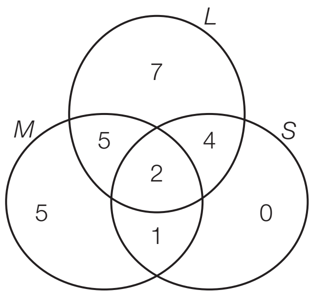
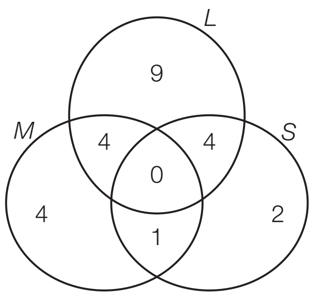
Möglicher Lösungsweg

a1 und a2)



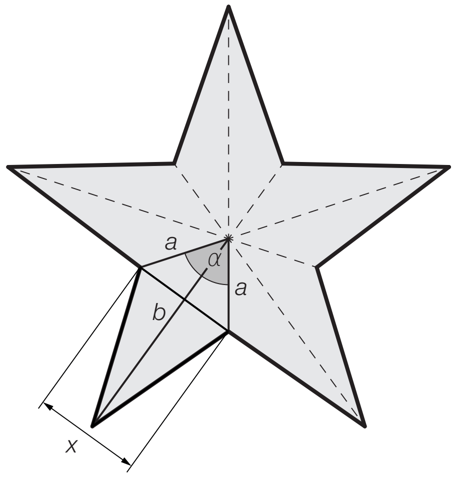
a3) $(L \cap S) \setminus M$ beschreibt die Menge aller Personen, die sowohl Lebkuchensterne als auch Socken, aber keine Marmelade kauften.

a4)

	A
	B

A	Es gab mehr Personen, die genau 2 verschiedene Produkte kauften, als Personen, die nur Lebkuchensterne kauften.
B	Es gab gleich viele Personen, die sowohl Socken als auch Lebkuchensterne kauften, wie Personen, die nur Marmelade kauften.
C	Es gab mehr Personen, die alle 3 Produkte kauften, als Personen, die nur Marmelade kauften.
D	Es gab weniger Personen, die sowohl Lebkuchensterne als auch Socken kauften, als Personen, die sowohl Marmelade als auch Socken kauften.

b1)



b2) $10 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 10 \cdot \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \sin(36°) = 29{,}38...$

Der Flächeninhalt beträgt rund 29,4 cm².

c1) $N = \frac{V}{d \cdot A}$

d1)

Anzahl *n* der Marmeladegläser	Wahrscheinlichkeit für den Kauf von *n* Marmeladegläsern pro Person
0	0,24
1	0,38
2	0,16
3	0,12
4	$\boxed{0{,}1}$
≥ 5	0

d2) $0 \cdot 0{,}24 + 1 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}16 + 3 \cdot 0{,}12 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}46$

Der Erwartungswert für die Anzahl der gekauften Marmeladegläser pro Person beträgt 1,46.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Venn-Diagramms
a2) 1 × C1: für das richtige Markieren
a3) 1 × C2: für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang
a4) 1 × C3: für das richtige Zuordnen
b1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen von x in einer beliebigen Zacke
b2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Flächeninhalts
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
d1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
d2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Erwartungswerts

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

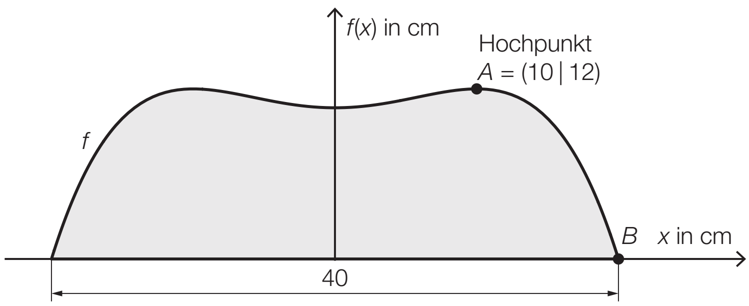
Stand-up-Paddling*

Aufgabennummer: B_480

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Stand-up-Paddling **ist eine Wassersportart, bei der eine Person aufrecht auf einem Board steht und paddelt.**

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Umriss des hinteren Teils eines Boards von oben betrachtet dargestellt. Die Begrenzungslinie kann näherungsweise durch eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ beschrieben werden.

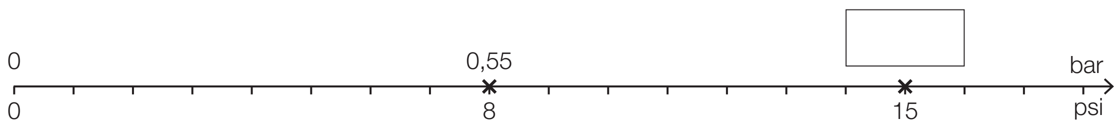


x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu A und B ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

b) Auf einer Luftpumpe für ein aufblasbares Board sind die folgenden zwei Einheiten für den Druck angegeben: pound-force per square inch (psi) und Bar (bar). Die nachstehende Skala zeigt den Zusammenhang zwischen den beiden Einheiten, wobei die Maßzahlen direkt proportional zueinander sind.



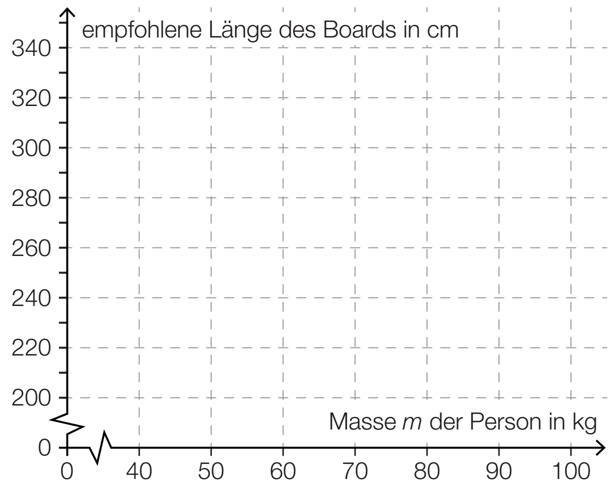
1) Vervollständigen Sie die obige Skala durch Eintragen des fehlenden Wertes.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Je nach Masse m der Person wird ein aufblasbares Board in einer der drei Größen S, M und L empfohlen.

	empfohlene Länge des Boards in cm	Masse m der Person in kg
Größe S	270	$m \leq 60$
Größe M	300	$60 < m < 80$
Größe L	320	$m \geq 80$

1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Zusammenhang zwischen der Masse m der Person und der empfohlenen Länge des Boards.



Boards in diesen drei Größen werden in einem Sportgeschäft verkauft. Die Preise und Verkaufszahlen in den Monaten Juli und August sind der nachstehenden Tabelle zu entnehmen.

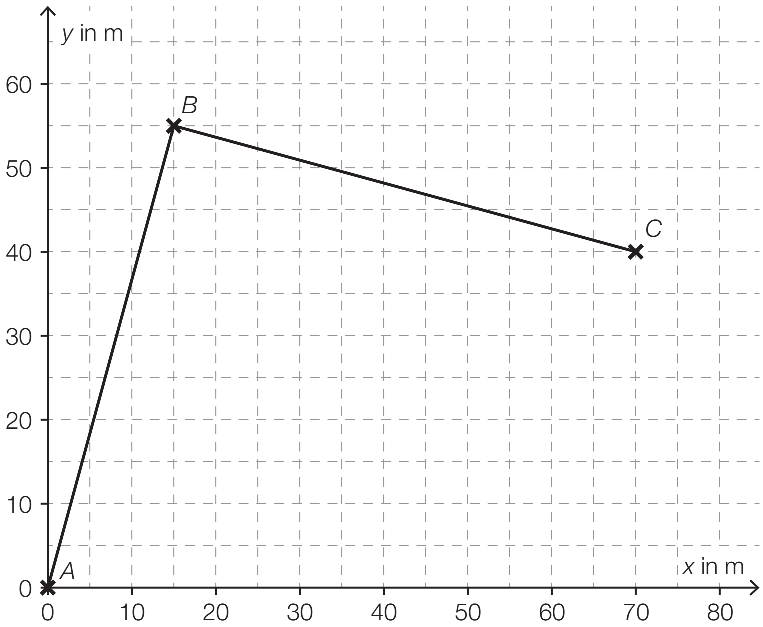
	Preis pro Board in €	Verkaufszahlen im Juli	Verkaufszahlen im August
Größe S	a	8	10
Größe M	b	20	13
Größe L	c	14	25

2) Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils die zutreffende Interpretation aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$a \cdot 18 + b \cdot 33 + c \cdot 39$	
$\frac{a \cdot 10 + b \cdot 13 + c \cdot 25}{48}$	

A	Der Ausdruck entspricht dem Anteil der Boards, die im August verkauft wurden, an der Gesamtzahl der verkauften Boards in den beiden Monaten.
B	Der Ausdruck entspricht den Gesamteinnahmen aus dem Verkauf dieser Boards in den beiden Monaten.
C	Der Ausdruck entspricht den durchschnittlichen Einnahmen pro Board im August.
D	Der Ausdruck entspricht den Gesamteinnahmen aus dem Verkauf dieser Boards im August.

d) In einem Hafen wurde eine Stand-up-Paddling-Trainingsstrecke mit Bojen markiert. Dabei muss man vom Start im Punkt *A* zum Punkt *B* und dann zum Punkt *C* paddeln (siehe nachstehende Abbildung).



1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung geometrisch.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Möglicher Lösungsweg

a1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$

I: $f(20) = 0$
II: $f(10) = 12$
III: $f'(10) = 0$

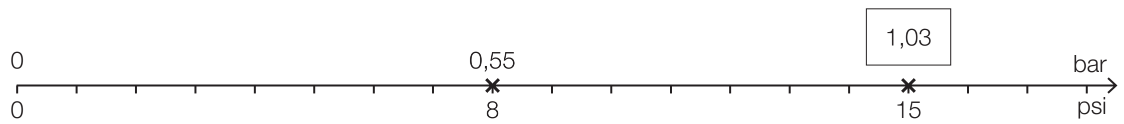
oder:

I: $a \cdot 20^4 + b \cdot 20^2 + c = 0$
II: $a \cdot 10^4 + b \cdot 10^2 + c = 12$
III: $4 \cdot a \cdot 10^3 + 2 \cdot b \cdot 10 = 0$

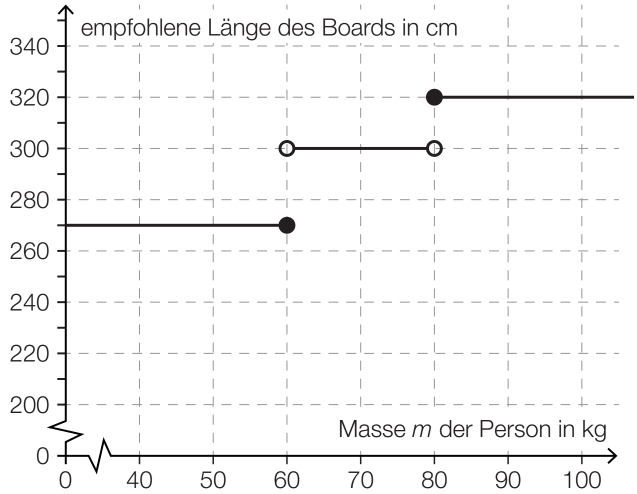
a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{7\,500} = -0{,}00013...$
$b = \frac{2}{75} = 0{,}026...$
$c = \frac{32}{3} = 10{,}66...$

b1)



c1)



Die Darstellung an den Sprungstellen ist für die Bepunktung nicht relevant.

c2)

$a \cdot 18 + b \cdot 33 + c \cdot 39$	B
$\frac{a \cdot 10 + b \cdot 13 + c \cdot 25}{48}$	C

A	Der Ausdruck entspricht dem Anteil der Boards, die im August verkauft wurden, an der Gesamtzahl der verkauften Boards in den beiden Monaten.
B	Der Ausdruck entspricht den Gesamteinnahmen aus dem Verkauf dieser Boards in den beiden Monaten.
C	Der Ausdruck entspricht den durchschnittlichen Einnahmen pro Board im August.
D	Der Ausdruck entspricht den Gesamteinnahmen aus dem Verkauf dieser Boards im August.

d1) Die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ stehen normal aufeinander.

oder:

Die Richtungsänderung im Punkt B beträgt 90°.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der beiden Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen der Koeffizienten
b1) 1 × B: für das richtige Vervollständigen der Skala
c1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen
c2) 1 × C: für das richtige Zuordnen
d1) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang

Sozialausgaben (1)*

Aufgabennummer: B_481

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Sozialausgaben sind Geldleistungen, die der Staat Personen in bestimmten Lebenslagen zur Verfügung stellt.

Die Sozialausgaben in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1990 bis 2015 sind in der nachstehenden Tabelle angegeben (Werte gerundet).

Jahr	Sozialausgaben in Milliarden Euro
1990	35,5
1995	51,0
2000	59,8
2005	71,2
2010	87,8
2015	102,5

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2017.* Wien: Verlag Österreich 2016, S. 224.

a) Die Sozialausgaben sollen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren ab 1990 näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion S_1.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von S_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Ermitteln Sie mithilfe von S_1 eine Prognose für die Sozialausgaben im Jahr 2020.

* ehemalige Klausuraufgabe

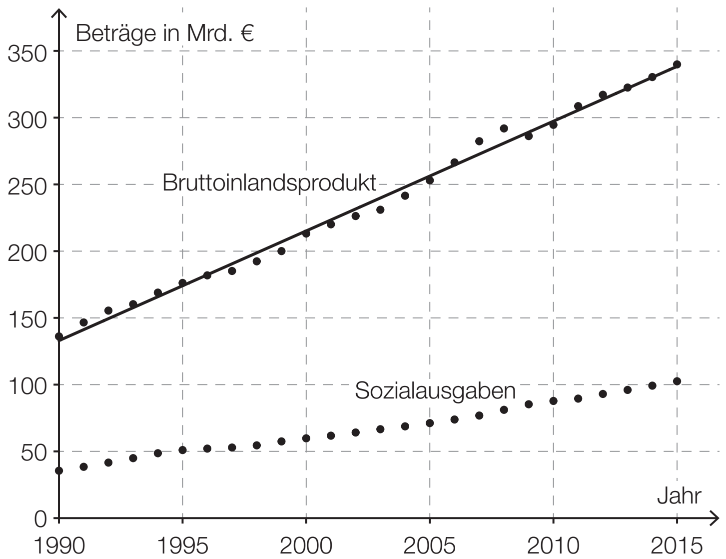
b) Eine Sozialwissenschaftlerin geht von der Annahme aus, dass die Sozialausgaben in Österreich seit dem Jahr 2015 jährlich um 2,5 % bezogen auf das jeweilige Vorjahr steigen.

Dieses Modell soll durch eine Funktion S_2 beschrieben werden.

t ... Zeit ab 2015 in Jahren
$S_2(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion S_2.
Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2015.

c) In der nachstehenden Abbildung sind das Bruttoinlandsprodukt und die Sozialausgaben Österreichs für den Zeitraum von 1990 bis 2015 dargestellt.
Weiters ist die Regressionsgerade für das Bruttoinlandsprodukt für diesen Zeitraum eingezeichnet.

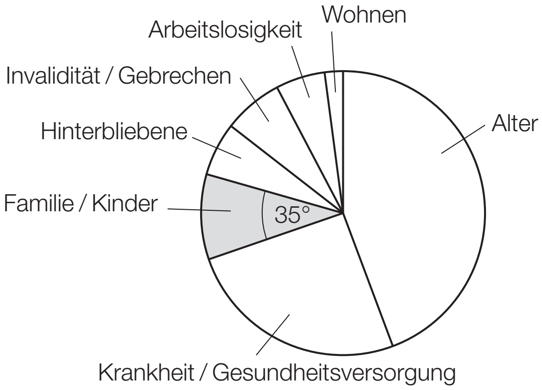


1) Ermitteln Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden für das Bruttoinlandsprodukt.

Die Sozialquote ist das Verhältnis der Sozialausgaben zum Bruttoinlandsprodukt.

2) Ermitteln Sie die Sozialquote für das Jahr 2015.

d) Die Verteilung der Sozialausgaben von insgesamt 102,5 Milliarden Euro für das Jahr 2015 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Bereich „Familie / Kinder" ist markiert.



1) Ermitteln Sie den Betrag, der im Jahr 2015 für den Bereich „Familie / Kinder" ausgegeben worden ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$S_1(t) = 2{,}61 \cdot t + 35{,}3$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ für das Jahr 1990)
$S_1(t)$ ... Sozialausgaben zur Zeit t in Milliarden Euro

a2) Gemäß diesem Modell steigen die Sozialausgaben um rund 2,61 Milliarden Euro pro Jahr.

a3) $S_1(30) = 2{,}61 \cdot 30 + 35{,}3 = 113{,}64...$
Für das Jahr 2020 sind Sozialausgaben in Höhe von rund 113,6 Milliarden Euro zu erwarten.

b1) $S_2(t) = 102{,}5 \cdot 1{,}025^t$

c1) Steigung $k \approx \frac{340 - 140}{25} = 8$
Toleranzbereich: [7; 9]

c2) Sozialquote für 2015: $\frac{102{,}5}{340} = 0{,}301...$
Toleranzbereich: [0,285; 0,320]

d1) $102{,}5 \cdot \frac{35°}{360°} = 9{,}9...$
Für den Bereich „Familie/Kinder" sind im Jahr 2015 rund 10 Mrd. Euro ausgegeben worden.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für das richtige Interpretieren des Wertes der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
c1) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Wertes der Steigung (Toleranzbereich: [7; 9])
c2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Sozialquote (Toleranzbereich: [0,285; 0,320])
d1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Betrags

Roborowski-Zwerghamster*

Aufgabennummer: B_177

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die durchschnittliche Körpermasse von Zwerghamstern wird bei der Geburt mit 1,2 g angegeben, nach 1 Woche mit 4,3 g, nach 2 Wochen mit 8,7 g, nach 3 Wochen mit 12,5 g und nach 4 Wochen mit 14,2 g.

Die zeitliche Entwicklung der durchschnittlichen Körpermasse von Zwerghamstern soll für die ersten 4 Lebenswochen näherungsweise durch eine Polynomfunktion 3. Grades f beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe von Regression eine Gleichung dieser Polynomfunktion 3. Grades f. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Geburt.

Zur Zeit t_1 gilt: $f''(t_1) = 0$ und $f'(t_1) > 0$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Stelle t_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

3,5 Wochen nach der Geburt hat ein Zwerghamster 62 % der durchschnittlichen Körpermasse eines ausgewachsenen Zwerghamsters.

3) Bestimmen Sie mithilfe der Funktion f, welche durchschnittliche Körpermasse ein ausgewachsener Zwerghamster gemäß diesem Modell hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die täglich aufgenommene Nahrungsmenge eines ausgewachsenen Zwerghamsters hängt von seiner Körpermasse ab.

Die folgende Formel gibt näherungsweise den Zusammenhang zwischen der täglich aufgenommenen Nahrungsmenge N und der Körpermasse M an:

$N = 1{,}422 \cdot \ln(M) - 1{,}78$

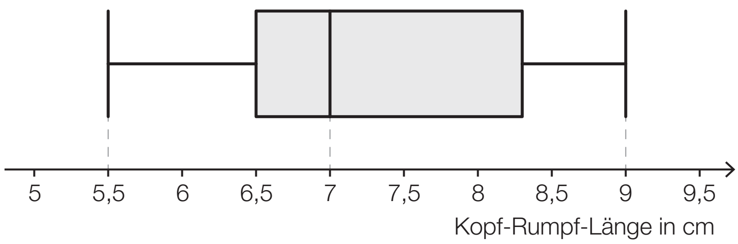
N … täglich aufgenommene Nahrungsmenge in g
M … Körpermasse in g

1) Berechnen Sie die täglich aufgenommene Nahrungsmenge bei einer Körpermasse von 30 g.

2) Formen Sie die Formel nach M um.

$M =$ ____

c) Im nachstehenden Boxplot sind die Kopf-Rumpf-Längen einer Zwerghamsterpopulation dargestellt.



1) Ermitteln Sie die Spannweite.

Jemand behauptet: „Es gibt in dieser Zwerghamsterpopulation mindestens 1 Zwerghamster mit einer Kopf-Rumpf-Länge von 7 cm.“

2) Argumentieren Sie, dass diese Behauptung nicht zwingend richtig sein muss.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = -0{,}28 \cdot t^3 + 1{,}46 \cdot t^2 + 1{,}95 \cdot t + 1{,}19$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in Wochen
$f(t)$ ... durchschnittliche Körpermasse zur Zeit t in g

a2) Zur Zeit t_1 tritt die größte Zunahme der durchschnittlichen Körpermasse auf.

a3) $f(3{,}5) = 13{,}73...$
$\frac{13{,}73...}{0{,}62} = 22{,}15...$
Ein ausgewachsener Zwerghamster hat gemäß diesem Modell eine durchschnittliche Körpermasse von rund 22,2 g.

b1) $N = 1{,}422 \cdot \ln(30) - 1{,}78 = 3{,}05...$
Ein 30 g schwerer Zwerghamster nimmt täglich rund 3,1 g Futter auf.

b2) $N + 1{,}78 = 1{,}422 \cdot \ln(M)$
$\frac{N + 1{,}78}{1{,}422} = \ln(M)$
$M = e^{\frac{N + 1{,}78}{1{,}422}}$

c1) $9 - 5{,}5 = 3{,}5$
Die Spannweite beträgt 3,5 cm.

c2) Wenn es sich bei dieser Zwerghamsterpopulation um eine gerade Anzahl an Zwerghamstern handelt, so wird der Median (7 cm) als arithmetisches Mittel der beiden mittleren Werte (einer geordneten Liste) berechnet und muss somit nicht bei einem der Zwerghamster auftreten.

Lösungsschlüssel

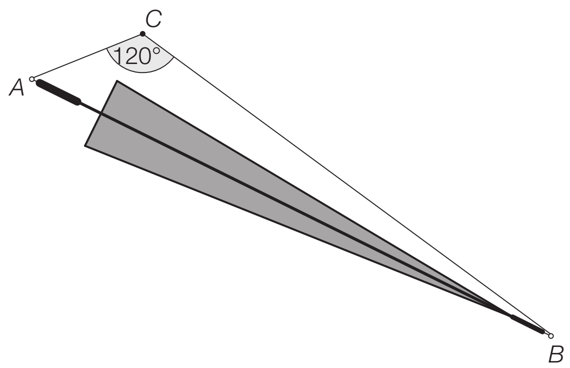
a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der kubischen Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für das richtige Bestimmen der durchschnittlichen Körpermasse eines ausgewachsenen Zwerghamsters
b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der täglich aufgenommenen Nahrungsmenge
b2) 1 × B2: für das richtige Umformen der Formel
c1) 1 x C: für das richtige Ermitteln der Spannweite
c2) 1 x D: für die richtige Argumentation

Regenschirm*

Aufgabennummer: B_181

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) An den Enden eines Regenschirms ist eine 110 cm lange Schnur befestigt. Der Schirm ist so an einen Haken *C* gehängt, dass die beiden Schnurabschnitte einen Winkel von 120° einschließen. Der Punkt *A* ist 25 cm weit vom Haken *C* entfernt. (Siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze.)



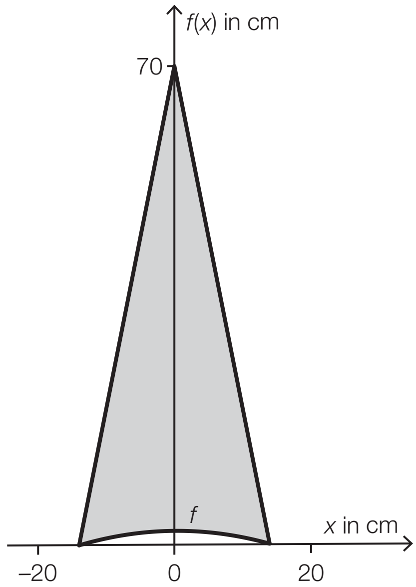
1) Berechnen Sie die Länge $\overline{AB}$ des Regenschirms.

Derselbe Regenschirm wird nun so aufgehängt, dass die beiden Schnurabschnitte einen rechten Winkel einschließen. Dadurch ändert sich die Länge der Schnurabschnitte.

2) Berechnen Sie, welche Entfernungen der Punkt *A* in diesem Fall vom Haken *C* haben kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Bespannung des Regenschirms besteht aus Flächenteilen, die jeweils durch 2 Geraden und den Graphen der Funktion f begrenzt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für die Funktion f gilt:

$f(x) = -\frac{1}{98} \cdot x^2 + 2$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

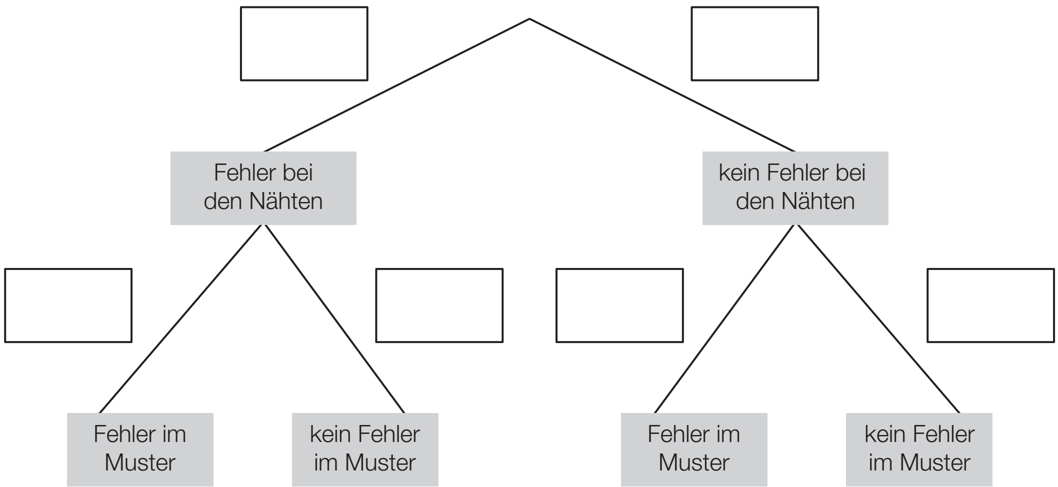
1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des grau markierten Flächenteils.

c) Für einen Kunsthandwerksmarkt werden Regenschirme angefertigt.

Bei der Herstellung der Regenschirme treten unabhängig voneinander 2 Arten von Fehlern auf. Man weiß aus Erfahrung:

- Bei durchschnittlich 1 von 5 Regenschirmen treten Fehler bei den Nähten auf.
- Bei durchschnittlich 30 % der Regenschirme treten Fehler im Muster auf.

1) Ergänzen Sie die Wahrscheinlichkeiten im nachstehenden Baumdiagramm.



Regenschirme, die beide Fehler aufweisen („III. Wahl“), werden um € 2 pro Stück verkauft.
Regenschirme, die nur einen von beiden Fehlern aufweisen („II. Wahl“), werden um € 15 pro Stück verkauft.
Regenschirme, die keinen Fehler aufweisen („I. Wahl“), werden um € 30 pro Stück verkauft.

2) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle.

	I. Wahl	II. Wahl	III. Wahl
Einnahmen pro Regenschirm in Euro	30	15	2
Wahrscheinlichkeit			

3) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Einnahmen pro verkauftem Regenschirm.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos(120°)} = \sqrt{25^2 + 85^2 - 2 \cdot 25 \cdot 85 \cdot \cos(120°)} = 99{,}8...$

Der Regenschirm ist rund 100 cm lang.

a2) x ... neue Streckenlänge $\overline{AC}$

$x^2 + (110 - x)^2 = \overline{AB}^2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 10{,}69\ldots$

$x_2 = 99{,}30\ldots$

Der Punkt A ist nun rund 10,7 cm oder rund 99,3 cm vom Haken C entfernt.

b1) Berechnung der Nullstellen:

$f(x) = 0$ *oder* $-\frac{1}{98} \cdot x^2 + 2 = 0$

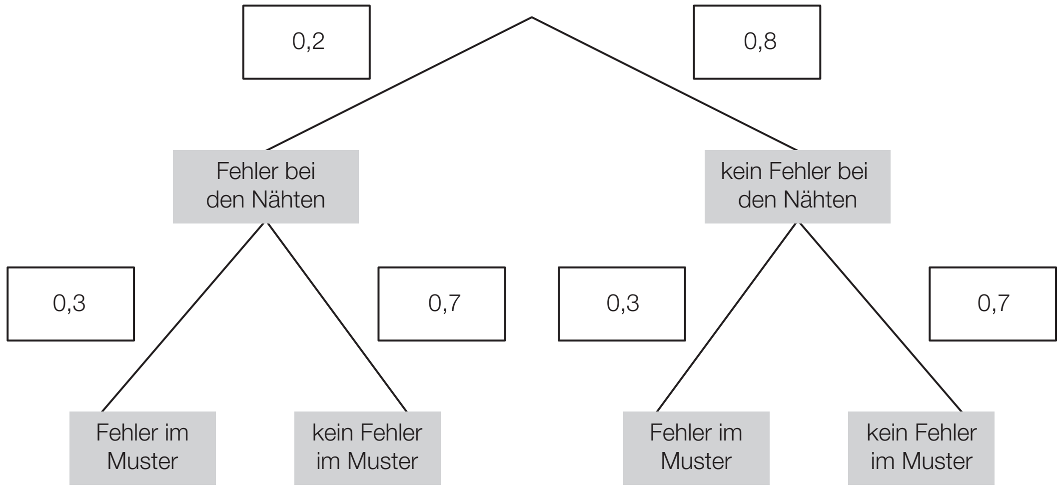
$x_{1,2} = \pm 14$

Berechnung des Flächeninhalts:

$A = 70 \cdot 14 - \int_{-14}^{14} f(x)\,\mathrm{d}x = 942{,}66...$

Der Flächeninhalt beträgt rund 942,7 cm².

c1)



c2)

	I. Wahl	II. Wahl	III. Wahl
Einnahmen pro Regenschirm in Euro	30	15	2
Wahrscheinlichkeit	$0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$	$0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}38$	$0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

c3) $30 \cdot 0{,}56 + 15 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}06 = 22{,}62$
Der Erwartungswert für die Einnahmen pro verkauftem Regenschirm beträgt € 22,62.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{AB}$
a2) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B2: für die richtige Berechnung der Entfernungen, die der Punkt A in diesem Fall vom Haken C haben kann
b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
c1) 1 × A1: für das richtige Ergänzen der Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm
c2) 1 × A2: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
c3) 1 × B: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts

Kfz-Bestand (2)*

Aufgabennummer: B_302

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$\sqrt[20]{\frac{6{,}3}{4{,}5}} = 1{,}0169...$

$1{,}0169... - 1 = 0{,}0169... \approx 1{,}7\ \%$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang.

Jemand berechnet weiters:

$2 = 1{,}0169...^t$

$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0169...)} = 41{,}20... \approx 41{,}2$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$K(t) = 0{,}084 \cdot t + 4{,}6$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

a2) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand um 84000 Kraftfahrzeuge pro Jahr zu.

a3) $K(t) = 8$ *oder* $0{,}084 \cdot t + 4{,}6 = 8$
$t = 40{,}47...$

Gemäß diesem Modell ist nach etwa 40,5 Jahren mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen.

Die Lösung kann entweder als Zeit nach Ende des Jahres 1992 oder als Kalenderjahr angegeben werden.

b1) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand pro Jahr um rund 1,7 % zu.

b2) Gemäß diesem Modell verdoppelt sich der Kfz-Bestand nach (jeweils) rund 41,2 Jahren.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist
b1) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × C2: für die richtige Interpretation der Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schlafdauer*

Aufgabennummer: B_492

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es wurden verschiedene Untersuchungen zur durchschnittlichen täglichen Schlafdauer unterschiedlicher Personengruppen durchgeführt.

a) Das Ergebnis einer Befragung von 50 Personen zur Schlafdauer ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Schlafdauer in Stunden	6	7	8	9	10
Anzahl der Personen	3	16	20	10	1

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Schlafdauer dieser 50 Personen.

Bei 9 Personen wurden die Schlafdauer und die Fernsehzeit erhoben:

Schlafdauer in Stunden	6	7	7	8	8	9	9	10	10
Fernsehzeit in Stunden	4	4	2	3	3	2	2	1	2

Die Fernsehzeit soll in Abhängigkeit von der Schlafdauer beschrieben werden.

2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

3) Interpretieren Sie das Vorzeichen der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

4) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Fernsehzeit bei einer Schlafdauer von 7,5 h.

b) Die durchschnittliche tägliche Schlafdauer X von älteren Personen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 364$ min und der Standardabweichung $\sigma = 50$ min.

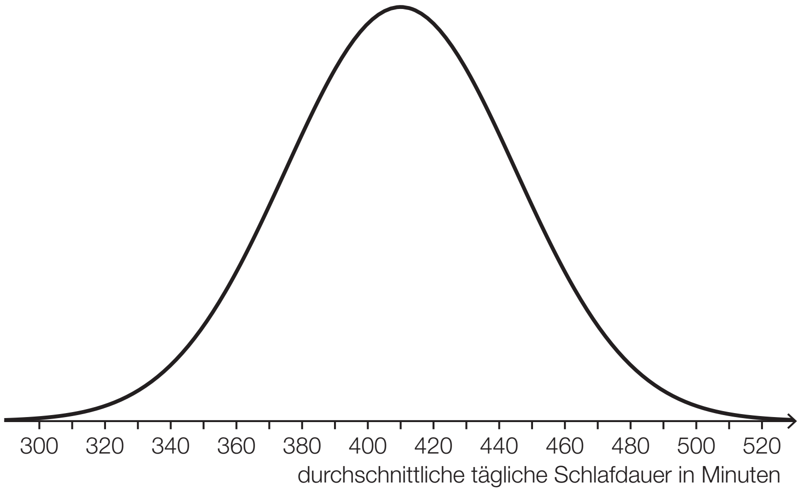
1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte ältere Person eine durchschnittliche tägliche Schlafdauer zwischen 300 min und 480 min hat.

2) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$P(X \geq 400) = P\left(X \leq \boxed{}\right)$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für die Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren ist die durchschnittliche tägliche Schlafdauer annähernd normalverteilt. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

μ = ______________________ min

Für eine andere Altersgruppe beträgt der Erwartungswert 399 min. Die Standardabweichung ist die gleiche wie in der Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren.

2) Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Dichtefunktion für diese Altersgruppe vom oben abgebildeten Graphen unterscheidet.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 7{,}8$ h

a2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$f(x) = -0{,}5857 \cdot x + 7{,}3714$ *(Koeffizienten gerundet)*

x … Schlafdauer in Stunden
$f(x)$ … Fernsehzeit bei der Schlafdauer x in Stunden

a3) Wird die Schlafdauer erhöht, so sinkt die Fernsehzeit.

a4) $f(7{,}5) = 2{,}9...$

Bei einer Schlafdauer von 7,5 h beträgt die Fernsehzeit gemäß diesem Modell rund 3 h.

b1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(300 < X < 480) = 0{,}889...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 89 %.

b2) $P(X \geq 400) = P\left(X \leq \boxed{328}\right)$

c1) $\mu = 410$ min
Toleranzbereich: [405; 415]

c2) Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist im Vergleich zum abgebildeten Graphen nach links verschoben.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des arithmetischen Mittels
a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
a3) 1 × C: für das richtige Interpretieren des Vorzeichens der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a4) 1 × B3: für das richtige Berechnen der Fernsehzeit
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit
b2) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahl
c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Erwartungswerts (Toleranzbereich: [405; 415])
c2) 1 × C2: für das richtige Beschreiben

Münzen (2)*

Aufgabennummer: B_493

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf" und „Zahl" jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

Agnes, Bettina und Celina spielen ein Spiel mit einer fairen Münze.
Agnes wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Agnes und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, dann ist Bettina an der Reihe.
Bettina wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Bettina und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, ist Celina an der Reihe.
Celina wirft die Münze. Zeigt die Münze Kopf, dann gewinnt Celina und das Spiel ist zu Ende. Zeigt die Münze Zahl, ist Runde 1 beendet und Agnes beginnt Runde 2.
Dieses Spiel wird auf die gleiche Art fortgesetzt.

In der unten stehenden Tabelle sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten für die ersten 3 Runden teilweise eingetragen.

1) Vervollständigen Sie diese Tabelle durch Eintragen der fehlenden Gewinnwahrscheinlichkeiten.

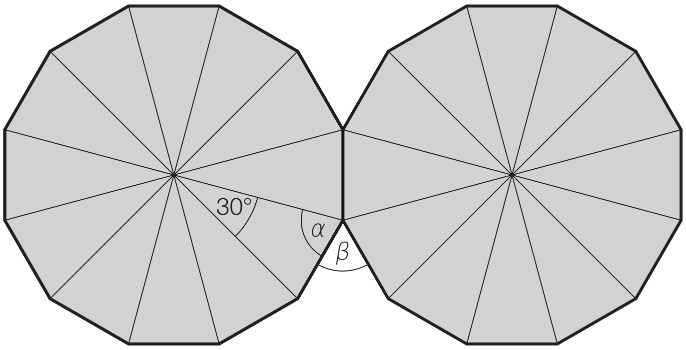
	Agnes gewinnt das Spiel in dieser Runde	Bettina gewinnt das Spiel in dieser Runde	Celina gewinnt das Spiel in dieser Runde
Runde 1			$\frac{1}{8}$
Runde 2		$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
Runde 3	$\frac{1}{128}$		$\frac{1}{512}$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Celina in Runde *n* gewinnt, lässt sich durch eine geometrische Folge modellieren.

2) Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz dieser Folge auf.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die australische 50-Cent-Münze besteht – von oben betrachtet – aus 12 gleich großen gleichschenkeligen Dreiecken.
Legt man 2 solche Münzen aneinander, ergibt sich folgende geometrische Situation:



1) Ermitteln Sie die Winkel α und β.

c) In einer Geldbörse sind 5 Ein-Euro-Münzen und 7 Zwei-Euro-Münzen. Dorian zieht nacheinander und ohne Zurücklegen 2 zufällig ausgewählte Münzen.

Die Zufallsvariable X gibt diejenigen Geldbeträge an, die Dorian erhalten kann.
$P(X = x_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit, genau den Geldbetrag x_i zu erhalten.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für das oben beschriebene Zufallsexperiment.

x_i			
$P(X = x_i)$			

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Möglicher Lösungsweg

a1)

	Agnes gewinnt das Spiel in dieser Runde	Bettina gewinnt das Spiel in dieser Runde	Celina gewinnt das Spiel in dieser Runde
Runde 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Runde 2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
Runde 3	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

a2) $c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$

c_n ... Wahrscheinlichkeit, dass Celina in Runde n gewinnt

$q = \frac{1}{64} : \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$c_n = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$ *oder* $c_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n$

b1) $\alpha = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$

$\beta = 360° - 4 \cdot 75° = 60°$

c1)

x_i	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33}$	$\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot 2 = \frac{35}{66}$	$\frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{7}{22}$

c2) $E(X) = 2 \cdot \frac{5}{33} + 3 \cdot \frac{35}{66} + 4 \cdot \frac{7}{22} = \frac{19}{6} = 3{,}166...$

Der Erwartungswert beträgt rund € 3,17.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
a2) 1 × A2: für das richtige Aufstellen des expliziten Bildungsgesetzes
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Winkel α und β
c1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
c2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Erwartungswerts

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fitnessgymnastik*

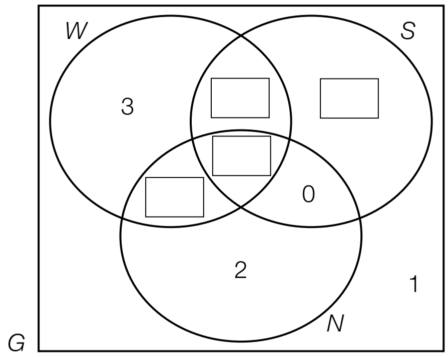
Aufgabennummer: B_494

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) An einem Fitnessgymnastik-Kurs nehmen weibliche und männliche Personen unterschiedlichen Alters teil.

W ... Menge der weiblichen Personen
S ... Menge der Seniorinnen und Senioren
N ... Menge der neu eingeschriebenen Personen
G ... Menge aller teilnehmenden Personen

Insgesamt nehmen am Kurs 20 Personen teil.
Es gibt keine neu eingeschriebenen Seniorinnen oder Senioren.
Unter den insgesamt 15 weiblichen Personen sind 9 Seniorinnen. 3 weibliche Personen sind neu eingeschrieben.
Unter den insgesamt 5 männlichen Personen sind 2 Senioren. 2 männliche Personen sind neu eingeschrieben.



Im obigen Venn-Diagramm ist bereits die Zahl 1 eingetragen.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Zahl im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Vervollständigen Sie das obige Venn-Diagramm durch Eintragen der richtigen Anzahlen.

3) Kennzeichnen Sie im obigen Venn-Diagramm die Menge $(W \cup S) \setminus N$.

4) Kreuzen Sie den zutreffenden Zusammenhang an. *[1 aus 5]*

w ... Prozentsatz der neu eingeschriebenen Personen unter den weiblichen Personen
m ... Prozentsatz der neu eingeschriebenen Personen unter den männlichen Personen
k ... Prozentsatz der neu eingeschriebenen Personen unter allen teilnehmenden Personen

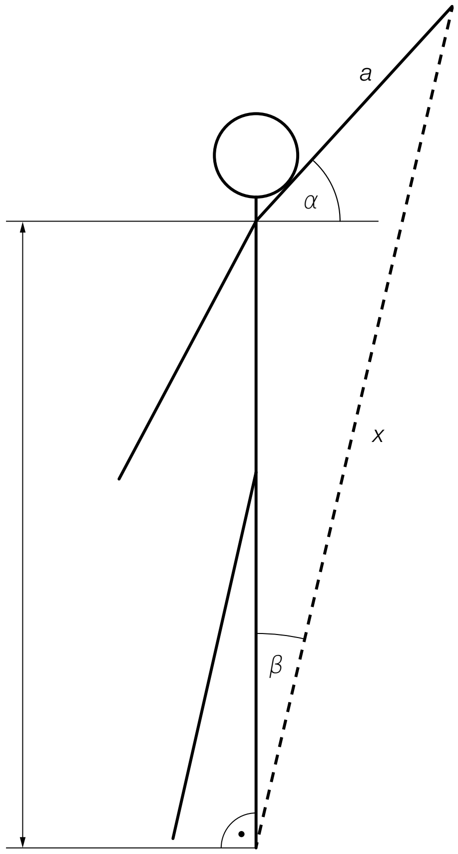
$w = 1{,}5 \cdot k$	☐
$m = 2 \cdot k$	☐
$k = 2 \cdot w$	☐
$k = 1{,}5 \cdot m$	☐
$m = 2 \cdot w$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In einem Kurs werden dehnbare Fitnessbänder benützt. Bei einer Übung wird ein Ende des Fitnessbands mit einem Fuß fixiert. Das andere Ende wird mit dem gestreckten Arm nach oben gezogen. (Siehe unten stehende vereinfachte Abbildung.)

1) Zeichnen Sie in dieser Abbildung denjenigen Winkel φ ein, für den gilt:

$$\sin(\varphi) = \frac{x \cdot \sin(\beta)}{a}$$



a ... Armlänge
s ... Schulterhöhe
x ... Länge des gedehnten Fitnessbands

2) Erstellen Sie mithilfe von *a*, *s* und α eine Formel zur Berechnung von *x*.

$x =$ ____

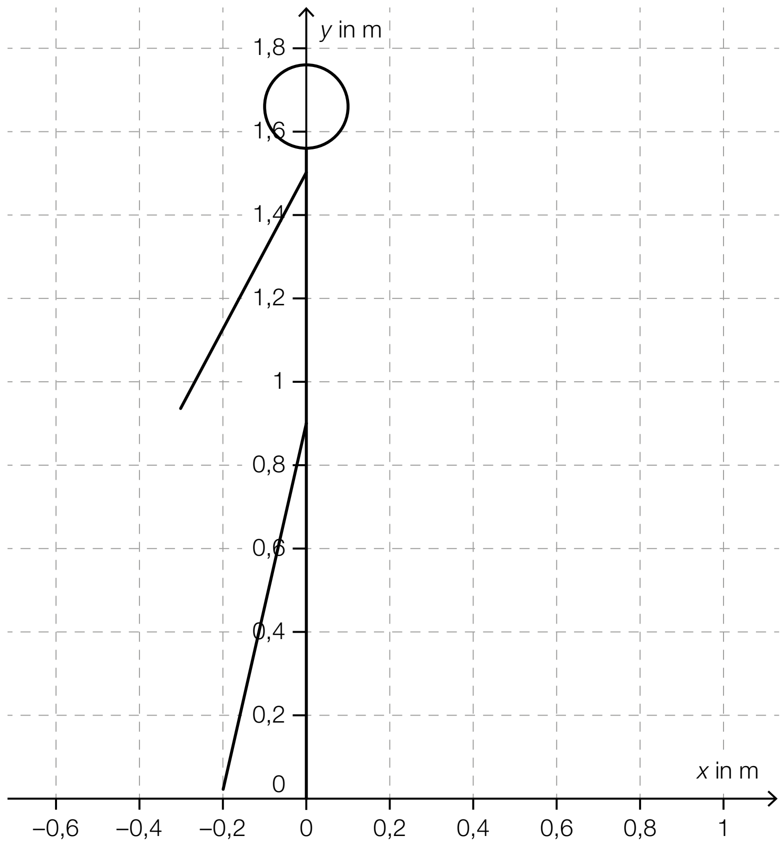
Für eine bestimmte Person gilt: $a = 0{,}7$ m, $s = 1{,}5$ m, $\alpha = 48°$

3) Berechnen Sie *x* für diese Person.

c) Bei einer Übung wird ein Ende eines dehnbaren Fitnessbands mit dem Fuß fixiert (Koordinatenursprung in der unten stehenden Abbildung). Das andere Ende wird mit dem in der Abbildung nicht dargestellten Arm gehalten.

Zu Beginn der Übung ist das Fitnessband ungedehnt und kann durch den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben werden (Maße in Metern).

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Vektor $\vec{b}$ als Pfeil ausgehend vom Koordinatenursprung ein.



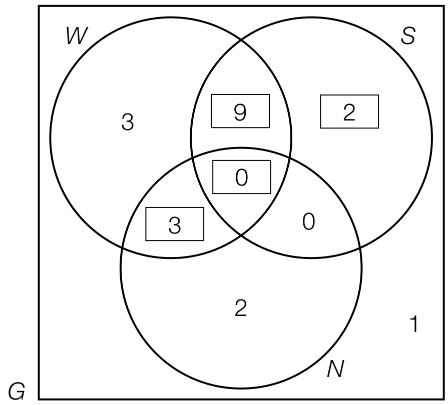
2) Berechnen Sie den Winkel, den der Vektor $\vec{b}$ mit der y-Achse einschließt.

3) Berechnen Sie die Länge des ungedehnten Fitnessbands. Runden Sie das Ergebnis auf ganze Zentimeter.

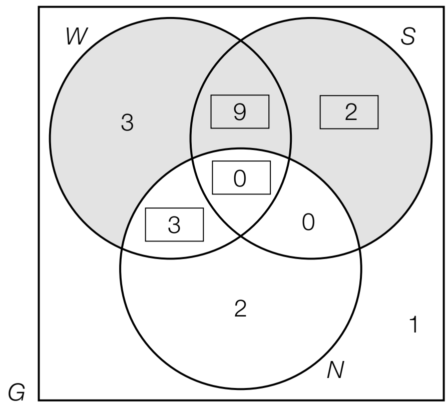
Möglicher Lösungsweg

a1) Es gibt 1 männliche Person, die weder zu den Senioren gehört noch neu eingetragen ist.

a2)



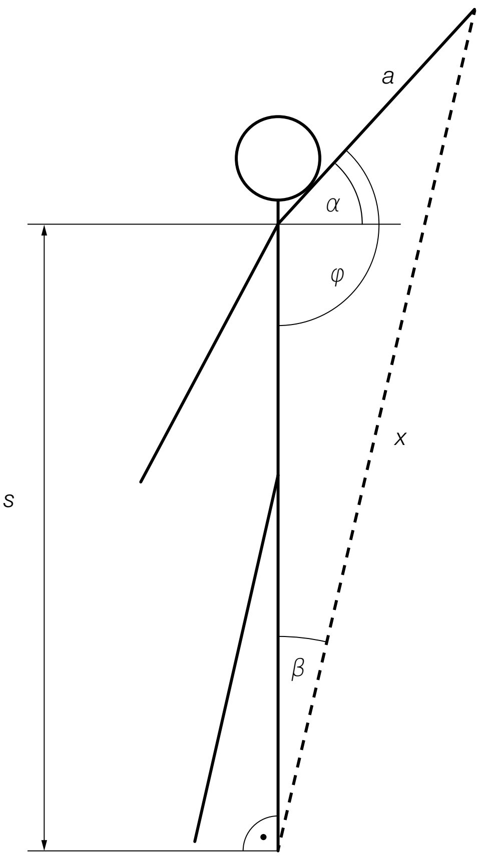
a3)



a4)

$m = 2 \cdot w$	☒

b1)



Auch das Einzeichnen eines Winkels φ' mit $\varphi' + \varphi = 180°$ ist als richtig zu werten.

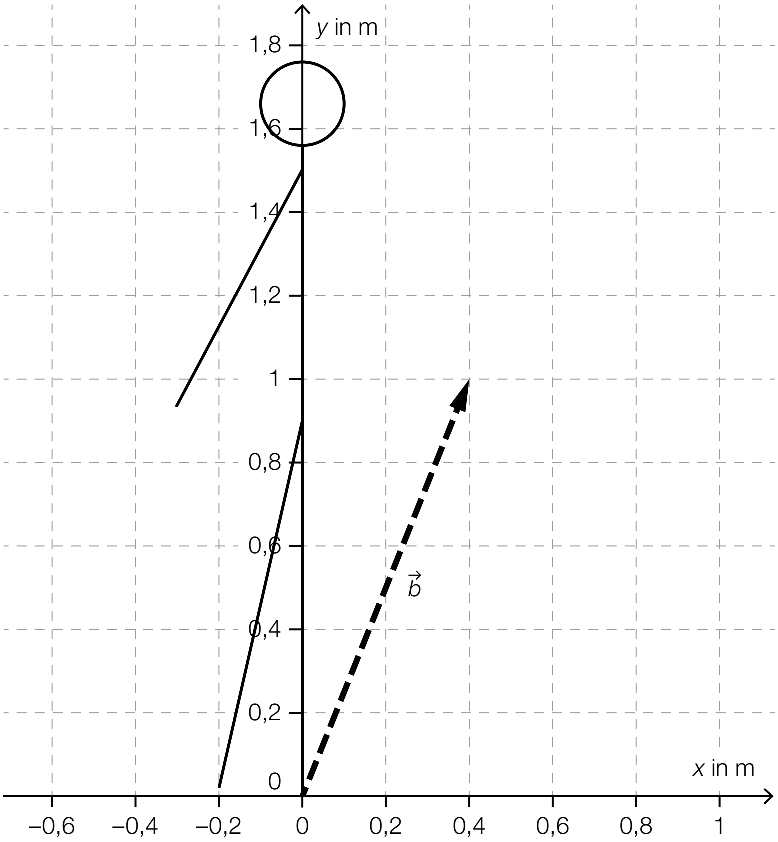
b2) $x = \sqrt{a^2 + s^2 - 2 \cdot a \cdot s \cdot \cos(90° + \alpha)}$ *oder* $x = \sqrt{a^2 + s^2 + 2 \cdot a \cdot s \cdot \sin(\alpha)}$

Auch eine Verwendung des richtig eingezeichneten Winkels φ in der Formel ist als richtig zu werten.

b3) $x = \sqrt{0{,}7^2 + 1{,}5^2 - 2 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}5 \cdot \cos(90° + 48°)} = 2{,}07...$

Die Länge des gedehnten Fitnessbands beträgt rund 2,1 m.

c1)



c2) $\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix} 0,4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{0,4^2 + 1^2} \cdot 1} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 21,8...°$

oder:

$\tan(\gamma) = 0,4 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 21,8...°$

Der Winkel beträgt rund 22°.

c3) $\sqrt{40^2 + 100^2} = 107,7...$

Die Länge des ungedehnten Fitnessbands beträgt rund 108 cm.

Lösungsschlüssel

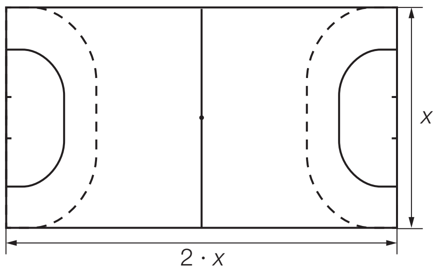
a1) 1 × C1: für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Venn-Diagramms
a3) 1 × C2: für das richtige Kennzeichnen der Menge $(W \cup S) \setminus N$
a4) 1 × C3: für das richtige Ankreuzen
b1) 1 × C: für das richtige Einzeichnen des Winkels φ
b2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b3) 1 × B: für das richtige Berechnen von x
c1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Vektors
c2) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Winkels
c3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Länge auf ganze Zentimeter gerundet

Handball*

Aufgabennummer: B_498

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Von einem rechteckigen Handball-Spielfeld werden der Boden und die Bande renoviert. Die Bande ist eine Wand, die das Spielfeld entlang der Begrenzungslinie umgibt.



Die Kosten der Renovierung für 1 m Bande betragen € 5, die Kosten der Renovierung für 1 m^2 Boden betragen € 7,50. Sämtliche Werkzeuge und Arbeitsmittel kosten einen fixen Betrag von € 5.000. Die gesamten Kosten der Renovierung für das oben dargestellte Spielfeld werden mit K bezeichnet.

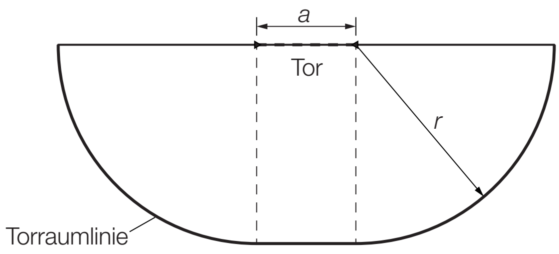
1) Erstellen Sie mithilfe von x eine Formel zur Berechnung von K.

K = ____

2) Berechnen Sie die gesamten Kosten der Renovierung für ein Spielfeld mit der Breite $x = 20$ m.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der *Torraum* wird durch die Torraumlinie begrenzt (siehe nachstehende Skizze).

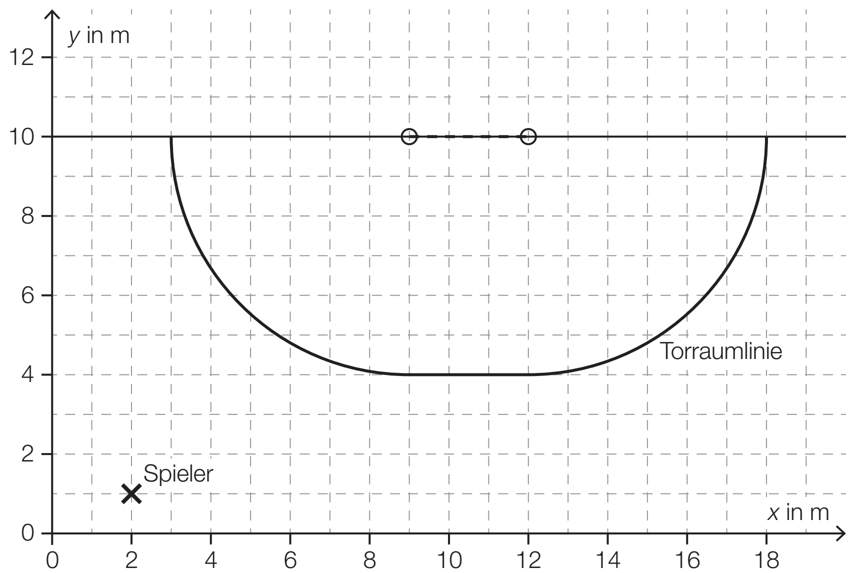


Die Fläche des Torraums setzt sich aus einem Rechteck und zwei Viertelkreisen zusammen.

1) Erstellen Sie aus a und r eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des Torraums.

$A =$ ____

c) In der unten stehenden Abbildung ist die Position eines Spielers mit × markiert.
Ausgehend von dieser Position soll ein Spielzug eingezeichnet werden, der sich aus dem Vektor $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und daran anschließend dem Vektor $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zusammensetzt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diesen Spielzug mithilfe von Pfeilen ein.

Möglicher Lösungsweg

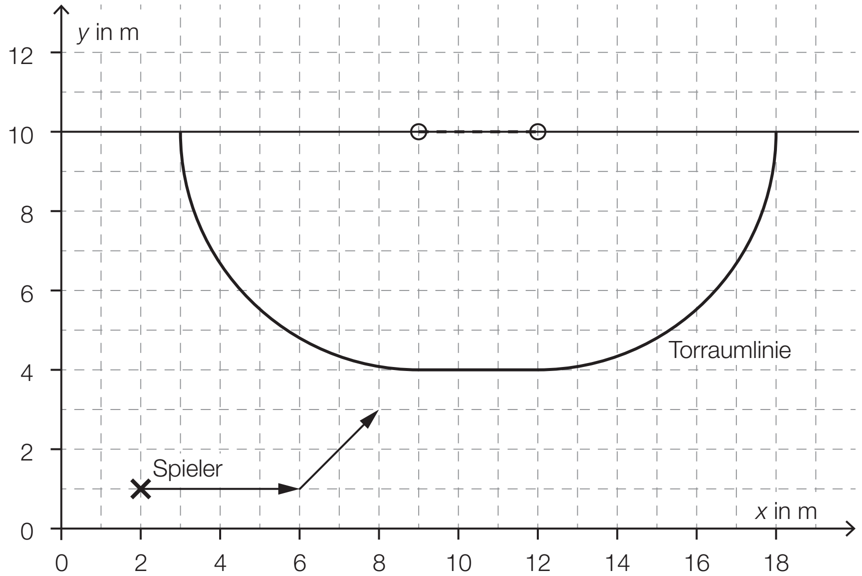
a1) $K = 15 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 5000$

a2) $15 \cdot 20^2 + 30 \cdot 20 + 5000 = 11600$

Die gesamten Kosten der Renovierung betragen € 11.600.

b1) $A = r \cdot a + \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

c1)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung der gesamten Kosten
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen der gesamten Kosten
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts
c1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Spielzugs mithilfe von Pfeilen

*Würfelspaß**

Aufgabennummer: B_499

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Würfelspaß ist ein Spiel, das mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt wird, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.
Die Spieler/innen müssen Aufträge erfüllen.

a) Auftrag „Größer":
Ein Würfel wird 2-mal hintereinander geworfen. Der Auftrag „Größer" ist erfüllt, wenn die Augenzahl des 2. Wurfes größer als die Augenzahl des 1. Wurfes ist.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer" zu erfüllen.

Auftrag „Sieben":
Es werden 2 Würfel gleichzeitig geworfen. Der Auftrag „Sieben" ist erfüllt, wenn die Augensumme 7 ergibt.

2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Sieben" zu erfüllen, kleiner ist als die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer" zu erfüllen.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auftrag „Nur nicht 2“:
Es werden 5 Würfel gleichzeitig geworfen. Zeigt dabei kein einziger Würfel die Augenzahl 2, so erhält man 10 Punkte. Für jeden Würfel, der die Augenzahl 2 zeigt, werden 2 Punkte von diesen maximal erreichbaren 10 Punkten abgezogen.

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Würfel, die dabei die Augenzahl 2 zeigen.

In der nachstehenden Tabelle sollen die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X und die Anzahl der jeweils erreichten Punkte dargestellt werden.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$ (gerundete Werte)	0,4019	0,4019		0,0322	0,0032	0,0001
erreichte Punkte				4		

1) Vervollständigen Sie in der obigen Tabelle die Zeile „erreichte Punkte“.
2) Ergänzen Sie in der obigen Tabelle die fehlende Wahrscheinlichkeit.
3) Bestimmen Sie den Erwartungswert für diejenige Zufallsvariable, die die Anzahl der erreichten Punkte beschreibt.

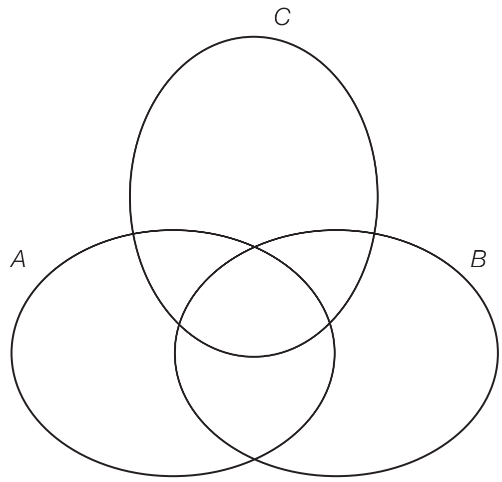
c) Die Aufträge bei *Würfelspaß* unterscheiden sich hinsichtlich der Anzahl der Mitspieler/innen, der Anzahl der verwendeten Würfel und der Anzahl der erlaubten Würfe.

A ... Menge der Aufträge, bei denen alle Spieler/innen mitspielen
B ... Menge der Aufträge, bei denen mehrere Würfel verwendet werden
C ... Menge der Aufträge, bei denen mehrere Würfe erlaubt sind

Die nachstehende Tabelle gibt die Einteilung für 6 Aufträge wieder.

	ist Element der Menge A	ist Element der Menge B	ist Element der Menge C
„Größer“	nein	nein	ja
„Sieben“	nein	ja	nein
„Nur nicht 2“	nein	ja	nein
„Solo“	nein	ja	ja
„Alle Achtung“	ja	nein	nein
„8 gewinnt“	ja	nein	ja

1) Markieren Sie im nachstehenden Venn-Diagramm denjenigen Bereich, in dem der Auftrag „Nur nicht 2“ liegt.



2) Geben Sie alle Aufträge an, die in der Menge $C \setminus (A \cup B)$ enthalten sind.

Möglicher Lösungsweg

a1) Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer“ zu erfüllen: $\frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{15}{36}$

a2) Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Sieben“ zu erfüllen: $6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36}$

Die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Sieben“ zu erfüllen, ist also kleiner als die Wahrscheinlichkeit, den Auftrag „Größer“ zu erfüllen.

b1 und b2)

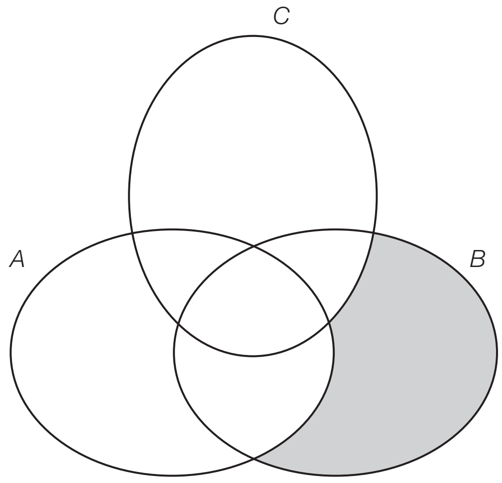
x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$ (gerundete Werte)	0,4019	0,4019	**0,1607**	0,0322	0,0032	0,0001
erreichte Punkte	**10**	**8**	**6**	4	**2**	**0**

$P(X = 2) = 1 - 0{,}4019 - 0{,}4019 - 0{,}0322 - 0{,}0032 - 0{,}0001 = 0{,}1607$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann auch mithilfe der Binomialverteilung ermittelt werden. Man erhält dabei: $P(X = 2) = 0{,}16075...$

b3) $0{,}4019 \cdot 10 + 0{,}4019 \cdot 8 + 0{,}1607 \cdot 6 + 0{,}0322 \cdot 4 + 0{,}0032 \cdot 2 = 8{,}33...$
Der Erwartungswert beträgt rund 8,3 Punkte.

c1)



c2) „Größer“

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit für die Erfüllung des Auftrags „Größer“
a2) 1 × D: für das richtige Zeigen
b1) 1 × C: für das richtige Vervollständigen der Zeile „erreichte Punkte“
b2) 1 × A: für das richtige Ergänzen der fehlenden Wahrscheinlichkeit
b3) 1 × B: für das richtige Bestimmen des Erwartungswerts
c1) 1 × C1: für das richtige Markieren des Bereichs
c2) 1 × C2: für das richtige Angeben des Auftrags „Größer“

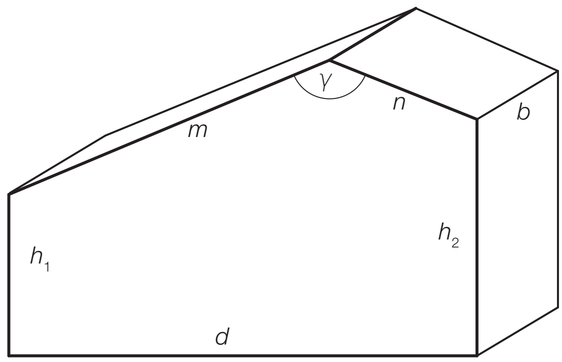
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Asymmetrisches Satteldach*

Aufgabennummer: B_500
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Haus wird geplant. Im Erstentwurf ist ein asymmetrisches Satteldach geplant, das aus zwei rechteckigen Dachflächen besteht.

a) Das Haus soll eine rechteckige Grundfläche und lotrechte Wände haben. Es ist in der nachstehenden Skizze modellhaft dargestellt.



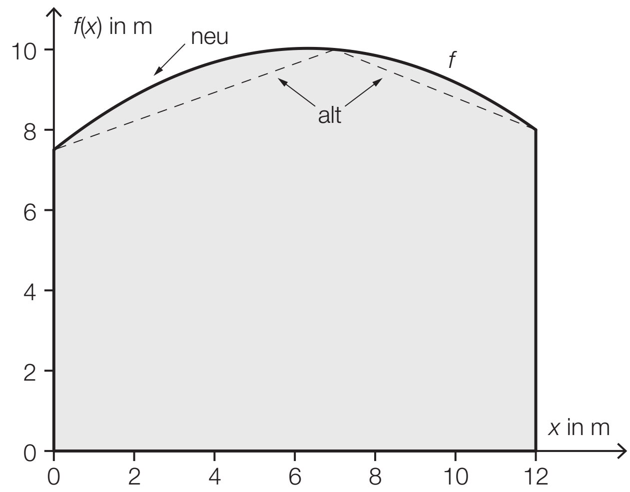
1) Zeichnen Sie in der obigen Skizze denjenigen Winkel α ein, für den gilt:
$$\frac{\sin(\alpha)}{n} = \frac{\sin(\gamma)}{\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + d^2}}$$

2) Begründen Sie, warum der Winkel α ein spitzer Winkel sein muss, wenn gilt: $\gamma \approx 139°$.

3) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V des oben dargestellten Hauses. Verwenden Sie dabei die eingezeichneten Seitenlängen und den Winkel γ.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Es wird ein neuer Entwurf mit einer anderen Dachform erstellt. In der unten stehenden Abbildung ist die Querschnittsfläche des Hauses modellhaft dargestellt.
Die obere Begrenzungslinie verläuft dabei durch die Punkte $A = (0|7{,}5)$, $B = (7|10)$ und $C = (12|8)$. Dieser Verlauf soll durch den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.



1) Erstellen Sie mithilfe der Koordinaten von A, B und C ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

3) Berechnen Sie den Inhalt Q_{neu} der grau markierten Querschnittsfläche des Hauses.

Der Inhalt der Querschnittsfläche des Hauses im alten Entwurf mit Satteldach (Erstentwurf) wird mit Q_{alt} bezeichnet.

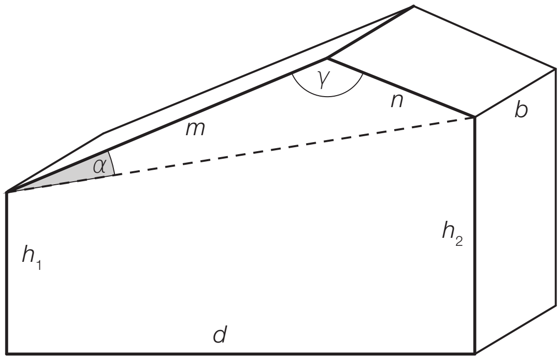
Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{Q_{neu} - Q_{alt}}{Q_{alt}} \approx 0{,}046$$

4) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) Ein Dreieck kann wegen der Winkelsumme von 180° nur 1 stumpfen Winkel haben.

a3) $V = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot n \cdot \sin(\gamma) + \frac{(h_1 + h_2) \cdot d}{2}\right) \cdot b$

b1) $f(0) = 7{,}5$
$f(7) = 10$
$f(12) = 8$

oder:

$a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 7{,}5$
$a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = 10$
$a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c = 8$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{53}{840} = -0{,}063...$
$b = \frac{671}{840} = 0{,}798...$
$c = 7{,}5$

b3) $Q_{neu} = \int_0^{12} f(x)\,\mathrm{d}x = 111{,}17...$

Der Inhalt der Querschnittsfläche beträgt rund 111,2 m².

b4) Die Querschnittsfläche im neuen Entwurf ist um rund 4,6 % größer als im alten Entwurf.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für das richtige Einzeichnen des Winkels α
a2) 1 × D: für das richtige Begründen
a3) 1 × A1: für den richtigen Ansatz
1 × A2: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Volumens V
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
b2) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Koeffizienten
b3) 1 × B2: für das richtige Berechnen des Inhalts der Querschnittsfläche
b4) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Streaming*

Aufgabennummer: B_501

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Fernsehsender entschließt sich, einen Streaming-Dienst für Filme auf den Markt zu bringen. Damit können Filme über das Internet abgespielt werden.
Die Zeit nach der Markteinführung in Monaten wird mit t bezeichnet.

a) Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

Die Anzahl der Kunden steigt im 1. Jahr nach der Markteinführung pro Monat jeweils um etwa 20 % bezogen auf die Anzahl des jeweiligen Vormonats.

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion.
2) Berechnen Sie die Anzahl der Kunden für $t = 7$.
3) Berechnen Sie, wie lange es nach der Markteinführung dauert, bis die Anzahl der Kunden erstmals 8 000 übersteigt.

b) In der nachstehenden Tabelle ist die Anzahl der Kunden für einen bestimmten Zeitraum angegeben.

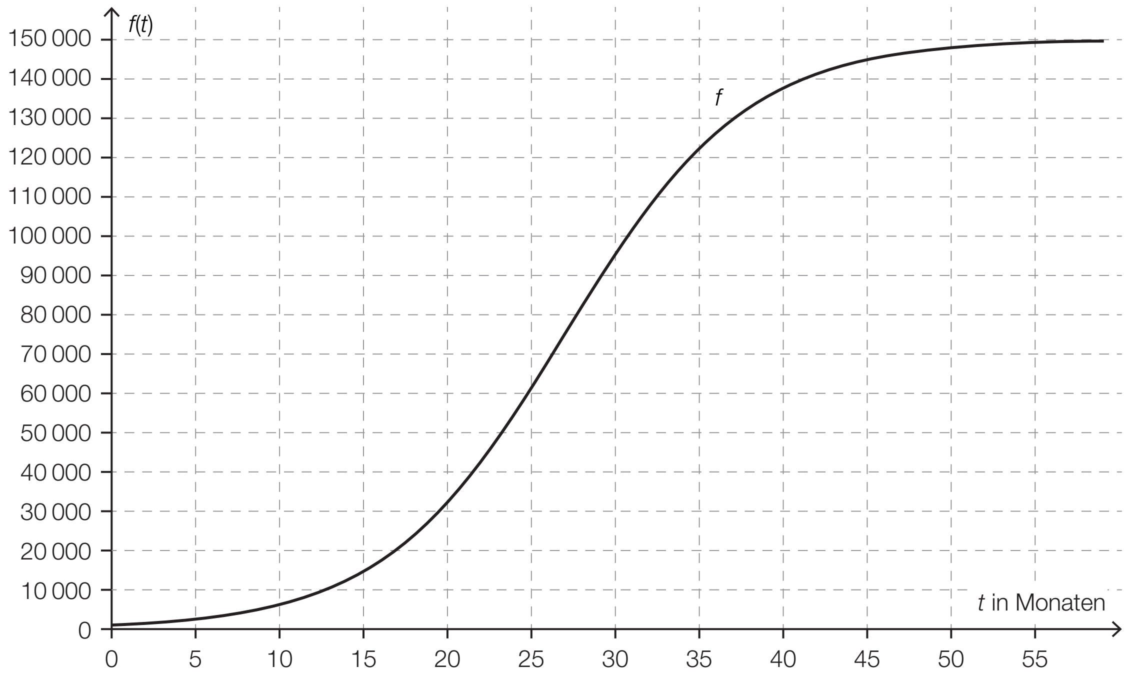
Zeit t in Monaten	18	20	24	26	28
Anzahl der Kunden	23 800	32 200	54 600	68 000	81 900

Die Anzahl der Kunden soll in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die über einen längeren Zeitraum betrachtete zeitliche Entwicklung der Anzahl der Kunden kann näherungsweise durch die logistische Funktion *f* beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Zeitpunkt des stärksten Wachstums der Anzahl der Kunden ab.

Für die Funktion *f* gilt: $f(t) = \dfrac{150\,000}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$

Bei der Markteinführung ($t = 0$) nutzen 1 000 Kunden dieses Angebot.

2) Ermitteln Sie die Parameter c und λ der Funktion *f*.

Möglicher Lösungsweg

a1) $N(t) = 1\,000 \cdot 1{,}2^t$

a2) $N(7) = 3\,583{,}1...$

Zur Zeit $t = 7$ nutzen rund 3583 Kunden das Angebot.

a3) $N(t) = 8\,000$ *oder* $1\,000 \cdot 1{,}2^t = 8\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 11{,}40...$

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$A(t) = 5\,820 \cdot t - 82\,919$ *(Koeffizienten gerundet)*

c1) 27 Monate nach der Markteinführung wächst die Anzahl der Kunden am stärksten.
Toleranzbereich: [25; 29]

c2) $f(0) = 1\,000$ *oder* $\frac{150\,000}{1 + c} = 1\,000 \Rightarrow c = 149$

$f(27) = 75\,000$ *oder* $\frac{150\,000}{1 + 149 \cdot e^{-\lambda \cdot 27}} = 75\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = 0{,}185...$

Die Verwendung anderer Punkte auf dem Graphen von f *für das Ermitteln des Parameters* λ *ist ebenfalls als richtig zu werten.*

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
a2) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Anzahl der Kunden
a3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Zeitdauer
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Zeitpunkts des stärksten Wachstums (Toleranzbereich: [25; 29])
c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Parameters c
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Parameters λ

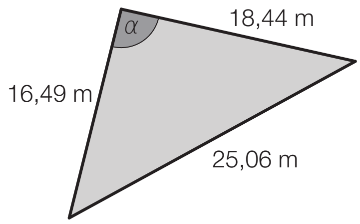
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Grundstücke*

Aufgabennummer: B_518

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der nachstehenden Abbildung ist ein dreieckiges Grundstück dargestellt.



1) Begründen Sie mithilfe der gegebenen Seitenlängen, warum der Winkel α der größte Winkel des Dreiecks ist.

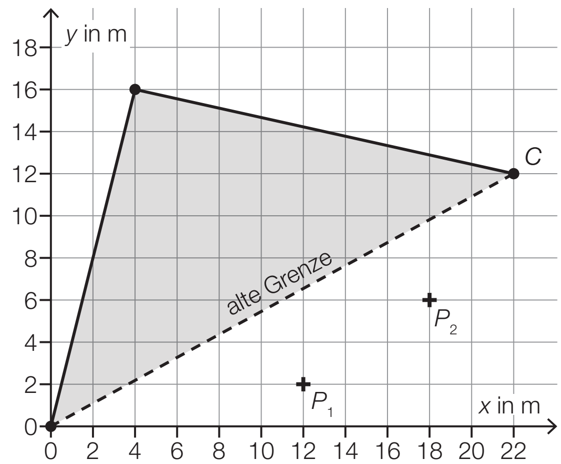
2) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Pythagoras, dass α kein rechter Winkel ist.

3) Berechnen Sie den Winkel α.

4) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Grundstücks.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein anderes dreieckiges Grundstück wird erweitert.
Die neue Grenze soll nun nicht mehr direkt vom Koordinatenursprung zum Punkt C verlaufen, sondern über die beiden markierten Punkte P_1 und P_2 (siehe nachstehende Abbildung).



Der Verlauf dieser neuen Grenze soll durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f.
2) Berechnen Sie die Koeffizienten von f.
3) Berechnen Sie, um wie viele Quadratmeter der Flächeninhalt des Grundstücks durch die Erweiterung zunimmt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Da der Winkel α der längsten Seite des Dreiecks gegenüberliegt, ist er der größte Winkel des Dreiecks.

a2) Wäre α ein rechter Winkel, dann müsste der Satz des Pythagoras gelten:

$16{,}49^2 + 18{,}44^2 = 611{,}9537$
$25{,}06^2 = 628{,}0036$
$611{,}9537 \neq 628{,}0036$

Daher ist α kein rechter Winkel.

a3) $25{,}06^2 = 18{,}44^2 + 16{,}49^2 - 2 \cdot 18{,}44 \cdot 16{,}49 \cdot \cos(\alpha)$
$\alpha = 91{,}51...°$

a4) $A = \frac{18{,}44 \cdot 16{,}49}{2} \cdot \sin(\alpha) = 151{,}984...$
Der Flächeninhalt dieses Grundstücks beträgt rund 151,98 m².

b1) I: $f(0) = 0$
II: $f(12) = 2$
III: $f(18) = 6$
IV: $f(22) = 12$

oder:

I: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$
II: $a \cdot 12^3 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d = 2$
III: $a \cdot 18^3 + b \cdot 18^2 + c \cdot 18 + d = 6$
IV: $a \cdot 22^3 + b \cdot 22^2 + c \cdot 22 + d = 12$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = \frac{1}{396} = 0{,}00252...$
$b = -\frac{19}{396} = -0{,}0479...$
$c = \frac{25}{66} = 0{,}378...$
$d = 0$

b3) $A = \frac{22 \cdot 12}{2} - \int_0^{22} f(x)\,\mathrm{d}x = 62{,}7...$
Der Flächeninhalt des Grundstücks nimmt durch die Erweiterung um rund 63 m² zu.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
a2) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels α.
a4) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Flächeninhalts.
b1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten von f.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Flächeninhalts.

Kino*

Aufgabennummer: B_519

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Personen, die ein Kino besuchen, können Geld für 3 verschiedene Bereiche ausgeben:

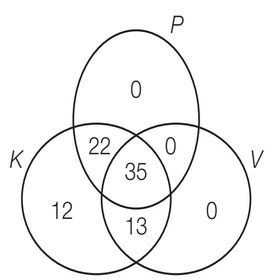
K … Menge der Personen, die für das Kinoticket Geld ausgeben
P … Menge der Personen, die für das Parkticket Geld ausgeben
V … Menge der Personen, die für die Verpflegung Geld ausgeben

1) Ordnen Sie den beiden Mengen jeweils die zutreffende Beschreibung aus A bis D zu.

$K\setminus(P \cup V)$	
$K \cap P$	

A	Menge der Personen, die nur für das Kinoticket Geld ausgeben
B	Menge der Personen, die für das Kinoticket Geld ausgeben
C	Menge der Personen, die sowohl für das Kinoticket als auch für das Parkticket Geld ausgeben
D	Menge der Personen, die entweder für das Kinoticket oder für das Parkticket oder für beides Geld ausgeben

Die Ergebnisse einer Befragung sind im nebenstehenden Venn-Diagramm dargestellt.



2) Beschreiben Sie die Bedeutung der Zahl 12 im obigen Venn-Diagramm im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Berechnen Sie, wie viel Prozent der befragten Personen in der Menge $K \cap P \cap V$ enthalten sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

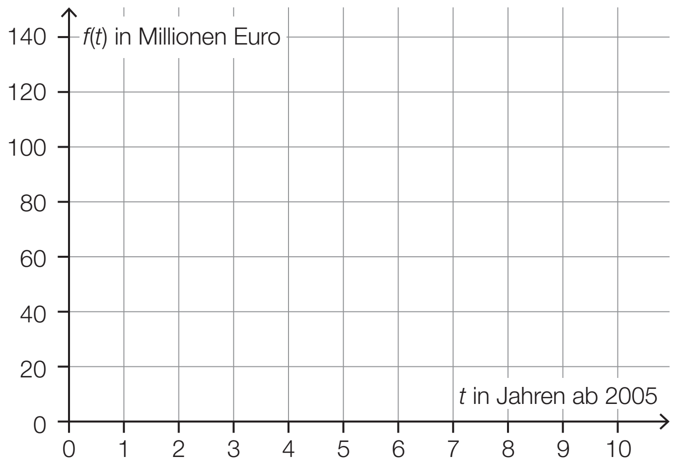
b) Die nachstehende Tabelle gibt die jährlichen Nettoeinnahmen aller Kinos in Österreich für einige Jahre an.

Jahr	2005	2006	2011	2012	2015
jährliche Nettoeinnahmen in Millionen Euro	94,8	104,3	115,7	118,5	127,2

Datenquelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/kultur/kinos_und_filme/045075.html [04.08.2021].

Die jährlichen Nettoeinnahmen in Millionen Euro sollen in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2005.
2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von f im gegebenen Sachzusammenhang.
3) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von f ein.



c) Ein Kino zeigt einen bestimmten Film gleichzeitig in 3 Kinosälen.

Im Kinosaal X wird der Film in der Standardversion gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 14,80.
Im Kinosaal Y wird der Film in 3D gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 17.
Im Kinosaal Z wird der Film im „Director's Cut" gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 19,30.

Insgesamt wurden 120 Tickets verkauft und € 2.067 eingenommen.
Für Kinosaal Z wurden 25 % mehr Tickets als für Kinosaal X verkauft.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle X, Y und Z.
2) Berechnen Sie die Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle X, Y und Z.

Möglicher Lösungsweg

a1)

$K\setminus(P \cup V)$	A
$K \cap P$	C

A	Menge der Personen, die nur für das Kinoticket Geld ausgeben
B	Menge der Personen, die für das Kinoticket Geld ausgeben
C	Menge der Personen, die sowohl für das Kinoticket als auch für das Parkticket Geld ausgeben
D	Menge der Personen, die entweder für das Kinoticket oder für das Parkticket oder für beides Geld ausgeben

a2) 12 Personen geben nur für das Kinoticket Geld aus.

a3) $\frac{35}{12 + 13 + 35 + 22} = \frac{35}{82} = 0{,}4268...$

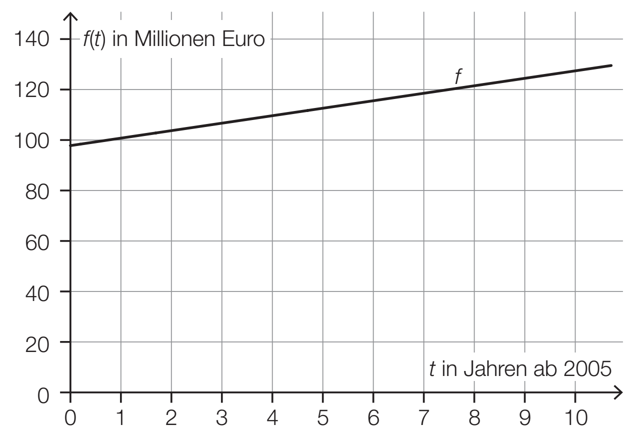
Rund 42,7 % aller befragten Personen sind in der Menge $K \cap P \cap V$ enthalten.

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 2{,}96 \cdot t + 97{,}9$ *(Koeffizienten gerundet)*

b2) Gemäß diesem Modell steigen die jährlichen Nettoeinnahmen um rund 2,96 Millionen Euro pro Jahr.

b3)



c1) x ... Anzahl der verkauften Tickets für Kinosaal X
y ... Anzahl der verkauften Tickets für Kinosaal Y
z ... Anzahl der verkauften Tickets für Kinosaal Z

$$\text{I:}\quad x + y + z = 120$$
$$\text{II:}\quad 14{,}8 \cdot x + 17 \cdot y + 19{,}3 \cdot z = 2067$$
$$\text{III:}\quad 1{,}25 \cdot x = z$$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x = 40$
$y = 30$
$z = 50$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion f.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b3) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen von f.
c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der jeweils verkauften Tickets.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kartenhaus*

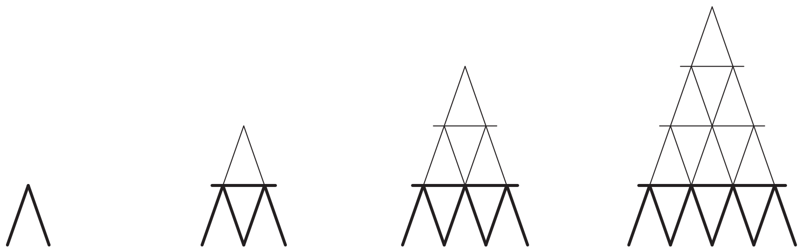
Aufgabennummer: B_520

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Aus Spielkarten kann man ein Kartenhaus bauen (siehe nebenstehendes Foto).

Bildquelle: https://pixabay.com/de/kartenhaus-zerbrechlich-geduld-763246/ [02.10.2019].

In der nachstehenden Abbildung sind Kartenhäuser, die aus einer unterschiedlichen Anzahl von Stockwerken bestehen, in der Ansicht von vorne skizziert.



a) Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viele Karten für ein n-stöckiges Kartenhaus insgesamt benötigt werden und wie viele davon für das unterste Stockwerk benötigt werden.

Anzahl der Stockwerke n	insgesamt benötigte Karten	Karten für das unterste Stockwerk
1	2	2
2	7	5
3	15	8
4	26	11
5		

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Zahlen in die grau markierten Zellen ein.

* ehemalige Klausuraufgabe

Die Anzahl der Karten für das unterste Stockwerk kann durch die arithmetische Folge z_n beschrieben werden.

2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die arithmetische Folge z_n.

Maria hat ein 24-stöckiges Kartenhaus errichtet und möchte es nun zu einem 25-stöckigen Kartenhaus erweitern.

3) Ermitteln Sie die Anzahl der zusätzlichen Karten, die Maria dafür benötigt.

b) Die Gesamtanzahl s_n der Karten für ein n-stöckiges Kartenhaus kann mit der nachstehenden Formel ermittelt werden.

$$s_n = 3 \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2} - n$$

1) Berechnen Sie die Gesamtanzahl der Karten, die für ein 50-stöckiges Kartenhaus benötigt werden.

Alexander hat 3 vollständige Kartensets zu je 32 Karten zur Verfügung und möchte ein Kartenhaus mit möglichst vielen Stockwerken bauen.

2) Berechnen Sie die Anzahl der Stockwerke, die Alexanders Kartenhaus höchstens haben kann.

c) Bei einem Glücksspiel wird ein Kartenspiel mit 32 Karten verwendet, das genau 4 Asse enthält. Bryan zieht zufällig und ohne hinzusehen 1 Karte. Ist die gezogene Karte ein Ass, so gewinnt er € 20. Ist die gezogene Karte kein Ass, so verliert er € 5.

Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn bei diesem Spiel in € an.

1) Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

Möglicher Lösungsweg

a1)

Anzahl der Stockwerke n	insgesamt benötigte Karten	Karten für das unterste Stockwerk
5	40	14

a2) $z_n = 2 + (n - 1) \cdot 3$

oder:

$z_n = 3 \cdot n - 1$

a3) $z_{25} = 74$

Um ein 25-stöckiges Kartenhaus zu errichten, benötigt Maria 74 zusätzliche Karten.

b1) $s_{50} = 3 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} - 50 = 3775$

Für ein 50-stöckiges Kartenhaus werden insgesamt 3775 Karten benötigt.

b2) $3 \cdot 32 = 96$

$96 = 3 \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2} - n$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(n_1 = -8{,}16...)$; $n_2 = 7{,}83...$

Alexanders Kartenhaus kann höchstens 7 Stockwerke haben.

c1)

x_i	-5	20
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

c2) $E(X) = -5 \cdot \frac{7}{8} + 20 \cdot \frac{1}{8} = -\frac{15}{8} = -1{,}875$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Zahlen.
a2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des expliziten Bildungsgesetzes.
a3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Anzahl der zusätzlich benötigten Karten.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Gesamtanzahl der Karten.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der Stockwerke.
c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen der Wertetabelle.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts.

Desinfektion

Zur Abtötung von Krankheitserregern werden verschiedene Methoden eingesetzt. Diese werden unter dem Oberbegriff *Desinfektion* zusammengefasst.

a) Eine gängige Methode, bestimmte Krankheitserreger abzutöten, ist der Einsatz von heißem Wasser. Die benötigte Einwirkzeit hängt von der Temperatur des Wassers ab.

Temperatur in °C	70	80	90
benötigte Einwirkzeit in Sekunden	30 000	3 000	300

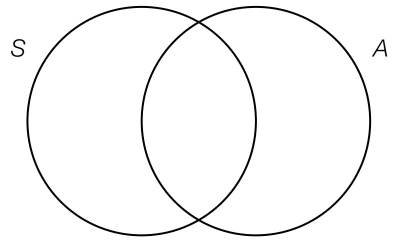
In einem bestimmten Temperaturbereich kann die benötigte Einwirkzeit $f(x)$ in Abhängigkeit von der Temperatur x näherungsweise durch die Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ beschrieben werden. f soll dabei für die Temperaturen 70 °C und 80 °C die obigen Werte annehmen.

1) Stellen Sie eine Gleichung dieser Exponentialfunktion f auf. *[0/1 P.]*

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Funktionswert dieser Exponentialfunktion f bei 90 °C dem in der obigen Tabelle angegebenen Wert entspricht. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie mithilfe der Exponentialfunktion f diejenige Temperatur, bei der die benötigte Einwirkzeit 10 Minuten beträgt. *[0/1 P.]*

b) Gängige chemische Desinfektionsmittel sind Säuren und Alkohole.
Im nachstehenden Venn-Diagramm ist dargestellt, welche Krankheitserreger jeweils abgetötet werden können.



S ... Menge der Krankheitserreger, die mit Säuren abgetötet werden können
A ... Menge der Krankheitserreger, die mit Alkoholen abgetötet werden können

1) Kennzeichnen Sie im obigen Mengendiagramm diejenige Menge, die alle Krankheitserreger enthält, die mit Alkoholen, jedoch nicht mit Säuren abgetötet werden können. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie die Menge $S \cap A$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

c) Eine Oberfläche wird mehrfach mit einem bestimmten Desinfektionsmittel gereinigt.
Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viel Prozent der ursprünglich vorhandenen Bakterien nach dem jeweiligen Reinigungsdurchgang noch vorhanden sind.

Reinigungsdurchgang	1	2	3	4
Prozentsatz der noch vorhandenen Bakterien	5 %	0,25 %	0,0125 %	0,000625 %

1) Zeigen Sie, dass die Prozentsätze der noch vorhandenen Bakterien eine geometrische Folge bilden. *[0 / 1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = \sqrt[10]{\frac{3\,000}{30\,000}} = 0{,}7943...$

$30\,000 = c \cdot a^{70}$
$c = 3 \cdot 10^{11}$

$f(x) = 3 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}7943...^x$

a2) $f(90) = 300$
Ja, der Funktionswert an der Stelle 90 entspricht dem in der Tabelle angegebenen Wert.

a3) 10 min = 600 s
$f(x) = 600$

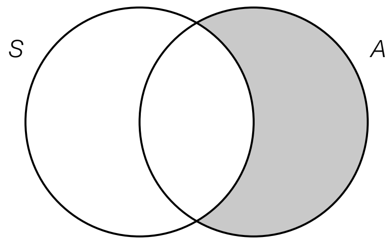
oder:

$3 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}7943...^x = 600$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x = 86{,}9...$
Bei einer Temperatur von rund 87 °C beträgt die benötigte Einwirkzeit 10 Minuten.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung.
a2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Temperatur.

b1)



b2) $S \cap A$ ist die Menge der Krankheitserreger, die sowohl mit Säuren als auch mit Alkoholen abgetötet werden können.

b1) Ein Punkt für das Kennzeichnen der richtigen Menge.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

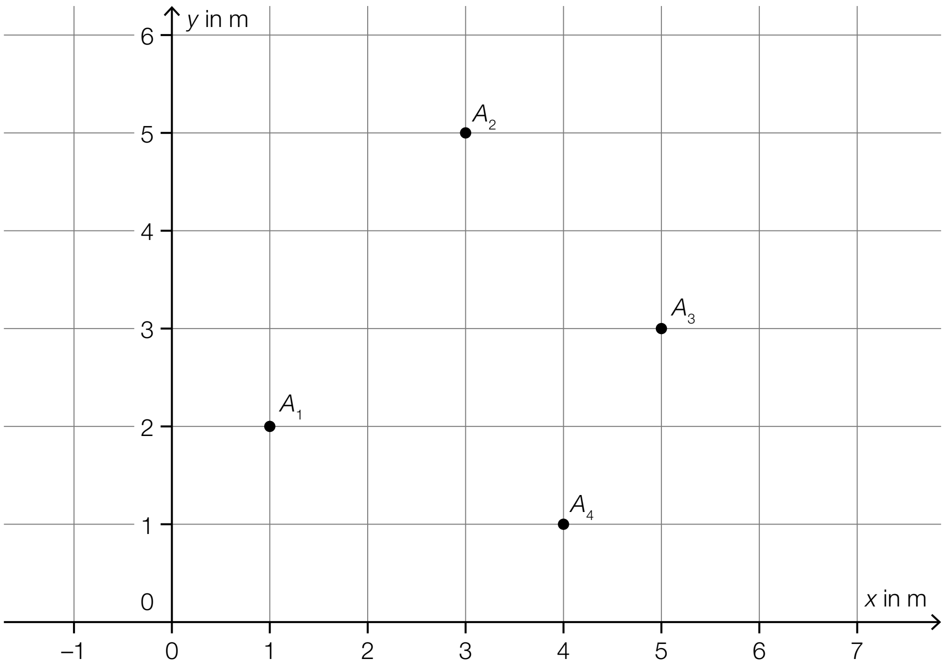
c1) $\frac{0{,}25\ \%}{5\ \%} = \frac{0{,}0125\ \%}{0{,}25\ \%} = \frac{0{,}000625\ \%}{0{,}0125\ \%} = 0{,}05$

c1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.

Zebraschnecken

Um das Wanderverhalten von Zebraschnecken zu untersuchen, wird eine Versuchsfläche, auf der solche Schnecken leben, beobachtet.

a) Die unten stehende Abbildung zeigt die Positionen der Zebraschnecke A an vier aufeinanderfolgenden Tagen in einem Koordinatensystem (Einheiten in Metern).
Die Punkte A_1, A_2, A_3 und A_4 sind dabei die Positionen der Zebraschnecke A zu Beginn des 1., 2., 3. bzw. 4. Tages.



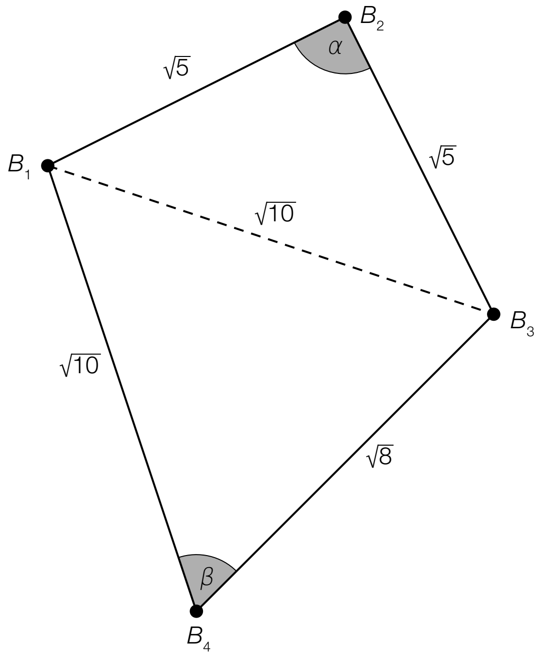
1) Geben Sie den Vektor vom Punkt A_2 zum Punkt A_3 an. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Entfernung, die die Zebraschnecke zurückgelegt hat, wenn sie auf dem kürzesten Weg von A_2 nach A_3 gekrochen ist. *[0/1 P.]*

Zu Beginn des 5. Tages befindet sich die Zebraschnecke im Punkt A_5.
Es gilt: $\overrightarrow{A_4A_5} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Punkt A_5 ein. *[0/1 P.]*

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Position der Zebraschnecke B an vier aufeinanderfolgenden Tagen. Die Punkte B_1, B_2, B_3 und B_4 sind dabei die Positionen der Zebraschnecke B zu Beginn des 1., 2., 3. bzw. 4. Tages.



1) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Winkel α ein rechter Winkel ist. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den Winkel β. *[0/1 P.]*

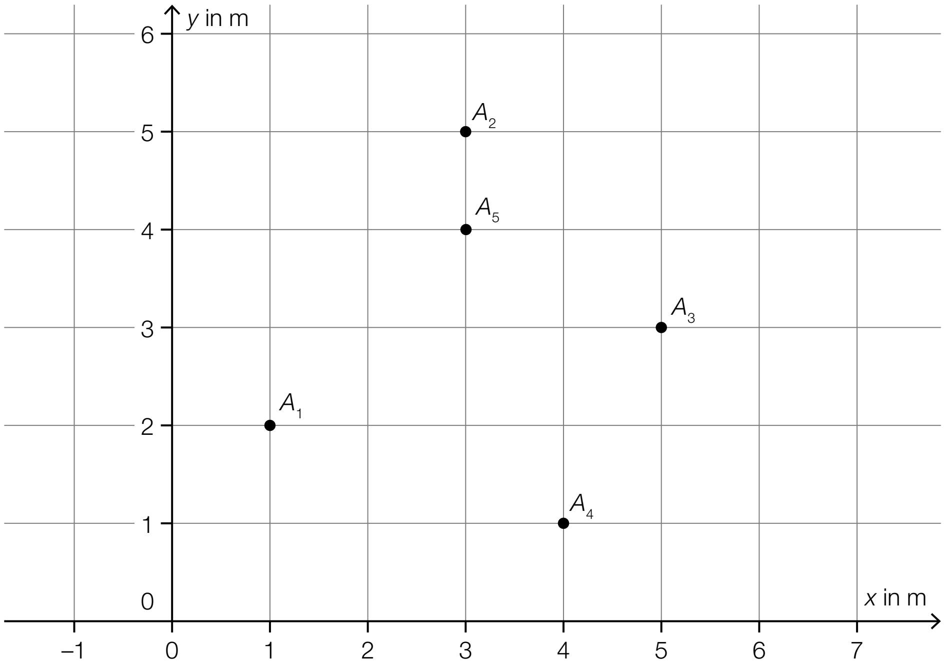
Möglicher Lösungsweg

a1) $\overrightarrow{A_2A_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

a2) $\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2{,}82...$

Die Entfernung beträgt rund 2,8 m.

a3)



a1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Vektors.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Entfernung.
a3) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Punktes A_5.

b1) α ist ein rechter Winkel, weil im Dreieck $B_1B_2B_3$ der Lehrsatz von Pythagoras gilt:

$\overline{B_1B_2}^2 + \overline{B_2B_3}^2 = \overline{B_1B_3}^2$

$(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{10})^2$

Auch eine Überprüfung mithilfe trigonometrischer Beziehungen ist als richtig zu werten.

b2) $\overline{B_1B_3}^2 = \overline{B_1B_4}^2 + \overline{B_3B_4}^2 - 2 \cdot \overline{B_1B_4} \cdot \overline{B_3B_4} \cdot \cos(\beta)$

$10 = 10 + 8 - 2 \cdot \sqrt{80} \cdot \cos(\beta)$

$\beta = \arccos\left(\frac{8}{2 \cdot \sqrt{80}}\right) = 63{,}4...°$

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Überprüfen.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels β.

Körpermaße (1)

a) Die Oberarmlänge von Burschen einer bestimmten Altersgruppe kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Der Erwartungswert μ beträgt 34,7 cm, die Standardabweichung σ beträgt 0,4 cm.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Oberarmlänge eines zufällig ausgewählten Burschen dieser Altersgruppe mindestens 34,4 cm beträgt. *[0/1 P.]*

b) Von 9 zufällig ausgewählten Mädchen einer anderen Altersgruppe wurden die Oberarmlänge und die Körpergröße gemessen:

Körpergröße in cm	165	164	166	159	163	170	158	168	172
Oberarmlänge in cm	34,5	34,7	34,6	34,0	34,5	35,0	33,8	34,9	34,9

Die Oberarmlänge soll in Abhängigkeit von der Körpergröße näherungsweise durch die lineare Funktion g beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion g auf. *[0/1 P.]*

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Funktion g ein geeignetes Modell zur Beschreibung dieser Abhängigkeit ist. *[0/1 P.]*

3) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der linearen Funktion g im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

c) Der Median des Körperfettanteils von Burschen ist altersabhängig (siehe nachstehende Tabelle).

Alter in Jahren	10	12	14	16
Median des Körperfettanteils in Prozent	18,9	17,8	14,1	15,7

Der Median des Körperfettanteils kann in Abhängigkeit vom Alter t durch die Polynomfunktion 3. Grades f mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ modelliert werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten. *[0/1 P.]*

Eine Polynomfunktion 3. Grades h mit $h(x) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + d_1$ hat 2 lokale Extremstellen.

3) Geben Sie an, welches Vorzeichen die Diskriminante der Gleichung $h'(x) = 0$ haben muss. Begründen Sie Ihre Entscheidung. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) X ... Oberarmlänge in cm

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(X \geq 34{,}4) = 0{,}773...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 77 %.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) $g(x) = 0{,}082 \cdot x + 20{,}98$ *(Koeffizienten gerundet)*

x ... Körpergröße in cm
$g(x)$ ... Oberarmlänge bei der Körpergröße x in cm

b2) Da der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}935...$ nahe bei 1 liegt, kann ein starker positiver linearer Zusammenhang zwischen der Körpergröße und der Oberarmlänge bei Mädchen dieser Altersgruppe vermutet werden.

b3) Nimmt die Körpergröße um 1 cm zu, so nimmt die Oberarmlänge gemäß diesem Modell um 0,082 cm zu.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Regressionsfunktion.
b2) Ein Punkt für das richtige Beurteilen mithilfe des Korrelationskoeffizienten.
b3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang.

c1) I: $f(10) = 18{,}9$
II: $f(12) = 17{,}8$
III: $f(14) = 14{,}1$
IV: $f(16) = 15{,}7$

oder:

I: $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d = 18{,}9$
II: $a \cdot 12^3 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d = 17{,}8$
III: $a \cdot 14^3 + b \cdot 14^2 + c \cdot 14 + d = 14{,}1$
IV: $a \cdot 16^3 + b \cdot 16^2 + c \cdot 16 + d = 15{,}7$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = \frac{79}{480} = 0{,}1645\ldots$
$b = -\frac{25}{4} = -6{,}25$
$c = \frac{1849}{24} = 77{,}04\ldots$
$d = -\frac{2911}{10} = -291{,}1$

c3) Das Vorzeichen der Diskriminante ist positiv, weil die quadratische Funktion h' zwei Nullstellen hat.

c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten.
c3) Ein Punkt für das richtige Angeben und Begründen.

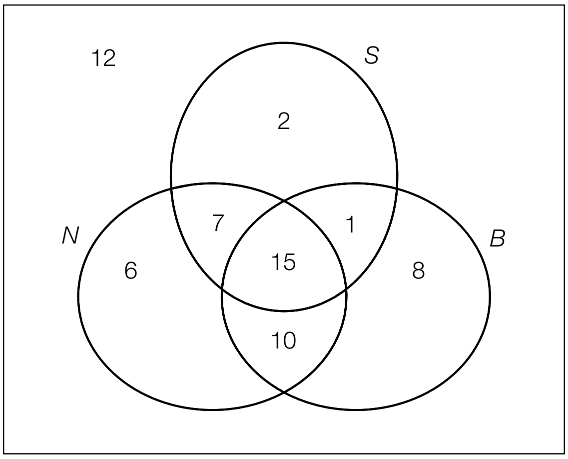
Lärm

a) Eine Gruppe von 61 Personen wurde zu Lärmstörungen im Alltag befragt.

Als Lärmquellen standen zur Auswahl:

- Lärm aus Nachbarwohnungen (N)
- Lärm von Straßenverkehr (S)
- Lärm von Baustellen (B)

Dabei waren Mehrfachnennungen bzw. auch die Angabe, sich nicht durch die angegebenen Lärmquellen gestört zu fühlen, möglich.
Die Ergebnisse sind im nachstehenden Venn-Diagramm dargestellt.



1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung die Menge $(N \cap S) \setminus B$. *[0/1 P.]*

David behauptet: „Aus dem Venn-Diagramm kann man ablesen, dass nur 1 Person angibt, dass sie sowohl durch Lärm von Baustellen als auch durch Lärm von Straßenverkehr gestört wird."

2) Erklären Sie, warum diese Behauptung falsch ist. *[0/1 P.]*

Eine der befragten Personen wird zufällig ausgewählt.

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person angegeben hat, dass sie nur durch Lärm aus Nachbarwohnungen gestört wird. *[0/1 P.]*

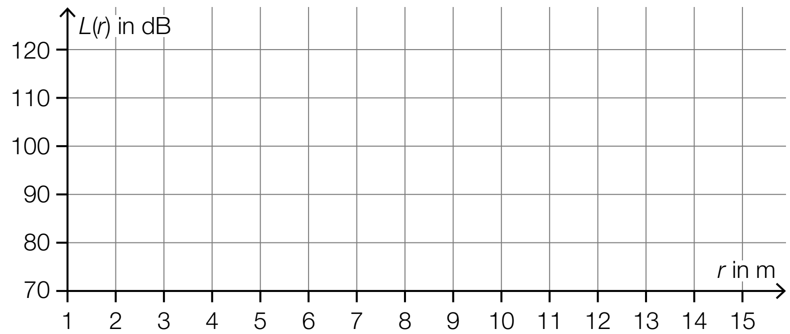
b) Laura steht 1 m von einem Lautsprecher entfernt und fühlt sich durch den hohen Schallpegel von 110 Dezibel (dB) gestört. Daher beschließt sie, sich vom Lautsprecher zu entfernen.

Die Funktion L beschreibt den Schallpegel in Abhängigkeit von der Entfernung r von diesem Lautsprecher.

$L(r) = 110 - 20 \cdot \lg(r) \quad \text{mit} \quad r \geq 1$

r ... Entfernung vom Lautsprecher in m
$L(r)$ ... Schallpegel bei der Entfernung r in dB

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion L im Intervall [1; 15] ein. *[0/1 P.]*



Laura möchte sich an einer Stelle aufhalten, an der der Lautsprecher einen Schallpegel von 75 dB erzeugt.

2) Berechnen Sie die Entfernung dieser Stelle vom Lautsprecher. *[0/1 P.]*

Jonas behauptet: „Wenn ich meine Entfernung von 10 m auf 20 m vergrößere, dann sinkt der Schallpegel auf die Hälfte.“

3) Zeigen Sie, dass diese Behauptung falsch ist. *[0/1 P.]*

Elisabeth möchte die Gleichung $L = 110 - 20 \cdot \lg(r)$ nach r umformen und führt folgende Umformung durch:

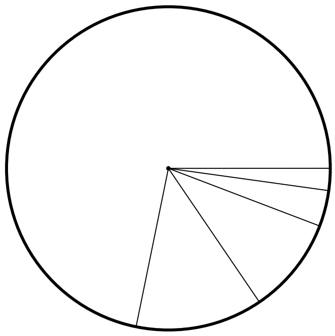
$$\frac{L - 110}{-20} = \lg(r)$$

$$e^{\frac{L-110}{-20}} = r$$

4) Beschreiben Sie den Fehler, den Elisabeth bei der Umformung gemacht hat. *[0/1 P.]*

c) Im Jahr 2007 wurde in Kärnten eine Umfrage zur Lärmbelästigung durchgeführt. 9,7 % aller Befragten gaben an, dass sie sich „mittelmäßig" gestört fühlen.

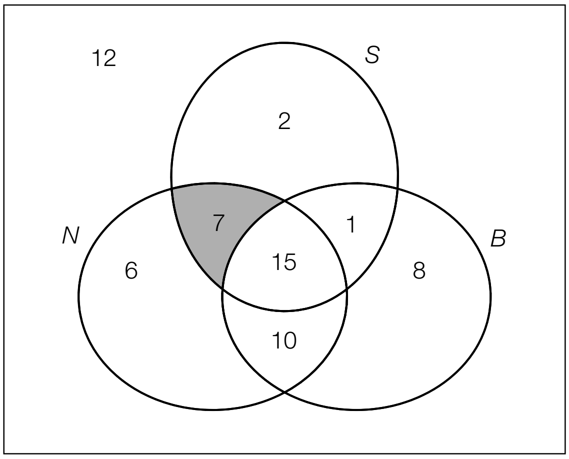
1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm denjenigen Sektor, der diesem Prozentsatz entspricht. *[0/1 P.]*



Möglicher Lösungsweg

Lärm

a1)

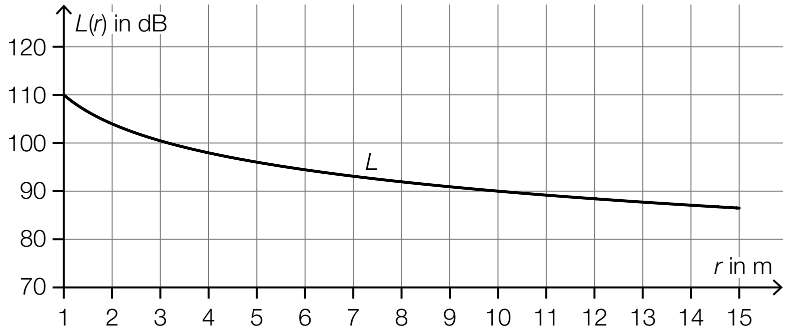


a2) Insgesamt fühlen sich 16 Personen sowohl durch Lärm von Baustellen als auch durch Lärm von Straßenverkehr gestört, weil auch die 15 Personen der Menge $S \cap B \cap N$ durch diese Beschreibung erfasst sind.

a3) $\frac{6}{61} = 0{,}098...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person nur durch Lärm aus Nachbarwohnungen gestört wird, beträgt rund 10 %.

a1) Ein Punkt für das Kennzeichnen der richtigen Menge.
a2) Ein Punkt für das richtige Erklären.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1)



b2) $75 = 110 - 20 \cdot \lg(r)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$r = 56{,}2...$

Die Entfernung beträgt rund 56 m.

b3) $\frac{L(10)}{2} = 45$

$L(20) = 83{,}9...$

Auch ein allgemeiner Nachweis, dass eine Verdoppelung der Entfernung nicht zu einer Halbierung des Schallpegels führt, ist als richtig zu werten.

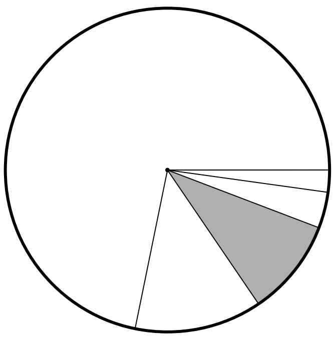
b4) Der dekadische Logarithmus lg ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion mit der Basis 10, nicht mit der Basis e.

oder:

Elisabeth hat bei der Umformung anstelle der Basis 10 die Basis e verwendet.

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Funktion L im Intervall [1; 15].
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Entfernung.
b3) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
b4) Ein Punkt für das richtige Beschreiben des Fehlers.

c1)



c1) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Sektors.

Wasser

a) Der durchschnittliche tägliche Wasserverbrauch pro Einwohner/in in Wien setzt sich folgendermaßen zusammen:

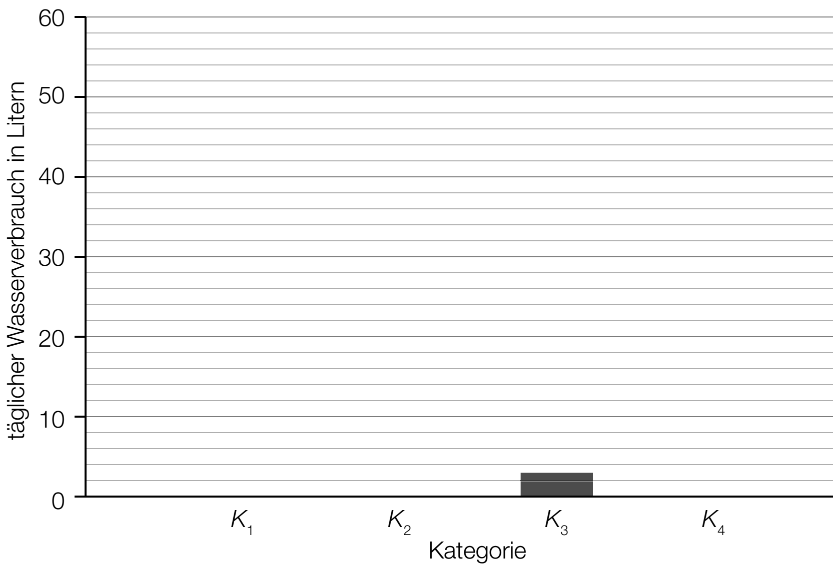
Duschen, Baden	44 L
WC-Spülung	40 L
Wäschewaschen	15 L
Körperpflege	9 L
Geschirrspülen	6 L
Kochen, Trinken	3 L
Wohnungsreinigung	8 L
Gartenbewässerung	5 L

Datenquelle: https://www.wien.gv.at/wienwasser/verbrauch.html [04.06.2019].

Der oben angegebene Wasserverbrauch wird in 4 Kategorien unterteilt:

- K_1: Duschen, Baden und Körperpflege
- K_2: WC-Spülung
- K_3: Kochen, Trinken
- K_4: Sonstiges (Wäschewaschen, Geschirrspülen, Wohnungsreinigung, Gartenbewässerung)

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Säulendiagramm. *[0/1 P.]*



b) Auf einer Website ist zu lesen:
„Aktuell liegt der weltweite jährliche Süßwasserbedarf bei geschätzt 4 370 km³, wobei die Grenze der nachhaltigen Nutzung mit 4 000 km³ angegeben wird.“

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent man den aktuellen Süßwasserbedarf reduzieren müsste, um die Grenze der nachhaltigen Nutzung zu erreichen. *[0/1 P.]*

Der sogenannte *Earth Overshoot Day* („Welterschöpfungstag“) ist ein bestimmter Tag des Jahres, an dem die menschliche Nachfrage an natürlichen Ressourcen (wie zum Beispiel auch Süßwasser) die Kapazität der Erde in diesem Jahr übersteigt. Ab dem darauffolgenden Tag befindet sich die Menschheit in einem Defizit.

Jahr	*Earth Overshoot Day*	Anzahl der Tage im Defizit
1990	10. Oktober	82
1995	3. Oktober	89
2000	22. September	100
2005	24. August	129
2010	6. August	147
2015	3. August	150
2016	3. August	150
2017	30. Juli	154

Datenquelle: https://www.overshootday.org/newsroom/past-earth-overshoot-days/ [24.11.2021].

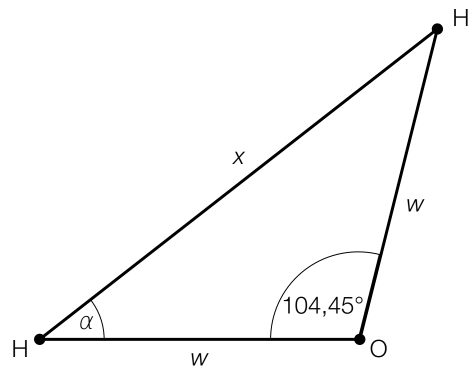
Die Anzahl der Tage im Defizit soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

2) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion auf. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1990. *[0/1 P.]*

3) Argumentieren Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, dass die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell darstellt, um die Entwicklung des *Earth Overshoot Day* zu beschreiben. *[0/1 P.]*

4) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells, nach welcher Zeit t sich die Menschheit 364 Tage im Defizit befindet. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist ein Wassermolekül (H_2O) bestehend aus zwei Wasserstoffatomen (H) und einem Sauerstoffatom (O) als gleichschenkeliges Dreieck dargestellt.



Es gilt: w = 0,09584 Nanometer (nm).

1) Tragen Sie die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

   0,09584 nm = 9,584 · $10^{\square}$ m *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Seitenlänge x. *[0/1 P.]*

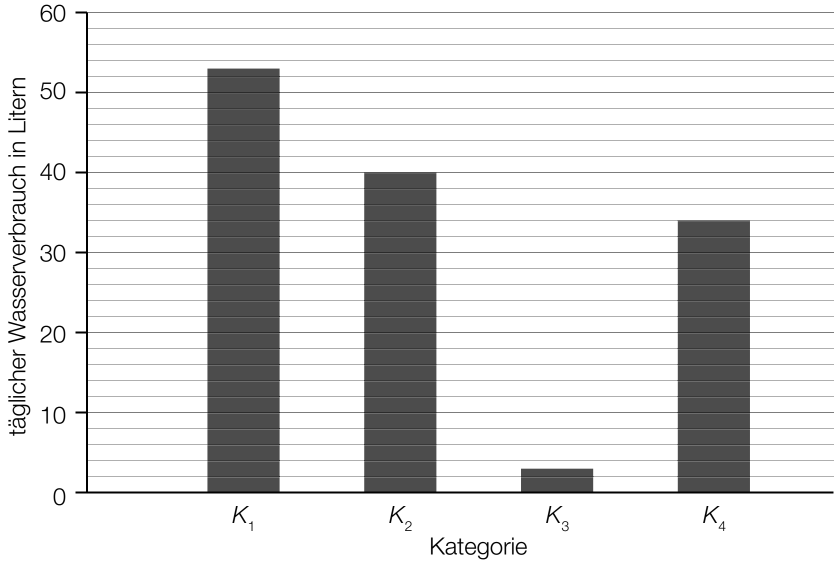
3) Kreuzen Sie denjenigen Zusammenhang an, der im obigen Dreieck <u>nicht</u> gilt. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$2 \cdot \alpha = 180° - 104{,}45°$	☐
$\frac{w}{\sin(\alpha)} = \frac{x}{\sin(104{,}45°)}$	☐
$w^2 = x^2 + w^2 - 2 \cdot x \cdot w \cdot \cos(\alpha)$	☐
$\cos(\alpha) = \frac{x}{2 \cdot w}$	☐
$\sin(\alpha) = \frac{w}{x}$	☐

Möglicher Lösungsweg

Wasser

a1)



a1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Säulendiagramms.

b1) $\frac{370}{4370} = 0{,}0846... = 8{,}46...\ \%$
Man müsste den Süßwasserbedarf um rund 8,5 % reduzieren.

b2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 2{,}885 \cdot t + 78{,}96$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit ab 1990 in Jahren
$f(t)$ ... Anzahl der Tage im Defizit zur Zeit t

b3) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$r = 0{,}978...$

Da der Korrelationskoeffizient nahe bei 1 liegt, lässt sich ein linearer Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen vermuten.

b4) $f(t) = 364$
$t = 98{,}7...$ Jahre

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Regressionsfunktion.
b3) Ein Punkt für das richtige Argumentieren mithilfe des Korrelationskoeffizienten.
b4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Zeit t.

c1) $0{,}09584 \text{ nm} = 9{,}584 \cdot 10^{\boxed{-11}} \text{ m}$

c2) $x = \sqrt{0{,}09584^2 + 0{,}09584^2 - 2 \cdot 0{,}09584^2 \cdot \cos(104{,}45°)} = 0{,}1515...$
$x = 0{,}1515...$ nm

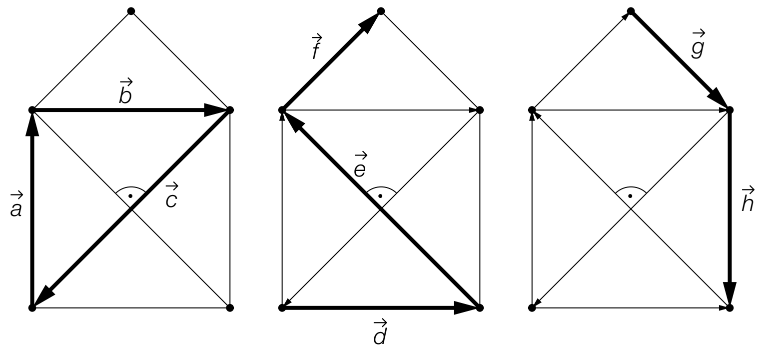
c3)

$\sin(\alpha) = \frac{w}{x}$	☒

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Seitenlänge x.
c3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Kinderrätsel

a) *Das Haus vom Nikolaus* ist ein Zeichenrätsel für Kinder. Ziel ist es, ein „Haus“, das aus einem Quadrat, seinen Diagonalen und einem aufgesetzten Dreieck besteht, ohne Absetzen nachzuzeichnen.
In den nachstehenden Abbildungen ist eine Lösung durch das Zeichnen der Vektoren von $\vec{a}$ (beginnend links unten) bis $\vec{h}$ (endet rechts unten) dargestellt.



1) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	☐
$\vec{f}+\vec{g}=\vec{b}$	☐
$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}+\vec{g}+\vec{h}=\vec{d}$	☐
$\vec{e}+\vec{f}+\vec{g}+\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	☐
$\vec{e}+\vec{b}+\vec{h}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	☐

2) Vervollständigen Sie den nachstehenden Ausdruck zur Berechnung der Länge von $\vec{c}$ durch Eintragen der richtigen Zahl.

$|\vec{c}| =$ __________ $\cdot |\vec{a}|$ *[0/1 P.]*

3) Begründen Sie, warum die nachstehende Gleichung gilt.
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{e}\cdot\vec{c}$ *[0/1 P.]*

In einem bestimmten Koordinatensystem gilt: $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.

4) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{e}=\begin{pmatrix}\square\\\square\end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

b) *Zahlenfolgen-Rätsel* sind beliebte Rätselaufgaben. Dabei soll man eine gegebene Zahlenfolge fortsetzen.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Zahlenfolge so, dass die Zahlen eine geometrische Folge bilden.

27; 18; ☐ ; ☐ *[0/1 P.]*

2) Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz, mit dem man die Zahlenfolge 27; 18 als arithmetische Folge fortsetzen kann. *[0/1 P.]*

c) In einem Rätselheft ist folgende Angabe zu finden:

> Chiara und Beatrice haben gemeinsam einen Geldbetrag von *k* Euro.
> Chiara hat um 1 Euro mehr als Beatrice.

1) Erstellen Sie mithilfe von *k* ein Gleichungssystem zur Berechnung von *x* und *y*.

x ... Geldbetrag von Chiara in Euro
y ... Geldbetrag von Beatrice in Euro *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

$\vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☒

a2) $|\vec{c}| = \sqrt{2} \cdot |\vec{a}|$

a3) Sowohl $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als auch $\vec{e}$ und $\vec{c}$ schließen jeweils einen rechten Winkel ein.
Somit gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{e} \cdot \vec{c} = 0$.

a4) $\vec{e} = \begin{pmatrix} \boxed{-2} \\ \boxed{2} \end{pmatrix}$

a1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
a2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Ausdrucks zur Berechnung der Länge.
a3) Ein Punkt für das richtige Begründen.
a4) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.

b1) 27; 18; $\boxed{12}$; $\boxed{8}$

b2) $a_{n+1} = a_n - 9 \quad \text{mit} \quad a_1 = 27$

Der Punkt ist auch dann zu vergeben, wenn das Startglied $a_1 = 27$ nicht angegeben ist.

b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Zahlenfolge.
b2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des rekursiven Bildungsgesetzes.

c1) $x + y = k$
$x - 1 = y$

c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.

Wasserversorgung

a) Zum Transport von Wasser wurden im antiken Rom sogenannte *Aquädukte* errichtet.
Die Namen der wichtigsten Aquädukte, ihre jeweilige Länge und ihre jeweilige Durchflussrate sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Name	Länge in km	Durchflussrate in tausend m^3 pro Tag
Aqua Appia	16	70
Aqua Vetuis	64	175
Aqua Marcia	91	185
Aqua Tepula	20	18
Aqua Julia	25	48
Aqua Virgo	21	48
Aqua Alsientina	33	16

Datenquelle: Ausstellung im Wasserleitungsmuseum Kaiserbrunn

Linus vermutet, dass die Durchflussrate der Aquädukte linear von deren Länge abhängt.

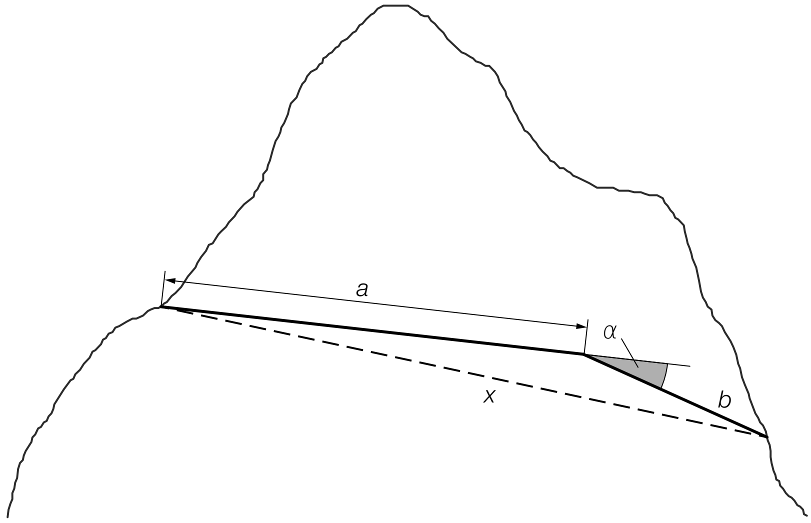
1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion auf. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Längen der in der obigen Tabelle angegebenen Aquädukte. *[0/1 P.]*

In der Fachliteratur wird ein Wert als *Ausreißer* bezeichnet, wenn er mehr als das 1,5-Fache der Standardabweichung vom arithmetischen Mittel abweicht.

3) Überprüfen Sie nachweislich, ob es unter den Längen der in der obigen Tabelle angegebenen Aquädukte einen Ausreißer gibt. *[0/1 P.]*

b) Zwei unterirdische Stollen einer Wasserversorgung, ein Stollen mit der Länge *a* und ein Stollen mit der Länge *b*, sollen durch einen neuen Stollen mit der Länge *x* ersetzt werden (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von *x* auf. Verwenden Sie dabei *a*, *b* und α.

$x =$ ____ *[0/1 P.]*

Es gilt: $a = 8$ km, $b = 3{,}6$ km und $\alpha = 11{,}9°$

2) Berechnen Sie die Länge *x* des neuen Stollens. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stollen mit der Länge *x* und dem Stollen mit der Länge *a*. *[0/1 P.]*

c) Folgende Zusammenhänge wurden festgestellt:

W ... Steigt der Wohlstand in einer Region, so verbessert sich auch die Versorgung mit Wasser.
K ... Verbessert sich die Versorgung mit Wasser, so sinkt die Ausbreitung von Krankheiten in der betreffenden Region.

Die Korrelation für den Zusammenhang *W* ist dabei schwächer als jene für den Zusammenhang *K*.

1) Ordnen Sie den beiden Zusammenhängen jeweils den zutreffenden Korrelationskoeffizienten aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

W	
K	

A	$r = 0$
B	$r = 0{,}87...$
C	$r = -0{,}93...$
D	$r = -0{,}72...$

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 2{,}23 \cdot x - 6{,}06$ *(Koeffizienten gerundet)*

x ... Länge in km
$f(x)$ ... Durchflussrate bei der Länge x in tausend m^3 pro Tag

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

arithmetisches Mittel $\bar{x}$:
$\bar{x} = 38{,}57...$ km

Standardabweichung s_n:
$s_n = 26{,}11...$ km

Auch die Angabe von $s_{n-1} = 28{,}20...$ km *ist als richtig zu werten.*

a3) $38{,}57... + 1{,}5 \cdot 26{,}11... = 77{,}7...$
$91 > 77{,}7...$

oder:

$38{,}57... + 1{,}5 \cdot 28{,}20... = 80{,}8...$
$91 > 80{,}8...$

Aqua Marcia ist also ein Ausreißer.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung.
a3) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

b1) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(180° - \alpha)}$

b2) $x = \sqrt{8^2 + 3{,}6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3{,}6 \cdot \cos(168{,}1°)} = 11{,}54...$
Der neue Stollen hat eine Länge von rund 11,5 km.

b3) Für den entsprechenden Winkel β gilt:

$$\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{x}{\sin(180° - \alpha)}$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(180° - \alpha)}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{3{,}6 \cdot \sin(168{,}1°)}{11{,}54...}\right) = 3{,}68...°$$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von x.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels.

c1)

W	B
K	C

A	$r = 0$
B	$r = 0{,}87...$
C	$r = -0{,}93...$
D	$r = -0{,}72...$

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Smoothies

Smoothies sind Mixgetränke mit Obst oder Gemüse.

a) In der nachstehenden Tabelle sind der Vitamin-C-Gehalt und der Nährwert von Orangen und Mangos dargestellt.

	Orangen	Mangos
Vitamin-C-Gehalt in mg/g	0,45	0,37
Nährwert in Kilokalorien pro g (kcal/g)	0,47	0,62

Der empfohlene Tagesbedarf eines Menschen an Vitamin C beträgt 100 mg.

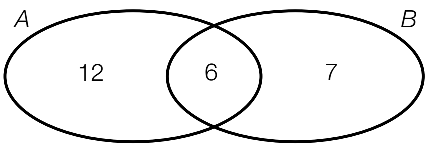
Für einen Smoothie sollen die beiden Obstsorten so gemischt werden, dass man eine Mischung erhält, die 100 mg Vitamin C enthält und einen Nährwert von 125 kcal hat.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die benötigten Mengen an Orangen und Mangos (in g) berechnet werden können. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die benötigten Mengen an Orangen und Mangos (in g). *[0/1 P.]*

b) 27 Schülerinnen bereiten Smoothies mit Orangen und/oder Mangos zu.

Jede Schülerin darf höchstens 1 Smoothie verkosten.
Im nachstehenden Venn-Diagramm sind die Anzahlen der Schülerinnen dargestellt, die diese Smoothies nach der Zubereitung verkosten.



A … Menge der Schülerinnen, die einen Smoothie verkosten, der Orangen enthält
B … Menge der Schülerinnen, die einen Smoothie verkosten, der Mangos enthält

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent dieser 27 Schülerinnen keinen Smoothie verkosten. *[0/1 P.]*

Die Menge aller Schülerinnen, die einen Smoothie verkosten, der nur eine einzige der oben genannten Obstsorten enthält, wird mit *L* bezeichnet.

2) Kennzeichnen Sie im obigen Venn-Diagramm die Menge *L*. *[0/1 P.]*

3) Geben Sie die Menge *L* in Mengensymbolik an. *[0/1 P.]*

c) Die Funktion f beschreibt näherungsweise die vom Körper aufgenommene Vitamin-C-Menge in Abhängigkeit von der konsumierten Vitamin-C-Menge.

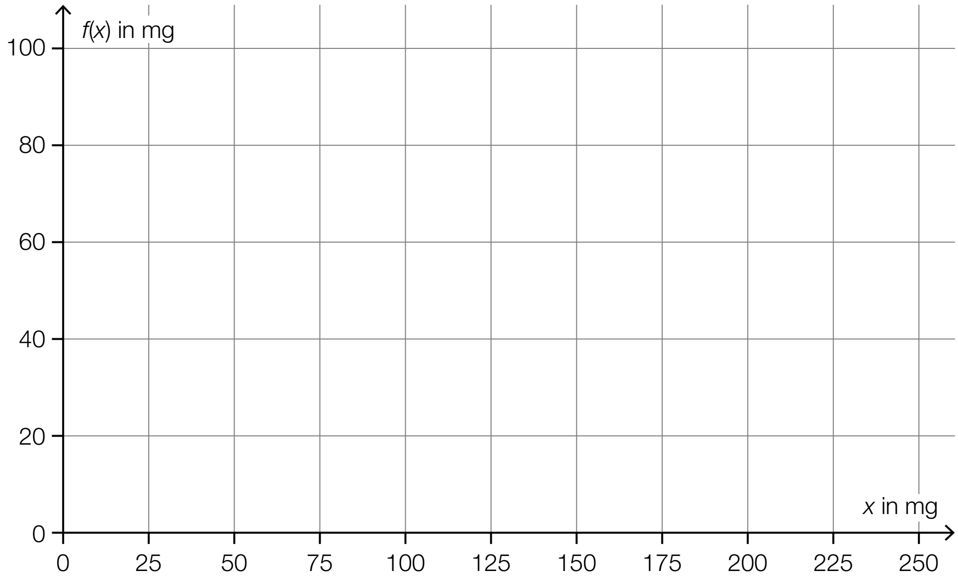
$f(x) = 28{,}7 \cdot \ln(x) - 73{,}6 \quad \text{mit} \quad 25 \leq x \leq 250$

x … konsumierte Vitamin-C-Menge in mg
$f(x)$ … vom Körper aufgenommene Vitamin-C-Menge in mg

Für alle x mit $25 \leq x \leq 250$ gilt: $f'(x) > 0$

1) Interpretieren Sie die obige Ungleichung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion f ein. *[0/1 P.]*



Möglicher Lösungsweg

a1) x … Menge an Orangen in g
y … Menge an Mangos in g

$0{,}45 \cdot x + 0{,}37 \cdot y = 100$
$0{,}47 \cdot x + 0{,}62 \cdot y = 125$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 149{,}8...$
$y = 88{,}0...$

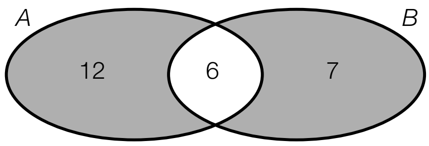
Es werden rund 150 g Orangen und rund 88 g Mangos benötigt.

a1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Mengen.

b1) $\frac{27 - 12 - 6 - 7}{27} = \frac{2}{27} = 0{,}0740...$

Rund 7,4 % der Schülerinnen verkosten keinen Smoothie.

b2)



b3) $L = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

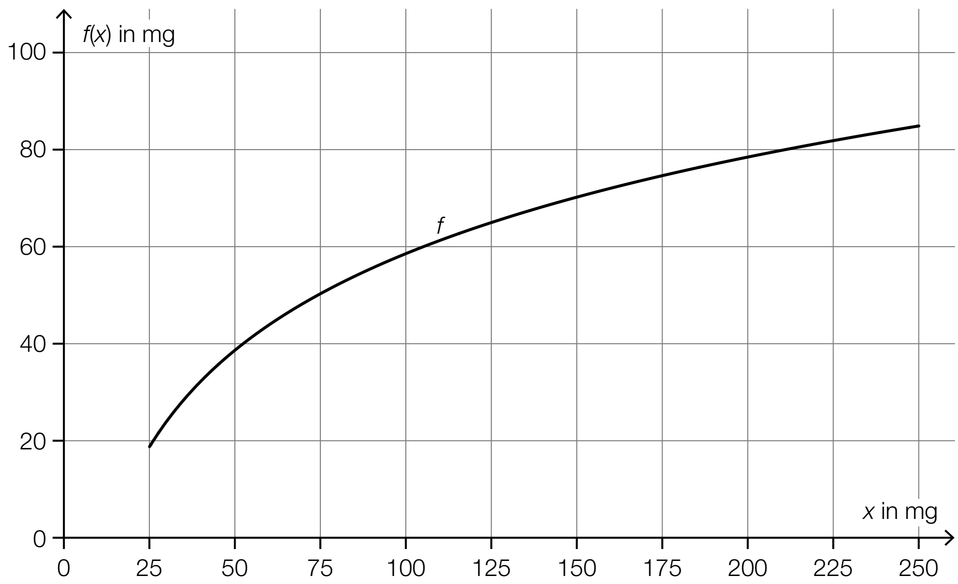
oder:

$L = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
b2) Ein Punkt für das Kennzeichnen der richtigen Menge L.
b3) Ein Punkt für das richtige Angeben der Menge L in Mengensymbolik.

c1) Wird die konsumierte Vitamin-C-Menge erhöht, so erhöht sich auch die vom Körper aufgenommene Vitamin-C-Menge.

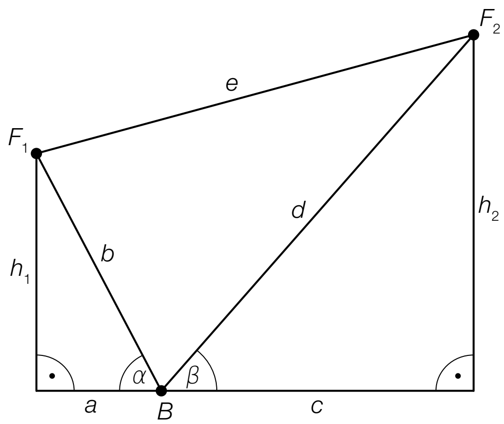
c2)



c1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
c2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen.

Flugzeuge (3)

a) Ein bestimmtes Flugzeug befindet sich nach dem Start im Steigflug. Barbara befindet sich im Punkt B und sieht das Flugzeug zunächst im Punkt F_1 und kurze Zeit später im Punkt F_2 (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung in der Ansicht von der Seite).



1) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Formel an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$b = \frac{h_1}{\sin(\alpha)}$	☐
$d = \sin(90°) \cdot \frac{h_2}{\sin(\beta)}$	☐
$e = \sqrt{b^2 + d^2 - 2 \cdot b \cdot d \cdot \cos(180° - \alpha - \beta)}$	☐
$a = \frac{h_1}{\cos(\alpha)}$	☐
$c = \frac{h_2}{\tan(\beta)}$	☐

b) Zwei Flugzeuge fliegen in gleicher, konstant bleibender Höhe mit jeweils konstanter Geschwindigkeit.
Die Kurse der zwei Flugzeuge können dabei modellhaft in der Ansicht von oben als Vektoren dargestellt werden.

Das erste Flugzeug fliegt in 12 min vom Punkt A zum Punkt B. Sein Kurs kann durch den Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 90 \\ 70 \end{pmatrix}$ (in km) beschrieben werden.

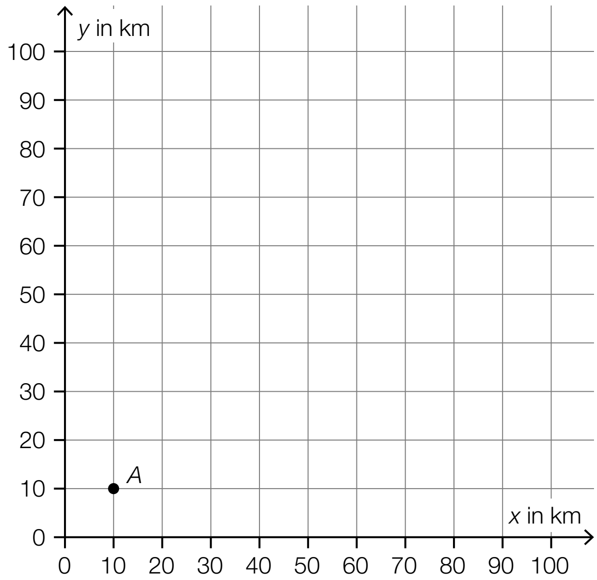
1) Berechnen Sie die Geschwindigkeit dieses Flugzeugs auf seinem Weg von A nach B in km/h. *[0/1 P.]*

Das zweite Flugzeug fliegt vom Punkt A zum Punkt C einen Kurs, der durch den Vektor $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix}$ (in km) beschrieben werden kann.

2) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. *[0/1 P.]*

Das zweite Flugzeug fliegt vom Punkt C aus direkt zum Punkt B.

3) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Vektor $\overrightarrow{CB}$ als Pfeil ausgehend vom Punkt C ein. *[0/1 P.]*



c) Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug auf einen Flughafen. Nachdem es einen Kontrollpunkt überflogen hat, kann seine Höhe über der Landebahn näherungsweise durch die Polynomfunktion 3. Grades h beschrieben werden.

$h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x ... waagrechte Entfernung vom Kontrollpunkt in km
$h(x)$ ... Höhe über der Landebahn in der Entfernung x in m

In einer waagrechten Entfernung von 12 km vom Kontrollpunkt nimmt die Höhe pro km waagrechter Entfernung am stärksten ab.

1) Tragen Sie die fehlenden Zeichen („<", „=" oder „>") in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$h'(12)$ ☐ 0

$h''(12)$ ☐ 0 *[0/1 P.]*

Der Graph der Funktion h hat den Wendepunkt $W = (12|1\,000)$ und den Tiefpunkt $T = (24|0)$.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion h. *[0/1/2 P.]*

3) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion h. *[0/1 P.]*

d) Bei einem Landeanflug eines Flugzeugs wurde die Außentemperatur in verschiedenen Höhen gemessen (siehe nachstehende Tabelle).

Höhe über dem Meeresspiegel in m	2925	2301	2000	1665	1370	1108	700	200
Außentemperatur in °C	–5	–4	–2	+1	+3	+5	+8	+8

Die Außentemperatur soll in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresspiegel durch die lineare Funktion T beschrieben werden.

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in m
$T(h)$ ... Außentemperatur in der Höhe h in °C

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion T auf. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

$a = \frac{h_1}{\cos(\alpha)}$	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

b1) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{90^2 + 70^2}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 114{,}01\ldots \text{ km}$

12 min = 0,2 h

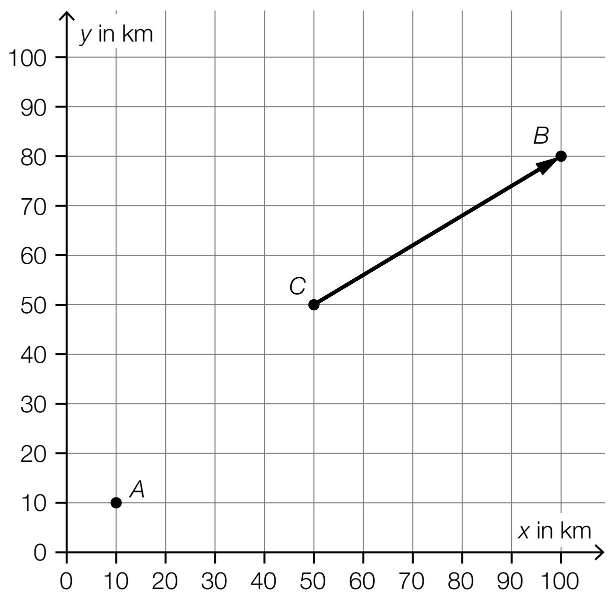
$v = \frac{114{,}01\ldots}{0{,}2} = 570{,}0\ldots$

Die Geschwindigkeit beträgt rund 570 km/h.

b2) $\arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}90\\70\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}40\\40\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}90\\70\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}40\\40\end{pmatrix}\right|}\right) = 7{,}12\ldots°$

Der Winkel beträgt rund 7,1°.

b3)



b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Geschwindigkeit in km/h.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels.
b3) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Vektors $\overrightarrow{CB}$ als Pfeil ausgehend vom Punkt C.

c1) $h'(12)$ $\boxed{<}$ 0

$h''(12)$ $\boxed{=}$ 0

c2) $h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$
$h''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

I: $h(12) = 1\,000$
II: $h''(12) = 0$
III: $h(24) = 0$
IV: $h'(24) = 0$

oder:

I: $12^3 \cdot a + 12^2 \cdot b + 12 \cdot c + d = 1\,000$
II: $6 \cdot a \cdot 12 + 2 \cdot b = 0$
III: $24^3 \cdot a + 24^2 \cdot b + 24 \cdot c + d = 0$
IV: $3 \cdot a \cdot 24^2 + 2 \cdot b \cdot 24 + c = 0$

c3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{125}{432} = 0{,}289...$

$b = -\frac{125}{12} = -10{,}4...$

$c = 0$

$d = 2\,000$

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zeichen.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mit den Koordinaten der beiden Punkte.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Ableitungen.
c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten der Funktion h.

d1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$T(h) = -0{,}0057 \cdot h + 10{,}43$ *(Koeffizienten gerundet)*

d1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion T.

Gewinnspiele

Bei den in dieser Aufgabe behandelten Gewinnspielen wird ein fairer Spielwürfel geworfen, bei dem die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten. Dabei wird der Spielwürfel 2-mal hintereinander geworfen.

a) Beim 2-maligen Werfen eines Spielwürfels gibt es 36 mögliche Würfelergebnisse.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle durch Eintragen der entsprechenden Zahlen. *[0/1 P.]*

Anzahl der möglichen Würfelergebnisse, bei denen ...		
die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf ist	beide Augenzahlen gleich sind	die Augenzahl beim 2. Wurf größer als beim 1. Wurf ist
15		

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf ist.

P(„die Augenzahl ist beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf“) = ______________ *[0/1 P.]*

Folgende Bedingungen gelten für ein Spiel:

Ist die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf, so gewinnt man 5 Euro.
Ist die Augenzahl beim 2. Wurf größer als beim 1. Wurf, so gewinnt man 3 Euro.
Sind die beiden Augenzahlen gleich, so verliert man 10 Euro.

3) Berechnen Sie den Erwartungswert für den Gewinn bei diesem Spiel. *[0/1 P.]*

b) Im Folgenden sind die Wahrscheinlichkeiten einer Zufallsvariablen X für ein anderes Gewinnspiel dargestellt.
Die Zufallsvariable X gibt dabei die größte geworfene Augenzahl beider Würfe an.

Es wird folgende Schreibweise verwendet:

$(\underbrace{⚀}_{\text{1. Wurf}}, \underbrace{⚃}_{\text{2. Wurf}})$

$P(X = 1) = P(\{(⚀, ⚀)\}) = \frac{1}{36}$

$P(X = 2) = P(\{(⚁, ⚀), (⚀, ⚁), (⚁, ⚁)\}) = \frac{3}{36}$

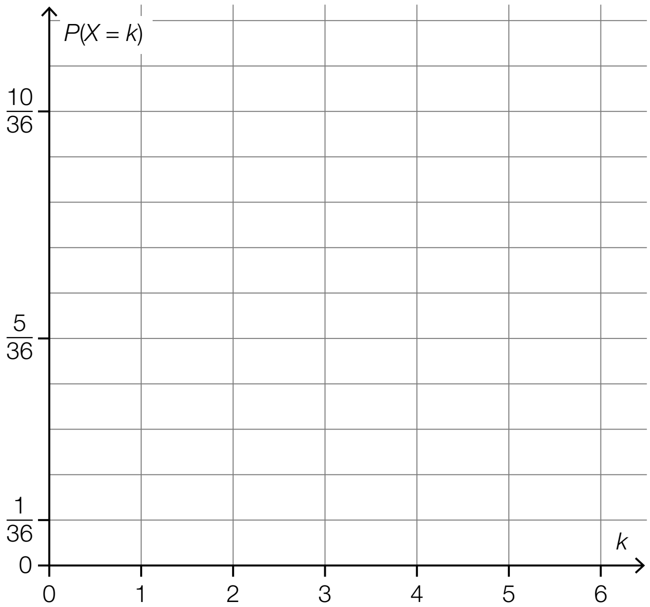
$P(X = 3) = P(\{(⚂, ⚀), (⚂, ⚁), (⚂, ⚂), (⚁, ⚂), (⚀, ⚂)\}) = \frac{5}{36}$

usw.

$P(X = 6) = \ldots = \frac{11}{36}$

Die obigen Wahrscheinlichkeiten bilden eine arithmetische Folge.

1) Zeigen Sie dies für $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ und $P(X = 3)$. *[0/1 P.]*
2) Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für diese Folge. *[0/1 P.]*
3) Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion als Säulendiagramm dar. *[0/1 P.]*



Möglicher Lösungsweg

a1)

Anzahl der möglichen Würfelergebnisse, bei denen ...		
die Augenzahl beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf ist	beide Augenzahlen gleich sind	die Augenzahl beim 2. Wurf größer als beim 1. Wurf ist
15	6	15

a2) P(„die Augenzahl ist beim 2. Wurf kleiner als beim 1. Wurf") $= \frac{15}{36} = 0{,}4166...$

a3) X ... Gewinn in Euro

$E(X) = 5 \cdot \frac{15}{36} - 10 \cdot \frac{6}{36} + 3 \cdot \frac{15}{36} = 1{,}66...$

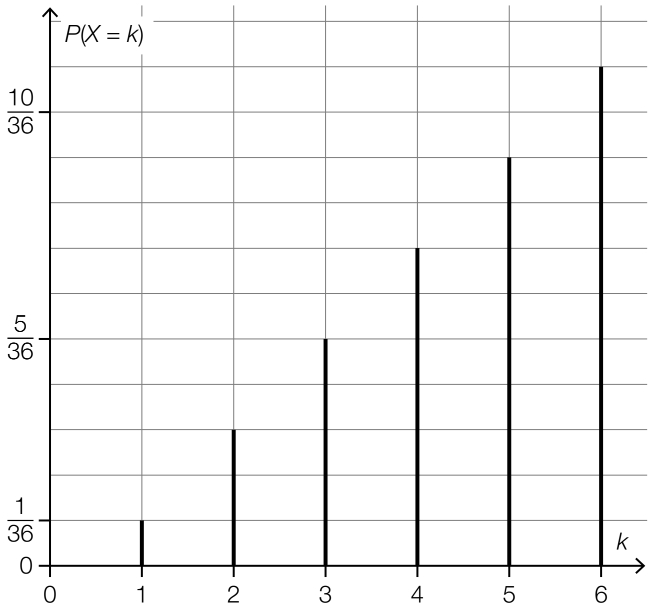
Der Erwartungswert für den Gewinn bei diesem Spiel beträgt rund 1,7 Euro.

a1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Tabelle.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts.

b1) Bei einer arithmetischen Folge ist die Differenz aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant.
Es gilt:
$P(X = 2) - P(X = 1) = P(X = 3) - P(X = 2) = \frac{2}{36}$
Es handelt sich hier also um eine arithmetische Folge.

b2) $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{36}$ mit $a_1 = \frac{1}{36}$

b3)



b1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
b2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des rekursiven Bildungsgesetzes.
b3) Ein Punkt für das richtige Darstellen der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Avengers

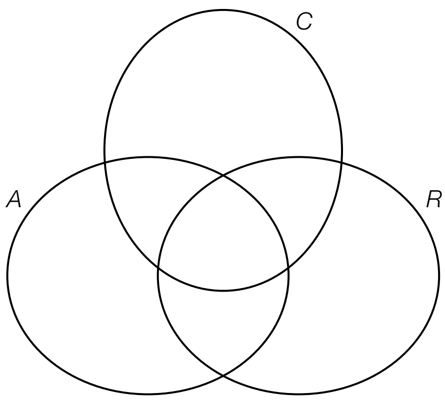
Die Avengers sind eine Gruppe von Superheldinnen und Superhelden des Comicverlags MARVEL™. Neben zahlreichen Comics gibt es auch mehrere Verfilmungen ihrer Geschichten.

a) Die verschiedenen Superheldinnen und Superhelden tauchen dabei oft in mehreren Filmen auf.

Die nachstehende Tabelle ist für die 4 Superhelden Captain America, Hulk, Iron Man und Thor ausgefüllt.

Filmtitel	mitwirkende Superhelden
Civil War	Captain America, Iron Man
Ragnarok	Hulk, Thor
Avengers	Captain America, Hulk, Iron Man, Thor

1) Kennzeichnen Sie im nachstehenden Venn-Diagramm denjenigen Bereich, in dem Iron Man liegt. *[0/1 P.]*



A ... Menge der Superhelden, die in *Avengers* mitwirken
C ... Menge der Superhelden, die in *Civil War* mitwirken
R ... Menge der Superhelden, die in *Ragnarok* mitwirken

2) Geben Sie den Bereich des Venn-Diagramms, in dem Captain America liegt, in Mengensymbolik an. *[0/1 P.]*

3) Kreuzen Sie diejenige Menge an, die <u>nicht</u> leer ist. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$R \setminus (C \cup A)$	☐
$(C \cap R) \setminus A$	☐
$A \setminus (C \cup R)$	☐
$A \cap R \cap C$	☐
$(R \cap A) \setminus C$	☐

Der Superheld Black Panther liegt in der folgenden Menge: $C \setminus (A \cup R)$

4) Geben Sie an, in wie vielen der obigen 3 Filme Black Panther gemeinsam mit Hulk und Thor zu sehen ist. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Tabelle sind die Erscheinungsjahre und die Einnahmen der ersten 6 MARVEL™-Filme angegeben.

Filmtitel	Erscheinungsjahr	Einnahmen pro Film in Millionen US-Dollar
Der unglaubliche Hulk	2008	263,4
Iron Man	2008	585,2
Iron Man 2	2010	623,9
The First Avenger	2011	370,6
Thor	2011	449,3
Avengers	2012	1 519,6

Die Entwicklung der Einnahmen pro Film soll in Abhängigkeit vom Erscheinungsjahr durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Erscheinungsjahr 2008. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den zugehörigen Korrelationskoeffizienten. *[0/1 P.]*

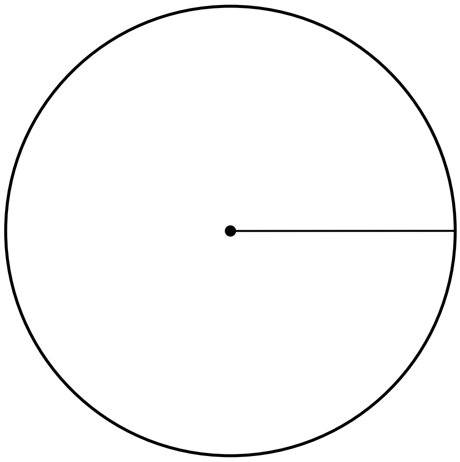
c) Auf einer bestimmten Online-Plattform werden Filme mit 1 bis 5 Sternen bewertet.

In der nachstehenden Tabelle sind die Bewertungen aller 23 MARVEL™-Filme (Stand 2019) eingetragen.

Anzahl der Filme	Bewertung in Sternen
1	★★★ (3)
6	★★★⯪ (3,5)
15	★★★★ (4)
1	★★★★⯪ (4,5)

Die Bewertungen dieser 23 Filme sollen in einem Kreisdiagramm dargestellt werden.

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Kreisdiagramm durch Einzeichnen der entsprechenden 4 Sektoren. *[0/1 P.]*



Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Sterne eines aus diesen 23 Filmen zufällig ausgewählten Films an.

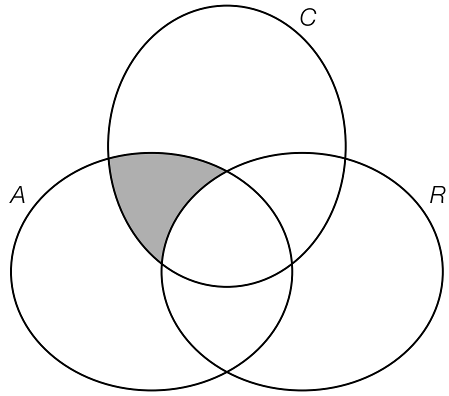
2) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$. *[0/1 P.]*

Daniela wählt 2 verschiedene dieser 23 Filme zufällig aus.

3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Filme jeweils eine Bewertung von mindestens 4 Sternen haben. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $(C \cap A) \setminus R$

a3)

$(R \cap A) \setminus C$	☒

a4) 0 (Black Panther ist in keinem dieser 3 Filme gemeinsam mit Thor und Hulk zu sehen.)

a1) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Bereichs im Venn-Diagramm.
a2) Ein Punkt für das richtige Angeben in Mengensymbolik.
a3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
a4) Ein Punkt für das Angeben, dass es keinen solchen Film gibt.

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

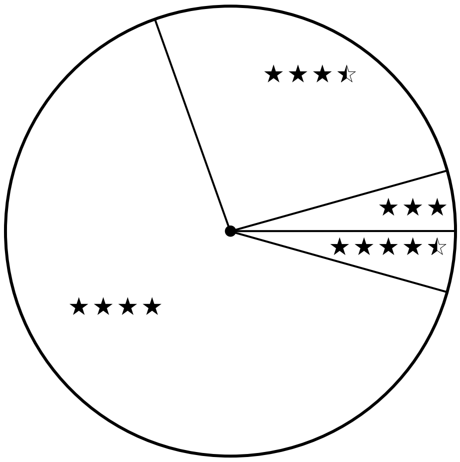
$f(t) = 154{,}42 \cdot t + 326{,}49$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2008
$f(t)$ ... Einnahmen pro Film zur Zeit t in Millionen US-Dollar

b2) Berechnung des Korrelationskoeffizienten r mittels Technologieeinsatz:
$r = 0{,}569...$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion f.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Korrelationskoeffizienten.

c1)



3 bzw. 4,5 Sterne: 15,7°
3,5 Sterne: 93,9°
4 Sterne: 234,8°

(Werte gerundet)

c2) $E(X) = \frac{1}{23} \cdot 3 + \frac{6}{23} \cdot 3{,}5 + \frac{15}{23} \cdot 4 + \frac{1}{23} \cdot 4{,}5 = 3{,}847...$

c3) $\frac{16}{23} \cdot \frac{15}{22} = \frac{120}{253} = 0{,}4743...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 47,4 %.

c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Kreisdiagramms.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts $E(X)$.
c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Puzzles

a) Bei einem sogenannten *Rundpuzzle* werden die Teile in Ringen aneinandergelegt.
Der innerste Ring besteht aus 4 Teilen. Die Anzahl der Teile jedes Ringes ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

n (Nummer des Ringes – von innen aus gezählt)	1	2	3	4	5	6	7	8
r_n (Anzahl der Teile im n-ten Ring)	4	10	16	22	32	36	38	42

Die Anzahl der Teile im jeweiligen Ring kann durch die Folge (r_n) beschrieben werden.

1) Begründen Sie, warum sich die Anzahl der Teile im n-ten Ring bis $n = 4$ durch eine arithmetische Folge beschreiben lässt. *[0/1 P.]*

2) Weisen Sie nach, dass sich die Anzahl der Teile im n-ten Ring ab $n = 5$ nicht mehr durch eine arithmetische Folge beschreiben lässt. *[0/1 P.]*

Die gesamte Anzahl aller Teile bis zum n-ten Ring kann bis $n = 4$ mithilfe der nachstehenden Formel berechnet werden.

$s_n = k \cdot n^2 + \ell \cdot n$

s_n ... gesamte Anzahl der Teile in den ersten n Ringen
n ... Anzahl der Ringe
k, ℓ ... Parameter

Es gilt: $s_1 = 4$ und $s_2 = 14$

3) Berechnen Sie die Parameter k und ℓ. *[0/1 P.]*

b) Vom Hersteller *B* gibt es Puzzles, deren Teilezahlen der Folge (b_n) entsprechen.
b_1 ist dabei die Teilezahl des größten Puzzles (d.h. des Puzzles mit den meisten Teilen).

$b_n = 4\,000 \cdot q^{n-1} \quad \text{mit} \quad n \leq 6$

Das fünftgrößte Puzzle ($n = 5$) hat 250 Teile.

1) Ermitteln Sie den Parameter q. *[0/1 P.]*

Das fünftgrößte Puzzle des Herstellers *C* hat doppelt so viele Teile wie das fünftgrößte Puzzle des Herstellers *B*. Dieses Verhältnis gilt für alle Puzzlegrößen.

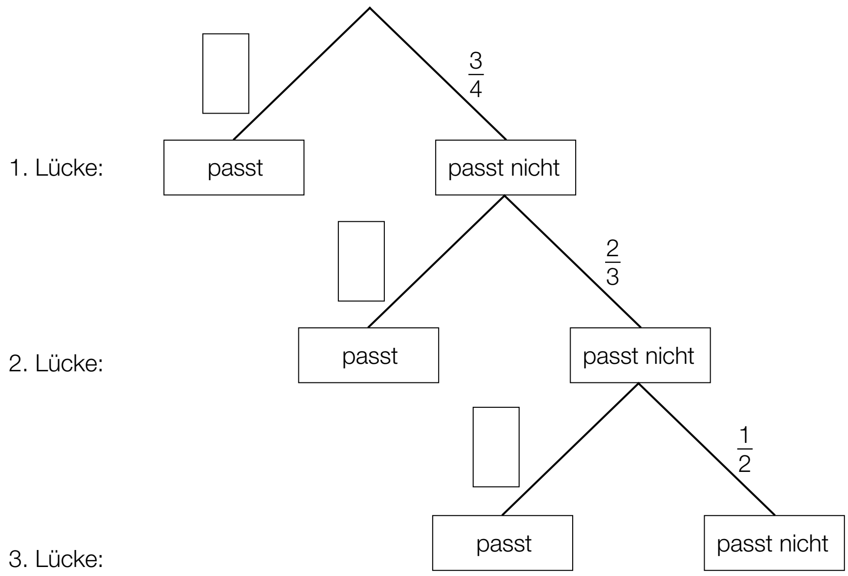
Die Teilezahlen der Puzzles des Herstellers *C* entsprechen der Folge (c_n).

2) Kreuzen Sie das auf die Folge (c_n) zutreffende Bildungsgesetz an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$c_n = 4\,000 \cdot q^{2 \cdot n - 1}$	☐
$c_n = 4\,000 \cdot q^{2 \cdot (n - 1)}$	☐
$c_n = 4\,000 \cdot (2 \cdot q)^{n-1}$	☐
$c_n = (4\,000 \cdot 2) \cdot q^{n-1}$	☐
$c_n = 4\,000 \cdot q^{(n-1)^2}$	☐

c) Bei einem Puzzle für Kinder sind noch 4 Lücken für jeweils 1 Teil frei.

Andreas nimmt eines der 4 Teile und versucht so oft, es in jede der Lücken zu legen, bis er die richtige Lücke gefunden hat.
Dieser Vorgang wird bis zur 3. Lücke durch das nachstehende Baumdiagramm beschrieben.



1) Tragen Sie im obigen Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

Lena wählt ein Teil zufällig aus und betrachtet die folgenden zwei Ereignisse:

E_1 ... „das Teil passt in die 1. Lücke“
E_2 ... „das Teil passt nicht in die 1. Lücke, aber es passt in die 2. Lücke“

2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 gleich groß wie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2 ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Es handelt sich um eine arithmetische Folge, weil (bis $n = 4$) jeder Ring um 6 Teile mehr hat als der vorige.

a2) Im 5. Ring befinden sich 32 Teile, das sind um 10 (und nicht um 6) mehr als im 4. Ring.

a3) I: $k \cdot 1^2 + \ell \cdot 1 = 4$
II: $k \cdot 2^2 + \ell \cdot 2 = 14$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$k = 3$
$\ell = 1$

a1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
a2) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Parameter k und ℓ.

b1) $4\,000 \cdot q^{5-1} = 250$

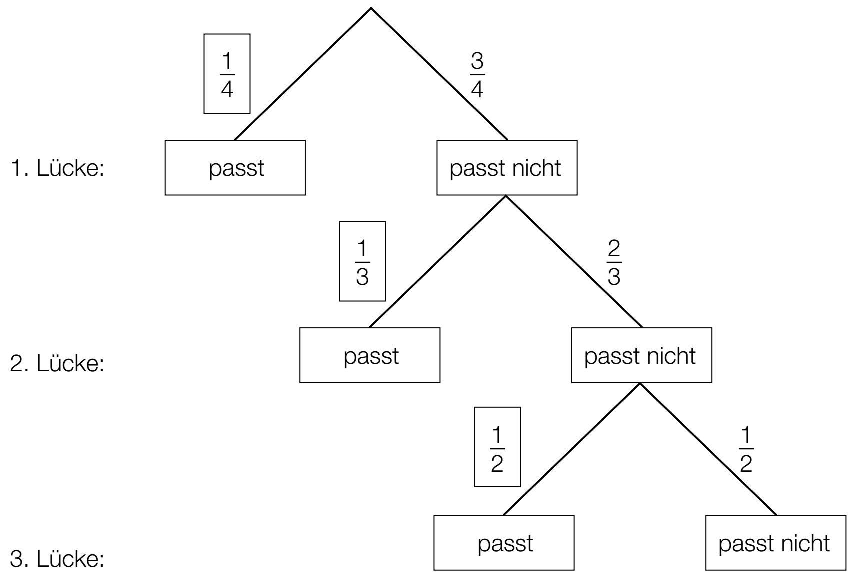
$$q = \sqrt[4]{\frac{250}{4\,000}} = 0{,}5$$

b2)

$c_n = (4\,000 \cdot 2) \cdot q^{n-1}$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters q.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1)



c2) $P(E_1) = \frac{1}{4}$

$P(E_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

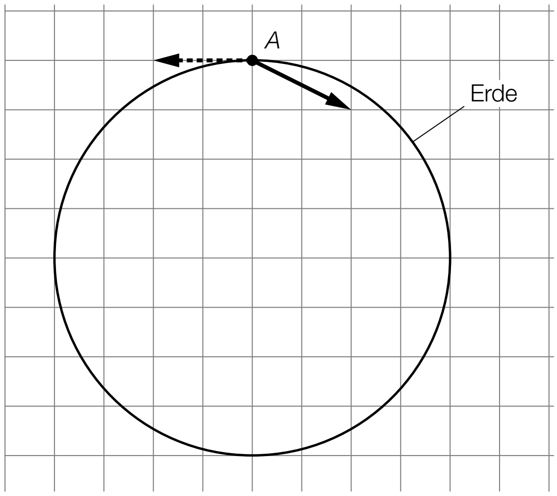
Die beiden Wahrscheinlichkeiten sind gleich groß.

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Wahrscheinlichkeiten.
c2) Ein Punkt für das richtige Zeigen.

Erde

a) In jedem Punkt der Erdoberfläche entsteht eine Gezeitenkraft, die vereinfacht betrachtet durch Addition von Anziehungskraft des Mondes und Trägheitskraft zustandekommt.

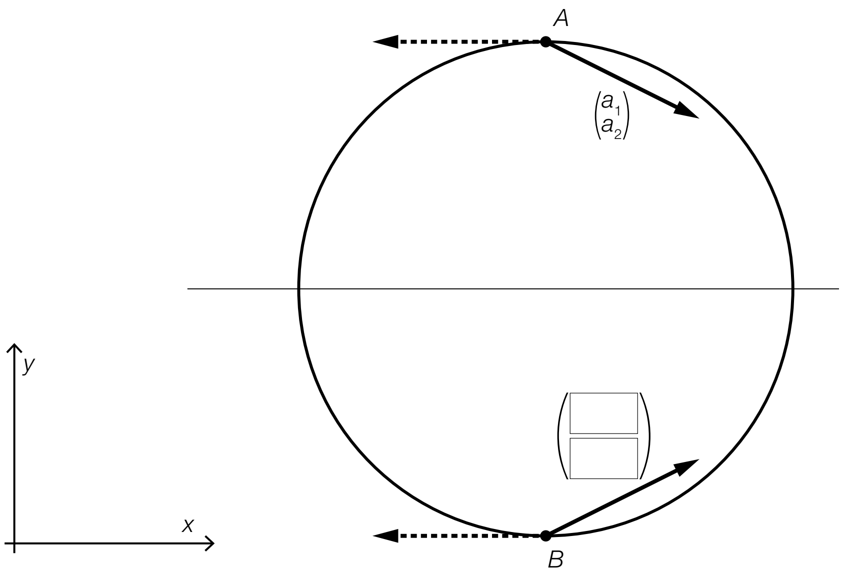
Der Punkt *A* liegt auf der Erdoberfläche. In diesem Punkt sind die zugehörigen Kraftvektoren als Pfeile dargestellt. (Siehe nachstehende modellhafte Abbildung.)



Der durchgezogene Pfeil symbolisiert dabei die Anziehungskraft des Mondes, der strichlierte Pfeil symbolisiert die Trägheitskraft.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die resultierende Gezeitenkraft im Punkt *A* als Pfeil ein. *[0/1 P.]*

Der Punkt *B* liegt ebenfalls auf der Erdoberfläche. Auch hier sind die zugehörigen Kraftvektoren als Pfeile eingezeichnet. (Siehe nachstehende modellhafte Abbildung.)



Die entsprechenden Vektoren sind entlang der eingezeichneten Geraden gespiegelt.

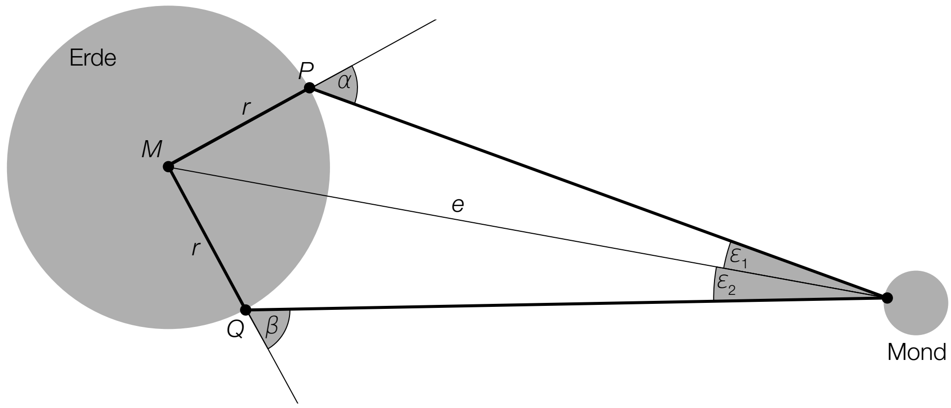
2) Ergänzen Sie in der obigen Abbildung mithilfe von a_1 und a_2 die fehlenden Koordinaten des Vektors für die Anziehungskraft des Mondes im Punkt *B*. *[0/1 P.]*

Im Mittelpunkt der Erde ist der Vektor der Trägheitskraft $\vec{f}$ der Gegenvektor zur Anziehungskraft $\vec{a}$ des Mondes.
Dabei gilt: $\vec{f} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Gleichung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\vec{f} = -\vec{a}$	☐
$\vec{f} \cdot \vec{a} = 0$	☐
$\lvert\vec{f}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert$	☐
$\vec{f} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\vec{f} - \vec{a} = 2 \cdot \vec{f}$	☐

b) Mithilfe der sogenannten *Triangulation* lässt sich die Entfernung Erde–Mond bestimmen. Dazu werden unter anderem ausgehend von den Punkten P und Q auf der Erde mehrere Winkel bestimmt (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



1) Markieren Sie in der obigen Abbildung den Winkel γ, für den gilt:
$360° = (180° - \alpha) + (180° - \beta) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \gamma$ *[0/1 P.]*

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von $\sin(\varepsilon_1)$ auf. Verwenden Sie dabei r, e und α.

$\sin(\varepsilon_1) =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Strecke ein, deren Länge ℓ sich mit dem nachstehenden Ausdruck berechnen lässt.
$\ell = \sqrt{2 \cdot r^2 - 2 \cdot r^2 \cdot \cos(\gamma)}$ *[0/1 P.]*

c) In einer Fernseh-Dokumentation über die Erde wurden einige Überlegungen zur Größe der Erde angestellt. Die Erde wurde dabei modellhaft als kugelförmig angenommen.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

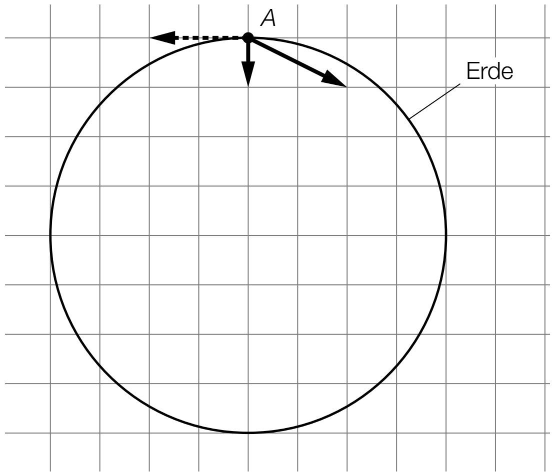
_____①_____ man den Durchmesser der Erde, so _____②_____ sich ihr Volumen.

①	
Verdoppelt	☐
Verdreifacht	☐
Vervierfacht	☐

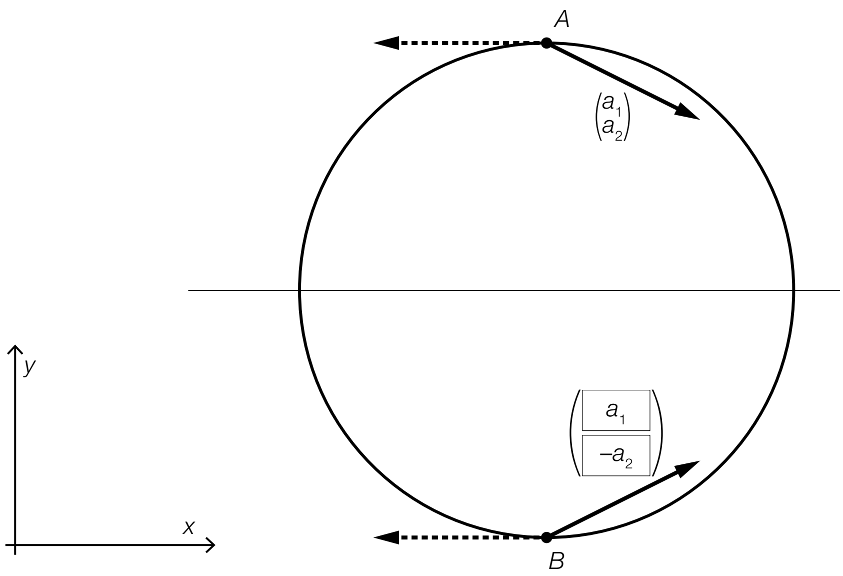
②	
verdoppelt	☐
verachtfacht	☐
verneunfacht	☐

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2)

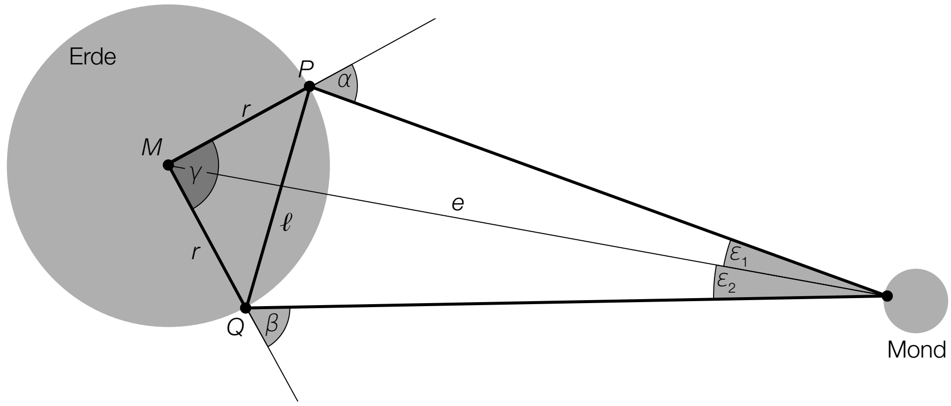


a3)

$\vec{f} \cdot \vec{a} = 0$	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der resultierenden Gezeitenkraft im Punkt *A*.
a2) Ein Punkt für das Ergänzen der richtigen Koordinaten.
a3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

b1 und b3)



b2) $\sin(\varepsilon_1) = r \cdot \frac{\sin(180° - \alpha)}{e}$

oder:

$\sin(\varepsilon_1) = r \cdot \frac{\sin(\alpha)}{e}$

b1) Ein Punkt für das Markieren des richtigen Winkels γ.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b3) Ein Punkt für das Einzeichnen der richtigen Strecke.

c1)

①	
Verdoppelt	☒

②	
verachtfacht	☒

c1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Bärenwald Arbesbach*

In der Gemeinde Arbesbach im Waldviertel wurde von einem Tierschutzverein eine Auffangstation für Bären errichtet.

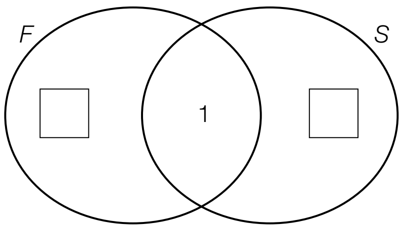
a) In der nachstehenden Tabelle sind die jährlichen Futterkosten pro Bär für das Jahr 2008 angegeben.

Futtermittel	jährliche Futterkosten pro Bär in Euro	Futterspende
Obst	1 960	nein
Gemüse	1 070	nein
Brot	270	nein
Essensreste	200	ja
Walnüsse	keine	ja
Honig	keine	ja
Sonstiges	937	nein

Im Jahr 2008 wurden im Bärenwald 6 Bären versorgt. Das Jahr 2008 war ein Schaltjahr mit 366 Tagen.

1) Berechnen Sie die täglichen Futterkosten im Jahr 2008 für diese 6 Bären. *[0/1 P.]*

Im nachstehenden Venn-Diagramm sind die Mengen F und S dargestellt.



F ... Menge der Futtermittel, die Futterkosten verursacht haben
S ... Menge der Futtermittel, die als Futterspende abgegeben wurden

2) Geben Sie dasjenige Futtermittel an, das im Bereich $F \cap S$ liegt. *[0/1 P.]*

3) Tragen Sie die zwei fehlenden Anzahlen der Elemente (von $F \setminus S$ und $S \setminus F$) in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

b) Im Bärenwald Arbesbach steht eine Tafel mit Informationen über die Vermehrung von Streunerkatzen. Auf dieser Tafel findet man folgende Angaben:

Jahr n	Anzahl der Streunerkatzen im Jahr n
1	2
2	12
3	66
4	382
6	12680

Die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Streunerkatzen kann als Folge (a_n) aufgefasst werden.

1) Zeigen Sie, dass es sich bei (a_n) <u>nicht</u> um eine geometrische Folge handelt. *[0/1 P.]*

In einem einfachen Modell soll die Vermehrung von Streunerkatzen dennoch näherungsweise durch eine geometrische Folge beschrieben werden. Diese geometrische Folge wird mit (b_n) bezeichnet.

2) Erstellen Sie nur mithilfe der Folgenglieder $b_1 = 2$ und $b_4 = 382$ ein explizites Bildungsgesetz der geometrischen Folge (b_n). *[0/1 P.]*

3) Zeigen Sie, dass b_6 um weniger als 1 % (von a_6) kleiner als a_6 ist. *[0/1 P.]*

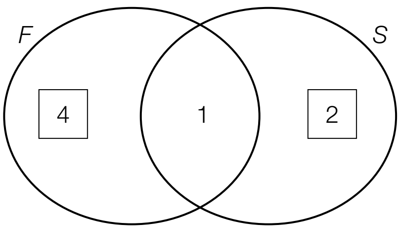
Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{4\,437 \cdot 6}{366} = 72{,}737...$

Die täglichen Futterkosten im Jahr 2008 für diese 6 Bären betrugen rund € 72,74.

a2) Essensreste

a3)



a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der täglichen Futterkosten für 6 Bären.
a2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Futtermittels.
a3) Ein Punkt für das Eintragen der zwei richtigen Anzahlen.

b1) $\frac{12}{2} = 6$

$\frac{66}{12} = 5{,}5$

Da der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder nicht konstant ist, handelt es sich nicht um eine geometrische Folge.

b2) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$b_1 = 2$ und $b_4 = 382$

$382 = 2 \cdot q^3$

$q = 5{,}758...$

$b_n = 2 \cdot 5{,}758...^{n-1}$

b3) $a_6 = 12\,680$

$b_6 = 2 \cdot 5{,}758...^5 = 12\,669{,}2...$

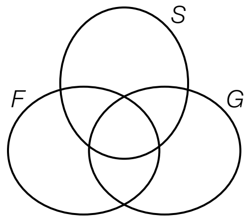
$1 - \frac{12\,669{,}2...}{12\,680} = 0{,}0008...$

b_6 ist also um weniger als 1 % kleiner als a_6.

b1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
b2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des expliziten Bildungsgesetzes.
b3) Ein Punkt für das richtige Zeigen.

Wohnungen (3)*

a) Tanja und Moritz suchen eine gemeinsame Wohnung. Sie teilen die gefundenen Wohnungen nach 3 Kriterien ein.



F ... Menge der Wohnungen mit einem Fenster im Badezimmer
S ... Menge der Wohnungen mit zwei Schlafzimmern
G ... Menge der Wohnungen mit einem Garten

Tanja wünscht sich eine Wohnung, die sowohl zwei Schlafzimmer als auch ein Fenster im Badezimmer als auch einen Garten hat.

Die Menge der Wohnungen, die Tanjas Wünschen entsprechen, wird mit T bezeichnet.

1) Geben Sie T in Mengensymbolik an. Verwenden Sie dabei F, S und G.

$T =$ ______________________ *[0/1 P.]*

Moritz wünscht sich eine Wohnung aus der folgenden Menge:
$M = G \setminus (S \cap F)$

2) Markieren Sie die Menge M in der obigen Abbildung. *[0/1 P.]*

b) Tarek beobachtet die Wertsteigerung seiner Wohnung im Zeitraum von 2014 bis 2020.

Jahr	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Wert der Wohnung in tausend Euro	153	155	158	163	170	171	180

Tarek nimmt an, dass sich die zeitliche Entwicklung des Wertes seiner Wohnung näherungsweise durch die quadratische Funktion W beschreiben lässt.

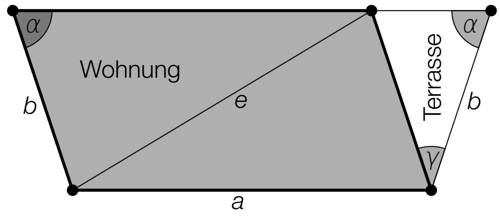
t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2014
$W(t)$ ... Wert der Wohnung zur Zeit t in tausend Euro

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der quadratischen Funktion W auf. *[0/1 P.]*

Tarek plant, seine Wohnung im Jahr 2025 zu verkaufen.

2) Berechnen Sie mithilfe der Funktion W den prognostizierten Wert der Wohnung im Jahr 2025 in Euro. *[0/1 P.]*

c) Sanja betrachtet den Plan einer Wohnung mit Terrasse. Die Grundfläche dieser Wohnung hat modellhaft die Form eines Parallelogramms (siehe nachstehende Abbildung).



1) Stellen Sie mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von γ auf.

γ = ________________________________ *[0/1 P.]*

Der Flächeninhalt der Wohnung und der Flächeninhalt der Terrasse sollen berechnet werden.

2) Ordnen Sie der Wohnung und der Terrasse jeweils die zutreffende Formel zur Berechnung ihres Flächeninhalts aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Wohnung	
Terrasse	

A	$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \sin(\gamma)$
B	$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$
C	$A = b \cdot b \cdot \sin(\alpha - \gamma)$
D	$A = a \cdot b \cdot \sin(180° - \alpha)$

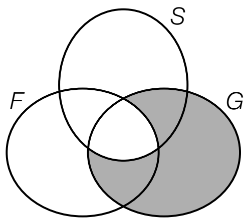
3) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung einen Winkel ω, der durch den nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$\omega = \arcsin\left(\frac{\sin(\alpha) \cdot b}{e}\right)$ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $T = S \cap F \cap G$

a2)



a1) Ein Punkt für das richtige Angeben in Mengensymbolik.
a2) Ein Punkt für das Markieren der richtigen Menge *M*.

b1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$W(t) = 0{,}345 \cdot t^2 + 2{,}393 \cdot t + 152{,}619$ *(Koeffizienten gerundet)*

b2) $W(11) = 220{,}7...$

Gemäß diesem Modell hat die Wohnung im Jahr 2025 einen Wert von rund € 221.000.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der quadratischen Funktion *W*.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des prognostizierten Wertes der Wohnung im Jahr 2025 in Euro.

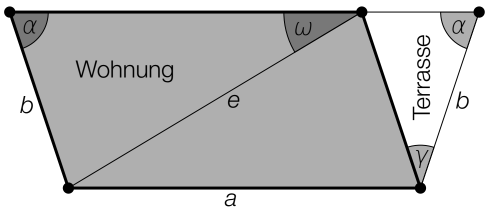
c1) $\gamma = 180° - 2 \cdot \alpha$

c2)

Wohnung	D
Terrasse	A

A	$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot b \cdot \sin(\gamma)$
B	$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$
C	$A = b \cdot b \cdot \sin(\alpha - \gamma)$
D	$A = a \cdot b \cdot \sin(180° - \alpha)$

c3)



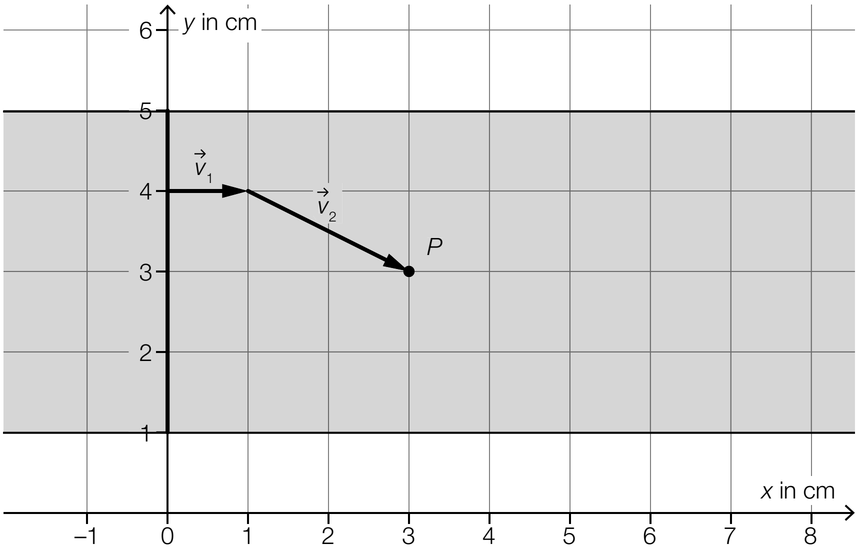
Ein Kennzeichnen eines anderen Winkels mit dem gleichen Winkelmaß ist ebenfalls als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c2) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
c3) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Winkels ω.

Vektorrennen*

Beim Spiel *Vektorrennen* zeichnen die Spieler/innen Pfeile auf einer Rennstrecke in einem Koordinatensystem ein.
Diese Pfeile stellen die Bewegung ihres Fahrzeugs dar.

a) In der nachstehenden Abbildung sind die ersten zwei Bewegungen des Fahrzeugs von Martin auf einer bestimmten Rennstrecke dargestellt.



Der Vektor $\vec{v}_2$ ist in der obigen Abbildung als Pfeil dargestellt.

1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.
$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Vektor $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Pfeil ausgehend vom Punkt P ein. *[0/1 P.]*

Die Länge der Strecke s ist die Summe der Längen der Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$.

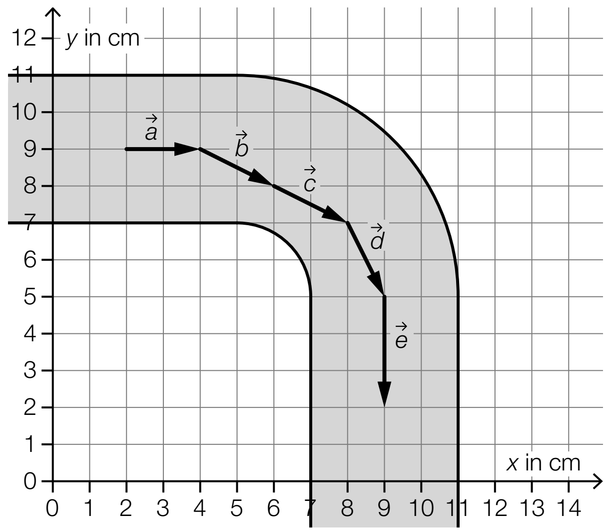
3) Berechnen Sie die Länge der Strecke s. *[0/1 P.]*

Für einen Winkel α gilt:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3}{|\vec{v}_2| \cdot |\vec{v}_3|}\right)$$

4) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung α mit dem Punkt P als Scheitel ein. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Bewegungen des Fahrzeugs von Emese auf einer anderen Rennstrecke dargestellt.



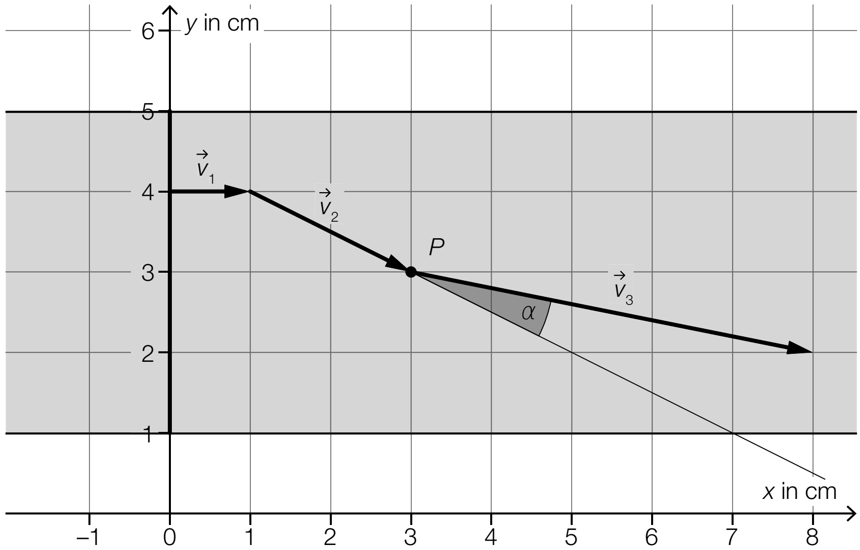
1) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐
$\lvert\vec{b}\rvert = \lvert\vec{d}\rvert$	☐
$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0$	☐
$\vec{a} + \vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$\arccos\left(\frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\lvert\vec{b}\rvert \cdot \lvert\vec{c}\rvert}\right) = 0°$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{-1} \end{pmatrix}$

a2 und a4)



Ein Einzeichnen eines anderen Winkels mit dem gleichen Winkelmaß ist ebenfalls als richtig zu werten.

a3) $s = 1 + \sqrt{2^2 + (-1)^2} + \sqrt{5^2 + (-1)^2} = 8{,}33...$

Die Länge der Strecke s beträgt rund 8,3 cm.

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Vektors $\vec{v}_3$.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge der Strecke s.
a4) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Winkels α.

b1)

$\vec{a} + \vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	☒

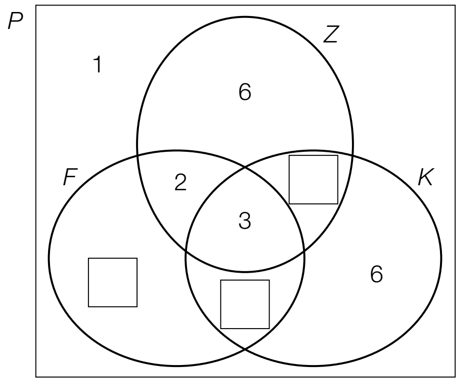
b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Strickpullover und -westen*

Die Großeltern Annika und Johannes stricken für ihre Enkelkinder Pullover und Westen.

a) Im Laufe der Jahre haben die Großeltern 34 Pullover gestrickt.

4 Pullover hatten sowohl ein Zopfmuster als auch eine Kapuze, aber kein farbiges Muster.
16 Pullover hatten eine Kapuze.

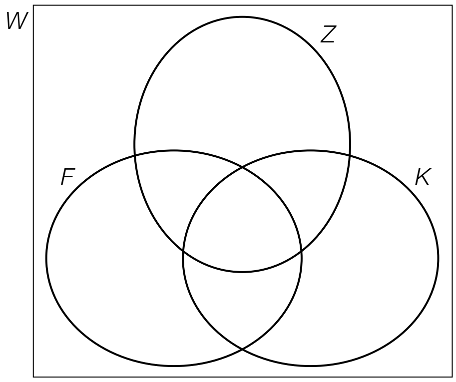


P ... Menge aller Pullover, die die Großeltern gestrickt haben
F ... Menge der Pullover mit farbigem Muster
Z ... Menge der Pullover mit Zopfmuster
K ... Menge der Pullover mit Kapuze

1) Tragen Sie im obigen Venn-Diagramm die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der gestrickten Pullover mindestens 2 der oben genannten 3 Eigenschaften (farbiges Muster, Zopfmuster, Kapuze) haben. *[0/1 P.]*

b) Die Großeltern stricken seit einigen Jahren auch Westen. Die im ersten Jahr gestrickten Westen haben jeweils nur 1 von 3 Eigenschaften. Jede Eigenschaft tritt dabei mindestens 1-mal auf.



W ... Menge aller Westen, die die Großeltern gestrickt haben
F ... Menge der Westen mit farbigem Muster
Z ... Menge der Westen mit Zopfmuster
K ... Menge der Westen mit Kapuze

1) Markieren Sie im obigen Venn-Diagramm diejenigen Bereiche, die den im ersten Jahr gestrickten Westen entsprechen. *[0/1 P.]*

Im darauffolgenden Jahr stricken die Großeltern auch Westen, die mehr als eine der oben genannten 3 Eigenschaften haben.

Enkelkind Monika wünscht sich eine Weste mit farbigem Muster und mit Kapuze, aber ohne Zopfmuster.
Enkelkind Leon wünscht sich eine Weste mit Kapuze, aber ohne Zopfmuster und ohne farbiges Muster.

2) Ordnen Sie den beiden Westen jeweils den zutreffenden Ausdruck in Mengensymbolik aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Weste, die sich Monika wünscht	☐
Weste, die sich Leon wünscht	☐

A	$K \setminus (F \cup Z)$
B	$(F \cap K) \setminus Z$
C	$Z \setminus (F \cup K)$
D	$(K \cap Z) \setminus F$

c) Die Großeltern ermitteln die Arbeitszeit, die sie für das Stricken der Pullover für ihre Enkelkinder benötigen.

Für 1 Pullover mit 1 Eigenschaft benötigen sie 3 Wochen.
Für 1 Pullover mit 2 Eigenschaften benötigen sie 4 Wochen.
Für 1 Pullover mit 3 Eigenschaften benötigen sie 5 Wochen.

Jeder von den Großeltern gestrickte Pullover hat mindestens 1 Eigenschaft, aber höchstens 3 Eigenschaften.

Die benötigte Arbeitszeit in Wochen für einen nach dem Zufallsprinzip ausgewählten Pullover kann durch die Zufallsvariable X beschrieben werden (siehe nachstehende Tabelle).

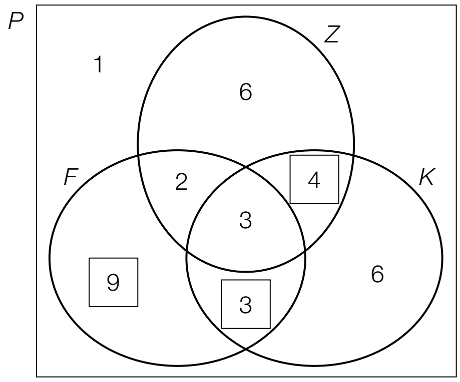
x_i	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,15	0,45	

1) Tragen Sie die fehlende Wahrscheinlichkeit in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den Erwartungswert von X. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

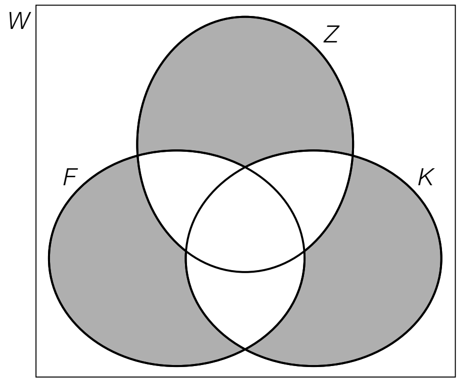


a2) $\frac{2 + 3 + 3 + 4}{34} = 0{,}3529...$

Rund 35,3 % der gestrickten Pullover haben mindestens 2 der 3 genannten Eigenschaften.

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

b1)



b2)

Weste, die sich Monika wünscht	B
Weste, die sich Leon wünscht	A

A	$K \setminus (F \cup Z)$
B	$(F \cap K) \setminus Z$
C	$Z \setminus (F \cup K)$
D	$(K \cap Z) \setminus F$

b1) Ein Punkt für das Markieren der richtigen Bereiche im Venn-Diagramm.
b2) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1)

x_i	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,15	0,45	$\boxed{0,4}$

c2) $E(X) = 3 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}45 + 5 \cdot 0{,}4 = 4{,}25$

Der Erwartungswert beträgt 4,25 Wochen.

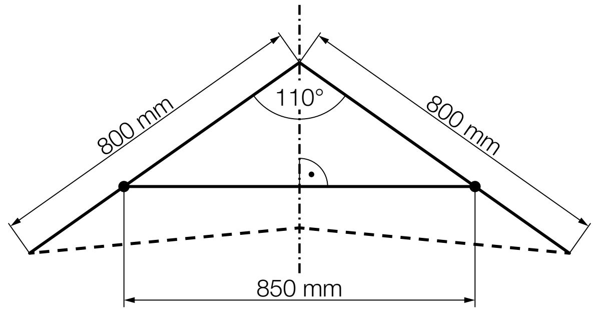
c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Wahrscheinlichkeit.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts.

Lenkdrachen*

Lenkdrachen sind Flugdrachen, die über Schnüre gesteuert werden können.

a) Ein Lenkdrachen soll aus 3 Stangen und einer Bespannung aus Nylon gebaut werden. Die 3 Stangen sind in den nachstehenden Abbildungen durch die durchgezogenen Strecken dargestellt.

Abbildung 1:

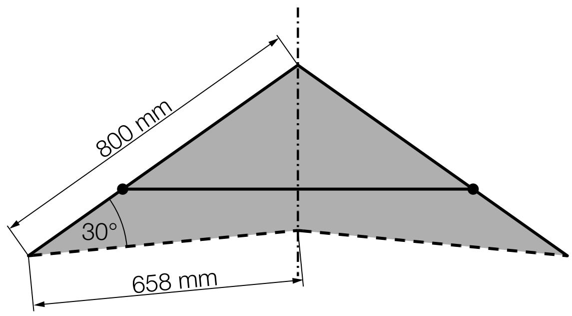


1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung 1 die Strecke x, deren Länge mit der nachstehenden Formel berechnet werden kann.

$x = \frac{425}{\sin(55°)}$ *[0/1 P.]*

Die grau markierte Fläche in der nachstehenden Abbildung 2 entspricht der Bespannung aus Nylon.

Abbildung 2:



Die 3 Stangen und die verwendeten Nähte und Schlaufen haben insgesamt eine Masse von 220 g.
1 m² des verwendeten Nylons hat eine Masse von 48 g.

2) Berechnen Sie die gesamte Masse des Lenkdrachens. *[0/1 P.]*

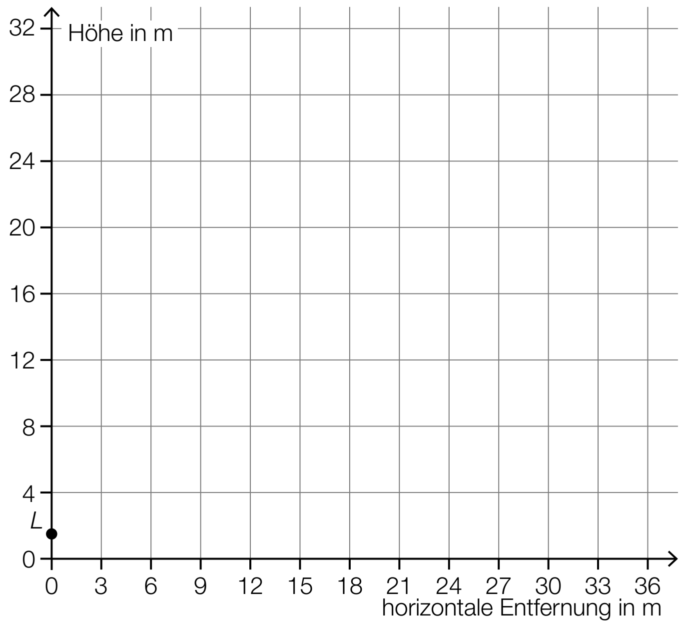
b) Lisa lässt ihren Lenkdrachen steigen und beobachtet ihn vom Punkt L aus.

Der Lenkdrachen wird dabei modellhaft als punktförmig angenommen.

Der Lenkdrachen steigt ausgehend vom Punkt D_1 und befindet sich nach dem Aufstieg im Punkt D_2.

Es gilt:
$L = (0|1{,}5)$, $\overrightarrow{LD_1} = \begin{pmatrix} 21 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{LD_2} = \begin{pmatrix} 12 \\ 26{,}5 \end{pmatrix}$ (Maße in m)

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die Vektoren $\overrightarrow{LD_1}$ und $\overrightarrow{LD_2}$ jeweils als Pfeil ausgehend vom Punkt L ein. *[0/1 P.]*

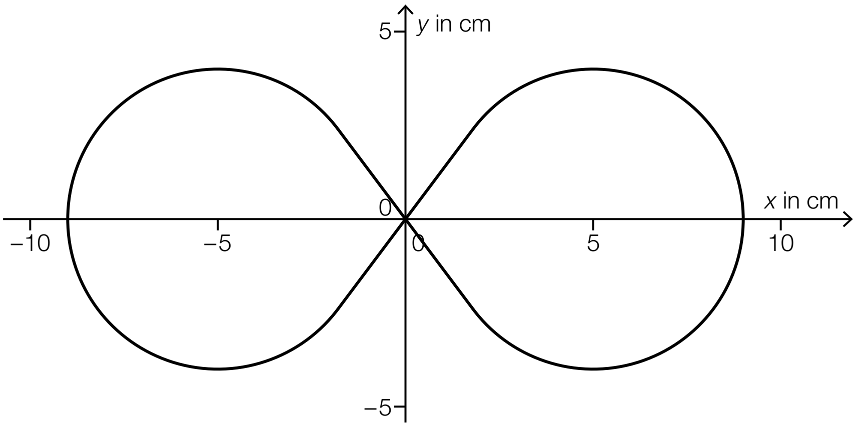


Die Entfernung vom Punkt L zum Punkt D_2 ist größer als die Entfernung vom Punkt L zum Punkt D_1.

2) Berechnen Sie die Differenz dieser beiden Entfernungen. *[0/1 P.]*

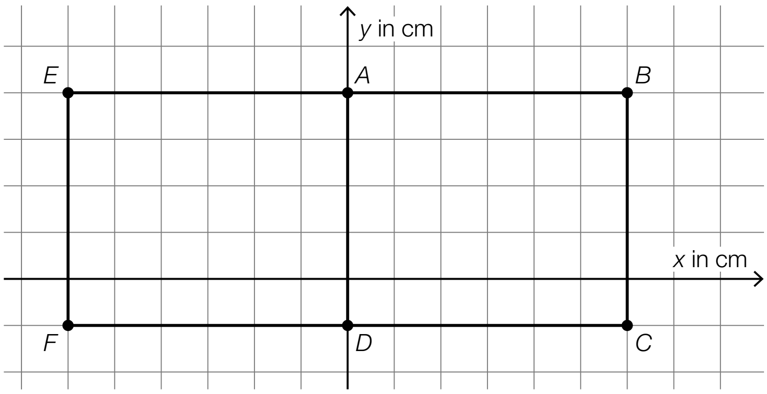
c) In einem Buch über Lenkdrachen sind Flugfiguren abgebildet.

Eine dieser Flugfiguren hat annähernd die Form eines liegenden Achters (siehe nachstehende Abbildung).



1) Begründen Sie, warum diese Flugfigur nicht durch den Graphen einer einzigen Funktion beschrieben werden kann. *[0/1 P.]*

Die Flugfigur *Square Eight* ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

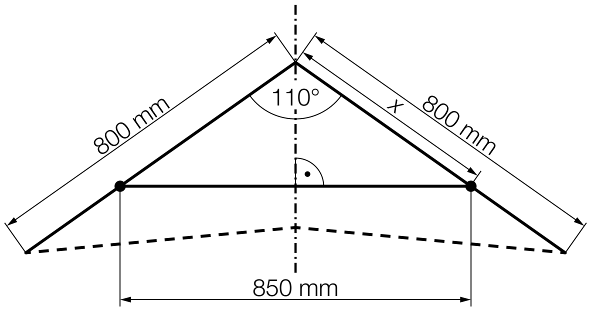


2) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf die obige Abbildung nicht zutrifft. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist der Gegenvektor von $\overrightarrow{AE}$.	☐
Der Vektor $\overrightarrow{CD}$ ist ein Normalvektor von $\overrightarrow{EF}$.	☐
$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$	☐
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{CD}\rvert$	☐
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) Berechnung des Flächeninhalts der grau markierten Fläche in m²:

$$\frac{0{,}8 \cdot 0{,}658}{2} \cdot \sin(30°) \cdot 2 = 0{,}2632$$

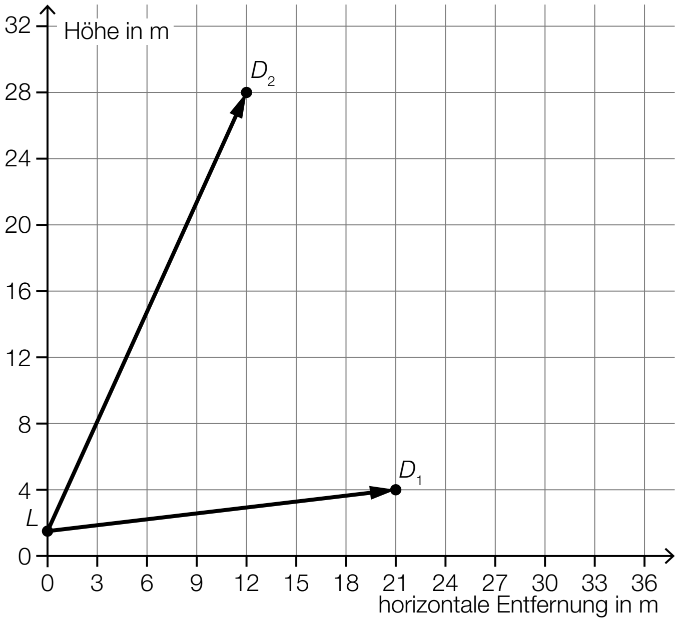
Berechnung der Masse des verwendeten Nylons in g:
$0{,}2632 \cdot 48 = 12{,}63...$

Berechnung der gesamten Masse in g:
$220 + 12{,}63... = 232{,}63...$

Die gesamte Masse des Lenkdrachens beträgt rund 232,6 g.

a1) Ein Punkt für das Kennzeichnen der richtigen Strecke *x*.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der gesamten Masse des Lenkdrachens.

b1)



b2) $\left|\begin{pmatrix} 21 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{21^2 + 2{,}5^2} = 21{,}14...$

$\left|\begin{pmatrix} 12 \\ 26{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{12^2 + 26{,}5^2} = 29{,}09...$

$29{,}09... - 21{,}14... = 7{,}9...$

Die Differenz der beiden Entfernungen beträgt rund 8 m.

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der beiden Vektoren.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Differenz der Entfernungen.

c1) Die Flugfigur kann nicht durch den Graphen einer einzigen Funktion beschrieben werden, weil nicht jedem x genau ein y zugeordnet werden kann.

c2)

$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$	☒

c1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
c2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.