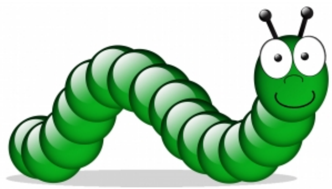
Bücherwurm

Aufgabennummer: B_283

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

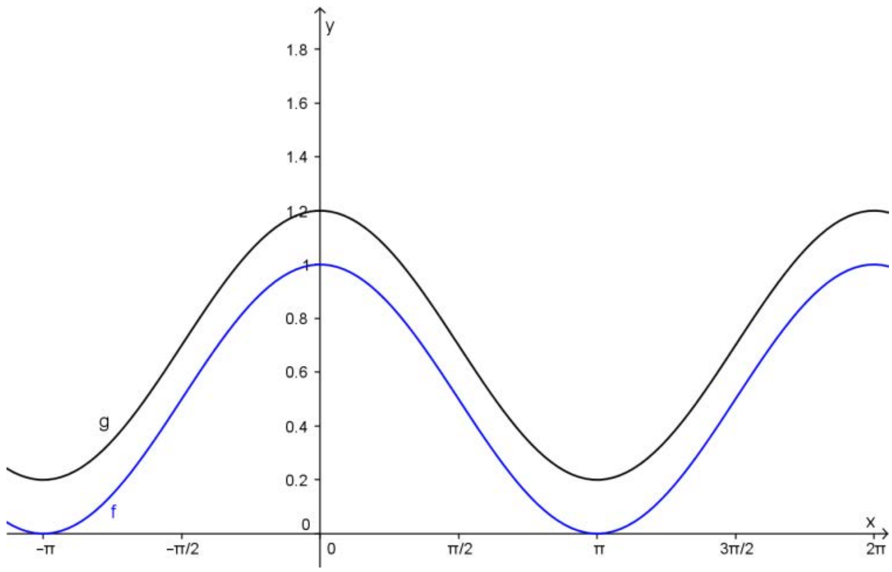
Menschen, die sehr viel lesen, werden oft als „Bücherwürmer“ bezeichnet.

a) Ein Verlag entwirft als Firmenlogo einen „Bücherwurm“. Als Grundlage für das Bild des Logos werden zwei Cosinusfunktionen folgender Form verwendet:



$y = a \cdot \cos(x) + c$

– Ermitteln Sie mithilfe des in der nachstehenden Abbildung dargestellten Funktionsgraphen g die Parameter a und c der Funktion g.



b) Ein Logo wird im Intervall $\left[-\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ durch die Funktionen f und g nach oben bzw. unten begrenzt. Es soll mit Farbe ausgefüllt werden.

$g(x) = 2 \cdot \cos(x) + 3$
$f(x) = 2 \cdot \cos(x) + 6$

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A zwischen den Funktionsgraphen von f und g im gegebenen Intervall auf.

$A =$ ______________________________

– Berechnen Sie den entsprechenden Flächeninhalt.

Bildquelle: FreeImages.com/de.freepik.com/sxc.

c) Die digitale Verfügbarkeit von Büchern in Form von E-Books nimmt zu. Eine Autorin verkauft von einem Roman 8 000 gebundene Exemplare und 200 E-Books. Pro verkauftem gebundenem Exemplar nimmt sie € 2,20 ein, pro E-Book nur € 1,70.

– Erklären Sie, warum folgende Aussage falsch ist:
„Da der Anteil der Anzahl der verkauften E-Books an der Gesamtverkaufszahl 2,5 % ist, betragen die Einnahmen der Autorin aus dem E-Book-Verkauf 2,5 % der Gesamteinnahmen."

– Berechnen Sie den korrekten Prozentanteil der Einnahmen aus dem E-Book-Verkauf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Funktion g: $a = 0{,}5$; $c = 0{,}7$

b) $A = \int_{-\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \left(f(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x$

$A = 28{,}27$ Flächeneinheiten

c) Der Anteil der Einnahmen über E-Books entspricht nicht dem Anteil der verkauften E-Books, da die Einnahmen für gebundene Bücher und E-Books unterschiedlich sind.

Gesamteinnahmen: $8\,000 \cdot 2{,}20 + 200 \cdot 1{,}70 = 17\,940$
Prozentanteil des E-Book-Verkaufs: $\frac{200 \cdot 1{,}70}{17\,940} \cdot 100 = 1{,}8952\ldots \approx 2\ \%$

Die Einnahmen der Autorin aus dem E-Book-Verkauf betragen rund 2 % der Gesamteinnahmen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

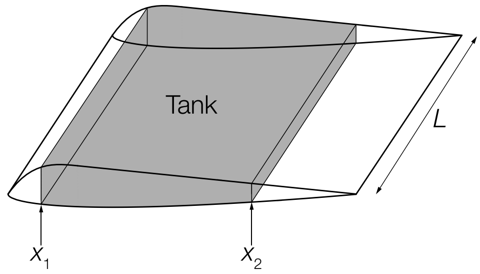
a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Alltag

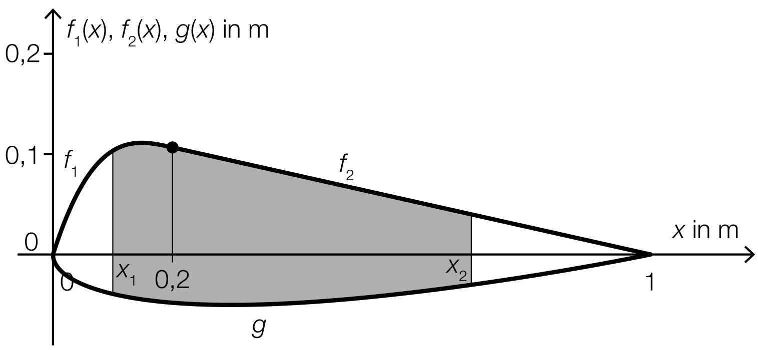
Quelle: http://de.freepik.com/fotos-kostenlos/bucherwurm_621016.htm

Flugzeuge (2)

a) Bei einem bestimmten Kleinflugzeug befindet sich in jedem der beiden Flügel ein Tank (siehe nebenstehende Abbildung).



Der Querschnitt eines Flügels dieses Kleinflugzeugs kann durch die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und g modelliert werden. An der Stelle $x = 0{,}2$ geht der Graph von f_1 in den Graphen von f_2 über.



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

$A =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Es gilt:

$f_1(x) = \frac{50}{3} \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + \frac{28}{15} \cdot x \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 0{,}2$

$f_2(x) = \frac{2}{15} \cdot (1 - x) \quad \text{mit} \quad 0{,}2 \leq x \leq 1$

$g(x) = 0{,}051 \cdot x^4 - 0{,}142 \cdot x^3 + 0{,}176 \cdot x^2 + 0{,}063 \cdot x - 0{,}148 \cdot \sqrt{x} \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 1$

x, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in m

$L = 5$ m
$x_1 = 0{,}1$ m
$x_2 = 0{,}7$ m

2) Berechnen Sie das Volumen eines Tanks dieses Kleinflugzeugs. *[0/1 P.]*

Die beiden Tanks des Kleinflugzeugs sind gleich groß.
Auf einem Sportflughafen sind 210 000 L Treibstoff gelagert.

3) Berechnen Sie, wie oft man mit dieser Treibstoffmenge die beiden Tanks des Kleinflugzeugs vollständig befüllen könnte. *[0/1 P.]*

b) Bevor ein Flugzeug abhebt, beschleunigt es auf der Startbahn. Der bis zum Abheben zurückgelegte Weg eines bestimmten Flugzeugs kann näherungsweise durch die Funktion s beschrieben werden.

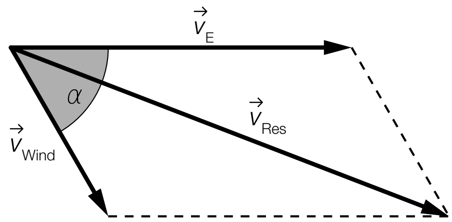
$s(t) = t^2 + 5 \cdot t$

t ... Zeit seit Beginn des Startvorgangs in s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Das Flugzeug hebt bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h ab.

1) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den dieses Flugzeug auf der Startbahn zurücklegt. *[0/1 P.]*

c) Der Seitenwind beeinflusst die Flugrichtung und die Geschwindigkeit eines Flugzeugs. In der nachstehenden Abbildung ist dieser Zusammenhang als Parallelogramm dargestellt.



Im Folgenden wird für die Länge eines Vektors $\vec{v}$ die Schreibweise $|\vec{v}| = v$ verwendet.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von v_{Res} auf. Verwenden Sie dabei v_E, v_{Wind} und α.

$v_{Res} =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Zwischen den Winkeln α und γ gilt der folgende Zusammenhang:

$\frac{v_{Res}}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{v_{Wind}}{\sin(\gamma)}$

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den spitzen Winkel γ ein. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \left(\int_{x_1}^{0,2} (f_1(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{0,2}^{x_2} (f_2(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\right)$

a2) $\left(\int_{0,1}^{0,2} (f_1(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{0,2}^{0,7} (f_2(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\right) \cdot 5 = 0{,}3693...$

Das Volumen eines Tanks dieses Kleinflugzeugs beträgt rund 0,369 m^3.

a3) $0{,}3693...\ \mathrm{m}^3 = 369{,}3...\ \mathrm{L}$

$\frac{210\,000}{2 \cdot 369{,}3...} = 284{,}2...$

Man könnte die beiden Tanks des Kleinflugzeugs mit dieser Treibstoffmenge 284-mal vollständig befüllen.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Volumens des Tanks.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl.

b1) 90 km/h = 25 m/s

$v(t) = s'(t) = 2 \cdot t + 5$

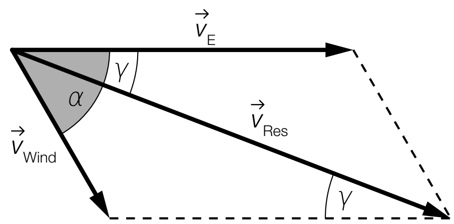
$v(t) = 25$ *oder* $2 \cdot t + 5 = 25$
$t = 10$
$s(10) = 150$

Die Länge des Weges, den das Flugzeug auf der Startbahn zurücklegt, beträgt 150 m.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge des zurückgelegten Weges.

c1) $v_{\text{Res}} = \sqrt{v_{\text{E}}^2 + v_{\text{Wind}}^2 - 2 \cdot v_{\text{E}} \cdot v_{\text{Wind}} \cdot \cos(180° - \alpha)}$

c2)



c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c2) Ein Punkt für das Einzeichnen des richtigen Winkels γ.

Sedimente

Sedimente sind in Flüssigkeiten enthaltene Teilchen, die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft ablagern.

a) In einer Flüssigkeit sinkt ein Teilchen durch die Schwerkraft ab. Die Sinkgeschwindigkeit v kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10 - 20 \cdot v$$

t ... Zeit in s
v ... Sinkgeschwindigkeit in m/s

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Differenzialgleichung diejenige Sinkgeschwindigkeit, bei der die Beschleunigung null ist. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $v(0) = 0{,}2$. *[0/1 P.]*

b) Das Flussbett der Donau verändert sich ständig. Die Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel) an einer bestimmten Stelle des Flussbetts wurde wiederholt gemessen. Die Messwerte sind in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Zeit seit Beginn des Jahres 1950 in Jahren	Seehöhe des Flussbetts in m
0	142,0
20	141,7
35	141,6
45	141,2
52	141,0

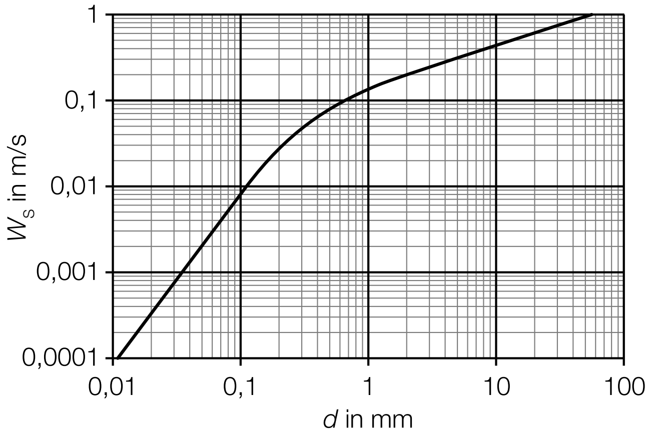
Die Seehöhe des Flussbetts soll in Abhängigkeit von der Zeit durch die quadratische Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der quadratischen Funktion f auf.

   t ... Zeit seit Beginn des Jahres 1950 in Jahren
   $f(t)$ ... Seehöhe des Flussbetts zur Zeit t in m *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie mithilfe der quadratischen Funktion f die Seehöhe des Flussbetts zu Beginn des Jahres 2010. *[0/1 P.]*

c) Die Sinkgeschwindigkeit W_S von kugelförmigen Sandkörnern in Wasser hängt von deren Durchmesser d ab (siehe nachstehende Abbildung).



Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Settling_velocity_quartz.png [15.03.2019] (adaptiert).

Die Dichte ϱ eines Sandkorns beträgt 2650 kg/m³. Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V, also $m = \varrho \cdot V$.

Ein bestimmtes kugelförmiges Sandkorn hat eine Sinkgeschwindigkeit von 0,2 m/s.

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Masse m dieses Sandkorns. Geben Sie das Ergebnis in der Einheit Gramm an. *[0/1/2 P.]*

Im Bereich 0,01 mm < d < 0,1 mm ist der in der obigen Abbildung dargestellte Verlauf geradlinig. Daher kann die Sinkgeschwindigkeit W_S in Abhängigkeit vom Durchmesser d in diesem Bereich durch eine der unten stehenden Funktionsgleichungen beschrieben werden.

2) Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung an. *[1 aus 5]*
a, c ... positive Konstanten *[0/1 P.]*

$W_S(d) = a \cdot c^d$	☐
$W_S(d) = \frac{a}{d}$	☐
$W_S(d) = a \cdot d^c$	☐
$W_S(d) = a \cdot d + c$	☐
$W_S(d) = a \cdot \ln(d) + c$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $0 = 10 - 20 \cdot v$
$v = 0{,}5$

Die Sinkgeschwindigkeit, bei der die Beschleunigung null ist, beträgt 0,5 m/s.

a2) $\int \frac{\mathrm{d}v}{10 - 20 \cdot v} = \int \mathrm{d}t$ *oder* $\int \frac{v'}{10 - 20 \cdot v}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t$

$\frac{\ln|10 - 20 \cdot v(t)|}{-20} = t + C_1$

$10 - 20 \cdot v(t) = e^{-20 \cdot t} \cdot C_2$

$v(t) = 0{,}5 - C \cdot e^{-20 \cdot t}$

a3) $v(0) = 0{,}2$
$0{,}5 - C = 0{,}2$
$C = 0{,}3$
$v(t) = 0{,}5 - 0{,}3 \cdot e^{-20 \cdot t}$

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Sinkgeschwindigkeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Lösung der Differenzialgleichung mit $v(0) = 0{,}2$.

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = -0{,}0002763 \cdot t^2 - 0{,}004206 \cdot t + 141{,}98$ *(Koeffizienten gerundet)*

b2) $f(60) = 140{,}73...$

Zu Beginn des Jahres 2010 betrug die Seehöhe des Flussbetts rund 140,7 m.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion f.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Seehöhe zu Beginn des Jahres 2010.

c1) Ablesen des Durchmessers eines Sandkorns mit Sinkgeschwindigkeit 0,2 m/s:
$d = 2$ mm $\Rightarrow$ $r = 1$ mm

Berechnung des Volumens V dieses Sandkorns in m³:
$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 1^3 \cdot 10^{-9} = 4{,}188... \cdot 10^{-9}$

Berechnung der Masse m dieses Sandkorns in g:
$m = \varrho \cdot V = 2650 \cdot 4{,}188... \cdot 10^{-9} \cdot 10^3 = 0{,}0111...$

Die Masse des Sandkorns beträgt rund 0,011 g.

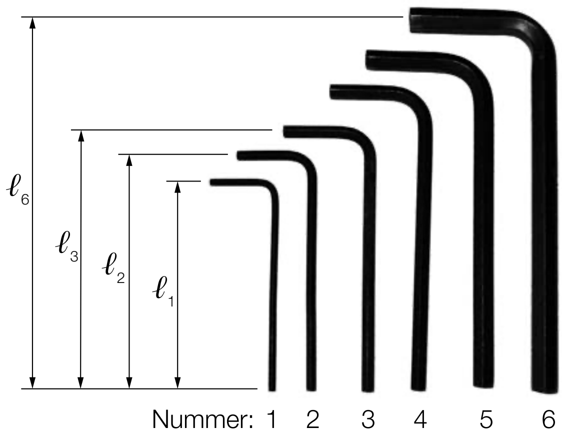
c2)

$W_S(d) = a \cdot d^c$	☒

c1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Durchmessers d.
Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Masse m in Gramm.
c2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Werkzeuge

a) Ein Werkzeugset besteht aus 6 verschieden langen Innensechskantschlüsseln (siehe nachstehendes Symbolfoto).



Bildquelle: Scott Ehardt – own work, public domain, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Allen_keys.jpg [01.07.2020] (adaptiert).

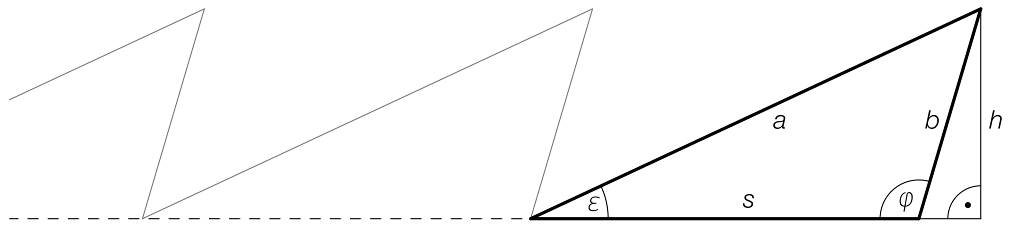
Das Verhältnis der Länge eines Innensechskantschlüssels zur Länge des nächstgrößeren beträgt jeweils 10 zu 11.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Formel zur Berechnung der Länge ℓ_3 aus der Länge ℓ_2.

$\ell_3 = \boxed{} \cdot \ell_2$ *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie die Länge ℓ_6 des längsten Innensechskantschlüssels, wenn der kürzeste die Länge $\ell_1 = 9$ cm hat. *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist ein Teil eines Sägeblatts vereinfacht dargestellt.



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge s auf. Verwenden Sie dabei die Winkel ε und φ sowie die Länge b.

$s =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Für ein bestimmtes Sägeblatt gilt:
$a = 23{,}7$ mm, $b = 10{,}4$ mm, $s = 18{,}8$ mm

2) Berechnen Sie den Winkel φ. *[0/1 P.]*

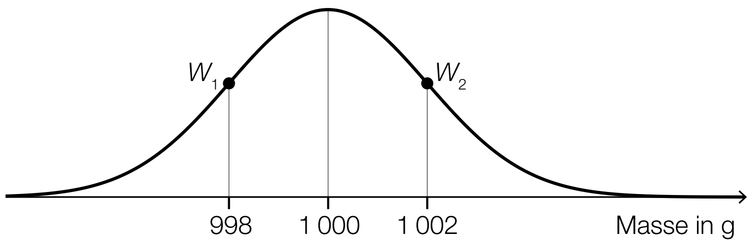
3) Kreuzen Sie die auf das obige Dreieck <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\varepsilon)}$	☐
$\cos(\varphi - 90°) = \frac{h}{b}$	☐
$s^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(180° - \varepsilon - \varphi)$	☐
$\frac{h}{\sin(\varepsilon)} = \frac{a}{\sin(\varphi)}$	☐
$\frac{s \cdot b \cdot \sin(\varphi)}{2} = \frac{h \cdot s}{2}$	☐

c) Stahlnägel werden in Packungen abgefüllt.

Die Masse der Packungen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,000$ g und der Standardabweichung $\sigma = 6$ g.

Im Zuge einer Qualitätskontrolle werden Stichproben zu jeweils n Packungen entnommen.
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion der Verteilung der Stichprobenmittelwerte dargestellt.



W_1, W_2 ... Wendepunkte der Dichtefunktion

1) Geben Sie die Anzahl n der Packungen an, aus denen diese Stichproben jeweils bestehen.

$n =$ __________ Packungen *[0/1 P.]*

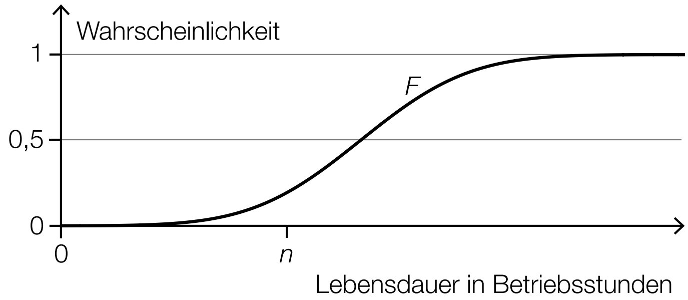
Bei einer anderen Sorte von Stahlnägeln ist die Masse der Packungen ebenfalls annähernd normalverteilt. Bei einer Stichprobe von 8 zufällig ausgewählten Packungen wurden die nachstehenden Werte (in g) gemessen.

500,8	499,4	500,2	501,6	502,5	500,5	499,8	501,4

2) Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert der Masse der Packungen dieser Sorte von Stahlnägeln. *[0/1 P.]*

d) In einem Labor werden Bohrmaschinen eines bestimmten Modells einem Langzeittest unterzogen. Die Lebensdauer dieser Bohrmaschinen ist annähernd normalverteilt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion F dargestellt.



Die zugehörige Dichtefunktion wird mit f bezeichnet.

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit $\int_{-\infty}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$. *[0/1 P.]*

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, für dessen Wahrscheinlichkeit gilt:

   $P(E) = 1 - F(n)$ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\ell_3 = \boxed{\frac{11}{10}} \cdot \ell_2$

a2) $\ell_6 = 9 \cdot \left(\frac{11}{10}\right)^5$

$\ell_6 = 14{,}494\ldots$ cm

a1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Länge ℓ_6.

b1) $s = \frac{b}{\sin(\varepsilon)} \cdot \sin(180° - \varepsilon - \varphi)$

b2) $\varphi = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - s^2}{-2 \cdot b \cdot s}\right) = \arccos\left(\frac{23{,}7^2 - 10{,}4^2 - 18{,}8^2}{-2 \cdot 10{,}4 \cdot 18{,}8}\right) = 104{,}83\ldots°$

b3)

$\frac{h}{\sin(\varepsilon)} = \frac{a}{\sin(\varphi)}$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels φ.
b3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) $n = 9$ Packungen

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

Stichprobenmittelwert: $\bar{x} = 500{,}775$
Stichprobenstandardabweichung: $s_{n-1} = 1{,}0208...$

Berechnung des 95-%-Vertrauensbereichs $[\mu_u; \mu_o]$ mithilfe der t-Verteilung:

$$\mu_u = 500{,}775 - t_{7;0{,}975} \cdot \frac{1{,}0208...}{\sqrt{8}} = 499{,}92...$$

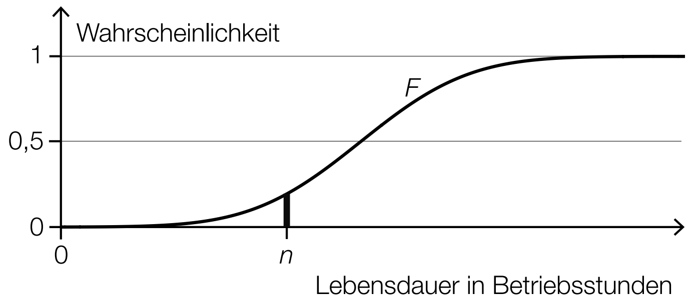
$$\mu_o = 500{,}775 + t_{7;0{,}975} \cdot \frac{1{,}0208...}{\sqrt{8}} = 501{,}62...$$

$t_{7;0{,}975} = 2{,}3646...$

Daraus ergibt sich der folgende Vertrauensbereich in g: [499,92...; 501,62...].

c1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Stichprobenumfangs n.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereichs.

d1)



d2) Die Lebensdauer einer Bohrmaschine beträgt mindestens n Betriebsstunden.

d1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.
d2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben des Ereignisses E im gegebenen Sachzusammenhang.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Pumpenproduktion

Aufgabennummer: B_169

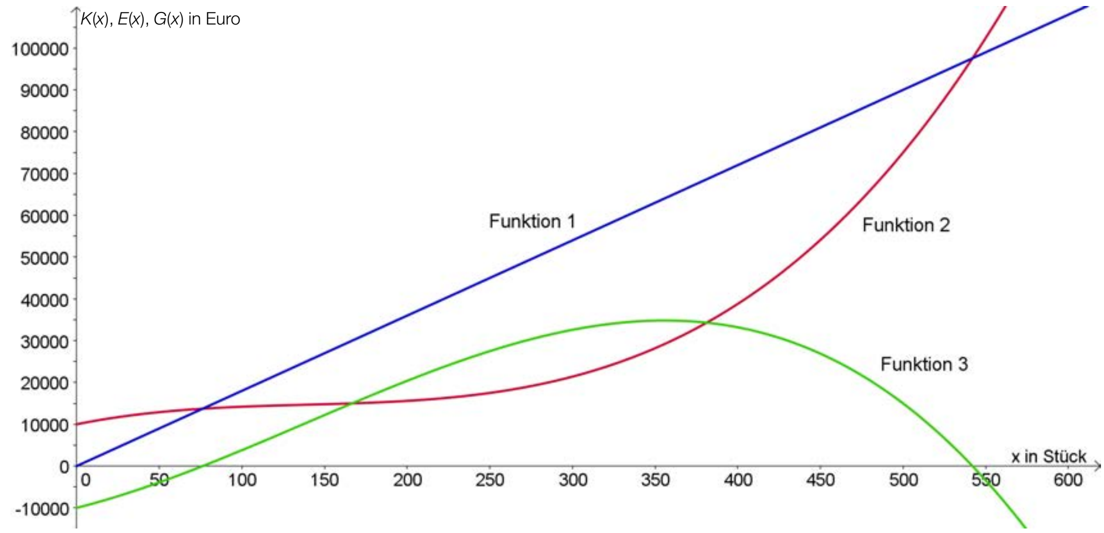
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Produktion von Schmutzwasserpumpen wird ein bestimmtes Modell hergestellt. Für die Kostenfunktion K bei der Herstellung dieses Modells gilt:

$$K(x) = 0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000$$

x … Stückzahl produzierter Schmutzwasserpumpen
$K(x)$ … Kosten bei der Produktion von x Schmutzwasserpumpen in Euro (€)

a) Die unten stehende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen
- der Kostenfunktion K
- der Erlösfunktion E
- der Gewinnfunktion G



– Begründen Sie, warum der Graph von Funktion 3 den Verlauf der Gewinnfunktion beschreibt.

b) – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Kosten, wenn die Produktion von 100 auf 101 Stück erhöht wird.
– Berechnen Sie die Grenzkosten für 100 Stück mithilfe der Grenzkostenfunktion.
– Begründen Sie, warum die Ergebnisse dieser Berechnungen unterschiedlich sind.

c) Die Schmutzwasserpumpen werden zu einem Preis von € 200 pro Stück verkauft.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Gewinnfunktion G auf.
– Berechnen Sie, bei wie vielen verkauften Schmutzwasserpumpen der Gewinn maximal ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Funktion 3 stellt die Gewinnfunktion dar.
Der Funktionsgraph der Gewinnfunktion schneidet die vertikale Achse bei € –10.000 (Fixkosten).
Die Nullstellen der Gewinnfunktion liegen direkt unterhalb der Schnittpunkte der Kosten- und der Erlösfunktion.
Zwischen den Gewinngrenzen ist der Gewinn positiv, weil dort der Graph der Erlösfunktion oberhalb des Graphen der Kostenfunktion verläuft.

Alle richtigen Begründungen, die eine klare Entscheidung ermöglichen, sind zu akzeptieren.

b) $\frac{K(101) - K(100)}{1} = 15{,}861 \approx 15{,}86$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund € 15,86/Stück.

$K'(x) = 0{,}0036 \cdot x^2 - x + 80 \;\Rightarrow\; K'(100) = 16$

Die Grenzkosten bei 100 Stück betragen € 16/Stück.

Die Ergebnisse sind unterschiedlich, weil der Differenzenquotient die exakte Kostensteigerung angibt, während hingegen der Differenzialquotient einen Näherungswert für die Änderung der Kosten bei der Steigerung um ein Stück angibt.

c) Gewinn = Erlös – Kosten
$G(x) = 200 \cdot x - (0{,}0012 \cdot x^3 - 0{,}5 \cdot x^2 + 80 \cdot x + 10\,000)$
$G(x) = -0{,}0012 \cdot x^3 + 0{,}5 \cdot x^2 + 120 \cdot x - 10\,000$
$G'(x) = -0{,}0036 \cdot x^2 + x + 120$
$-0{,}0036 \cdot x^2 + x + 120 = 0$ Berechnung mittels Technologieeinsatz: $x \approx 368{,}29$
Der maximale Gewinn wird bei 368 Stück erzielt.

Auch andere korrekte Berechnungswege sind als richtig zu werten.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 2

Thema: Wirtschaft

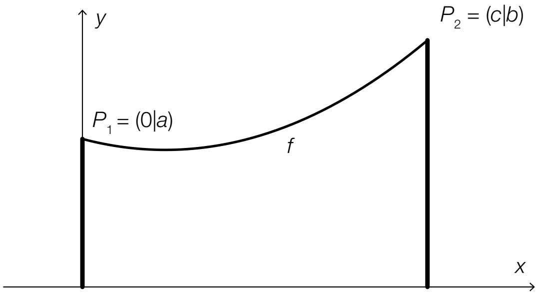
Quellen: –

Seile*

Aufgabennummer: B_391

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

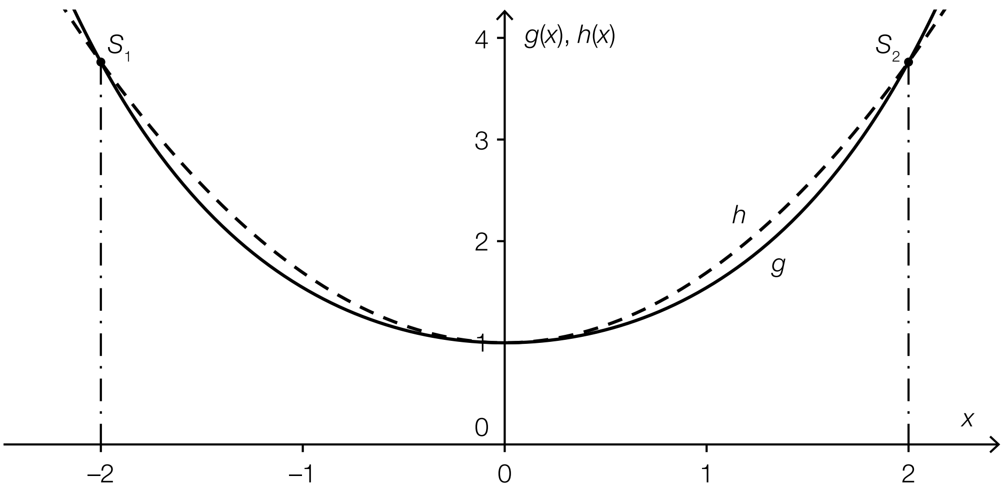
a) Der Verlauf eines durchhängenden Seils einer Gondelbahn zwischen dem Punkt P_1 und dem Punkt P_2 kann näherungsweise durch den Graphen der Polynomfunktion f dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Interpretieren Sie die Bedeutung der Größe $\frac{b-a}{c}$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Stellen Sie eine Formel auf, mit der der Steigungswinkel φ des Graphen der Funktion f im Punkt $P_2 = (c|b)$ bestimmt werden kann.

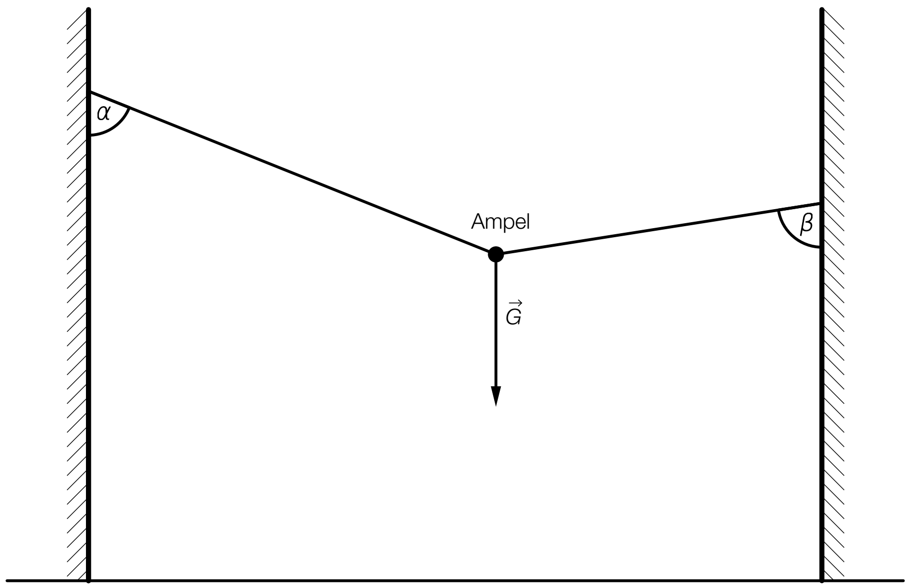
$\varphi =$ ____

b) Der Verlauf eines zwischen zwei Punkten S_1 und S_2 durchhängenden Seils kann durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ dargestellt werden. Näherungsweise kann dieser Seilverlauf durch den Graphen einer quadratischen Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + c$ dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).
Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Parameter c ab.
– Ermitteln Sie den Parameter a.
– Berechnen Sie den Schnittwinkel der Graphen von g und h im Schnittpunkt S_2.

c) Zwischen zwei Gebäuden verläuft eine Straße. Eine Ampelanlage wird mit Seilen an beiden Gebäudemauern befestigt. Die Winkel, die die Seile mit den Hausmauern einschließen, betragen $\alpha = 71°$ und $\beta = 78°$. Der Betrag der Gewichtskraft $\vec{G}$ der Ampel ist: $|\vec{G}| = 1\,500$ N (siehe nachstehende Abbildung).



– Veranschaulichen Sie mithilfe eines Kräfteparallelogramms, wie die Kraft $\vec{G}$ auf die beiden Seile aufgeteilt werden kann.
– Berechnen Sie die Beträge der beiden Kräfte, die auf die Seile wirken.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{b-a}{c}$ ist die mittlere Steigung des Seils der Gondelbahn zwischen den Punkten P_1 und P_2.

$\varphi = \arctan(f'(c))$

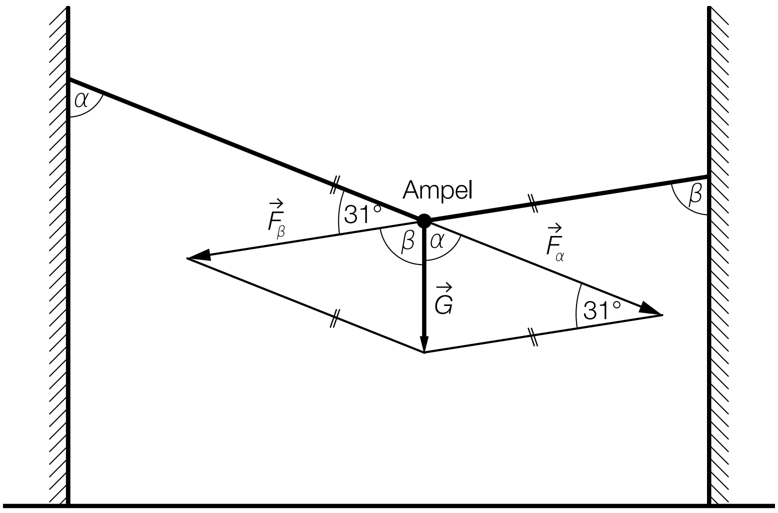
b) $c = h(0) = 1$

$h(2) = g(2)$

$a \cdot 2^2 + 1 = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}690...$

$\arctan(g'(2)) = 74{,}58...°$
$\arctan(h'(2)) = 70{,}09...°$
$74{,}58...° - 70{,}09...° = 4{,}48...°$
Der Schnittwinkel der Graphen von g und h im Schnittpunkt S_2 beträgt rund 4,5°.

c)



$180° - 71° - 78° = 31°$
Es gilt folgende Schreibweise: $|\vec{F}| = F$.

$\frac{F_\alpha}{\sin(\beta)} = \frac{G}{\sin(31°)} \quad \Rightarrow \quad F_\alpha = 2\,848{,}7\ldots \text{ N}$

$\frac{F_\beta}{\sin(\alpha)} = \frac{G}{\sin(31°)} \quad \Rightarrow \quad F_\beta = 2\,753{,}7\ldots \text{ N}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b) 1 × C: für das richtige Ablesen des Parameters *c*
1 × B1: für das richtige Ermitteln des Parameters *a*
1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Schnittwinkels im Schnittpunkt S_2
1 × B2: für die richtige Berechnung des Schnittwinkels

c) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen mithilfe eines Kräfteparallelogramms
1 × A2: für den richtigen Ansatz (z. B. Sinussatz)
1 × B: für die richtige Berechnung der Beträge der beiden Kräfte

Herstellungskosten (2)

Aufgabennummer: B_016

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für ein Produkt lautet die quadratische Kostenfunktion wie folgt:

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 6x + 40$$

$K(x)$ … Gesamtkosten von x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE)
x … erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)

Der Betrieb erzeugt pro Tag höchstens 30 ME dieses Produkts.

a) – Interpretieren Sie die gegebene Kostenfunktion hinsichtlich der folgenden mathematischen Eigenschaften:
- sinnvoller Definitionsbereich
- Monotonie und Krümmungsverhalten
- Fixkosten

b) – Ermitteln Sie aus der gegebenen Gleichung, wie viele ME produziert wurden, wenn Kosten von 150 GE angefallen sind.
– Ermitteln Sie, wie hoch die Kosten für die Produktion von 10 ME sind.
– Stellen Sie die Kostenfunktion grafisch dar und zeichnen Sie die beiden berechneten Wertepaare ein.

c) – Stellen Sie die Stückkostenfunktion (= Durchschnittskostenfunktion) auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

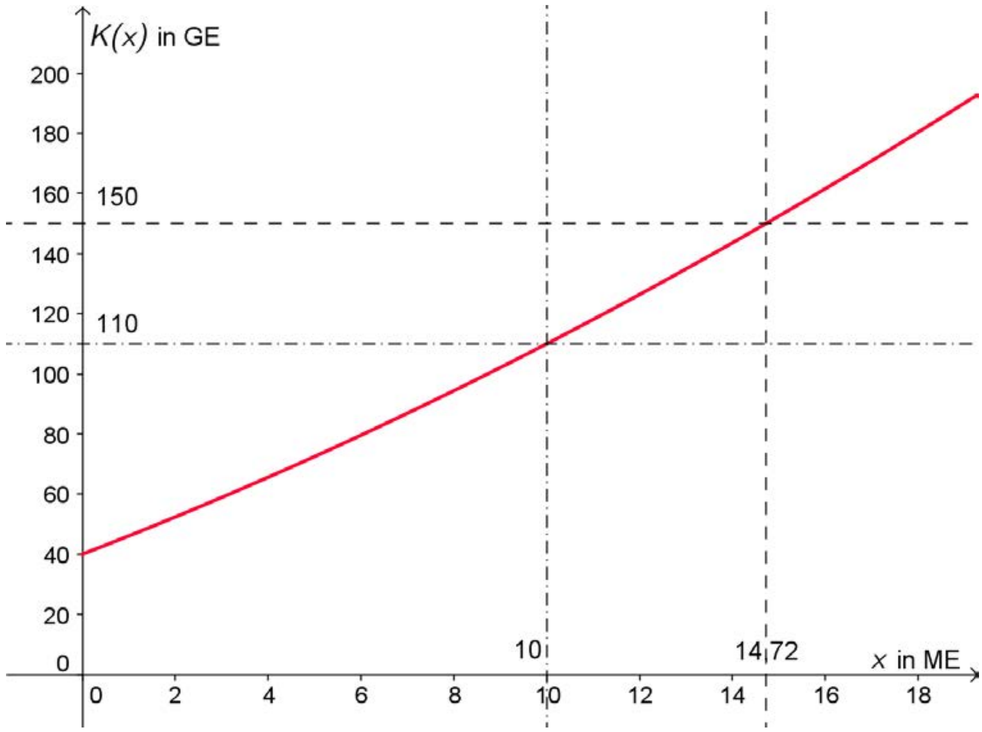
Möglicher Lösungsweg

a) Der Definitionsbereich ist [0;30].

Die Kostenfunktion ist im angegebenen Definitionsbereich streng monoton steigend.
Die Kosten steigen progressiv, der Graph der Kostenfunktion hat im betrachteten Bereich eine positive Krümmung.

Die Fixkosten betragen $K(0) = 40$ GE.

b) Bei Kosten von 150 GE werden rund 14,72 ME erzeugt.
Die Herstellung von 10 ME kostet 110 GE.



c) $\frac{K(x)}{x} = \overline{K}(x) = 0{,}1x + 6 + \frac{40}{x}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 1

Thema: Wirtschaft

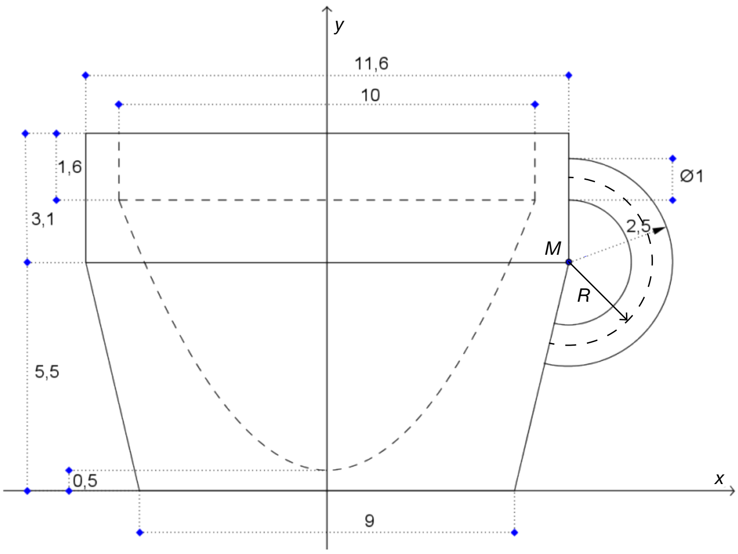
Quellen: –

Designertasse

Aufgabennummer: B_005

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Designertasse wird aus Glas mit einer Dichte von 2 500 kg/m³ hergestellt. Sie hat die Form eines quadratischen Pyramidenstumpfs mit einem aufgesetzten Quader. Der Hohlraum der Tasse hat die Form eines Drehparaboloids mit aufgesetztem Drehzylinder.



(Maße in cm)

a) Der Tassengriff hat die Form eines Ringkörpers (Torus).

Volumsformel für den Torus: $V = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2$
R ... Radius der Kreislinie des Torus
r ... Radius der Querschnittsfläche des Torus

– Berechnen Sie unter Verwendung der angegebenen Skizze die Masse des Tassengriffs.

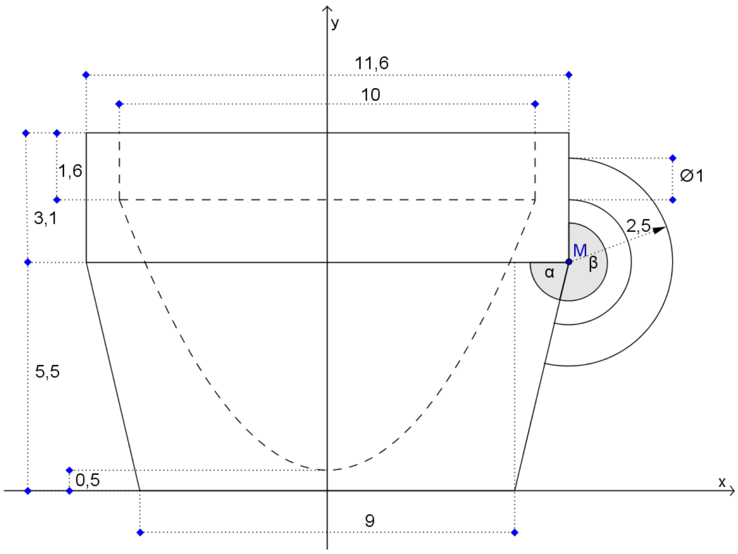
b) Die bis zum Rand gefüllte Tasse fasst ein Volumen von 380,918 ml.
– Berechnen Sie das Glasvolumen, das zur Herstellung der dargestellten Designertasse ohne Tassengriff notwendig ist.

c) Alle Abmessungen der Querschnittsfläche in x-Richtung werden um 5 % vergrößert. Die Abmessungen in y-Richtung bleiben unverändert.
– Argumentieren Sie, warum das Volumen des Hohlraumes nicht um 5 % zunimmt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$\tan\ \alpha = \frac{5,5}{1,3}$
$\alpha \approx 76,7°$
$\beta = 180° + (90° - 76,7°) = 193,3°$

$R = 2$ cm
$b = R \cdot \pi \cdot \frac{\beta}{180}$
$b = 6,747...$ cm

$r = 0,5$ cm
$A = r^2 \cdot \pi$
$V = A \cdot b$
$V \approx 5,3$ cm^3

$\rho = 2,5$ g/cm^3
$m = V \cdot \rho$
$m = 13,25$ g

Die Masse des Tassengriffs beträgt 13,25 g.

b) Volumen des quadratischen Pyramidenstumpfs

$V_1 = \frac{h}{3} \cdot (A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2)$
$A_1 = 11,6^2 = 134,56$ cm^2
$A_2 = 9^2 = 81$ cm^2
$V_1 = 586,59\dot{3}$ cm^3

Volumen des Quaders

$V_2 = a^2 \cdot h = 11,6^2 \cdot 3,1$
$V_2 = 417,136$ cm^3
$V = V_1 + V_2 - 380,918 = 622,811...$ cm^3

Das zur Herstellung notwendige Glasvolumen der Designertasse ohne den Tassengriff beträgt ungefähr 622,81 cm^3.

c) Drehparaboloid:

Wird der Radius des Drehparaboloids um 5 % vergrößert, so nimmt der Flächeninhalt um 10,25 % zu, weil sich der Radius quadratisch im Flächeninhalt auswirkt. Die Abmessungen entlang der y-Achse bleiben gleich. Das Volumen des Drehparaboloids nimmt deshalb um 10,25 % zu.

Drehzylinder:

Wird der Radius des Drehzylinders um 5 % vergrößert, so nimmt der Flächeninhalt um 10,25 % zu, weil sich der Radius quadratisch im Flächeninhalt auswirkt. Da die Abmessungen entlang der y-Achse gleich bleiben, nimmt auch das Volumen des Drehzylinders um 10,25 % zu.

Das Volumen des Hohlraumes nimmt um 10,25 % zu.

Auch andere gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 3

Thema: Design

Quellen: —

Smartphone-Akkus

a) Max notiert zu verschiedenen Zeitpunkten den Ladestand seines Smartphones.

Zeit nach Beendigung des Ladevorgangs in Stunden	2,5	4	5,5	6,5	8	10
Ladestand des Smartphones in Prozent	74	66	52	41	22	12

Die Zeit nach Beendigung des Ladevorgangs wird mit t bezeichnet. Der Ladestand des Smartphones soll in Abhängigkeit von t näherungsweise durch die lineare Funktion L beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion L auf. *[0/1 P.]*

Das Smartphone gibt eine Warnung aus, wenn der Ladestand auf 15 % gesunken ist.

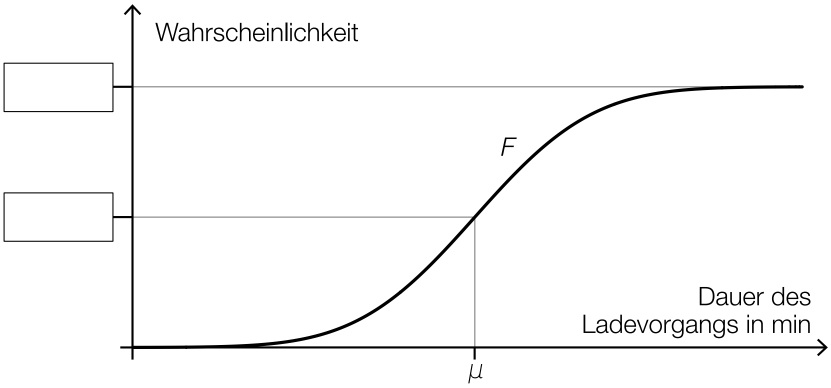
2) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit dies gemäß der Funktion L der Fall ist. *[0/1 P.]*

b) Die Dauer eines Ladevorgangs bei einem bestimmten Akkutyp kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden.

1) Geben Sie mithilfe von μ und σ dasjenige Intervall an, in dem die Dichtefunktion negativ gekrümmt ist.

] _______ ; _______ [*[0/1 P.]*

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Verteilungsfunktion F dargestellt.



2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

Es gilt: $\mu = 92$ min und $F(86) = 0{,}12$

3) Berechnen Sie die Standardabweichung σ. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$L(t) = -8{,}90 \cdot t + 98{,}6$ *(Koeffizienten gerundet)*

a2) $L(t) = 15$ *oder* $-8{,}90 \cdot t + 98{,}6 = 15$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

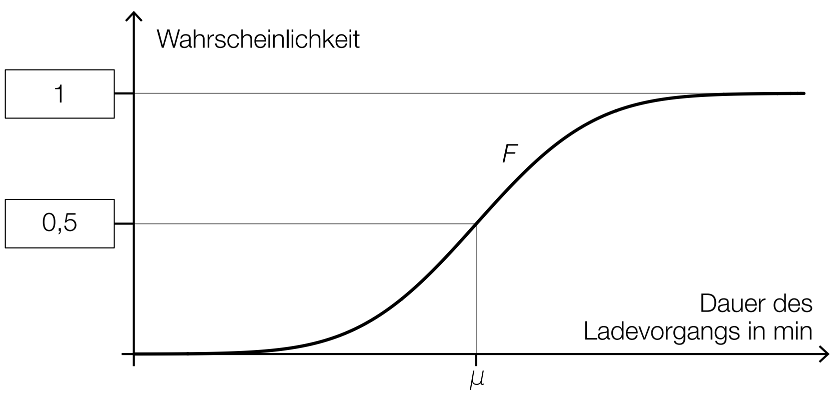
$t = 9{,}39...$

Gemäß der Funktion L gibt das Smartphone etwa 9,4 h nach Beendigung des Ladevorgangs eine Warnung aus.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion L.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Zeit.

b1) $]\mu - \sigma; \mu + \sigma[$

b2)



b3) X ... Dauer des Ladevorgangs in min
$F(86) = P(X \leq 86) = 0{,}12$

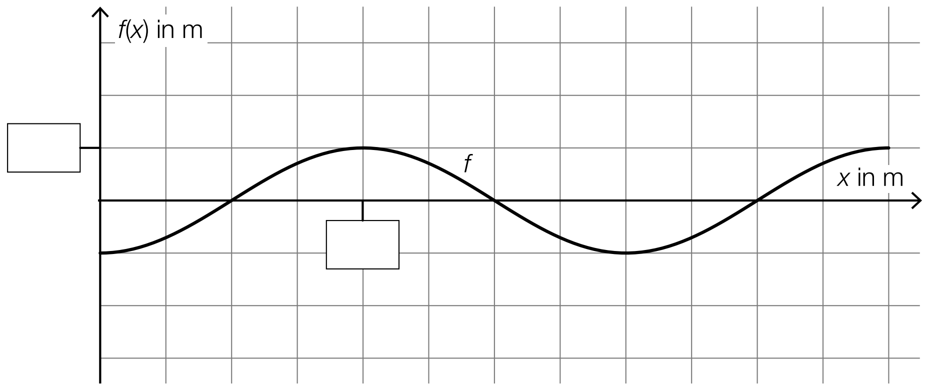
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\sigma = 5{,}106...$ min

b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Intervalls.
b2) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung σ.

Fahrzeugtests (3)

a) Für ein Fahrsicherheitstraining mit einem Motorrad wird eine Markierungslinie auf eine Fahrbahn gemalt. Die Markierungslinie kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right)$
x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Beschreiben Sie, was im gegebenen Sachzusammenhang mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.
$\int_0^{30} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{10} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot x\right)\right)^2}\, dx$ *[0/1 P.]*

Die Funktion f kann auch in der Form $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot x + c\right)$ geschrieben werden.

3) Geben Sie den Wert des Parameters c an.

$c =$ ____________________ *[0/1 P.]*

b) Auf einer Teststrecke wurde die Geschwindigkeit eines Elektroautos bei einem Beschleunigungstest gemessen. Die Auswertung der Daten ergibt die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v.

$v(t) = 50 \cdot \left(1 - e^{-0{,}1123 \cdot t}\right)$

t ... Zeit nach dem Start in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Berechnen Sie die Zeit in Sekunden, die das Elektroauto für die Beschleunigung von 40 km/h auf 100 km/h benötigt. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der vom Graphen der Funktion v und der Zeitachse im Intervall $0 \leq t \leq 10$ eingeschlossen wird. *[0/1 P.]*

3) Interpretieren Sie diesen Flächeninhalt im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Tabelle ist der CO_2-Ausstoß von diversen Sportwagen in Abhängigkeit von ihrer Leistung angegeben.

Leistung in PS	199	258	272	297	300	325	399
CO_2-Ausstoß in g/km	183	226	241	269	273	266	370

Datenquelle: http://www.poel-tec.com/umwelt/co2-tabelle-fahrzeugmodelle.php [31.03.2022].

Der CO_2-Ausstoß soll in Abhängigkeit von der Leistung näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

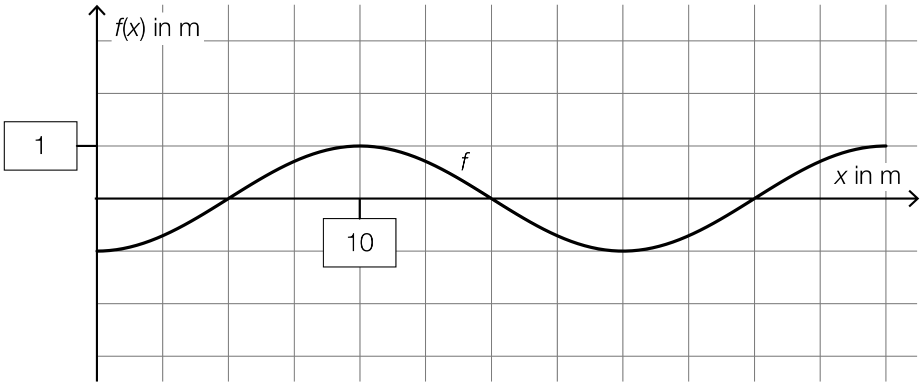
1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. *[0/1 P.]*

Der CO_2-Ausstoß eines anderen Sportwagens mit einer Leistung von 265 PS wird mit 213 g/km angegeben. Der mithilfe der Funktion f ermittelte Wert bei einer Leistung von 265 PS weicht um einen gewissen Prozentsatz von 213 g/km ab.

2) Berechnen Sie diesen Prozentsatz. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) Es wird die Länge der Markierungslinie im Intervall [0; 30] berechnet.

a3) $c = -\frac{\pi}{2}$ *oder* $c = -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

a1) Ein Punkt für das Eintragen der beiden richtigen Zahlen.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
a3) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes des Parameters c.

b1) $v(t) = \frac{40}{3{,}6}$ *oder* $50 \cdot (1 - e^{-0{,}1123 \cdot t}) = \frac{40}{3{,}6}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 2{,}237...$

$v(t) = \frac{100}{3{,}6}$ *oder* $50 \cdot (1 - e^{-0{,}1123 \cdot t}) = \frac{100}{3{,}6}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 7{,}221...$

$7{,}221... - 2{,}237... = 4{,}983...$

Das Elektroauto beschleunigt von 40 km/h auf 100 km/h in etwa 4,98 s.

b2) $\int_0^{10} v(t)\,\mathrm{d}t = 199{,}6...$

b3) Der Flächeninhalt entspricht im gegebenen Sachzusammenhang der Länge des Weges in Metern, der im Zeitintervall [0; 10] zurückgelegt wird.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Flächeninhalts.
b3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

c1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 0{,}9115 \cdot x - 5{,}802$ *(Koeffizienten gerundet)*

x ... Leistung in PS
$f(x)$ ... CO_2-Ausstoß bei der Leistung x in g/km

c2) $f(265) = 235{,}7...$
$\frac{235{,}7... - 213}{213} = 0{,}106...$
Die Abweichung beträgt rund 11 %.

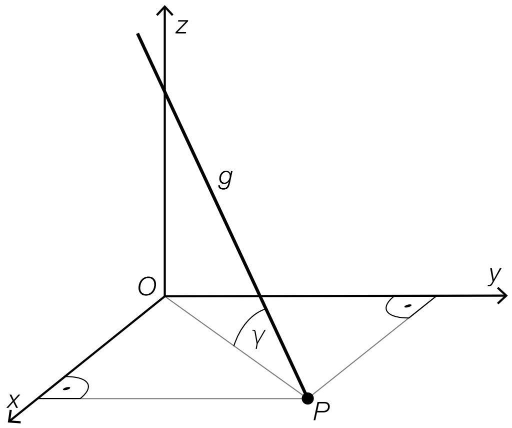
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion *f*.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

Landung eines Flugzeugs

a) Ein Flugzeug steuert beim Landeanflug den Punkt $P = (13\,200|23\,100|0)$ an. Die Flugbahn des Flugzeugs wird näherungsweise durch die Gerade g mit dem Parameter λ beschrieben. (Alle Angaben in Metern.)

$$g: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\,500 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \vec{b}$$

Die nachstehende Abbildung zeigt schematisch den Verlauf dieses Landeanflugs.

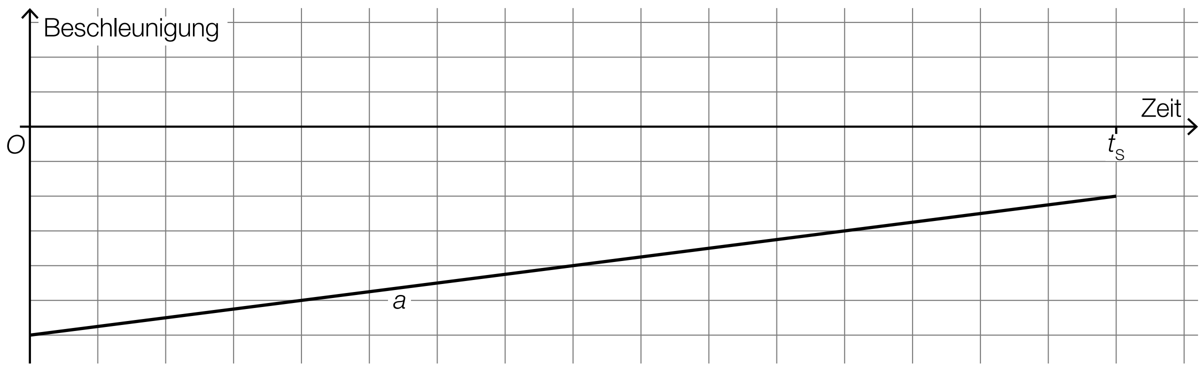


1) Berechnen Sie einen Richtungsvektor $\vec{b}$. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie den spitzen Winkel γ. *[0/1 P.]*

b) Die (negative) Beschleunigung eines Flugzeugs vom Aufsetzen ($t = 0$) bis zum Stillstand t_S kann modellhaft durch eine lineare Funktion a beschrieben werden (siehe unten stehende Abbildung).

1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den linearen Mittelwert $\bar{a}$ (Integralmittelwert) der Funktion a im Zeitintervall $[0; t_S]$ ein. *[0/1 P.]*



c) Beim Starten und Landen eines Flugzeugs ist der sogenannte *Rollwiderstandskoeffizient* von Bedeutung. Der Rollwiderstandskoeffizient hängt unter anderem von der Geschwindigkeit ab. Diese wird in der Einheit *Knoten* angegeben.

Mithilfe von Messwerten wurde die nachstehende lineare Regressionsfunktion c ermittelt.

$c(v) = 0{,}00023 \cdot v + 0{,}01177$

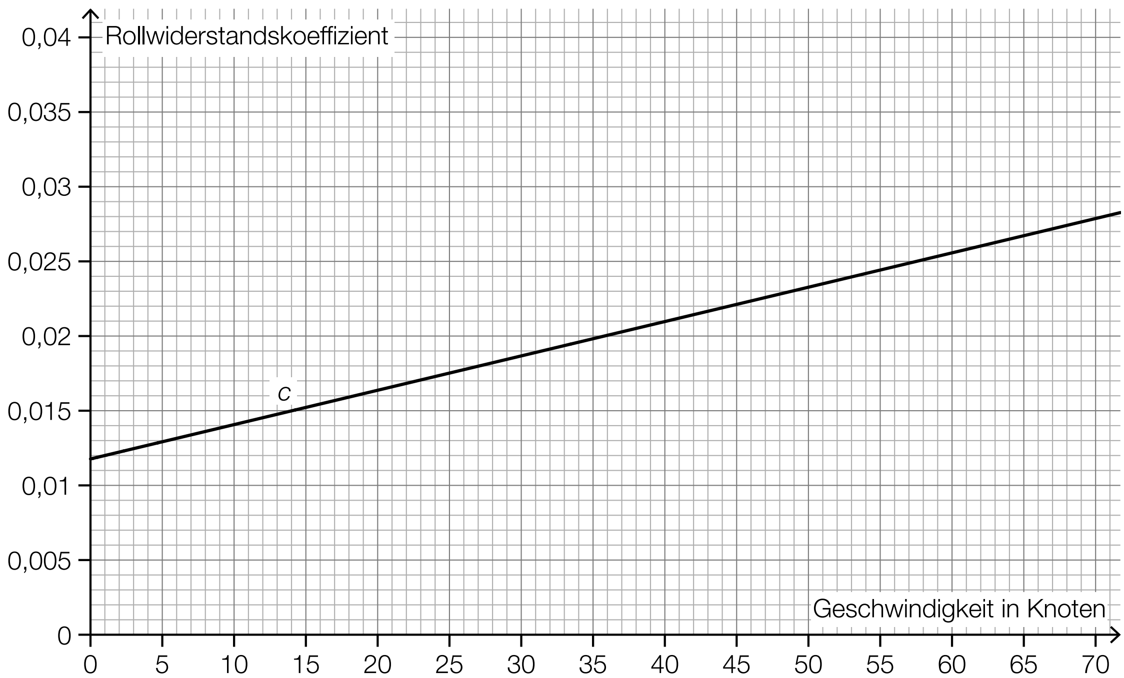
v ... Geschwindigkeit in Knoten
$c(v)$ ... Rollwiderstandskoeffizient bei der Geschwindigkeit v

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Rollwiderstandskoeffizient gemäß diesem Modell bei einer Geschwindigkeit von 60 Knoten größer als bei einer Geschwindigkeit von 30 Knoten ist. *[0/1 P.]*

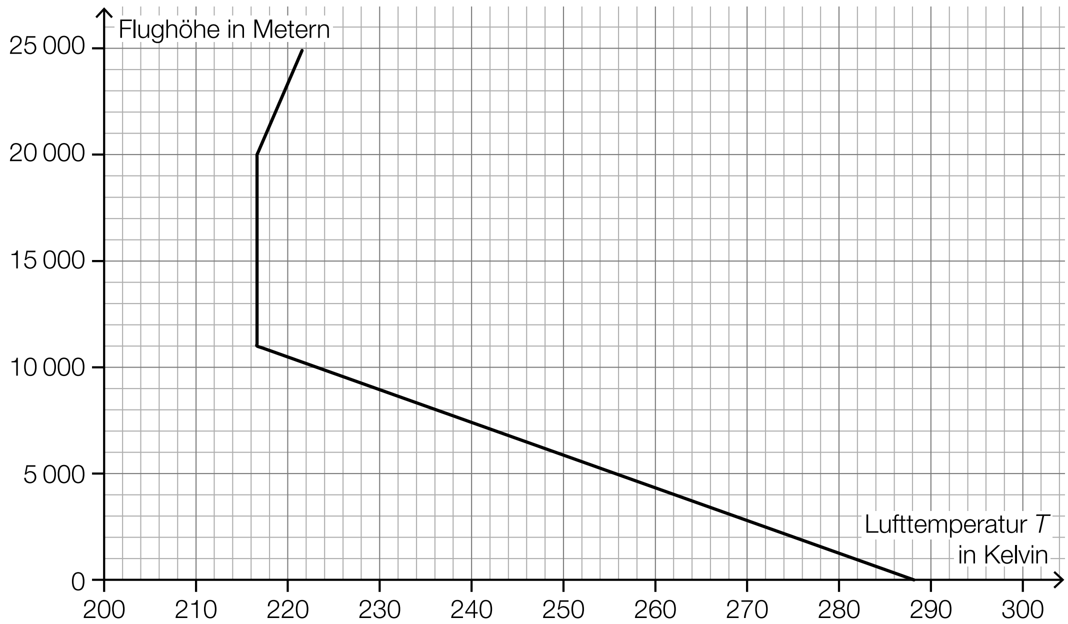
Für den Messwert $M = (40\,|\,y_M)$ gilt:

$c(40) - y_M = -0{,}004$

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Punkt M ein. *[0/1 P.]*



d) Flugzeuge fliegen in unterschiedlichen Höhen. Der Zusammenhang zwischen der Lufttemperatur T und der Flughöhe ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.



Die Turbinen eines Flugzeugs wandeln einen Teil der Energie des Treibstoffs in Bewegungsenergie um. Dieser Anteil kann modellhaft durch den *Carnot-Wirkungsgrad* η beschrieben werden. Für einen bestimmten Turbinentyp gilt:

$$\eta = \frac{1\,230 - T}{1\,230}$$

T ... Lufttemperatur in Kelvin

1) Ermitteln Sie mithilfe des obigen Diagramms den Carnot-Wirkungsgrad in einer Flughöhe von 9 km. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

Landung eines Flugzeugs

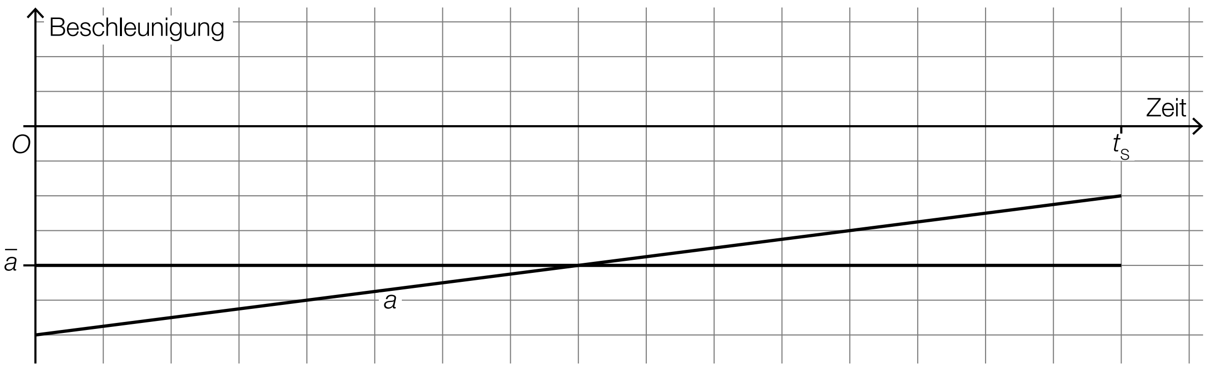
a1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 13\,200 \\ 23\,100 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\,500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13\,200 \\ 23\,100 \\ -1\,500 \end{pmatrix}$

Auch ein Richtungsvektor, der ein Vielfaches des angegebenen Richtungsvektors ist, ist als richtig zu werten.

a2) $\gamma = \arccos\left(\frac{\vec{b} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\vec{b}| \cdot |\overrightarrow{OP}|}\right) = 3{,}22\ldots°$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Richtungsvektors $\vec{b}$.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des spitzen Winkels γ.

b1)



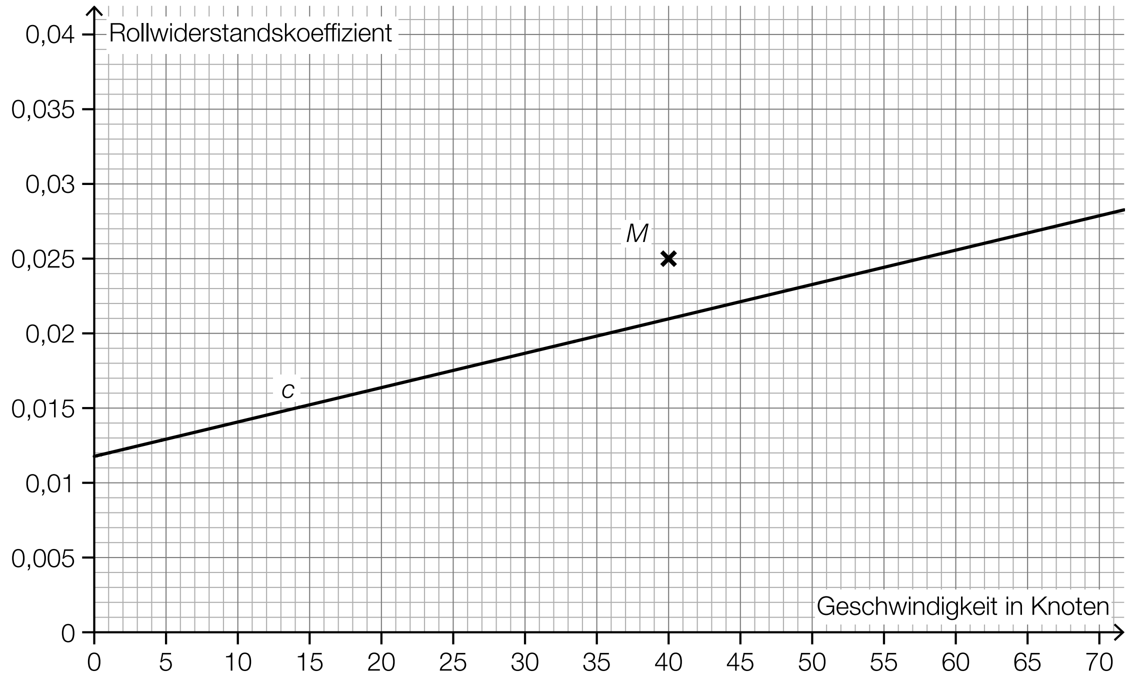
Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn der lineare Mittelwert nur auf der senkrechten Achse markiert ist.

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des linearen Mittelwerts $\bar{a}$.

c1) $\frac{c(60) - c(30)}{c(30)} = 0{,}369...$

Der Rollwiderstand ist bei einer Geschwindigkeit von 60 Knoten um rund 37 % größer als bei einer Geschwindigkeit von 30 Knoten.

c2)



c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
c2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Punktes M.

d1) Ablesen der Lufttemperatur in einer Flughöhe von 9 km: 230 K

$$\eta = \frac{1\,230 - 230}{1\,230} = 0{,}813...$$

Der Carnot-Wirkungsgrad in einer Flughöhe von 9 km beträgt rund 0,81.

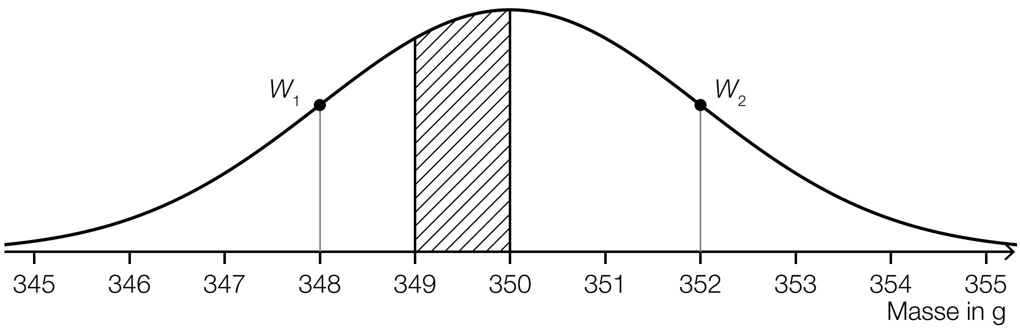
d1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Carnot-Wirkungsgrads.

Fischzucht

a) Forellen sind als Speisefische sehr beliebt.

Die Masse einer Forelle, wie sie in einer bestimmten Fischhandlung verkauft wird, kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.

Im Rahmen der regelmäßigen Qualitätskontrollen werden Stichproben vom Umfang $n = 9$ entnommen.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte.



W_1, W_2 ... Wendepunkte der Dichtefunktion

1) Ermitteln Sie die durch die schraffierte Fläche dargestellte Wahrscheinlichkeit. *[0/1 P.]*

Die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit unterscheidet sich von der Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte.

2) Ermitteln Sie die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit. *[0/1 P.]*

b) Auch Saiblinge sind als Speisefische sehr beliebt.

Die Masse eines Saiblings, wie er in einer bestimmten Fischhandlung verkauft wird, kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.

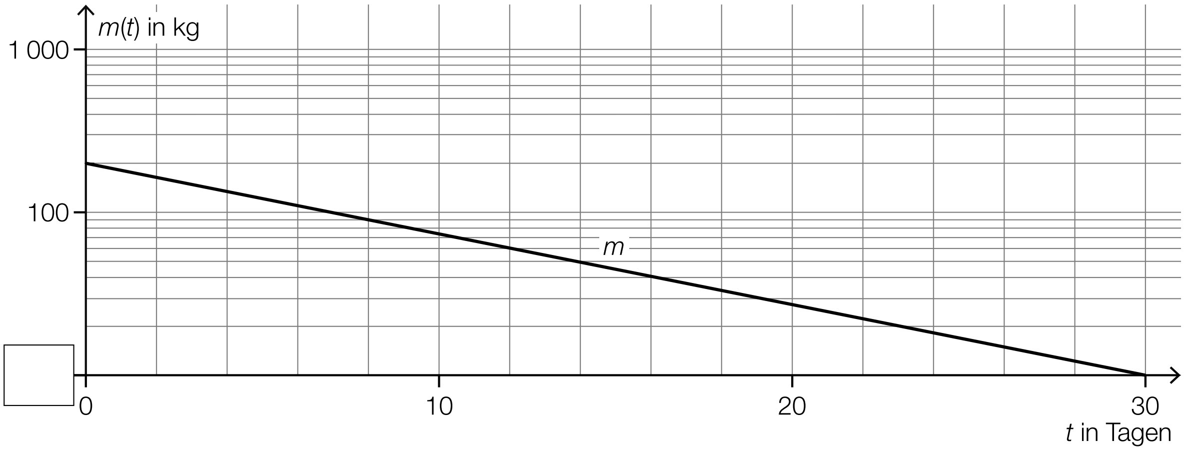
Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 9$ wurden der Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 299$ g und die Stichprobenstandardabweichung $s_{n-1} = 6{,}3$ g ermittelt.

1) Ermitteln Sie den zweiseitigen 90-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ dieser Normalverteilung. *[0/1 P.]*

c) Die Gesamtmasse der Fische in einem bestimmten Fischteich sinkt infolge einer Hitzewelle. Die Gesamtmasse der Fische in diesem Teich kann in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion m beschrieben werden.

t ... Zeit in Tagen mit $0 \leq t \leq 30$
$m(t)$ ... Gesamtmasse der Fische zur Zeit t in kg

Im nachstehenden ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem ist der Graph der Funktion m dargestellt.



1) Tragen Sie im obigen Koordinatensystem die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[0/1 P.]*

Im obigen Koordinatensystem ist der Graph von m eine Gerade.

2) Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung von m an ($a > 0$, $b > 0$). *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$m(t) = a \cdot \lg(t) + b$	☐
$m(t) = -a \cdot t + b$	☐
$m(t) = a \cdot t^b$	☐
$m(t) = a \cdot b^t$	☐
$m(t) = a \cdot t + b$	☐

3) Berechnen Sie die Parameter a und b der Funktion m. *[0/1 P.]*

d) Die maximale Anzahl der Fische, die in einem bestimmten Teich leben können, beträgt G.
Die Anzahl der Fische zur Zeit t kann näherungsweise durch eine Funktion f beschrieben werden.

Die momentane Änderungsrate der Anzahl der Fische ist proportional zur Differenz zwischen der maximalen Anzahl der Fische G und der Anzahl der vorhandenen Fische f.

1) Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für f auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit k. *[0/1 P.]*

Eine Lösung dieser Differenzialgleichung für eine bestimmte Anfangsbedingung lautet:

$f(t) = 1\,000 - 900 \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in Tagen
$f(t)$ ... Anzahl der Fische zur Zeit t

2) Geben Sie die zugehörige Anfangsbedingung für $t = 0$ an. *[0/1 P.]*

3) Begründen Sie anhand der oben angegebenen Funktionsgleichung, warum die Anzahl der Fische für $t \to \infty$ asymptotisch gegen 1 000 geht. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Ablesen von $\sigma_{\bar{x}}$ und $\mu_{\bar{x}}$ aus der Abbildung:

$\sigma_{\bar{x}} = 2$
$\mu_{\bar{x}} = 350$

$P(349 \leq X \leq 350) = 0{,}1914...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 19,1 %.

a2) $2 = \frac{\sigma}{\sqrt{9}}$
$\sigma = 6$

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Standardabweichung σ der Grundgesamtheit.

b1) Berechnung des 90-%-Vertrauensbereichs $[\mu_u; \mu_o]$ mithilfe der t-Verteilung:

$\mu_u = 299 - t_{8;0,95} \cdot \frac{6{,}3}{\sqrt{9}} = 295{,}094...$

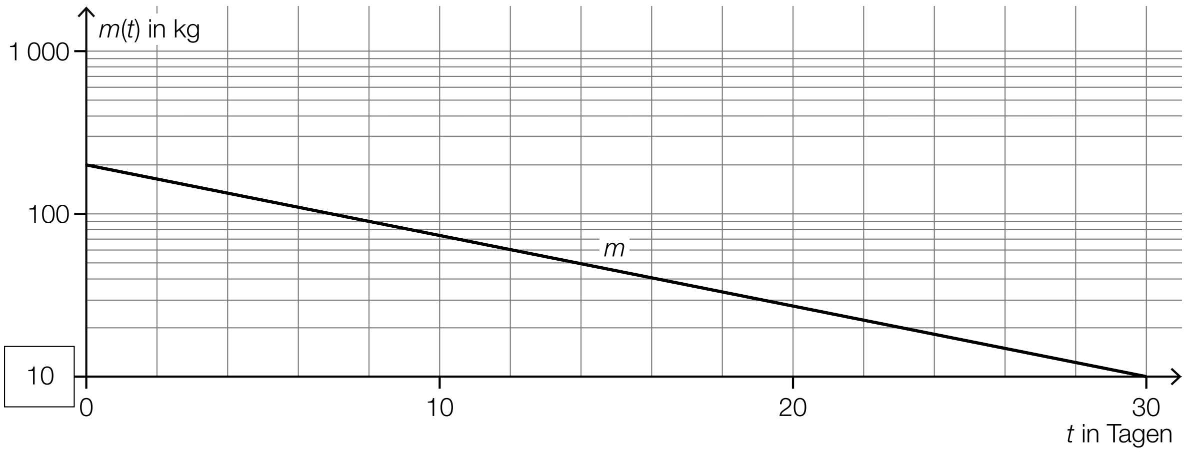
$\mu_o = 299 + t_{8;0,95} \cdot \frac{6{,}3}{\sqrt{9}} = 302{,}905...$

$t_{8;0,95} = 1{,}859...$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich in g: [295,094...; 302,905...]

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des zweiseitigen 90-%-Vertrauensbereichs.

c1)



c2)

$m(t) = a \cdot b^t$	☒

c3) $m(0) = 200$

$a = 200$

$m(30) = 10$ *oder* $200 \cdot b^{30} = 10$

$b = \sqrt[30]{\frac{1}{20}} = 0{,}9049...$

Bei Verwendung anderer Punkte sind geringe Abweichungen möglich.

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
c2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Parameter *a* und *b*.

d1) $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = k \cdot (G - f)$

d2) $f(0) = 100$

d3) Für $t \to \infty$ geht $e^{-k \cdot t}$ gegen 0, und damit geht $1\,000 - 900 \cdot e^{-k \cdot t}$ gegen 1 000.

d1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung.
d2) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Anfangsbedingung.
d3) Ein Punkt für das richtige Begründen.

Schallschutzwände

Aufgabennummer: B_029

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Schallschutzwände dämmen den Lärm, der von einer Straße ausgeht.

a) Der Schalldruckpegel ist ein Maß zur Beschreibung der Stärke eines Schallereignisses. Der Schalldruckpegel kann mit zunehmendem Abstand vom Straßenrand durch die folgende Funktion L_p beschrieben werden:

$L_p(x) = 75 - 10 \cdot \lg(x)$

x ... Abstand von der Schallquelle in m ($x > 1$ m)
$L_p(x)$ ... Schalldruckpegel in dB im Abstand x von der Schallquelle

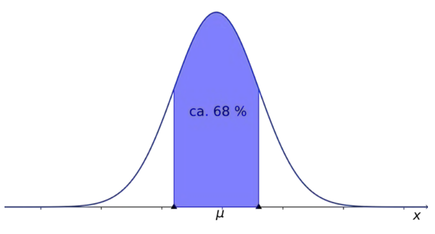
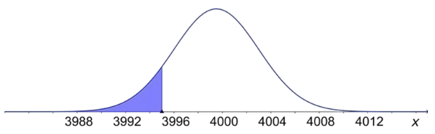
– Ermitteln Sie, um wie viel Dezibel der Schalldruckpegel abnimmt, wenn die Entfernung verdoppelt wird.

b) Die Längen X von Lärmschutzwänden eines bestimmten Herstellers sind normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}5$ mm. Bei einer Stichprobe von 20 Stück wird ein Stichprobenmittelwert von $\bar{x} = 3\,998{,}9$ mm festgestellt.

– Ermitteln Sie das zweiseitige 98-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ dieser Normalverteilung.

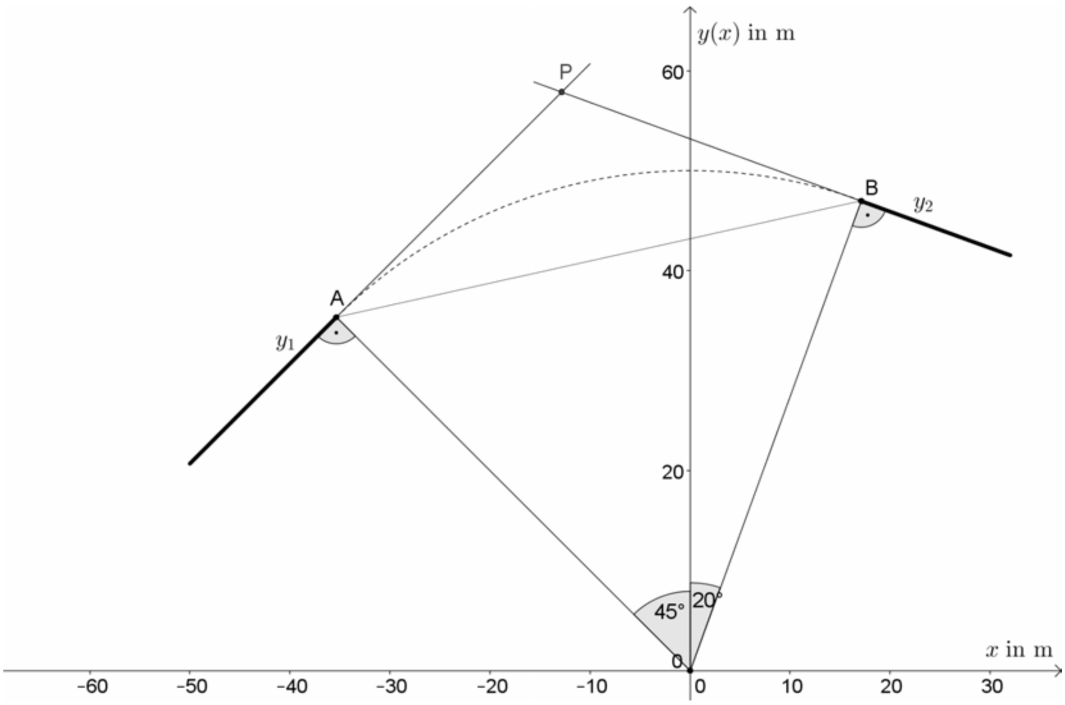
c) Die Längen von Lärmschutzwänden eines bestimmten Herstellers sind normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 3\,999{,}5$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}4$ mm. Lärmschutzwände mit einer Länge größer als 4 010 mm werden nicht ausgeliefert. Eine Produktion umfasst 10 000 Stück.

– Berechnen Sie, mit welcher Anzahl von Lärmschutzwänden, die nicht ausgeliefert werden können, in dieser Produktion zu rechnen ist.
– Ordnen Sie den beiden Abbildungen jeweils denjenigen Ausdruck aus A bis D zu, der durch die Abbildung veranschaulicht wird (X ... Länge der Lärmschutzwände in mm). *[2 zu 4]*

A	$P(X \geq 3\,995)$
B	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
C	$P(X \leq 3\,995)$
D	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

d) Die nachstehende Abbildung zeigt 2 geradlinige Schallschutzwände, die durch einen Kreisbogen ineinander übergeführt werden sollen. Die Bestimmung des Schnittpunktes P mithilfe der Funktionen y_1 und y_2 ergibt: $P = (-12{,}842|57{,}878)$.



– Stellen Sie die Funktionsgleichungen für die Funktionen y_1 und y_2 auf.
– Berechnen Sie die Länge des Kreisbogens zwischen den Punkten A und B.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $L_p(2 \cdot x) - L_p(x) = 75 - 10 \cdot \lg(2 \cdot x) - \big(75 - 10 \cdot \lg(x)\big) = 10 \cdot \lg\left(\frac{x}{2 \cdot x}\right) = 10 \cdot \lg\left(\frac{1}{2}\right) \approx -3$

Bei einer Verdoppelung der Entfernung nimmt der Schalldruckpegel um rund 3 dB ab.

b) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 3\,998{,}9$ mm

$1 - \alpha = 0{,}98;\ \alpha = 0{,}02;\ 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}99$

$\mu_{\text{un}}^{\text{ob}} = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\mu_{\text{un}}^{\text{ob}} = 3\,998{,}9 \pm 2{,}326... \cdot \frac{3{,}5}{\sqrt{20}}$

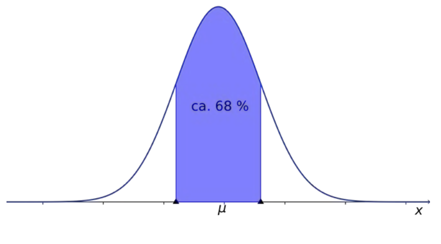
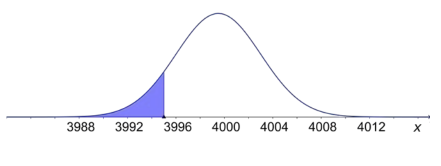
$\mu_{\text{un}} = 3\,997{,}07... \approx 3\,997{,}0$ mm

$\mu_{\text{ob}} = 4\,000{,}72... \approx 4\,000{,}8$ mm

Konfidenzintervall für μ: $3\,997{,}0 \text{ mm} \leq \mu \leq 4\,000{,}8 \text{ mm}$

c) $P(X > 4\,010) = 1 - P(X \leq 4\,010) = 0{,}00101...$

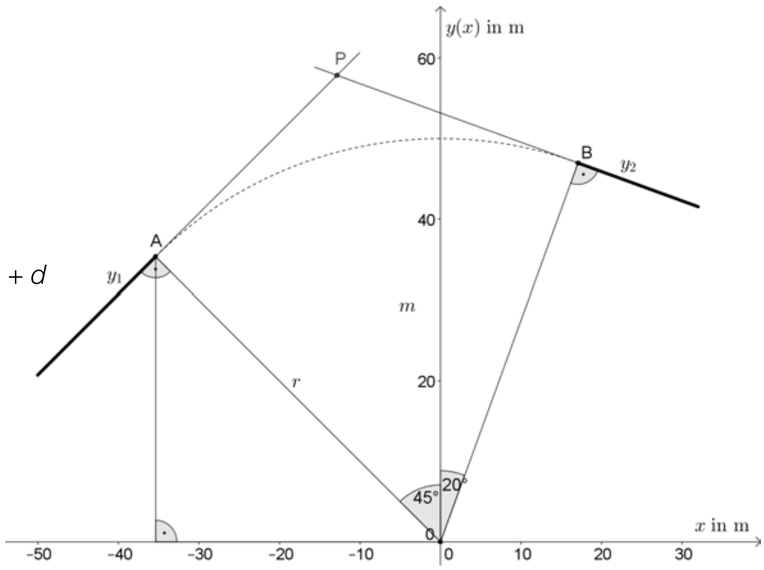
Man muss bei einer Produktion von 10 000 Stück mit 10 Stück rechnen, die nicht ausgeliefert werden können.

	B
	C

A	$P(X \geq 3\,995)$
B	$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$
C	$P(X \leq 3\,995)$
D	$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

d) Funktion y_1:
$k = \tan(45°) = 1$
$57{,}878 = 1 \cdot (-12{,}842) + d$
$\Rightarrow d = 70{,}72$
$y_1(x) = x + 70{,}72$

Funktion y_2:
$k = -\tan(20°) = -0{,}363...$
$57{,}878 = -\tan(20°) \cdot (-12{,}842) + d$
$\Rightarrow d = 53{,}203...$
$y_2(x) = -\tan(20°) \cdot x + 53{,}2$



Länge des Kreisbogens:
Im Punkt A schneiden sich die Funktionen
$y_1(x) = x + 70{,}72$ und
$y(x) = -x$.

Koordinaten des Punktes $A = (-35{,}36|35{,}36)$:
$r = \sqrt{2 \cdot 35{,}36^2}$
$r = 50{,}006...$ m
$b = \frac{r \cdot \pi \cdot 65°}{180°}$
$b \approx 56{,}73$ m

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2
d) 4

Thema: Sonstiges

Quellen: Willems, W. M. et al. (2007): *Formeln und Tabellen Bauphysik.* 1. Auflage. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
http://de.wikipedia.org/wiki/Schalldruckpegel

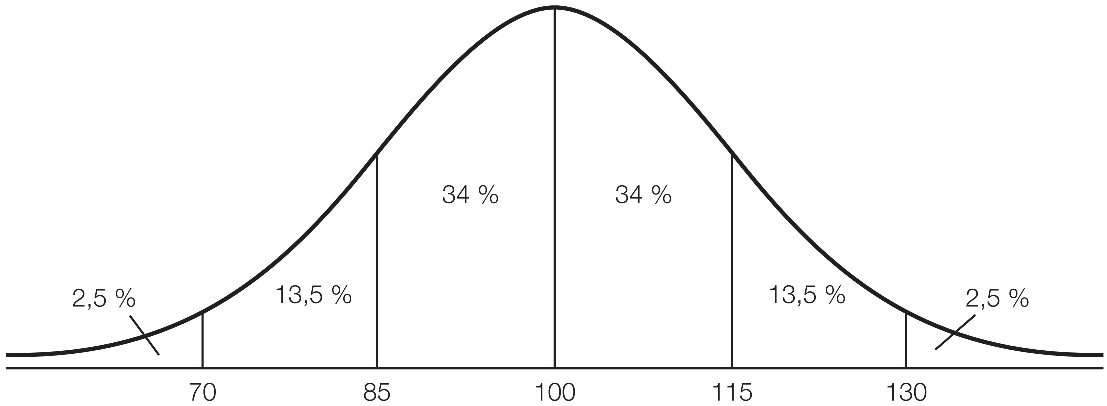
Intelligenzquotient

Aufgabennummer: B_236

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine Kenngröße zur Bewertung des allgemeinen intellektuellen Leistungsvermögens (Intelligenz) eines Menschen. Er vergleicht die Intelligenz eines Menschen mit der mittleren Intelligenz der Gesamtbevölkerung im selben Zeitraum und im vergleichbaren Alter.

a) Interpretieren Sie den IQ als normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mu = 100$:
- Lesen Sie den ungefähren Wert der Standardabweichung aus der unten stehenden Grafik ab.
- Lesen Sie die IQ-Untergrenze der intelligentesten 16 % ab.
- Schätzen Sie aus der Grafik ab, wie viel Prozent der Personen einen höheren IQ als 90 haben.



b) Bei einem IQ-Test erreichte eine Gruppe von 5 Schülerinnen und Schülern Werte von 90, 95, 100, 105 und 110 IQ-Punkten, eine andere Gruppe 85, 90, 95, 105 und 125 IQ-Punkte.

- Berechnen Sie die arithmetischen Mittel sowie die Streuungsmaße *Spannweite* und *Standardabweichung* (auf eine Dezimalstelle gerundet) der beiden Stichproben.
- Interpretieren Sie die Unterschiede.

c) Eine Gruppe von 10 Schülerinnen und Schülern machte einen Intelligenztest.
Dieselben Schüler/innen füllten einen Fragebogen aus, der Aufschluss über das Selbstbewusstsein gibt (je höher die Punktezahl, desto größer das Selbstbewusstsein).
Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

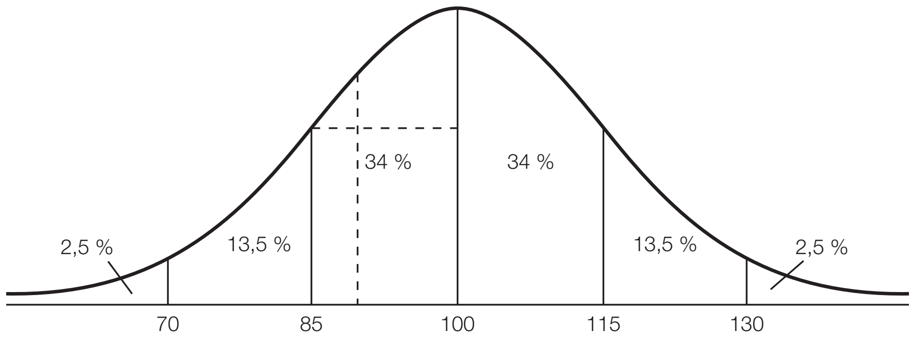
IQ-Punkte x	101	96	120	105	103	90	107	98	110	103
Selbstbewusstsein y	3	1	4	3	4	2	5	2	4	2

– Ermitteln Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
– Stellen Sie die Punktwolke und die Regressionsgerade grafisch dar.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Selbstbewusstsein eines Schülers oder einer Schülerin mit einem IQ von 110.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Standardabweichung $\sigma \approx 15$ IQ-Punkte
Die IQ-Untergrenze der intelligentesten 16 % liegt bei 115 IQ-Punkten.



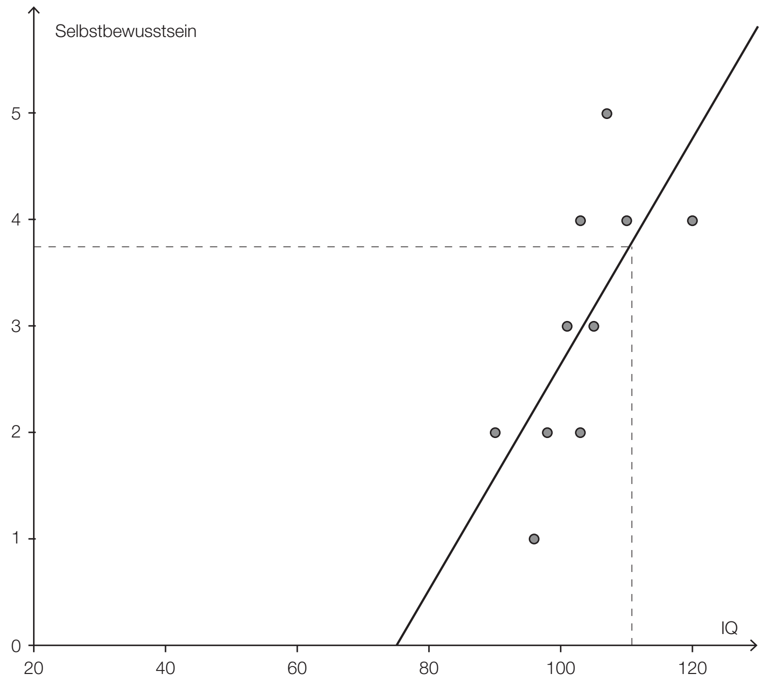
Abschätzen z. B. durch Aufteilen der Fläche unterhalb der Kurve:
Ca. $\frac{1}{4}$ der Fläche zwischen den Grenzen 85 und 100 liegt links von der strichlierten Linie.
$\frac{3}{4}$ von 34 % ≈ 25 %
Etwa 75 % haben einen höheren IQ als 90.

b)

	Gruppe 1	Gruppe 2
arithmetisches Mittel in IQ-Punkten	100	100
Spannweite in IQ-Punkten	20	40
Standardabweichung in IQ-Punkten	7,905… ≈ 7,9	15,811… ≈ 15,8

Das arithmetische Mittel ist bei beiden Gruppen gleich.
Die Spannweite und die Standardabweichung sind bei Gruppe 2 doppelt so groß wie bei Gruppe 1.
Die Testergebnisse der Gruppe 2 (2. Stichprobe) sind um das arithmetische Mittel breiter gestreut. Sie liegen weniger dicht beisammen.

c) Gleichung der Regressionsgeraden:
$-640x + 6\,041y = -47$
bzw. $y = 0{,}106x - 7{,}944$ (auf 3 Dezimalstellen gerundet)
(mit GeoGebra ermittelt – kann bei anderer Technologie geringfügig abweichen)



Bei Verwendung eines grafikfähigen Taschenrechners reicht eine Handskizze.

Ein Schüler oder eine Schülerin mit einem IQ von 110 erreicht auf der Skala für das Selbstbewusstsein einen Wert von etwa 3,8.

Ableseungenauigkeiten (vor allem bei Handzeichnung) sind zu tolerieren.
Auch eine Berechnung mithilfe der Gleichung ist möglich.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 2
c) leicht	c) 3

Thema: Psychologie

Quelle: http://www.dezimmer.net/HTML/1974iq5-korrelation.htm

Ammonium im Fluss

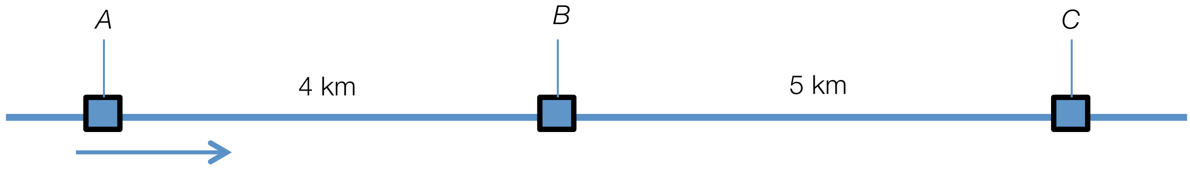
Aufgabennummer: B_105

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Selbstreinigungskraft eines fließenden Gewässers hängt von dessen Sauerstoffgehalt ab. Bleibt der Sauerstoffgehalt konstant, erfolgt der Abbau von Ammonium exponentiell.

a) Bei konstanter Fließgeschwindigkeit baut ein bestimmter Fluss nach jeweils 2 Kilometern (km) 50 % des Ammoniums ab. Am Punkt *A* beträgt der Ammoniumgehalt 1 Milligramm pro Liter (mg/L). Durch Einleitung von Abwasser erhöht sich der Ammoniumgehalt am Punkt *B* um 0,4 mg/L und am Punkt *C* um 0,5 mg/L.

Die nachstehende Grafik zeigt schematisch den Verlauf dieses Flusses.



– Übertragen Sie den Ammoniumgehalt in Milligramm pro Liter (mg/L) während der ersten 6 Kilometer in ein Koordinatensystem. Wählen Sie Punkt *A* als Startpunkt.

Bei konstanter Fließgeschwindigkeit lässt sich der Abbau von Ammonium durch folgende Funktion *N* beschreiben:

$$N(s) = N_0 \cdot e^{-0{,}3466 \cdot s}$$

s … Fließstrecke in km
$N(s)$ … Ammoniumgehalt nach der Fließstrecke s in mg/L
N_0 … Anfangsgehalt an Ammonium in mg/L

– Berechnen Sie, wie hoch der Ammoniumgehalt in mg/L unmittelbar nach dem Punkt *C* ist.

b) Durch den Einbau von Wehrstufen soll der Sauerstoffeintrag in den Fluss und damit dessen Selbstreinigungskraft erhöht werden. Der Fluss sollte danach imstande sein, schon nach 1 km die Hälfte des eingetragenen Ammoniums abzubauen.

– Stellen Sie eine Formel auf, die – abhängig von der Flussstrecke und dem Anfangsgehalt – den Ammoniumgehalt in mg/L beschreibt.

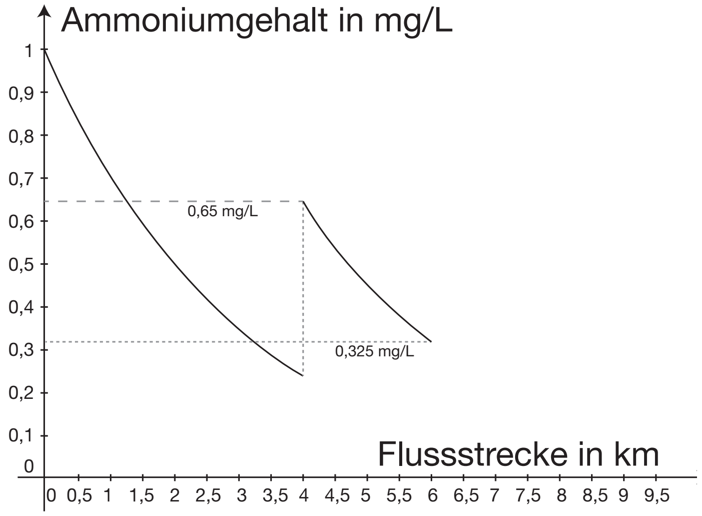
c) An einer bestimmten Stelle des Flusses beträgt der Durchfluss 1 390 m³/s. Der mittlere Ammoniumgehalt beträgt 0,13 mg/L.

– Berechnen Sie die Menge an Ammonium (in Tonnen), die pro Tag an dieser Stelle durchfließt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Skizze kann auch durch Kenntnis der *Halbwertsstrecke* konstruiert werden.



Eintrag von *A*

$$N_A(9) = 1 \cdot e^{-0{,}3466 \cdot 9} \approx 0{,}044 \text{ mg/L}$$

Eintrag von *B*

$$N_B(5) = 0{,}4 \cdot e^{-0{,}3466 \cdot 5} \approx 0{,}071 \text{ mg/L}$$

Eintrag von *C*

$$N_C = 0{,}5 \text{ mg/L}$$

Gesamtgehalt an Ammonium ≈ 0,044 + 0,071 + 0,5 = 0,615 mg/L

Es sind auch andere Lösungswege möglich (z. B. Berechnung von Abschnitt zu Abschnitt).

b) $N(1) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 1}$
$0{,}5 = e^{-\lambda}$
$\ln(0{,}5) = -\lambda$
$\lambda \approx 0{,}6931$
$N(s) = N_0 \cdot e^{-0{,}6931 \cdot s}$

c) $1\,390 \ \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 1\,390 \cdot \frac{1\,000}{\frac{1}{86\,400}} \ \frac{\text{L}}{\text{Tag}} = 1{,}20096 \cdot 10^{11} \ \frac{\text{L}}{\text{Tag}}$

Transportiertes Ammonium:
$= 1{,}20096 \cdot 10^{11} \ \frac{\text{L}}{\text{Tag}} \cdot 0{,}13 \ \frac{\text{mg}}{\text{L}} = 1{,}561248 \cdot 10^{10} \ \frac{\text{mg}}{\text{Tag}} = 1{,}561248 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-9} \ \frac{\text{t}}{\text{Tag}} \approx 15{,}61 \ \frac{\text{t}}{\text{Tag}}$

Pro Tag transportiert der Fluss an dieser Stelle rund 15,61 Tonnen Ammonium.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 4
b) leicht	b) 2
c) leicht	c) 2

Thema: Umwelt

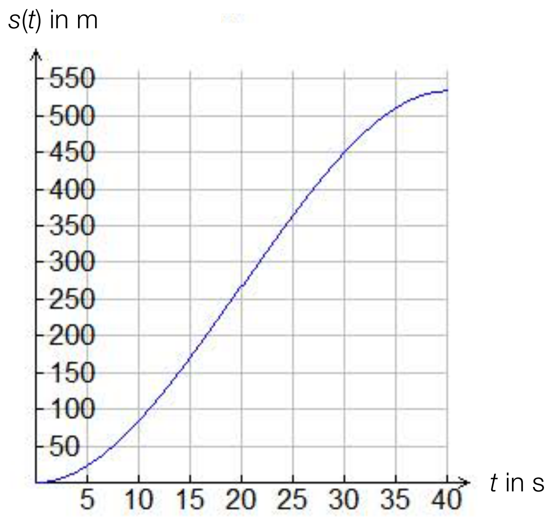
Quellen: –

Autofahrt (1)

Aufgabennummer: B_072

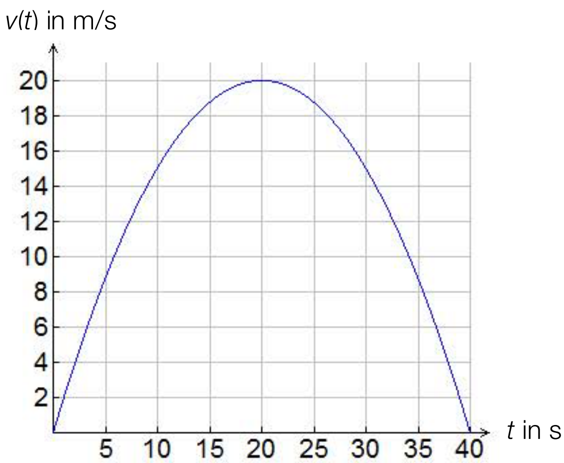
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Im folgenden Weg-Zeit-Diagramm ist die von einem Auto zurückgelegte Strecke s in Metern (m) in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden (s) für $0 \text{ s} \leq t \leq 40 \text{ s}$ dargestellt.



– Lesen Sie aus der Grafik die mittlere Geschwindigkeit des Autos für das Zeitintervall $15 \text{ s} \leq t \leq 30 \text{ s}$ ab.
– Lesen Sie aus der Grafik die momentane Geschwindigkeit des Autos für den Zeitpunkt $t = 30$ s ab.

b) Die nachstehende Grafik zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Autos für die ersten 40 s seiner Fahrt.



– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über die Beschleunigungsfunktion an.
[1 aus 5]

Die Beschleunigung ist nach ungefähr 40 Sekunden gleich null.	☐
Die Beschleunigung ist für $0\text{ s} \leq t \leq 40\text{ s}$ positiv.	☐
Der Graph der Beschleunigungsfunktion ist für den Bereich $0\text{ s} \leq t \leq 40\text{ s}$ fallend.	☐
Die Beschleunigung ist nach ungefähr 20 Sekunden maximal.	☐
Die Beschleunigung ist nach 5 Sekunden ungefähr gleich groß wie nach 35 Sekunden.	☐

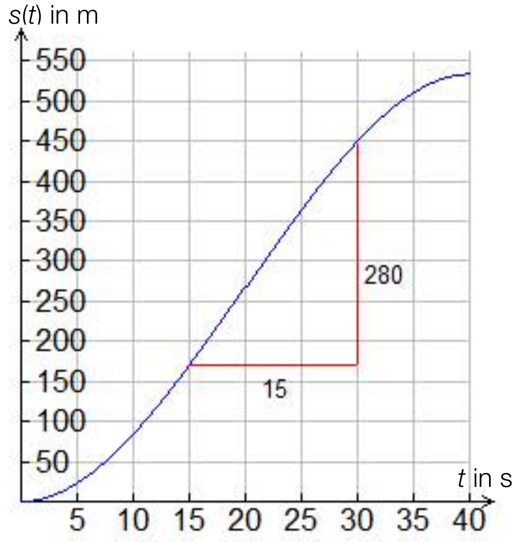
c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos erreicht nach 25 s ihr Maximum von 15 Metern pro Sekunde (m/s) und nach einer Fahrzeit von 50 s ist sie gleich null. Die Geschwindigkeit kann mithilfe einer quadratischen Funktion $v(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

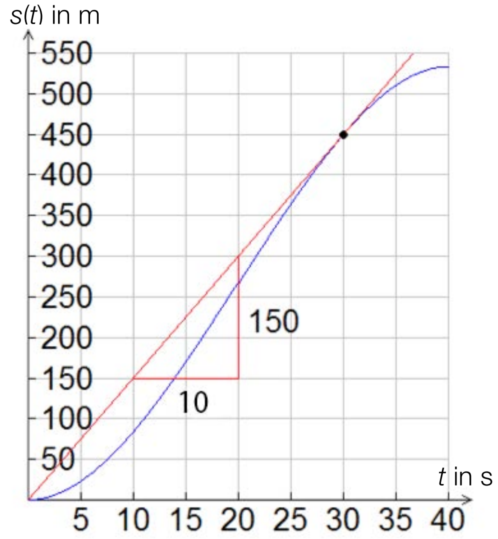
– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c auf.
– Ermitteln Sie diejenige Funktion, die die Geschwindigkeit des Autos in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)





Die mittlere Geschwindigkeit beträgt $\frac{280}{15}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 18{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Momentangeschwindigkeit entspricht der Steigung der Tangente bei $t = 30$ s und beträgt rund $\frac{150}{10}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Etwaige Ableseungenauigkeiten werden toleriert!

b)

Der Graph der Beschleunigungsfunktion ist für den Bereich $0\text{ s} \leq t \leq 40\text{ s}$ fallend.	☒

c) $v(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$, $v'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$

1. $v'(25) = 0 \Rightarrow$ Gleichung 1: $50a + b = 0$
2. $v(25) = 15 \Rightarrow$ Gleichung 2: $625a + 25b + c = 15$
3. $v(50) = 0 \Rightarrow$ Gleichung 3: $2\,500a + 50b + c = 0$

Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz: $v(t) = 1{,}2 \cdot t - 0{,}024 \cdot t^2$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 3

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Planeten (1)

Aufgabennummer: B_167

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Tabelle sind die Entfernungen von Planeten zur Sonne in AE (AE = astronomische Einheit = mittlere Entfernung von der Sonne zur Erde) und deren Umlaufzeiten um die Sonne angegeben.

	Merkur	Venus	Erde	Jupiter	Saturn
mittlere Entfernung x zur Sonne in astronomischen Einheiten (AE)	0,39	0,72	1	5,2	9,54
gerundete Umlaufzeit y in Tagen (d)	88	225	365	4 330	10 760

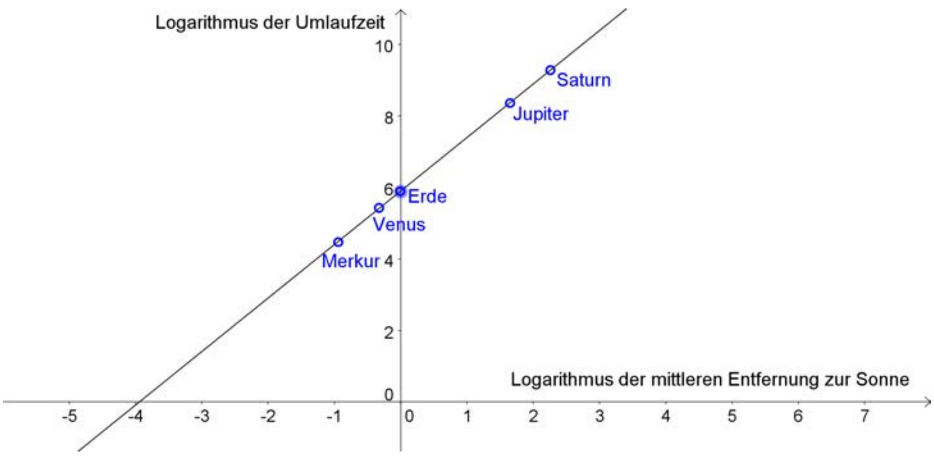
a) Der Zusammenhang zwischen Entfernung und Umlaufzeit wird durch $y = a \cdot x^c$ beschrieben.

– Bestimmen Sie aus den Werten von Venus und Erde die Parameter a und c.

b) Die Anwendung der natürlichen Logarithmusfunktion auf die Werte der obigen Tabelle führt auf die folgende Tabelle:

		Merkur	Venus	Erde	Jupiter	Saturn
Logarithmus der mittleren Entfernung zur Sonne in astronomischen Einheiten (AE)	x	–0,94	–0,33	0	1,65	2,26
Logarithmus der Umlaufzeit in Tagen (d)	y	4,48	5,42	5,9	8,37	9,28

Die logarithmierten Werte müssen auf einer Geraden liegen. Durch Bestimmung der Regressionsgeraden kann man Ungenauigkeiten ausgleichen.



– Berechnen Sie die Gleichung der Regressionsgeraden.
– Berechnen Sie mithilfe der Regressionsgeraden die Umlaufzeit in Tagen für den Mars (mittlere Entfernung zur Sonne = 1,53 AE).

– Erklären Sie, warum die beiden im Folgenden angegebenen Korrelationskoeffizienten für die in der Grafik dargestellten Regression nicht richtig sein können.

$r_1 \approx -0{,}999$
$r_2 \approx 1{,}01$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $y = a \cdot x^c$

$365 = a \cdot 1^c$
$\underline{225 = a \cdot 0{,}72^c}$
$a = 365$

$\frac{225}{365} = 0{,}72^c$

$c = \frac{\ln\left(\frac{225}{365}\right)}{\ln(0{,}72)} \approx 1{,}47$

b) Berechnung mit Technologie: $y = 1{,}49716x + 5{,}89950$
Geradensteigung 1,49716 (Steigungsdreieck) Ordinatenabschnitt 5,89950

Berechnung Mars:
$y = 1{,}49716 \ln(1{,}53) + 5{,}89950 \approx 6{,}536$
$e^{6{,}536} \approx 690$
Die Umlaufzeit beträgt gerundet 690 Tage.

Beobachtung: Alle Punkte liegen beinahe auf der Geraden, die Steigung ist positiv. Der Korrelationskoeffizient muss sich daher sehr nahe an 1 befinden und positiv sein.

$r_1 \approx -0{,}999$ nicht passend, weil zwar nahe genug an 1, aber negativ; passt nicht zu positiver Steigung der Regressionsgeraden
$r_2 \approx 1{,}01$ nicht passend, weil größer als 1

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4

Thema: Physik

Quellen: –

Zahlen können auch komplex sein*

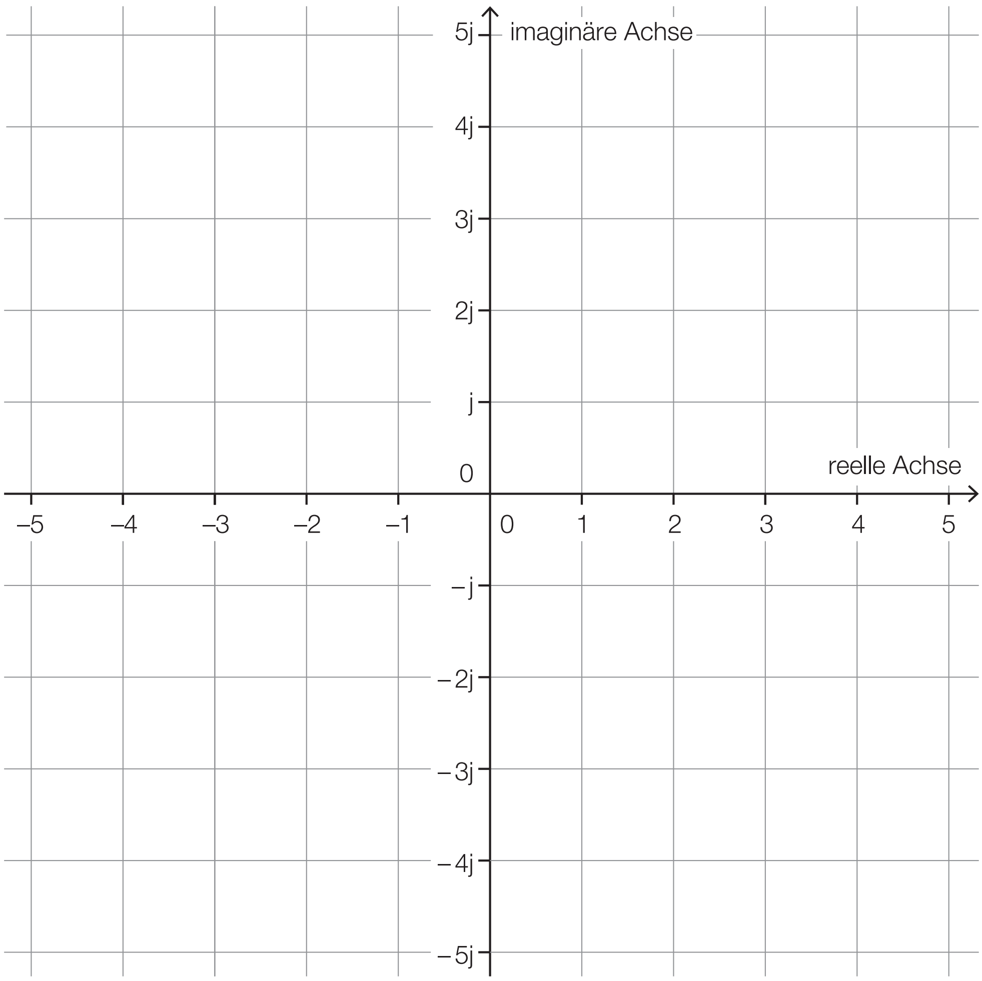
Aufgabennummer: B_510

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Viele Vorgänge in der Elektrotechnik können modellhaft mithilfe von komplexen Zahlen beschrieben werden. Dabei wird die imaginäre Einheit mit j bezeichnet.

a) 1) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die komplexe Zahl $z_1 = 2 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$ ein.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die beiden komplexen Zahlen z_2 und z_3 ein, die den Realteil –3 und den Betrag 5 haben.



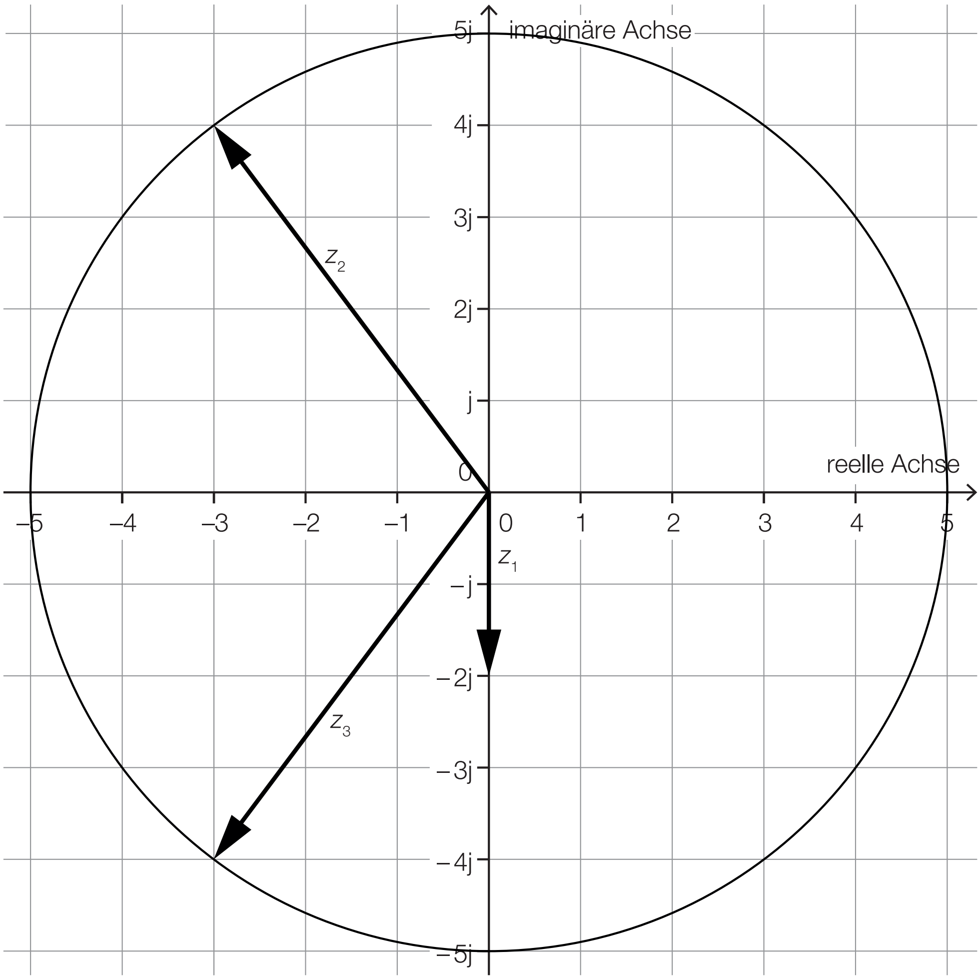
b) Zu jeder komplexen Zahl $z = a + b \cdot j$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gibt es die konjugiert komplexe Zahl $z^* = a - b \cdot j$.

1) Zeigen Sie allgemein, dass $z \cdot z^*$ eine reelle Zahl ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1 und a2)



Auch ein Einzeichnen der komplexen Zahlen als Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene ist als richtig zu werten.

b1) $z \cdot z^* = (a + b \cdot \mathrm{j}) \cdot (a - b \cdot \mathrm{j}) = a^2 - b^2 \cdot \mathrm{j}^2 = a^2 + b^2$

Mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist auch $a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

Lösungsschlüssel

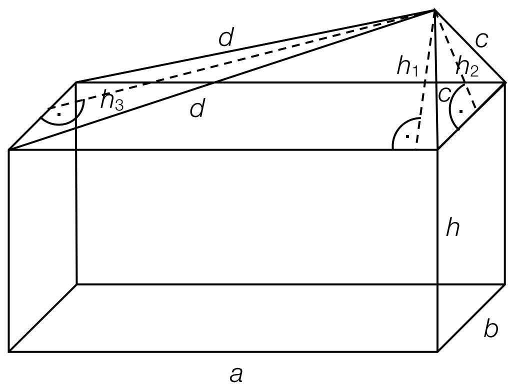
a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen von z_1.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen von z_2 und z_3.
b1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.

Gewächshaus

Aufgabennummer: B_058

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für die Anzucht von Paradeisern wird ein Gewächshaus aus Glas gebaut (siehe Abbildung).



a) – Zeigen Sie, wie man die gegebene Formel für die Berechnung des Materialbedarfs an Glas für alle 4 Seitenwände und das aus 4 Glasplatten bestehende Dach erhält.

$$O = b \cdot \left(2 \cdot h + \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2}\right) + a \cdot (2 \cdot h + h_1)$$

b) – Berechnen Sie denjenigen Winkel, den die lange schräge Kante d des Dachs mit der waagrechten Kante a einschließt. Maße: a = 3,8 m, d = 3,2 m, c = 1,3 m.

c) Von der in einer Paradeiserpflanze vorhandenen Flüssigkeitsmenge verdunsten täglich 45 %. Über das Erdreich nimmt die Pflanze im gleichen Zeitraum 12 Milliliter (ml) Flüssigkeit auf. Zu Beginn des Beobachtungszeitraumes enthält die Pflanze 15 ml Flüssigkeit. Die Zunahme der Flüssigkeitsmenge in der Paradeiserpflanze kann durch folgende Funktion y beschrieben werden:

$$y(t) = a \cdot (1 - e^{b \cdot t}) + c$$

t ... Zeit in Tagen
$y(t)$ ... Flüssigkeitsmenge in der Pflanze zum Zeitpunkt t in ml

– Erstellen Sie (ohne Verwendung der Funktionsgleichung) eine Tabelle und eine Grafik, die die tägliche Flüssigkeitsmenge in der Paradeiserpflanze für 15 Tage angeben.
– Ermitteln Sie die Parameter a, b und c. Verwenden Sie dazu die Daten der zuvor erstellten Tabelle.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Oberfläche des Glashauses setzt sich aus 4 Rechtecken und 4 Dreiecken zusammen:

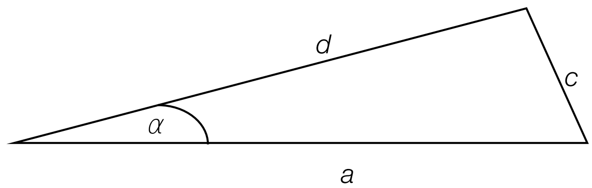
$$O = 2 \cdot \left(a \cdot h + b \cdot h + \frac{a \cdot h_1}{2}\right) + \frac{b \cdot h_2}{2} + \frac{b \cdot h_3}{2}$$

Durch Umformung erhält man:

$$O = 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h + a \cdot h_1 + \frac{b \cdot h_2}{2} + \frac{b \cdot h_3}{2}$$

$$O = b \cdot \left(2 \cdot h + \frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2}\right) + a \cdot (2 \cdot h + h_1)$$

b) (Skizze nicht explizit verlangt.)



$$c^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos(\alpha)$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - d^2}{-2 \cdot a \cdot d}\right)$$

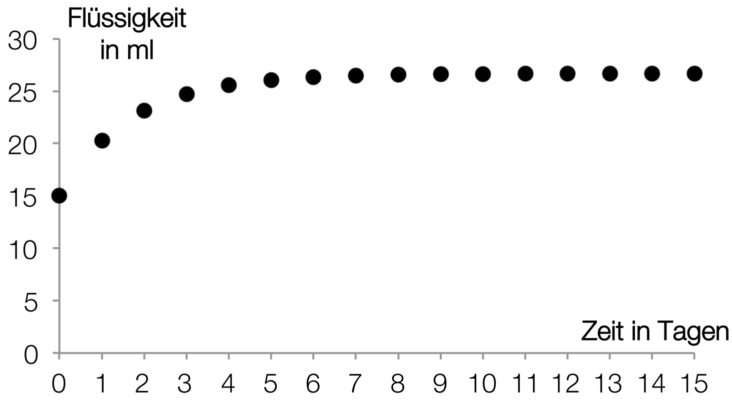
$$\alpha = 19{,}0362...° \approx 19°$$

Der Winkel beträgt etwa 19°.

c) Die Tabelle wird z. B. in Excel iterativ erstellt: ($x_{n+1} = 0{,}55 \cdot x_n + 12$).

Aus der Tabelle wird anschließend die Grafik erstellt.

Tag	Flüssigkeit in der Pflanze in ml
0	15,00
1	20,25
2	23,14
3	24,73
4	25,60
5	26,08
6	26,34
7	26,49
8	26,57
9	26,61
10	26,64
11	26,65
12	26,66
13	26,66
14	26,66
15	26,67



Für die Ermittlung der Parameter a, b und c wird aus der Tabelle abgelesen:

$t = 0$, $y = 15$ ⇒ $\underline{c = 15}$

Der Grenzwert der Funktion für $t \to \infty$ ist ca. 26,67. ⇒ $a = 26{,}67 - 15$
$\underline{a \approx 11{,}67}$

Die Ermittlung von b erfolgt durch Einsetzen eines Punktes, z. B. (1|20,25), und Lösen der Exponentialgleichung:

$20{,}25 = 11{,}67 \cdot (1 - e^{b \cdot 1}) + 15$ ⇒ $\underline{b \approx -0{,}6}$

$y(t) = 11{,}67 \cdot (1 - e^{-0{,}6 \cdot t}) + 15$

Auch andere korrekte Lösungswege sind zulässig.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4

Themen: Architektur, Biologie

Quellen: –

Raketenstart

Aufgabennummer: B_054

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Trägerraketen ermöglichen es, schwere Nutzlasten in die Erdumlaufbahn zu befördern. Ariane 5 ist die leistungsfähigste europäische Trägerrakete.
Beim Start der Ariane 5 lässt sich der senkrecht nach oben zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t modellhaft annähernd durch eine quadratische Funktion beschreiben.

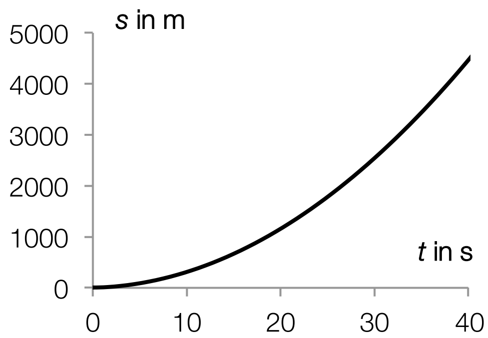
a)

t in s	$s(t)$ in m
0	0
2	16,1
4	53,8

t … Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ … zurückgelegter Weg in Metern (m) zum Zeitpunkt t

– Stellen Sie die allgemeine Funktion s für den gegebenen Zusammenhang auf.
– Ermitteln Sie mithilfe der Werte aus der Tabelle die entsprechenden Parameter der Funktion s.

b) Folgender Graph beschreibt modellhaft den zurückgelegten Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t in der Startphase der Rakete:

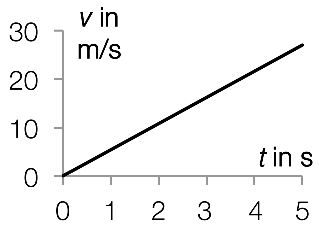


– Erklären Sie den Unterschied zwischen der Momentangeschwindigkeit v für den Zeitpunkt $t_0 = 30$ s und der Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ für $\Delta t = 30\text{ s} - 0\text{ s}$ mithilfe der Begriffe *Differenzenquotient* und *Differenzialquotient*.
– Veranschaulichen Sie diese in obiger Grafik.

c) Die Beschleunigung der Ariane 5 in der Startphase beträgt etwa 5,4 m/s².

– Stellen Sie die Funktionen für die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und den Weg in Abhängigkeit von der Zeit auf.

d) Der Graph stellt die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion *v* der Rakete in den ersten 5 Sekunden des Starts dar.



– Veranschaulichen Sie die Abhängigkeit der Beschleunigung-Zeit-Funktion *a* und der Weg-Zeit-Funktion *s* von der gegebenen Funktion *v*, indem Sie *a* und *s* zeichnen.
– Erklären Sie, was man aus der Kenntnis der Eigenschaften des Graphen von *v* über die Graphen von *a* und *s* aussagen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Aufstellen der allgemeinen Gleichung einer quadratischen Funktion:
$s(t) = at^2 + bt + c$

Aufstellen eines Gleichungssystems:

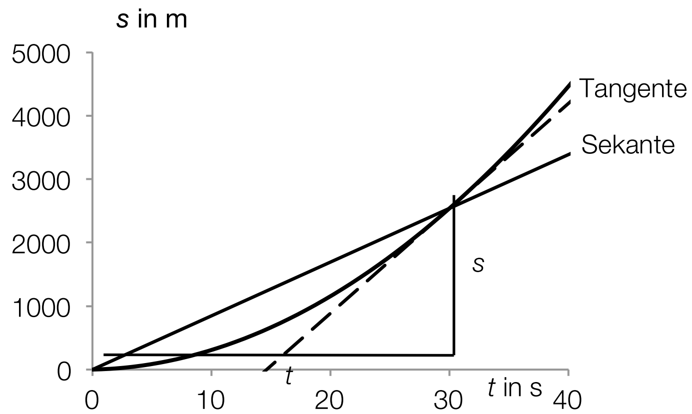
I: $c = 0$
II: $4a + 2b = 16{,}1$
III: $16a + 4b = 53{,}8$

Lösen des linearen Gleichungssystems:

$a = 2{,}7$, $b = 2{,}65$, $c = 0$
$s(t) = 2{,}7t^2 + 2{,}65t$

Alternative Lösungen über Datenfit-Routine sind auch zulässig, z. B. mit GeoGebra: TrendPoly {Liste von Punkten; Grad der Funktion}.

b)



$\bar{v}(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ... Steigung der Sekante, Differenzenquotient

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist der Differenzenquotient aus Wegdifferenz durch Zeitdifferenz. (In diesem Fall ist $\Delta t = 30$ s, Δs errechnet man aus der Funktionsgleichung.)

$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$ … Steigung der Tangente, Differenzialquotient

Die Momentangeschwindigkeit erhält man durch die Bildung des Grenzwerts des Differenzenquotienten, wobei man Δt gegen 0 streben lässt. Der Differenzialquotient ist die erste Ableitung des Weges nach der Zeit und die Steigung der Tangente an der Stelle $t = 30$ s.

c) $a(t) = 5{,}4$

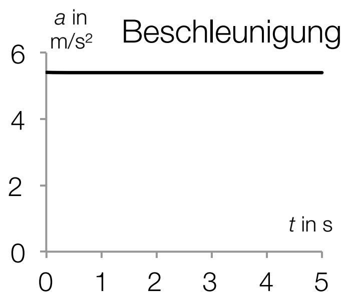
$v(t) = \int 5{,}4\mathrm{d}t = 5{,}4t + C_1$

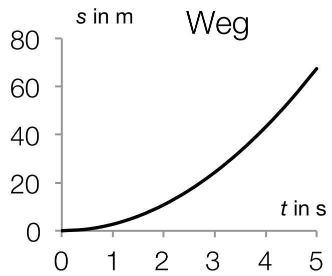
$s(t) = \int (5{,}4t + C_1)\mathrm{d}t = 2{,}7t^2 + C_1t + C_2$

$C_2 = 0$, da der zurückgelegte Weg zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich 0 ist.
$C_1 = 0$, da die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich 0 ist.

$v(t) = 5{,}4t$
$s(t) = 2{,}7t^2$

d)





a ist die Steigungsfunktion von *v*. Da die Geschwindigkeit linear steigt, ist die Beschleunigung konstant, und der Graph von *a* ist eine waagrechte Gerade.

v ist die Steigungsfunktion von *s*. Da die Geschwindigkeit linear zunimmt, steigt der Weg mit dem Quadrat der Zeit, und *s* ist eine quadratische Funktion.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 4
c) mittel	c) 4
d) schwer	d) 4

Thema: Physik

Quellen: http://www.raumfahrer.net, http://www.esa.int

Großtrappen

Aufgabennummer: B_131

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein LIFE-Projekt in Ostösterreich widmet sich dem Schutz der Großtrappen, einer gefährdeten Vogelart. Zu Beginn des Beobachtungszeitraums wurden in Niederösterreich und im Burgenland 140 Tiere gezählt. 5 Jahre später waren es bereits 244.

a) – Argumentieren Sie, warum ein lineares bzw. ein unbegrenztes exponentielles Wachstumsmodell die Entwicklung der Tierpopulation zwar beschreibt, dies aber langfristig gesehen nicht der Realität entspricht.

b) Nehmen Sie ein begrenztes exponentielles Wachstum mit einer Obergrenze von G = 1 000 an. Es gilt folgende Funktion:

$$y(t) = G - c \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

t … Zeitdauer in Jahren (a)
$y(t)$ … Anzahl der Tiere nach t Jahren
c … Anzahl der Tiere, um die der Anfangsbestand bis zur Obergrenze zunehmen kann

– Berechnen Sie den Stand der Population nach 20 Jahren unter der Voraussetzung, dass die Entwicklung der Vogelpopulation diesem Modell folgt.

c) In der Realität wird das Wachstum der Großtrappen-Population besser durch die folgende logistische Funktion beschrieben:

$$y(t) = \frac{1\,000}{1 + 6{,}143 \cdot e^{-0{,}1369 \cdot t}}$$

t … Zeitdauer in Jahren (a)
$y(t)$ … Anzahl der Tiere nach t Jahren

– Stellen Sie diese Funktion grafisch dar.
– Lesen Sie aus der Grafik ungefähr ab, wann sich der Bestand seit dem Beginn der Beobachtungszeit auf 280 Tiere verdoppelt hat.
– Überprüfen Sie durch Ablesung des Zeitraums bis zur nächsten Verdopplung, ob die Zeitdauer, in der sich der jeweilige Bestand an Tieren verdoppelt, in diesem Modell konstant bleibt.

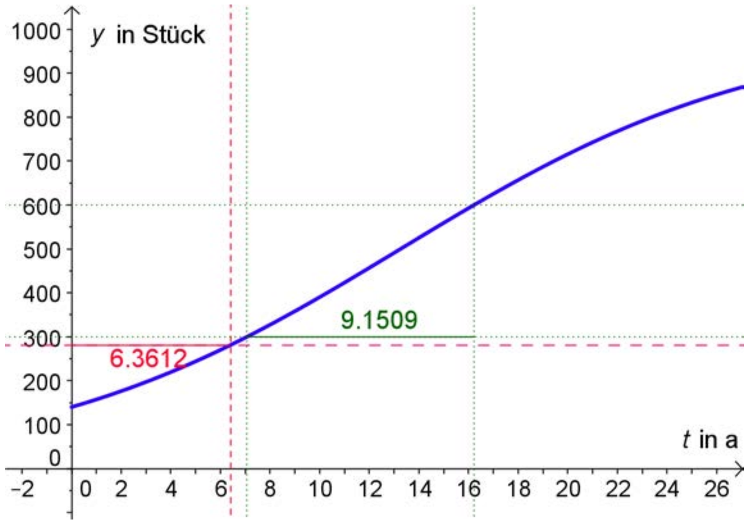
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Wachstum hängt vom Lebensraum und den darin vorhandenen Lebensbedingungen für Großtrappen ab. Langfristig gesehen wird das räumlich begrenzte Schutzgebiet zwar die Vermehrung der Tiere fördern, aber auch nach oben hin einschränken.
Daher kann die Zahl der Vögel zwar anfänglich möglicherweise nach einem linearen oder einem unbegrenzten exponentiellen Wachstum verlaufen, aber nicht unendlich steigen, wie es bei diesen beiden Wachstumsmodellen der Fall wäre.

b) $140 = 1\,000 - c \cdot e^0 \rightarrow c = 860$
$244 = 1\,000 - c \cdot e^{5 \cdot \lambda} \rightarrow \lambda = -0{,}02577\ldots \approx -0{,}0258$
Funktionsgleichung: $y(t) = 1\,000 - 860 \cdot e^{-0{,}0258 \cdot t}$
Prognose $t = 20$ Jahre → rund 486 Tiere

c)



– Die Verdopplung vom Anfangsbestand von 140 auf 280 Tiere benötigt etwas mehr als 6 Jahre.
– Die Verdopplung von 300 auf 600 Tiere benötigt nach diesem Modell einen Zeitraum von etwas mehr als 9 Jahren.
Bei diesem Modell ist die Dauer, in der sich ein Bestand verdoppelt, nicht konstant.

Ableseungenauigkeiten werden toleriert, insbesondere bei Grafikrechnern und Handskizzen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 4
c) 3

Thema: Biologie

Quellen: –

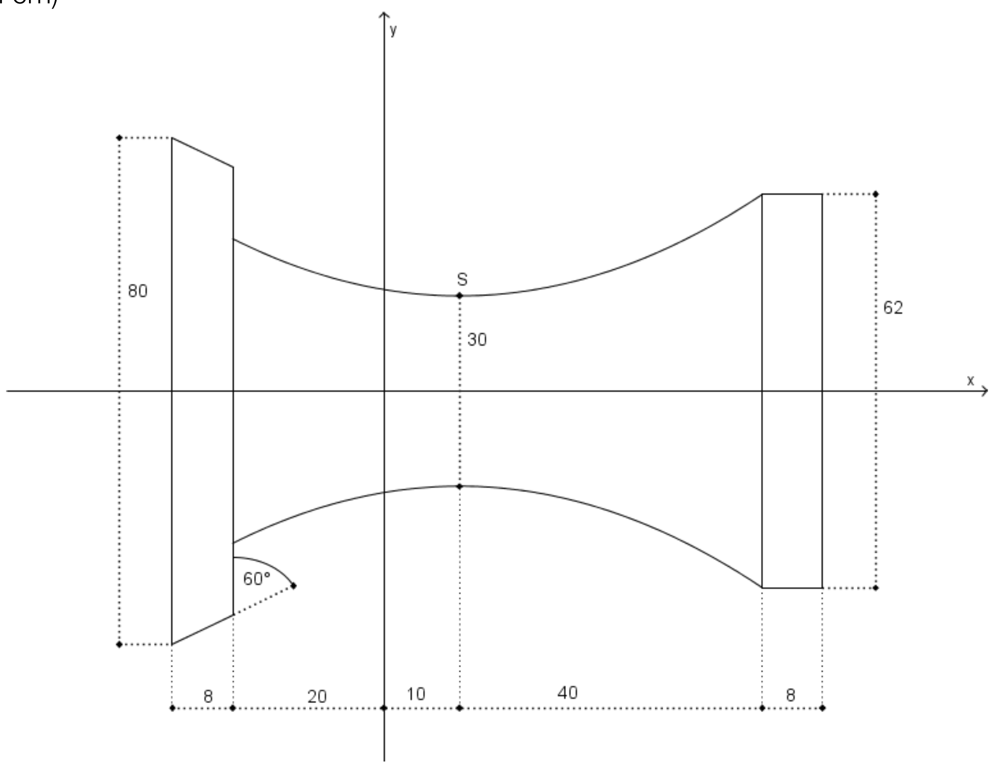
Drechseln

Aufgabennummer: B_003

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die folgende Abbildung zeigt den Längsschnitt eines rotationssymmetrischen Körpers, der durch eine um die x-Achse drehende Parabel mit einem aufgesetzten Drehkegelstumpf und einem Drehzylinder entsteht. Die Formgebung erfolgt durch Drechseln eines Holzzylinders.

(Maße in cm)



a) – Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Parabel. Wählen Sie einen anderen Ursprung des Koordinatensystems als in der Abbildung dargestellt.

b) – Berechnen Sie die Bogenlänge der oben dargestellten Parabel, die durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

Bogenlänge: $s = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$

c) – Berechnen Sie den Abfall in Prozent, der bei der Herstellung des Drehteils anfällt, wenn der Rohling einen Durchmesser $d = 8{,}5$ dm hat und die Parabel durch die Funktion $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ beschrieben wird.

d) Gegeben sind folgende Funktionen:

$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ und $g(x) = -\frac{9}{490} \cdot x^2 + \frac{319}{490} \cdot x + \frac{2\,174}{49}$

Bei Rotation von Flächenstücken um die x-Achse entstehen Rotationskörper, deren Volumina durch folgende Formeln berechnet werden können:

$V_1 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (g(x) - f(x))^2 \, \mathrm{d}x$

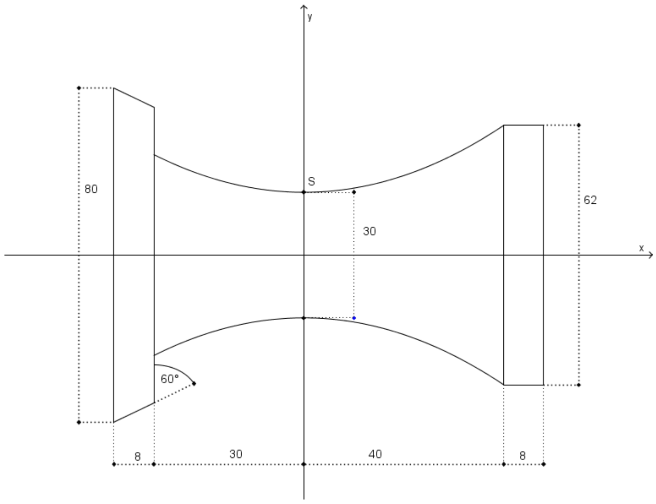
$V_2 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} [(g(x))^2 - (f(x))^2] \, \mathrm{d}x$

– Stellen Sie für jede der beiden Volumsformeln das rotierende Flächenstück grafisch dar.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems – siehe Abbildung rechts



$S = (0|15)$, $h(x) = a \cdot x^2 + n$

$n = 15$
$P = (40|31)$
$31 = a \cdot 40^2 + 15 \Rightarrow a = \frac{1}{100}$

$h(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 + 15$

Mit einer anderen Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems sind weitere Funktionsgleichungen der Parabel möglich.

b) $y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$; $y'(x) = \frac{1}{50} \cdot x - 0{,}2$
$s = \int_{-20}^{50} \sqrt{1 + y'^2} \approx 75{,}64$ cm

Die Bogenlänge der Parabel beträgt 75,64 cm.

c) Drehkegelstumpf:
$\tan 30 = \frac{r_1 - r_2}{8} \Rightarrow r_1 - r_2 = 4{,}618\ldots \approx 4{,}62$ cm
$V_{\text{Drehkegelstumpf}} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$
$V_{\text{Drehkegelstumpf}} \approx 35{,}75\ \text{dm}^3$

Drehzylinder:
$V_{\text{Drehzylinder}} = r^2 \cdot \pi \cdot h$
$V_{\text{Drehzylinder}} = 24\,152{,}56\ldots\ \text{cm}^3 \approx 24{,}15\ \text{dm}^3$

Parabel:
$y(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$
$V_{\text{Parabel}} = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (y(x))^2\,dx$
$V_{\text{Parabel}} = \pi \cdot 27\,384 = 86\,029{,}37\ldots\ \text{cm}^3 \approx 86{,}03\ \text{dm}^3$

$V = V_{\text{Drehkegelstumpf}} + V_{\text{Drehzylinder}} + V_{\text{Parabel}} \approx 145{,}93\ \text{dm}^3$

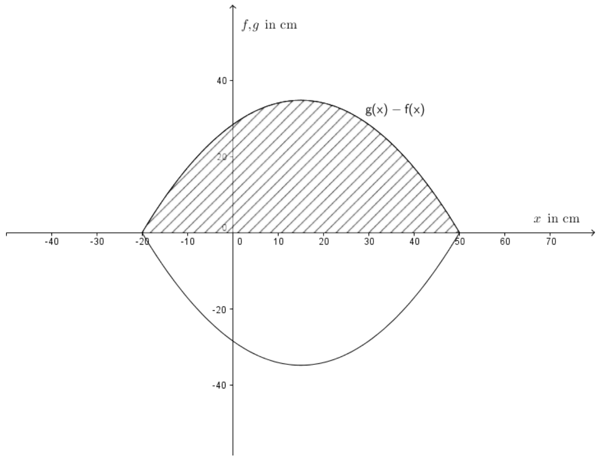
Rohling:
$V_{\text{Rohling}} = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot h$
$V_{\text{Rohling}} = 488\,007{,}14\ldots\ \text{cm}^3 \approx 488{,}01\ \text{dm}^3$

Abfall in Prozent:
$1 - \frac{145{,}932}{488{,}01} = 0{,}7009 \approx 70{,}1\ \%$
Bei der Herstellung des Drehteils fallen 70,1 % Abfall an.

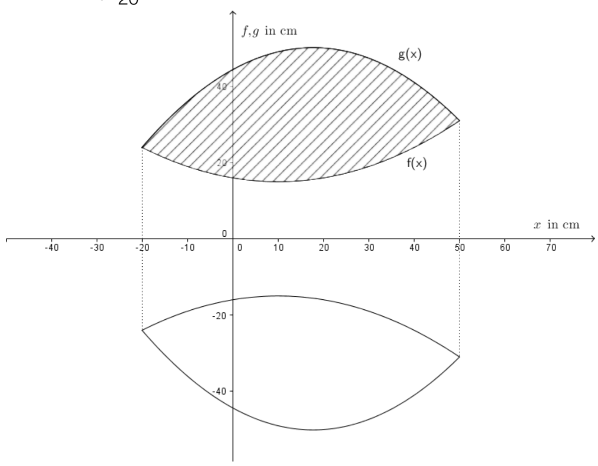
d) Die Volumsformeln ergeben die folgenden schraffierten Flächenstücke, die um die x-Achse rotieren:

$f(x) = \frac{1}{100} \cdot x^2 - 0{,}2 \cdot x + 16$ und $g(x) = -\frac{9}{490} \cdot x^2 + \frac{319}{490} \cdot x + \frac{2\,174}{49}$

$V_1 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} (g(x) - f(x))^2 \, dx$



$V_2 = \pi \cdot \int_{-20}^{50} [(g(x))^2 - (f(x))^2] \, dx$



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis
c) 1 Zahlen und Maße
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4
d) 4

Thema: Maschinenbau

Quellen: –

Fahrzeugtests (1)

Aufgabennummer: B_045

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

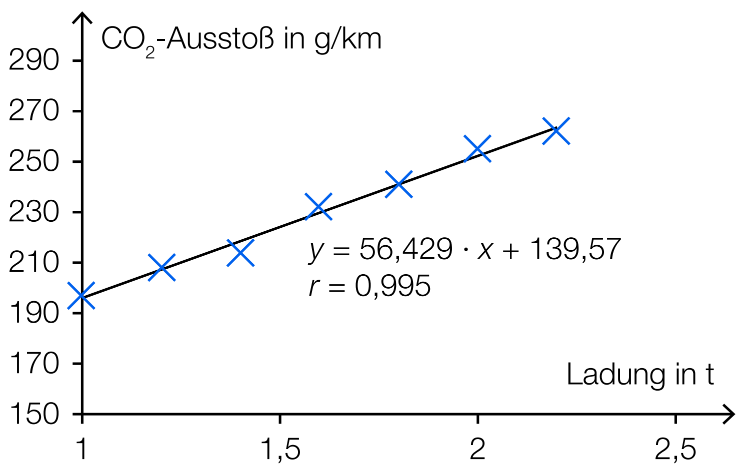
Die Firma *Cargo-Car* führt in der Entwicklungsphase eines neuen Transporters Tests durch.

a) In Testreihen wurde der Kraftstoffverbrauch – abhängig von der Ladung – erhoben. In der folgenden Tabelle ist für 8 Testfahrten die Reichweite pro Liter Kraftstoffverbrauch bei einer vorgegebenen Ladung in Tonnen angegeben:

Reichweite in km	12,46	12,10	11,81	11,32	10,94	10,81	10,79	10,23
Ladung in t	1	1,05	1,3	1,4	1,52	1,7	1,9	2,1

– Geben Sie an, welche Variable hier als unabhängig und welche als abhängig anzunehmen ist.
– Ermitteln Sie die lineare Ausgleichsfunktion und stellen Sie diese in einem Datendiagramm dar.
– Beschreiben Sie die Methode der kleinsten Quadrate zur Ermittlung einer Regressionsgeraden.

b) Bei der Auswertung einer Testreihe ergab sich folgende Regressionsgerade y:



Ein Mitarbeiter möchte die geschätzte CO_2-Emission bei einer Ladung von 1,5 Tonnen und bei einer Ladung von 2,5 Tonnen ermitteln.

– Berechnen Sie die gesuchten Werte.
– Erklären Sie, welche der Berechnungen eine Interpolation und welche eine Extrapolation darstellt.
– Interpretieren Sie den in der Grafik angegebenen Korrelationskoeffizienten r.

c) Tests zur Haltbarkeit neuer Bremsbeläge haben ergeben, dass deren Zuverlässigkeit R mithilfe einer Funktion R folgender Form beschrieben werden kann:

$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$

$R(t)$ ... Prozentsatz der Bremsbeläge, die nach der Benützungsdauer t noch intakt sind
t ... Benützungsdauer
T, b ... materialabhängige Parameter

Der Parameter T wird *charakteristische Lebensdauer* genannt.

– Weisen Sie nach, dass nach der charakteristischen Lebensdauer der Prozentsatz der intakten Bremsbeläge – unabhängig vom Wert des Parameters b – ca. 36,8 % beträgt.
– Ermitteln Sie die fehlerhafte Zeile in folgender Umformung der Formel $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$ nach der Benützungsdauer t.

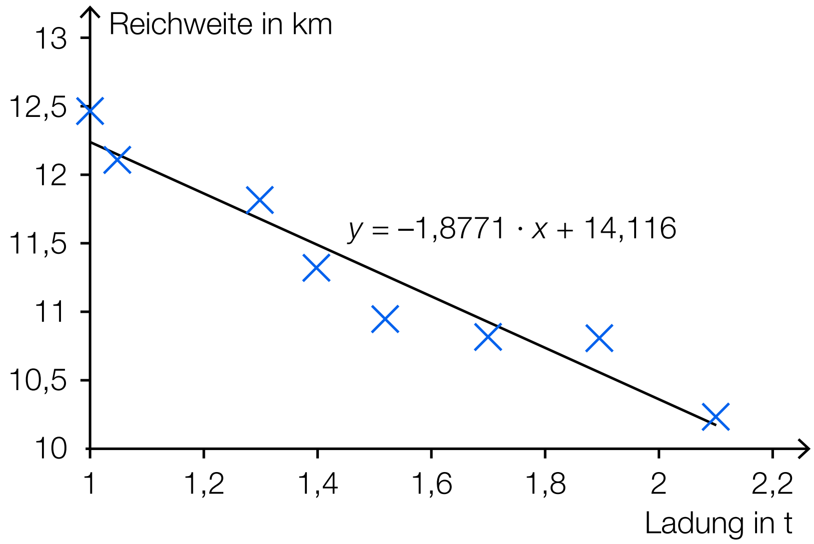
1. $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$
2. $\ln(R) = b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right)$
3. $\frac{\ln(R)}{b} = -\frac{t}{T}$
4. $t = -T \cdot \frac{\ln(R)}{b}$

– Formen Sie die fehlerhafte Zeile so um, dass diese mathematisch richtig ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Abhängigkeit der Reichweite von einer vorgegebenen Ladung untersucht. Die Ladung ist daher die unabhängige Variable *x*, die Reichweite ist die abhängige Variable *y*.



Methode der kleinsten Quadrate:
Die Regressionsgerade wird so ermittelt, dass die Summe aller quadrierten Differenzen zwischen dem tatsächlichen y-Wert y_i und dem mithilfe der Regressionsgeraden ermittelten Wert $y(x_i)$ ein Minimum wird.
(Auch die Erklärung mithilfe einer Skizze ist als richtig zu werten.)

b) Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 1,5 t beträgt 224,2... g/km ≈ 224 g/km.
Die geschätzte Emission bei einer Ladung von 2,5 t beträgt 280,6... g/km ≈ 281 g/km.

Die Berechnung der geschätzten Emission bei einer Ladung von 1,5 t ist eine *Interpolation.* Darunter versteht man die Berechnung eines zusätzlichen Werts im Bereich der vorhandenen Daten.
Unter *Extrapolation* versteht man die Prognose für einen Wert, der außerhalb des vorhandenen Datenbereichs liegt. Daher ist die Berechnung der geschätzten Emission bei einer Ladung von 2,5 t eine Extrapolation.

Der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}995$ liegt sehr nahe bei 1. Das bedeutet, dass der Zusammenhang sehr gut durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

c) $R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$

$R(T) = e^{-\left(\frac{T}{T}\right)^b}$

$R(T) = e^{-1} = 0{,}3678... \approx 36{,}8\ \%$

$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b} \quad \Rightarrow \quad \ln(R) = b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right)$

Der Ausdruck $b \cdot \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right)$ ist falsch (2. Zeile).
(Begründung: Die Potenz wurde falsch interpretiert bzw. das Logarithmusgesetz falsch angewendet.)

korrekte Umformung:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

$$\ln(R) = \ln\left(e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}\right)$$

$$\ln(R) = -\left(\frac{t}{T}\right)^b$$

$$-\ln(R) = \left(\frac{t}{T}\right)^b$$

$$\sqrt[b]{-\ln(R)} = \frac{t}{T}$$

$$t = T \cdot \sqrt[b]{-\ln(R)}$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 3

Thema: Messreihen

Quellen: –

Verkehrsunfall

Aufgabennummer: B_002

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Auf der Autobahn bei Imst ereignete sich ein Verkehrsunfall. Ein Motorradfahrer prallte nach einer 30 Meter (m) langen Bremsung mit einer Geschwindigkeit von 80 Kilometern/Stunde (km/h) in ein stehendes Auto. Eine konstante Verzögerung von 5 Metern/Sekunde² (m/s²) wird angenommen.

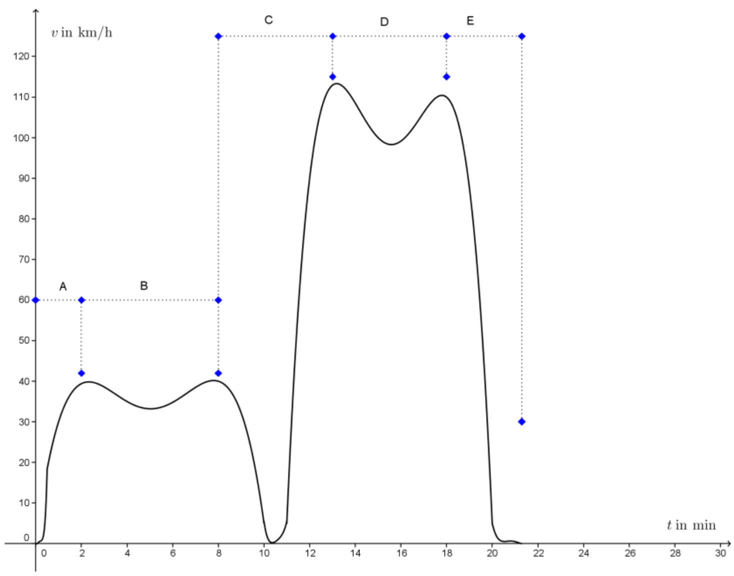
$$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2$$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Bremsweg zum Zeitpunkt t

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_0 in km/h zu Beginn der Bremsung und die Zeitdauer der Bremsung t in s.

b) Ein anderer Bremsvorgang mit gleicher Verzögerung startet zum Zeitpunkt $t = 0$ s mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 29$ m/s zu Beginn der Bremsung und $t = 2$ s für die Zeitdauer der Bremsung.
– Zeichnen Sie die Graphen der jeweiligen Funktionen im Weg-Zeit-Diagramm, im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm und im Beschleunigung-Zeit-Diagramm.
– Geben Sie die mittlere Änderungsrate des Weges während der ersten Sekunde an.
– Erklären Sie deren physikalische Bedeutung.

c) Der Rettungswagen, der zum Unfallort gerufen wird, fährt zu einem Zeitpunkt $t_1 = 0$ min vom Krankenhaus in Zams ab und kommt zu einem Zeitpunkt $t_2 = 21{,}3$ min zum Unfallort. Das nebenstehende Diagramm stellt die geglättete Geschwindigkeit des Krankenwagens v in km/h in Abhängigkeit von der Zeit t in min dar.



– Beschreiben Sie das Diagramm in den angegebenen Abschnitten A bis E hinsichtlich der Geschwindigkeitsänderung.
– Zeichnen Sie für den Abschnitt A skizzenhaft in einem Weg-Zeit-Diagramm den Graphen, der den zurückgelegten Weg s in km in Abhängigkeit von der Zeit t in min des Krankenwagens angibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2$

$s'(t) = v(t) = v_0 - a \cdot t$

Einsetzen der gegebenen Werte in die Geschwindigkeitsfunktion:

$\frac{200}{9} = v_0 - 5 \cdot t$; $\quad 80 \text{ km/h} = \frac{200}{9} \text{ m/s} = 22{,}\overline{2} \text{ m/s}$

umformen:

$v_0 = \frac{200}{9} + 5 \cdot t$

in die Ortsfunktion einsetzen:

$30 = \left(\frac{200}{9} + 5 \cdot t\right) \cdot t - 2{,}5 \cdot t^2$

Daraus folgt eine quadratische Gleichung:

$30 = \frac{200}{9} \cdot t + 2{,}5 \cdot t^2$

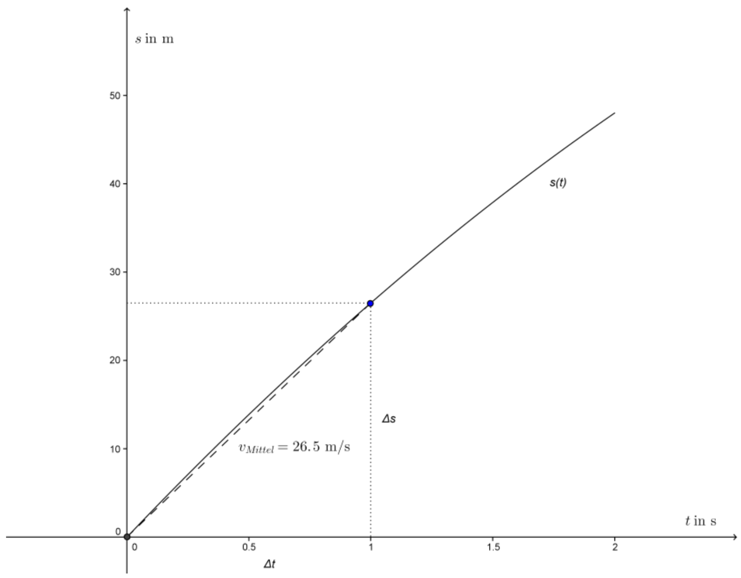
Durch Lösen dieser ergibt sich:

$t = 1{,}19\ldots \text{ s} \approx 1{,}2 \text{ s}$

$v_0 = 28{,}174\ldots \text{ m/s} \approx 101{,}4 \text{ km/h}$

Der Motorradfahrer war zu Beginn der Bremsung mit einer Geschwindigkeit von 101,4 km/h unterwegs. Die Bremsung dauerte 1,2 s.

b) Weg-Zeit-Diagramm



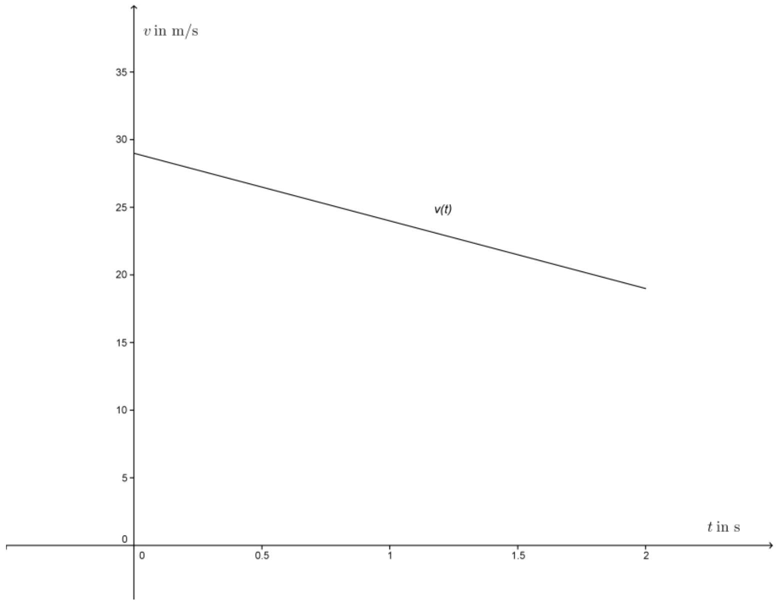
Die mittlere Änderungsrate des Weges während der ersten Sekunde entspricht der eingezeichneten Sekantensteigung und gibt die mittlere Geschwindigkeit während der ersten Sekunde an.
Die mittlere Geschwindigkeit wird mithilfe des Differenzenquotienten aus dem Streckenabschnitt Δs durch die Zeitdifferenz Δt berechnet.

$\Delta s = 26{,}5$ m (Ablesung nicht ganz genau möglich; Toleranz 1 m)

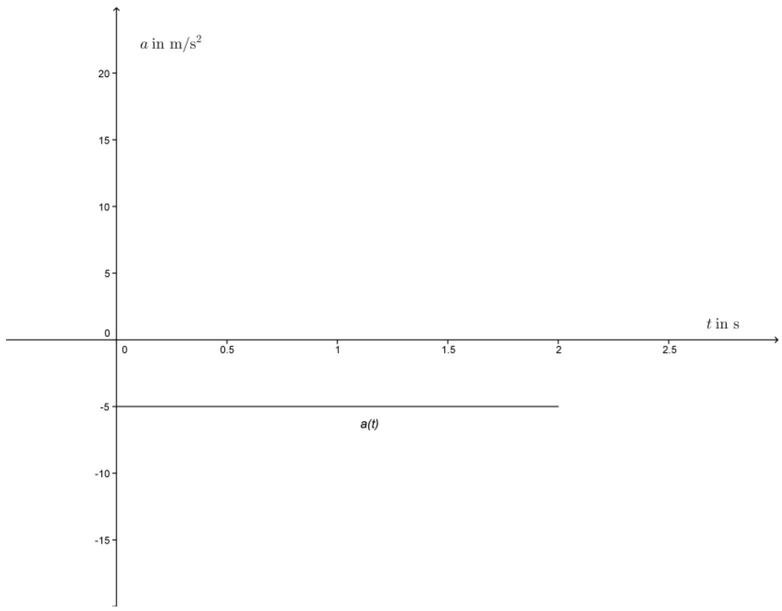
$\Delta t = 1$ s

$v_{\text{mittel}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{26{,}5 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 26{,}5 \text{ m/s}$

Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm



Beschleunigung-Zeit-Diagramm



c) Abschnitte *A* bis *E*

A: Die Geschwindigkeit nimmt in den ersten beiden Minuten auf ca. 40 km/h zu.

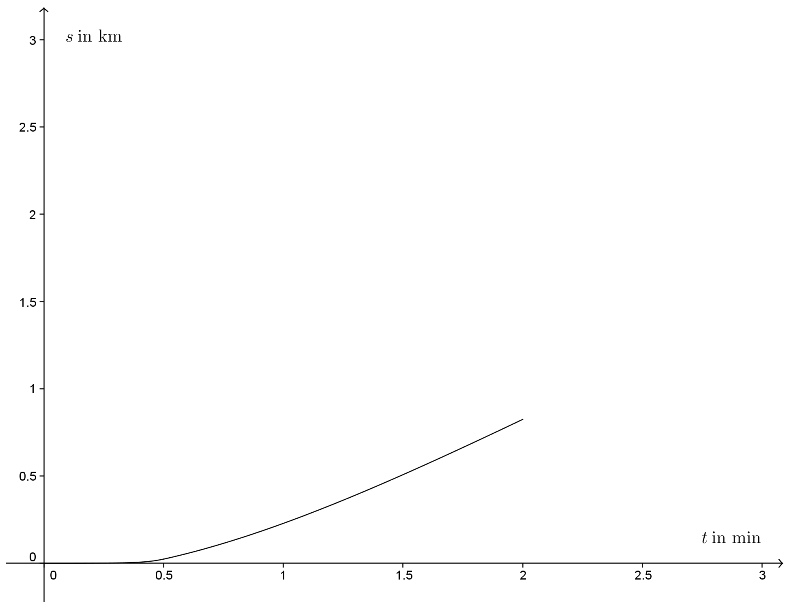
B: Die anfängliche Geschwindigkeit beträgt ca. 40 km/h, nimmt anschließend auf ca. 35 km/h ab und kann wieder auf ca. 40 km/h erhöht werden.

C: Der Rettungswagen verringert in ca. 2 Minuten die Geschwindigkeit, dann bleibt er für ca. 30 Sekunden stehen. Danach beschleunigt der Rettungswagen, die Geschwindigkeit nimmt in ca. 1,5 Minuten auf ca. 115 km/h zu.

D: Die anfängliche Geschwindigkeit beträgt ca. 115 km/h, nimmt anschließend auf ca. 100 km/h ab und kann wieder auf 110 km/h erhöht werden.

E: Vor dem Unfallort verringert der Rettungswagen in ca. 1,5 Minuten seine Geschwindigkeit auf Schritttempo. Nach 1 Minute Fahrt in Schritttempo kommt der Rettungswagen am Unfallort zum Stillstand.

Weg-Zeit-Diagramm



(Hinweis: Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) schwer	a) 4
b) mittel	b) 4
c) mittel	c) 4

Thema: Physik

Quellen: –

Bakterien

Aufgabennummer: B_172

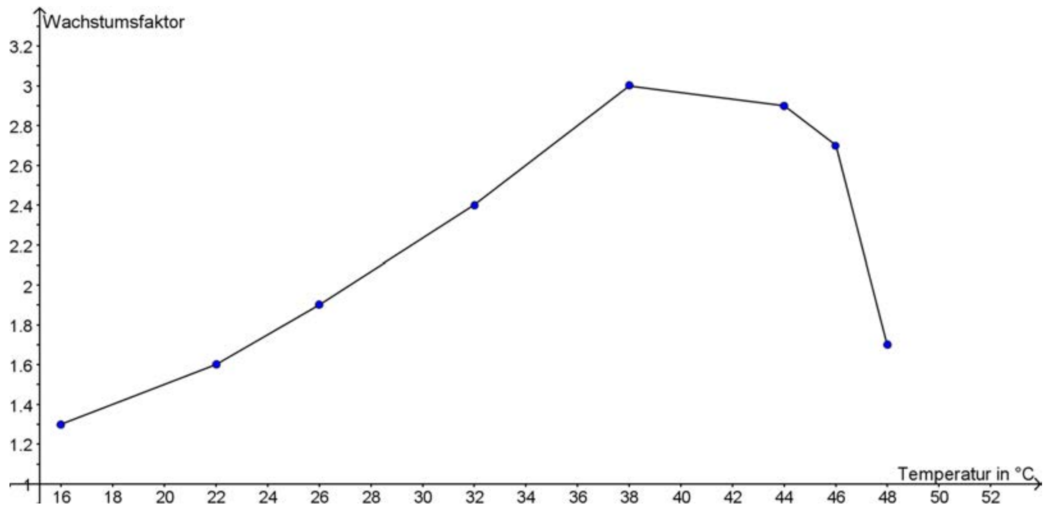
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Milchsäurebakterien haben Stäbchenform (sie sind also annähernd zylindrisch) und vermehren sich durch Zellteilung. Sie haben eine Länge von ca. 2 Mikrometern (μm) und einen Durchmesser von ca. 0,9 μm.

In sauer gewordener Milch wurden in 1 Milliliter (ml) Milch ca. 1 Million Bakterien gemessen.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent des Gesamtvolumens der Milch die Bakterien einnehmen.

b) *Escherichia-coli*-Bakterien im Wasser sind gefährlich für die Gesundheit.
In einem Labor wird deren Anzahl stündlich gemessen. Die Bakterien vermehren sich exponentiell, wobei der Wachstumsfaktor temperaturabhängig ist.
In der nachstehenden Grafik ist der Wachstumsfaktor in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt.

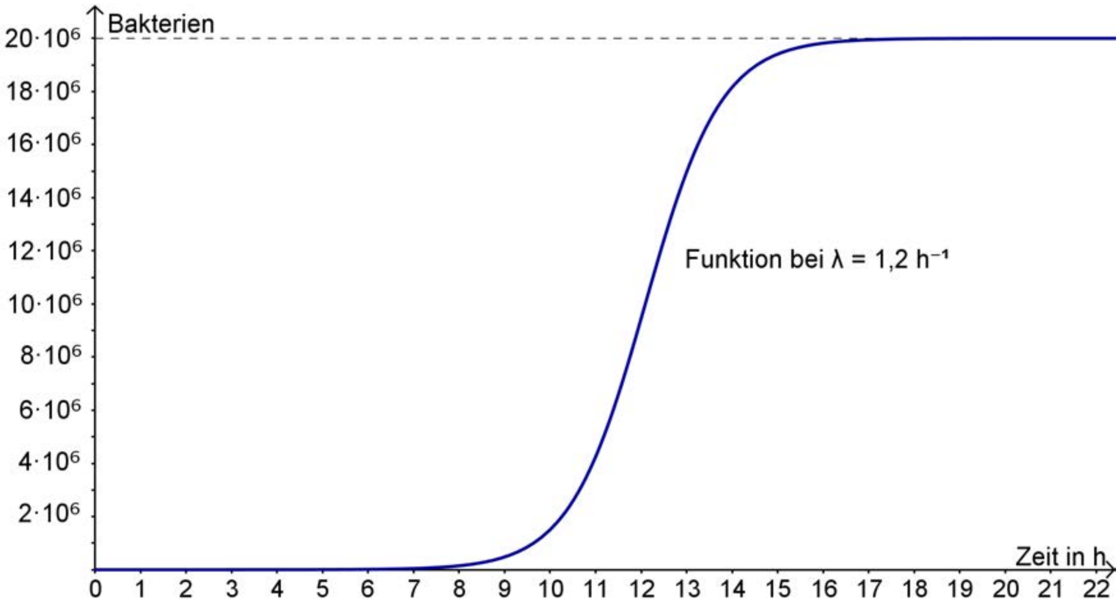


– Lesen Sie den Wachstumsfaktor bei 32 °C warmem Wasser ab.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anzahl von Stunden t, die es dauert, bis sich die *Escherichia-coli*-Bakterien in 32 °C warmem Wasser von einer ursprünglichen Anzahl N_0 auf eine kritische Anzahl K vermehren.

N_0 … ursprüngliche Anzahl der Bakterien vor dem Vermehrungsprozess
K … kritische Anzahl an Bakterien
t … Anzahl der Stunden des Vermehrungsprozesses

– Lösen Sie die erstellte Formel nach t auf.

c) Ein Bakterienwachstum verläuft nicht unbeschränkt exponentiell, sondern erreicht wegen der begrenzten Ressourcen eine Sättigungsmenge.



Die obenstehende Grafik zeigt das Wachstum einer Bakterienpopulation mit folgender Funktion N:

$$N(t) = \frac{20 \cdot 10^6}{1 + 20 \cdot 10^5 \cdot e^{-\lambda \cdot t}} \text{ mit } \lambda = 1{,}2 \text{ h}^{-1}$$

t … Zeit in Stunden (h)
$N(t)$ … Anzahl der Bakterien nach t Stunden
λ … Wachstumsparameter in h^{-1}

– Skizzieren Sie in der Grafik den Verlauf der Kurve für $\lambda = 1{,}5 \text{ h}^{-1}$.

Betrachten Sie den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ des Nenners der Funktion N.

– Erklären Sie, welchen Einfluss eine Veränderung von $\lambda = 1{,}2 \text{ h}^{-1}$ auf $\lambda = 1{,}5 \text{ h}^{-1}$ auf den Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ hat.
– Erklären Sie, welchen Einfluss die Veränderung im Teilausdruck $e^{-\lambda \cdot t}$ auf die gesamte Funktion N hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 1 ml = 10^{-3} L = 10^{-3} dm^3 = 1 cm^3
$2 \cdot 0{,}45^2 \cdot \pi \approx 1{,}27$
Das Volumen eines Bakteriums beträgt ungefähr 1,27 µm^3.
1,27 µm^3 = $1{,}27 \cdot 10^{-12}$ cm^3
1 Million Bakterien haben ein Volumen von $1{,}27 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6$ cm^3 = $1{,}27 \cdot 10^{-6}$ cm^3
1 cm^3 sind 100 %. → $1{,}27 \cdot 10^{-6}$ cm^3 sind $\underline{1{,}27 \cdot 10^{-4}\ \%}$.
Die Bakterien nehmen ca. $1{,}27 \cdot 10^{-4}$ % des Gesamtvolumens ein.

(Umrechnungen mit anderen korrekten Maßeinheiten sind ebenfalls zu akzeptieren.)

b) Bei 32 °C vermehren sich die Bakterien pro Stunde mit einem Wachstumsfaktor von 2,4.

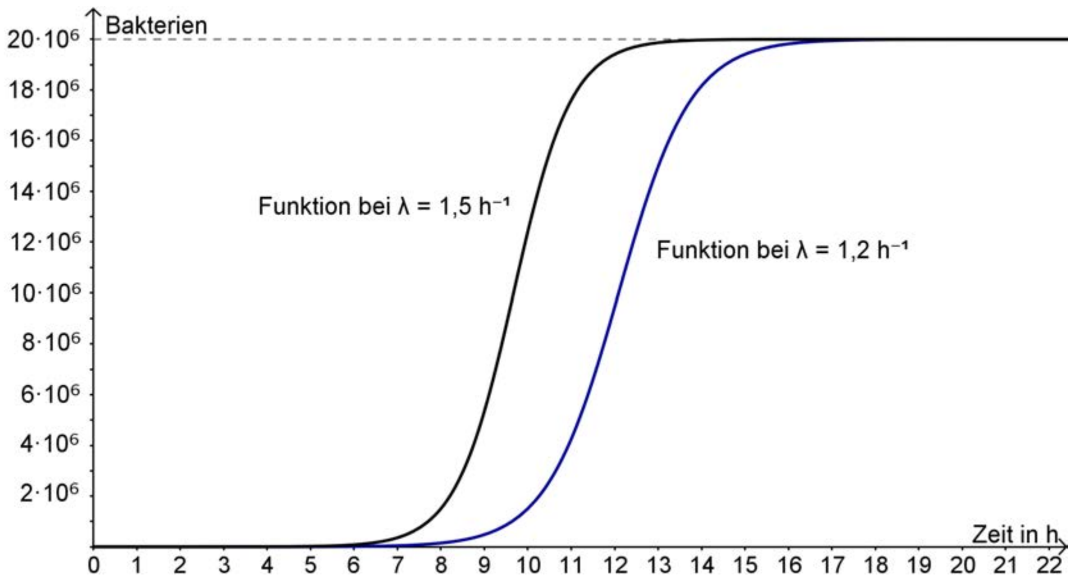
$K = N_0 \cdot 2{,}4^t$

$\frac{K}{N_0} = 2{,}4^t$

$t = \frac{\log\left(\frac{K}{N_0}\right)}{\log(2{,}4)}$

(*Welcher Logarithmus verwendet wird, ist gleichgültig.*)

c)



Die Exponentialfunktion $e^{-\lambda \cdot t}$ fällt für λ = 1,5 h^{-1} schneller als für λ = 1,2 h^{-1}. Ihr Wert nähert sich schneller null.
Fällt die Exponentialfunktion $e^{-\lambda \cdot t}$ schneller, nähert sich der Wert des Nenners schneller dem Wert 1.
Wird der Nenner kleiner, wird der gesamte Bruch größer.
Der Grenzwert von $20 \cdot 10^6$ Bakterien wird bei λ = 1,5 h^{-1} daher schneller angenähert.

(Alle richtigen Erklärungen sind zu akzeptieren.)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 3
c) schwer	c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Fotografie

Aufgabennummer: B_047

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

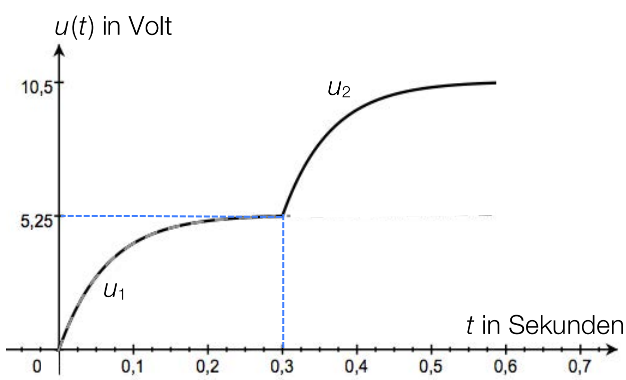
1924 wurden erstmals Kleinbildkameras in Serie gefertigt. Die Automatisierung der bis dahin überwiegend mechanisch funktionierenden Fotoapparate startete in den 1960er-Jahren.

a) Die Batterien in einem Blitzgerät liefern eine Spannung von 6 Volt. Die zur Auslösung des Blitzes erforderliche höhere Spannung wird durch das sukzessive Aufladen von Kondensatoren erzielt.

Für die Spannung $u_1(t)$ gilt:

$u_1(t) = 5{,}3\text{ V} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})$ mit $0\text{ s} \leq t \leq 0{,}3\text{ s}$

t ... Zeit nach Beginn des Aufladevorgangs in Sekunden (s)
$u_1(t)$ ... Spannung in Volt (V), abhängig von der Aufladezeit t
λ ... Konstante in s^{-1}



Nach 0,3 Sekunden ist der Kondensator auf eine Spannung von 5,25 V aufgeladen.

– Zeigen Sie, dass gilt: $\lambda = 15{,}545\text{ s}^{-1}$.

Der zweite Ladevorgang startet nach 0,3 Sekunden bei einer Anfangsladung von 5,25 V. Der Graph von u_2 wurde durch eine entsprechende Verschiebung von u_1 ermittelt.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung für u_2 in Abhängigkeit von t auf.

b) Unter der Schärfentiefe T versteht man die Entfernung von g_{nah} bis g_{fern}, wobei Motive zwischen g_{nah} und g_{fern} scharf abgebildet werden. Wird die Kamera auf ein Motiv in der Entfernung g scharf eingestellt, so gelten für Kleinbildkameras folgende Formeln:

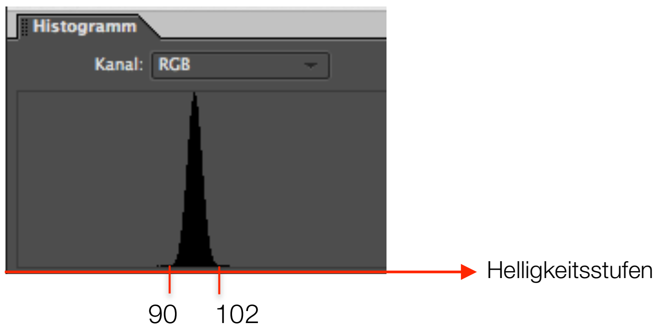
$$g_{nah} = \frac{f^2 \cdot g}{f^2 + k \cdot 0{,}03 \cdot (g - f)} \quad \text{und} \quad g_{fern} = \frac{f^2 \cdot g}{f^2 - k \cdot 0{,}03 \cdot (g - f)}$$

g_{nah} ... in mm
g_{fern} ... in mm
f ... Brennweite des Objektivs in mm, $f > 0$
g ... Entfernung des fokussierten Motivs in mm, $g > f$
k ... Blendenzahl, $k > 0$

Die Formel für g_{fern} gilt nur für $g_{fern} > 0$, andernfalls gilt: $g_{fern} = \infty$.

– Ermitteln Sie die Bedingung, die g erfüllen muss, damit $g_{fern} > 0$.
– Begründen Sie anhand der angegebenen Formeln, warum die Schärfentiefe $T = g_{fern} - g_{nah}$ größer wird, wenn die Blendenzahl k größer wird.
– Stellen Sie den Verlauf von g_{nah} für $f = 80$ mm und $k = 5{,}6$ abhängig von g grafisch dar.
– Schätzen Sie den maximalen Wert von g_{nah} mithilfe der Grafik oder der gegebenen Formel ab.

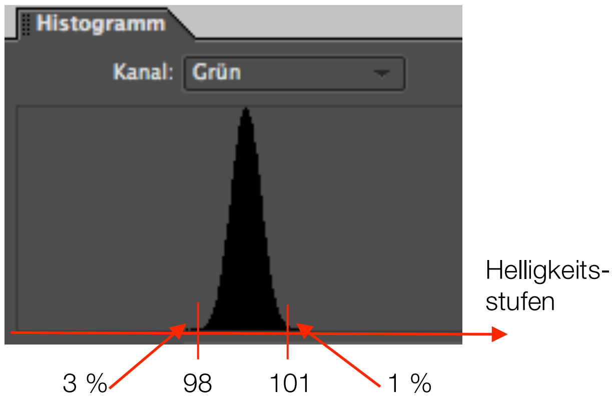
c) Die Helligkeitsverteilung eines Bildes kann in einem Histogramm dargestellt werden. Ein einfärbig graues Bild wird theoretisch durch eine einzige Spektrallinie dargestellt. Durch die elektronische Verstärkung der Kamera kommt es jedoch zum sogenannten Rauschen und die Helligkeitswerte sind annähernd normalverteilt.



– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Helligkeitswerte im Intervall [90; 102] liegen, wenn die Normalverteilung folgende Parameter hat: $\mu = 96$, $\sigma = 3$.

d) Da das menschliche Auge grün-sensibel ist, haben Sensoren von Digitalkameras mehr grün-sensible Rezeptoren und der Rauscheffekt ist bei der Farbe grün geringer.

– Interpretieren Sie die nebenstehende Grafik: Beschreiben Sie, was die Werte „3 %" und „1 %" bedeuten.
(Die Beschreibung kann entweder über mathematische Ausdrücke oder in Worten erfolgen.)



Anhand der in der Grafik dargestellten Werte kann bei bekanntem Sigma der Erwartungswert μ berechnet werden.

– Erstellen Sie die dazu benötigte Gleichung mit $\sigma = 0{,}72$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $u_1(0{,}3) = 5{,}25$

Für $\lambda = 15{,}545\ \text{s}^{-1}$ ergibt sich – wie verlangt – der Wert 5,25 V:

$5{,}25 = 5{,}3 \cdot (1 - e^{-15{,}545 \cdot 0{,}3})$

Auch andere korrekte Lösungswege sind möglich.

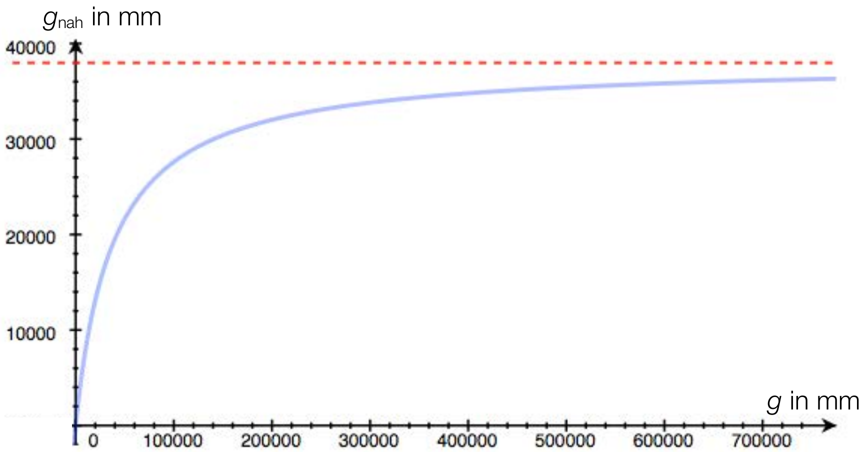
$u_2(t) = 5{,}3\ \text{V} \cdot (1 - e^{-15{,}545\ \text{s}^{-1} \cdot (t - 0{,}3\ \text{s})}) + 5{,}25\ \text{V}$

b) $f^2 - k \cdot 0{,}03 \cdot (g - f) > 0 \Rightarrow g < f + \frac{f^2}{0{,}03 \cdot k}$

Wird k größer, so wird der Nenner der Formel für g_{nah} größer, der Wert g_{nah} daher kleiner.
Der Nenner in der Formel für g_{fern} wird kleiner, der Wert g_{fern} daher größer.
Daher wird auch die Differenz $g_{nah} - g_{fern}$, also die Schärfentiefe, größer.

Auch andere sinngemäß gleichwertige Formulierung sind zulässig.

$$g_{nah}(g) = \frac{80^2 \cdot g}{80^2 \cdot 5{,}6 \cdot 0{,}03 \cdot (g - 80)} = \frac{6\,400 \cdot g}{6\,400 + 0{,}168 \cdot (g - 80)}$$



g_{nah} nähert sich einem Wert von ca. 38 000 mm bzw. 38 m.

ODER:

$$\lim_{g \to \infty} \left[\frac{6\,400 \cdot g}{6\,400 + 0{,}168 \cdot (g - 80)}\right] = \frac{6\,400}{0{,}168} = 38\,095{,}2\ \text{mm} \approx 38\ \text{m}$$

Auch die Berechnung des Grenzwerts mittels Technologieeinsatz ist zulässig.

c) Ermitteln der Wahrscheinlichkeit mittels Technologieeinsatz:

X ... Helligkeitswert
$\mu = 96$
$\sigma = 3$

$P(X \leq 90) = 0{,}02275...$
$P(X \leq 102) = 0{,}977249...$
$P = 0{,}977249... - 0{,}02275... = 0{,}95449... \approx 95{,}4~\%$

Ca. 95,4 % der Helligkeitswerte liegen im angegebenen Intervall.

d) $P(X \leq 98) = 0{,}03$ und $P(101 \leq X) = 0{,}01$

ODER:

3 % der Helligkeitswerte sind kleiner (gleich) 98 und 1 % der Werte sind größer (gleich) 101.

Auch sinngemäß gleichwertige Formulierungen oder die Angabe der entsprechenden Integrale sind zulässig.

Berechnung von μ:

$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$u_{0,03} = -1{,}88079$
$-1{,}88079 = \frac{98 - \mu}{0{,}72}$

ODER:

$u_{0,99} = 2{,}32635$
$2{,}32635 = \frac{101 - \mu}{0{,}72}$

Auch die Lösung mittels Technologieeinsatz ist zulässig:
z. B. TI-Nspire: solve (normCdf(101,∞,mü,0.72)=0.01,mü)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 4
c) mittel	c) 3
d) mittel	d) 3

Thema: Fotografie

Quelle: http://www.elmar-baumann.de/fotografie

Usain Bolt

Aufgabennummer: B_007

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Bei den Olympischen Sommerspielen 2012 in London sprintete Usain Bolt im 100-Meter-Finallauf mit einer Zeit von 9,63 Sekunden (s) durch das Ziel.

Die bei diesem Lauf gemessenen Geschwindigkeiten in Kilometern pro Stunde (km/h) sind in folgender Tabelle festgehalten:

Geschwindigkeit in km/h	23,54	34,22	39,07	41,27	42,27	42,72	42,93	43,02	43,064
Zeit in s	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Die Laufgeschwindigkeit kann annähernd durch die Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = 43{,}1 \cdot (1 - e^{b \cdot t})$$

t ... Laufzeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit in km/h zum Zeitpunkt t

– Stellen Sie die Daten der Tabelle in einem kartesischen Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie unter Zuhilfenahme eines beliebigen Messwertes der Tabelle den Parameter b der Funktion v (auf 2 Dezimalstellen gerundet).

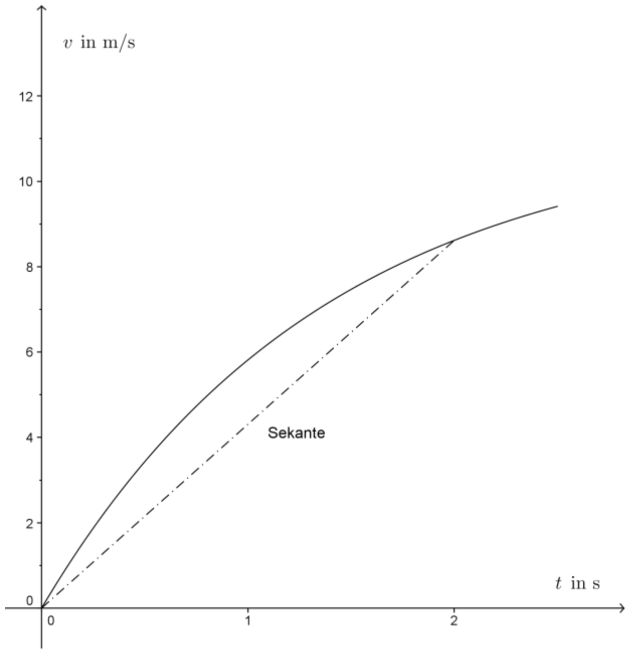
b) Die Geschwindigkeit, mit der Usain Bolt 2009 den Weltrekord über 200 m lief, lässt sich annähernd durch folgende Funktion v beschreiben:

$$v(t) = \frac{101}{9} \cdot (1 - e^{-0{,}73 \cdot t})$$

t ... Laufzeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt t

– Stellen Sie die Funktion des Weges s in Abhängigkeit von der Zeit t auf.
– Berechnen Sie, in welcher Zeit Usain Bolt die ersten 100 m zurücklegte (auf 2 Dezimalstellen gerundet).

c) Die Laufgeschwindigkeit während der ersten 2 Sekunden des Weltrekordlaufs über 200 m ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Lesen Sie die Steigung der eingezeichneten Sekante ab.
– Interpretieren Sie diese Steigung physikalisch.

d) Zwei Läufer treten gegeneinander an.
Der vom ersten Läufer zurückgelegte Weg s_1 in Metern (m) kann durch die Funktion $s_1(t) = 15 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15$ beschrieben werden.
Der vom zweiten Läufer zurückgelegte Weg s_2 in Metern (m) kann durch die Funktion $s_2(t) = 16 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16$ beschrieben werden.

Mit der folgenden Gleichung wird diejenige Zeit t berechnet, nach der der Abstand zwischen den beiden Läufern 95 cm beträgt.

(1) $15 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15 = 16 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16 + 0{,}95$
(2) $0{,}05 = 16 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} - 15 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t}$
(3) $0{,}05 = e^{-0{,}72 \cdot t} \cdot (16 - 15)$
(4) $\ln(0{,}05) = 0{,}72 - t + \ln(1)$
(5) $\ln(0{,}05) - 0{,}72 = -t$
(6) $t \approx 3{,}7$ s

In der Rechnung befindet sich ein Umformungsfehler.

– Bestimmen Sie diejenige Zeile, in der der Umformungsfehler passiert ist.
– Stellen Sie die Rechnung richtig.
– Erklären Sie, worin der Umformungsfehler besteht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

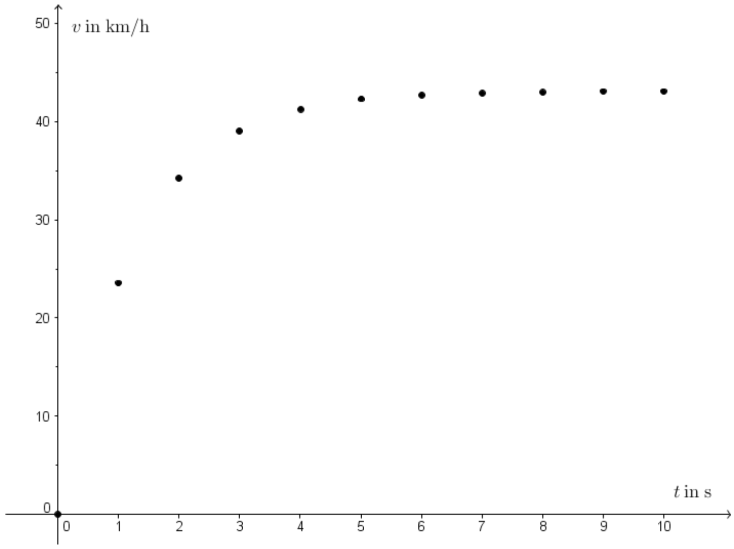
Möglicher Lösungsweg

a) **Parameter b:**
Einsetzen eines Punktes
z. B. $(1 \mid 23{,}54)$

$23{,}54 = 43{,}1 \cdot (1 - e^{b \cdot 1})$

$\Rightarrow\ b \approx -0{,}79$

$v(t) = 43{,}1 \cdot (1 - e^{-0{,}79 \cdot t})$



b) Die Funktion v ist die Ableitung der Weg-Zeit-Funktion. Der zurückgelegte Weg wird daher mittels Integration der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion über den entsprechenden Zeitraum ermittelt:

$$s(t) = \int_0^t \tfrac{101}{9} \cdot \left(1 - e^{-0{,}73 \cdot x}\right) \mathrm{d}x = \tfrac{101}{9} \cdot \left(x - \frac{e^{-0{,}73 \cdot x}}{-0{,}73}\right)\Big|_0^t = 15{,}3729 \cdot e^{-0{,}73 \cdot t} + \tfrac{101}{9} \cdot t - 15{,}3729$$

Lösen der Gleichung mit Technologieeinsatz:
$15{,}3729 \cdot e^{-0{,}73 \cdot t} + \frac{101}{9} \cdot t - 15{,}3729 = 100$

$\Rightarrow t \approx 10{,}28$ s

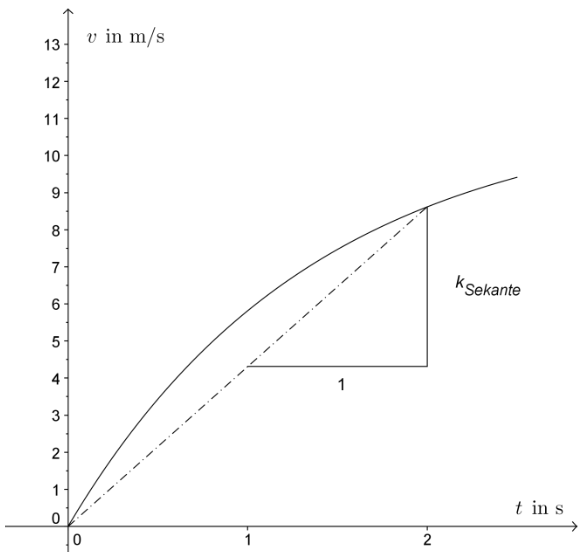
Die ersten 100 m lief Usain Bolt in 10,28 s.

c) Steigung der Sekante:

1. Art: $k_{\text{Sekante}} = 4{,}3$
2. Art: $k_{\text{Sekante}} = \frac{8{,}6}{2} = 4{,}3$

Die Steigung der Sekante gibt die mittlere Beschleunigung während der ersten 2 Sekunden an und beträgt 4,3 m/s².

Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.



d) $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$ Logarithmusfunktionen führen eine Potenz in ein Produkt über.
$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ Logarithmusfunktionen führen ein Produkt in eine Summe über.

(1) $15 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} + 11 \cdot t - 15 = 16 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} + 11 \cdot t - 16 + 0{,}95$
(2) $0{,}05 = 16 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t} - 15 \cdot e^{-0{,}72 \cdot t}$
(3) $0{,}05 = e^{-0{,}72 \cdot t} \cdot (16 - 15)$
(4) $\ln(0{,}05) = 0{,}72 - t + \ln(1)$ $\ln(0{,}05) = -0{,}72 \cdot t \cdot \ln(e) + \ln(1)$
(5) $\ln(0{,}05) - 0{,}72 = -t$
(6) $t \approx 3{,}7$ s

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2
d) 3

Thema: Sport

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Der Tee ist zu heiß!

Aufgabennummer: B_009

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

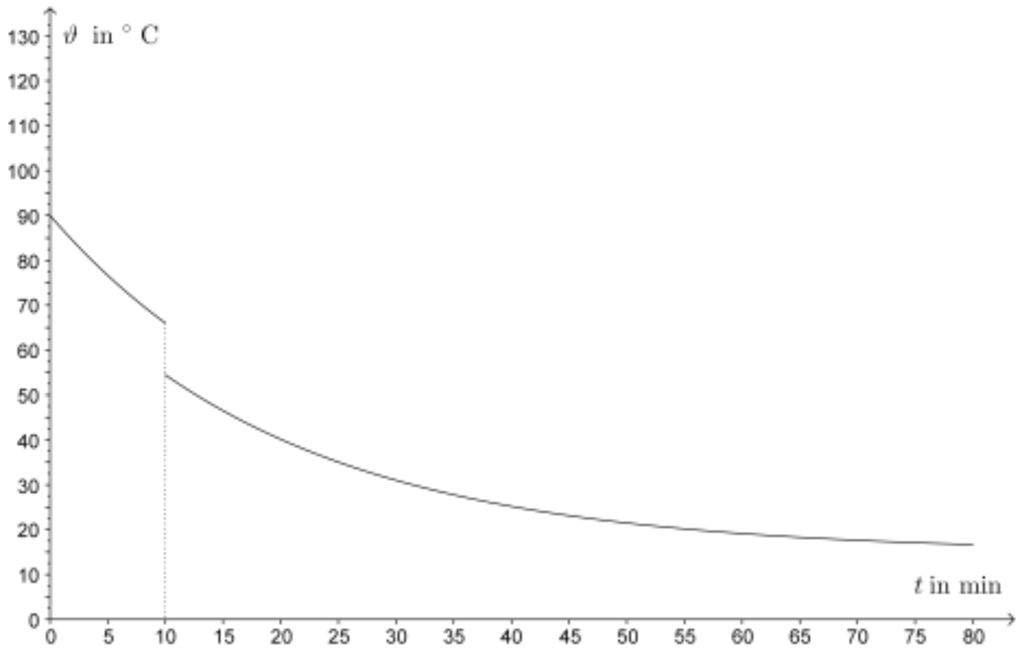
Susanne und Samuel trinken zum Frühstück aus zwei unterschiedlich geformten Tassen Tee. Die Temperatur des Tees in beiden Tassen beträgt um 6:00 Uhr 90 Grad Celsius (°C). Die Umgebungstemperatur beträgt 24 °C.

a) Die Abkühlung des Tees in der Tasse von Susanne kann näherungsweise durch eine exponentielle Abklingfunktion beschrieben werden. Die Temperatur des Tees nimmt nach 27 Minuten (min) um 50 % ab.

- Skizzieren Sie den Temperaturverlauf während der ersten 30 min in ein Koordinatensystem.
- Lesen Sie aus der Grafik ab, welche Temperatur der Tee von Susanne um 6:15 Uhr erreicht hat.

b) Susanne ist der Ansicht: „Der Tee ist zu heiß!" Ihre Mutter gießt um 6:10 Uhr kalten Apfelsaft in den Tee, aufgrund dessen die Temperatur um 11 °C fällt.

- Erklären Sie, warum die folgende Grafik diesen Temperaturverlauf nicht korrekt beschreibt.



c) Der Tee von Samuel kühlt in seiner Tasse in 15 min von 90 °C auf 50,5 °C ab. Dieser Abkühlungsvorgang lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:

$$\vartheta(t) = (\vartheta_A - \vartheta_U) \cdot e^{-k \cdot t} + \vartheta_U$$

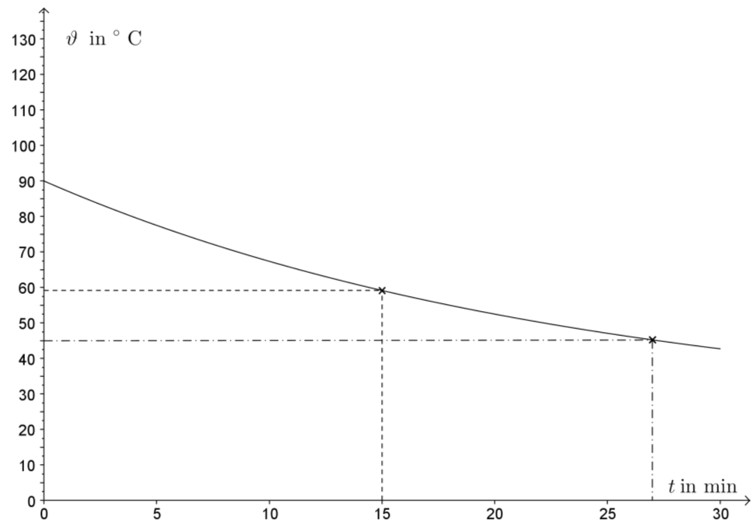
t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in min
ϑ_A … Anfangstemperatur in °C
ϑ_U … Umgebungstemperatur in °C
k … Zeitkonstante des Abkühlungskörpers (Tasse) in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Tees in °C t min nach Beobachtungsbeginn

– Berechnen Sie k.
– Erstellen Sie diejenige Funktionsgleichung, die die Temperatur des Tees in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
– Erklären Sie die Bedeutung des Differenzialquotienten $\frac{d\vartheta(t)}{dt}$ in Bezug auf die Abkühlung.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Tasse Tee von Susanne hat nach 15 min eine Temperatur von ca. 59 °C erreicht.

Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.

b) Aus der Grafik kann man ablesen, dass die Temperatur des Tees auf unter 24 °C fällt.

Auch andere, gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

c) $50{,}5 = (90 - 24) \cdot e^{-k \cdot 15} + 24$

$\frac{26{,}5}{66} = e^{-k \cdot 15}$

$\ln\left(\frac{26{,}5}{66}\right) = -k \cdot 15 \cdot \ln(e)$

$k \approx 0{,}061 \text{ min}^{-1}$

$\vartheta(t) = 66 \cdot e^{-0{,}061 \cdot t} + 24$

Der Differenzialquotient $\frac{\mathrm{d}\vartheta(t)}{\mathrm{d}t}$ beschreibt die Abkühlungsgeschwindigkeit des Tees (momentane Temperaturänderung pro Minute) in der Tasse.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 3

Thema: Alltag

Quellen: —

Fernsehturm

Aufgabennummer: B_250

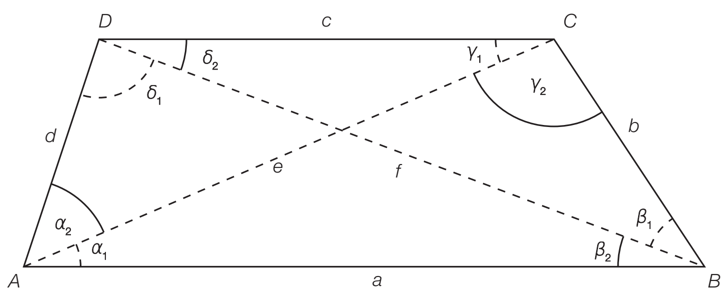
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Turm steht senkrecht auf einem horizontalen Platz.

a) Auf diesem Turm befindet sich eine senkrechte Antenne, deren Höhe gemessen werden soll. Von einem Messgerät, das sich auf dem horizontalen Platz s Meter (m) vom Turm entfernt befindet, erscheint die Antenne unter einem Sehwinkel α. Der Fußpunkt der Antenne erscheint unter einem Höhenwinkel β.

– Zeichnen Sie die angegebenen Größen in die obige Skizze ein.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Antennenhöhe, abhängig von den Größen s, α und β, auf.

b) Der Platz, auf dem der Turm steht, hat die Form eines Trapezes. Die nachstehende Grafik zeigt den Platz im Maßstab 1 : 600 und die Seitenlängen sind in cm gezeichnet.

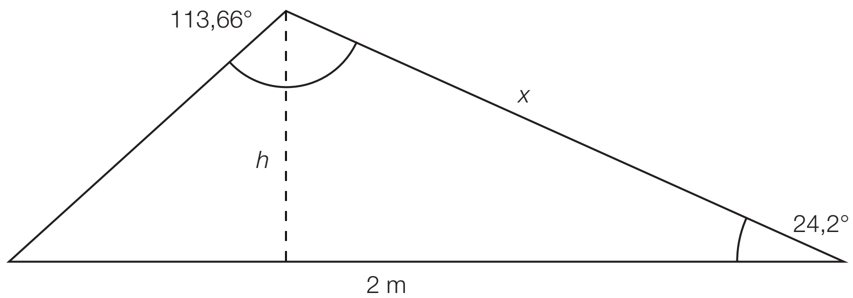


– Bestimmen Sie mithilfe der Darstellung die Länge der Seite a in Metern (m).
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge der Diagonale f bei gegebener Seitenlänge d und a und den Winkeln α_1 und α_2.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$\frac{\sin(\delta_1)}{e} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	☐
$\frac{\sin(\gamma_2)}{a} = \frac{\sin(\gamma_1)}{d}$	☐
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\beta_1)}{c}$	☐
$\frac{\sin(\gamma_1)}{d} = \frac{\sin(\delta_1)}{c}$	☐
$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	☐

c) Für Konzerte wird der Platz vor dem Turm in Sektoren aufgeteilt. Die nachstehende Skizze veranschaulicht die Fläche eines bestimmten Sektors, wobei die Seitenlängen in Metern (m) angegeben sind.

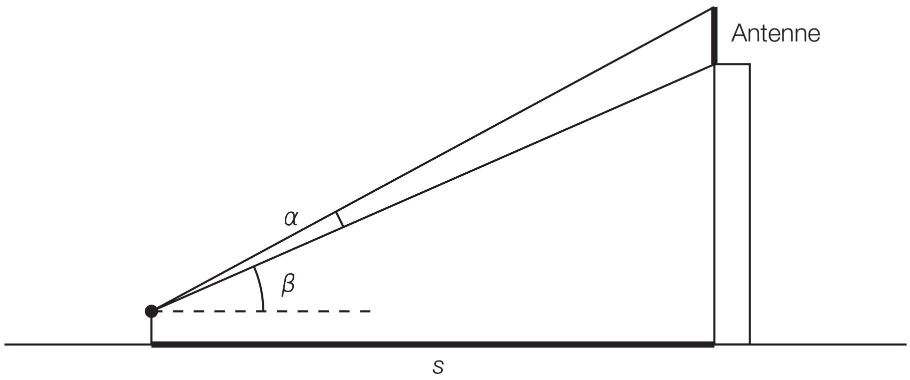


– Berechnen Sie die Seitenlänge x aus den gegebenen Größen.
– Begründen Sie mathematisch, warum die Berechnung der Länge x mit $x = \sin(24{,}2°) \cdot h$ falsch ist.
– Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



Höhe der Antenne = $\tan(\alpha + \beta) \cdot s - \tan(\beta) \cdot s$

b) a = 9 cm entspricht 54 m Messtoleranz: ± 0,4 cm

Abhängig von den Druckeinstellungen kann die Länge der Seite a auf dem Ausdruck geringfügig abweichen.

Die Länge der Diagonale f kann mit dem Cosinussatz berechnet werden:

$f = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$

$\frac{\sin(\alpha_1)}{b} = \frac{\sin(\gamma_2)}{a}$	☒

c) $x = \frac{2}{\sin(113,66°)} \cdot \sin\left(180° - 113,66° - 24,2°\right) = 1,465\ldots$

Die Seitenlänge x beträgt rund 1,47 m.

Der Sinus von dem Winkel 24,2° entspricht dem Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse. Wenn man $x = \sin(24,2°) \cdot h$ umformt auf $\sin(24,2°) = \frac{x}{h}$, erkennt man, dass die Seiten im Verhältnis vertauscht sind.

$A = \frac{2 \cdot 1,47 \cdot \sin(24,2°)}{2} = 0,600\ldots$

Der Flächeninhalt beträgt rund 0,60 m².

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 3
c) mittel	c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Infrarotheizung

Aufgabennummer: B-C1_30	
Technologieeinsatz: möglich ☒	erforderlich ☐

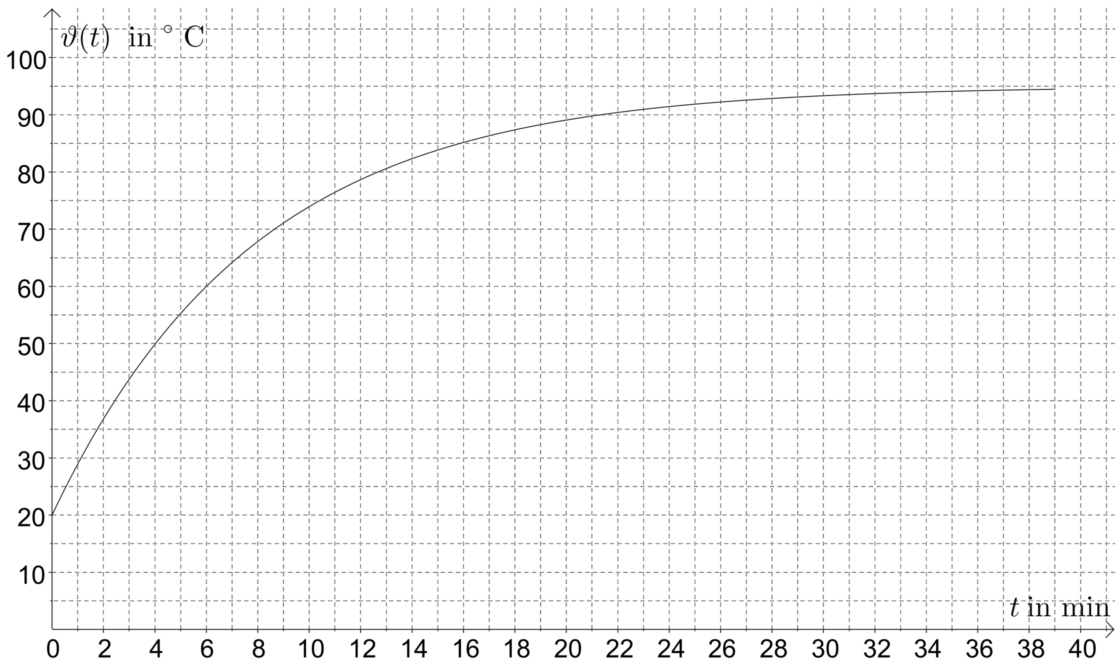
Heutzutage werden immer häufiger Infrarotheizungen in Wohnräumen eingesetzt.

a) Der Erwärmungsvorgang des Heizleiters der Infrarotheizung lässt sich durch die Funktion ϑ näherungsweise beschreiben:

$$\vartheta(t) = c \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}) + b$$

t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in Minuten (min)
λ … Zeitkonstante der Infrarotheizung in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Heizleiters der Infrarotheizung zur Zeit t in °C

– Ermitteln Sie mithilfe der nachstehenden Grafik die Parameter b, c und λ der Funktion ϑ.



– Begründen Sie anhand der Funktion ϑ, warum die Temperatur nie über $(c + b)$ °C ansteigen kann.

b) Der Erwärmungsvorgang der Vorderwand der Infrarotheizung lässt sich durch folgende Funktion ϑ_1 beschreiben:

$$\vartheta_1(t) = 20 \cdot (1 - e^{-0{,}07 \cdot t}) + 20$$

t … Zeit nach Beobachtungsbeginn in min
λ … Zeitkonstante der Infrarotheizung in min^{-1}
$\vartheta(t)$ … Temperatur des Heizleiters der Infrarotheizung zur Zeit t in °C

– Argumentieren Sie, warum die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit theoretisch nie null wird.
– Berechnen Sie den Zeitpunkt nach Beobachtungsbeginn, zu dem die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit $0{,}35\ \frac{°\text{C}}{\text{min}}$ beträgt.

c) Der Zusammenhang zwischen Temperatur und mittlerer Geschwindigkeit der Luftteilchen wird durch folgende Formel beschrieben:

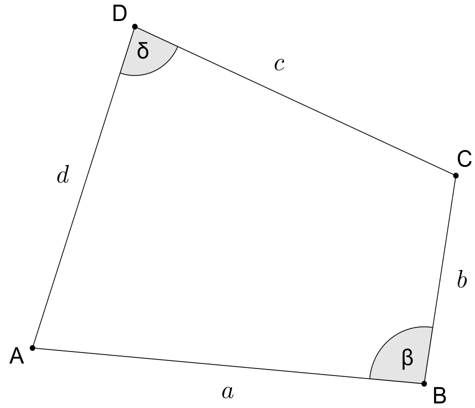
$$T = \frac{m \cdot \bar{v}^2}{3 \cdot k_B}$$

m … Masse der Luftteilchen in Kilogramm (kg)
$\bar{v}$ … mittlere Geschwindigkeit der Luftteilchen in Metern pro Sekunde (m/s)
k_B … Boltzmann-Konstante in Joule/Kelvin (J/K)
T … Temperatur in Kelvin (K)

– Erläutern Sie anhand der Formel für T, welche Änderung der Teilchengeschwindigkeit einer Verdoppelung der Temperatur entspricht.

d) Die Fläche an der Vorderseite der Infrarotheizung hat die Form eines Vierecks mit den Seitenlängen $a = 71{,}4$ cm, $b = 36{,}9$ cm und $d = 59{,}1$ cm. Die Winkel sind $\beta = 94°$ und $\delta = 84{,}3°$.

– Berechnen Sie mithilfe der nebenstehenden Skizze den Flächeninhalt des Vierecks.
– Berechnen Sie mithilfe der Skizze den Umfang des Vierecks.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) aus der Grafik ablesen:

$P_1 = (0|20) \;\Rightarrow\; b = 20$

Grenzwert der Funktion ϑ für $t \to \infty$ ist 95 $\;\Rightarrow\;$ $c = 95 - 20 = 75$

$P_2 = (6|60) \;\Rightarrow\; 60 = 75 \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot 6}) + 20$

$\lambda = 0{,}127...$

$\vartheta(t) = 75 \cdot (1 - e^{-0{,}127 \cdot t}) + 20$

Wenn $t \to \infty$, geht $e^{-\lambda \cdot t} \to 0$. $\Rightarrow$ Die theoretisch maximal erreichbare Temperatur beträgt $(c + b)$ °C.

Auch andere, gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

b) Die 1. Ableitung beschreibt die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit:

$\vartheta_1{}'(t) = 1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$

$1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} = 0$

Da die Funktionswerte einer Exponentialfunktion immer positiv sind, kann der Term $1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$ nie null werden.

Auch andere, gleichwertige Argumentationen sind zulässig.

$\vartheta_1{}'(t) = 1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t}$

$1{,}4 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} = 0{,}35$

$t = 19{,}804\ldots$

Die momentane Erwärmungsgeschwindigkeit ist nach etwa 19,8 min 0,35 $\frac{°\text{C}}{\text{min}}$.

c) $T = \frac{m \cdot \bar{v}^2}{3 \cdot k_B}$

$\sqrt{\frac{T \cdot 3 \cdot k_B}{m}} = \bar{v}$

Eine Verdopplung der Temperatur erhöht die Geschwindigkeit der Luftteilchen um den Faktor $\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ldots$

d) $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)}$

$e = 82{,}626\ldots$ cm

$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{\sin(\delta) \cdot d}{e}\right)$

$\gamma_1 = 45{,}375\ldots°$

$\alpha_1 = 180° - (\gamma_1 + \delta)$

$\alpha_1 = 50{,}324\ldots°$

$A_1 = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\beta)}{2}$

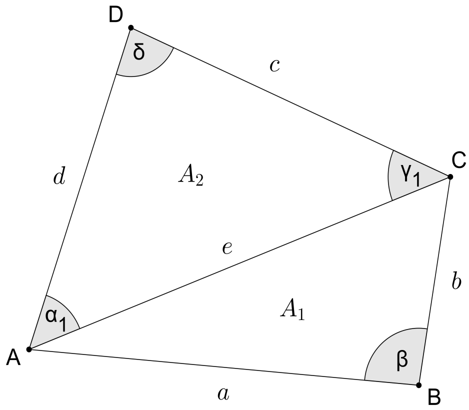
$A_1 = 1\,314{,}121\ldots\ \text{cm}^2$

$A_2 = \frac{d \cdot e \cdot \sin(\alpha_1)}{2}$

$A_2 = 1\,879{,}232\ldots\ \text{cm}^2$

$A = A_1 + A_2$

$A \approx 3\,193{,}35\ \text{cm}^2$



Die Oberfläche der Vorderwand der Infrarotheizung beträgt ca. 3 193,35 cm^2.

$c = \frac{d \cdot \sin(\alpha_1)}{\sin(\gamma_1)}$

$c = 63{,}911\ldots$ cm

$U = a + b + c + d$

$U \approx 231{,}3$ cm

Der Umfang der Vorderwand der Infrarotheizung beträgt ca. 231,3 cm.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 1
d) 3

Thema: Physik

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Temperatur

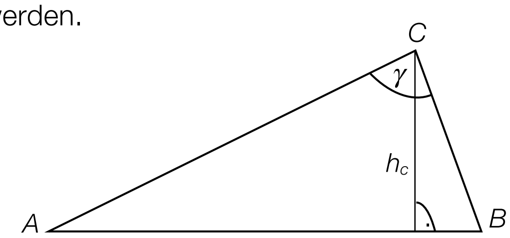
Dachfenster (1)

Aufgabennummer: B_065

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein 3-eckiges Dachfenster soll neu verglast werden.

$\gamma = 81°$
$\overline{AB} = 1{,}60$ m
$\overline{BC} = 0{,}70$ m



a) – Berechnen Sie die Fläche des skizzierten Dreiecks, das die Fensteröffnung darstellt.

b) Das oben angegebene Dreieck wird in ein Koordinatensystem gezeichnet, die Koordinaten der 3 Eckpunkte sind bekannt.

– Beschreiben Sie, welche Überlegung bei der folgenden Vorgangsweise für die Berechnung der Dreiecksfläche nicht korrekt ist:

$$c = |\vec{a}| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$h_c = \left|\overrightarrow{MC}\right|$$

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

– Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten des Fußpunktes der Höhe h_c ermittelt.
– Stellen Sie die dazu nötigen Geraden in allgemeiner Form auf.

c) In einer Glaserei werden 3-eckige Fensterscheiben zugeschnitten. In folgender Tabelle sind die Flächeninhalte einer Produktionsserie bestimmter Fensterscheiben angegeben:

Fläche in m²	Anzahl der Scheiben
1,91 – 1,95	1
1,96 – 2,00	5
2,01 – 2,05	22
2,06 – 2,10	48
2,11 – 2,15	52
2,16 – 2,20	29
2,21 – 2,25	0
2,26 – 2,30	1

– Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der angegebenen Flächeninhalte. Verwenden Sie dazu die Klassenmitten.

– Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit bezogen auf die Fensterproduktion durch den nachstehenden Rechenausdruck ermittelt wird ($\bar{x}$ und s der vorhergehenden Rechnung sollen als Schätzung für μ und σ verwendet werden).

$$P = 1 - [0{,}932 - 0{,}082] = 0{,}150\ldots \approx 15\ \%$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$

$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}\right)$ $\qquad \alpha = 25{,}601\ldots \approx 25{,}6°$

$\beta = 180° - \alpha - \gamma$ $\qquad \beta = 73{,}398\ldots \approx 73{,}4°$

$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}$ $\qquad A = 0{,}536\ldots \approx 0{,}54\ m^2$

Die Fläche des Dachfensters beträgt ca. 0,54 m².

Auch andere Rechenwege sind möglich.

b) Die Höhe h_c halbiert die Seite c im Allgemeinen nicht. Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{MC}$ entspricht somit nicht der Länge der Höhe.

Der Fußpunkt F der Höhe h_c ist der Schnittpunkt der Geraden g und h:

$g: X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$

$h \perp g,\ h: X = C + s \cdot \overrightarrow{n_{AB}}$

Andere korrekte Lösungswege sind ebenfalls möglich.

c) Arithmetischer Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung s werden mittels Technologieeinsatz (hier: Excel) berechnet. Zur Berechnung werden die Klassenmitten verwendet.

$\bar{x} \approx 2{,}105\ m^2$

$s = 0{,}05561793... \approx 0{,}056$

Mittels Technologieeinsatz oder einer Tabelle ermittelt man aus den Wahrscheinlichkeiten $P_1 = 0{,}932$ und $P_2 = 0{,}082$: $x_1 \approx 2{,}188$ und $x_2 \approx 2{,}028$.

Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass eine zufällig ausgewählte Fensterscheibe eine Fläche von weniger als 2,028 m² oder mehr als 2,188 m² hat. Diese beträgt 15 %.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 4
c) 4

Thema: Bauwesen

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Wasserstand in einem Hafenbecken

Aufgabennummer: B_085

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Höhe des Wasserstandes in einem Hafenbecken an der Ostsee lässt sich aufgrund der Gezeiten annähernd durch folgende Funktion H beschreiben:

$$H(t) = 4 + 1{,}5 \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$$

$H(t)$ … Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht am 12. März, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

a) – Berechnen Sie die Wassertiefe im Hafenbecken am Morgen des 12. März um 8:15 Uhr.

b) – Zeichnen Sie den Graphen der Funktion H.
– Ermitteln Sie aus der Grafik, zu welchen Zeitpunkten am 12. März der Wasserstand am höchsten und wann er am niedrigsten ist.
– Geben Sie jeweils die Höhe des Wasserstandes zu diesen Zeitpunkten an.

c) Die Funktion für die Höhe des Wasserstandes in Abhängigkeit von der Zeit t lautet allgemein:

$$H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der einzelnen Parameter im angegebenen Zusammenhang.

d) An einem bestimmten Tag beträgt der Wasserstand im Hafenbecken um 3:06 Uhr 9,5 m und jener um 9:18 Uhr 2,5 m.
– Berechnen Sie die Größe der Parameter a und b, wenn der Wasserstand durch folgende Funktion beschrieben wird:

$$H_1(t) = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$$

$H_1(t)$ … Höhe des Wasserstandes in Metern (m) zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Stunden (h) nach Mitternacht, $0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$

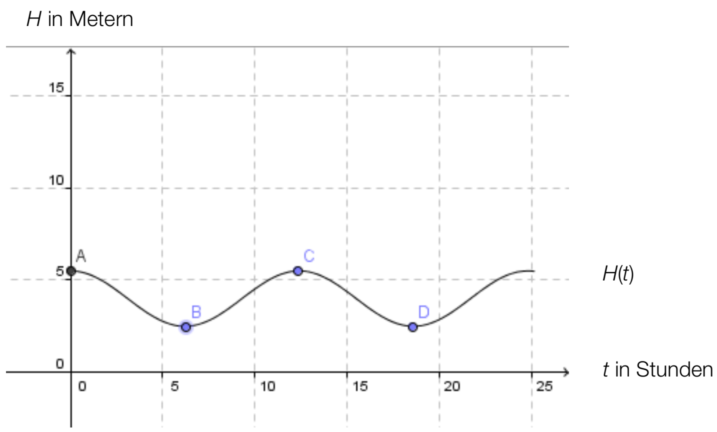
– Ermitteln Sie, ob ein Schiff mit einem Tiefgang (Distanz von der Wasserlinie bis zum tiefsten Punkt eines Schiffs) von 5,5 m um 18:00 Uhr noch im Hafen anlegen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Umrechnung der Uhrzeit: 8:15 Uhr entspricht 8,25 Stunden.
$H(8{,}25) = 4 + 1{,}5 \cdot \cos(0{,}507 \cdot 8{,}25)$
$H(8{,}25) = 3{,}24$
Die Wassertiefe beträgt um 8:15 Uhr 3,24 m.

b)



Mit Technologieeinsatz: Um Mitternacht und um 12:24 Uhr ist das Maximum von 5,5 m Wasserhöhe erreicht. Um 6:12 Uhr und um 18:36 Uhr ist der Wasserstand minimal und erreicht eine Höhe von 2,5 m.

c) Funktion: $H(t) = d + a \cdot \cos(b \cdot t)$
a … gibt die Amplitude der Cosinusfunktion (maximale Höhe des Wasserstandes relativ zu d) an
b … gibt die Frequenz an
d … verschiebt die Cosinusfunktion entlang der y-Achse und beschreibt die mittlere Wasserstandshöhe

Alle anderen richtigen Interpretationen aus der Physik sind zulässig.

d) $H_1(t) = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$

Einsetzen der angegebenen Werte und vereinfachen liefert folgende Gleichungen:
I: $9{,}5 = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot 3{,}1)$
II: $2{,}5 = a + b \cdot \sin(0{,}507 \cdot 9{,}3)$

I: $9{,}5 = a + b \cdot 0{,}999999591687397$
II: $2{,}5 = a - b \cdot 0{,}999996325188573 \;\Rightarrow\; a \approx 6,\ b \approx 3{,}5$

$H_1(t) = 6 + 3{,}5 \cdot \sin(0{,}507 \cdot t)$

$H_1(18) = 6 + 3{,}5 \cdot \sin(0{,}507 \cdot 18)$
$H_1(18) = 7{,}03$

Ja, ein Schiff mit einem Tiefgang von 5,5 m kann noch in diesem Hafen anlegen, da der Wasserstand um 18:00 Uhr 7,03 m beträgt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 3
c) 4
d) 3

Thema: Physik

Quellen: —

Kängurusprünge

Aufgabennummer: B-C9_15

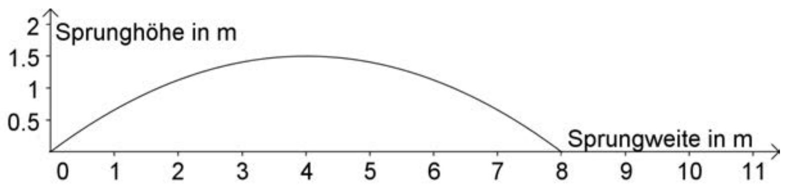
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In Australien leben heute ca. 60 Känguruarten, die sich bei höheren Geschwindigkeiten meist springend fortbewegen. Die kleinste Art ist das Zottelige Hasenkänguru mit ca. 35 cm Körpergröße, die größte das Rote Riesenkänguru mit ca. 1,8 m Körpergröße.

Bei allen Känguruarten ist die maximale Sprungweite etwa das 7-Fache ihrer Körpergröße.

– Erstellen Sie eine Funktion, die die ungefähre maximale Sprunglänge in Abhängigkeit von der Körpergröße angibt.
– Stellen Sie diese Funktion von der kleinsten bis zur größten Känguruart grafisch dar.

b) Der nachstehende Graph zeigt den Sprung eines Kängurus.



Der Sprung kann mit einer Polynomfunktion 2. Grades im angegebenen Definitionsbereich beschrieben werden.

– Berechnen Sie die Funktionsgleichung mithilfe quadratischer Regression. Runden Sie die Koeffizienten auf Hundertstel.
– Lesen Sie die benötigten Werte aus dem Graphen ab.

c) In einem Volksschulhort gibt es das Brettspiel *Kängurhüpfen* zum spielerischen Addieren im Zahlenraum 12.
Am Start stehen maximal 11 Kängurus, die mit den Nummern von 2 bis 12 beschriftet sind. Jede/r Spieler/in sucht sich ein Känguru aus. Es wird reihum mit 2 sechsseitigen Würfeln gewürfelt. Nach jedem Wurf werden die Augenzahlen addiert und das Känguru, dessen Nummer mit der Augensumme der beiden Würfel übereinstimmt, darf ein Feld vorhüpfen.

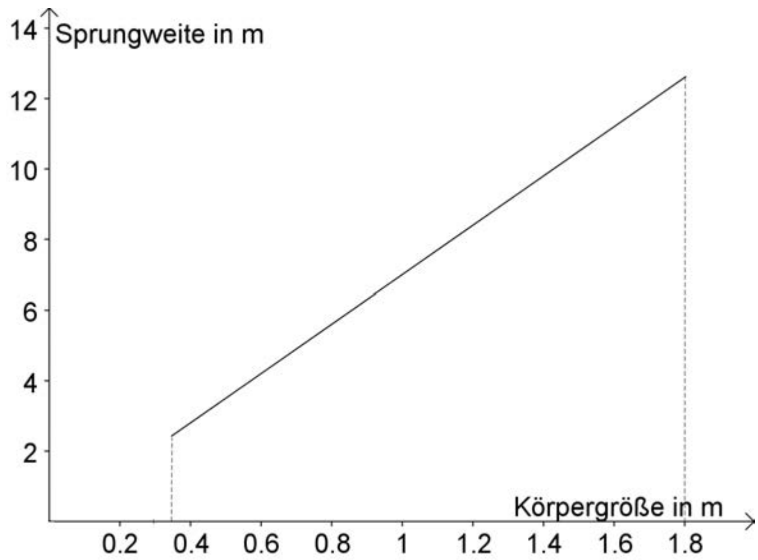
– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Chance, ein Feld vorzurücken, für alle Kängurus gleich groß ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) lineare Funktion: $f(x) = 7x$

x … Körpergröße in m
$f(x)$ … Sprungweite in m



b) Koordinaten der Nullstellen und des Hochpunktes ablesen:
$N_1 = (0|0)$, $N_2 = (8|0)$, $H = (4|1{,}5)$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}093\ldots$
$b = 0{,}75$
$c = 0$

Funktionsgleichung: $y = -0{,}09 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x$

(Da die Koordinaten der Punkte, vor allem des Hochpunkts, abgelesen werden, ist eine angemessene Ungenauigkeit zu tolerieren.)

c) Es genügt, exemplarisch zu zeigen, dass die Anzahl der Möglichkeiten für 2 Zahlen unterschiedlich groß und damit die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten unterschiedlich hoch ist.

Zum Beispiel:
2 = 1 + 1
3 = 1 + 2 oder 2 + 1
4 = 1 + 3 oder 3 + 1 oder 2 + 2
usw.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Der Schall

Aufgabennummer: B_067

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

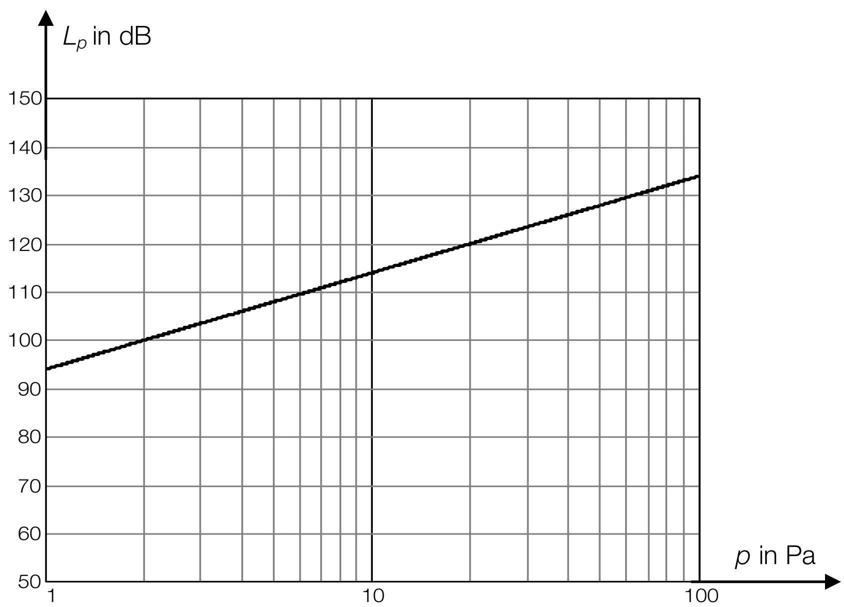
Als Schalldruck p werden die Druckschwankungen eines kompressiblen Schallübertragungsmediums (üblicherweise Luft) bezeichnet, die bei der Ausbreitung von Schall auftreten. Eine für das Hörempfinden relevante Größe ist der Schalldruckpegel L_p.

$$L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

L_p … Schalldruckpegel in Dezibel (dB)
p … Schalldruck in Pascal (Pa)
p_0 … Bezugswert für Luftschall (p_0 = 20 µPa)

a) – Stellen Sie den Schalldruckpegel L_p in Abhängigkeit vom Schalldruck p für das Intervall [p_0; 0,1 Pa] grafisch dar.
– Zeigen Sie mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen und der angegebenen Formel, dass eine Verdoppelung des Schalldrucks p eine Erhöhung des Schalldruckpegels L_p um etwa 6 dB bewirkt.

b) Das nachstehende Diagramm zeigt die Abhängigkeit des Schalldruckpegels vom Schalldruck nach obiger Formel. Ab einem Schalldruck p von etwa 20 Pa können bereits bei kurzfristiger Einwirkung Gehörschäden auftreten.



– Ermitteln Sie aus der Grafik den Schalldruckpegel L_p für diesen Schalldruck.

In der Grafik ist der Abstand zwischen 1 Pa und 10 Pa auf der horizontalen Achse 5 cm.

– Berechnen Sie den Abstand zwischen 10 Pa und 50 Pa in cm auf der logarithmisch skalierten horizontalen Achse.

c) Ein einzelner Ton kann durch eine Sinusschwingung dargestellt werden. Die Hörbarkeit eines Tones für den Menschen hängt von der Lautstärke (Amplitude A) und von der Tonhöhe (Frequenz f) ab. Je größer die Amplitude ist, desto lauter ist der Ton. Je höher die Frequenz ist, desto höher ist der Ton.

Die folgende Funktion gibt die Schwingung einer Schallwelle für den Kammerton a mit einer Frequenz f = 440 Hz wieder:

$y(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot 440\, t)$

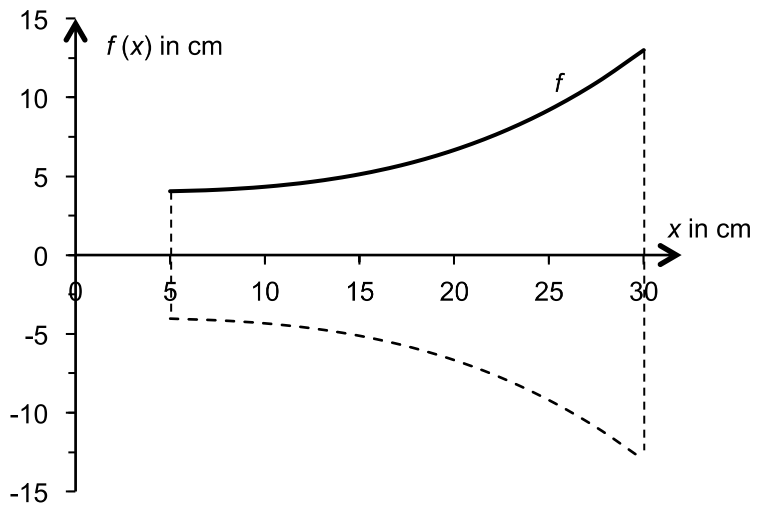
$y(t)$ … Auslenkung in Längeneinheiten zum Zeitpunkt t
t … Zeit in Sekunden (s)
A … Amplitude in Längeneinheiten

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Schwingung für den Kammerton a mit doppelter Lautstärke auf.

Als *Hörgrenze* bezeichnet man diejenige Frequenz, bei der ein Ton einer bestimmten Lautstärke gerade noch hörbar ist. Die Hörgrenze bei einem Menschen im Alter von 35 Jahren beträgt etwa 15 kHz.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Schwingung für diese Frequenz auf.

d) Ein Megafon ist ein trichterförmiges Gerät, das die Ausbreitung von Schall beeinflusst und die Verständlichkeit und Reichweite von Sprache verbessert.
Die nachstehende Abbildung stellt näherungsweise den inneren Querschnitt eines Megafons dar.



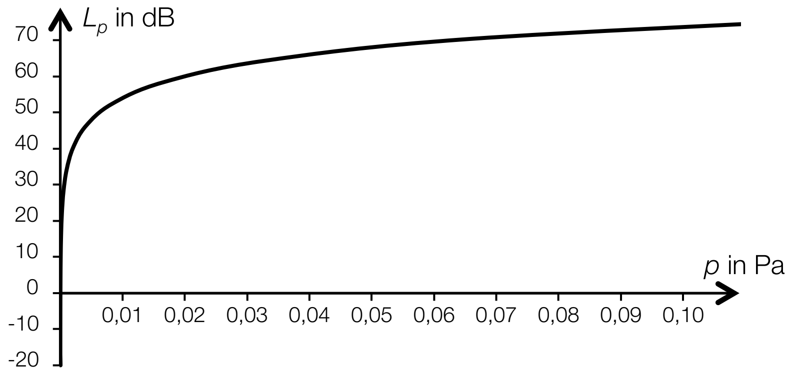
Die Begrenzungslinie der Querschnittsfläche wird im relevanten Intervall durch die Funktion f beschrieben: $f(x) = \frac{x^3}{3\,000} + 4$.

– Berechnen Sie das Innenvolumen des Megafons.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$L_{p,2} = 20 \cdot \lg\left(\frac{2p}{p_0}\right) = 20 \cdot \lg(2) + 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right) \approx 6{,}02 \text{ dB} + L_p$

b) Ablesen von L_p bei p = 20 Pa: $L_p \approx 120$ dB

Berechnen des Abstands: $\lg(50) \cdot 5 \text{ cm} - \lg(10) \cdot 5 \text{ cm} \approx 3{,}495$ cm

c) $y(t) = 2A \cdot \sin(2\pi \cdot 440\,t)$

$y(t) = \sin(30\,000\,\pi \cdot t)$

Schwingungen mit anderer Amplitude sind ebenfalls korrekt.

d) $V_x = \pi \cdot \int_5^{30} f^2(x)\mathrm{d}x$

$V_x = \pi \cdot \int_5^{30} \left(\frac{x^3}{3\,000} + 4\right)^2 \mathrm{d}x$

$V_x \approx 4\,042 \text{ cm}^3$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2
d) 2

Thema: Physik

Quellen: —

Distelsamen

Im Rahmen eines Projekts zum Thema *Verbreitung von Unkrautsamen* untersucht eine Gruppe von Schülerinnen das Fallverhalten von Distelsamen.

a) Zur Bestimmung der Masse von Distelsamen wird eine Zufallsstichprobe von 8 Distelsamen untersucht. Die nachstehende Tabelle zeigt die Messergebnisse.

Masse eines Distelsamens in mg	0,84	0,81	0,82	0,82	0,83	0,81	0,82	0,85

1) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} dieser Messergebnisse. *[0/1 P.]*

Die Masse von Distelsamen wird als annähernd normalverteilt angenommen.

2) Ermitteln Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ dieser Normalverteilung. *[0/1 P.]*

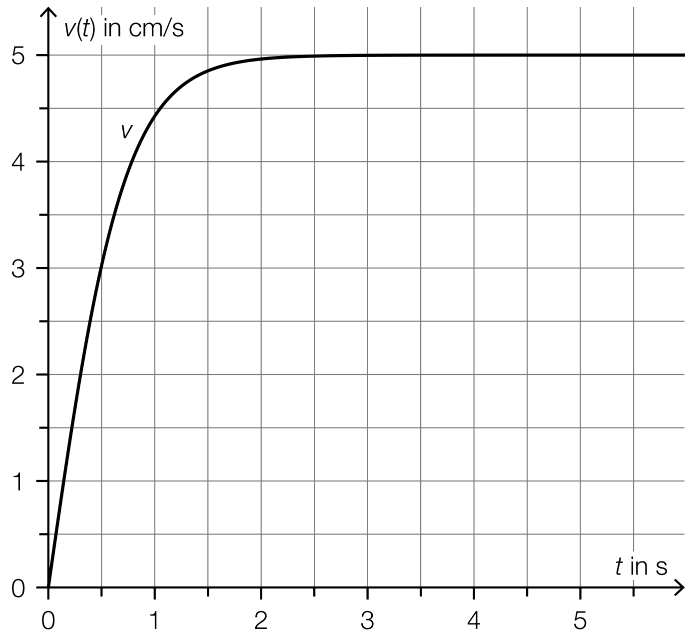
b) Ein Distelsamen wird aus einer bestimmten Höhe fallen gelassen. Für eine bestimmte Phase der Bewegung kann der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit von der Zeit modellhaft durch eine lineare Funktion beschrieben werden.
Die Schülerinnen messen für diese Phase folgende Werte:

Zeit in s	1,2	2,7	4,2	5,0	6,6
zurückgelegter Weg in cm	20	40	60	80	100

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der zugehörigen linearen Funktion auf. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

c) Ein Samen einer anderen Distelart fällt aus einer bestimmten Höhe senkrecht herab. Die Geschwindigkeit dieses Distelsamens kann in Abhängigkeit von der Zeit *t* durch die Funktion *v* modelliert werden. Die Funktion *v* ist streng monoton steigend und nähert sich asymptotisch dem Wert 5 cm/s. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen dieser Funktion *v*.

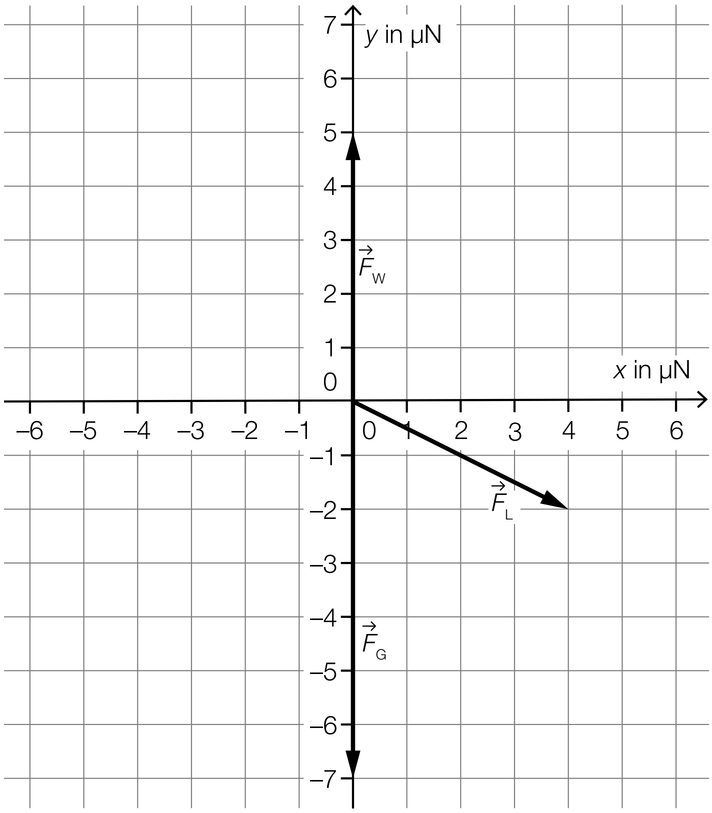


1) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Die Beschleunigung des Distelsamens nähert sich dem Wert 0 cm/s².	☐
Die Beschleunigung des Distelsamens zur Zeit $t = 0{,}5$ s ist größer als zur Zeit $t = 1$ s.	☐
Der Distelsamen legt im Zeitintervall [0 s; 0,5 s] rund 0,75 cm zurück.	☐
Die zugehörige Beschleunigung-Zeit-Funktion ist streng monoton steigend.	☐
Die mittlere Beschleunigung des Distelsamens im Zeitintervall [0 s; 0,5 s] beträgt rund 6 cm/s².	☐

d) Beim Herabfallen wirken auf einen Distelsamen zu einem bestimmten Zeitpunkt die drei Kräfte $\vec{F}_G$, $\vec{F}_W$ und $\vec{F}_L$.

Die nachstehende Abbildung veranschaulicht diese drei Kräfte in einem Koordinatensystem.



1) Geben Sie die Koordinaten von $\vec{F}_L$ an.

$\vec{F}_L = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

Für die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ gilt:
$\vec{F}_R = \vec{F}_G + \vec{F}_W + \vec{F}_L$

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ ausgehend vom Koordinatenursprung ein. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 0{,}825$ mg

$s_{n-1} = 0{,}014...$ mg

a2) Berechnung des 95-%-Konfidenzintervalls $[\mu_u; \mu_o]$ mithilfe der t-Verteilung:

$\mu_u = 0{,}825 - t_{7;0{,}975} \cdot \frac{0{,}014...}{\sqrt{8}} = 0{,}8131...$

$\mu_o = 0{,}825 + t_{7;0{,}975} \cdot \frac{0{,}014...}{\sqrt{8}} = 0{,}8368...$

$t_{7;0{,}975} = 2{,}3646...$

Daraus ergibt sich das folgende Konfidenzintervall (in mg): [0,813; 0,837]

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und Stichprobenstandardabweichung s_{n-1}.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Konfidenzintervalls.

b1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$h(t) = 15{,}13 \cdot t + 0{,}37$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in cm

b2) Gemäß diesem Modell beträgt die Geschwindigkeit des Distelsamens rund 15,13 cm/s.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

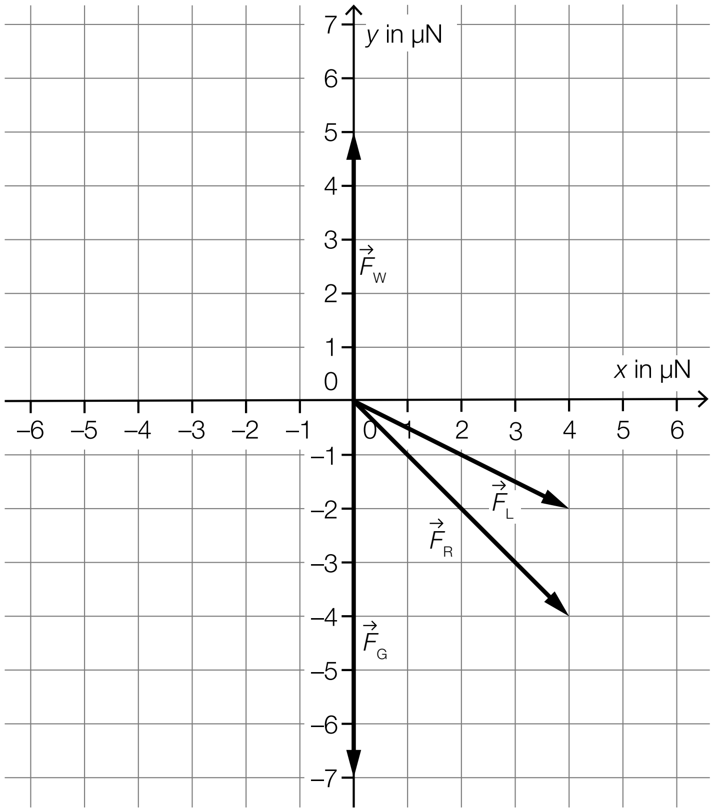
c1)

Die zugehörige Beschleunigung-Zeit-Funktion ist streng monoton steigend.	☒

c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

d1) $\vec{F}_L = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

d2)



d3) $\vec{F}_R = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\vec{F}_R| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 5{,}65...$

d1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Koordinaten von $\vec{F}_L$.
d2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$.
d3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Betrags der resultierenden Kraft $\vec{F}_R$.

Fahrradrennen

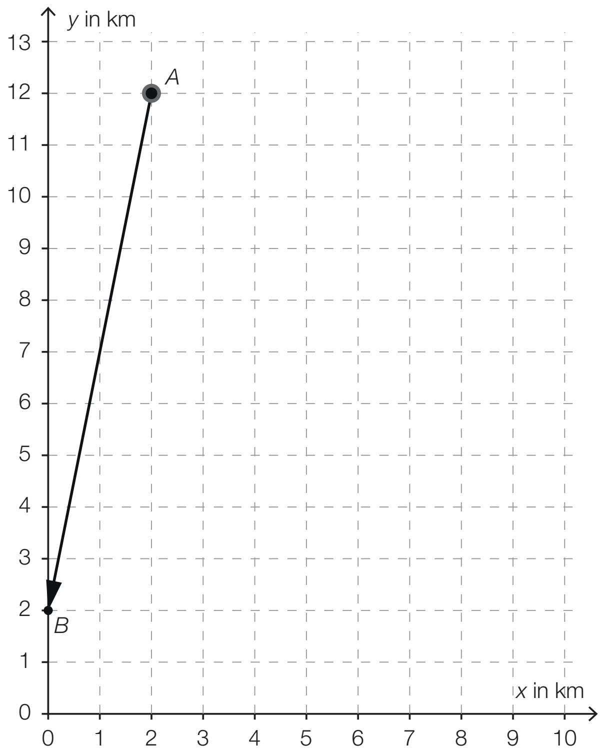
Aufgabennummer: B_251

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es findet ein Fahrradrennen statt.

a) Die Rennstrecke führt geradlinig von A über B nach C. C hat die Koordinaten $(8|y_0)$. Die Richtung von B nach C ist durch den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ gegeben.

– Berechnen Sie die Länge des Weges von A nach B.
– Zeichnen Sie den Punkt C in die nebenstehende Grafik ein.
– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $-\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$ berechnet wird.



b) Auf der Rennstrecke befindet sich ein gerades Straßenstück mit 10 % Gefälle.

– Erklären Sie mithilfe des Steigungsbegriffes, was „10 % Gefälle" bedeutet.
– Berechnen Sie den Neigungswinkel des Straßenstücks.

c) Der zurückgelegte Weg einer Rennfahrerin wird bei einem Bremsmanöver gemessen.

t in s	1	3	5
s in m	10,17	23,73	28,25

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in Metern (m)

Der zurückgelegte Weg kann durch eine quadratische Funktion s mit
$s(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie mithilfe der gegebenen Messwerte ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b und c.
– Lösen Sie dieses Gleichungssystem.
– Berechnen Sie mithilfe der Funktion s die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [2; 4].
– Erklären Sie, welche Größe mit der 1. Ableitung der Funktion s zum Zeitpunkt $t = 3$ berechnet werden kann.

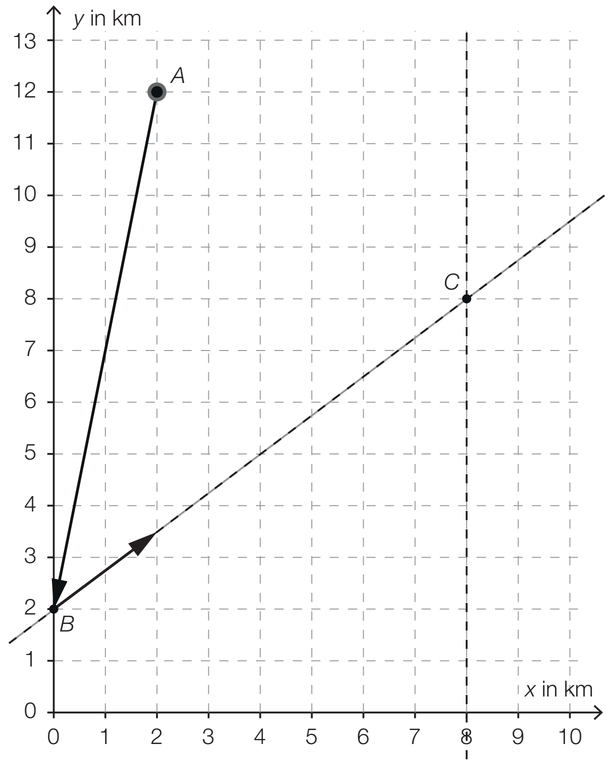
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 10^2} = 10{,}20$

Die Länge der Strecke vom Punkt A zum Punkt B beträgt 10,2 km.

Man berechnet den Vektor $\overrightarrow{CA}$ (Länge und Richtung der geradlinigen Verbindung von C nach A).
Eine grafische Erklärung im Koordinatensystem ist ebenfalls zulässig.



b) Die Steigung gibt das Verhältnis der vertikalen zur horizontalen Distanz an. Ein Gefälle von 10 % bedeutet, dass pro 100 m in horizontaler Richtung die Straße um 10 Höhenmeter fällt.

arctan(0,1) ≈ 5,71
Der Neigungswinkel der Straße beträgt ca. 5,71°.

c) Das Einsetzen der Messwerte in die Funktion liefert die folgenden 3 Gleichungen:

I: $10{,}17 = a + b + c$
II: $23{,}73 = a \cdot 9 + b \cdot 3 + c$
III: $28{,}25 = a \cdot 25 + b \cdot 5 + c$

Durch Lösen mit Technologieeinsatz erhält man die folgenden Koeffizienten:
$a = -1{,}13$ $\quad b = 11{,}3$ $\quad c = 0$

$s(t) = -1{,}13 \cdot t^2 + 11{,}3 \cdot t$

mittlere Geschwindigkeit in m/s: $\frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(4) - s(2)}{2} = 4{,}52$

Die 1. Ableitung an der Stelle $t = 3$ gibt die Momentangeschwindigkeit der Rennfahrerin zu diesem Zeitpunkt an.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz, D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 2
c) mittel	c) 4

Thema: Sport

Quellen: –

Flugrouten

Zwei Flugzeuge fliegen mit konstanter Geschwindigkeit auf geradlinigem Kurs.
Das erste Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s im Ursprung des gewählten Koordinatensystems, zum Zeitpunkt $t_1 = 3$ s ist es in $P = (7|-4|8)$.
Das zweite Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s in $Q = (1|21|-12)$ und zum Zeitpunkt $t_1 = 3$ s in $R = (4|12|-3)$.
Für alle Koordinatenangaben gilt: 1 Einheit entspricht 10 m.

a) 1) Stellen Sie die beiden Geradengleichungen auf, die die jeweiligen Positionen der Flugzeuge in Abhängigkeit von der Zeit t beschreiben.

2) Zeigen Sie, dass sich die beiden Flugzeuge nicht auf Kollisionskurs befinden. (Zu zeigen ist, dass die beiden Kurse einander nicht zum gleichen Zeitpunkt schneiden.)

b) 1) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des ersten Flugzeugs in km/h.

2) Erklären Sie, was man über die Modellierung der Geschwindigkeit und der Richtung eines Flugzeugs sagen kann, wenn der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ des Flugzeugs mit einer reellen Zahl $k \neq 0$, $|k| < 1$ multipliziert wird.

c) Die Funktion f beschreibt den Abstand zweier anderer Flugzeuge voneinander in Abhängigkeit von der Zeit t.

$$f(t) = \sqrt{(1 + t)^2 + (21 - 3 \cdot t)^2 + (-12 + 3 \cdot t)^2}$$

t … Zeit nach Beginn der Betrachtung in s
$f(t)$ … Abstand der beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt t

1) Stellen Sie die Funktion f in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch dar.

Beträgt der Abstand der beiden Flugzeuge weniger als 50 m, spricht man von einer Kollision.

2) Überprüfen Sie anhand der von Ihnen erstellten Grafik, ob die beiden Flugzeuge kollidieren.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$

$g_1: X = t \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$g_2: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

a2) $\frac{1}{3} \cdot 7 \cdot t = 1 + 1 \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{3} \cdot (-4) \cdot t = 21 - 3 \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{63}{5}$

$\frac{1}{3} \cdot 8 \cdot t = -12 + 3 \cdot t \;\Rightarrow\; t = 36$

Anhand der verschiedenen Werte für t sieht man, dass sich die beiden Flugzeuge nicht auf Kollisionskurs befinden.

b1) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

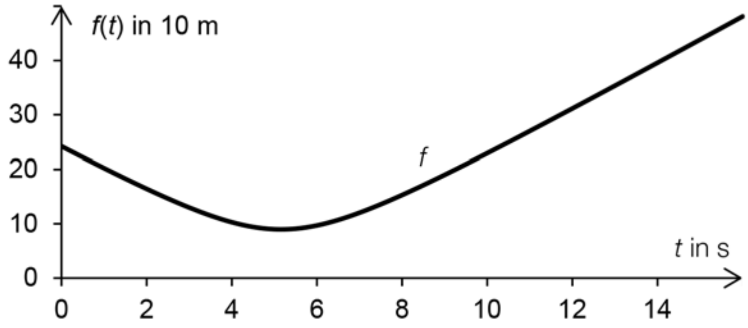
$\Delta s = 10 \cdot \left|\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = 10 \cdot \sqrt{49 + 16 + 64} = 113{,}57\ldots \text{ m}$

$v = \frac{113{,}57\ldots \text{ m}}{3 \text{ s}} = 37{,}85\ldots \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 136 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

b2) $k \cdot \vec{v}$: $0 < k < 1$ … die Geschwindigkeit ist kleiner

$-1 < k < 0$ … die Geschwindigkeit ist kleiner und das Flugzeug fliegt in die entgegengesetzte Richtung

c1)



c2) Der minimale Abstand der Flugzeuge beträgt etwa 90 m, es kommt also zu keiner Kollision.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Geocaching

Aufgabennummer: B_244

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Geocaching ist eine Suche nach einem „Schatz“ (= Cache) mithilfe von GPS (Global Positioning System).

a) Im Jahr 2000 wurde in den USA der erste Cache versteckt. Bis zum Jahr 2012 lässt sich die Anzahl der Caches weltweit näherungsweise durch die folgende Funktion n modellieren:

$n(t) = 3{,}329^t$

t … Zeit in Jahren nach 2000
$n(t)$ … Anzahl der Geocaches nach t Jahren

– Bestimmen Sie die jährliche prozentuelle Zunahme im Zeitraum von 2000 bis 2012.
– Berechnen Sie, wie viele Caches im Jahr 2010 versteckt waren.

Die Landfläche der Erde beträgt etwa $1{,}489 \cdot 10^8$ Quadratkilometer (km²).

– Berechnen Sie, in welchem Jahr im Durchschnitt auf jedem Quadratmeter der Erdoberfläche ein Cache versteckt wäre, wenn die Entwicklung ungebremst weiterginge.

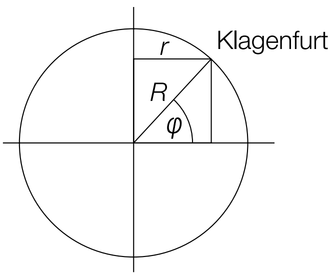
b) Entlang eines Rundwanderweges sind 4 Caches versteckt. Der Rundwanderweg ist annähernd durch die Koordinaten der Cacheverstecke (Einheit 1 km) dargestellt:

Ausgangspunkt = Endpunkt $A = (-4|3)$
Cacheverstecke $B = (-3|0)$, $C = (1|-2)$, $D = (4|1)$, $E = (2|4)$

– Zeichnen Sie den Wanderweg in ein Koordinatensystem ein.
– Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{AB}$ vom Ausgangspunkt zum 1. Cache auf.
– Dokumentieren Sie, wie man die Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnet.

c) Ein Cache wird in Klagenfurt auf der geografischen Breite von $\varphi \approx 46°$ versteckt. Der Erdradius R beträgt ca. 6371 km.

– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Radius r desjenigen Breitenkreises, auf dem der Cache liegt.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Wachstumsgesetz: $n(t) = 3{,}329^t$
$n(t) = (1 + \frac{p}{100})^t$
jährliche Zunahme: ca. 233 %

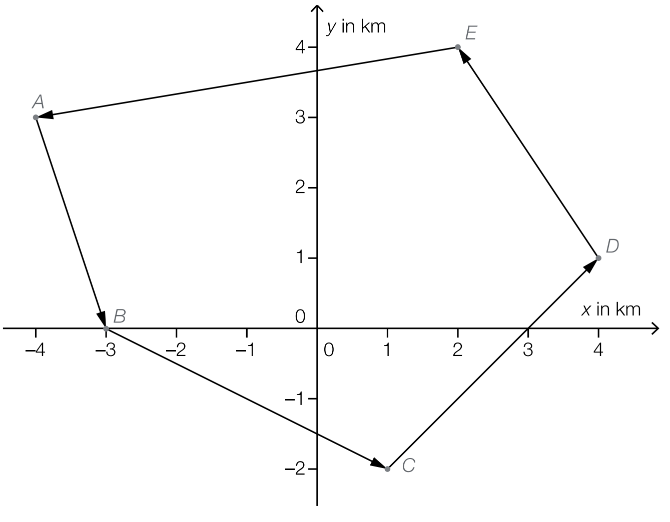
$n(10) = 3{,}329^{10}$
$n(10) = 167\,162{,}\ldots$

Im Jahr 2010 waren etwa 167 000 Caches versteckt.

$n(t) = 3{,}329^t$
$1{,}489 \cdot 10^8\ \text{km}^2 = 1{,}489 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2$
$1{,}489 \cdot 10^{14} = 3{,}329^t \mid \log$
$t = 27{,}134\ldots$
$t \approx 27$ Jahre

Im Jahr 2027 wäre auf jedem Quadratmeter der Erdoberfläche ein Cache versteckt.

b)



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|$ = Länge (Betrag) des Vektors

Die Berechnung erfolgt mit dem pythagoräischen Lehrsatz, wobei als Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks die Koordinaten des Vektors eingesetzt werden.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ $\qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(a_x)^2 + (a_y)^2}$

c) rechtwinkeliges Dreieck
$\cos(\varphi) = \frac{r}{R}$
$r = R \cdot \cos(\varphi)$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 3
c) 1

Thema: Geocaching

Quellen: –

Grönlandwale

Aufgabennummer: B_195

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

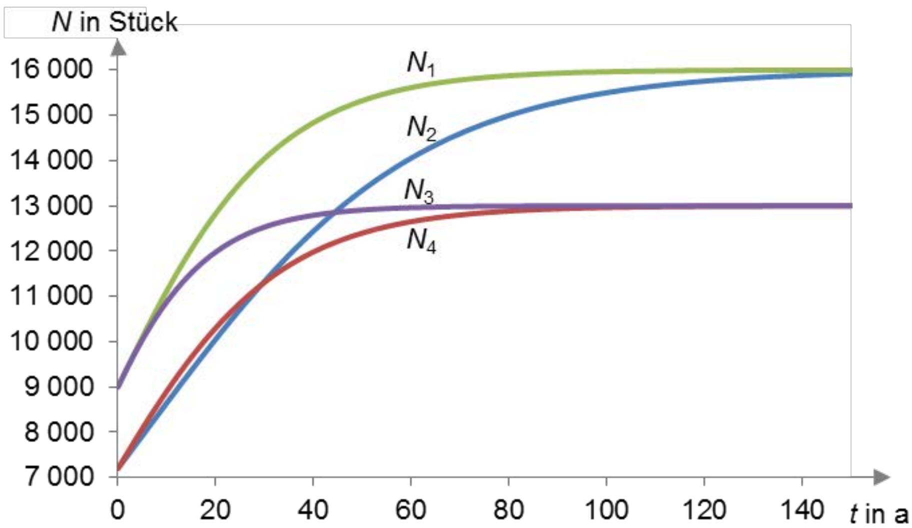
Grönlandwale sind eine vom Aussterben bedrohte Tierart. Noch existierende Populationen stehen unter strengstem Schutz. Das Wachstum der Populationen wird genau beobachtet.

Aus langjährigen Beobachtungen der größten heute lebenden Population kann für deren zukünftiges Wachstum unter gleichbleibenden Umweltbedingungen die folgende Funktion angegeben werden:

$$N(t) = \frac{16\,000}{1 + \frac{11}{9} \cdot e^{-0{,}0363 \cdot t}}$$

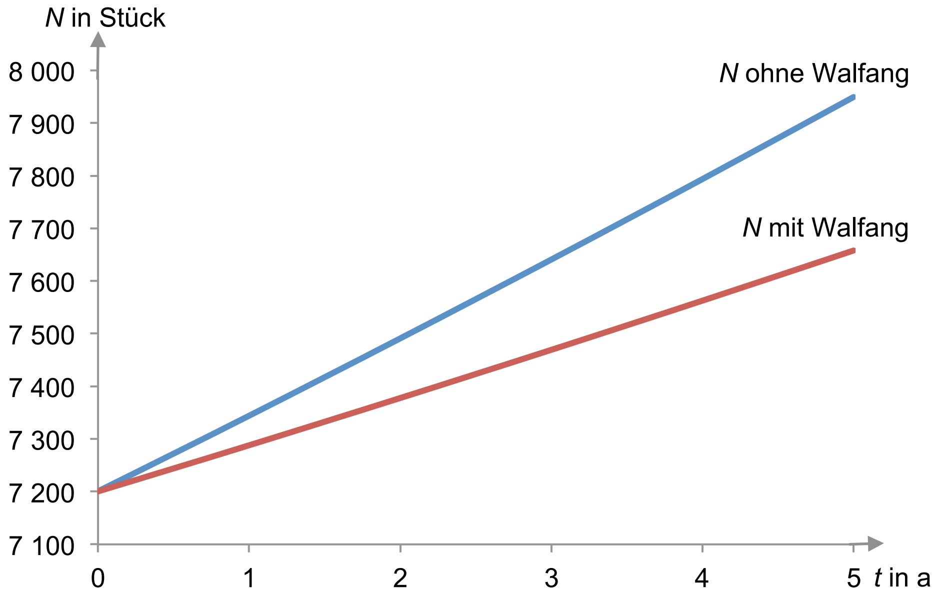
t … Zeit in Jahren (a) mit $t = 0$ im Jahr 2007
$N(t)$ … Anzahl der Wale in Stück nach t Jahren

a) – Lesen Sie ab, welcher der folgenden Funktionsgraphen zur angegebenen Funktion passt.
– Begründen Sie Ihre Auswahl.



b) – Stellen Sie die Wachstumsgeschwindigkeit der Walpopulation in Abhängigkeit von der Zeit t grafisch dar.
– Berechnen Sie, zu welcher Zeit die Walpopulation am stärksten zunimmt.

c) Trotz Naturschutz gesteht die Internationale Walfangkommission IWC den Inuit (Volksgruppe in Grönland) Fangquoten für den Eigenbedarf für bestimmte Grönlandwalbestände zu. So wurde von 2008 bis 2012 der Fang einer genau bestimmten Anzahl an Tieren für die oben beschriebene Walpopulation erlaubt. In der nachstehenden Grafik ist die voraussichtliche Entwicklung der Walpopulation ohne und mit jährlichem Abfischen dargestellt.



– Argumentieren Sie mathematisch, warum sich der Abstand der beiden Exponentialfunktionen mit jedem Jahr vergrößert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Zähler der Formel gibt die maximal erreichbare Anzahl von Walen an. Es kommen also nur die Graphen N_1 und N_2 in Frage, da diese bis zu 16 000 Tiere erlauben.
Die Zahl der Tiere zum Zeitpunkt null kann mithilfe der Konstante $\frac{11}{9}$ bestimmt werden. Diese gibt das Verhältnis von maximal erreichbarem Wert und Anfangswert der logistischen Funktion wieder.

$$\frac{11}{9} = \frac{16\,000}{N_0} - 1$$

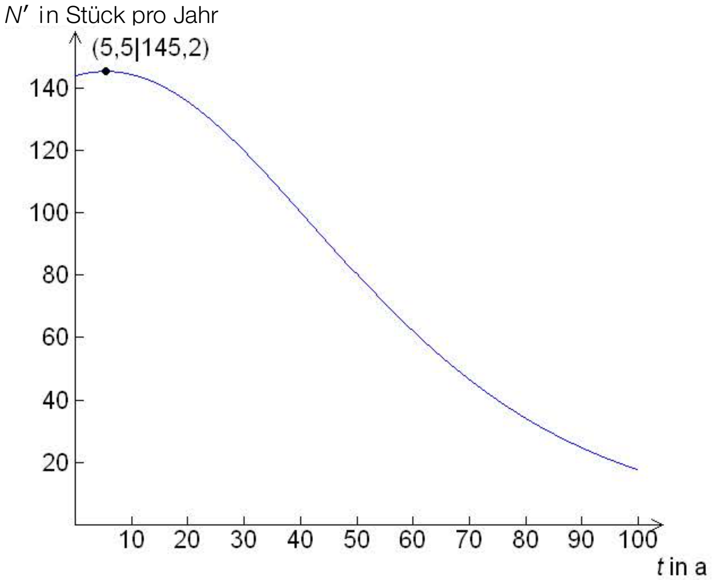
$$\frac{20}{9} = \frac{16\,000}{N_0}$$

$$N_0 = \frac{16\,000 \cdot 9}{20} = 7\,200$$

Der passende Graph ist daher N_2.

Auch andere passende Argumentationen bzgl. des Anfangswerts sind als richtig zu werten.

b) Die Wachstumsgeschwindigkeit der Walpopulation wird durch die 1. Ableitung der Funktion N beschrieben.
N' wird mithilfe von Technologie berechnet und deren Maximum bestimmt. Es ergibt sich, dass nach ca. 5,5 Jahren die größte Zunahme an Walen erfolgt.



c) Der Abstand der Funktionsgraphen wird immer größer, da durch das jährliche Abfischen auch die Basis für den prozentuellen jährlichen Zuwachs verkleinert wird. Bei gleichbleibender prozentueller Zuwachsrate ergibt sich bei einer größeren Ausgangsmenge eine größere Anzahl hinzukommender Wale als bei einer kleineren Ausgangsmenge.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 3
c) mittel	c) 2

Thema: Umwelt

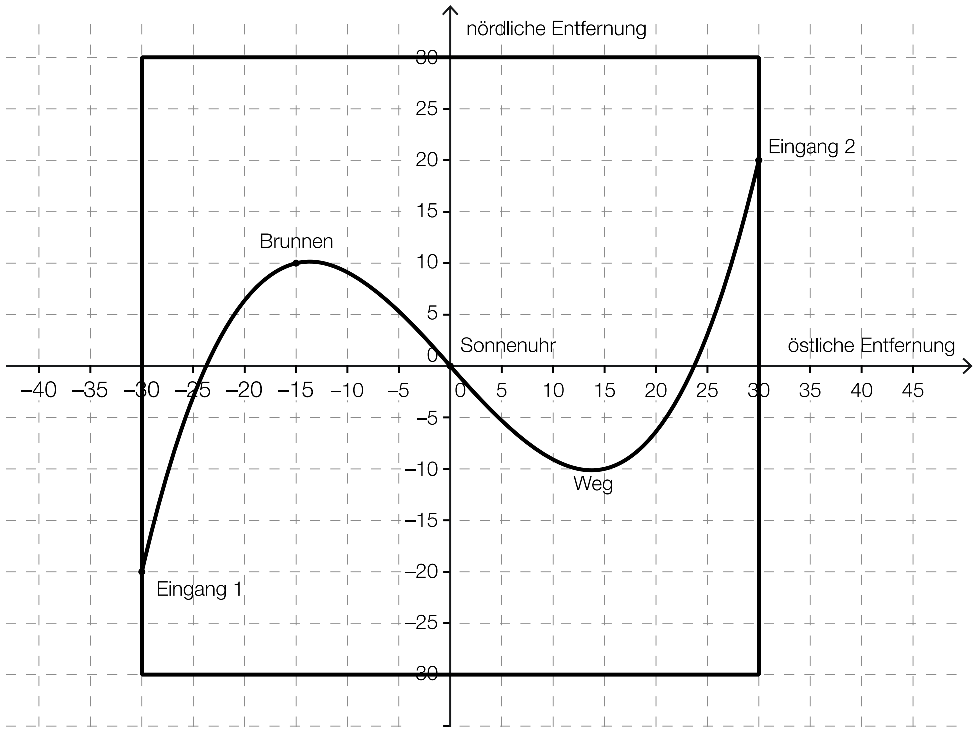
Quelle: www.wwf.at/files/downloads/groenlandwal.pdf

Kinderspielplatz (1)

Aufgabennummer: B_247

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein quadratischer Kinderspielplatz soll neu angelegt werden. In der Mitte des Kinderspielplatzes ist eine große Sonnenuhr, ein Brunnen ist bereits vorhanden. Wie in der nachstehenden Abbildung zu sehen ist, soll ein Weg vom Eingang 1 zum Brunnen führen, weiter zur Sonnenuhr und von dort zum Eingang 2.



a) Der Weg kann durch eine Polynomfunktion f dritten Grades modelliert werden.

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Entfernung von der Sonnenuhr in östlicher Richtung in Metern (m)
$f(x)$ ... Entfernung von der Sonnenuhr in nördlicher Richtung in m

– Stellen Sie dasjenige lineare Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten a, b, c und d der Polynomfunktion berechnen kann. (Entnehmen Sie die notwendigen Informationen der Abbildung.)
– Lösen Sie das Gleichungssystem.
– Zeigen Sie, dass der Wendepunkt der Polynomfunktion f genau an der Stelle der Sonnenuhr liegt.

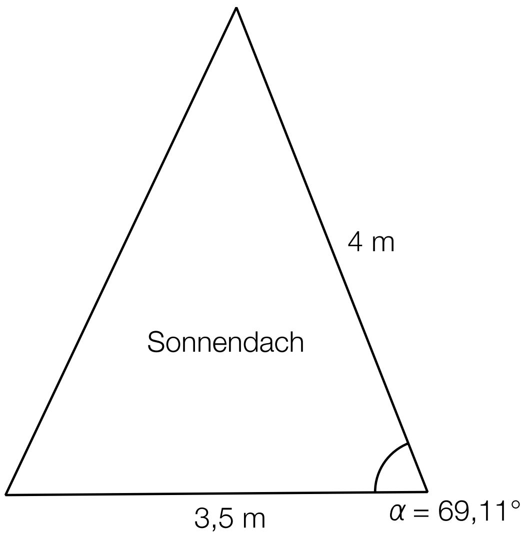
b) Die Funktion A mit $A(d) = \frac{d^2}{2}$ beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt des quadratischen Spielplatzes und dessen Diagonale.
Ein Mitarbeiter behauptet: „Wenn wir den Flächeninhalt des Spielplatzes verdoppeln wollen, müssen wir die Diagonale verdoppeln.“

– Überprüfen Sie, ob die Behauptung des Mitarbeiters richtig ist.

c) Ein Kind läuft außerhalb des Weges geradlinig vom Eingang 1 zur Sonnenuhr und dann zum Brunnen.

– Stellen Sie denjenigen Vektor auf, der den geradlinigen Weg vom Eingang 1 zur Sonnenuhr beschreibt.
– Berechnen Sie die Entfernung, die das Kind läuft.

d) Um den Kindern im Sommer einen Schatten bieten zu können, wird ein dreieckiges Sonnendach angebracht. Für die Produktion des Sonnendachs rechnet man mit 10 % Verschnitt. 1 m² des verwendeten Stoffes kostet € 11,95.



– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sonnendaches.
– Berechnen Sie die Kosten des Stoffes für das Sonnendach.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) (–30|–20) einsetzen liefert I: $-20 = (-30)^3 \cdot a + (-30)^2 \cdot b + (-30) \cdot c + d$
(–15|10) einsetzen liefert II: $10 = (-15)^3 \cdot a + (-15)^2 \cdot b + (-15) \cdot c + d$
(0|0) einsetzen liefert III: $0 = d$
(30|20) einsetzen liefert IV: $20 = 30^3 \cdot a + 30^2 \cdot b + 30 \cdot c + d$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a \approx 0{,}001975$
$b = 0$
$c \approx -1{,}1111$
$d = 0$

Im Wendepunkt muss $f''(x)$ gleich null sein.
$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$
Da $b = 0$ ist, ergibt Einsetzen von $x = 0$ für $f''(x)$ null.

b) Behauptung: $A(2d) = 2A(d)$

$$A(2d) = \frac{(2d)^2}{2} = \frac{4d^2}{2} = 4 \cdot \frac{d^2}{2} = 4A(d)$$

Also ist die Behauptung falsch. Der Flächeninhalt wird vervierfacht, wenn die Diagonale verdoppelt wird.

Jede Begründung, dass durch das Verdoppeln der Diagonale eine Vervierfachung entsteht, ist richtig.

c) Verbindungsvektor Eingang 1 – Sonnenuhr: $\binom{0}{0} - \binom{-30}{-20} = \binom{30}{20}$
Länge: $\sqrt{30^2 + 20^2} \approx 36{,}06$

Verbindungsvektor Sonnenuhr – Brunnen: $\binom{-15}{10} - \binom{0}{0} = \binom{-15}{10}$
Länge: $\sqrt{(-15)^2 + 10^2} \approx 18{,}03$

Gesamtlänge in Metern: $36{,}06 + 18{,}03 = 54{,}09$

d) Flächeninhalt des Sonnendaches in m²: $A = \frac{4 \cdot 3{,}5 \cdot \sin(69{,}11°)}{2} = 6{,}539...$

Der Flächeninhalt des Sonnendaches beträgt rund 6,54 m².

Kosten des Stoffes: $A \cdot 1{,}1 \cdot 11{,}95 = 85{,}966...$

Die Kosten des Stoffes für das Sonnendach betragen € 85,97.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: http://www.esvocampingshop.com/de/zeltstoff-de/sonnensegelstoff-de.html

Reisekosten

Aufgabennummer: B_193

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Tarife bei Fahrten mit dem Zug hängen normalerweise von der zurückgelegten Fahrtstrecke ab. Die in dieser Aufgabe verwendeten Bezeichnungen sind:

x … Fahrtstrecke in Kilometern (km)
$T(x)$ … Tarif in Euro (€) für die Fahrtstrecke x

a) In der nachstehenden Tabelle sind die 2012 gültigen Tarife für eine Fahrt mit der ÖBB (2. Klasse ohne Vorteilsticket) ausgehend vom Bahnhof Wien West zum angegebenen Endbahnhof angeführt.

Bahnhof	Fahrtstrecke x in km	Tarif in €
St. Pölten	60	11,00
Linz	190	31,20
Salzburg	317	47,50
Innsbruck	572	58,30
Landeck	647	58,70
Bregenz	770	64,30

– Bestimmen Sie mittels Regressionsrechnung eine Polynomfunktion 3. Grades, die die Abhängigkeit des Tarifs von der zu fahrenden Fahrtstrecke beschreibt.
– Stellen Sie die Funktion gemeinsam mit den angegebenen Werten in einem Diagramm dar und achten Sie dabei auf eine sinnvolle Skalierung der Achsen.

b) Im Kurzstreckenbereich kann die Abhängigkeit des Tarifs von der zurückgelegten Fahrtstrecke mithilfe folgender Funktion beschrieben werden:

$T(x) = 0{,}19x$

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 0,19 im gegebenen Sachzusammenhang.

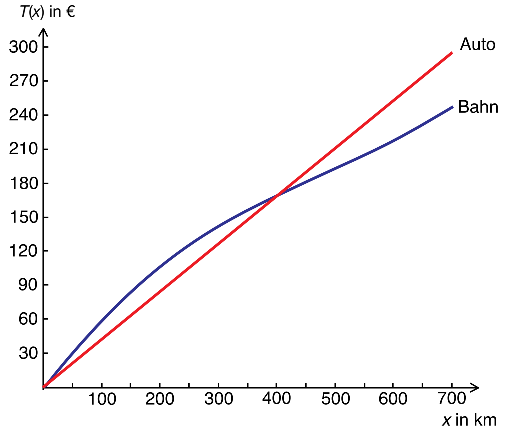
c) Die folgende Funktion T gibt den Tarif in Abhängigkeit von der Fahrtstrecke x entlang einer anderen Bahnstrecke an:

$T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 3 \cdot 10^{-4}x^2 + 0{,}2305x - 0{,}8711$

x … Fahrtstrecke in km
$T(x)$ … Tarif in € für die Fahrtstrecke x

– Ermitteln Sie mithilfe der Differenzialrechnung diejenige Fahrtstrecke, für die der Preiszuwachs am geringsten ist.
– Berechnen Sie den Preiszuwachs für diese Fahrtstrecke.

d) Eine Firma schickt 3 Angestellte auf Dienstreise. Als Kostenersatz müssen den Angestellten entweder € 0,42 pro gefahrenem Kilometer für ein gemeinsames Auto oder jeweils der Bahntarif 2. Klasse ohne Vorteilsticket rückerstattet werden. In der nebenstehenen Grafik sind die Bahnkosten für 3 Personen und das für den PKW zu erstattende Kilometergeld dargestellt.

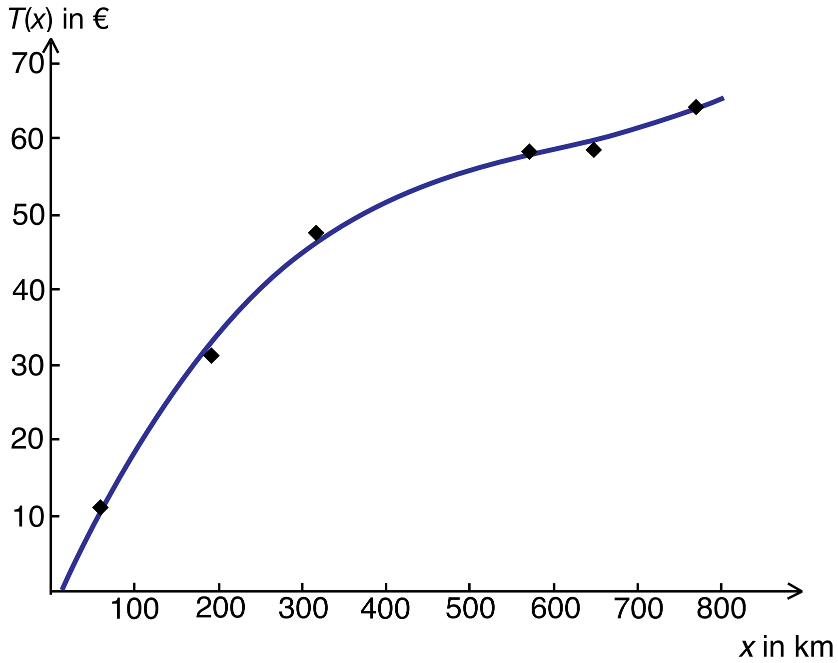


– Geben Sie an, wann die Firma Kilometergeld und wann sie Bahnkostenersatz leisten sollte, um ihre Kosten gering zu halten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 0{,}0004x^2 + 0{,}2557x - 3{,}5482$



b) $T(x) = 0{,}19x$
0,19 ist die Steigung der linearen Tariffunktion. Sie gibt den Tarif pro gefahrenem Kilometer an. Ein Kilometer kostet also € 0,19.

c) Die Preissteigerung pro Kilometer entspricht der Steigung der Tangente an die Tariffunktion, die man mit der 1. Ableitung berechnen kann. Zur Berechnung der geringsten Preissteigerung muss die 2. Ableitung berechnet und gleich null gesetzt werden. Es wird also die x-Koordinate des Wendepunkts der Tariffunktion berechnet.
$T(x) = 2 \cdot 10^{-7}x^3 - 3 \cdot 10^{-4}x^2 + 0{,}2305x - 0{,}8711$
$T'(x) = 6 \cdot 10^{-7}x^2 - 6 \cdot 10^{-4}x + 0{,}2305$
$T''(x) = 1{,}2 \cdot 10^{-6}x - 6 \cdot 10^{-4}$
$1{,}2 \cdot 10^{-6}x - 6 \cdot 10^{-4} = 0$
$1{,}2 \cdot 10^{-6}x = 6 \cdot 10^{-4}$
$x = 500$ km
Preiszuwachs an der Stelle $x = 500$:
$T'(500) = 6 \cdot 10^{-7} \cdot 500^2 - 6 \cdot 10^{-4} \cdot 500 + 0{,}2305 = 0{,}0805$
Der Preiszuwachs an dieser Stelle beträgt ungefähr € 0,08 pro km.

d) Die Grafik zeigt, dass bis zu einer Strecke von ca. 400 km der Bahntarif höher liegt als das Kilometergeld. Die Firma hat bei Strecken bis zu 400 km geringere Kosten, wenn die 3 Angestellten gemeinsam mit dem Auto fahren. Für Strecken, die länger als 400 km sind, ist für die Firma der Bahnkostenersatz günstiger.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) 1 Zahlen und Maße
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 1
c) schwer	c) 3
d) leicht	d) 1

Thema: Verkehr

Quelle: http://www.oebb.at (Tarife und km-Angaben)

Bundesinstitut bifie Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

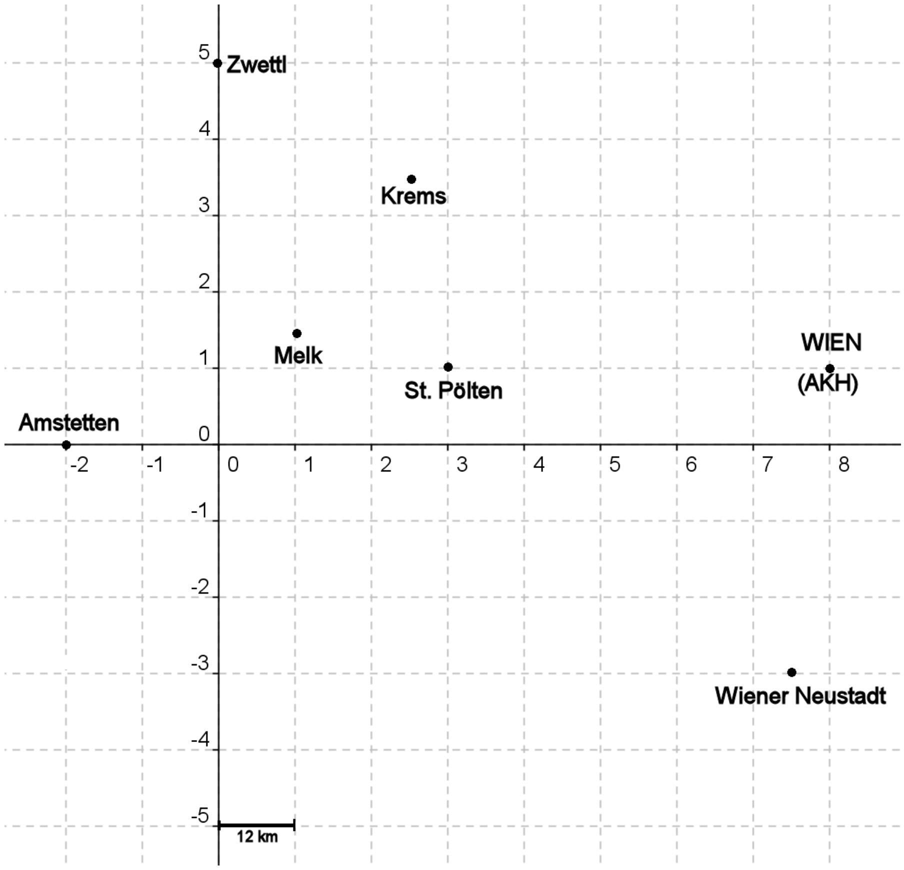
Rettungshubschrauber

Aufgabennummer: B_246

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Einsatz von Hubschraubern ermöglicht schnelle und sichere Krankentransporte.

Im nachstehenden Koordinatensystem sind Krankenhäuser eingezeichnet, die über einen Hubschrauberlandeplatz verfügen. Bei der Darstellung entspricht eine Einheit im Koordinatensystem einer Strecke von 12 km.



a) – Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Koordinaten des Krankenhauses Krems ab.
– Stellen Sie denjenigen Vektor auf, der den geradlinigen Flug eines Hubschraubers vom Krankenhaus Krems zum AKH Wien beschreibt.

b) Ein Hubschrauber startet beim Krankenhaus Wiener Neustadt. Der Flug wird durch die folgenden Vektoren beschrieben:

Zuerst $\begin{pmatrix} -3{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$, dann $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und schließlich $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

– Zeichnen Sie den Hubschrauberflug in der obigen Abbildung ein.

c) Der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ beschreibt den Hubschrauberflug vom Krankenhaus St. Pölten zum Krankenhaus Zwettl.

– Berechnen Sie die Länge dieses Hubschrauberflugs in Kilometern.

d) Ein Hubschrauber fliegt vom Krankenhaus Melk Richtung Krankenhaus Krems.

– Zeichnen Sie den entsprechenden Einheitsvektor dieser Richtung ausgehend vom Krankenhaus Melk in die obige Abbildung ein.
– Dokumentieren Sie, wie man diesen Einheitsvektor berechnen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

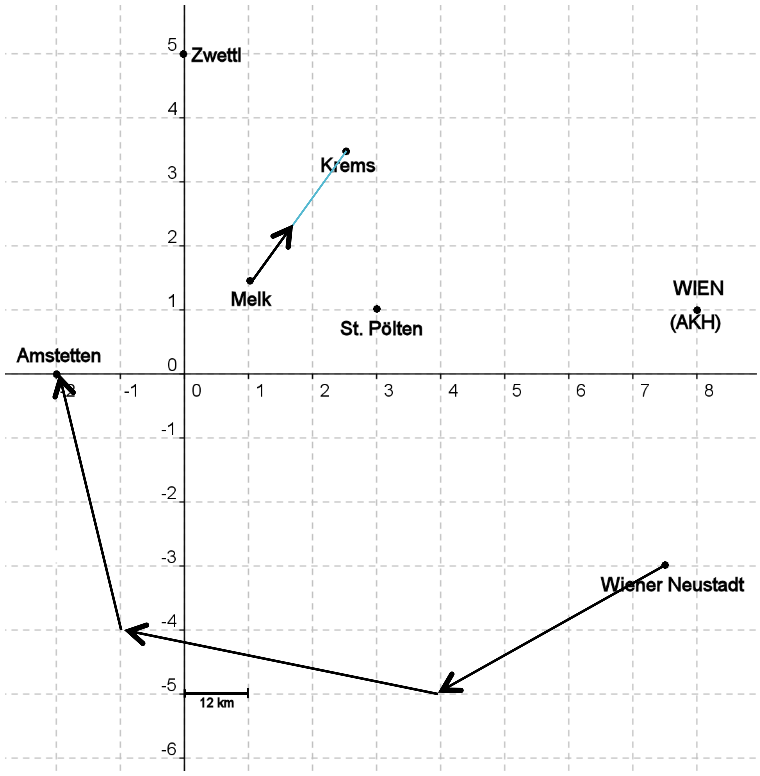
Möglicher Lösungsweg

a) Krems (2,5 | 3,5) *Ablesetoleranz: ± 0,1 Einheiten*

Krems – Wien: $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$

Lösung auch grafisch möglich.

b)



c) St. Pölten – Zwettl = $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Länge (Betrag) = 5 Einheiten, das entspricht einer Entfernung von 60 km Luftlinie.

d) Die Koordinaten des Vektors Melk – Krems werden durch den Betrag dieses Vektors dividiert.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) —
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1
d) 2

Thema: Verkehr

Quellen: —

Saftpackung

Aufgabennummer: B_232

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Saftpackung hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge *a* und der Füllhöhe *h* (Abb. 1). Sie enthält 1 Liter Saft.

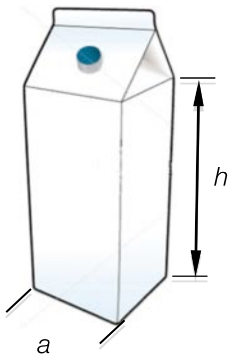


Abb. 1

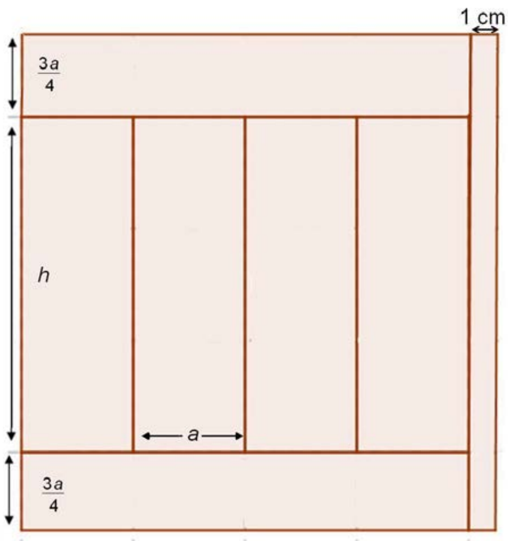


Abb. 2

Die Packung wird aus einem beschichteten Karton in Rechteckform gefertigt (Abb. 2), dessen Fläche sich mit der folgenden Formel berechnen lässt:

$$A = 6a^2 + \frac{3a}{20} + \frac{4}{a} + \frac{1}{10a^2}$$

A … Flächeninhalt in dm²
a … Länge der Seitenkante in dm

a) – Zeigen Sie die Richtigkeit der angegebenen Formel für A. Verwenden Sie dazu die Angaben aus Abb. 2 und die Formel $V = a^2 \cdot h$ für das Volumen V der eingefüllten Flüssigkeit bei einer Füllmenge von $V = 1$ Liter.

b) Die Abb. 3 zeigt die Abhängigkeit der für die 1-Liter-Packung benötigten Kartonfläche A von der Seitenkante a.

– Interpretieren Sie den Verlauf der Funktion in einer sinnvollen Definitionsmenge.

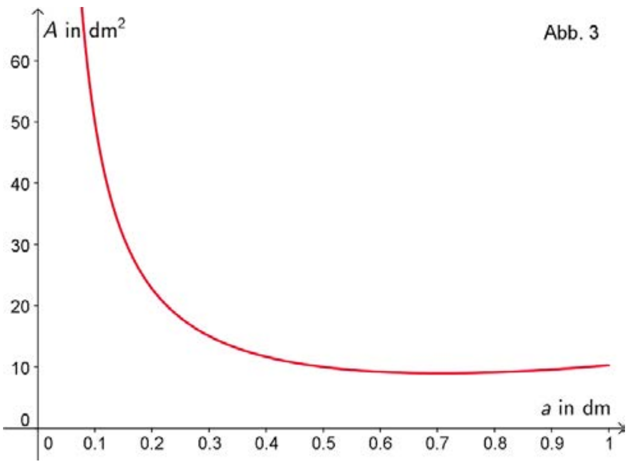
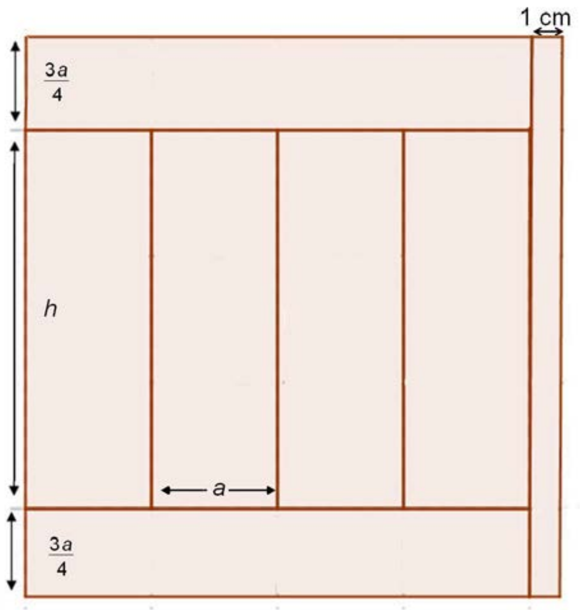


Abb. 3

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die Fläche des Materials, aus dem die Packung hergestellt wird, setzt sich aus Rechtecken zusammen.

Beachtung von $a^2 \cdot h = 1 \rightarrow h = \frac{1}{a^2}$

$A = 4a \cdot h + \frac{6a}{4} \cdot 4a + 0{,}1\,(\frac{6a}{4} + h)$

Das Ausmultiplizieren und Vereinfachen liefert:

$A = 6a^2 + 0{,}15a + \frac{4}{a} + \frac{0{,}1}{a^2}$

In Bruchform:

$A = 6a^2 + \frac{3a}{20} + \frac{4}{a} + \frac{1}{10a^2}$

b) Die Funktion A ist für $a = 0$ nicht definiert: Die Seitenkante a der Saftpackung kann nicht null sein. Der Definitionsbereich von A enthält daher reelle Zahlen $a > 0$.

Sehr kleine Werte von a bedeuten, dass die Füllhöhe groß sein muss, die Packung ist hoch und schmal.
Je größer a wird, desto kleiner wird die Füllhöhe der 1-Liter-Packung. Die Packung wird breiter und niedriger. Theoretisch könnte a beliebig groß werden, allerdings strebt h dann gegen null.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3

Thema: Alltag

Quelle: Daten und Bildidee von http://www.tetrapak.com/at/

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Flughafen*

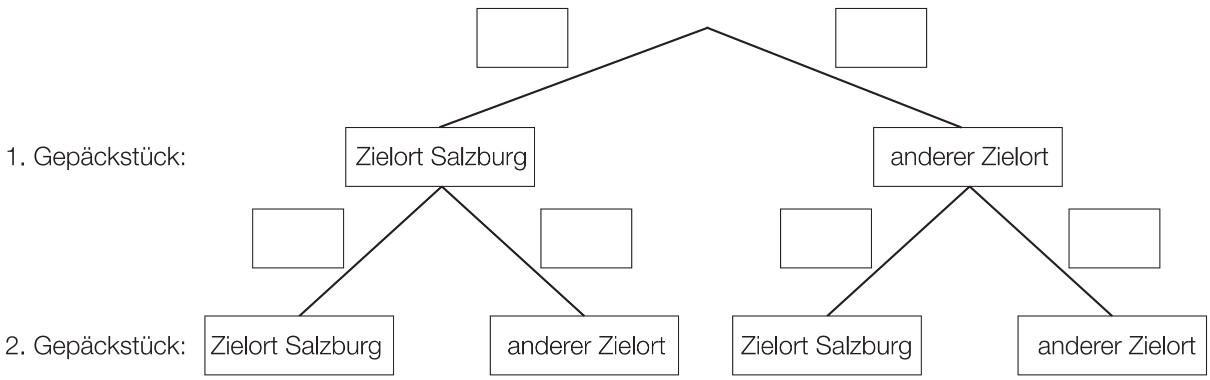
Aufgabennummer: B_506

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Auf einem bestimmten Flughafen werden Gepäckstücke mit unterschiedlichen Zielorten aufgegeben. Jedes Gepäckstück hat mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p den Zielort Salzburg.

Es werden 2 Gepäckstücke unabhängig voneinander zufällig ausgewählt und im Hinblick auf deren jeweiligen Zielort überprüft.

1) Tragen Sie im nachstehenden Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 zufällig ausgewählten Gepäckstücken mindestens 1 <u>nicht</u> den Zielort Salzburg hat, beträgt 97,75 %.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

3) Ordnen Sie den beiden Ereignissen jeweils die zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu.

Von 5 zufällig ausgewählten Gepäckstücken hat keines den Zielort Salzburg.	
Von 5 zufällig ausgewählten Gepäckstücken haben alle den Zielort Salzburg.	

A	$(1-p)^5$
B	p^5
C	$1-p^5$
D	$1-(1-p)^5$

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

b) Der Kerosinverbrauch eines bestimmten Flugzeugs auf einer bestimmten Strecke kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Der Erwartungswert beträgt μ = 845 L/100 km und die Standardabweichung beträgt σ = 25 L/100 km.

1) Ermitteln Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem der Kerosinverbrauch mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

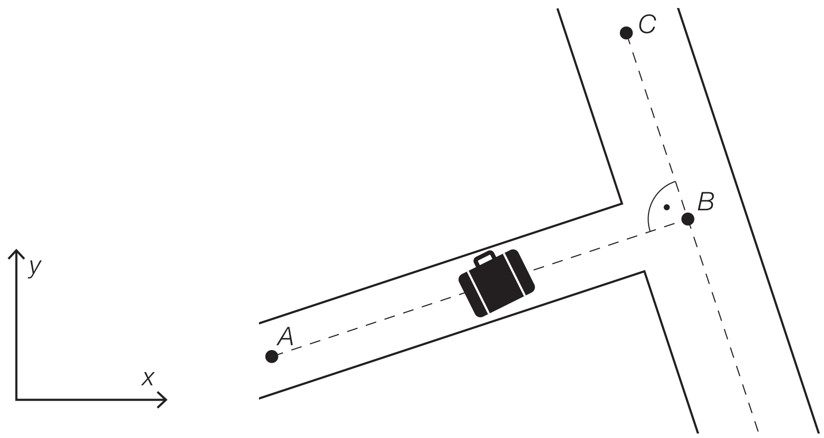
Nach Reparaturarbeiten soll der Erwartungswert des Kerosinverbrauchs mithilfe eines Konfidenzintervalls neu geschätzt werden. Dabei wird angenommen, dass die Standardabweichung weiterhin σ = 25 L/100 km beträgt.

Nach den Reparaturarbeiten wurde der Kerosinverbrauch in L/100 km von einer Zufallsstichprobe von 10 Flügen auf dieser Strecke gemessen:

844	840	864	820	788	858	832	817	839	796

2) Ermitteln Sie das zweiseitige 99-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert des Kerosinverbrauchs nach den Reparaturarbeiten.

c) In der nachstehenden Abbildung ist modellhaft ein Koffer auf einem Gepäckförderband dargestellt. Der Koffer bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ m/s vom Punkt A zum Punkt B.



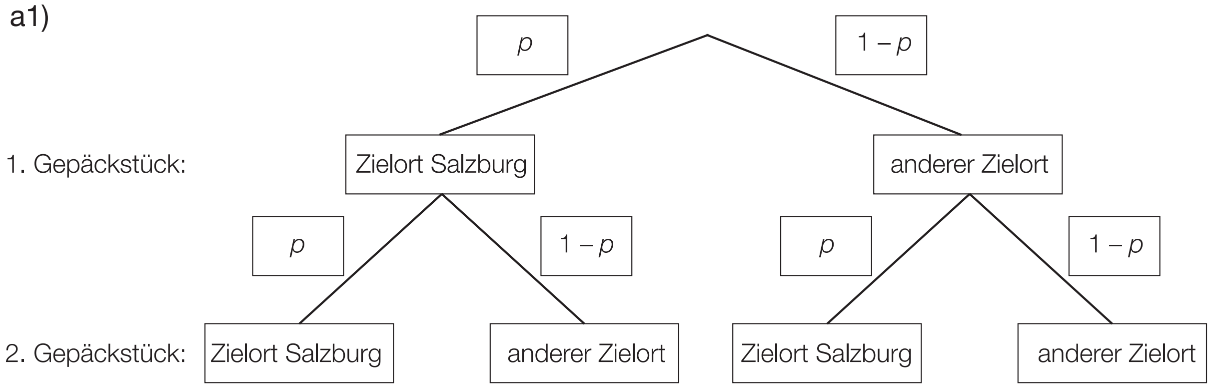
1) Berechnen Sie $|\vec{v}|$ in m/min.

Anschließend bewegt sich der Koffer mit der Geschwindigkeit $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ y_w \end{pmatrix}$ m/s vom Punkt B zum Punkt C. Die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ stehen normal aufeinander.

2) Ermitteln Sie y_w.

Möglicher Lösungsweg

a1)



Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn im Baumdiagramm für $p = 0{,}15$ *und für* $1 - p = 0{,}85$ *angegeben wird (vgl. Lösung zu a2).*

a2) $0{,}9775 = 1 - p^2$

$p = \sqrt{0{,}0225} = 0{,}15$

a3)

Von 5 zufällig ausgewählten Gepäckstücken hat keines den Zielort Salzburg.	A
Von 5 zufällig ausgewählten Gepäckstücken haben alle den Zielort Salzburg.	B

A	$(1 - p)^5$
B	p^5
C	$1 - p^5$
D	$1 - (1 - p)^5$

b1) X ... Kerosinverbrauch in L/100 km

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad [803{,}8...; 886{,}1...]$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

Stichprobenmittelwert: $\bar{x} = 829{,}8$

Berechnung des 99-%-Konfidenzintervalls $[\mu_u; \mu_o]$ mithilfe der Normalverteilung:

$\mu_u = 829{,}8 - 2{,}576 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 809{,}4...$

$\mu_o = 829{,}8 + 2{,}576 \cdot \frac{25}{\sqrt{10}} = 850{,}1...$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall in L/100 km: [809,4...; 850,1...]

c1) $|\vec{v}| = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}5^2} = 1{,}3$

$1{,}3$ m/s = 78 m/min

c2) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ y_w \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -1{,}2 + 0{,}5 \cdot y_w = 0 \quad \Rightarrow \quad y_w = 2{,}4$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Wahrscheinlichkeiten.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit p.
a3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Intervalls.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Konfidenzintervalls.
c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von $|\vec{v}|$ in m/min.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von y_w.

Tagestemperatur

Aufgabennummer: B_252

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die nachstehend angeführten 3 Messwerte wurden an einem Vormittag aufgezeichnet und sollen mithilfe einer abschnittsweise definierten linearen Funktion T in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

t in h	T in °C
6	8
9	10
12	16

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden (h)
$T(t)$ ... Temperatur nach t Stunden in Grad Celsius (°C)

Es wird angenommen, dass in den Intervallen [6; 9] und [9; 12] die Temperatur jeweils linear zunimmt.

– Stellen Sie den Temperaturverlauf im Intervall [6; 12] grafisch dar.
– Stellen Sie die Funktion T abhängig von der Zeit t im Intervall [6; 12] auf.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Funktion T die Temperatur um 11:30 Uhr.

b) An einem Tag im Oktober hat man einen Temperaturverlauf gemessen, der durch eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden kann.

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden
$f(t)$ ... Temperatur zum Zeitpunkt t in °C

t	2	5	8	11	14	17	20	23
$f(t)$	5,4	4,3	8,3	12,2	15,3	14	9,1	7,2

– Erstellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine zu den angegebenen Werten passende Polynomfunktion 3. Grades. (Runden Sie dabei die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.)
– Berechnen Sie den Differenzenquotient dieser Polynomfunktion für das Intervall [6; 12].
– Beschreiben Sie, was dieser Differenzenquotient für das Intervall im Sachzusammenhang aussagt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ansatz über $T(t) = k \cdot t + d$

$k_1 = \frac{10-8}{9-6} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ Punkt einsetzen: $8 = \frac{2}{3} \cdot 6 + d_1$

$\Rightarrow d_1 = 4$

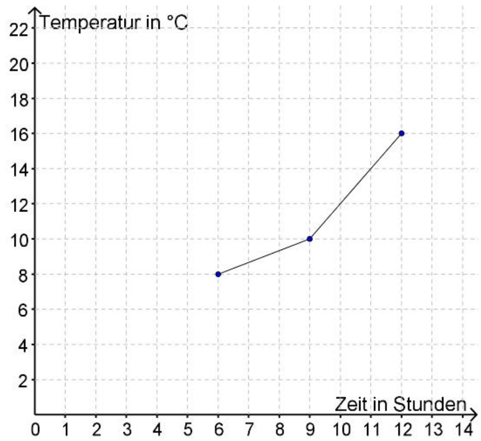
$k_2 = \frac{16-10}{12-9} = 2 \Rightarrow$ Punkt einsetzen: $10 = 2 \cdot 9 + d_2$

$\Rightarrow d_2 = -8$

$$T(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t + 4 \text{ für } t \in [6; 9] \\ 2t - 8 \text{ für } t \in [9; 12] \end{cases}$$

$T(11{,}5) = 2 \cdot 11{,}5 - 8 = 15$

Um 11:30 Uhr ergibt das Modell 15 °C.



b) Mittels Technologieeinsatz kommt man zur folgenden Gleichung:

$f(t) = -0{,}0057 \cdot t^3 + 0{,}1446 \cdot t^2 - 0{,}2598 \cdot t + 4{,}4186$

Der Differenzenquotient wird gebildet mit: $\frac{f(12) - f(6)}{12-6} = 0{,}9066 \approx 0{,}91$

Der Differenzenquotient sagt aus, dass die Temperatur im Intervall [6; 12] durchschnittlich um rund 1 °C pro Stunde zunimmt.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Halterungen für Glasfassaden

Ein Betrieb erzeugt Halterungen für Glasfassaden. Die monatlichen Produktionskosten für die Herstellung der Halterungen bis zu einer Grenze von $x = 5\,000$ Stück können durch folgende Funktion K beschrieben werden:

$K(x) = 0{,}00001 \cdot x^3 - 0{,}025 \cdot x^2 + 24 \cdot x + 3\,500$

x ... Produktionsmenge in Stück mit $0 \leq x \leq 5\,000$
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in €

a) 1) Stellen Sie eine Gleichung der Stückkostenfunktion $\overline{K}$ auf.
   2) Ermitteln Sie den lokalen Extremwert der Stückkostenfunktion $\overline{K}$.
   3) Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass es sich bei diesem Extremwert um ein lokales Minimum handelt.

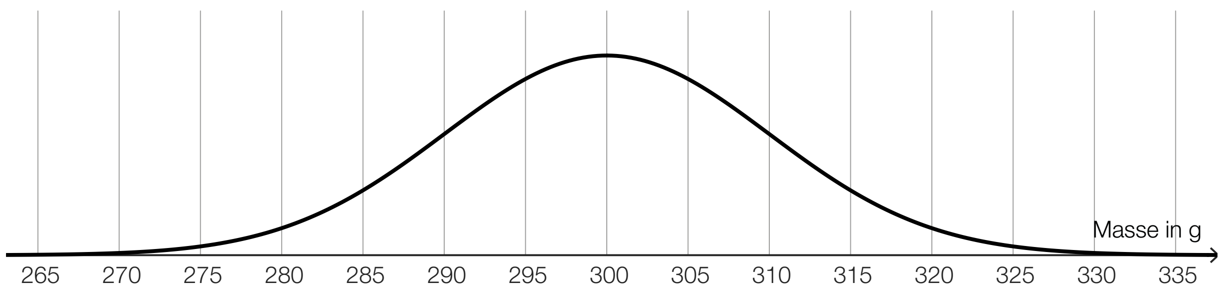
b) Die Halterungen werden zu einem Preis von € 20 pro Stück verkauft.

   1) Stellen Sie eine Gleichung der Gewinnfunktion G auf.
   2) Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

c) Ein Kunde bezieht die Halterungen in sehr großer Stückzahl.
   Erfahrungsgemäß ist eine Halterung mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % fehlerhaft.
   Der Kunde überprüft eine Zufallsstichprobe von 50 Halterungen.

   1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 1 der Halterungen in dieser Zufallsstichprobe fehlerhaft ist.

d) Die Masse der Halterungen ist annähernd normalverteilt. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



   1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ ab.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}00001 \cdot x^2 - 0{,}025 \cdot x + 24 + \frac{3\,500}{x}$

a2) $\overline{K}'(x) = 0{,}00002 \cdot x - 0{,}025 - \frac{3\,500}{x^2}$

$\overline{K}'(x) = 0$
$x = 1\,346{,}519...$
$K(1\,346{,}519...) = 11{,}067...$

a3) $\overline{K}''(x) = 0{,}00002 + \frac{7\,000}{x^3}$

$\overline{K}''(1\,346{,}519...) = 0{,}00002... > 0$

Die 2. Ableitung der Stückkosten ist positiv, daher liegt ein Minimum vor.

b1) $G(x) = 20 \cdot x - K(x)$
$G(x) = -0{,}00001 \cdot x^3 + 0{,}025 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3\,500$

b2) $G(x) = 0$

$(x_1 = -289{,}6...)$ $x_2 = 536{,}1....$ $x_3 = 2\,253{,}5...$
Gewinnbereich: [537 Stück; 2 253 Stück]

c1) Binomialverteilung mit $n = 50$ und $p = 0{,}02$
X ... Anzahl der fehlerhaften Halterungen

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 1) = 0{,}7357...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 73,6 %.

d1) $\mu = 300$ g, $\sigma = 10$ g
Ablesetoleranz für σ: [7; 13]

Sektkellerei

Aufgabennummer: B_132

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Sektkellerei erzeugt und vertreibt Sekt unterschiedlicher Marken.

x … Anzahl der produzierten oder verkauften Flaschen pro Tag
$K(x)$ … Gesamtkosten bei x Flaschen pro Tag in Euro (€)

a) Man ermittelt die gesamt anfallenden Produktionskosten in Abhängigkeit von den pro Tag abgefüllten Flaschen der Marke *Dom*.

x	0	100	200	300	400	500	600
$K(x)$	10 000	12 800	14 800	16 000	18 000	19 000	21 600

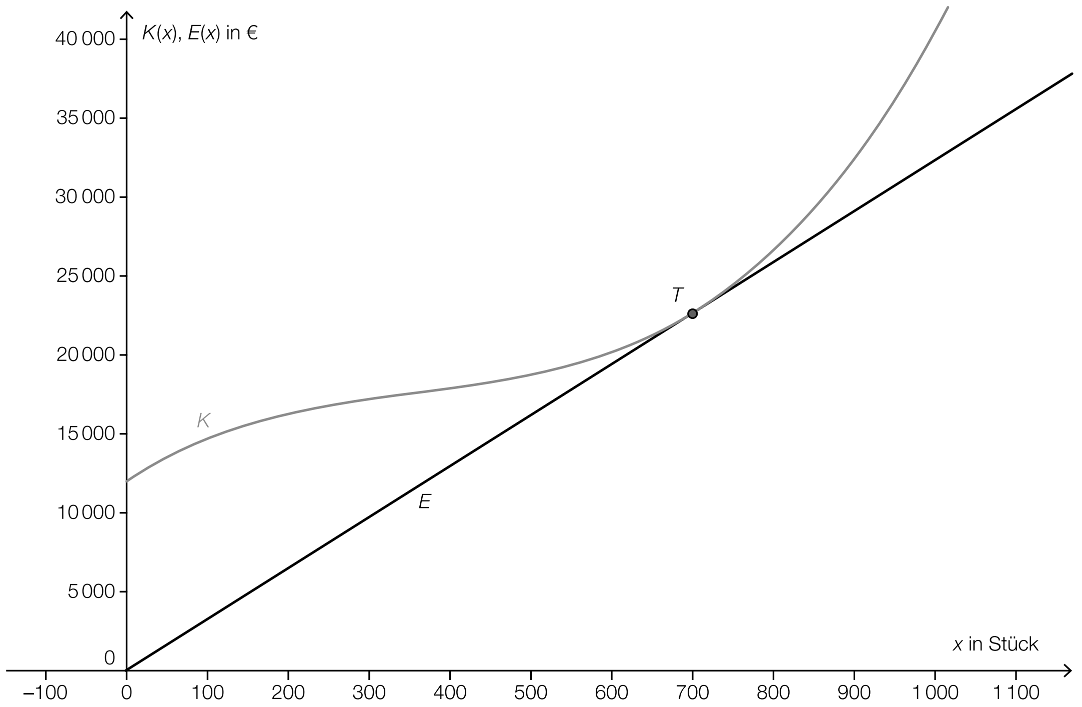
– Bestimmen Sie für diese Gesamtkosten mithilfe von Regression eine passende Polynomfunktion 3. Grades.
– Zeichnen Sie die gegebenen Punkte und den Graphen der Regressionslinie.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung die Kostenkehre berechnen kann.

b) Die Kellerei verkauft täglich die Tagesproduktion der Sektmarke *Gold* zu € 40 pro Flasche. Die Kostenfunktion für diese Marke lautet:

$$K(x) = 7 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}07 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 12\,000$$

– Berechnen Sie, wie viele Flaschen mindestens und wie viele höchstens pro Tag verkauft werden sollen, damit die Kellerei einen Gewinn macht.

c) Interpretieren Sie in der nachstehenden Grafik die Tangente an die Kostenfunktion K als lineare Erlösfunktion E.

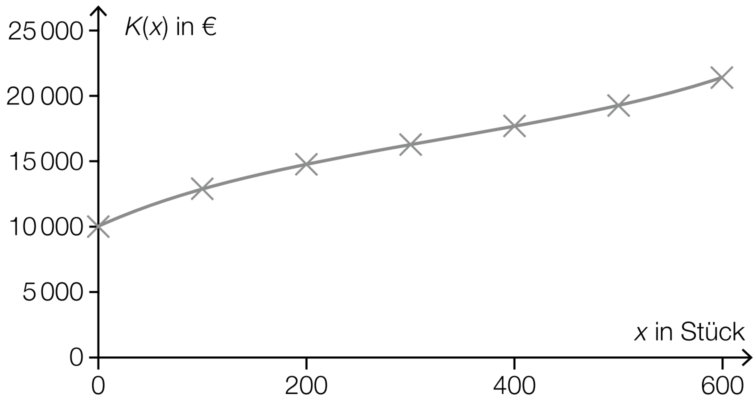


– Lesen Sie den Anstieg der Tangente und die Koordinaten des Berührpunktes T ab.
– Interpretieren Sie die Aussage der Koordinaten von T und des abgelesenen Tangentenanstiegs im Sachzusammenhang.
– Argumentieren Sie, welche Informationen diese Grafik über den möglichen Gewinn enthält.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $K(x) = 0{,}00006 \cdot x^3 - 0{,}0602 \cdot x^2 + 33{,}365 \cdot x + 10\,000$

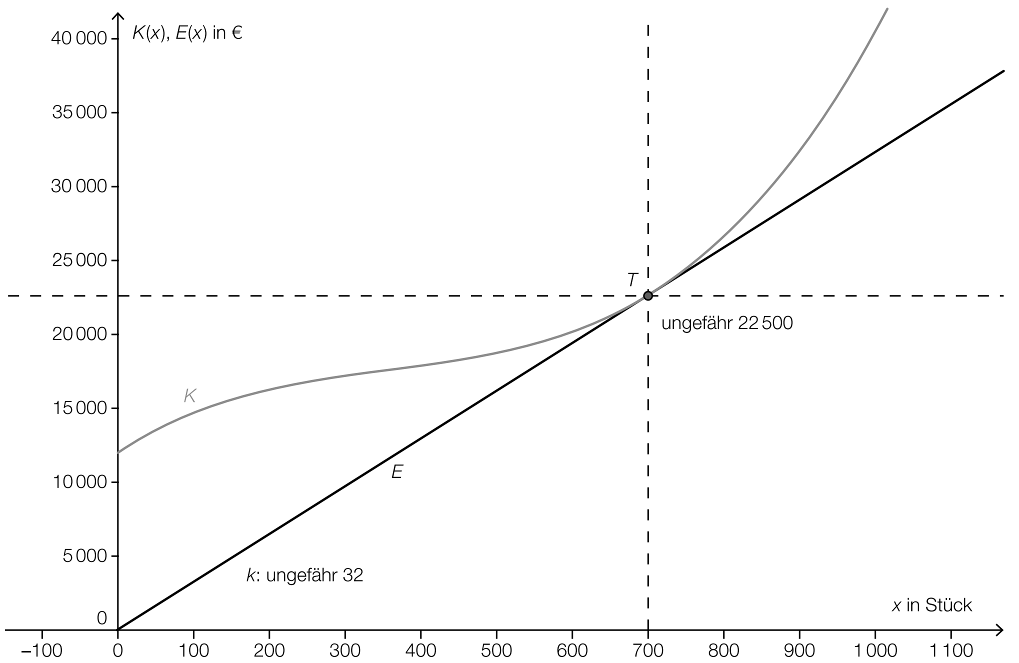


Man berechnet die Kostenkehre, indem man die 2. Ableitung der Kostenfunktion gleich null setzt und die Gleichung nach x auflöst.

b) $p = 40$
$G(x) = 40 \cdot x - (7 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 - 0{,}07 \cdot x^2 + 30 \cdot x + 12\,000)$
$G(x) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 \approx 440{,}35$; $x_2 \approx 963{,}64$
Die Gewinnzone für diesen Sekt liegt zwischen mindestens 441 und höchstens 963 verkauften Flaschen pro Tag.

c) Genau ablesen lässt sich die x-Koordinate von T: 700 Flaschen, die Kosten lassen sich nur ungefähr bestimmen ($\approx 22\,500$). Der Anstieg beträgt ungefähr 32.



Der Tangentenanstieg der Erlösfunktion ergibt den Verkaufspreis pro Flasche,
die Koordinaten von T ergeben das Betriebsoptimum $x_0 = 700$ Flaschen und den Erlös bzw. die Gesamtkosten am Betriebsoptimum von ca. € 22.500.

Aussage: Wenn eine Flasche zu ungefähr € 32 verkauft wird, dann müsste man genau 700 Flaschen verkaufen und nimmt ca. € 22.500 ein. Die Kosten sind bei dieser Verkaufsmenge gleich hoch wie der Erlös, das bedeutet, dass der Betrieb kostendeckend arbeitet. Es wird kein Gewinn erwirtschaftet.
Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) –
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) leicht	b) 2
c) schwer	c) 3

Thema: Wirtschaft

Quellen: –

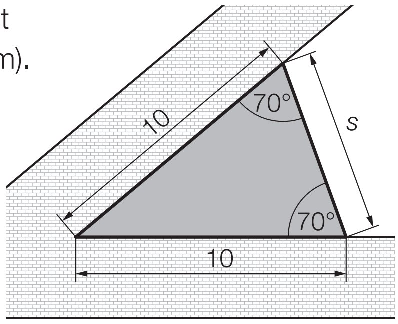
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schlosspark*

Aufgabennummer: B_507

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In einem Schlosspark wird ein dreieckiges Blumenbeet angelegt (siehe nebenstehende Abbildung – Maße in m).



1) Ergänzen Sie den nachstehenden Ausdruck durch Eintragen der richtigen Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen.

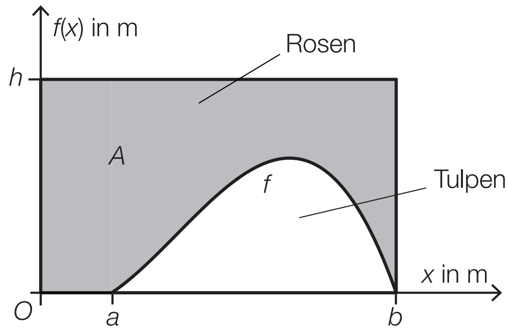
$$s = \sqrt{\boxed{} + \boxed{} - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos\left(\boxed{}\right)}$$

Das Blumenbeet soll mit einem Vlies gegen Unkraut abgedeckt werden. Das Abdecken des Blumenbeets kostet pro Quadratmeter € 1,42.

2) Berechnen Sie die Kosten für das Abdecken des Blumenbeets.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein rechteckiges Blumenbeet mit den Seitenlängen b und h ist in einen Bereich für Rosen und einen Bereich für Tulpen unterteilt. Die Begrenzungslinie zwischen diesen Bereichen kann modellhaft durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

A = ____

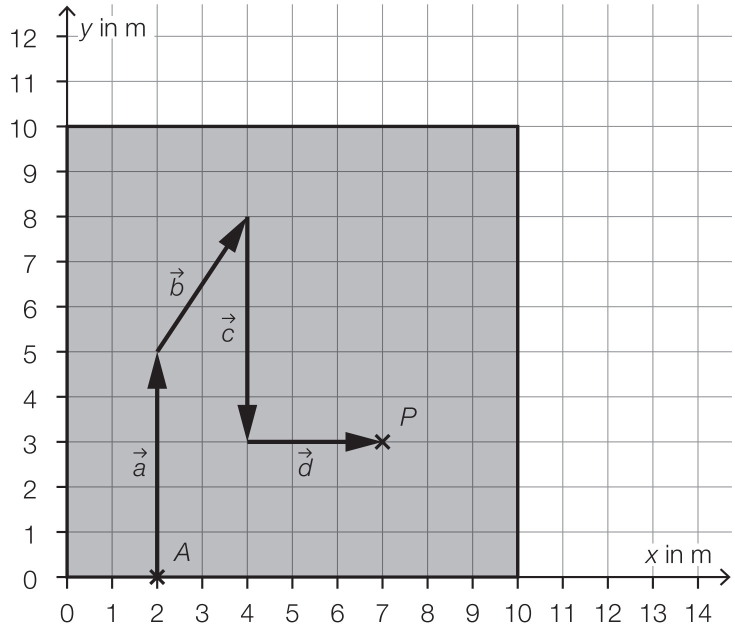
f ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$.
Folgende Punkte liegen auf dem Graphen von f: $(3|0{,}8)$, $(5|2{,}7)$, $(7|3{,}7)$, $(9|2{,}3)$.

2) Berechnen Sie mithilfe dieser Punkte die Koeffizienten a, b, c und d.

c) Im Schlosspark gibt es ein Labyrinth aus Hecken. Der Weg durch das Labyrinth wird durch Aneinanderreihen der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{h}$ (in alphabetischer Reihenfolge) beschrieben. Dabei beginnt jeder Vektor an der Spitze des vorherigen Vektors.

Es gilt: $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Maße in m)

In der nachstehenden Abbildung ist die quadratische Grundfläche des Labyrinths dargestellt. Der Startpunkt A des Weges durch das Labyrinth, die ersten vier Vektoren und der Punkt P sind bereits eingezeichnet.



1) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{b} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

2) Ermitteln Sie die Länge des Weges durch das Labyrinth vom Startpunkt A zum Punkt P.

3) Vervollständigen Sie ausgehend vom Punkt P den Weg durch das Labyrinth durch Einzeichnen der Vektoren $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ und $\vec{h}$.

4) Kreuzen Sie die auf die gegebenen Vektoren nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ sind Gegenvektoren.	☐
Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{g}$ haben den gleichen Betrag.	☐
Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{h}$ sind parallel.	☐
Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ haben den gleichen Betrag.	☐
Die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ stehen normal aufeinander.	☐

d) Im Schlosspark wird Schilf gepflanzt. In den ersten Wochen nach der Pflanzung wird die Höhe einer bestimmten Pflanze notiert.

Zeit t nach der Pflanzung in Wochen	1	2	3	4	5	6
Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm	30	34	39	44	48	52

Die Höhe dieser Pflanze soll in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion h beschrieben werden.

t ... Zeit nach der Pflanzung in Wochen
$h(t)$ ... Höhe der Pflanze zur Zeit t in cm

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion h.
2) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Höhe der Pflanze 20 Wochen nach der Pflanzung.

Möglicher Lösungsweg

a1) $s = \sqrt{\boxed{10^2} + \boxed{10^2} - 2 \cdot 10^2 \cdot \cos(\boxed{40°})}$

Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn im 3. Kästchen das Grad-Zeichen fehlt.

a2) $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \sin(40°) \cdot 1{,}42 = 45{,}637...$

Die Kosten für das Abdecken des Blumenbeets betragen € 45,64.

b1) $A = b \cdot h - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

b2) I: $f(3) = 0{,}8$
II: $f(5) = 2{,}7$
III: $f(7) = 3{,}7$
IV: $f(9) = 2{,}3$

oder:

I: $a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d = 0{,}8$
II: $a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 2{,}7$
III: $a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d = 3{,}7$
IV: $a \cdot 9^3 + b \cdot 9^2 + c \cdot 9 + d = 2{,}3$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{32} = -0{,}03125$

$b = \frac{57}{160} = 0{,}35625$

$c = -\frac{59}{160} = -0{,}36875$

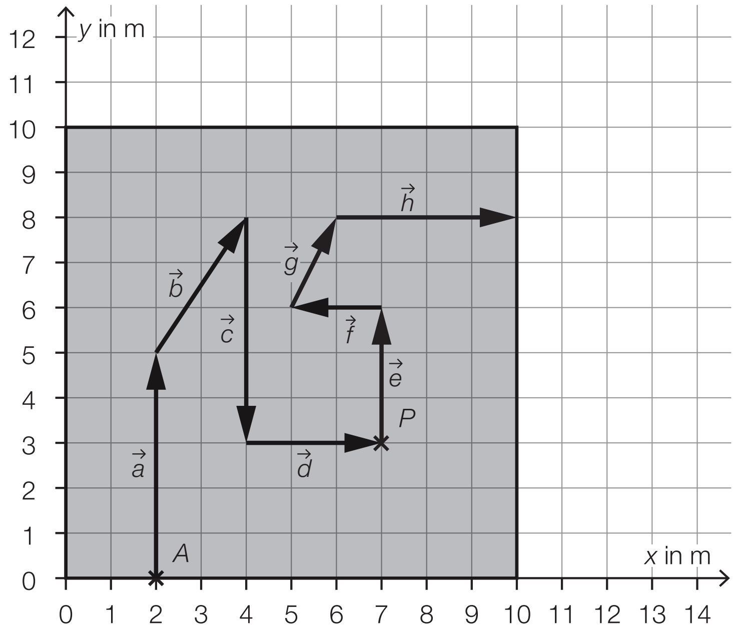
$d = -\frac{73}{160} = -0{,}45625$

c1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{pmatrix}$

c2) $5 + \sqrt{2^2 + 3^2} + 5 + 3 = 16{,}60...$

Die Länge des Weges durch das Labyrinth vom Startpunkt A zum Punkt P beträgt rund 16,6 m.

c3)



c4)

Die Vektoren $\vec{f}$ und $\vec{g}$ haben den gleichen Betrag.	☒

d1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$h(t) = 4{,}49 \cdot t + 25{,}47$ *(Koeffizienten gerundet)*

d2) $h(20) = 115{,}1...$

Die Höhe der Pflanze 20 Wochen nach der Pflanzung beträgt rund 115 cm.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Ergänzen der drei richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Kosten.
b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten a, b, c und d.
c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Länge des Weges.
c3) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Weges.
c4) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
d1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Gleichung der Funktion h.
d2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe der Pflanze.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Kraftstoffverbrauch

Aufgabennummer: B_176

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Kraftstoffverbrauch eines Kraftfahrzeugs ist unter anderem abhängig von der gefahrenen Geschwindigkeit.

v … Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde (km/h)
$K(v)$ … Kraftstoffverbrauch bei einer konstanten Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

a) Die nachstehende Tabelle zeigt den bei einer Testfahrt festgestellten Kraftstoffverbrauch eines LKWs bei verschiedenen Geschwindigkeiten.

v in km/h	30	50	60
$K(v)$ in L/100 km	10	9,4	11,8

Der Kraftstoffverbrauch bei dieser Testfahrt kann in einem Bereich von 30 km/h bis 70 km/h annähernd durch eine quadratische Funktion der Form $K(v) = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$ beschrieben werden.

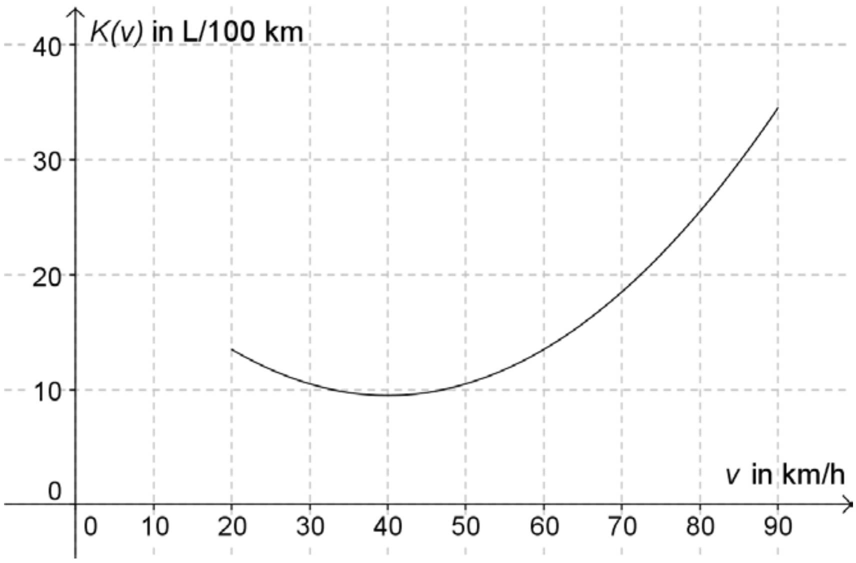
– Stellen Sie ein Gleichungssystem für die Berechnung der Koeffizienten a, b und c auf.
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung $K(v)$.

b) Der Kraftstoffverbrauch eines Kleinlastwagens lässt sich im Intervall [30 km/h; 70 km/h] näherungsweise durch folgende Funktion K beschreiben:

$K(v) = 0{,}005 \cdot v^2 - 0{,}4 \cdot v + 14{,}3$

– Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, bei der der Kraftstoffverbrauch minimal ist.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Kraftstoffverbrauch eines Kleintransporters in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beim Fahren mit gleichbleibendem Gang.



– Veranschaulichen Sie in der Grafik die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h.
– Lesen Sie die momentane Änderungsrate des Kraftstoffverbrauchs bei 60 km/h ab.

d) Bei einem Test eines PKWs ergaben sich für den 4. Gang folgende Verbrauchswerte:

v in km/h	80	90	100	110	120
$K(v)$ in L/100 km	5,1	5,65	6,25	6,9	7,6

Zur Beschreibung des Kraftstoffverbrauchs kann man ab 80 km/h ein Modell verwenden, bei dem der Verbrauch mit zunehmender Geschwindigkeit konstant steigt.

– Argumentieren Sie, welcher Funktionstyp diesem Modell gerecht wird.
– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Funktion mittels Regression.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

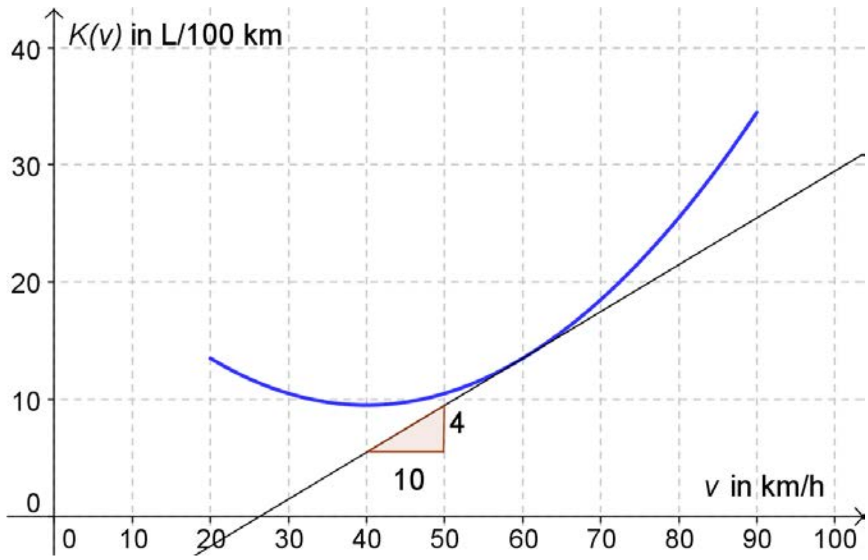
a) $10 = 30^2 \cdot a + 30 \cdot b + c$
$9{,}40 = 50^2 \cdot a + 50 \cdot b + c$
$11{,}8 = 60^2 \cdot a + 60 \cdot b + c$

$K(v) = 0{,}009 \cdot v^2 - 0{,}75 \cdot v + 24{,}4$

b) $K'(v) = 0{,}01 \cdot v - 0{,}4 = 0$
$v = 40$
$K''(v) > 0$

Bei 40 km/h ist der Kraftstoffverbrauch minimal.

c)



Die momentane Änderung des Kraftstoffverbrauchs bei einer Geschwindigkeit von 60 km/h beträgt 0,4 L/100 km pro km/h.

Eine angemessene Ungenauigkeit wird toleriert.

d) Der passende Funktionstyp ist eine lineare Funktion, da die Steigung konstant ist.

Berechnung eines linearen Modells mittels Technologieeinsatz:

$K(v) = 0{,}0625 \cdot v + 0{,}05$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —
d) 5 Stochastik

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

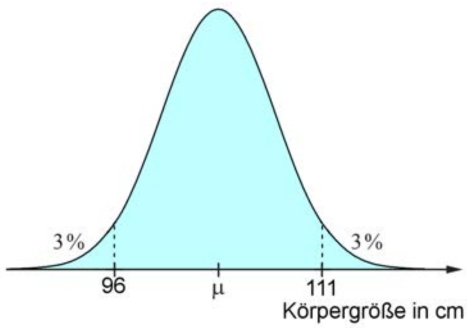
Körpergröße von Kindergartenkindern

Aufgabennummer: B_235

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

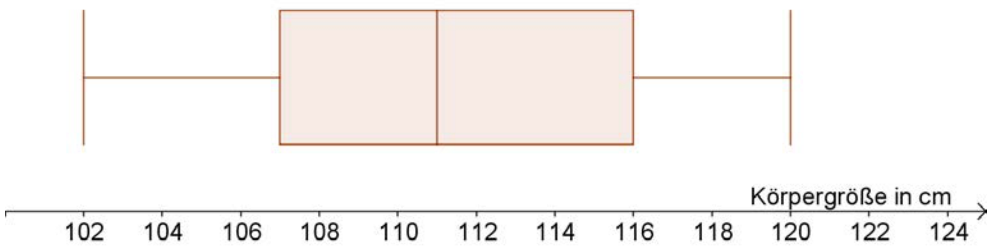
Bei den Vorsorgeuntersuchungen von Kindern wird auch die Körpergröße überprüft, um bei Auffälligkeiten rechtzeitig Therapiemaßnahmen setzen zu können.

a) Die nebenstehende Glockenkurve nach Gauß schematisiert die Größenverteilung von 4-jährigen Kindern.
Die 3 % am oberen und am unteren Ende weisen auf die auffällig großen bzw. die auffällig kleinen Kinder hin.



– Interpretieren Sie die Kurve in Bezug auf die Verteilung der Körpergröße von 4-jährigen Kindern und den Erwartungswert μ.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ.

b) Als Ergebnis der Messung der Körpergröße von 5-jährigen Kindern wurde folgender Boxplot erstellt:



– Interpretieren Sie das Diagramm im Hinblick auf die Bedeutung der 5 Kennzahlen Minimum, Maximum, Median, 1. und 3. Quartil.

c) Die gemessenen Körpergrößen der 4-jährigen Buben haben folgende Kennzahlen geliefert:

Minimum (Min):	96 cm
Maximum (Max):	112 cm
Median (Med):	103 cm
1. Quartil (Q_1):	100,5 cm
3. Quartil (Q_3):	108 cm

– Erstellen Sie mit diesen Kennzahlen einen Boxplot.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 3 % der 4-jährigen Kinder sind kleiner als 96 cm.
3 % der Kinder sind größer als 111 cm.
94 % der Kinder sind zwischen 96 cm und 111 cm groß.
Der Erwartungswert μ der Körpergröße bei 4-Jährigen liegt bei 103,5 cm,
Ermittlung von σ mittels Technologieeinsatz, z. B. durch Ablesen aus der Wertetabelle der Funktion „normalcdf":
$\sigma = 3{,}987\ldots$
$\sigma \approx 3{,}99$ cm

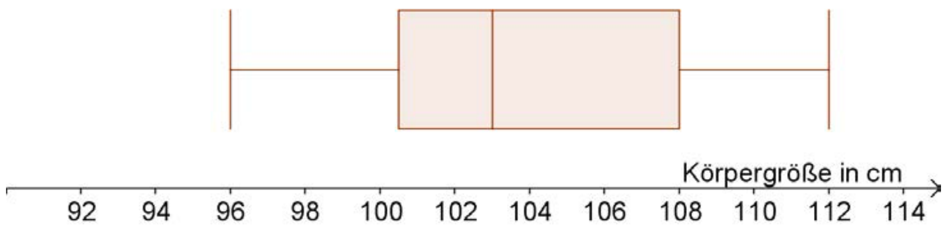
b) Der Median m liegt in der Mitte einer geordneten Liste. Mindestens 50 % der Messwerte sind $\leq m$, mindestens 50 % sind $\geq m$. Die Quartile teilen die geordnete Liste in 4 Teile.

Aus dem Diagramm kann man die folgenden Größen ablesen:

Die Körpergrößen der 5-jährigen Kinder liegen zwischen 102 und 120 cm.
Der Median legt bei 111 cm, das 1. Quartil bei 107 cm und das 3. Quartil bei 116 cm.

Der Unterschied zwischen Minimum und 1. Quartil beträgt 5 cm, zwischen 1. Quartil und Median 4 cm, zwischen Median und 3. Quartil 5 cm, zwischen 3. Quartil und Maximum 4 cm.

c)



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 1

Thema: Alltag

Quelle: Statistische Kennzahlen: Forschungsinstitut für Kinderernährung, Dortmund

Puzzle

Aufgabennummer: B_034

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Eine Puzzle-Spielmatte für Kleinkinder besteht aus 47 Einzelteilen in vier verschiedenen Farben. Die nachstehende Tabelle zeigt die Anzahl der Teile mit den jeweiligen Farben.

Farbe	Gelb	Blau	Rot	Grün
Anzahl	11	9	12	15

– Stellen Sie die prozentuellen Häufigkeiten der Farben in einem Kreisdiagramm dar.

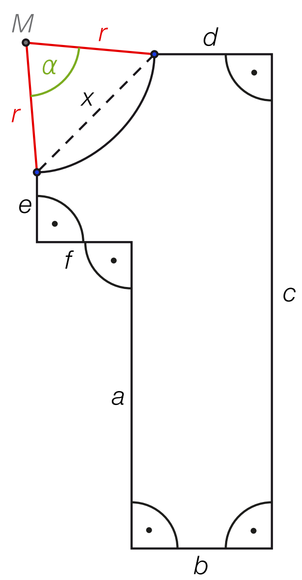
Ein Kind zieht zufällig und ohne Zurücklegen 2 Puzzleteile aus einer Kiste.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese beiden Puzzleteile dieselbe Farbe haben.
– Interpretieren Sie, welche Wahrscheinlichkeit mit der nachstehenden Formel berechnet wird.

$$P(X) = 1 - \frac{9}{47} \cdot \frac{8}{46} \cdot \frac{7}{45}$$

b) Bei einem Puzzleteil wird die Ziffer 1 wie abgebildet dargestellt.

a = 13 cm
b = 6 cm
c = 21 cm
d = 5 cm
e = 3 cm
f = 4 cm
r = 5,5 cm



– Berechnen Sie den Winkel α.
– Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ziffer 1 vom Puzzleteil.

c) In einem Betrieb werden Puzzlematten hergestellt.
Mit zunehmendem Verkaufspreis werden weniger Mengeneinheiten verkauft.
Aufgrund von Marktbeobachtungen ergibt sich folgende Preisfunktion der Nachfrage:

$$p(x) = -\frac{3}{100}x + 110$$

x ... monatlich nachgefragte Mengeneinheiten (ME)
$p(x)$ ... Preis in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) bei der Nachfrage von x ME

– Bestimmen Sie die monatlich nachgefragten Mengeneinheiten bei einem Preis von 25,50 GE/ME.

d) Die Herstellungskosten für eine Mengeneinheit Puzzlematten können mit € 1,50 veranschlagt werden. Dazu kommen monatliche Fixkosten von € 4.000.

– Ordnen Sie die gegebenen Funktionen zu. *[2 zu 4]*

Gesamtkostenfunktion $K(x) = ...$	
Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$	

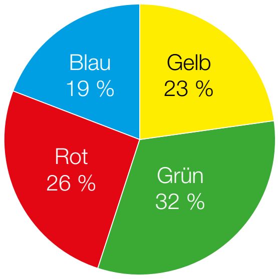
A	$1{,}5 + \frac{4000}{x}$
B	$\frac{1{,}5}{x} + 4000$
C	$1{,}5 + 4000 \cdot x$
D	$1{,}50 \cdot x + 4000$

– Erklären Sie den Unterschied zwischen Stückkostenfunktion und Grenzkostenfunktion im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$P = \frac{11}{47} \cdot \frac{10}{46} + \frac{9}{47} \cdot \frac{8}{46} + \frac{12}{47} \cdot \frac{11}{46} + \frac{15}{47} \cdot \frac{14}{46} = \frac{11 \cdot 10 + 9 \cdot 8 + 12 \cdot 11 + 15 \cdot 14}{47 \cdot 46} = 0{,}2423\ldots \approx 24\,\%$$

Die Formel gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei 3-maligem Ziehen höchstens zwei blaue Puzzleteile zu erhalten.
(Auch andere richtige Formulierungen sind möglich.)

b) $x = \sqrt{(b + f - d)^2 + (c - a - e)^2} = \sqrt{50}$

$\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2r}\right) = 80{,}00$

$\alpha \approx 80°$

$$A = a \cdot b + e \cdot (b + f) + d \cdot (c - a - e) + \frac{(c - a - e) \cdot (b + f - d)}{2} + \frac{r^2 \cdot \sin(\alpha)}{2} - \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

$A \approx 139{,}3\text{ cm}^2$

c) $x = \frac{11\,000}{3} - \frac{100 \cdot p}{3}$

$x(25{,}50) = 2\,816{,}6\ldots \approx 2\,817$

Es werden monatlich beim angegebenen Preis ungefähr 2 817 Mengeneinheiten Matten nachgefragt.

d)

Gesamtkostenfunktion $K(x) = \ldots$	D
Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$	A

A	$1{,}5 + \frac{4\,000}{x}$
B	$\frac{1{,}5}{x} + 4\,000$
C	$1{,}5 + 4\,000 \cdot x$
D	$1{,}50 \cdot x + 4\,000$

Aus der Grenzkostenfunktion kann man die lokale Änderungsrate (in GE pro Stück) der Kosten bei einer bestimmten Stückzahl produzierter Matten ablesen.
Aus der Stückkostenfunktion kann man die durchschnittlichen Kosten pro Mengeneinheit Matten bei einer bestimmten produzierten Stückzahl ablesen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) —
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 1
d) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

Thermistor*

Aufgabennummer: B_050

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

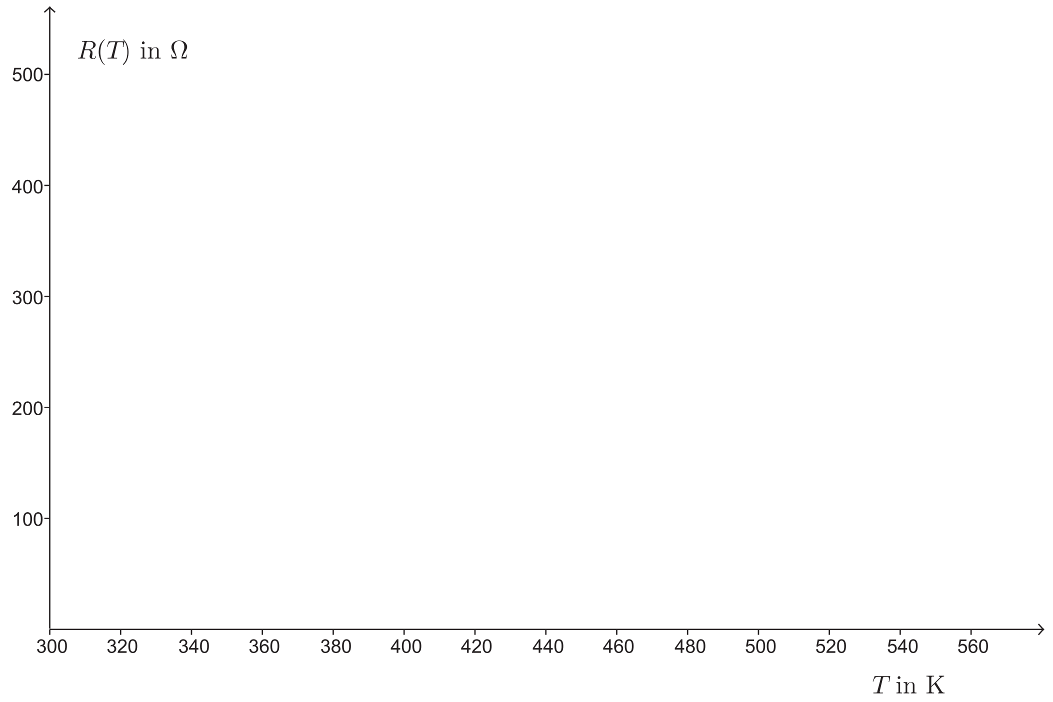
Ein *Thermistor* oder *Heißleiter* ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand mit zunehmender Temperatur T abnimmt. Die Funktion R beschreibt diesen Zusammenhang:

$$R(T) = a \cdot e^{\frac{b}{T}}$$

T ... Temperatur in Kelvin (K)
$R(T)$ ... elektrischer Widerstand bei der Temperatur T in Ohm (Ω)
a ... Konstante in Ω ($a > 0$)
b ... Konstante in K ($b > 0$)

a) – Begründen Sie mathematisch, warum die Funktion R monoton fallend ist.

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion R im Bereich 300 K ≤ T ≤ 550 K für a = 0,1 Ω und b = 2 500 K im nachstehenden Koordinatensystem.



b) Verwenden Sie a = 0,1 Ω und b = 2 500 K.

– Linearisieren Sie die Funktion R an der Stelle T_0 = 373,15 K, d. h., bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von R im Punkt $(T_0|R(T_0))$.
– Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn man an der Stelle T = 390 K den Widerstand mit der linearisierten Funktion anstatt mit der Funktion R berechnet.

* ehemalige Klausuraufgabe

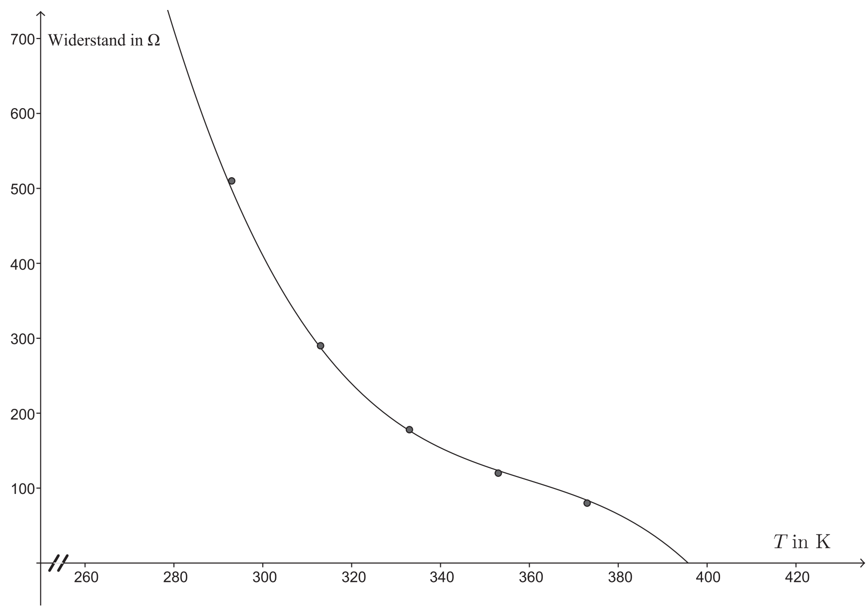
c) Für einen bestimmten Heißleiter wurden folgende Werte gemessen:

T in K	R in Ω
293	510
313	290
333	178
353	120
373	80

Zur weiteren Auswertung wird eine Polynomfunktion 3. Grades als Ausgleichsfunktion verwendet.

– Ermitteln Sie diese Ausgleichsfunktion.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zu ermittelnden Ausgleichsfunktion P bereits eingezeichnet.

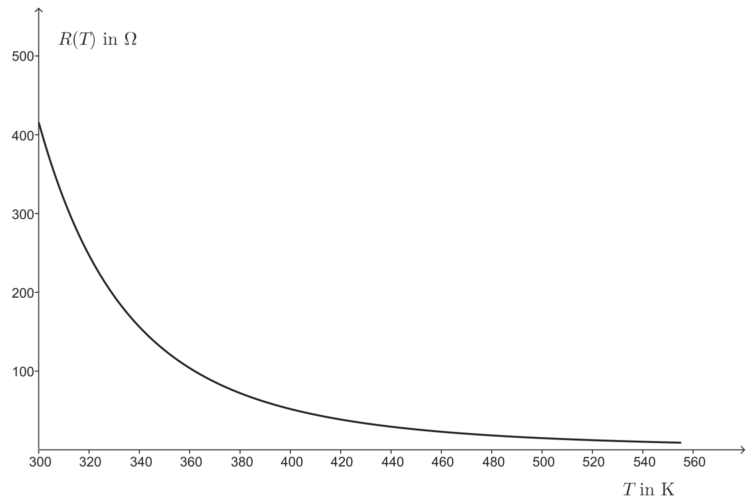


– Erklären Sie ausgehend von der obigen Abbildung, warum die 1. Ableitung dieser Polynomfunktion 3. Grades keine reellen Nullstellen hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Begründung für die Monotonie:
Für größer werdendes T (und $b > 0$) wird die Hochzahl $\frac{b}{T}$ immer kleiner und damit (wegen $a > 0$) auch $a \cdot e^{\frac{b}{T}}$.



b) $g(T) = k \cdot T + d$

$R'(T) = -a \cdot b \cdot \frac{1}{T^2} \cdot e^{\frac{b}{T}}$

Steigung: $k = R'(373{,}15)$ ergibt $k = -1{,}458... \approx -1{,}46$.

Achsenabschnitt: $d = R(373{,}15) - k \cdot 373{,}15$ ergibt $d = 625{,}353... \approx 625{,}35$.

Betrag des relativen Fehlers an der Stelle $T = 390$ K: $\left|\frac{R(390) - g(390)}{R(390)}\right| \approx 6{,}8\ \%$

c) Ermitteln der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$P(T) = -9{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 + T^2 - 365 \cdot T + 4{,}4 \cdot 10^4$

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Da in der Abbildung der Wendepunkt erkennbar ist, ist diese Polynomfunktion 3. Grades streng monoton fallend und es liegen somit keine Stellen mit horizontaler Tangentensteigung vor. Daher hat die 1. Ableitung von P keine reellen Nullstellen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung zur Monotonie (Verweis auf die Grafik ist nicht ausreichend)
   1 × B: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen im angegebenen Intervall

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Linearisierung der Funktion R
   1 × B1: für die richtige Berechnung der Tangente
   1 × B2: für die richtige Ermittlung des Betrags des relativen Fehlers

c) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Ausgleichsfunktion
   1 × D: für die richtige Erklärung ausgehend von der Abbildung

Skylab (1)

Aufgabennummer: B_063

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der US-amerikanischen Weltraumstation *Skylab* wurde in den 1970er-Jahren eine Reihe von naturwissenschaftlichen Experimenten durchgeführt.

Im Weltraum ist ein Objekt schwerelos, seine Masse bleibt aber unverändert. Die Masse kann im Weltraumlabor mithilfe einer frei aufgehängten Feder bestimmt werden. Hängt man ein Objekt an die Feder, so hängt die Schwingungsfrequenz des Federpendels von der Masse ab.

$T = \frac{1}{f}$ $\qquad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$

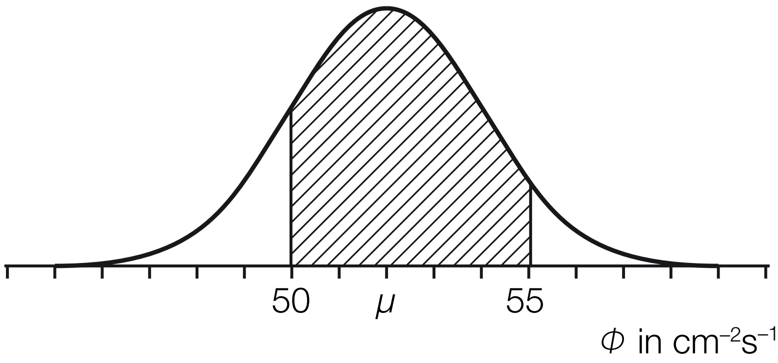
T … Schwingungsdauer in Sekunden (s)
f … Frequenz in Hertz (Sekunden^{-1} (s^{-1}))
m … Pendelmasse in Kilogramm (kg)
k … Federkonstante in Newton pro Meter (N/m)

a) – Stellen Sie die Abhängigkeit der Masse m von der Frequenz f im Intervall [0,4; 3,4] jeweils für die Federkonstanten k_1 = 600 N/m und k_2 = 300 N/m in einem Koordinatensystem dar.
– Beschreiben Sie die Eigenschaften der Potenzfunktionen.
– Interpretieren Sie den Einfluss der Federkonstanten k auf die Schwingungsfrequenz f unter der Voraussetzung, dass m konstant bleibt.

b) In der Weltraumstation *Skylab* wurde unter anderem auch die Masse eines Astronauten bestimmt.
Die Frequenz der Feder mit angehängter Masse m_1, aber ohne Astronaut betrug f_1. Die Frequenz der Feder, an die zusätzlich zur Masse m_1 der Astronaut gehängt wurde, betrug f_2.

– Dokumentieren Sie in Worten, wie man mithilfe der oben angegebenen physikalischen Zusammenhänge ausgehend von den gemessenen Frequenzen f_1 und f_2 eine Formel für die Masse des Astronauten ermitteln kann.

c) In einem Experiment zur Teilchenphysik wurde die Neutronenflussdichte ϕ in der Weltraumstation mithilfe von mehreren Neutronendetektoren gemessen.
Man kann davon ausgehen, dass die Neutronenflussdichte in der Raumstation normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 52$ cm^{-2}s^{-1} und $\sigma = 3$ cm^{-2}s^{-1}.
(Die Neutronenflussdichte ϕ ist die Anzahl der pro Zeiteinheit t durch eine Flächeneinheit hindurchtretenden Neutronen. Ihre übliche Maßeinheit ist Neutronen pro Quadratzentimeter und Sekunde (cm^{-2}s^{-1}).)



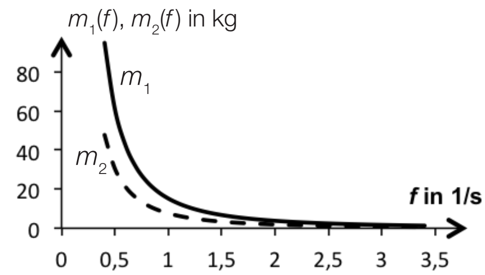
– Interpretieren Sie die in der obigen Gauß'schen Glockenkurve schraffierte Fläche, indem Sie das zugehörige Ereignis in Worten beschreiben.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $k_1 = 600$ N/m: $m_1(f) = \dfrac{150}{\pi^2 f^2}$

$k_2 = 300$ N/m: $m_2(f) = \dfrac{75}{\pi^2 f^2}$



Es handelt sich um Potenzfunktionen mit geraden, negativen Exponenten. Ihre Graphen sind Hyperbeln.

Bei gleicher Masse ist die Schwingungsfrequenz f bei kleinerer Federkonstante geringer.

b) Ausgehend von der Formel $\frac{1}{f} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ stellt man die Formeln für die Massen m_1 und m_2 auf:

Masse ohne Astronaut: $m_1 = k \cdot \left(\dfrac{1}{2\pi \cdot f_1}\right)^2$

Masse mit Astronaut: $m_2 = k \cdot \left(\dfrac{1}{2\pi \cdot f_2}\right)^2$

Aus der Differenz lässt sich die Formel für die Astronautenmasse berechnen:

$m = m_2 - m_1 = \dfrac{k}{4\pi^2} \cdot \left(\dfrac{1}{f_2^{\,2}} - \dfrac{1}{f_1^{\,2}}\right)$

c) Es handelt sich um das Ereignis, dass die an einem zufälligen Ort gemessene Neutronendichte in der Raumstation zwischen 50 $cm^{-2}s^{-1}$ und 55 $cm^{-2}s^{-1}$ liegt.

$P(50 < X < 55) = \phi(55) - \phi(50) = 0{,}8413\ldots - 0{,}2524\ldots = 0{,}5888\ldots \approx 58{,}9\ \%$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 4
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Physik

Quelle: http://history.nasa.gov/SP-401/sp401.htm

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Schadstoffausbreitung*

Aufgabennummer: B_048

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m³). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.

a) Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m³	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$.
– Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Schadstoffkonzentration wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung σ = 8,5 mg/m³ beträgt.

b) Die Verteilung der Schadstoffkonzentration kann sowohl mithilfe der Dichtefunktion als auch mithilfe der Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der Dichtefunktion dargestellt.

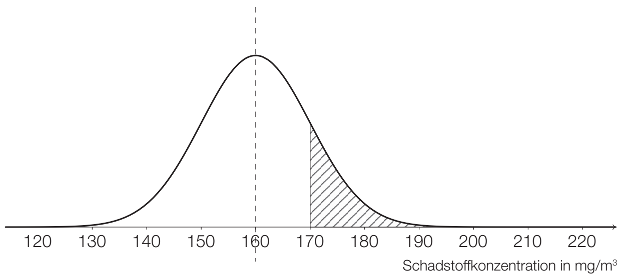


Abbildung 1

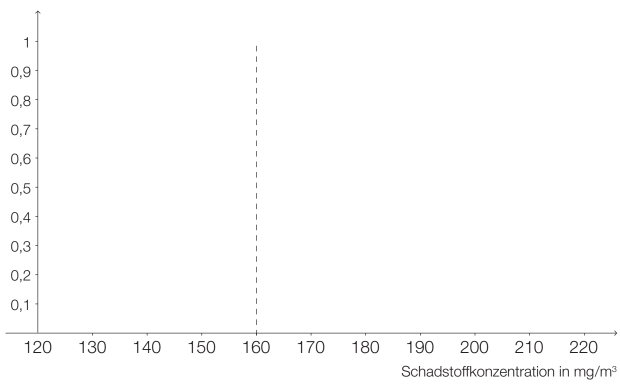


Abbildung 2

– Zeichnen Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in Abbildung 2 ein.
– Veranschaulichen Sie die in Abbildung 1 schraffiert dargestellte Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2.
– Erklären Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen diesen beiden Funktionen.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Die Fabriksleitung geht vom Erwartungswert μ = 160 mg/m³ und von der Standardabweichung σ = 10 mg/m³ aus.

– Ermitteln Sie den symmetrisch um μ gelegenen Bereich, in den erwartungsgemäß 99 % aller Messwerte fallen (99-%-Zufallsstreubereich).
– Geben Sie an, wie sich die Breite dieses Zufallsstreubereichs verändert, wenn anstelle von 99 % nur noch 95 % aller Messwerte in diesen Bereich fallen sollen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 158{,}5\ \text{mg/m}^3$

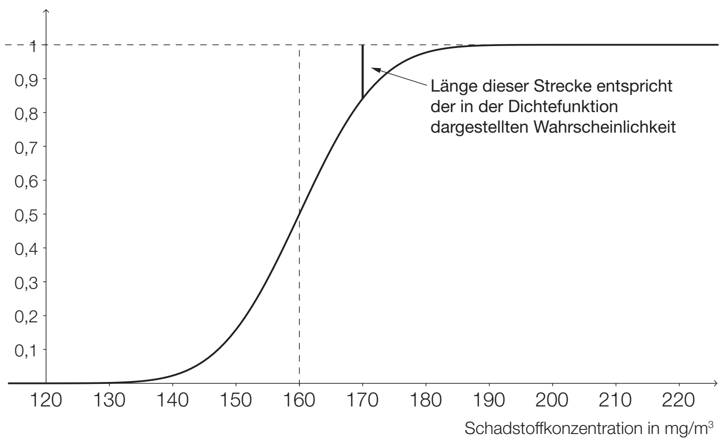
Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$n = 10$
$\alpha = 5\ \%$
$u_{0{,}975} = 1{,}959...$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall in mg/m³: $153{,}2 \leq \mu \leq 163{,}8$.

b)



Der Wert der Verteilungsfunktion an einer Stelle x ist das Integral der Dichtefunktion von $-\infty$ bis x.
Oder umgekehrt: Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion.

c) 99-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\mu \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$
$\alpha = 1\ \%$
$u_{0{,}995} = 2{,}575...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mg/m³: [134,2; 185,8].

Der 95-%-Zufallsstreubereich ist schmäler als der entsprechende 99-%-Zufallsstreubereich.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Stichprobenmittelwerts $\bar{x}$
1 × B2: für die richtige Ermittlung des Konfidenzintervalls

b) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Verteilungsfunktion (eine qualitative Beschriftung der Ordinatenachse ist nicht notwendig)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2
1 × D: für das richtige Erklären des mathematischen Zusammenhangs zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion

c) 1 × B: für die richtige Ermittlung des Zufallsstreubereichs
1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung der Breite des Zufallsstreubereichs

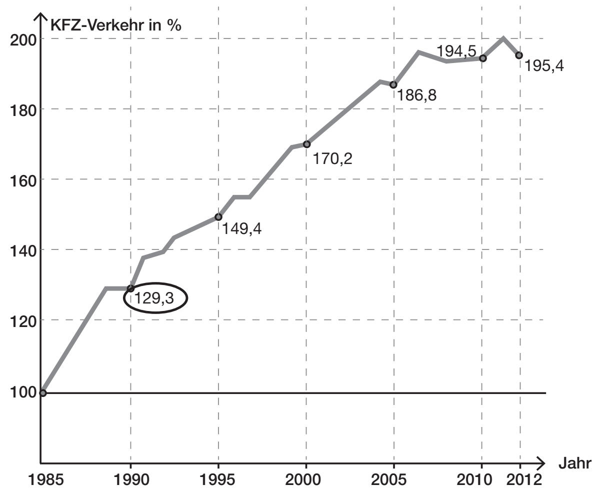
Straßenverkehr in Tirol (2)*

Aufgabennummer: B_277

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Verkehrsaufkommen wird seit vielen Jahren statistisch erfasst.

a) Die nachstehende Grafik zeigt die Entwicklung des KFZ-Verkehrs von 1985 bis 2012 in Tirol.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der in der Grafik markierten Zahl 129,3 in diesem Sachzusammenhang.

– Erstellen Sie basierend auf den Daten der Grafik eine quadratische Regressionsfunktion. Wählen Sie dabei für das Jahr 1985 den Zeitpunkt $t = 0$.
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den KFZ-Verkehr im Jahr 2013.

b) Die Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn kann für den Zeitraum 2000 bis 2007 durch die lineare Regressionsfunktion f beschrieben werden:

$f(t) = 617 \cdot t + 28\,017$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2000
$f(t)$ ... Anzahl der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten zur Zeit t

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Koeffizienten 617 in diesem Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Auf einer österreichischen Transitroute wurden im Jahr 2003 insgesamt 1 700 000 Fahrten gezählt. Im Jahr 2011 waren es bereits 2 006 000 Fahrten.

– Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Anzahl der Fahrten auf dieser Route mit einer Exponentialfunktion der Form $y(t) = a \cdot b^t$ beschreibt.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2003
$y(t)$ ... Zahl der jährlichen Fahrten zur Zeit t

– Erklären Sie den Unterschied zwischen exponentiellem und linearem Wachstum.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) 129,3 bedeutet, dass der Verkehr im Jahr 1990 gegenüber dem Jahr 1985 um 29,3 % zugenommen hat.

quadratische Regression: $r(t) = -0{,}09 \cdot t^2 + 6{,}11 \cdot t + 99{,}93$
2013 entspricht $t = 28$: $r(28) = 197{,}50... \approx 197{,}5$.

Die Regressionsfunktion prognostiziert ein KFZ-Verkehrsaufkommen von rund 197,5 % bezogen auf das KFZ-Verkehrsaufkommen im Jahr 1985.

b) 617 entspricht der jährlichen Zunahme der durchschnittlichen täglichen KFZ-Fahrten auf der Brennerautobahn.

c) $a = 1\,700\,000$

$$b = \sqrt[8]{\frac{2\,006\,000}{1\,700\,000}} = 1{,}0209... \approx 1{,}021$$

$y(t) = 1\,700\,000 \cdot 1{,}021^t$

Bei einem linearen Modell ist die absolute Änderung pro Zeiteinheit konstant. Bei einem exponentiellen Modell ändert sich die Größe in jeweils gleichen Zeitschritten immer um denselben Faktor.

Lösungsschlüssel

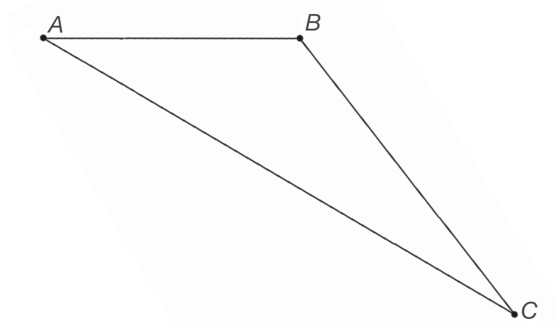
a) 1 × C: für die richtige Interpretation der markierten Zahl
1 × A: für das richtige Erstellen der Regressionsfunktion
1 × B: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Jahr 2013
b) 1 × C: für die richtige Interpretation des Koeffizienten)
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × D: für die richtige Erklärung

Rohrleitungen (2)*

Aufgabennummer: B_083

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

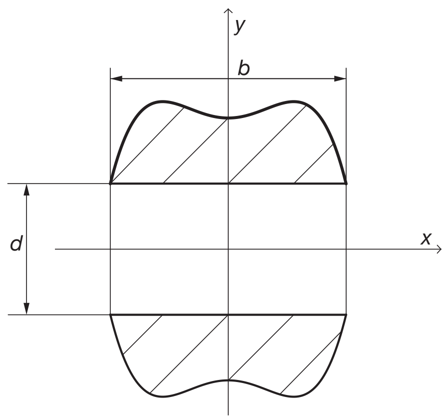
a) Rohre sollen, wie in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt, zwischen den Punkten A, B und C im Raum verlegt werden.



Zur Berechnung eines Winkels wird die folgende Formel verwendet: $\cos(\phi) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$

– Zeichnen Sie in der obigen Skizze den mit dieser Formel berechneten Winkel ϕ mit dem Eckpunkt B als Scheitel ein.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks ABC mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.

b) Ein Verbindungsstück für 2 Rohre soll untersucht werden.
Das Verbindungsstück ist rotationssymmetrisch bezüglich der x-Achse. Die obere Begrenzungskurve der Schnittfläche, die in der nachstehenden Grafik schraffiert dargestellt ist, wird durch die Funktionsgleichung $y = 2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$ beschrieben, wobei x und y Längen in Dezimetern beschreiben. Der innere Durchmesser des Verbindungsstückes ist $d = 2$ dm.



– Berechnen Sie die Breite b des Verbindungsstückes.
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens des Verbindungsstückes mithilfe der Integralrechnung.

Das Verbindungsstück ist aus einem Material mit der Dichte $\rho = 900$ kg/m³ gefertigt.

– Berechnen Sie die Masse des Verbindungsstückes.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In einem Rohr nimmt der Druck durch die Reibung ab. Er wird also mit zunehmender Entfernung vom Rohranfang geringer.
Entsprechend dem Gesetz von Hagen-Poiseuille kann der Druck in einem Rohr in Abhängigkeit von der Rohrlänge x durch eine lineare Funktion p beschrieben werden.

– Zeigen Sie, dass der Druckverlust Δp proportional zur Rohrlänge ist; d.h., für alle x ist $\Delta p(x) = p(0) - p(x) = c \cdot x$ mit c konstant.

Der Druck in einem Rohr wird an 2 Stellen gemessen. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

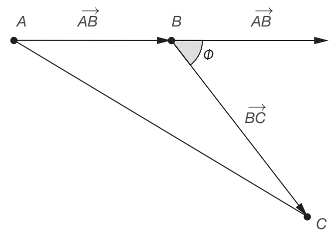
Rohrlänge in m	Druck in bar
5	3,998
33	3,901

– Bestimmen Sie mithilfe der linearen Interpolation den Druck bei einer Rohrlänge von 14 m.
– Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Steigung der linearen Funktion p in diesem Sachzusammenhang hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Fläche = $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

b) Berechnung der Breite b durch Lösen der Gleichung $2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} = 1$ mittels Technologieeinsatz: $x = \pm\, 1{,}79...$

Die Breite des Verbindungsstückes beträgt rund 3,6 dm.

Formel zur Berechnung des Volumens:
$V = \pi \cdot \int_{-1{,}8}^{1{,}8} y^2 \mathrm{d}x - 1^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 1{,}8$

Berechnen der Masse: $m = \rho \cdot V = 0{,}9 \cdot 35{,}4... \Rightarrow m \approx 31{,}9$ kg

c) Mit $p(x) = k \cdot x + d$ erhält man $\Delta p(x) = p(0) - p(x) = d - (k \cdot x + d) = -k \cdot x$. Also: $c = -k$.

Aus den beiden Messwerten ergibt sich die lineare Funktion p mit $p(x) = -0{,}003464 \cdot x + 4{,}015$.
$p(14) \approx 3{,}967$
Bei einer Rohrlänge von 14 m ergibt sich mithilfe der linearen Interpolation ein Druck von rund 3,967 bar.

Die Steigung gibt den Druckabfall in Bar pro Meter an.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des (mit der Formel berechneten) Winkels in der Skizze
1 × A2: für das richtige Erstellen einer Formel mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ zur Bestimmung des Flächeninhalts

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite des Verbindungsstückes
1 × A: für das richtige Erstellen einer Formel zur Berechnung des Volumens
1 × B2: für die richtige Berechnung der Masse

c) 1 × D: für den richtigen Nachweis der direkten Proportionalität
1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Interpolationswertes
1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Steigung in diesem Sachzusammenhang

Olympische Sommerspiele 2008 in Peking*

Aufgabennummer: B_508		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking siegte Usain Bolt im Finale des 100-Meter-Laufes der Männer. Die Silbermedaille ging an Richard Thompson.

Die jeweilige Geschwindigkeit der beiden Läufer bei diesem Lauf kann durch die nachstehenden Funktionen modellhaft beschrieben werden.

$v_B(t) = 12{,}151 \cdot (1 - e^{-0{,}684 \cdot t})$
$v_T(t) = 12{,}15 \cdot (1 - e^{-0{,}601 \cdot t})$

t ... Zeit ab dem Start in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit von Usain Bolt zur Zeit t in m/s
$v_T(t)$ ... Geschwindigkeit von Richard Thompson zur Zeit t in m/s

1) Berechnen Sie die Beschleunigung von Usain Bolt 1 s nach dem Start.
2) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

$$\frac{1}{8-5} \cdot \int_5^8 v_B(t)\,\mathrm{d}t$$

Usain Bolt überquerte die Ziellinie 9,69 s nach dem Start.

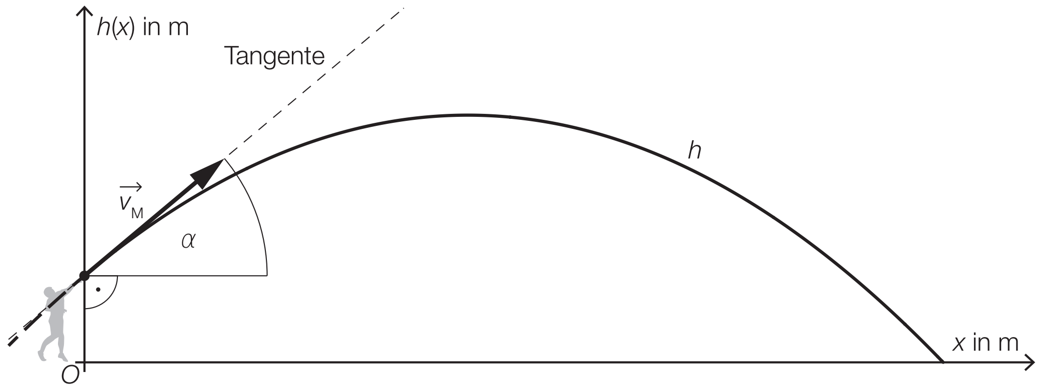
3) Ermitteln Sie, wie weit Richard Thompson von der Ziellinie entfernt war, als Usain Bolt diese überquerte.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking siegte Tomasz Majewski im Kugelstoß-Finale der Männer. Die Flugbahn der Kugel kann modellhaft durch den Graphen der Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

x, $h(x)$ ... Koordinaten der Flugbahn in m

An der Stelle $x = 0$ kann die Geschwindigkeit der Kugel durch den Geschwindigkeitsvektor $\overrightarrow{v_M}$ beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Tragen Sie die fehlenden Ausdrücke in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Verwenden Sie dabei den Winkel α.

$$\overrightarrow{v_M} = \left|\overrightarrow{v_M}\right| \cdot \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

2) Weisen Sie nach, dass gilt: $\tan(\alpha) = b$

c) Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking siegte Tirunesh Dibaba im Finale des 10 000-Meter-Laufes der Frauen. In der nachstehenden Tabelle sind einige Distanzen und die zugehörigen Zwischenzeiten für die erste Hälfte des Laufes angegeben.

Distanz in m	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000
Zeit in s	180,5	360,2	543,8	726,6	910,0

Datenquelle: https://sportsscientists.com/2008/08/beijng-2008-10000-m-women/ [15.12.2020].

Die Zeit soll in Abhängigkeit von der Distanz durch eine lineare Regressionsfunktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung dieser linearen Funktion.

Tirunesh Dibaba benötigte für diesen 10 000-Meter-Lauf insgesamt 29 min 54,66 s.

2) Berechnen Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn zur Berechnung der Laufzeit von Tirunesh Dibaba die ermittelte Regressionsfunktion verwendet wird.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$v_B'(1) = 4{,}193...$

Die Beschleunigung von Usain Bolt 1 s nach dem Start betrug rund 4,19 m/s^2.

a2) Es wird die mittlere Geschwindigkeit (in m/s) von Usain Bolt im Zeitintervall [5; 8] berechnet.

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$100 - \int_0^{9{,}69} v_T(t)\,\mathrm{d}t = 2{,}423...$

Richard Thompson war rund 2,42 m von der Ziellinie entfernt, als Usain Bolt diese überquerte.

b1) $\vec{v}_M = |\vec{v}_M| \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\cos(\alpha)} \\ \boxed{\sin(\alpha)} \end{pmatrix}$

b2) $h'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$\tan(\alpha) = h'(0) = b$

c1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 0{,}18254 \cdot x - 3{,}4$

x ... Distanz in m

$f(x)$ ... Zeit bei der Distanz x in s

c2) $f(10\,000) = 1\,822$

29 min 54,66 s = 1 794,66 s

$\left|\frac{1\,794{,}66 - 1\,822}{1\,794{,}66}\right| = 0{,}0152...$

Der Betrag des relativen Fehlers beträgt rund 1,5 %.

Lösungsschlüssel

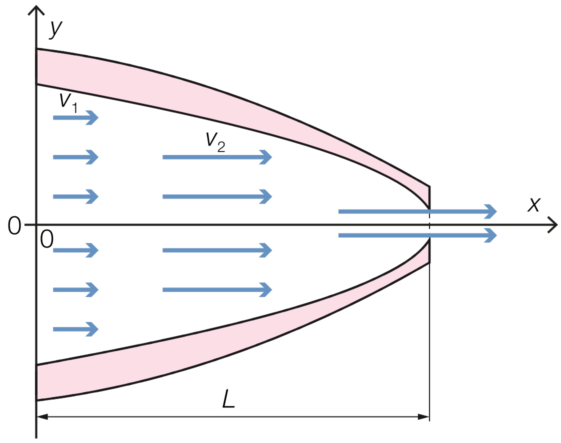
a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Beschleunigung.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
a3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Entfernung.
b1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Ausdrücke.
b2) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.
c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Betrags des relativen Fehlers.

Der Venturi-Effekt

Aufgabennummer: B_111

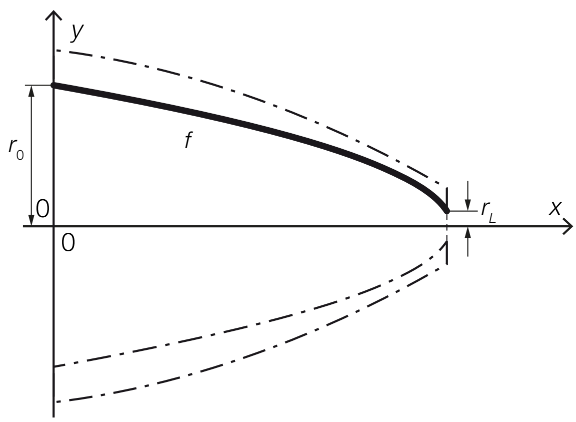
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Venturi-Effekt besagt, dass sich die Strömungsgeschwindigkeit eines Fluids (Flüssigkeit oder Gas) in einem Rohr indirekt proportional zum Flächeninhalt des Querschnitts verhält, wenn die Durchflussmenge konstant bleibt.
Die abgebildete Grafik zeigt den Längsschnitt einer rotationssymmetrischen Wasserdüse mit der Länge L.



a) – Stellen Sie eine Gleichung auf, die die Strömungsgeschwindigkeiten v_1, v_2 mit den zugehörigen Querschnittsflächen A_1, A_2 in korrekte Beziehung bringt.

b) Bei einer speziellen Düse ist der Innenradius r_0 am linken Rand der Düse 5 mm. Die Austrittsöffnung (rechts) hat einen Innenradius von r_L = 0,5 mm. Die Länge der Düse L ist 25 mm. Die in der nachstehenden Grafik gekennzeichnete Begrenzungslinie lässt sich durch die Funktion f beschreiben: $f(x) = \sqrt{a - b \cdot x}$, 0 mm $\leq x \leq$ 25 mm.



– Berechnen Sie die Parameter a und b der Funktion f.
– Berechnen Sie das Innenvolumen der Wasserdüse.

c) Die Düse wird an einen Wasserschlauch angeschlossen und senkrecht nach oben gehalten. Die Geschwindigkeit eines Wassertropfens abhängig von der Zeit t nach dem Austritt aus der Düse wird durch die Funktion v beschrieben.

$v(t) = h'(t) = v_0 - g \cdot t$

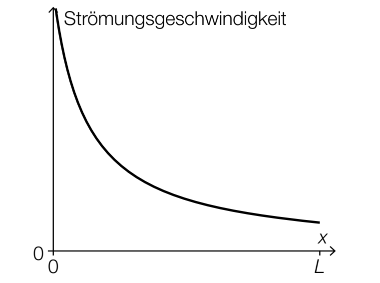
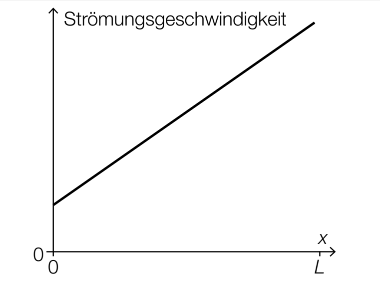
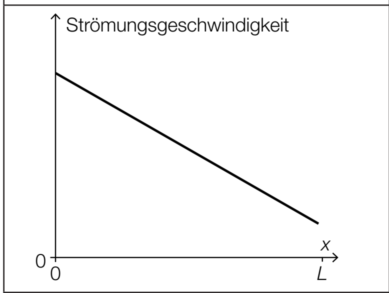
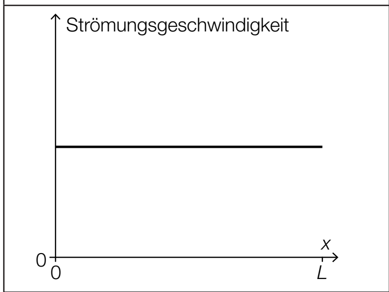
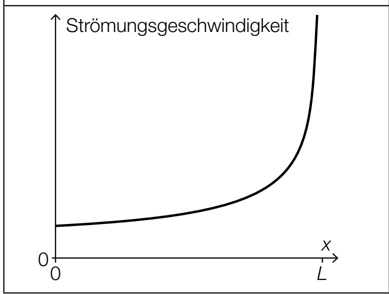
t … Zeit in s
g … Erdbeschleunigung in m/s²
v_0 … Austrittsgeschwindigkeit in m/s
$v(t)$ … Geschwindigkeit eines Wassertropfens zur Zeit t in m/s

Es soll die maximale Höhe h eines Wassertropfens über der Austrittsöffnung des Gartenschlauchs berechnet werden.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der maximalen Höhe h abhängig von der Austrittsgeschwindigkeit v_0 mit $h(0) = 0$ auf.

d) Der Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit eines Wasserpartikels entlang der Länge L der oben skizzierten Wasserdüse soll dargestellt werden.

– Kreuzen Sie die Grafik an, die den Verlauf der Strömungsgeschwindigkeit korrekt darstellt. *[1 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für indirekt proportionale Größen gilt, dass deren Produkt konstant ist:
$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$

Äquivalente Gleichungen sind ebenfalls korrekt.

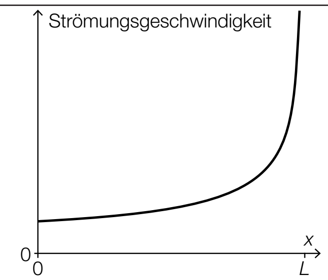
b) $f(0) = 5 \;\Rightarrow\; \sqrt{a - b \cdot 0} = 5 \;\Rightarrow\; a = 25$

$f(25) = 0{,}5 \;\Rightarrow\; \sqrt{25 - b \cdot 25} = 0{,}5 \;\Rightarrow\; b = 0{,}99$

Berechnung des Volumens:
$V = \pi \cdot \int_0^{25} \left(\sqrt{25 - 0{,}99 \cdot x}\right)^2 \mathrm{d}x \approx 992\ \text{mm}^3$

c) Für die maximale Höhe h_{max} gilt $v(t) = 0$:
$0 = v_0 - g \cdot t_{\text{max}}$
$t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g}$
Zur Berechnung der Höhe h, abhängig von der Zeit t, muss integriert werden und es gilt $h(0) = 0$:
$h(t) = v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}$
Durch Einsetzen von t_{max} erhält man:
$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{g} - g \cdot \frac{v_0^2}{2 \cdot g^2} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$

d)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
	☒

Die Austrittsgeschwindigkeit wird wegen des sich vermindernden Querschnitts immer höher. Eine umgekehrte Proportionalität hat keinen linearen Verlauf.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) schwer	a) 1
b) mittel	b) 3
c) schwer	c) 4
d) mittel	d) 1

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Verbinder

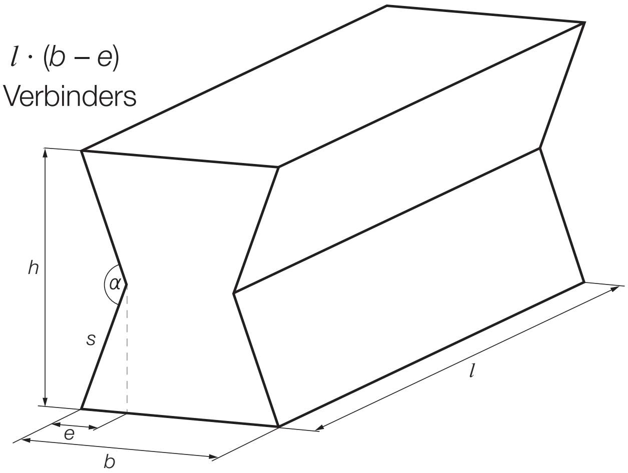
Aufgabennummer: B_274

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

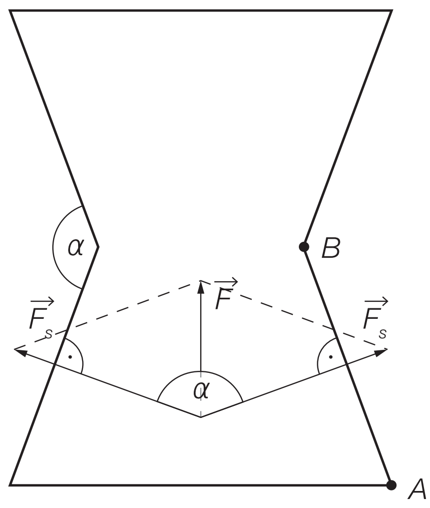
Symmetrische Verbinder in Doppelkeilform dienen zum sicheren und schnellen Verbinden zweier Holzteile.

a) – Zeigen Sie, wie man die Formel $V = h \cdot l \cdot (b - e)$ für die Berechnung des Volumens des Verbinders erhält.

– Berechnen Sie die Länge der Kante s für die Höhe h = 7 mm und den Winkel α = 140°.



b) In der nebenstehenden Abbildung sind die Querschnittsfläche des Verbinders und auftretende Kräfte dargestellt.



– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Betrags der Kraft $\vec{F}_s$ anhand des Kräfteparallelogramms in der nebenstehenden Abbildung in Abhängigkeit vom Winkel α und vom Betrag der Kraft $\vec{F}$ auf.

F_s = ____________________

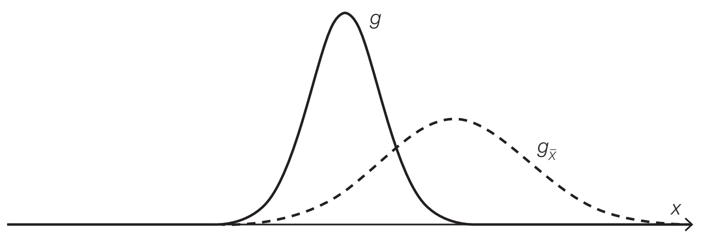
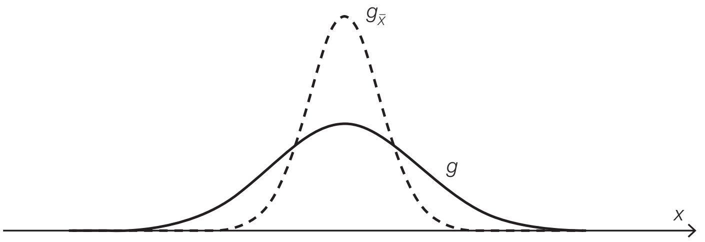
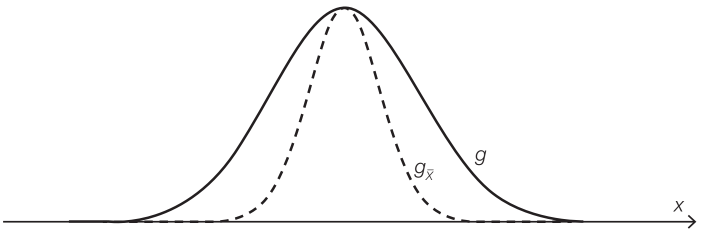
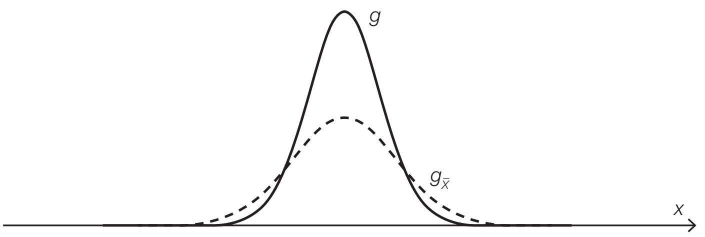
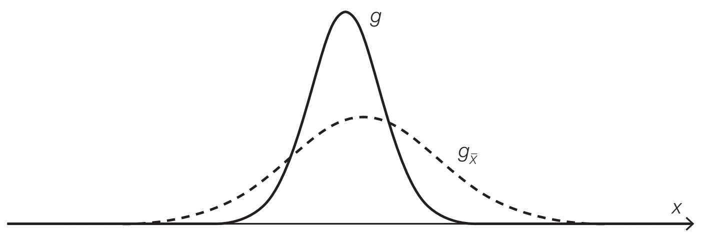
– Argumentieren Sie anhand dieser Formel, wie sich eine Verkleinerung des Winkel α auf F_s auswirkt.

c) Die Breiten der Verbinder eines bestimmten Herstellers sind normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 5,5 mm und der Standardabweichung σ = 0,5 mm. Einer umfangreichen Lieferung solcher Verbinder werden Zufallsstichproben vom Umfang n = 20 entnommen und es werden die Stichprobenwerte ermittelt.

– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 95 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

d) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Dichtefunktion g einer normalverteilten Grundgesamtheit und der Graph der Dichtefunktion $g_{\overline{X}}$ der zugehörigen Verteilung der Stichprobenmittelwerte von Stichproben mit $n = 20$ dargestellt.

– Kreuzen Sie diejenige Grafik an, in der die beiden Funktionsgraphen zueinander passend dargestellt sind. *[1 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Querschnittsfläche des Verbinders ist ein Rechteck reduziert um zwei Dreiecke.

$$A = b \cdot h - 2 \cdot \frac{h \cdot e}{2}$$

$$V = \left(b \cdot h - 2 \cdot \frac{h \cdot e}{2}\right) \cdot l = b \cdot h \cdot l - h \cdot e \cdot l = h \cdot l \cdot (b - e)$$

Länge der Kante s:

$$s = \frac{h}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 3{,}72\ldots$$

Die Länge der Kante s beträgt rund 3,7 mm.

b) $F_S^{\,2} = F^2 + F_S^{\,2} - 2 \cdot F \cdot F_S \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

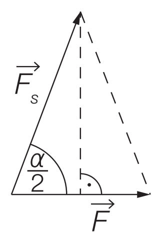
$$2 \cdot F \cdot F_S \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = F^2$$

$$F = 2 \cdot F_S \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{F}{2 \cdot F_S}$$

$$F_S = \frac{F}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

oder



$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{F}{2}}{F_S}$$

$$F_S = \frac{F}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Bei einem kleineren Winkel α wird F_S kleiner, da die Funktionswerte von $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ größer werden und der Quotient $\frac{F}{2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ kleiner wird.

c) $\mu = 5{,}5$ mm

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{20}} \text{ mm}$$

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

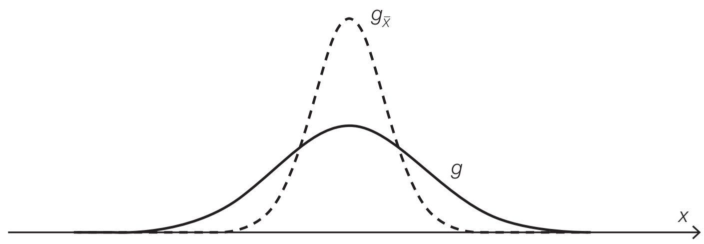
$$\mu \pm u_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$5{,}5 \pm 1{,}959\ldots \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{20}}$$

$$5{,}2808\ldots \leq \overline{X} \leq 5{,}7191\ldots$$

Der Mittelwert einer zufällig ausgewählten Stichprobe liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % im Bereich von 5,28 mm bis 5,72 mm.

d)

[...]	
	☒
[...]	
[...]	
[...]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

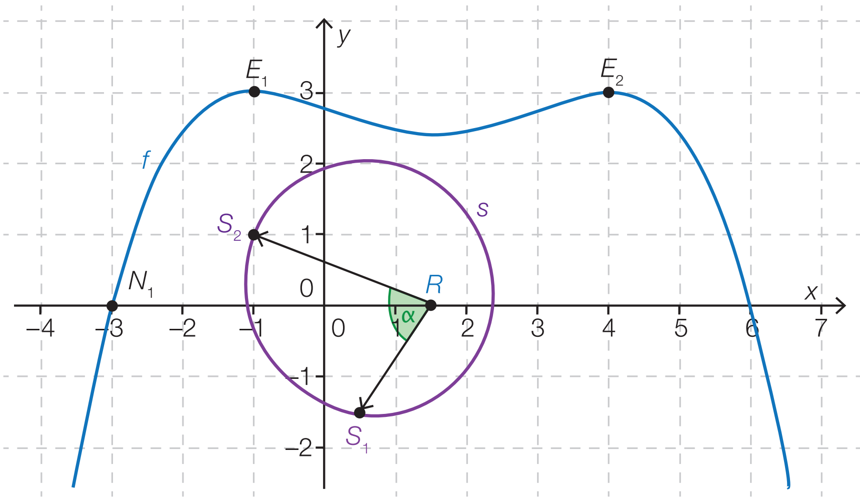
Armageddon

Aufgabennummer: B_295

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zur Programmierung eines Weltraum-Computerspiels werden einige geometrische Überlegungen benötigt.

Die nachstehende Abbildung zeigt die Flugbahn *s* zweier Patrouillenschiffe S_1 und S_2 um eine Raumstation *R*. Die Flugbahn eines feindlichen Raumschiffs wird durch den Graphen der Funktion *f* beschrieben. (In der Abbildung sind die Nullstelle N_1 sowie die Extrempunkte E_1 und E_2 des Funktionsgraphen von *f* eingezeichnet.)



a) – Erklären Sie, warum die Flugbahn *s* kein Graph einer Funktion ist.

Die Funktion *f* ist eine Polynomfunktion vierten Grades mit $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion *f* ermittelt werden können.

b) Für die Funktion *f* gilt:

$$f(x) = -\frac{3}{196}x^4 + \frac{9}{98}x^3 - \frac{3}{196}x^2 - \frac{18}{49}x + \frac{135}{49}$$

Während des Spielverlaufs schießt das feindliche Raumschiff am Wendepunkt der Funktion *f* in der Nähe von E_2 einen Laserstrahl tangential in Richtung S_2.

– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Tangente, die den Laserstrahl beschreibt.
– Überprüfen Sie rechnerisch, ob das Raumschiff S_2 vom Laserstrahl getroffen wird.

c) Zu einem bestimmten Zeitpunkt hat die Raumstation die Koordinaten $R = (1{,}5|0)$ und das erste Patrouillenschiff die Koordinaten $S_1 = (0{,}5|y > 0)$.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der fehlenden y-Koordinate des Patrouillenschiffs, wenn der Abstand vom Patrouillenschiff S_1 zur Raumstation R genau d Einheiten beträgt.

$y =$ ______________________________

– Ermitteln Sie den Winkel α, den die beiden Vektoren $\overrightarrow{RS_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{RS_2} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ einschließen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Bei der Flugbahn s handelt es sich um keinen Graphen einer Funktion, weil es x-Werte gibt, denen mehr als ein y-Wert zugeordnet wird.

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Nullstelle: $N_1 = (-3|0)$
Extrempunkte: $E_1 = (-1|3)$ $E_2 = (4|3)$

$f(-3) = 0$: I: $81a - 27b + 9c - 3d + e = 0$
$f(-1) = 3$: II: $a - b + c - d + e = 3$
$f'(-1) = 0$: III: $-4a + 3b - 2c + d = 0$
$f(4) = 3$: IV: $256a + 64b + 16c + 4d + e = 3$
$f'(4) = 0$: V: $256a + 48b + 8c + d = 0$

b) Berechnung des Wendepunktes:
$f''(x) = -\frac{9}{49}x^2 + \frac{27}{49}x - \frac{3}{98}$
$-\frac{9}{49}x^2 + \frac{27}{49}x - \frac{3}{98} = 0$
$x_1 = 2{,}943\ldots \approx 2{,}94$
$(x_2 = 0{,}056\ldots)$
$f(2{,}943\ldots) = 2{,}734\ldots$
$W = (2{,}94|2{,}73)$

Aufstellen der Funktionsgleichung der Tangente:
$y = kx + d$
$k = f'(2{,}943\ldots) = 0{,}36820\ldots$, $d = y - kx = 1{,}65049\ldots$
$y = 0{,}3682x + 1{,}6505$

Einsetzen der Koordinaten von S_2 in die Tangentengleichung:
$1 = 0{,}3682 \cdot (-1) + 1{,}6505$
$1 = 1{,}2822$
Der Laserstrahl trifft nicht das Raumschiff S_2.

c) $\overrightarrow{RS_1} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y \end{pmatrix}$

$(-1)^2 + y^2 = d^2$

$y = \sqrt{d^2 - 1}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ -1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2,5 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + (-1,5)^2} \cdot \sqrt{(-2,5)^2 + 1^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3,25} \cdot \sqrt{7,25}}$$

$\alpha \approx 78,11°$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2

Thema: Informatik

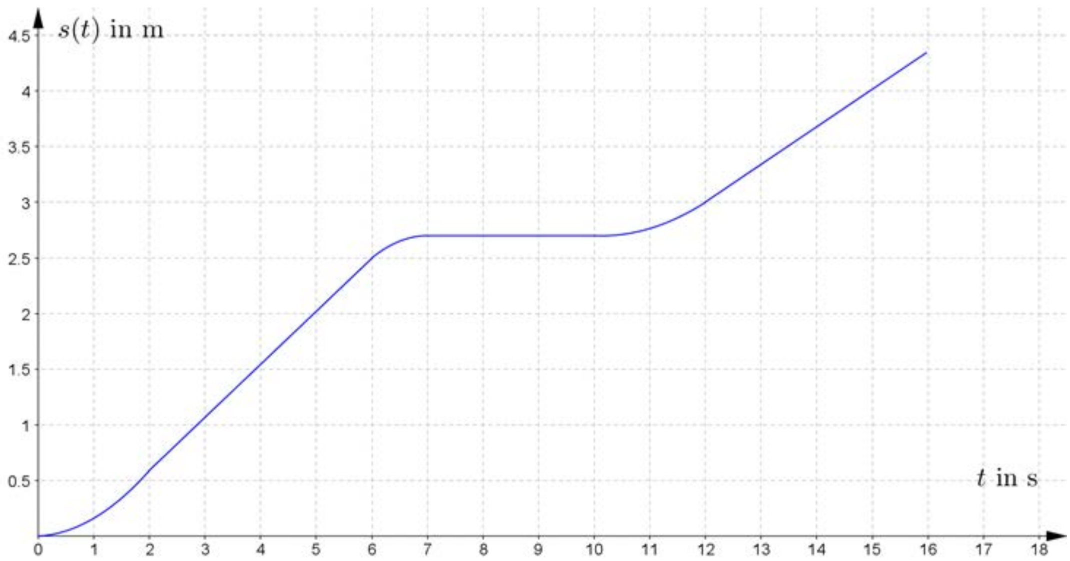
Quellen: –

Roboter (1)

Aufgabennummer: B_108

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die nachstehende Grafik stellt in einem Weg-Zeit-Diagramm die Bewegung eines Industrieroboters in einer Produktionshalle dar.



a) – Beschreiben Sie den Unterschied der Bewegungen des Industrieroboters in Bezug auf die Geschwindigkeit in den Intervallen [0 s; 2 s] und [6 s; 7 s].
– Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Beschleunigung des Industrieroboters gleich null ist.

b) – Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall [0 s; 15 s].
– Erklären Sie, welche Größe der Bewegung durch diese mittlere Änderungsrate beschrieben wird.

c) Ein Roboter legt mit konstanter Geschwindigkeit von 1,2 m/s eine Strecke von 6 m zurück. Anschließend steigert er seine Geschwindigkeit mit einer Beschleunigung von:

$$a(t) = 1{,}4 \cdot t$$

t … Zeit in Sekunden
$a(t)$ … Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit t in m/s

– Stellen Sie die Funktionsgleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion für den durch die Gleichung angegebenen Beschleunigungsvorgang auf.
– Stellen Sie die Funktionsgleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion für den beschriebenen Beschleunigungsvorgang auf.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Intervall [0 s; 2 s] beschleunigt der Roboter positiv, d. h., er wird schneller, im Intervall [6 s; 7s] beschleunigt er negativ, d. h., er bremst ab.

Im Intervall [2 s; 6 s] sowie im Intervall [12 s; 16 s] bewegt sich der Roboter mit konstanter Geschwindigkeit. Im Intervall [7 s; 10 s] befindet sich der Roboter im Stillstand. In beiden Situationen ist die Beschleunigung null.

b) Berechnung: $\bar{v} = \frac{4\text{ m}}{15\text{ s}} = 0{,}2\dot{6}\text{ m/s} \approx 0{,}27\text{ m/s}$

Die mittlere Änderungsrate ist die mittlere Geschwindigkeit des Roboters im gegebenen Intervall.

c) Anfangsbedingungen: $v(0) = 1{,}2$ m/s, $s(0) = 6$ m

möglicher Ansatz mittels Integration: $v(t) = \int 1{,}4t\,\mathrm{d}t = 0{,}7 \cdot t^2 + C_1$

Einsetzen der Anfangsbedingung $v(0) = 1{,}2$ m/s:
$v(0) = 0{,}7 \cdot 0 + C_1 = 1{,}2 \implies C_1 = 1{,}2$
$v(t) = 0{,}7 \cdot t^2 + 1{,}2$

$v(t)$ kann auch mit elementaren Formeln aufgefunden werden.
$s(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(0{,}7 \cdot t^2 + 1{,}2\right)\mathrm{d}t = \frac{0{,}7 \cdot t^3}{3} + 1{,}2 \cdot t + C_2$

Einsetzen der Anfangsbedingung $s(0) = 6$ m:
$s(0) = \frac{0{,}7 \cdot 0^2}{3} + 1{,}2 \cdot 0 + C_2 = 6 \implies C_2 = 6$

Somit ergibt sich als Funktionsgleichung für den Weg s:
$s(t) = \frac{0{,}7 \cdot t^3}{3} + 1{,}2 \cdot t + 6$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 2
c) mittel	c) 4

Thema: Physik

Quellen: —

Flächeninhalt eines Parallelogramms*

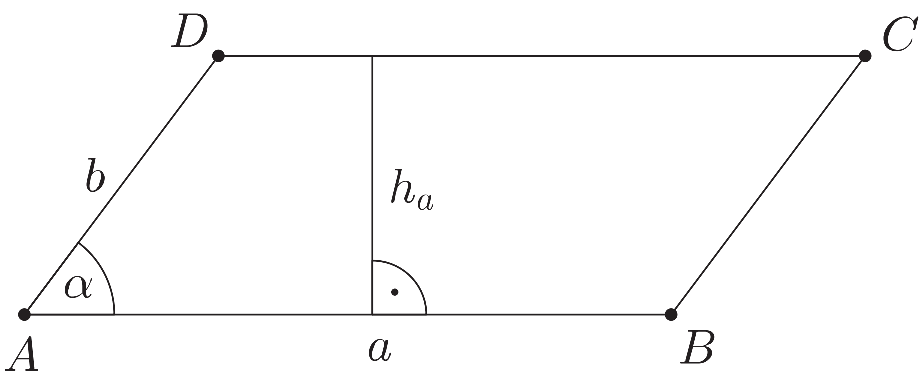
Aufgabennummer: B_259

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Grundstück hat die Gestalt eines Parallelogramms $ABCD$. Zur Berechnung des Flächeninhalts dieses Grundstücks stehen folgende Formeln zur Verfügung:

(1) $A = a \cdot h_a$
(2) $A = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

Entnehmen Sie die Bezeichnungen der nachstehenden, nicht maßstabgetreuen Skizze.



a) – Erklären Sie, warum diese beiden Formeln gleichwertig sind.

b) Für das Grundstück werden folgende Maße angegeben: $b = 52{,}7$ m, $\alpha = 53°$, $A = 4\,133$ m^2.

– Berechnen Sie die Länge der Seite a.
– Berechnen Sie die Länge der Diagonale BD.

c) Die Länge der Seite a wird verdreifacht und die Länge der zugehörigen Höhe h_a halbiert.

– Ermitteln Sie die Änderung des Flächeninhalts in Prozent.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Zeichnet man die Höhe h_a im Eckpunkt D ein, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck.
In diesem gilt: $\sin(\alpha) = \frac{h_a}{b}$.
$h_a = b \cdot \sin(\alpha)$
$A = a \cdot h_a = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$

b) $a = \frac{A}{b \cdot \sin(\alpha)} = 98{,}19\ldots \quad \Rightarrow \quad a \approx 98{,}2 \text{ m}$

$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\alpha)} = 78{,}68\ldots \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \approx 78{,}7 \text{ m}$

c) $A_{\text{neu}} = 3 \cdot a \cdot \frac{h_a}{2} = 1{,}5 \cdot a \cdot h_a = 1{,}5 \cdot A_{\text{alt}}$

Der neue Flächeninhalt ist um 50 % größer als der alte.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung zur Gleichwertigkeit der Formeln
b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge der Seite a
1 × B2: für die richtige Berechnung der Länge der Diagonale $\overline{BD}$
c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Änderung in Prozent

E-Reader*

Aufgabennummer: B_224

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1310
6	1700
7	2055
8	2280
9	2470
10	2500
11	2540
12	2545

a) Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall [3; 7], so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

– Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall [3; 7].
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

b) Betrachtet man nur die ersten 3 Zahlenpaare, so zeigt sich ein annähernd exponentieller Verlauf. Dieser kann durch

$$V_1(t) = 93{,}7 \cdot 1{,}94^t$$

oder durch

$$V_2(t) = 93{,}7 \cdot e^{0{,}662688 \cdot t}$$

dargestellt werden.

t ... Zeit in Wochen
$V_1(t)$, $V_2(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

– Erklären Sie, warum beide Funktionen V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben.
– Berechnen Sie die Verdoppelungszeit in diesem exponentiellen Wachstumsmodell.

* ehemalige Klausuraufgabe

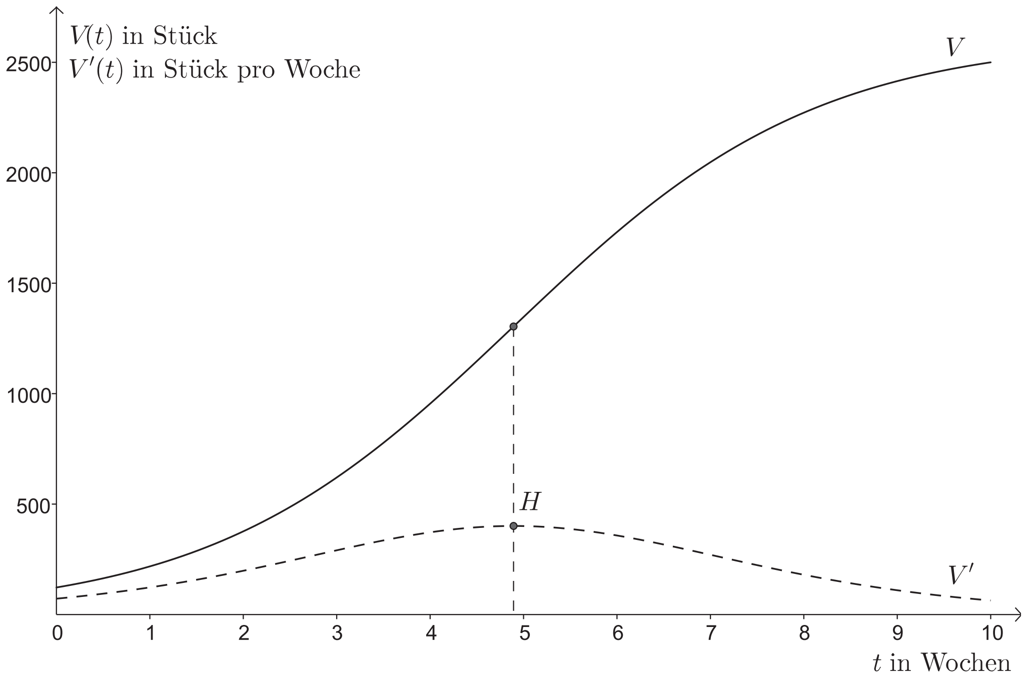
c) Betrachtet man alle 12 Zahlenpaare, so lässt sich die Entwicklung der Anzahl der insgesamt verkauften E-Reader näherungsweise durch eine logistische Funktion V beschreiben:

$$V(t) = \frac{2\,608}{1 + 20{,}28 \cdot e^{-0{,}6151 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen
$V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

– Begründen Sie anhand der gegebenen Funktion, warum die Funktionswerte sich mit wachsendem t dem maximalen Wert 2 608 annähern.
– Berechnen Sie, um wie viel der logistische Funktionswert $V(8)$ vom gegebenen Tabellenwert bei 8 Wochen abweicht.

In der nachstehenden Grafik sind die logistische Funktion V sowie deren Ableitungsfunktion V' grafisch dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der Koordinaten des Hochpunktes H der Ableitungsfunktion V' im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Regressionsgerade mittels Technologieeinsatz:

$V(t) = 348{,}1 \cdot t - 396{,}5$

t ... Zeit in Wochen
$V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

In diesem Zeitraum werden nach diesem Modell pro Woche rund 348 Stück verkauft.

b) Da $1{,}94 \approx e^{0{,}662688}$, beschreiben V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf.

Verdoppelungszeit: $T = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}94)} = 1{,}045...$
Die Verdoppelungszeit beträgt rund 1,05 Wochen.

c) Da für großes t der Wert $e^{-0{,}6151 \cdot t}$ gegen null geht, nähert sich der Nenner der Zahl 1 und $V(t)$ damit 2608.

Funktionswert nach 8 Wochen: $V(8) \approx 2272$
Abweichung vom gegebenen Tabellenwert: $2280 - 2272 = 8$

Der logistische Funktionswert weicht um ca. 8 Stück vom gegebenen Tabellenwert ab.

Die 1. Koordinate von H ist nach diesem Modell derjenige Zeitpunkt, in dessen Nähe am meisten E-Reader pro Woche verkauft wurden. Die 2. Koordinate entspricht in etwa der Anzahl der verkauften E-Reader in dieser Woche.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang
b) 1 × D: für die richtige Erklärung, warum V_1 und V_2 annähernd denselben Wachstumsverlauf beschreiben
1 × B: für die richtige Berechnung der Verdoppelungszeit mithilfe der Funktion V_1 oder V_2
c) 1 × D: für die richtige Begründung, warum sich die Funktionswerte mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern
1 × B: für die richtige Berechnung der Abweichung
1 × C: für die richtige Interpretation der Koordinaten des Hochpunktes im Sachzusammenhang

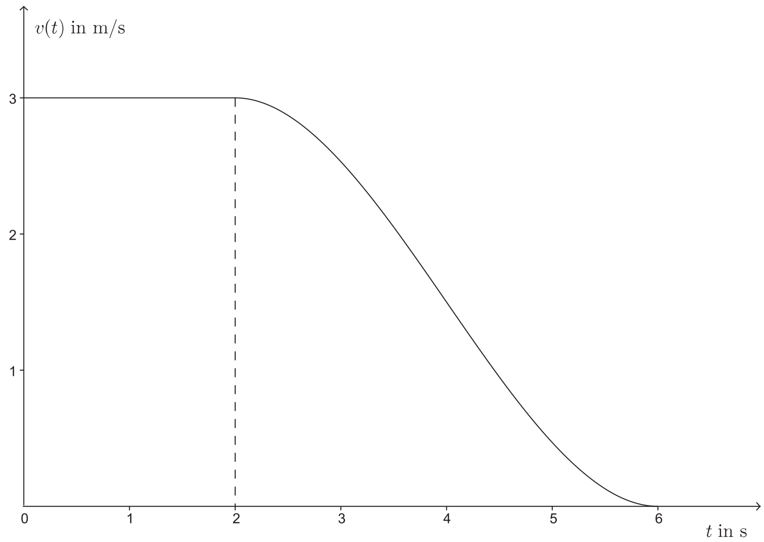
Kransteuerung*

Aufgabennummer: B_039

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Beim Transport von Lasten mittels Kränen ist die richtige Steuerung des Abbremsvorgangs wichtig.

a) Der Geschwindigkeitsverlauf beim Transport einer Last während eines Beobachtungszeitraums von 6 Sekunden ist im unten stehenden Diagramm dargestellt. Zuerst bewegt sich die Last mit konstanter Geschwindigkeit. Der Bremsvorgang beginnt nach 2 Sekunden. Die Beschleunigung zu diesem Zeitpunkt ist noch 0 m/s². Nach 6 Sekunden ist die Geschwindigkeit gleich 0 m/s und die Beschleunigung gleich 0 m/s².
Der Geschwindigkeitsverlauf soll im Intervall [2; 6] durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.



– Stellen Sie die zur Ermittlung der Polynomfunktion notwendigen Gleichungen auf.
– Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Geschwindigkeitsverlauf während eines Bremsvorganges eines Krans kann näherungsweise durch eine Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = 0{,}08 \cdot t^3 - 0{,}6 \cdot t^2 + 5$

t ... Zeit ab Beginn des Bremsvorganges in Sekunden (s) mit $0 \leq t \leq 5$
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)

– Ermitteln Sie die Geschwindigkeit des Krans bei Beginn des Bremsvorganges.
– Dokumentieren Sie, wie man den Bremsweg in Metern berechnen kann.

Beim Bremsen tritt eine negative Beschleunigung auf. Den Betrag dieser negativen Beschleunigung bezeichnet man als *Bremsverzögerung*.

– Berechnen Sie die maximale Bremsverzögerung.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $v(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$
$v(2) = 3$
$v(6) = 0$
$v'(2) = 0$
$v'(6) = 0$

Die Lösung dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz ergibt:

$a = \frac{3}{32}$
$b = -\frac{9}{8}$
$c = \frac{27}{8}$
$d = 0$

b) $v(0) = 5$
Die Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorganges ist 5 m/s.

Der Bremsweg kann als Integral der Geschwindigkeitsfunktion zwischen den Grenzen $t_1 = 0$ und $t_2 = 5$ ermittelt werden.

Ansatz:
$a' = v''$
$a'(t) = 0$
$0{,}48 \cdot t - 1{,}2 = 0$
$t = 2{,}5$
$a(2{,}5) = -1{,}5$

Die maximale Bremsverzögerung beträgt 1,5 m/s².

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen $v(2) = 3$ und $v(6) = 0$
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen $v'(2) = 0$ und $v'(6) = 0$
1 × B: für das richtige Berechnen der Koeffizienten

b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung der Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorganges
1 × C: für die richtige Dokumentation zur Ermittlung des Bremsweges
1 × A: für einen richtigen Ansatz (Extremstelle der Beschleunigungsfunktion oder Wendestelle der Geschwindigkeitsfunktion)
1 × B2: für die richtige Berechnung der maximalen Bremsverzögerung

Bakterienkultur*

Aufgabennummer: B_049

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt $t = 0$ angelegt. Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt. Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur: $N(t)$ ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten. Die 1. Ableitung der Funktion N ist proportional zu N. Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als *Wachstumsrate*.

– Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für N auf.
– Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
– Berechnen Sie, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind.
– Geben Sie an, wie sich das Wachstumsverhalten ändert, wenn die Bakterienkultur eine größere Wachstumsrate hat.

b) Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten:

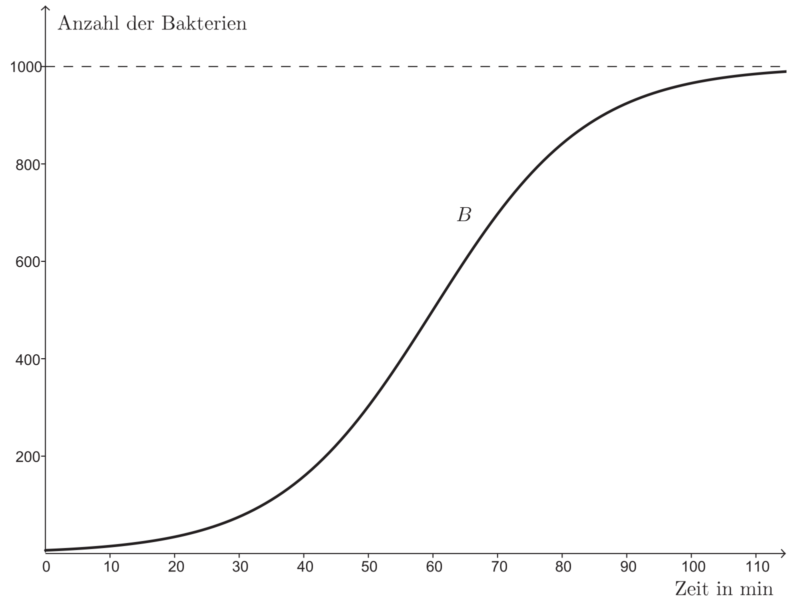
Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Anzahl der Bakterien	110	120	156	185	190	245	274	340	360	430

– Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die die Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit nach Beginn der Beobachtung näherungsweise beschreibt.
– Berechnen Sie mithilfe der Ausgleichsfunktion, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung 1 000 Bakterien zu erwarten sind.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Funktion B beschreibt näherungsweise, wie viele Bakterien sich zu jedem Zeitpunkt in einer Petrischale befinden. Der zugehörige Funktionsgraph ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.

t ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten
$B(t)$ ... Anzahl der Bakterien zur Zeit t



– Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung das Wachstum der Bakterienkultur am größten ist.

Die entsprechende Differenzialgleichung zur Beschreibung dieses Bakterienwachstums lautet:

$$\frac{dB}{dt} = 8{,}35 \cdot 10^{-5} \cdot B \cdot (1\,000 - B) \quad \text{mit} \quad B > 0$$

– Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von B die Bakterienanzahl zunimmt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{dN}{dt} = k \cdot N$

$\int \frac{1}{N}\,dN = \int k\,dt$

$\ln|N| = k \cdot t + c$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: N mit $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$

$N(0) = 50$ und $N(100) = 750$ liefert: $C = 50$ und $k = 0{,}0270...$

$N(180) = 6\,545{,}3... \approx 6\,545$

Nach 3 Stunden sind rund 6 545 Bakterien vorhanden.

Wenn die Wachstumsrate der Bakterienkultur größer ist, dann bedeutet das, dass die Anzahl der Bakterien schneller wächst.

b) Ermittlung der exponentiellen Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 69{,}43 \cdot e^{0{,}03065 \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten
$f(t)$ … Bakterienanzahl zur Zeit t

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Lösen der Gleichung $f(t) = 1\,000$ mittels Technologieeinsatz:
$t \approx 87{,}0$

Rund 87 Minuten nach Beginn der Beobachtung sind 1 000 Bakterien zu erwarten.

c) Ablesen der Wendestelle der Funktion B: $t = 60$ min
Toleranzbereich: [55; 65]
Rund 60 Minuten nach Beginn der Beobachtung ist das Wachstum der Bakterienkultur am größten.

Für $B < 1\,000$ ist jeder Faktor auf der rechten Seite der Differenzialgleichung positiv, also $\frac{dB}{dt} > 0$. Daher nimmt die Bakterienzahl für diese Werte zu.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
1 × B1: für die richtige allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Bakterienanzahl nach 3 Stunden
1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Wachstumsverhaltens

b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung der Ausgleichsfunktion
1 × B2: für die richtige Berechnung, nach welcher Zeit 1 000 Bakterien zu erwarten sind

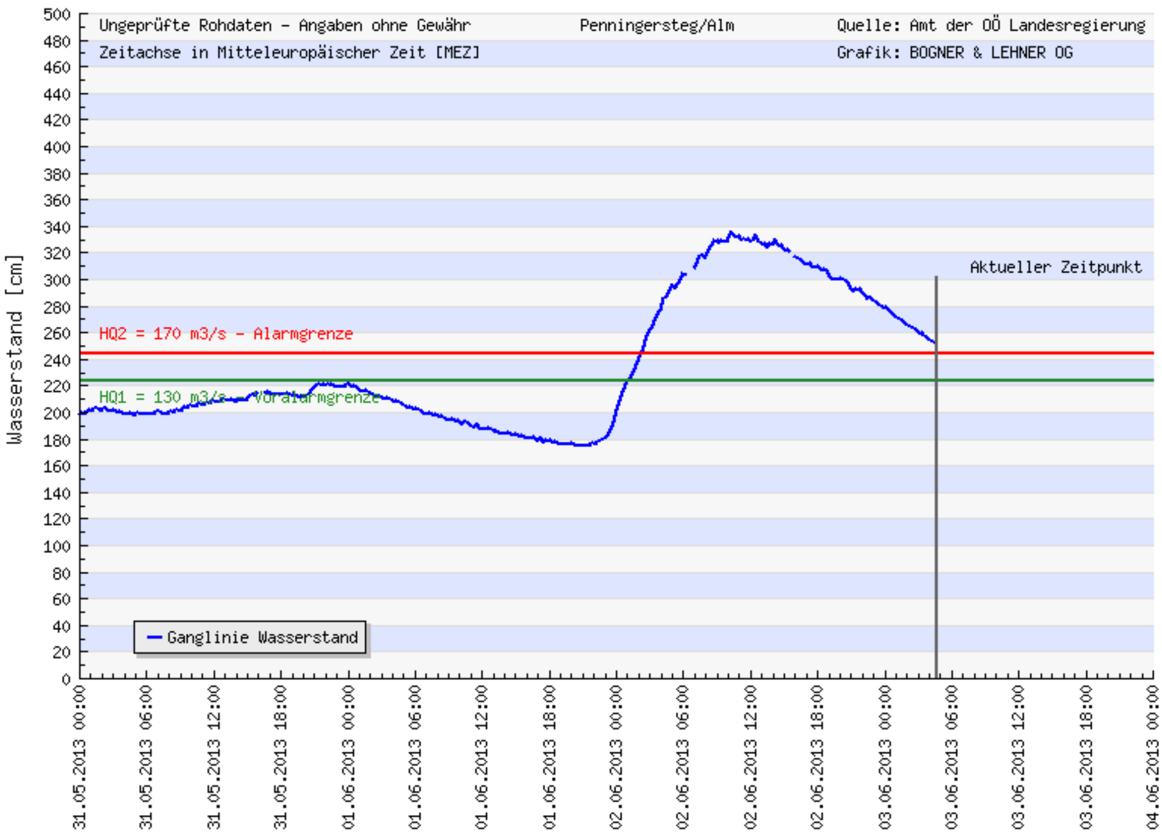
c) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [55; 65]
1 × D: für eine richtige Argumentation anhand der Differenzialgleichung

Hochwasser im Almtal

Aufgabennummer: B_109

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Während des Hochwassers im Mai–Juni 2013 wurden an der Messstelle Penningersteg des Almflusses folgende Wasserstände grafisch festgehalten:



a) – Lesen Sie aus der Grafik die Wasserstände vom 02.06.2013 um 18:00 Uhr und vom 03.06.2013 um 0:00 Uhr ab.
– Berechnen Sie mithilfe der beiden abgelesenen Werte, zu welchem Zeitpunkt voraussichtlich mit einer Entwarnung (Wasserstand = 245 cm) gerechnet werden kann, wenn der Wasserstand gleichmäßig sinkt.

b) Bei einem Wasserstand des Almflusses von 225 cm beträgt der Durchfluss 130 m^3/s. Wenn sich der Wasserstand um 1 cm erhöht, so erhöht sich der Durchfluss ungefähr um 2 m^3/s.

– Stellen Sie eine Polynomfunktion 3. Grades auf, die näherungsweise den Durchfluss in Abhängigkeit von der Zeit für den 02.06.2013 angibt. Verwenden Sie dazu die aus der Grafik abgelesenen Daten vom 02.06.2013 für die Zeitpunkte 1:00 Uhr, 8:00 Uhr, 16:00 Uhr und 24:00 Uhr.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man mithilfe der ermittelten Polynomfunktion das Gesamtvolumen des durch den Penningersteg transportierten Wassers in m^3 an diesem Tag berechnen kann.

c) Der Almfluss hat ein Einzugsgebiet von 436,8 km^2. Es wird angenommen, dass etwa 70 % des gesamten Niederschlags durch den Almfluss abtransportiert werden. Nehmen Sie an, dass im gesamten Einzugsgebiet eine Niederschlagsmenge von x mm fällt.

– Stellen Sie eine Formel auf, die abhängig von der Niederschlagsmenge x in mm die Gesamtmenge des abtransportierten Wassers V in m^3 für dieses Gebiet angibt.

d) Die Tageshöchstwerte der Messstelle wurden über ein Jahr hinweg aufgezeichnet und statistisch ausgewertet.

– Kreuzen Sie die richtige Aussage an. *[1 aus 5]*

Innerhalb des Interquartilsabstands um den Median in einem Boxplot befinden sich 75 % aller aufgezeichneten Daten.	☐
Am Interquartilsabstand des Boxplots lässt sich die Standardabweichung der Daten vom Median ablesen.	☐
Eine Zusammenfassung der Daten durch die Kennzahlen *Median* und *Standardabweichung* liefert Informationen über das Auftreten extremer Wasserstände.	☐
Die Darstellung der Daten durch einen Boxplot liefert Informationen über den Median der Wasserstände im beobachteten Zeitraum.	☐
Die Darstellung der Daten durch einen Boxplot liefert Informationen über das Auftreten der Häufigkeit eines Messwerts.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ablesen der Wasserstände:
02.06.2013, 18:00 Uhr: 310 cm
03.06.2013, 0:00 Uhr: 280 cm

In diesem Fall ist ein lineares Modell geeignet. Pro Stunde ist also mit einer Verminderung des Wasserstandes um 5 cm zu rechnen.
$245 = 280 - 5 \cdot t$
Mit einem Erreichen der Alarmgrenze (= 245 cm) ist also um 7:00 Uhr des 03.06.2013 zu rechnen.

b) Aus der Grafik erhält man folgende Daten:

Uhrzeit	Wasserstand	Durchfluss [m^3/s]
1:00	225	130
8:00	320	320
16:00	310	300
24:00	280	240

Mittels Technologieeinsatz erhält man:
$f(x) = 0{,}07 \cdot x^3 - 3{,}78 \cdot x^2 + 55{,}92 \cdot x + 77{,}79$

Ableseungenauigkeiten werden toleriert, wodurch sich leicht abweichende Funktionsgleichungen ergeben können.

Das Gesamtvolumen des Wassers lässt sich durch Integration von $f(x)$ über das Zeitintervall [0 h; 24 h] berechnen. Da die Daten des Durchflusses in Kubikmetern pro Sekunde angegeben sind, muss das Ergebnis noch mit dem Faktor 3600 multipliziert werden.

$V = 3\,600 \cdot \int_0^{24} f(x)\mathrm{d}x$

c) $Niederschlag = x \cdot 10^{-3}$ m
$Einzugsgebiet = 436{,}8 \cdot (10^3\ \text{m})^2$
$V = 0{,}7 \cdot x \cdot 10^{-3} \cdot 436{,}8 \cdot 10^6\ \text{m}^3$
$V = 0{,}7 \cdot x \cdot 436{,}8 \cdot 10^3\ \text{m}^3$
$V = 305\,760 \cdot x\ \text{m}^3$

d)

[...]	
[...]	
[...]	
Die Darstellung der Daten durch einen Boxplot liefert Informationen über den Median der Wasserstände im beobachteten Zeitraum.	☒
[...]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 4 Analysis
c) 1 Zahlen und Maße
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2
d) 1

Thema: Umwelt

Quelle: Amt der oberösterreichischen Landesregierung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Donauüberquerung

Aufgabennummer: B_229

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Motorfähre verkehrt zwischen den sich an der Donau genau gegenüberliegenden Anlegestellen in Dürnstein und in Rossatz. An dieser Stelle ist die Donau etwa 200 Meter breit und hat eine gleichmäßige Strömungsgeschwindigkeit v_s von rund 1,6 Metern pro Sekunde (m/s). (Reibungseinflüsse sollen vernachlässigt werden.)

a) Die Vektorgrafiken Abb. 1 und Abb. 2 stellen ein Boot dar, das einen Fluss überquert.
– Interpretieren Sie, welche Aussagen die Grafiken vermitteln.

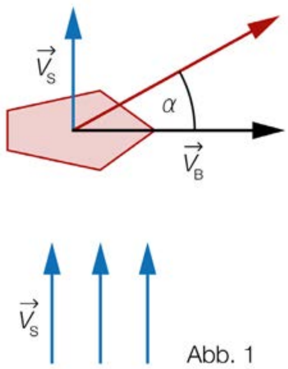


Abb. 1

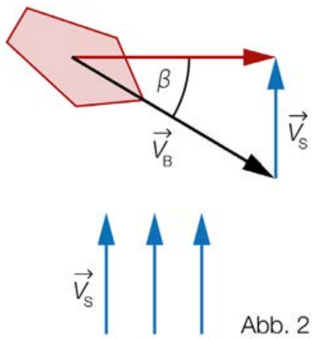


Abb. 2

$\vec{v}_S$ … Strömungsgeschwindigkeit
$\vec{v}_B$ … Geschwindigkeit des Boots

b) Die Motorfähre auf der Donau bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Es gilt:

$$s = v \cdot t$$

s … Weg in Metern (m)
v … Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
t … Zeit in Sekunden (s)

– Berechnen Sie, in welchem Winkel der Steuermann gegen die Strömung steuern muss, wenn das Boot eine Geschwindigkeit v_B relativ zum Wasser von durchschnittlich 3 m/s hat und es von Rossatz aus genau in Dürnstein landen soll.
– Ermitteln Sie auch die Dauer der Überfahrt in Minuten.

c) Ein geübter Schwimmer, der beim Schwimmen in ruhendem Gewässer eine Geschwindigkeit von 1,2 m/s erreicht, möchte auf der Bootsroute von Rossatz nach Dürnstein die Donau überqueren.
– Argumentieren Sie mithilfe von Vektordiagrammen, ob der Schwimmer eine Chance hat, die Anlegestelle in Dürnstein auf kürzestem Weg zu erreichen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Abb. 1: Das Boot fährt normal zur Fließrichtung des Wassers. Dabei wird es durch die Strömung um den Winkel α abgetrieben.

Abb. 2: Das Boot steuert mit einem Winkel β gegen die Flussströmung, sodass es auf kürzestem Wege zum gegenüberliegenden Ufer gelangt.

b) Geschwindigkeit: $\vec{v} = \vec{v_B} + \vec{v_S}$

pythagoräischer Lehrsatz: $v = \sqrt{v_B^2 - v_S^2}$

$\sqrt{3^2 - 1{,}6^2} = 2{,}5377 \approx 2{,}54$

$v \approx 2{,}54$ m/s

Fahrzeit: $t = \frac{s}{v}$

$\frac{200}{2{,}54} = 78{,}74$

$t = 78{,}74$ s $\approx 1{,}31$ min

Genau um jenen Winkel, um den das Boot abgetrieben wird, muss gegengesteuert werden:

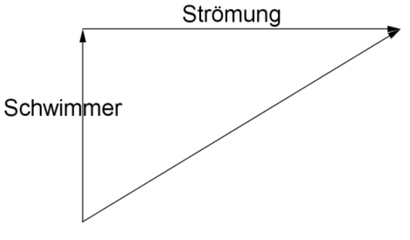
$\sin(\beta) = \frac{v_S}{v_B}$

$\frac{1{,}6}{3} = 0{,}5333\ldots$

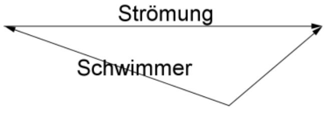
$\beta \approx 32{,}2°$

Der Steuermann muss rund 32,2° gegen die Strömung steuern, um genau gegenüber anzukommen.

c) Vektoren in geeignetem Größenverhältnis darstellen



Wenn der Schwimmer normal zur Strömung schwimmt, dann wird er von der Strömung abgetrieben.



Wenn er mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m/s schräg gegen die Strömung schwimmt, egal in welchem Winkel, so wird er wegen der größeren Strömungsgeschwindigkeit ebenfalls abgetrieben.

Er hat keine Chance, normal zur Flussrichtung von Rossatz nach Dürnstein zu gelangen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 2

Thema: Verkehr

Quellen: –

Marketingausgaben*

Aufgabennummer: B_304

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

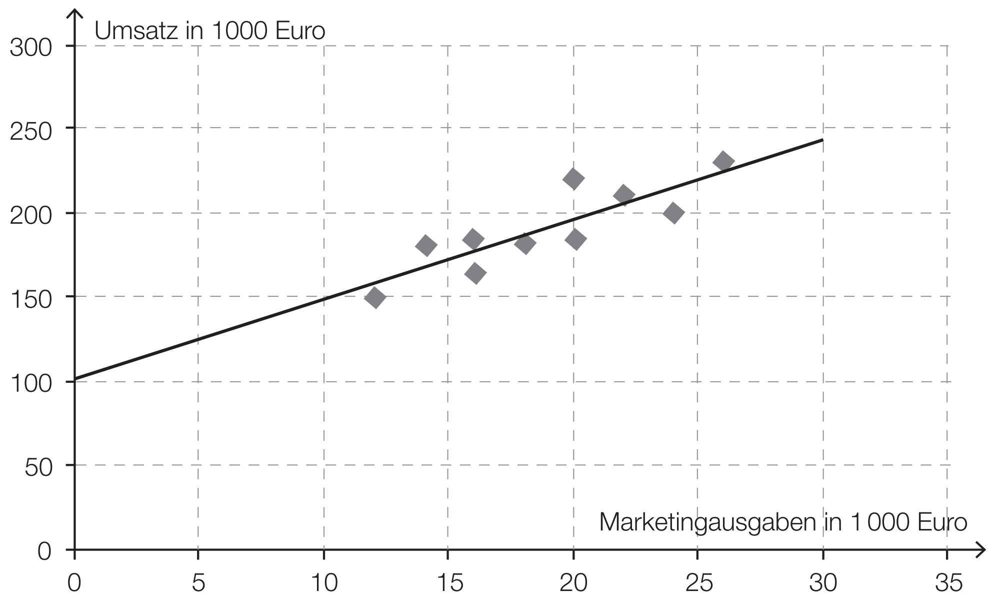
Die Marketingabteilung einer Handelskette möchte wissen, ob ihre Werbemaßnahmen wirken. Die Buchhaltung liefert Informationen über die monatlichen Umsätze. Die Umsätze von 10 aufeinanderfolgenden Monaten mit den entsprechenden Marketingausgaben liefern folgende Daten (Beträge in 1.000 Euro):

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marketingausgaben	24	16	20	26	14	16	20	12	18	22
Umsatz	200	184	220	230	180	164	185	150	182	210

a) – Ermitteln Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen Marketingausgaben und Umsatz.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

b) – Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Regressionsgeraden, die den Umsatz in Abhängigkeit von den Marketingausgaben beschreibt.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im Hinblick auf den Umsatz und die Marketingausgaben.

c) In der nachstehenden Grafik sind die Datenpunkte und die dazugehörige Regressionsgerade dargestellt.



– Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Umsatz ab, den die Handelskette bei Marketingausgaben von € 10.000 erwarten kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}86$

Die gegebenen Daten lassen einen positiven linearen Zusammenhang zwischen Marketingausgaben und Umsatz vermuten.

b) mittels Technologieeinsatz: $y = 4{,}786 \cdot x + 100{,}523$

Steigen die Marketingausgaben um € 1.000, dann steigt der Umsatz um ca. € 4.786.

c) ca. € 150.000
Toleranzbereich: [€ 140.000; € 160.000]

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten
1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Ablesen des Wertes

Terrassenüberdachung

Aufgabennummer: B_021

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

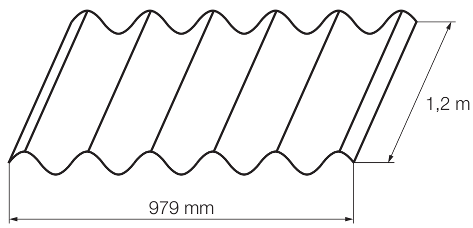
Für die Überdachung einer Terrasse werden Wellblechplatten angebracht. Das Querschnittsprofil des Wellblechs kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = 27{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{89} \cdot x\right)$ mit $0 \leq x \leq 979$

x, $g(x)$ … Koordinaten in Millimetern (mm)

a) – Stellen Sie die Funktion g grafisch dar.

Eine montierte Wellblechplatte hat eine Breite von 979 mm, eine Länge von 1,2 m und eine Dicke von 1 mm (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).
Der Stahl hat eine Dichte von $\rho = 7{,}85$ g/cm³.



– Berechnen Sie die Masse der Wellblechplatte in Kilogramm (kg).

b) An den Stellen der maximalen Steigung des Querschnitts des Wellblechs sollen Schneesicherungen angebracht werden. Dazu werden die 1. Ableitung g' und die 2. Ableitung g'' berechnet.

Die Berechnung der 2. Ableitung der Funktion g enthält genau einen Fehler.

(1) $g'(x) = \frac{\pi \cdot 27{,}5}{89} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{89} \cdot x\right)$

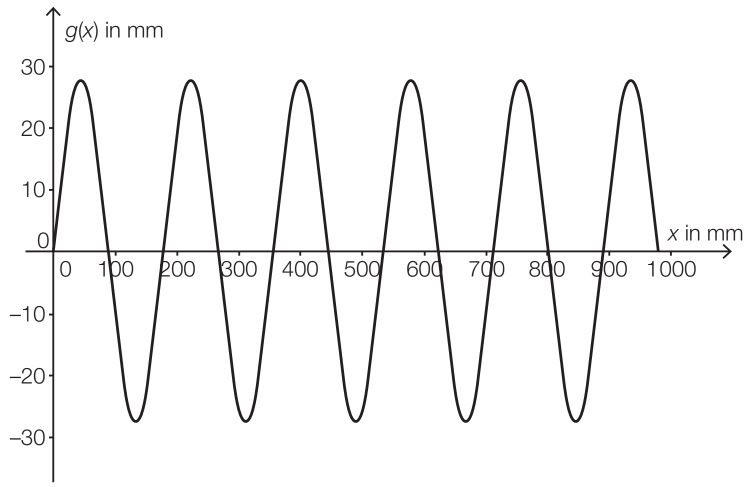
(2) $g''(x) = \frac{\pi \cdot 27{,}5}{89} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{89} \cdot x\right)\right)$

– Beschreiben Sie anhand der Ableitungsregeln, welcher Fehler bei der Berechnung der 2. Ableitung begangen wurde.
– Zeigen Sie, dass die Funktion g an der Stelle $x = 534$ mm eine maximale Steigung hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$s = \int_0^{979} \sqrt{(1 + (g'(x))^2)}\,\mathrm{d}x$

$s = 1\,179{,}633\ldots$ mm

$V = s \cdot 1\,200 \cdot 1$

$V = 1\,415\,559{,}970\ldots \text{ mm}^3 = 1\,415{,}559\ldots \text{ cm}^3$

$m = V \cdot \rho$

$m \approx 11{,}1$ kg

b) Bei der Berechnung der 2. Ableitung wurde die Kettenregel falsch angewendet. Die innere Ableitung des Ausdrucks $\cos\left(\frac{\pi}{89} \cdot x\right)$ wurde nicht berücksichtigt.

An den Wendestellen des Querschnitts des Wellblechs ist die Steigung maximal.
An diesen gilt: $g''(x) = 0$ und $g'(x) > 0$.

$\sin\left(\frac{\pi}{89} \cdot 534\right) = 0 \;\Rightarrow\; g''(534) = 0$

$g'(534) = 0{,}97\ldots > 0$

Die Funktion g hat an der Stelle $x = 534$ eine maximale Steigung.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) schwer	a) 3
b) mittel	b) 2

Thema: Bauwesen

Quellen: –

Datenübertragung

Aufgabennummer: B_266

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als *Datenübertragungsrate* wird die digitale Datenmenge, die innerhalb einer Zeiteinheit übertragen wird, bezeichnet.

a) Das *Shannon-Hartley-Gesetz* beschreibt die theoretische Obergrenze C der Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Bandbreite B und dem Verhältnis von Signalleistung zu konstanter Rauschleistung $\frac{S}{N}$.

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

C … maximale Datenübertragungsrate in Bit pro Sekunde (Bit/s)
$\frac{S}{N}$ … Verhältnis von Signalleistung und konstanter Rauschleistung (dimensionslos)
B … Bandbreite in Hertz (Hz)

– Beschreiben Sie, wie sich C ändert, wenn das Argument $1 + \frac{S}{N}$ verdoppelt wird.

Anstelle von $\frac{S}{N}$ wird oft die logarithmierte Größe *SNR* in Dezibel (dB) (Signal-zu-Rausch-Verhältnis) verwendet.

$$SNR = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)$$

– Ermitteln Sie, wie viele kBit/s bei einer Bandbreite B von 1 000 Hz und einem Signal-zu-Rausch-Verhältnis von 40 dB maximal übertragen werden können.

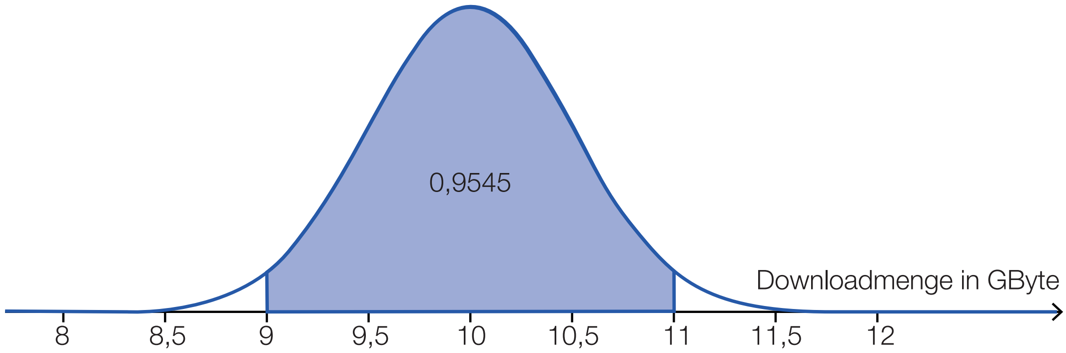
b) Der Download einer 500 MByte großen Datei wird durchgeführt.

– Berechnen Sie, wie lange dieser Download (in Stunden, Minuten und Sekunden) mit einer Datenübertragungsrate von 3 MBit/s dauert (1 Byte = 8 Bit).
– Berechnen Sie, um welchen Faktor sich die Downloadzeit erhöht, wenn die Datenübertragungsgrate um 10 % sinkt.

c) Die Downloadgeschwindigkeit (in MBit/s) in Abhängigkeit von der Zeit (in s) kann im Zeitintervall [0; 60] näherungsweise durch eine Funktion d_L beschrieben werden.

– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} d_L(t)\,dt$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

d) Die monatlichen Downloadmengen der Kunden eines Internetanbieters sind annähernd normalverteilt. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Interpretieren Sie die in der obigen Abbildung farblich gekennzeichnete Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
– Lesen Sie die Parameter μ und σ aus der obigen Abbildung ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$

$C_2 = B \cdot \log_2\left(2 \cdot \left(1 + \frac{S}{N}\right)\right)$, wobei C_2 der veränderten maximalen Datenübertragungsrate entspricht

$C_2 = B \cdot \left(\log_2(2) + \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)\right)$

$C_2 = B + B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$

$C_2 = B + C$

C wird um B größer.

$40 = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)$

$4 = \log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)$

$10\,000 = \frac{S}{N}$

$C = 1\,000 \cdot \log_2(1 + 10\,000)$

$C = 13\,287{,}85\ldots$ Bit/s

$C \approx 13{,}288$ kBit/s

b) $\frac{500 \cdot 8}{3} = 1\,333{,}33 \text{ s} = 22 \text{ min } 13{,}33 \text{ s}$

$\frac{500 \cdot 8}{2{,}7} = 1\,481{,}481 \text{ s}$

$\frac{1\,481{,}481}{1\,333{,}33} = 1{,}111$

Die Downloadzeit erhöht sich ungefähr um den Faktor 1,11, d.h. um rund 11 %.

c) Mit dem Ausdruck $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{60} d_L(t)\,dt$ wird die mittlere Downloadgeschwindigkeit im Zeitintervall [0; 60] berechnet.

d) Aus der Abbildung kann abgelesen werden, dass ein zufällig ausgewählter Kunde mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,45 % eine Downloadmenge zwischen 9 und 11 GByte pro Monat hat.

$\mu = 10$ GByte
$\sigma = 0{,}5$ GByte
Toleranzbereich: ±0,2 GByte

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 1 Zahlen und Maße
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) –
c) –
d) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) schwer
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 1
d) 2

Thema: Informatik

Quellen: –

Oberflächenspannung von Wasser

Aufgabennummer: B_268

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Oberfläche von Wasser verhält sich ähnlich einer gespannten, elastischen Folie. Diese Oberflächenspannung von Wasser ist abhängig von dessen Temperatur und kann näherungsweise durch die folgende Funktion σ beschrieben werden:

$$\sigma(T) = 59{,}2 + 53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right) \quad \text{mit } 273{,}15 \leq T \leq 370$$

T … Wassertemperatur in Kelvin (K)
$\sigma(T)$ … Oberflächenspannung bei der Wassertemperatur T in Mikronewton pro Meter (µN/m)

273,15 Kelvin entsprechen 0 °C.
Eine Temperaturveränderung um 1 Kelvin entspricht einer Veränderung um 1 °C.

a) – Berechnen Sie die Oberflächenspannung von Wasser bei 25 °C.
– Erklären Sie mithilfe der Funktionsgleichung, warum die Oberflächenspannung mit steigender Wassertemperatur abnimmt.
– Berechnen Sie die Funktionswerte der 1. Ableitung von σ für $T = 274$ K und für $T = 350$ K.
– Vergleichen Sie die Ergebnisse der berechneten Werte im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Ausgehend von $\sigma(T) = 59{,}2 + 53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right)$ wurden Umformungen durchgeführt.

– Kreuzen Sie diejenige Umformung an, die korrekt ist. *[1 aus 5]*

$e^{\sigma(T)} = e^{59{,}2} + 53{,}8 \cdot \left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right)$	☐
$\sigma(T) - 59{,}2 = 53{,}8 \cdot \frac{\ln(644 - T)}{\ln(273{,}15)}$	☐
$273{,}15 \cdot e^{\frac{\sigma(T) - 59{,}2}{53{,}8}} = 644 - T$	☐
$\frac{\sigma(T)}{53{,}8} = 59{,}2 + \ln(644 - T) - \ln(273{,}15)$	☐
$\sigma(T) - 59{,}2 + \ln(273{,}15) = 53{,}8 \cdot \ln(644 - T)$	☐

c) Es soll eine Funktion σ_1 ermittelt werden, deren Funktionswerte mit jenen der Funktion σ übereinstimmen, wobei die Wassertemperatur in der Funktion σ_1 jedoch in der Einheit °C verwendet werden soll.

T_C … Wassertemperatur in °C
$\sigma_1(T_C)$ … Oberflächenspannung bei der Wassertemperatur T_C in μN/m

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung von T_C auf.

d) Die Oberflächenspannung in Abhängigkeit von der Temperatur kann vereinfacht auch durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

Temperatur in K	275	285	295	305	315	325	335	345	355
Oberflächenspannung in μN/m	75,38	73,90	72,38	70,82	69,21	67,55	65,83	64,06	62,23

– Ermitteln Sie für diese Daten eine lineare Ausgleichsfunktion.
– Interpretieren Sie die Steigung dieser Ausgleichsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\sigma(298{,}15) = 71{,}89...$

Die Oberflächenspannung beträgt bei 25 °C (298,15 K) ungefähr 71,9 μN/m.

Steigt T, wird der Bruch $\frac{644 - T}{273{,}15}$ kleiner, und damit sinkt auch $53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right)$.
Es wird also ein immer kleiner werdender Wert zu 59,2 addiert.

$\sigma'(274) \approx -0{,}1454\ \frac{\mu\text{N/m}}{\text{K}}$

$\sigma'(350) \approx -0{,}183\ \frac{\mu\text{N/m}}{\text{K}}$

Die Oberflächenspannung sinkt mit steigender Wassertemperatur bei 350 K stärker als bei 274 K.

b)

[...]	
[...]	
$273{,}15 \cdot e^{\frac{\sigma(T) - 59{,}2}{53{,}8}} = 644 - T$	☒
[...]	
[...]	

c) $\sigma_1(T_C) = 59{,}2 + 53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - (273{,}15 + T_C)}{273{,}15}\right)$

d) Ermittlung durch lineare Regression: $\sigma(T) = -0{,}16\ldots \cdot T + 120{,}74\ldots$
Bedeutung der Steigung: Nimmt die Temperatur um 1 K zu, nimmt die Oberflächenspannung um rund 0,16 μN/m ab.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz, C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 1
c) 1
d) 2

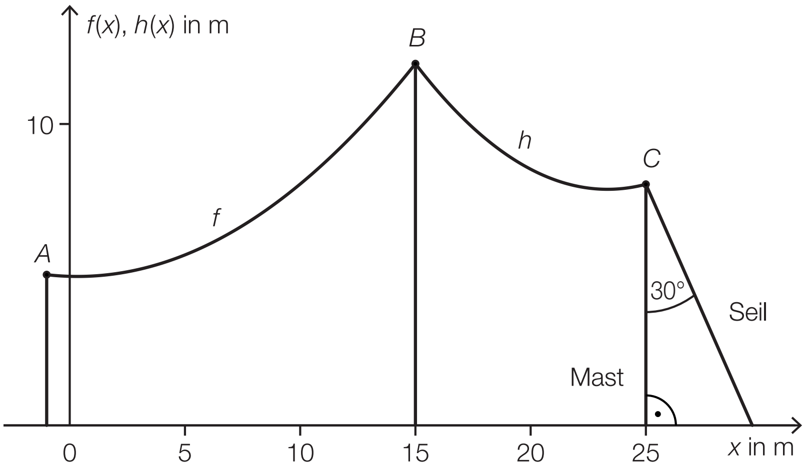
Thema: Sonstiges

Quellen: —

Stromversorgung einer Baustelle*

Aufgabennummer: B_308		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Eine Stromleitung zur Versorgung einer Baustelle soll, wie in der nachstehenden Skizze dargestellt, durch die 3 Punkte *A*, *B* und *C* führen. Die zwischen den einzelnen Masten liegenden Teile der Stromleitung können näherungsweise durch Graphen von Polynomfunktionen 2. Grades durch die Punkte *A* und *B* bzw. *B* und *C* beschrieben werden. Alle Längen sind in Metern angegeben.



a) Der erste Teil der Leitung verläuft zwischen den Punkten $A = (-1|5)$ und $B = (15|12)$.

Eine Gleichung der Tangente im Punkt *A* an den Graphen der Polynomfunktion *f* lautet:

$y = 4{,}913 - 0{,}0875 \cdot x$

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion 2. Grades auf.
– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

b) Zwischen den Punkten *B* und *C* kann die Stromleitung durch den Graphen der folgenden Funktion *h* beschrieben werden:

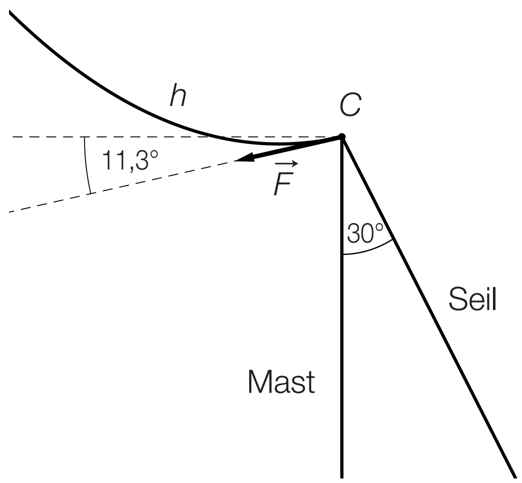
$h(x) = \frac{3}{50} \cdot x^2 - \frac{14}{5} \cdot x + \frac{81}{2}$ mit $15 \leq x \leq 25$

Die Stromleitung soll in diesem Bereich in einer Höhe von mindestens 7 m verlaufen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Bedingung erfüllt ist.
– Berechnen Sie die Länge desjenigen Seils, das vom Punkt *C* zum Boden gespannt ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Wie in der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Skizze dargestellt, ist im Punkt C ein Seil unter einem Winkel von 30° zum Mast gespannt.
Auf der anderen Seite wirkt durch die Stromleitung auf den Befestigungspunkt C eine Kraft $\vec{F}$ von 1 000 Newton unter einem Winkel von 11,3° zur Waagrechten. Diese Kraft kann in zwei Kräfte aufgeteilt werden, eine in Seilrichtung und eine in Mastrichtung.



– Berechnen Sie den Betrag derjenigen Kraft, die in Seilrichtung wirkt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten:
Punkt A: $5 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$
Punkt B: $12 = a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c$
Tangentensteigung im Punkt A: $-0{,}0875 = 2 \cdot a \cdot (-1) + b$

Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{21}{640} \approx 0{,}0328$

$b = -\frac{7}{320} \approx -0{,}0219$

$c = \frac{633}{128} \approx 4{,}95$

b) Berechnen des lokalen Minimums von h:

$h'(x) = \frac{3}{25} \cdot x - \frac{14}{5}$

$0 = \frac{3}{25} \cdot x - \frac{14}{5} \Rightarrow x_{min} = \frac{70}{3}$ (nach oben offene Parabel)

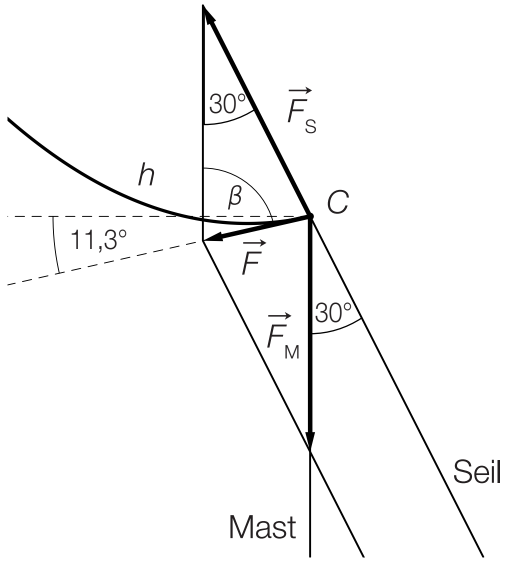
$h(x_{min}) = \frac{47}{6} \approx 7{,}83...$

Die minimale Höhe ist größer als 7 m, damit ist die Bedingung erfüllt.

s ... Länge des Seils in m
$h(25) = 8$

$\cos(30°) = \frac{8}{s}$
$s = 9{,}237...\text{ m} \approx 9{,}24\text{ m}$

c) $\beta = 90° - 11{,}3° = 78{,}7°$



$$|\vec{F}_S| = \frac{1\,000 \cdot \sin(78{,}7°)}{\sin(30°)} = 1\,961{,}2\ldots$$

$|\vec{F}_S| \approx 1\,961$ N

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *A* und *B*
   1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung unter Berücksichtigung der Tangentensteigung
   1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × D: für die richtige Überprüfung
   1 × B: für die richtige Berechnung der Länge des Seils

c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Zerlegung der Kraft in die beiden Richtungen Mast und Seil (Kraftdreieck oder Kräfteparallelogramm)
   1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags der Kraft, die in Seilrichtung wirkt

Länge eines Werkstücks

Aufgabennummer: B_309

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einer Fertigungsanlage werden Werkstücke erzeugt, deren Längen erfahrungsgemäß normalverteilt sind.

a) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit μ = 72,3 mm und σ = 0,5 mm.
Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang n = 7 entnommen.

Für jede Stichprobe wird der Mittelwert der Längen bestimmt.

– Geben Sie die Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ an.
– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 95 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.
– Beschreiben Sie, wie sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit sich die Breite dieses 95-%-Zufallsstreubereichs halbiert.
– Begründen Sie, warum das Maximum der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ für n = 7 größer ist als jenes für n = 5.

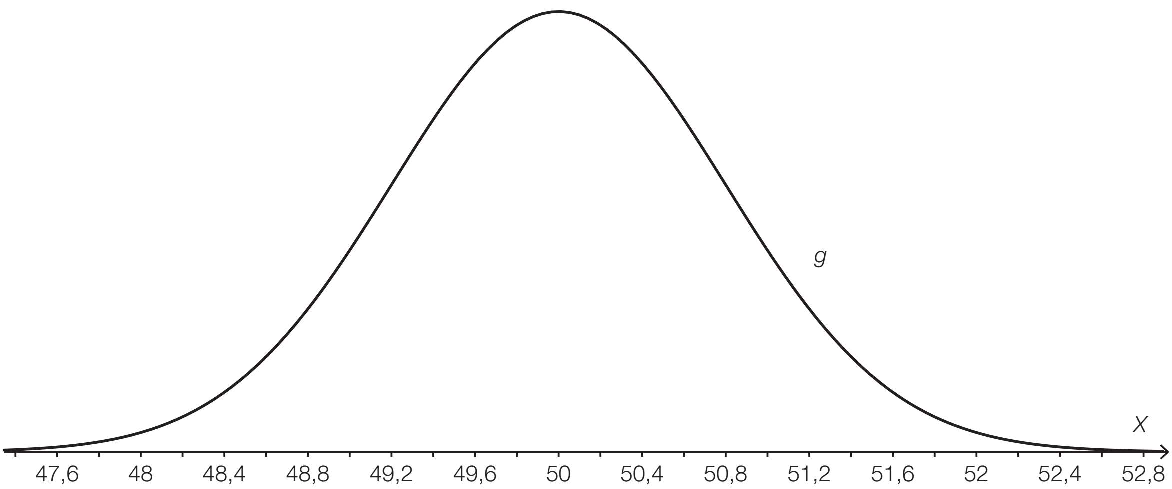
b) Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit μ = 72,3 mm.
Werkstücke, die zu lang oder zu kurz sind, sind Ausschuss und werden aussortiert.
Abweichungen von bis zu ±0,9 mm vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie für eine Standardabweichung von σ = 0,5 mm die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Werkstück aussortiert wird.
– Berechnen Sie, wie groß die Standardabweichung sein müsste, damit der Ausschussanteil 2 % beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion g einer normalverteilten Zufallsvariablen X dargestellt.

– Begründen Sie mithilfe der Dichtefunktion, warum für die zugehörige Verteilungsfunktion G gilt: $G(\mu) = 0{,}5$.
– Veranschaulichen Sie die Wahrscheinlichkeit $1 - G(51)$ in der unten stehenden Abbildung.
– Lesen Sie aus dem Graphen der Dichtefunktion die Standardabweichung σ ab.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Parameter sind: $\mu_{\bar{X}} = 72{,}3$ mm und $\sigma_{\bar{X}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{7}}$ mm.

Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:
$\mu \pm u_{0{,}975} \cdot \sigma_{\bar{X}}$
$u_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$
Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [71,9; 72,7].

Eine Halbierung der Breite erfordert die Vervierfachung des Stichprobenumfangs.

Die Standardabweichung der Stichprobe ist umso kleiner, je größer der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 7$ schmäler als für $n = 5$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 7$ größer sein als für $n = 5$.

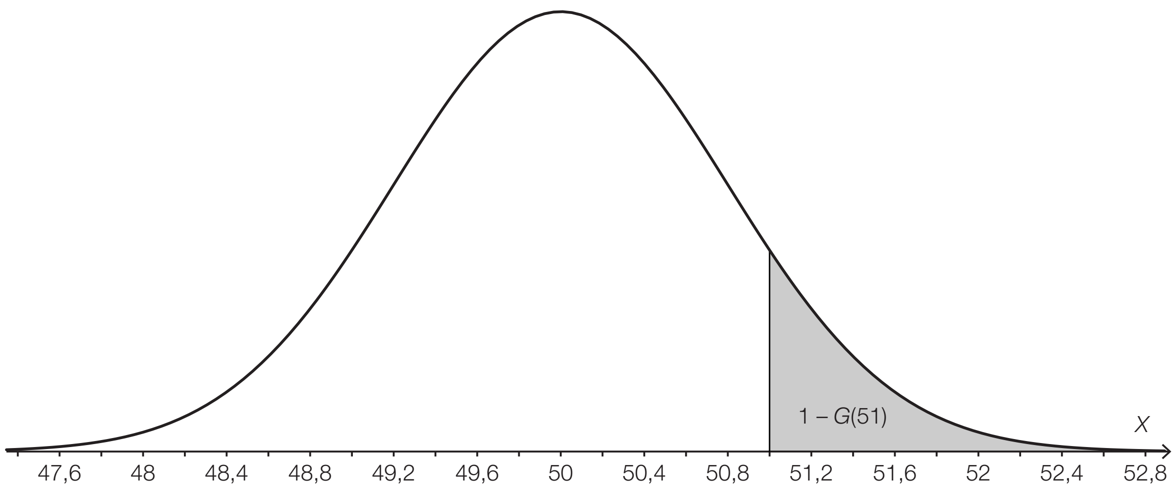
b) $P(\text{„Werkstück wird aussortiert"}) = 1 - P(71{,}4 \leq X \leq 73{,}2) = 0{,}0718\ldots \approx 7{,}2\ \%$

$$\sigma = \frac{x_{ob} - \mu}{u_{0{,}99}} = \frac{73{,}2 - 72{,}3}{2{,}326\ldots} = 0{,}38\ldots \approx 0{,}4$$

Damit der Ausschussanteil 2 % beträgt, müsste die Standardabweichung rund 0,4 mm sein.

c) Der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion beträgt 1. Der Graph der Dichtefunktion ist symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts μ.

Daher gilt: $G(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5$.



$\sigma = 0{,}8$ mm
Toleranzbereich: [0,6; 1,0]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Angabe der Parameter
   1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs
   1 × C: für eine richtige Beschreibung
   1 × D: für eine richtige Begründung

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung

c) 1 × D: für eine richtige Begründung
   1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit als Fläche
   1 × C: für das richtige Ablesen der Standardabweichung im Toleranzbereich [0,6; 1,0]

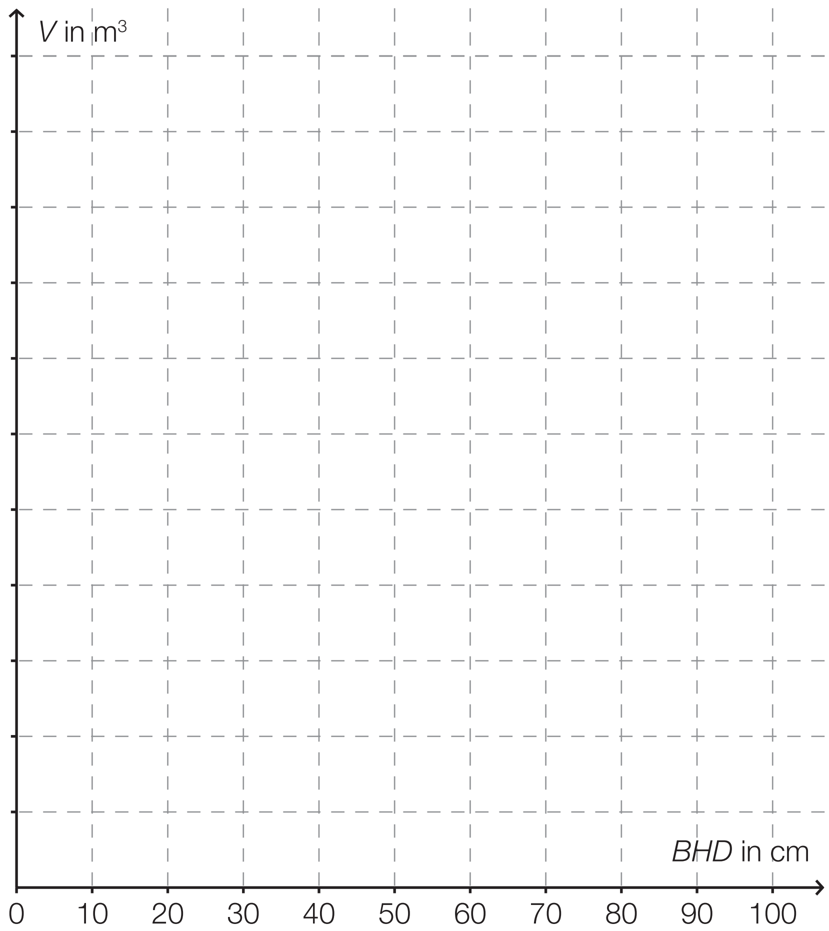
Volumen eines Baumes*

Aufgabennummer: B_310		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Die Ermittlung des Volumens eines Baumstamms kann auf verschiedene Weisen erfolgen.

a) Näherungsweise kann das Volumen eines stehenden Baums folgendermaßen ermittelt werden:
„Man misst den Brusthöhendurchmesser in cm (= Durchmesser des Baums in 1,3 m Höhe), multipliziert diese Zahl mit sich selbst und teilt das Ergebnis durch 1 000. Die Maßzahl des Ergebnisses ist die Maßzahl des Volumens eines Baums in m³."

– Übertragen Sie diesen Zusammenhang in eine Formel. Benutzen Sie dazu die Bezeichnungen *BHD* (Brusthöhendurchmesser) und *V* (Volumen).
– Stellen Sie das Volumen *V* eines Baums in Abhängigkeit von seinem Brusthöhendurchmesser *BHD* im Intervall [0; 100] im unten stehenden Diagramm dar. Verwenden Sie eine geeignete Skalierung der senkrechten Achse.



* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die *erweiterte Formel von Denzin* bietet eine Möglichkeit, das Volumen eines Baums näherungsweise zu berechnen. Als Formel angeschrieben lautet sie (für eine bestimmte Baumart):

$$V = \frac{BHD^2}{1\,000} \cdot \frac{3 \cdot h + 25}{100}$$

BHD ... Durchmesser in 1,3 Metern Höhe („Brusthöhendurchmesser") in Zentimetern (cm)
h ... Höhe des Baums in Metern (m)
V ... Volumen des Baums in Kubikmetern (m^3)

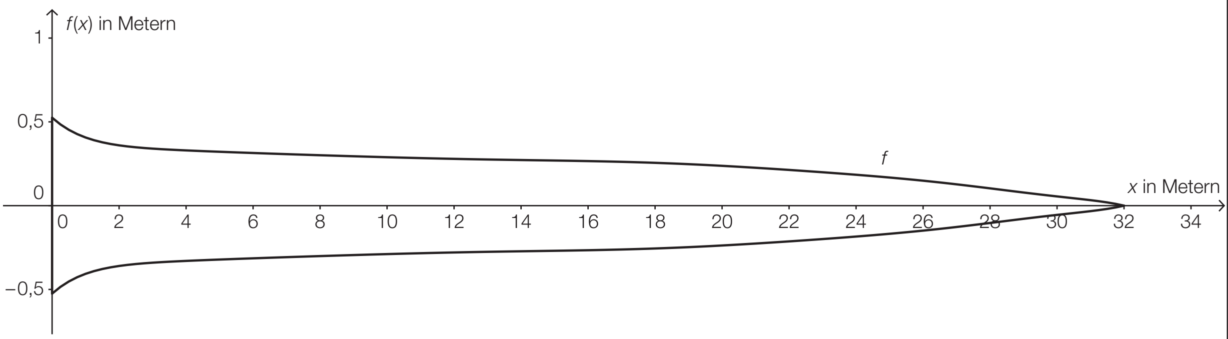
Ein 30 m hoher Baum hat einen Brusthöhendurchmesser von 50 cm. Für diesen Baum soll das Volumen mit der erweiterten Formel von Denzin ermittelt werden. Das tatsächliche Volumen dieses Baums beträgt 3,05 m^3.

– Ermitteln Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn man das Volumen mit der erweiterten Formel von Denzin berechnet.

c) Zur Berechnung seines Volumens kann ein Baumstamm näherungsweise als Kegel angesehen werden. Man geht in diesem Modell davon aus, dass das Verhältnis von Höhe zu Durchmesser stets gleich bleibt. Das Modell für einen bestimmten Baumstamm ist ein Drehkegel mit einem Durchmesser von 22 cm und einer Höhe von 18 m. In einem bestimmten Jahr vergrößert sich der Durchmesser um 2 mm.

– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells das Höhenwachstum des Baums in diesem Jahr.
– Zeigen Sie, dass eine Verdoppelung des Kegeldurchmessers zu einer Verachtfachung des Volumens führt.

d) Die Form eines gefällten Baumstamms kann näherungsweise durch Rotation des Graphen einer Funktion f um die x-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



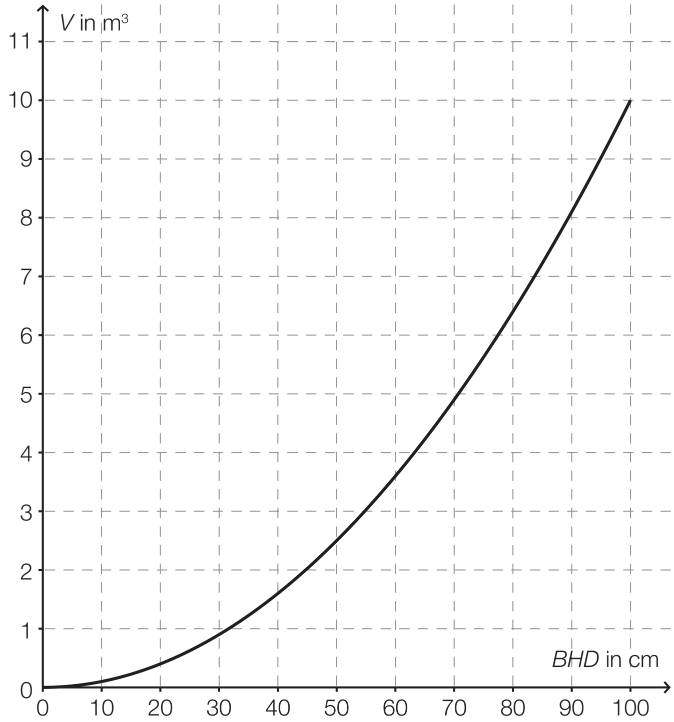
– Erstellen Sie eine Formel, mit der das Volumen V des Baumstamms berechnet werden kann.

V = ____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $V = \frac{BHD^2}{1\,000}$



b) $V = \frac{50^2}{1\,000} \cdot \frac{3 \cdot 30 + 25}{100} = 2{,}875$

Betrag des relativen Fehlers: $\left|\frac{2{,}875 - 3{,}05}{3{,}05}\right| = 0{,}0573\ldots \approx 5{,}7\ \%$

c) $\frac{1\,800}{22} = \frac{x}{22{,}2} \quad \Rightarrow \quad x = 1\,816{,}36\ldots$

$x - 1\,800 = 16{,}36\ldots \approx 16{,}4$

Der Höhenzuwachs des Baums in diesem Jahr beträgt rund 16,4 cm.

Eine Verdoppelung des Kegeldurchmessers bringt auch eine Verdoppelung der Höhe mit sich:

$V_{neu} = \frac{1}{3} \cdot (2r)^2 \cdot \pi \cdot 2h = \frac{1}{3} \cdot 4r^2 \cdot \pi \cdot 2h = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = 8 \cdot V_{alt}$

d) $V = \pi \cdot \int_0^{32} \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Formel
   1 × A2: für die sinngemäß richtige Darstellung des Graphen (Parabel mit Tiefpunkt im Koordinatenursprung)
   1 × A3: für eine geeignete Skalierung der vertikalen Achse

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Volumens mithilfe der erweiterten Formel von Denzin
   1 × B2: für das richtige Ermitteln des Betrags des relativen Fehlers

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Höhenwachstums in diesem Jahr
   1 × D: für einen richtigen Nachweis

d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Riesenräder*

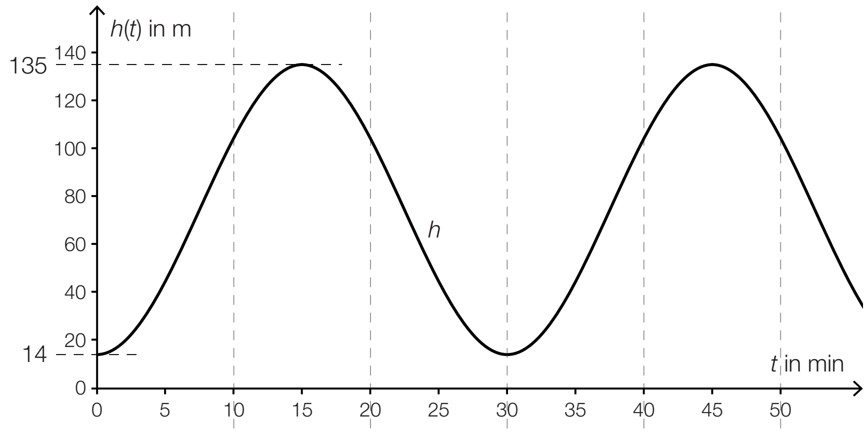
Aufgabennummer: B_311		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Dreht sich ein Riesenrad mit konstanter Geschwindigkeit, so gilt für die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet:

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$$

a) Das *London Eye,* eines der größten Riesenräder, dreht sich so langsam, dass es für das Ein- und Aussteigen der Fahrgäste nicht anhalten muss.

Der Graph der Funktion h ist in folgender Abbildung dargestellt:



– Lesen Sie den Durchmesser des Riesenrades ab.
– Ermitteln Sie den Parameter ω.
– Ermitteln Sie den Parameter c.

b) Dreht sich das *Wiener Riesenrad* ohne Zwischenstopps, so gilt für die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet:

$h(t) = 30{,}48 \cdot \sin(0{,}02464 \cdot t) + 34{,}27$

t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe, in der sich diese Gondel zum Zeitpunkt t befindet, in Metern (m)

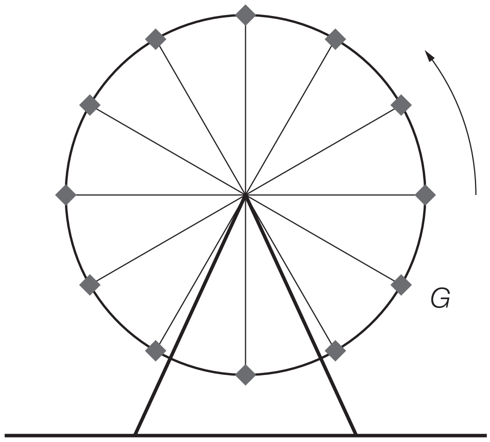
– Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem diese Gondel erstmals eine Höhe von 60 m erreicht.
– Bestimmen Sie die Zeitdauer, während derer sich die Gondel im Laufe einer Umdrehung in einer Höhe von mindestens 60 m befindet.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Riesenrad mit 12 gleichmäßig verteilten Gondeln dreht sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn. Die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t über dem Boden befindet, ist:

$$h(t) = 15 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{60} \cdot t + \varphi\right) + 20$$

t ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in s
$h(t)$ ... Höhe, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt t befindet, in m



– Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit (in km/h) sich eine Gondel entlang der Kreisbahn bewegt.

Die Gondel G befindet sich zur Zeit $t = 0$ s an der in der oben stehenden Skizze dargestellten Position.

– Dokumentieren Sie in Worten, wie Sie den Parameter φ für die Funktion h der Gondel G ermitteln können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Durchmesser: $d = 121$ m

Aus der Periodendauer $T = 30$ min ergibt sich:

$\omega = \frac{2\pi}{30}\ \text{min}^{-1} \approx 0{,}21\ \text{min}^{-1}$

Verschiebung nach oben: $c = 74{,}5$ m

b) $60 = 30{,}48 \cdot \sin(0{,}02464 \cdot t) + 34{,}27$

$t_1 = 40{,}78\ldots\ \text{s} \approx 41\ \text{s}$
$t_2 = 86{,}71\ldots\ \text{s} \approx 87\ \text{s}$

$t_2 - t_1 \approx 46\ \text{s}$

Die Gondel erreicht nach etwa 41 Sekunden erstmals 60 Meter und befindet sich rund 46 Sekunden lang in einer Höhe von mindestens 60 Metern.

c) Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man für die Zeitdauer einer Umdrehung: $T = 120$ s.

Umfang des Kreises: $u = 30\pi$ m

$v = \frac{30\pi}{120}\ \text{m/s} \approx 0{,}785\ \text{m/s} \approx 2{,}827\ \text{km/h}$

Da es 12 gleichmäßig verteilte Gondeln gibt, beträgt der Winkel zwischen je 2 benachbarten Gondeln 30°. φ wird gegen den Uhrzeigersinn von der „rechten horizontalen Lage“ aus gemessen. Der Winkel beträgt daher –30° bzw. 330°, im Bogenmaß also $-\frac{\pi}{6}$ bzw. $\frac{11\pi}{6}$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Durchmessers
1 × B1: für die richtige Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit
1 × B2: für die richtige Ermittlung des Parameters c

b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung des Zeitpunkts
1 × B2: für die richtige Bestimmung der Zeitdauer

c) 1 × A: für eine richtige Modellbildung zur Berechnung der Geschwindigkeit
1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit in km/h
1 × C: für die richtige Dokumentation zur Ermittlung des Parameters φ
(auch eine Beschreibung mit einem Winkel in Grad ist als richtig zu werten)

Wassergefäße*

Aufgabennummer: B_313		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

a) Zur Beschreibung der Form eines Wassergefäßes kann eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x - b)^4 + c$ verwendet werden.

Man kennt von dieser Funktion folgende Eigenschaften:

Der Funktionsgraph ist symmetrisch bezüglich der y-Achse und enthält die Punkte $(25|60)$ und $(0|0)$.

– Begründen Sie, warum $c = 0$ ist.
– Begründen Sie, warum $b = 0$ ist.
– Berechnen Sie den Koeffizienten a.

b) Die Form eines Wassergefäßes kann durch Rotation des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung um die y-Achse beschrieben werden:

$y = 0{,}0001421 \cdot x^4$ mit $x \geq 0$

x, y ... Längen in cm

Der obere Rand des Gefäßes hat einen Radius von 30 cm.
Das Gefäß wird bis zum oberen Rand gefüllt.

– Berechnen Sie das Volumen in Litern.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Da der Punkt (0|0) auf dem Funktionsgraphen liegt, ist $c = 0$. Da der Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, muss $b = 0$ sein.

$$a \cdot 25^4 = 60 \;\Rightarrow\; a = \frac{12}{78\,125} = 0{,}0001536$$

b) Höhe des Gefäßes: $H = 0{,}0001421 \cdot 30^4 = 115{,}101$

$$V = \int_0^H \pi \cdot x^2 \, \mathrm{d}y = \int_0^H \pi \cdot \sqrt[2]{\frac{y}{0{,}0001421}} \, \mathrm{d}y = 216\,960{,}\ldots$$

$V \approx 216\,960 \text{ cm}^3 \approx 217$ Liter

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für die richtige Begründung, warum $c = 0$ ist
1 × D2: für die richtige Begründung, warum $b = 0$ ist
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten a

b) 1 × A1: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Volumens
1 × A2: für das richtige Angeben der Integralgrenzen
1 × B: für die richtige Berechnung des Volumens in Litern

Aufgaben mit Herz

Aufgabennummer: B_026

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Druckschablone in Form eines Herzens soll gezeichnet werden (siehe Abbildung 1).

Im linken oberen Bereich für $0 \text{ dm} \leq x \leq 1 \text{ dm}$ wird die Umrisslinie durch eine quadratische Funktion f definiert, wobei sich der Scheitel der Parabel bei $x = 1$ befindet. Im rechten oberen Bereich für $1 \text{ dm} \leq x \leq 1{,}5 \text{ dm}$ ist die Herzlinie durch einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 0{,}5$ dm definiert. Der untere Teil der Umrisslinie entsteht durch Spiegelung des oberen Teils an der x-Achse.

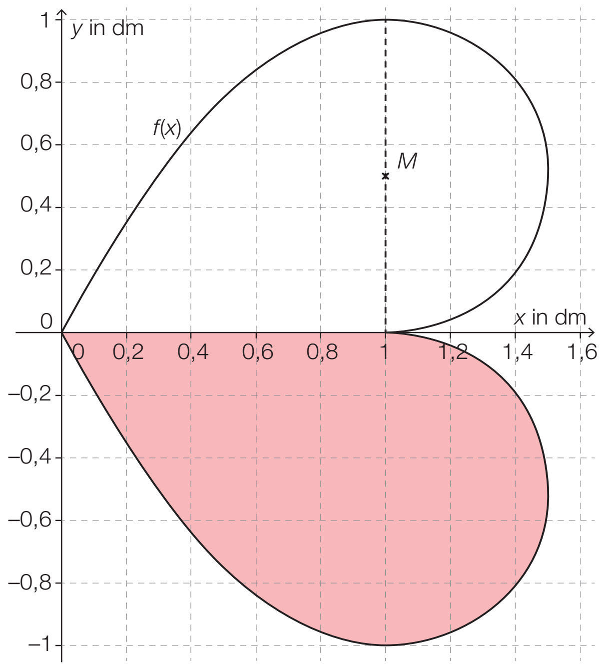


Abbildung 1

a) Die quadratische Funktion f hat die Form $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$, wobei x_s und y_s die Koordinaten des Scheitels sind.

– Berechnen Sie den Parameter a.

Die Koordinaten eines jeden Punktes $(x|y)$, der auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (1|0{,}5)$ und dem Radius $r = 0{,}5$ liegt, erfüllen die Gleichung $(y - 0{,}5)^2 + (x - 1)^2 = 0{,}25$.

– Ermitteln Sie anhand dieser Gleichung die y-Koordinaten für $x = 1{,}4$.

b) Eine andere Herzkurve erhält man, wenn man im Bereich $0 \text{ dm} \leq x \leq 1 \text{ dm}$ die obige Funktion f durch die kubische Funktion g mit $g(x) = -2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2$ ersetzt.

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g in die obige Darstellung hinzu.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des gesamten Flächeninhalts A dieser neuen Herzfläche auf.

A = ____

– Berechnen Sie diesen Flächeninhalt.

c) Eine Herzhälfte des in Abbildung 3 dargestellten Druckmusters erhält man durch die beiden Funktionen h_1 und h_2 (vgl. Abbildung 2):
$h_1(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x^2}$ und $h_2(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1 - x^2}$

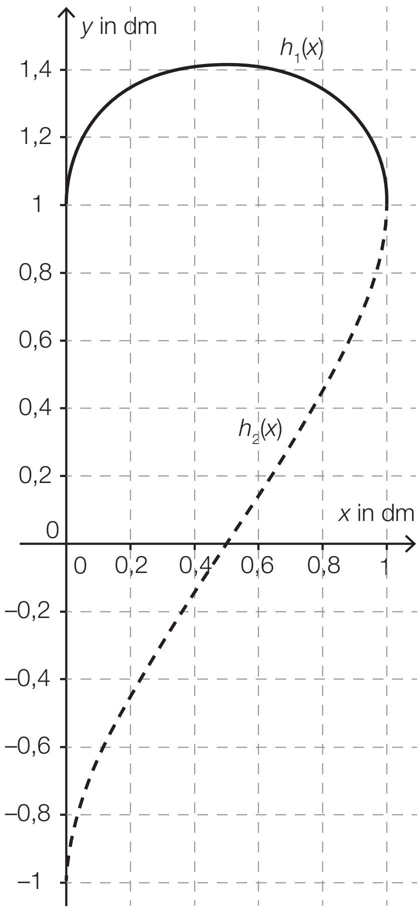


Abbildung 2

Abbildung 3

– Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichungen, dass der Definitionsbereich D für beide Funktionen $D = [0; 1]$ ist.

– Bestimmen Sie die Nullstelle von h_2 im Definitionsbereich.

d) Durch schrittweise Halbierung der Flächeninhalte entsteht das in Abbildung 3 dargestellte Druckmuster.

– Berechnen Sie die schwarze Fläche dieses Musters, wenn die Gesamtfläche des größten Herzens den Flächeninhalt π dm² hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

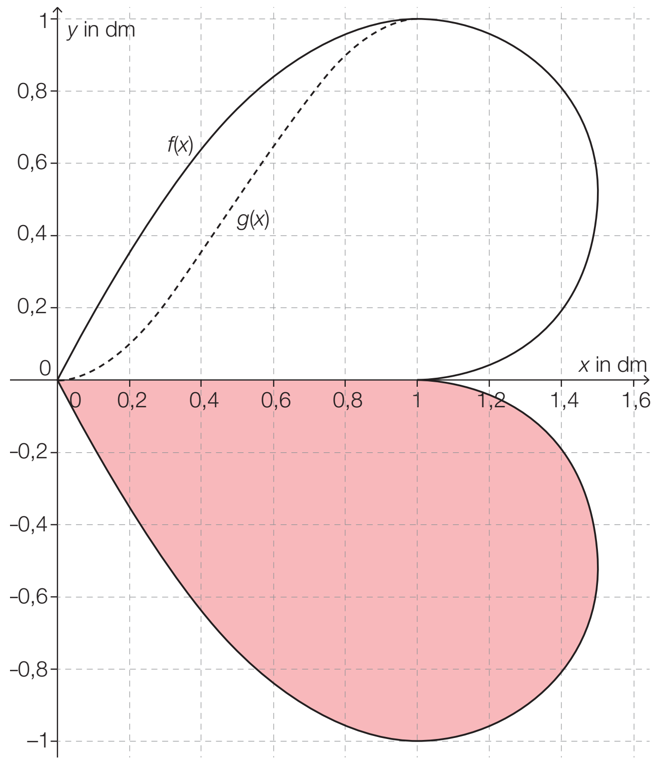
a) $f(x) = a \cdot (x - 1)^2 + 1$

$f(0) = 0 \;\Rightarrow\; a \cdot (-1)^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; a = -1$

$y_{1,2} = \pm\sqrt{0{,}25 - (x - 1)^2} + 0{,}5$

Damit erhält man: $y_1 = 0{,}2$ und $y_2 = 0{,}8$

b)



$A = 0{,}5^2 \cdot \pi + 2 \cdot \int_0^1 g(x)\,dx$

$A = \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\text{ dm}^2 \approx 1{,}785\text{ dm}^2$

c) Beide Wurzelargumente müssen positiv sein, d. h. $x \geq 0$ und $1 - x^2 \geq 0$, womit $1 \geq x^2$.
Beide Bedingungen ergeben $D = [0; 1]$.

$\sqrt{x} - \sqrt{1 - x^2} = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$

d) Die schwarze Fläche ergibt sich durch $A_{ges} = \left(\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16}\right) = \frac{11 \cdot \pi}{16} \approx 2{,}16\text{ dm}^2$.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 3
c) mittel	c) 2
d) mittel	d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

LED-Lampen (2)*

Aufgabennummer: B_315

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

a) LED-Lampen sind derzeit wesentlich teurer als Glühlampen, zeichnen sich aber durch eine höhere Lebensdauer und durch eine höhere Energieeffizienz aus.

Für eine Lampe, die 1 000 Stunden pro Jahr in Betrieb ist, kann als Leuchtmittel eine Glühlampe oder eine LED-Lampe verwendet werden. Um die dabei anfallenden Kosten zu vergleichen, werden die folgenden Daten benötigt:

	Glühlampe	LED-Lampe
Preis pro Stück	€ 0,75	€ 15,00
Lebensdauer	1 Jahr	25 Jahre
Energiekosten pro Jahr	€ 5	€ 0,60

– Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für diesen Kostenvergleich.

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung …	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1		
2		
3		
4		
5		

– Lesen Sie aus dieser Tabelle ab, nach wie vielen ganzen Jahren die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer sind als bei der Verwendung von Glühlampen.

* ehemalige Klausuraufgabe

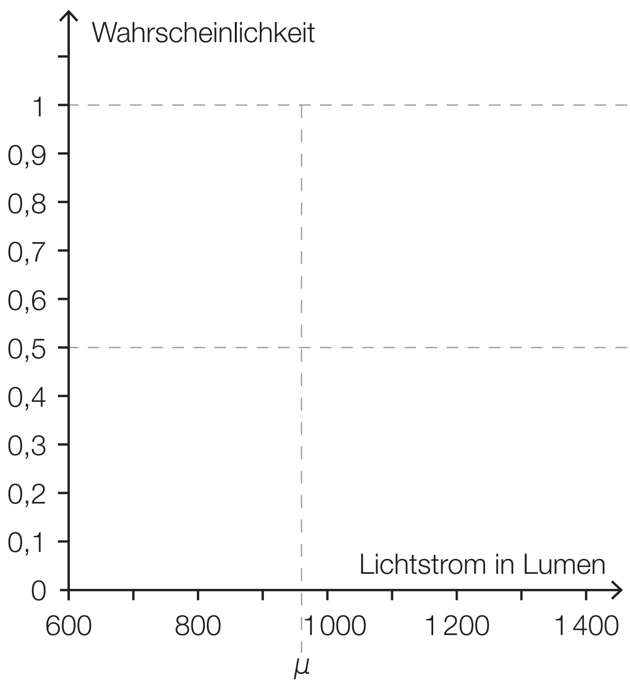
b) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden.
In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen mit verschiedenem Lichtstrom der jeweilige Preis angegeben.

Lichtstrom in Lumen	136	300	400	600	800
Preis in Euro/Stück	6,00	9,90	9,99	16,50	23,40

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Der Preis soll in Abhängigkeit vom Lichtstrom beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion denjenigen Preis, der für eine LED-Lampe mit einem Lichtstrom von 500 Lumen zu erwarten ist.

c) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ angenommen werden. Dabei liegen 95 % der Lichtstromwerte in dem um μ symmetrischen Intervall von 780 Lumen bis 1 140 Lumen.

– Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.
– Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in der nachstehenden Abbildung.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 12-Watt-LED-Lampe einen Lichtstrom von bis zu 900 Lumen hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

Verwendungsdauer in Jahren	insgesamt angefallene Kosten bei der Verwendung …	
	von Glühlampen	einer LED-Lampe
1	€ 5,75	€ 15,60
2	€ 11,50	€ 16,20
3	€ 17,25	€ 16,80
4	€ 23,00	€ 17,40
5	€ 28,75	€ 18,00

Nach 3 Jahren sind die insgesamt angefallenen Kosten bei der Verwendung einer LED-Lampe erstmals geringer als bei der Verwendung von Glühlampen.

b) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 0{,}026 \cdot x + 1{,}534$

x … Lichtstrom in Lumen
$f(x)$ … Preis bei einem Lichtstrom x in Euro/Stück

Die Steigung 0,026 besagt, dass pro zusätzlichem Lumen Lichtstrom der Preis um € 0,026 steigt.

$f(500) \approx 14{,}53$
Für eine LED-Lampe mit 500 Lumen ist ein Preis von € 14,53 pro Stück zu erwarten.

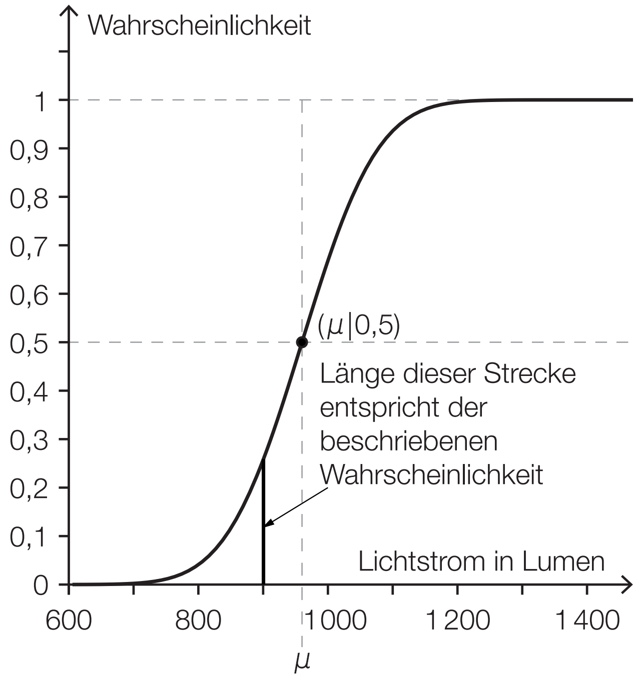
c) $\mu = \frac{780 + 1\,140}{2} = 960$

Der Erwartungswert beträgt 960 Lumen.

Aufgrund der Symmetrie gilt: $P(X \leq 1\,140) = 0{,}975$
$\phi(z) = 0{,}975 \quad \Rightarrow \quad z = 1{,}959...$

$\sigma = \frac{1\,140 - 960}{1{,}959...} = 91{,}8...$

Die Standardabweichung beträgt rund 92 Lumen.



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle
1 × C: für das richtige Ablesen aus der Tabelle

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung des Preises pro Stück

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung
1 × A1: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der Abbildung

Segeln*

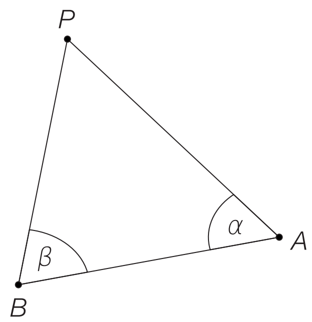
Aufgabennummer: B_321

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Entfernungen werden beim Segeln in nautischen Meilen (NM) angegeben. Die davon abgeleitete Geschwindigkeitseinheit nautische Meilen pro Stunde wird *Knoten* genannt.

a) Ein Segelboot fährt, nachdem es vom Punkt P gestartet ist und den Punkt A passiert hat, zum Punkt B. Von dort fährt es zum Punkt P zurück (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).

Die folgenden Abmessungen sind bekannt: $\alpha = 63°$, $\overline{PA} = 3{,}3$ NM und $\overline{AB} = 2{,}7$ NM.

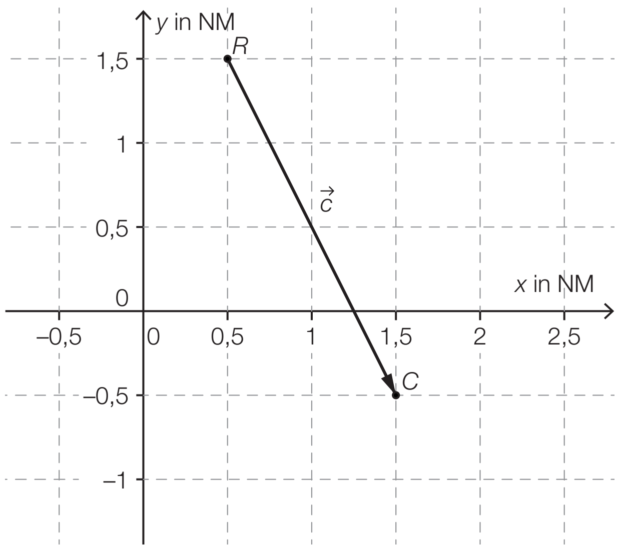


– Berechnen Sie die Entfernung $\overline{BP}$.
– Berechnen Sie die Dauer dieser Umrundung, wenn das Segelboot mit einer mittleren Geschwindigkeit von 6,8 Knoten fährt.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Entfernung $\overline{BP}$ auf, wenn anstatt der Entfernung $\overline{AB}$ der Winkel β bekannt wäre.

$\overline{BP} =$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Segelboot startet im Punkt R und fährt geradlinig zum Punkt C. Dort findet eine Kursänderung statt, um den Punkt D zu erreichen.



– Lesen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{c}$ ab.
– Zeichnen Sie den Punkt D ein, der ausgehend vom Punkt C mit dem Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ angefahren wird.
– Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{c} \cdot \vec{d}$.
– Interpretieren Sie dieses Skalarprodukt geometrisch.

c) Die Vortriebskraft F_V beim Segeln lässt sich mit folgender Formel annähernd berechnen:

$$F_V = \frac{A \cdot \rho \cdot v_W^2}{4}$$

F_V ... Vortriebskraft in Newton (N)
A ... Segelfläche in m²
v_W ... Windgeschwindigkeit am Segel in m/s
ρ ... Dichte der Luft (ρ = 1,225 kg/m³)

– Berechnen Sie, wie groß die Segelfläche sein muss, damit bei einer Windgeschwindigkeit von 5 m/s eine Vortriebskraft von 153 N erreicht wird.
– Geben Sie an, wie sich die Vortriebskraft verändert, wenn sich die Windgeschwindigkeit verdoppelt und die anderen Parameter konstant bleiben.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overline{BP} = \sqrt{3{,}3^2 + 2{,}7^2 - 2 \cdot 3{,}3 \cdot 2{,}7 \cdot \cos(63°)} = 3{,}176... \approx 3{,}18$

Die Entfernung zwischen dem Punkt B und dem Punkt P beträgt rund 3,18 NM.

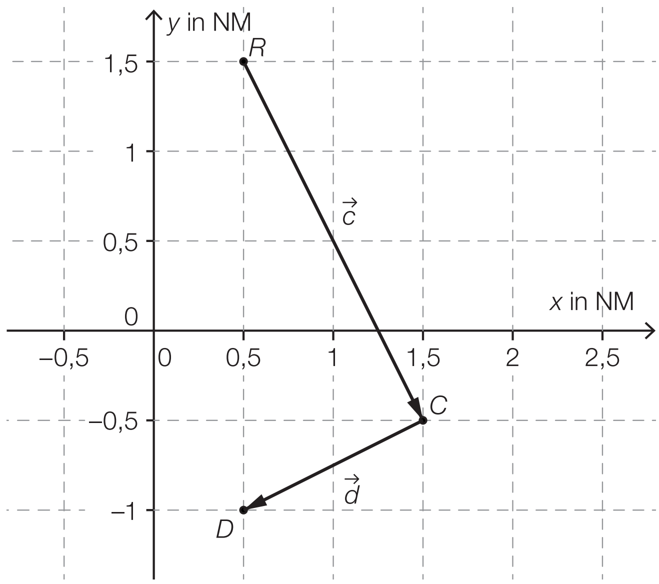
$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BP} = 9{,}176...$

$t = \frac{9{,}176...}{6{,}8} = 1{,}349... \approx 1{,}35$

Die Umrundung dauert etwa 1,35 Stunden.

Sinussatz: $\frac{\overline{PA}}{\sin(\beta)} = \frac{\overline{BP}}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \overline{BP} = \frac{\overline{PA} \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



$\vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = 0$

Die beiden Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ stehen normal aufeinander.

c) $A = \frac{4 \cdot F_V}{1{,}225 \cdot v_W^2} = \frac{4 \cdot 153}{1{,}225 \cdot 5^2} = 19{,}9... \approx 20$

Die Segelfläche muss dazu rund 20 m² groß sein.

Eine Verdoppelung der Windgeschwindigkeit führt zu einer Vervierfachung der Vortriebskraft.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Entfernung $\overline{BP}$
1 × B2: für die richtige Berechnung der Dauer dieser Umrundung
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Koordinaten des Vektors $\vec{c}$
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Punkts D
1 × B: für die richtige Berechnung des Skalarprodukts
1 × C2: für die richtige geometrische Interpretation des Skalarprodukts

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts der Segelfläche
1 × C: für die richtige Beschreibung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Schwangerschaft*

Aufgabennummer: B_322

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Nach der Ausbildung der inneren Organe verwendet man für das ungeborene Kind den Begriff *Fötus*.

a) Bei Ultraschalluntersuchungen wird die Scheitel-Steiß-Länge (SSL) von Föten bestimmt. In der nachstehenden Tabelle sind die durchschnittlichen Längen in Zentimetern (cm) in der jeweiligen Schwangerschaftswoche angegeben:

Schwangerschaftswoche	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
SSL in cm	4,1	5,4	7,4	8,7	10,1	11,9	13,3	14,1	14,8	16,2

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Regressionsgeraden. (Die Länge soll in Abhängigkeit von der Schwangerschaftswoche beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang.

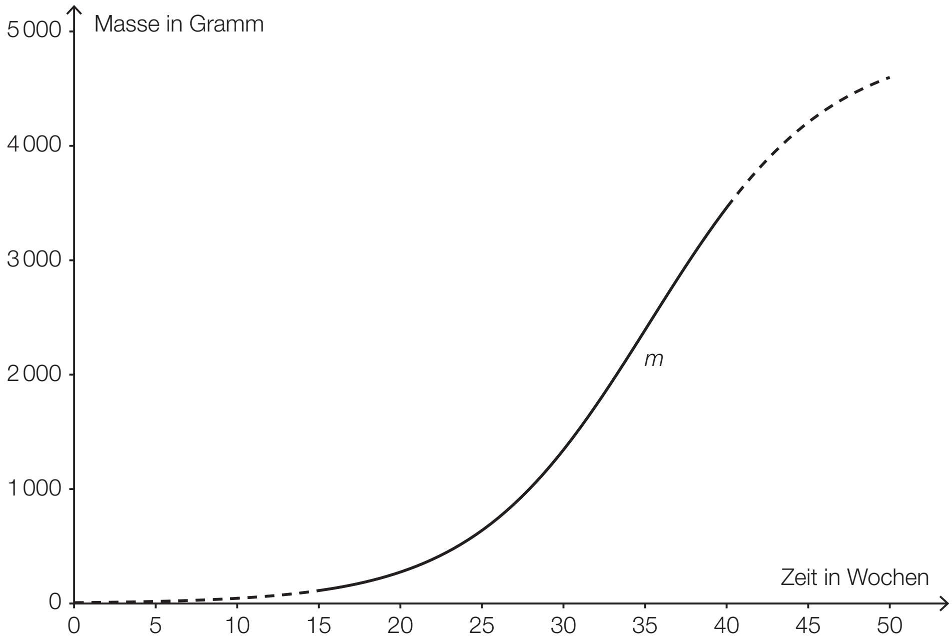
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die zunehmende Masse eines Fötus kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{4\,900}{1 + 681 \cdot e^{-0{,}185 \cdot t}} \quad \text{mit} \quad 15 \leq t \leq 40$$

t … Zeit seit Beginn der Schwangerschaft in Wochen
$m(t)$ … Masse des Fötus zur Zeit t in Gramm (g)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



– Berechnen Sie die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$.
– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Massezunahme des Fötus am größten ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$y = 1{,}36 \cdot x - 10{,}42$

Gemäß dem Modell nimmt die Scheitel-Steiß-Länge durchschnittlich rund 1,36 cm pro Woche zu.

b) $m(25) = 638{,}3\ldots \approx 638$
Die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$ beträgt rund 638 g.

Die stärkste Massezunahme erfolgt an der Wendestelle $m''(t) = 0$.
Lösung dieser Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 35{,}26\ldots \approx 35{,}3$
Nach etwa 35,3 Wochen ist die Massezunahme am größten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung der Regressionsgeraden im gegebenen Sachzusammenhang

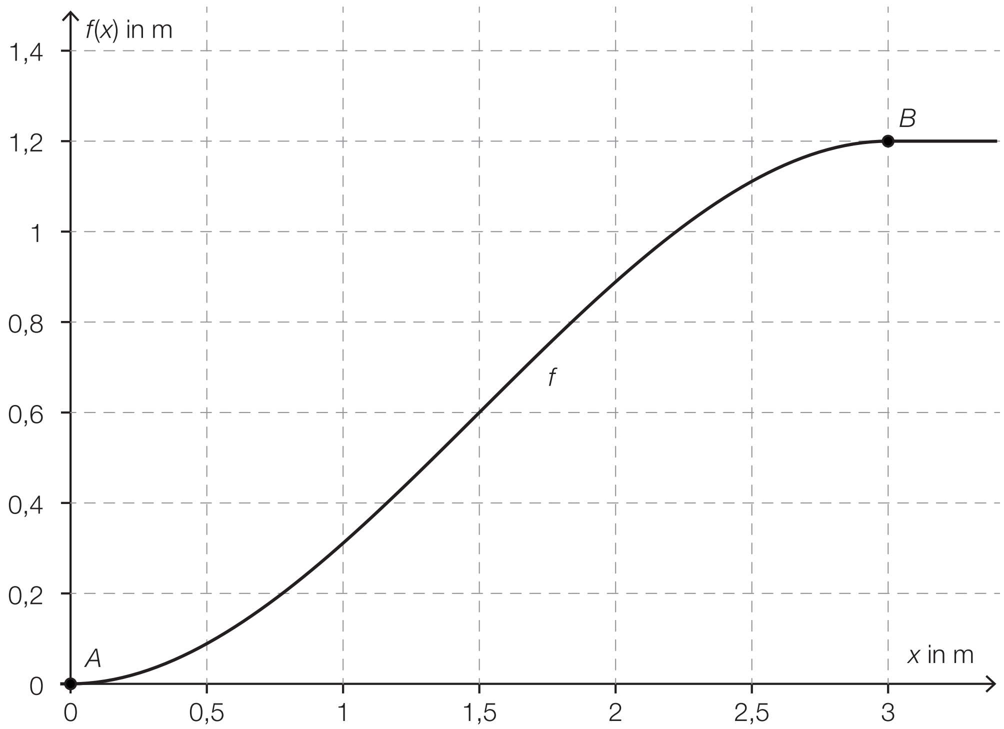
b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Masse des Fötus
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Zeitpunktes, zu dem die Massezunahme am größten ist (In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Wendestelle die größte Massezunahme vorliegt. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)

Minigolf*

Aufgabennummer: B_323

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Minigolfball soll von der horizontalen Abschlagfläche auf eine höhergelegene horizontale Plattform gerollt werden. Der Verlauf der Bahn im Querschnitt kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Die Bahn soll in den Punkten A und B knickfrei auf die jeweilige Ebene führen (siehe nachstehende Abbildung). Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an diesen Stellen den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

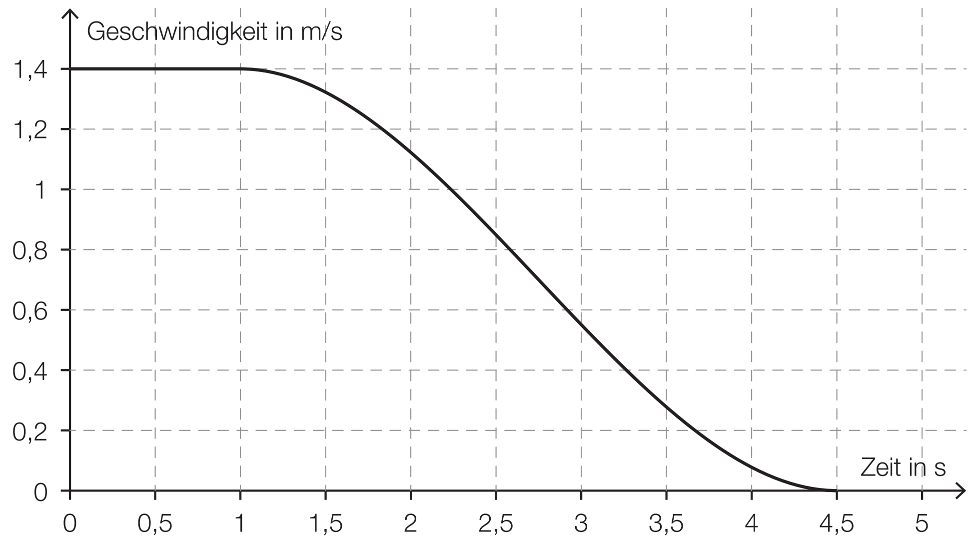


– Geben Sie an, welche Steigung die Funktion f in den Punkten A und B haben muss.
– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion f.
– Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion f.

b) In der nachstehenden Abbildung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Balles auf einer Minigolfbahn dargestellt. Während der ersten Sekunde hat der Ball eine konstante Geschwindigkeit. Danach kann die abnehmende Geschwindigkeit näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = \frac{1}{245} \cdot (16 \cdot t^3 - 132 \cdot t^2 + 216 \cdot t + 243) \quad \text{mit } 1 \leq t \leq 4{,}5$$

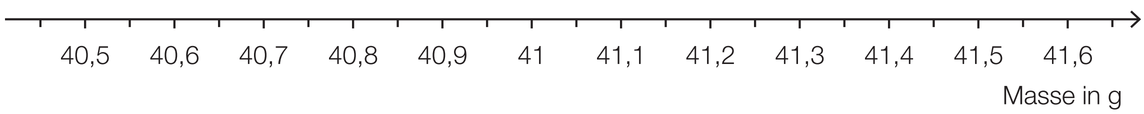
t … Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ … Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)



– Erklären Sie, was die momentane Änderungsrate der Funktion v zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 in diesem Sachzusammenhang angibt.
– Berechnen Sie den zurückgelegten Weg des Balles in den ersten 4,5 Sekunden.

c) Die Masse von Minigolfbällen eines bestimmten Typs ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 41 g und der Standardabweichung σ = 0,1 g. Wenn ein Minigolfball mehr als 41,25 g wiegt, wird er aussortiert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Minigolfball aussortiert wird.
– Zeichnen Sie den Graphen der Dichtefunktion dieser Normalverteilung in der nachstehenden Abbildung ein. Berücksichtigen Sie dabei den Erwartungswert und die Standardabweichung.



– Beschreiben Sie, wie sich eine kleinere Standardabweichung auf den Graphen der Dichtefunktion auswirken würde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Steigung der Funktion f muss in den Punkten A und B null sein.

I. $f'(0) = 0$
II. $f'(3) = 0$
III. $f(0) = 0$
IV. $f(3) = 1,2$

Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{4}{45}$; $b = \frac{2}{5}$; $c = 0$; $d = 0$

b) Die momentane Änderungsrate der Funktion v zum Zeitpunkt t_0 ist die Beschleunigung des Balles zu diesem Zeitpunkt.

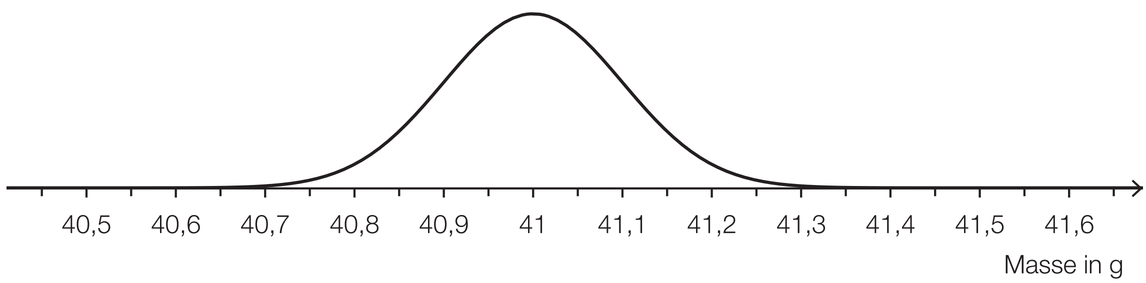
Der zurückgelegte Weg entspricht dem Flächeninhalt unter dem Graphen im Intervall [0; 4,5].
Flächeninhalt des Rechtecks: $A_1 = 1,4 \cdot 1 = 1,4$
Flächeninhalt unter dem Graphen der Polynomfunktion im Intervall [1; 4,5]:

$A_2 = \int_1^{4,5} v(t)\,\mathrm{d}t = 2,45$

$A = A_1 + A_2 = 3,85$

Der zurückgelegte Weg des Balles beträgt 3,85 m.

c) P(„Minigolfball wird aussortiert“) $= 1 - P(X < 41,25) = 0,0062\ldots \approx 0,6\ \%$



Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß’sche Glockenkurve schmäler und höher.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für die richtige Modellbildung zur Steigung der Funktion f
1 × A2: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × D: für die richtige Erklärung
1 × A: für einen richtigen Ansatz (Aufteilen in 2 Teilflächen)
1 × B: für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Dichtefunktion (Glockenkurve mit Maximum an der Stelle μ und Wendepunkten an den Stellen $\mu \pm \sigma$ erkennbar)
1 × C: für die richtige Beschreibung

Sport

Aufgabennummer: B_275

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In vielen sportlichen Disziplinen erreichen Athletinnen und Athleten neue Bestmarken und sind dabei oft extremen Belastungen ausgesetzt.

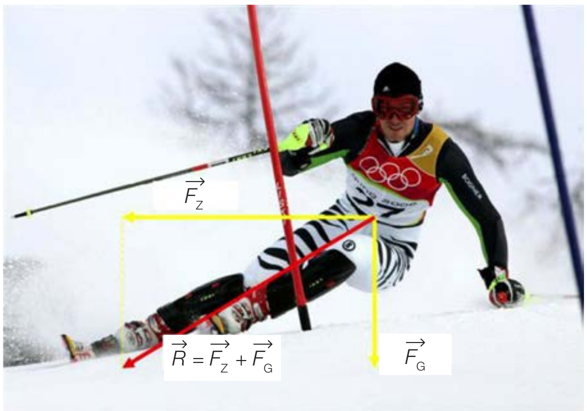
a) In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Marathon-Weltrekordzeit dargestellt.

Jahr	2002	2003	2007	2008	2011	2013	2014
Marathon-Weltrekordzeit in h:min:s	2:05:38	2:04:55	2:04:26	2:03:59	2:03:38	2:03:23	2:02:57

– Ermitteln Sie mit diesem Datensatz die Gleichung derjenigen Regressionsfunktion, die die Marathon-Weltrekordzeit in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren annähert. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002.
– Ermitteln Sie anhand dieses Modells, in welchem Jahr voraussichtlich die Zwei-Stunden-Marke erreicht werden wird.

b) Ein Skifahrer ist in der Kurvenfahrt der Zentrifugalkraft und der Gewichtskraft ausgesetzt. Die Formeln für den Betrag der beiden Kräfte lauten:

$F_Z = \frac{m \cdot v^2}{r}$ und $F_G = m \cdot g$



m … Masse des Skifahrers in kg
v … Betrag der Geschwindigkeit des Skifahrers in m/s
r … Betrag des Kurvenradius des Skifahrers in m
g … Erdbeschleunigung (g = 9,81 m/s²)
F_Z ... Betrag der Zentrifugalkraft in Newton (N)
F_G ... Betrag der Gewichtskraft in Newton (N)

– Erklären Sie anhand der Formel für F_Z, wie sich F_Z ändert, wenn der Skifahrer die Kurve mit halbem Radius bei gleichbleibender Geschwindigkeit durchfährt.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Je größer r ist, desto größer ist F_Z.	☐
Fährt ein Skifahrer mit 25 % größerer Masse m und mit einem um 25 % geringeren Kurvenradius, dann nimmt F_Z um den Faktor 1,4 zu.	☐
Eine Zunahme von v wirkt sich exponentiell auf F_Z aus.	☐
Bei einem Skifahrer mit halber Masse m nimmt F_Z um den Faktor $\sqrt{2}$ zu.	☐
Bei doppeltem v und doppeltem r wird F_Z doppelt so groß.	☐

In einer bestimmten Kurve gilt: $\frac{F_Z}{F_G} = \frac{3}{1}$.

– Stellen Sie für den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{R}$ eine Formel in Abhängigkeit von m auf.

R = ______________________

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz ermittelt:
$y(t) = -0{,}003242\ldots \cdot t + 2{,}089268\ldots$

$-0{,}00324 \cdot t + 2{,}08927 = 2 \;\Rightarrow\; t = 27{,}552\ldots$

Gemäß diesem linearen Modell wird im Jahr 2029 die Zwei-Stunden-Marke erreicht werden.

b) Durch die Halbierung des Kurvenradius bei gleichbleibender Geschwindigkeit verdoppelt sich der Betrag der Zentrifugalkraft, die auf den Skifahrer wirkt.

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
Bei doppeltem v und doppeltem r wird F_Z doppelt so groß.	☒

$F_Z = 3 \cdot F_G$
für den Betrag der Kraft $\vec{R}$ gilt:
$R = \sqrt{(3 \cdot F_G)^2 + F_G^2} = \sqrt{10} \cdot F_G = \sqrt{10} \cdot g \cdot m \approx 31 \cdot m$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren, A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3

Thema: Sonstiges

Quelle: http://www.dsv-datenzentrale.de/rahmentrainingsplan/45-Kurvenfahrt__Dynamisches_Gleichgewicht_Fliehkraf-,e_441,r_33.htm

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung
des österreichischen Schulwesens

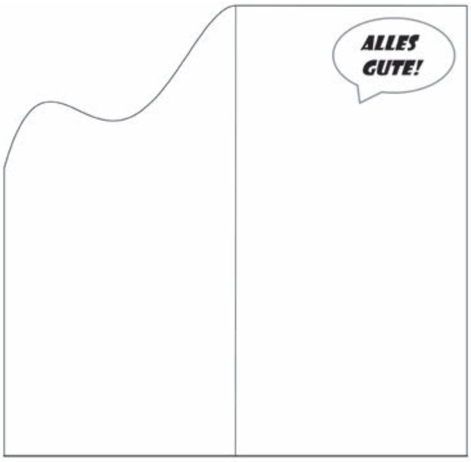
Grußkarte*

Aufgabennummer: B_338

Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Eine Druckerei soll Grußkarten nach folgendem Entwurf herstellen:

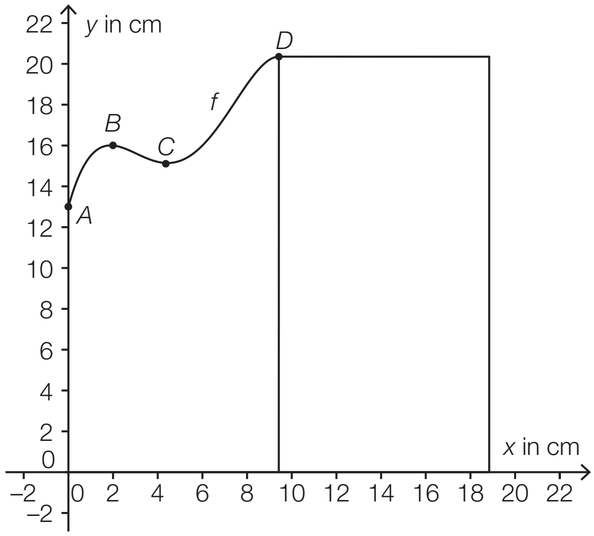
zugeklappt



aufgeklappt

* ehemalige Klausuraufgabe

a) Die Form der Grußkarte kann folgendermaßen in einem Koordinatensystem dargestellt werden:



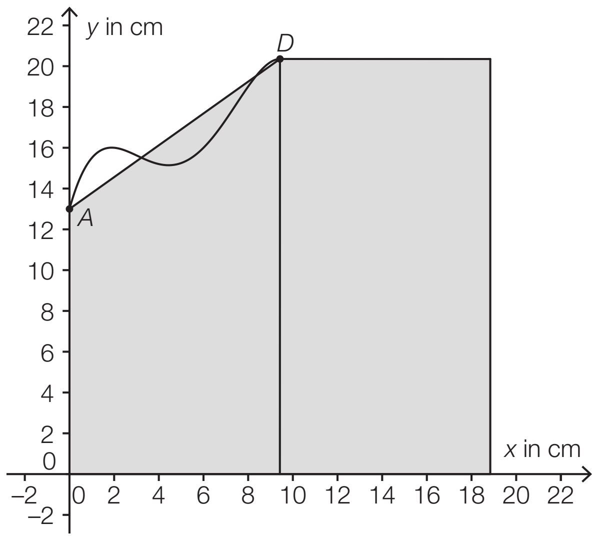
Der gewellte Teil der Begrenzungslinie der Karte kann durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschrieben werden und verläuft durch folgende Punkte:

$A = (0|13)$
$B = (2|16)$
$C = (4{,}36|15{,}1)$
$D = (9{,}42|20{,}35)$

Im Punkt D hat der Graph von f eine waagrechte Tangente.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.
– Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

b) Der Flächeninhalt der Grußkarte beträgt 346,85 cm².
Zur näherungsweisen Berechnung ist es möglich, ein Trapez und ein Rechteck zu verwenden (siehe nachstehende Grafik).

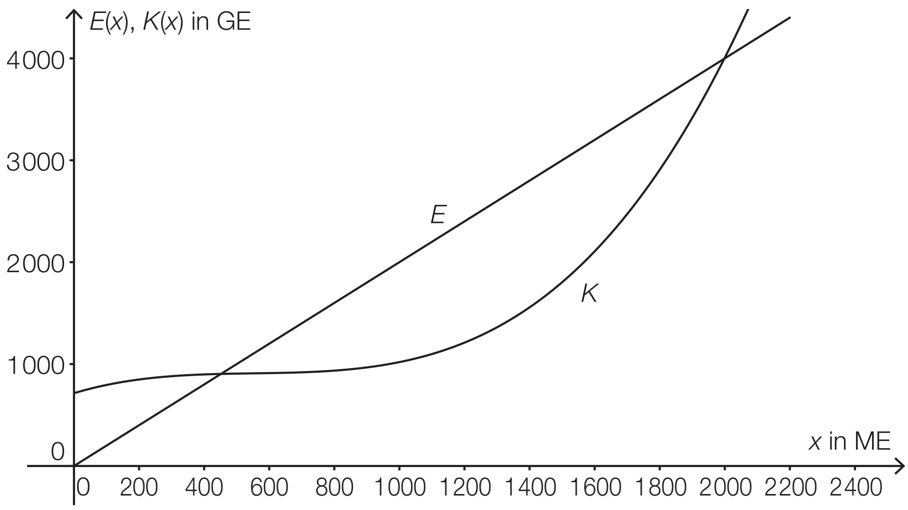


Die Koordinaten der Punkte sind: $A = (0|13)$
$D = (9{,}42|20{,}35)$

Die untere Kante der Karte liegt auf der x-Achse und ist insgesamt 18,84 cm lang.

– Berechnen Sie mithilfe der oben beschriebenen Näherung den Flächeninhalt der Grußkarte.
– Berechnen Sie den Betrag des relativen Fehlers bei der näherungsweisen Berechnung des Flächeninhalts.

c) Für die monatliche Produktion der Grußkarten können die Kostenfunktion K und die Erlösfunktion E folgendermaßen dargestellt werden:



– Lesen Sie aus der obigen Grafik den Gewinnbereich ab.
– Erklären Sie, woran man in der Grafik erkennen kann, dass der Gewinn bei einer Produktion von 1200 ME größer als bei einer Produktion von 600 ME ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(0) = 13$
$f(2) = 16$
$f(4{,}36) = 15{,}1$
$f(9{,}42) = 20{,}35$
$f'(9{,}42) = 0$

Lösung dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}012... \approx -0{,}01$
$b = 0{,}266... \approx 0{,}27$
$c = -1{,}722... \approx -1{,}72$
$d = 3{,}981... \approx 3{,}98$
$e = 13$

b) $A = \frac{20{,}35 + 13}{2} \cdot 9{,}42 + 20{,}35 \cdot 9{,}42 = 348{,}7755$
Der näherungsweise berechnete Flächeninhalt der Grußkarte beträgt rund 348,78 cm².

$\left|\frac{348{,}7755 - 346{,}85}{346{,}85}\right| = 0{,}005551... \approx 0{,}00555$

c) Gewinnbereich in ME: [450; 2 000]
Toleranzbereich für die Intervallgrenzen: ±50 ME

Die Differenz zwischen $E(x)$ und $K(x)$ ist der jeweilige Gewinn an der Stelle x. Bei 1 200 ME ist diese Differenz wesentlich größer als bei 600 ME.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × B1: für die richtige näherungsweise Berechnung des Flächeninhalts der Grußkarte
1 × B2: für die richtige Berechnung des Betrags des relativen Fehlers

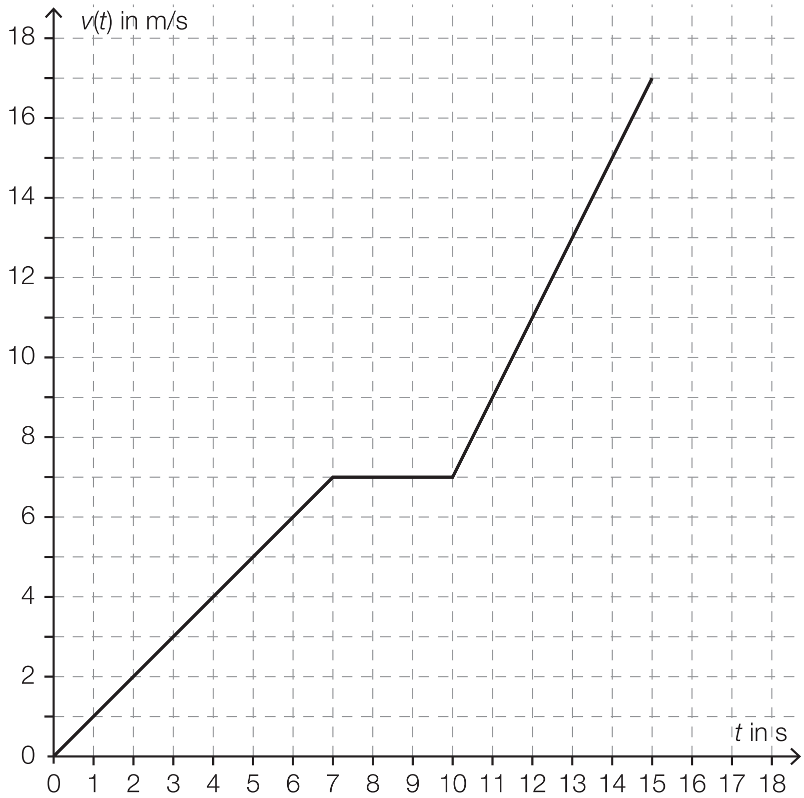
c) 1 × C: für das richtige Ablesen der Gewinnbereichs
(Toleranzbereich für die Intervallgrenzen: ±50 ME)
1 × D: für die richtige Erklärung

LKW-Test*

Aufgabennummer: B_339

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

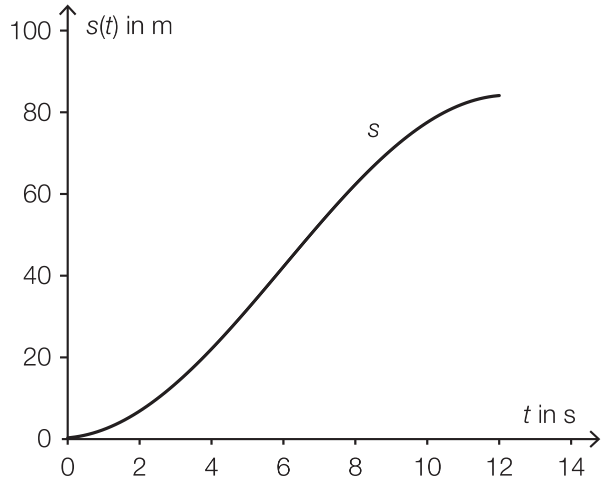
a) Im nachstehenden Diagramm ist der Geschwindigkeitsverlauf einer LKW-Testfahrt vereinfacht dargestellt.



– Interpretieren Sie den Verlauf des Graphen im Zeitintervall]7; 10[im gegebenen Sachzusammenhang.
– Bestimmen Sie den in den ersten 10 Sekunden zurückgelegten Weg.
– Erstellen Sie für das obige Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm das zugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei einem Test eines LKW wird dieser auf einer waagrechten Teststrecke zuerst beschleunigt und unmittelbar danach abgebremst. Dabei ergibt sich das nachstehende Weg-Zeit-Diagramm.



– Begründen Sie, warum die Wendestelle denjenigen Zeitpunkt angibt, zu dem der Bremsvorgang beginnt.

Die dargestellte Kurve ist näherungsweise der Graph der Funktion s mit:

$$s(t) = 42 \cdot \sin\left(\frac{1}{4} \cdot t - 1{,}5\right) + 42{,}2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 12$$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... bis zum Zeitpunkt t zurückgelegter Weg in Metern (m)

– Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt der Bremsvorgang beginnt.

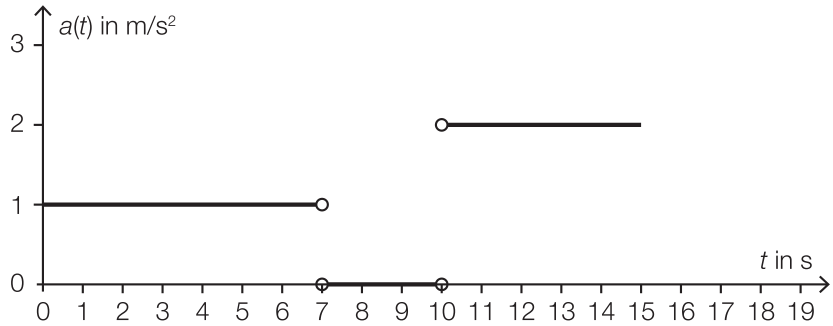
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Zeitintervall]7; 10[fährt der LKW mit konstanter Geschwindigkeit.

$$s = \frac{7 \cdot 7}{2} + 3 \cdot 7 = 45{,}5$$

Der LKW legt in den ersten 10 Sekunden insgesamt 45,5 Meter zurück.



Als Ableitungsfunktion ist die Beschleunigung-Zeit-Funktion an den Sprungstellen nicht definiert. Es ist nicht gefordert, diese Definitionslücken zu berücksichtigen.

b) Der Beginn des Bremsvorgangs ist derjenige Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit abzunehmen beginnt. Die Geschwindigkeit entspricht der Steigung der Funktion s. Diese nimmt bis zur Wendestelle zu und anschließend ab.

$s''(t) = -2{,}625 \cdot \sin\left(\frac{1}{4} \cdot t - 1{,}5\right)$

$s''(t) = 0$

$\frac{1}{4} \cdot t - 1{,}5 = 0$

Lösung im Intervall $0 \leq t \leq 12$:

$t = 6$ s

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation als konstante Geschwindigkeit
1 × B: für das richtige Bestimmen des zurückgelegten Weges
1 × A: für das richtige Erstellen des Beschleunigung-Zeit-Diagramms
(Es ist nicht gefordert, die Definitionslücken zu berücksichtigen.)

b) 1 × D: für die richtige Begründung
1 × B: für die richtige Berechnung der Wendestelle

Abbau von Arzneimitteln*

Aufgabennummer: B_340

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Einnahme von Arzneimitteln gelangen Wirkstoffe über den Verdauungstrakt in den Blutkreislauf, wo diese dann abgebaut werden.

a) Nach Einnahme einer Tablette kann die Wirkstoffmenge im Blut näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$m(t) = 20 \cdot (1 - e^{-0{,}05 \cdot t}) - 0{,}125 \cdot t$ mit $t \geq 0$

t … Zeit nach der Einnahme in Minuten (min)
$m(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in Milligramm (mg)

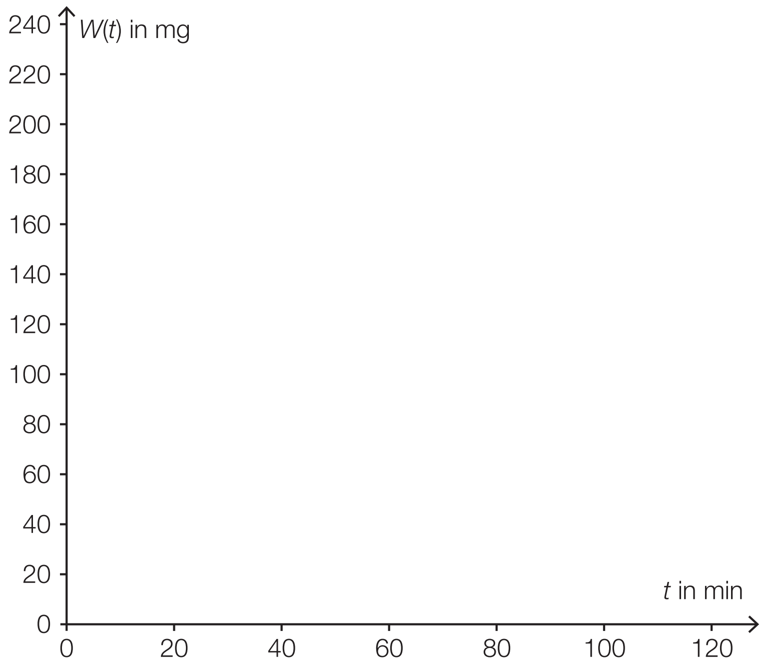
– Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.
– Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut 0,5 mg/min beträgt.
– Argumentieren Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass die Funktion m negativ gekrümmt ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Zur näherungsweisen Beschreibung des Abbaus eines Arzneimittels können lineare oder exponentielle Modelle verwendet werden.

Zu Beginn (t = 0 min) sind 200 mg des Wirkstoffs im Blut, nach 120 Minuten ist nur noch ein Achtel dieser Menge vorhanden.

– Veranschaulichen Sie den Verlauf des linearen Modells im nachstehenden Diagramm.



– Ermitteln Sie die Halbwertszeit desjenigen exponentiellen Modells, das diesen Abbau beschreibt, in Minuten.
– Veranschaulichen Sie den Verlauf des exponentiellen Modells unter Verwendung der ermittelten Halbwertszeit im obigen Diagramm.
– Erklären Sie, für welches der beiden Modelle zu jedem Zeitpunkt gilt: $\frac{dW}{dt} = -\frac{35}{24}$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

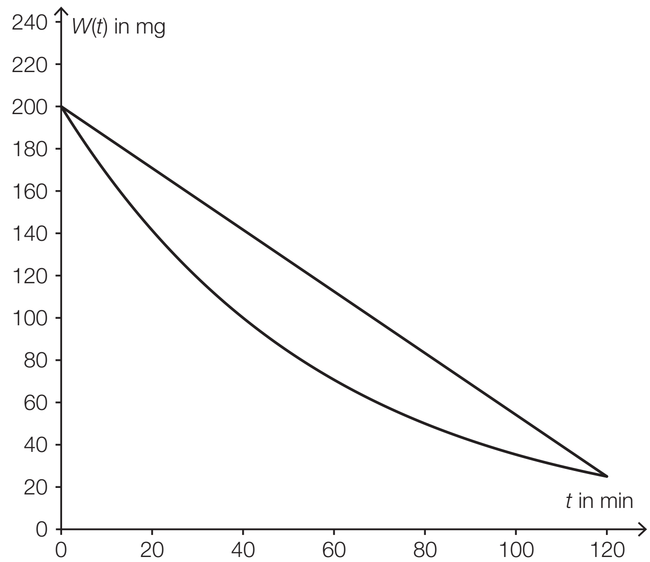
a) Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$m(t) = 0$
$t = 159{,}9... \approx 160$

Nach etwa 160 Minuten ist der Wirkstoff vollständig abgebaut.

$m'(t) = e^{-0{,}05 \cdot t} - 0{,}125$
Lösung der Gleichung $m'(t) = 0{,}5$ mittels Technologieeinsatz: $t = 9{,}40... \approx 9{,}4$
Nach etwa 9,4 Minuten beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut 0,5 mg/min.

Da die 2. Ableitung $m''(t) = -0{,}05 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$ eine Exponentialfunktion vom Typ $a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a < 0$ ist, sind alle Funktionswerte dieser 2. Ableitung negativ. Daher ist die Funktion m im gesamten Definitionsbereich negativ gekrümmt.

b) $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow 120 = 3 \cdot T_{1/2} \Rightarrow T_{1/2} = 40$ min



Die angegebene momentane Änderungsrate ist konstant. Es handelt sich daher um das lineare Modell.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln desjenigen Zeitpunkts, zu dem der Wirkstoff vollständig abgebaut ist
1 × B2: für die richtige Berechnung desjenigen Zeitpunkts, zu dem die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut 0,5 mg/min beträgt
1 × D: für die richtige Argumentation

b) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen des linearen Modells
1 × B: für das richtige Ermitteln der Halbwertszeit in Minuten
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen des exponentiellen Modells unter Verwendung der Halbwertszeit
1 × D: für die richtige Erklärung

Fertigbetonelement mit dreieckiger Grundfläche*

Aufgabennummer: B_341

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Grundfläche eines Fertigbetonelements hat die Form eines Dreiecks mit den Seiten a, b und c, von dem die folgenden Informationen bekannt sind:

- Der Umfang beträgt 150 cm.
- Die Seite c ist doppelt so lang wie die Seite a.
- Die Seite b ist um 10 cm länger als die Seite a.

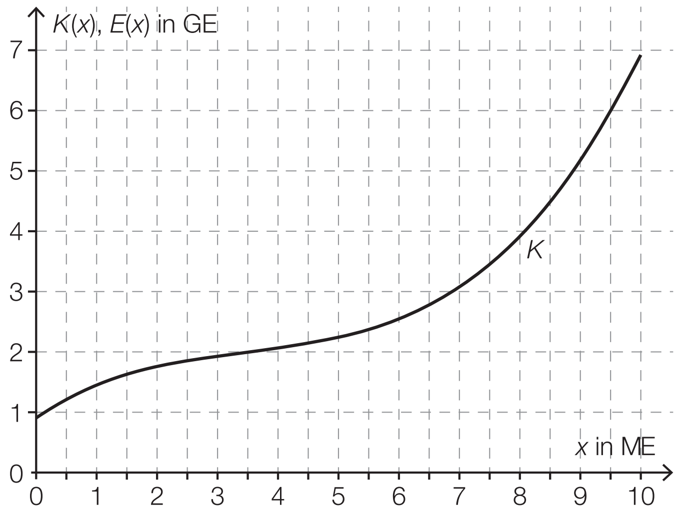
– Erstellen Sie ein Gleichungssystem mit den Unbekannten a, b und c, um die Seitenlängen des angegebenen Dreiecks zu bestimmen.
– Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.
– Berechnen Sie den größten Winkel in diesem Dreieck.

b) Bei einer Produktion von Fertigbetonelementen ist die Kostenfunktion näherungsweise eine Polynomfunktion 3. Grades.
Das Produkt wird zu einem fixen Preis pro Mengeneinheit verkauft.

– Erklären Sie, warum die Stelle des maximalen Gewinns unabhängig von den Fixkosten ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Funktionsgraph einer Kostenfunktion K dargestellt. Das Produkt wird zu einem fixen Preis pro Mengeneinheit (ME) verkauft.



– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen derjenigen Erlösfunktion ein, für die die untere Grenze des Gewinnbereichs bei 3,5 ME liegt.
– Geben Sie an, zu welchem Preis pro ME das Produkt in diesem Fall verkauft werden muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

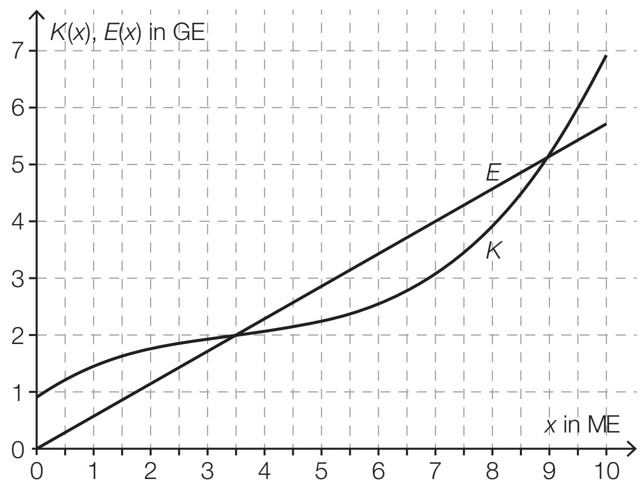
a) $a + b + c = 150$
$c = 2 \cdot a$
$b = a + 10$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 35$ cm
$b = 45$ cm
$c = 70$ cm

Der größte Winkel des Dreiecks γ liegt gegenüber von c:
$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \quad \Rightarrow \quad \gamma = 121{,}58...° \approx 121{,}6°$

b) Die Änderung der Fixkosten entspricht der Addition bzw. Subtraktion einer konstanten Funktion zur Gewinnfunktion. Sie bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen, wodurch sich die Maximumstelle nicht verändert.

c)



Aus dem Graphen der Erlösfunktion liest man beispielsweise ab, dass 3,5 ME um insgesamt 2 GE verkauft werden. Der Preis pro ME ist daher rund 0,57 GE.
Toleranzbereich: [0,54; 0,60]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
1 × B1: für die richtige Berechnung der Seitenlängen
1 × B2: für die richtige Berechnung des größten Winkels

b) 1 × D: für eine richtige Erklärung

c) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Erlösfunktion
1 × A2: für die richtige Angabe des Preises pro ME im Toleranzbereich [0,54; 0,60]

Förderbänder*

Aufgabennummer: B_342

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In der automatisierten Fertigung werden Werkstücke auf Förderbändern bewegt.

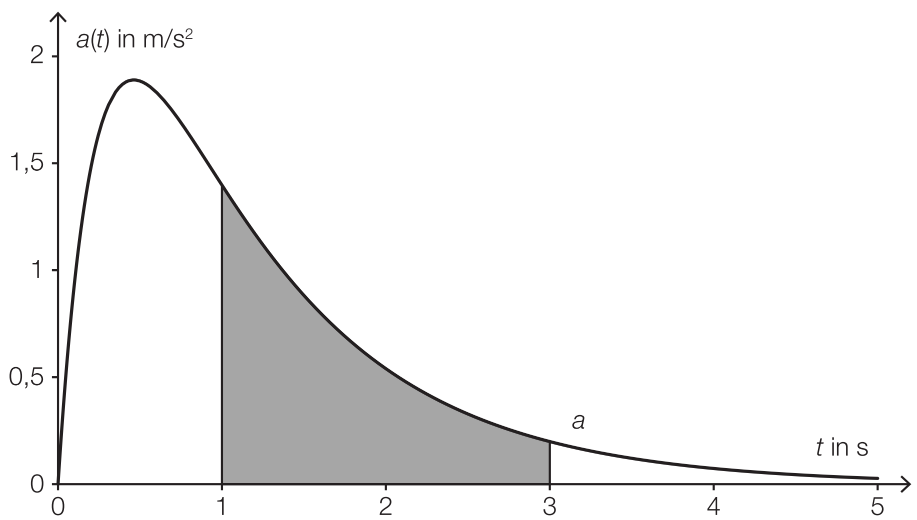
a) Die Bewegung eines Werkstücks wird für $t \geq 0$ näherungsweise durch die Funktion s beschrieben:

$s(t) = 0{,}4 \cdot e^{-4 \cdot t} - 0{,}1 \cdot e^{-t} + 0{,}5$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... Entfernung zu einem Bezugspunkt zur Zeit t in Metern (m)

– Beschreiben Sie die Bedeutung von $s'(0)$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Werkstücks zu demjenigen Zeitpunkt, zu dem die Beschleunigung null ist.

b) Die Beschleunigung eines Werkstücks wird für $t \geq 0$ näherungsweise durch die Funktion a beschrieben.
Der Graph der Funktion a ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der markierten Fläche.

A = ________________________________

– Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Geschwindigkeit eines Werkstücks wird für $t \geq 0$ näherungsweise durch die Funktion v beschrieben:

$v(t) = 1{,}3 \cdot \sin(20 \cdot t)$

t ... Zeit in Sekunden
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Für die 1. Ableitung von v gilt:
$v'(t) = 26 \cdot \cos(20 \cdot t)$

– Beschreiben Sie anhand der Ableitungsregeln, wodurch der Faktor 26 der Ableitungsfunktion v' zustande kommt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s'(0)$ ist die Geschwindigkeit des Werkstücks zum Zeitpunkt $t = 0$ s.

$s''(t) = 6{,}4 \cdot e^{-4 \cdot t} - 0{,}1 \cdot e^{-t}$
$s''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \ln(4)$
$s'(\ln(4)) = 0{,}01875$

Die Geschwindigkeit beträgt 0,01875 m/s.

b) $A = \int_1^3 a(t)\,\mathrm{d}t$

Dieser Flächeninhalt entspricht der Zunahme der Geschwindigkeit zwischen $t = 1$ s und $t = 3$ s.

c) Anwendung von Faktorregel und Kettenregel

oder:

Multiplikation des Faktors 1,3 mit der inneren Ableitung

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × A: für die richtige Modellbildung zur Berechnung der Geschwindigkeit (z. B. über die Nullstelle der 2. Ableitung oder einen grafischen Lösungsansatz)
1 × B: für das richtige Bestimmen der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt mit Beschleunigung null

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × C: für die richtige Interpretation des Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Angeben der beiden Ableitungsregeln oder die richtige Beschreibung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Atemvolumen*

Aufgabennummer: B_343

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das Atemvolumen in der Lunge einer Person in Abhängigkeit von der Zeit kann näherungsweise durch eine Funktion V beschrieben werden:

$V(t) = 3 + A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ mit $A > 0$, $\omega > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$V(t)$ ... Atemvolumen zur Zeit t in Litern (L)

Zu Beginn des Einatemvorgangs ist das Atemvolumen minimal und beträgt 2,75 L. Nach 2 s wird das maximale Volumen erreicht.

– Bestimmen Sie A, ω und φ.

b) Das Atemvolumen einer anderen Person in Abhängigkeit von der Zeit kann näherungsweise durch eine Funktion V, deren Ableitung bekannt ist, beschrieben werden:

$V'(t) = 0{,}4 \cdot \sin(1{,}6 \cdot t)$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$V'(t)$ ... momentane Änderungsrate des Atemvolumens zur Zeit t in Litern pro Sekunde (L/s)

Zur Zeit $t = 0$ beträgt das Atemvolumen 2,4 L.

– Ermitteln Sie die Funktion V.

c) In der nachstehenden Tabelle ist die jeweilige momentane Änderungsrate des Atemvolumens $V'(t)$ in Litern pro Sekunde zu bestimmten Zeitpunkten t einer Atmungsphase einer Person angegeben.

t in s	0,0	0,5	1,5	2,5	3,0
$V'(t)$ in L/s	0,00	0,33	0,49	0,29	0,00

– Stellen Sie die Messpunkte in einem Koordinatensystem dar.
– Ermitteln Sie für diese Atmungsphase eine quadratische Ausgleichsfunktion.
– Begründen Sie, warum es sich bei diesem Vorgang um eine Einatmungsphase handelt.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $A = 3 - 2{,}75 = 0{,}25$

$\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

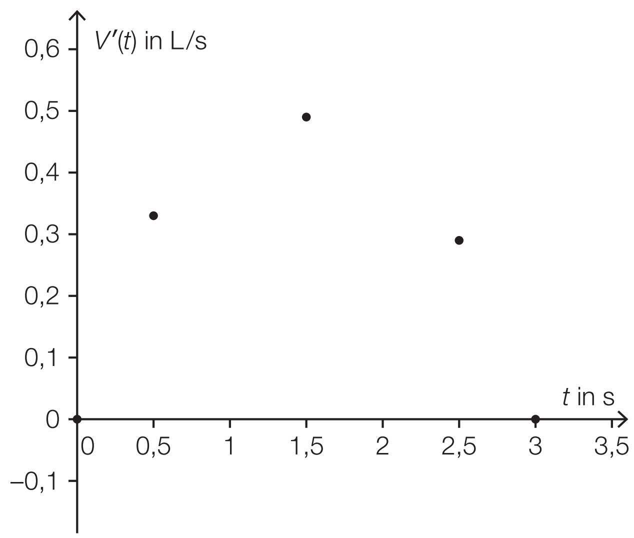
$V(0) = 3 + 0{,}25 \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi)$
$\sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$

Der Beginn des Einatemvorgangs könnte auch mit $t \neq 0$ angesetzt werden. Die diesem Ansatz entsprechende Lösung für φ ist dann als richtig zu werten.

b) $V(t) = \int (0{,}4 \cdot \sin(1{,}6 \cdot t))\,\mathrm{d}t$
$V(t) = -0{,}25 \cdot \cos(1{,}6 \cdot t) + C$

$V(0) = 2{,}4 \quad \Rightarrow \quad 2{,}4 = -0{,}25 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2{,}65$
$V(t) = -0{,}25 \cdot \cos(1{,}6 \cdot t) + 2{,}65$

c)



Ermitteln der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$V'(t) = -0{,}22 \cdot t^2 + 0{,}67 \cdot t + 0{,}018$

Es handelt sich um eine Einatmungsphase, weil die momentane Änderungsrate des Atemvolumens im betrachteten Intervall immer positiv ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Angeben des Parameters A
1 × A1: für das richtige Angeben des Parameters ω
1 × A2: für das richtige Angeben des Parameters φ
Der Beginn des Einatemvorgangs könnte auch mit $t \neq 0$ angesetzt werden.
Die diesem Ansatz entsprechende Lösung für φ ist dann als richtig zu werten.

b) 1 × A: für eine richtige Modellbildung (unbestimmtes Integral)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Funktion unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung

c) 1 × B1: für die richtige Darstellung der Messpunkte
1 × B2: für das richtige Ermitteln der quadratischen Ausgleichsfunktion
1 × D: für die richtige Begründung

Roboter (2)*

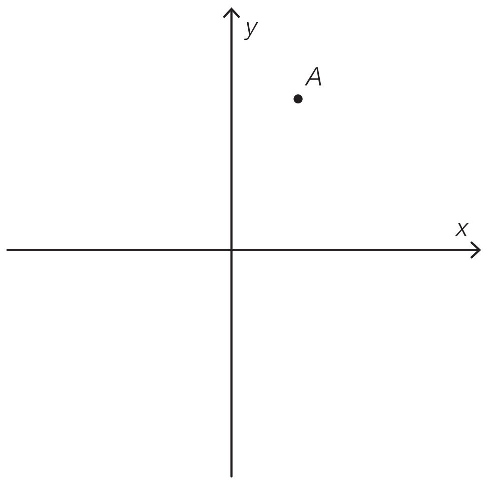
Aufgabennummer: B_345

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

a) Roboterbewegungen werden mithilfe der Vektorrechnung modelliert.

Folgende Anweisung zur Verschiebung eines Punktes ist vorgegeben:
„Der Punkt A wird um einen Vektor $\vec{s}$ mit den Komponenten $s_x > 0$ und $s_y < 0$ in den Punkt B verschoben."

– Veranschaulichen Sie diese Anweisung, indem Sie einen möglichen Vektor $\vec{s}$ und den entsprechenden Punkt B im nachstehenden Koordinatensystem einzeichnen.



b) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist.

c) Die Spitze eines Roboterarms bewegt sich geradlinig vom Punkt $C = (1|-2|3)$ zum Punkt $D = (5|-3|2)$. Dort ändert sich die Bewegungsrichtung geringfügig und die Spitze bewegt sich geradlinig zum Punkt $E = (10|-4|0)$.

– Berechnen Sie den Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde.

* ehemalige Klausuraufgabe

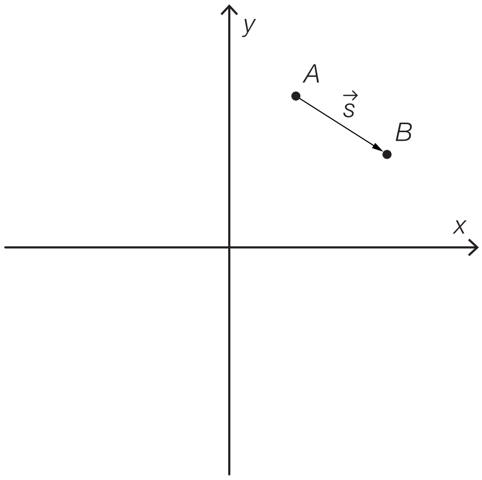
d) Für Schweißroboter werden Schweißelektroden benötigt.
Ein Unternehmen liefert Elektroden, deren Längen annähernd normalverteilt mit $\mu = 300$ mm und $\sigma = 5$ mm sind.
Man entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 20 Schweißelektroden.

– Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Zum Beispiel:



b) Für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = -a_x \cdot a_y + a_y \cdot a_x = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist, stehen sie normal aufeinander.

c) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{DE}|} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 8{,}205...° \approx 8{,}21°$$

Der Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde, beträgt rund 8,21°.

d) Zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$300 \pm u_{0{,}975} \cdot \frac{5}{\sqrt{20}}$$

$u_{0{,}975} = 1{,}959...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mm: [297,81; 302,19].

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für eine richtige Veranschaulichung im Koordinatensystem

b) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels φ

d) 1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Zufallsstreubereich für einen Stichprobenmittelwert mithilfe der Normalverteilung)
1 × B: für das richtige Ermitteln des Zufallsstreubereichs

LED-Lampen (5)*

Aufgabennummer: B_346

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

a) Die Helligkeit einer LED-Lampe kann mithilfe des Lichtstroms beschrieben werden.
In der nachstehenden Tabelle ist für LED-Lampen verschiedener Leistung der jeweilige Lichtstrom angegeben.

Leistung in Watt	3	4	5	6	9,5	11	17
Lichtstrom in Lumen	130	250	280	350	600	800	1 000

Der Lichtstrom soll in Abhängigkeit von der Leistung beschrieben werden.

– Ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.
– Berechnen Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion, welcher Lichtstrom für eine 15-Watt-LED-Lampe zu erwarten ist.

b) Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit $\sigma = 75$ Lumen angenommen werden.
Für 8 zufällig ausgewählte Lampen wurde jeweils der Lichtstrom (in Lumen) gemessen.

1 053	900	984	873	838	1 045	960	955

– Ermitteln Sie den 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ des Lichtstroms.
– Zeigen Sie anhand der entsprechenden Formel, warum für eine normalverteilte Grundgesamtheit mit bekanntem σ gilt: Wird der Stichprobenumfang vervierfacht, so halbiert sich die Breite des $(1-\alpha)$-Vertrauensbereichs für den Erwartungswert μ.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 63{,}97 \cdot x - 20{,}06$

x … Leistung in Watt (W)
$f(x)$ … Lichtstrom bei der Leistung x in Lumen (lm)

$f(15) = 939{,}5... \approx 940$
Gemäß diesem Modell ist für eine 15-Watt-LED-Lampe ein Lichtstrom von rund 940 lm zu erwarten.

b) Zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\bar{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Berechnung von $\bar{x}$ mittels Technologieeinsatz: $\bar{x} = 951$ Lumen
$\sigma = 75$ Lumen
$n = 8$
$\alpha = 5\ \%$
$u_{0{,}975} = 1{,}959...$
Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich in Lumen: $899 \leq \mu \leq 1003$.

Der Ausdruck $u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bestimmt die Breite des Vertrauensbereichs.

Eine Vervierfachung des Stichprobenumfangs n bedeutet für die Breite:
$u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der linearen Regressionsfunktion
1 × B2: für die richtige Berechnung des Lichtstroms einer 15-Watt-LED-Lampe

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Vertrauensbereichs
1 × D: für den richtigen Nachweis

Vektorgrafiken*

Aufgabennummer: B_347

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Vektorgrafik besteht im Gegensatz zur Pixelgrafik nicht aus einzelnen Bildpunkten (Pixeln), sondern wird durch geometrische Primitive (Linie, Kreis, Polygone, Splines …) definiert.

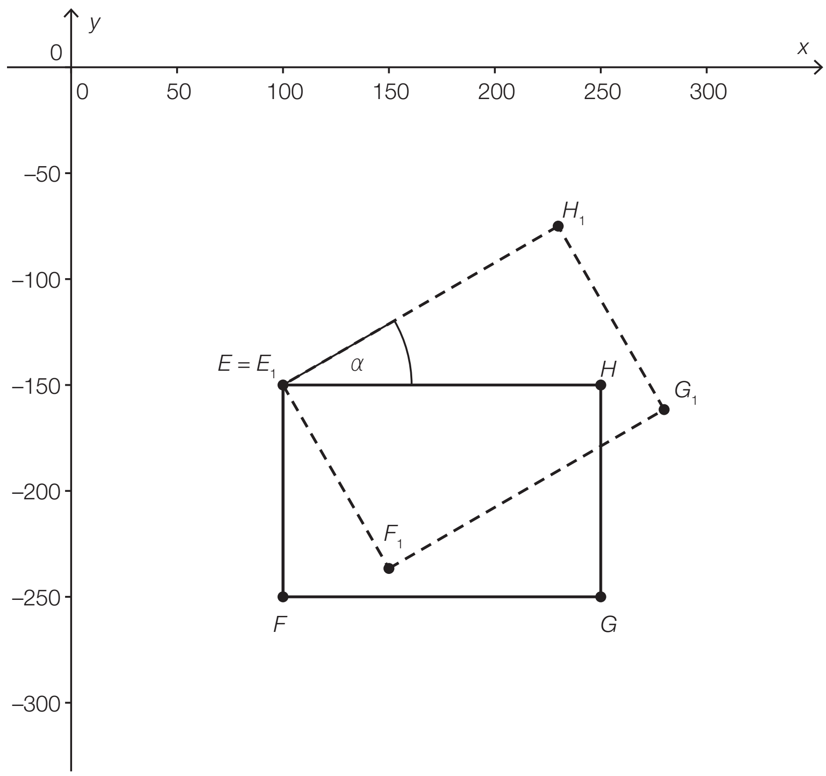
a) Rechtecke können in einer Vektorgrafik durch Angabe der Eckpunkte als geschlossene Streckenzüge definiert werden.
Es gibt zwei Rechtecke *ABCD* mit:

- $A = (50|-100)$ und $B = (250|-250)$ sind zwei benachbarte Eckpunkte.
- Die Seite *BC* ist halb so lang wie die Seite *AB*.

– Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts *C* für eines dieser Rechtecke.

b) Ein Vorteil von Vektorgrafiken ist, dass geometrische Transformationen sehr einfach und ohne Qualitätsverlust durchgeführt werden können.

Das in der nachstehenden Grafik dargestellte Rechteck $E_1F_1G_1H_1$ entstand aus dem Rechteck *EFGH* durch Drehung um den Eckpunkt $E = (100|-150)$ gegen den Uhrzeigersinn.



– Zeigen Sie rechnerisch unter Verwendung der Punkte $E = (100|-150)$, $H = (250|-150)$ und $H_1 = (230|-75)$, dass der Drehwinkel gerundet 30° beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) – Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix}$ ein Normalvektor des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist.

d) Splines sind stückweise zusammengesetzte Funktionen, deren Graphen knickfrei ineinander übergehen. Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Ein kubischer Spline, der aus 2 Funktionen 3. Grades zusammengesetzt ist, ist für das Intervall [0; 2] folgendermaßen definiert:

$s_0(x) = -\frac{2}{3} \cdot x^3 + \frac{5}{3} \cdot x$ für $0 \leq x \leq 1$

$s_1(x) = \frac{4}{3} \cdot (x-1)^3 - 2 \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{3} \cdot (x-1) + 1$ für $1 \leq x \leq 2$

– Zeigen Sie, dass der Übergang von s_0 auf s_1 knickfrei erfolgt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 200 \\ -150 \end{pmatrix}$

Normalvektor zu $\overrightarrow{AB}$ mit halber Länge: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 75 \\ 100 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 325 \\ -150 \end{pmatrix}$

Der Punkt C hat die Koordinaten $(325|-150)$.

Auftragen des Normalvektors in die andere Richtung ist ebenfalls zulässig. Man erhält dann: $C = (175|-350)$.

b) $\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EH_1} = \begin{pmatrix} 130 \\ 75 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{EH_1}}{|\overrightarrow{EH}| \cdot |\overrightarrow{EH_1}|} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 29{,}98\ldots° \approx 30°$$

c) Für das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{n}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} = -a_x \cdot a_y + a_y \cdot a_x = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren 0 ist, stehen sie normal aufeinander.

d) $s_0(1) = s_1(1) = 1$

$s_0'(x) = -2 \cdot x^2 + \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad s_0'(1) = -\frac{1}{3}$

$s_1'(x) = 4 \cdot x^2 - 12 \cdot x + \frac{23}{3} \quad \Rightarrow \quad s_1'(1) = -\frac{1}{3}$

Die beiden Funktionen haben also an der Stelle $x = 1$ den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung, der Übergang ist also knickfrei.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermitteln des Normalvektors mit halber Länge)
1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten des Punkts C für eines dieser Rechtecke

b) 1 × B: für den richtigen rechnerischen Nachweis

c) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

d) 1 × D: für den richtigen Nachweis (Funktionswert und Steigung)

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Höhenwachstum von Fichten*

Aufgabennummer: B_350

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Zusammenhang zwischen dem Alter und der durchschnittlichen Höhe von Fichten kann näherungsweise mithilfe einer Funktion h beschrieben werden:

$h(t) = a \cdot e^{-\frac{b}{t}}$

t ... Alter in Jahren
$h(t)$ ... durchschnittliche Höhe im Alter t in Metern (m)
$a > 0$ ... Parameter in m
$b > 0$ ... Parameter in Jahren

a) – Begründen Sie mathematisch, warum $e^{-\frac{b}{t}}$ für $t = 0$ nicht definiert ist.
– Begründen Sie mathematisch, warum die durchschnittliche Höhe in diesem Modell a nicht überschreiten kann.

Für einen 80-jährigen Fichtenbestand beträgt die durchschnittliche Höhe der Fichten 19,24 m. Der Parameter a ist gleich 28 m.

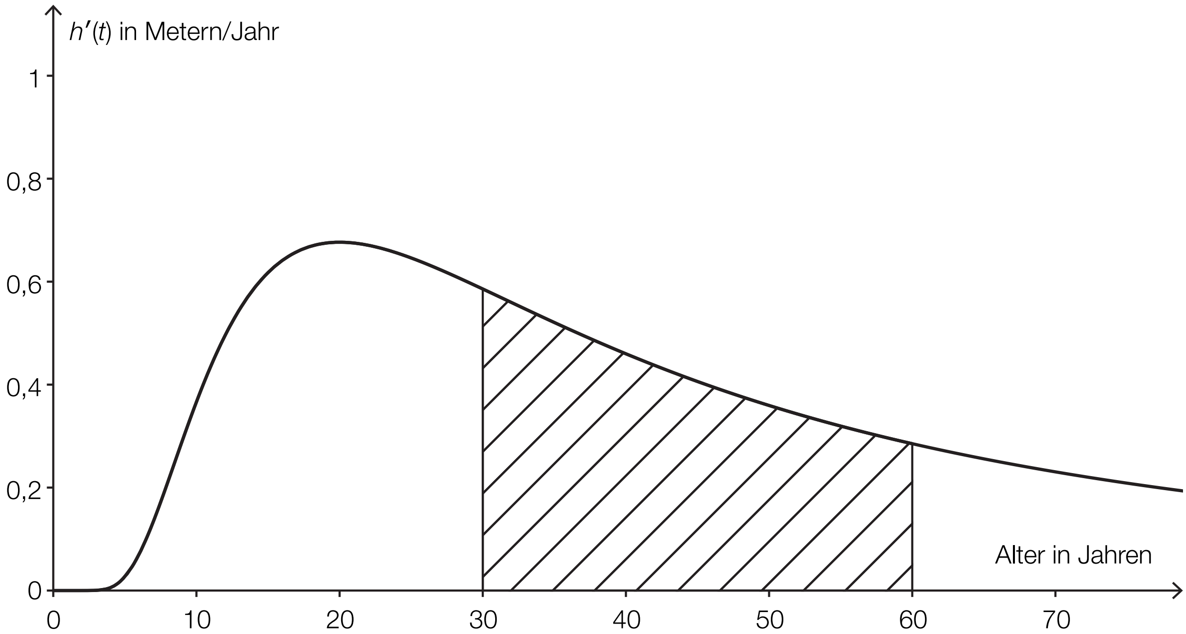
– Berechnen Sie den Parameter b.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells, um wie viel Prozent die durchschnittliche Höhe in den nächsten 20 Jahren zunehmen wird.

b) Für einen Fichtenbestand gilt: $a = 60$ m, $b = 50$ Jahre.

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h im Intervall [10; 70].
– Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe eines Fichtenbestandes $h'(t)$ dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung des Inhalts der schraffierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Durch 0 kann nicht dividiert werden.

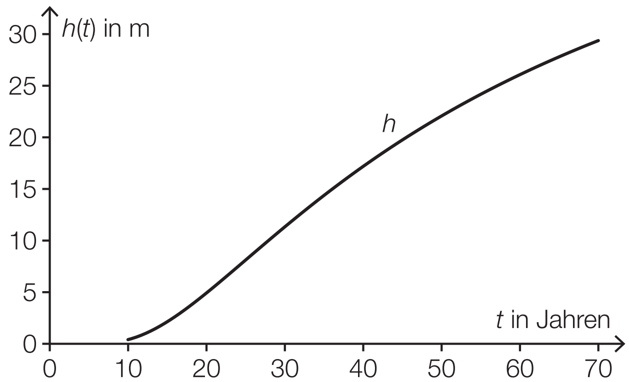
Für $b > 0$ und $t > 0$ ist $-\frac{b}{t}$ kleiner als 0 und daher $e^{-\frac{b}{t}}$ kleiner als 1. Daher gilt: $a \cdot e^{-\frac{b}{t}} < a$.

$19{,}24 = 28 \cdot e^{-\frac{b}{80}}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $b = 30{,}0\ldots \approx 30$

$\frac{h(100) - h(80)}{h(80)} = 0{,}0779\ldots \approx 7{,}8\ \%$

Gemäß diesem Modell rechnet man in den nächsten 20 Jahren mit einer Zunahme der durchschnittlichen Höhe um rund 7,8 %.

b)



$h'(t) = \frac{3000}{t^2} \cdot e^{-\frac{50}{t}}$

$h'(40) = 0{,}537\ldots \approx 0{,}54$
Die momentane Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe für 40-jährige Fichten beträgt rund 0,54 m pro Jahr.

c) Der Inhalt der schraffierten Fläche entspricht der Zunahme der durchschnittlichen Höhe dieses Fichtenbestands zwischen $t = 30$ Jahre und $t = 60$ Jahre.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für die richtige mathematische Begründung, warum die Funktion an der Stelle $t = 0$ nicht definiert ist
1 × D2: für die richtige mathematische Begründung, warum die durchschnittliche Höhe a nicht überschreiten kann
1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b
1 × B2: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

b) 1 × B1: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen im Intervall [10; 70]
1 × B2: für die richtige Berechnung der momentanen Änderungsrate der durchschnittlichen Höhe von 40-jährigen Fichten

c) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

Größe von Mädchen*

Aufgabennummer: B_353

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Tabelle ist angegeben, wie groß Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Körpergröße (in Zentimetern)
0	51,5
1	74,0
2	85,4
3	95,4
4	102,8
5	109,5
6	115,3

a) – Stellen Sie die durchschnittliche Körpergröße in Abhängigkeit vom Alter in einem Koordinatensystem dar. Verwenden Sie dazu die Angaben aus der obigen Tabelle.

b) – Bestimmen Sie den absoluten Größenzuwachs im 3. Lebensjahr anhand der gegebenen Daten.
– Beschreiben Sie, was mit der folgenden Rechnung im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt wird:

$$\frac{102{,}8 - 95{,}4}{95{,}4}$$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Tabelle sehen Sie, wie schwer Mädchen eines bestimmten Alters durchschnittlich sind.

Alter (in Jahren)	durchschnittliche Masse (in Kilogramm)
1	9,3
2	12,2
3	14,5
4	16,6
5	19,0
6	21,0

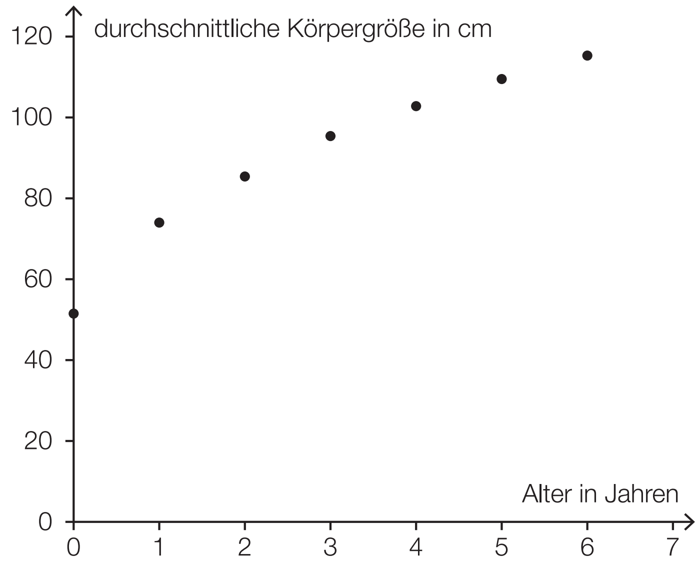
Aufgrund der gegebenen Daten kann man vermuten, dass die Abhängigkeit der durchschnittlichen Masse von der durchschnittlichen Körpergröße annähernd durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann. Die Werte für die durchschnittliche Körpergröße entnehmen Sie der im Einleitungstext gegebenen Tabelle.

– Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten für den linearen Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Körpergröße und durchschnittlicher Masse.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) 95,4 – 85,4 = 10
Der absolute Größenzuwachs im 3. Lebensjahr beträgt 10 cm.

Es wird der relative Zuwachs der durchschnittlichen Körpergröße im 4. Lebensjahr ermittelt.

c) Berechnung des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}9961$

Der Korrelationskoeffizient liegt nahe bei 1 und lässt daher einen starken positiven linearen Zusammenhang vermuten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige grafische Darstellung

b) 1 × B: für das richtige Bestimmen des absoluten Größenzuwachses
1 × C: für die richtige Beschreibung im Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten
1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

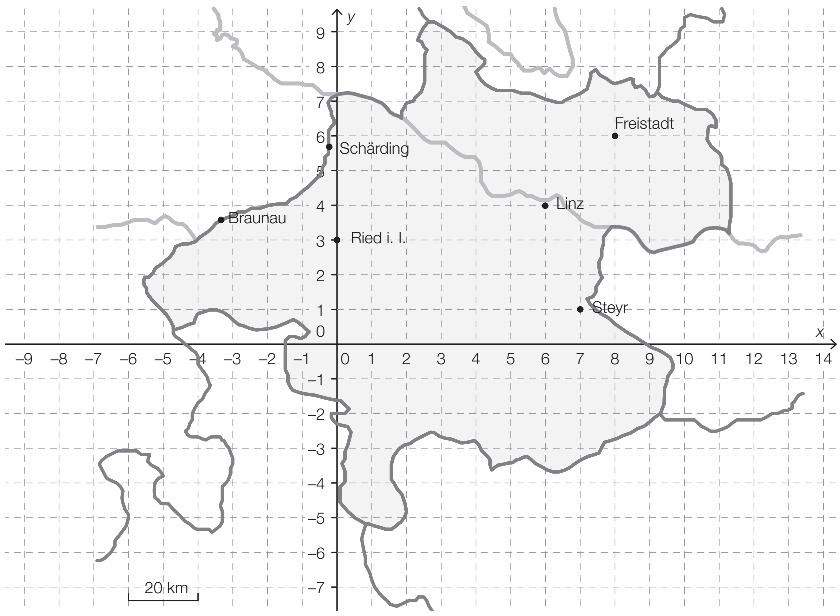
Brieftauben*

Aufgabennummer: B_355

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Brieftauben werden bei Wettkämpfen an einen Ort gebracht, von dem sie selbstständig wieder zurück nach Hause fliegen. Bei der vorliegenden Aufgabe wird angenommen, dass Brieftauben stets den kürzesten Weg nach Hause suchen.

Die nachstehende Grafik zeigt einige Städte in Oberösterreich, in denen es Taubenzüchter/innen gibt, in einem Koordinatensystem. Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einer Entfernung von 10 Kilometern.



a) Eine Taube wird in Freistadt losgelassen und fliegt auf direktem Weg nach Steyr.

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Vektors (Pfeil von Anfangspunkt zu Endpunkt des Fluges), der die Flugstrecke der Taube beschreibt.

b) Eine Brieftaube fliegt von Ried i. I. in ihre Heimatstadt. Dieser Flug wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschrieben.

– Lesen Sie die Heimatstadt dieser Brieftaube ab.
– Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\vec{v}$.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine Taube startet in Linz. Sie fliegt eine Strecke von 67,08 km Länge in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Vektors, den die Taube von Linz bis zu ihrem Ziel entlangfliegt. Geben Sie die Koordinaten dabei in den Längeneinheiten des obigen Koordinatensystems an.

d) Die Berechnung des Skalarprodukts zweier Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ergibt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} = 0$

– Ermitteln Sie a.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Freistadt: $F = (8|6)$
Steyr: $S = (7|1)$
$\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) Heimatstadt dieser Brieftaube: Freistadt (8|6)

$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 3^2} = 8{,}544\ldots \approx 8{,}54$

c) Einheitsvektor: $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$6{,}708 \cdot \vec{e} = \frac{6{,}708}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

d) $3 \cdot 2 + (-1) \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 6$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors

b) 1 × C: für das richtige Ablesen der Heimatstadt (Name oder Koordinaten)
1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags des Vektors

c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (Länge des Vektors muss verändert werden)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors in den Längeneinheiten des gegebenen Koordinatensystems

d) 1 × A: für das richtige Ermitteln von a

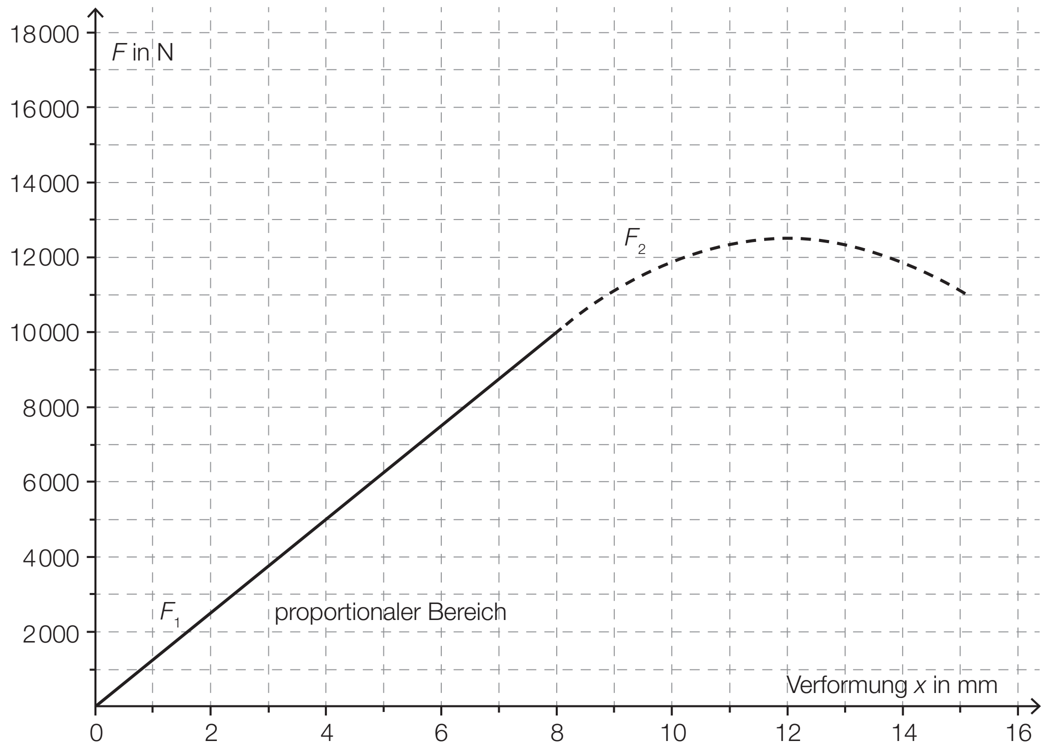
Bruchbiegeprüfung

Aufgabennummer: B_027

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einer Bruchbiegeprüfung wird die Festigkeit von Materialproben bestimmt. Unter Erhöhung des Betrags der Kraft $\vec{F}$ in Newton (N) wird die verursachte Verformung x in Millimetern (mm) ermittelt. Das Kraft-Verformungs-Diagramm beschreibt den Zusammenhang von Kraft und Verformung.

Der Verlauf einer Bruchbiegeprüfung an einer Holzprobe ist im nachstehenden Kraft-Verformungs-Diagramm dargestellt.



$$F_2(x) = -\frac{625}{4} \cdot x^2 + 3750 \cdot x - 10000 \quad \text{mit} \quad 8 \leq x \leq 15{,}1$$

a) – Berechnen Sie die maximale Kraft im dargestellten Bruchbiegeversuch mithilfe der Differenzialrechnung.

b) Nach einer Verformung von 15,1 mm kam es zum Bruch.

– Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion F_1.

– Berechnen Sie die Arbeit W ($W = \int F(x)\,dx$), die bis zum Bruch verrichtet wurde.

c) Die Kraftbelastung der Bruchbiegeprüfung wird im proportionalen Bereich $[0; b]$ auf $F_1(x) = k \cdot x + F_0$ geändert.

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters F_0 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Zeigen Sie, dass sich die Brucharbeit ($W = \int F(x)\,\mathrm{d}x$) im proportionalen Bereich in diesem Fall um $F_0 \cdot b$ erhöht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $F_2'(x) = -\frac{625}{2} \cdot x + 3750$

$-\frac{625}{2} \cdot x + 3750 = 0 \;\Rightarrow\; x = 12$ mm

$F_2(12) = 12\,500$ N

Die maximale Kraft beträgt 12 500 N.

b) Ablesen aus der Grafik: $P_1 = (0|0)$, $P_2 = (4|5\,000)$

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5\,000}{4} = 1\,250$

$F_1(x) = 1\,250 \cdot x$ mit $0 \leq x \leq 8$

Berechnung des Schnittpunkts der Funktionen:

$F_1(x) = F_2(x) \;\Rightarrow\; x_1 = 8$

Berechnung der Brucharbeit W:

$W = \int_0^8 F_1(x)\,dx + \int_8^{15{,}1} F_2(x)\,dx$

$W = 123\,865{,}05\ldots$ Nmm

Bis zum Bruch wurde eine Arbeit von rund 123 865 Nmm verrichtet.

c) Kraft ohne Anfangsbelastung F_0: $F(x) = k \cdot x$

Arbeit ohne Anfangsbelastung F_0 im Intervall $[0; b]$: $W = \int_0^b k \cdot x = \left[k \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^b = k \cdot \frac{b^2}{2}$

Arbeit mit der Anfangsbelastung F_0:

$W_{neu} = \int_0^b (k \cdot x + F_0)\,dx = \left[k \cdot \frac{x^2}{2} + F_0 \cdot x\right]_0^b = k \cdot \frac{b^2}{2} + F_0 \cdot b = W + F_0 \cdot b$

Durch die geänderte Kraftbelastung der Bruchbiegeprüfung nimmt die Brucharbeit W_{neu} für den proportionalen Bereich um $F_0 \cdot b$ zu.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 4
c) 2

Thema: Holz

Quellen: —

Verkehrszeichen

Aufgabennummer: B_261

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Der Durchmesser des Verkehrszeichens *Einfahrt verboten* beträgt 600 mm. Der weiße Balken ist 547 mm lang und 139 mm breit.

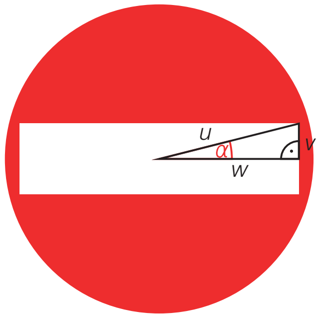


Abbildung 1

– Berechnen Sie, welchen prozentuellen Anteil der Gesamtfläche des Kreises der Balken einnimmt.

– Ordnen Sie anhand des Dreiecks in Abbildung 1 A bis D richtig zu. *[2 zu 4]*

$\tan(\alpha)$	
$\sin(\alpha)$	

A	$\frac{v}{u}$
B	$\frac{w}{v}$
C	$\frac{v}{w}$
D	$\frac{u}{v}$

Aus optischen Gründen soll der Balken so verlängert werden, dass die Ecken den Kreisrand berühren.

– Berechnen Sie die Länge des Balkens bei gleichbleibender Balkenbreite.

b) Das Verkehrszeichen *Starke Steigung* (siehe Abbildung 2) hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks.

Abbildung 2

– Zeigen Sie, dass die Steigung im dargestellten schwarzen Dreieck mehr als 50 % beträgt, obwohl der Anstieg genau bis zur Hälfte der Seitenkante reicht.

c) Bei dem Verkehrszeichen *Achtung Querrinne oder Aufwölbung* wird die obere Begrenzung der schwarzen Fläche mit der Funktion g modelliert:

$g(x) = \cos(x + \pi) + 2{,}8$

x, $g(x)$ ... Koordinaten

– Skizzieren Sie in Abbildung 3 ein zum Funktionsgraphen g passendes Koordinatensystem mit entsprechender Skalierung.

Abbildung 3

– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts der schwarzen Fläche in der Abbildung 3.

A = ________________________________

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) A_G ... Gesamtfläche

$A_G = 300^2 \cdot \pi$

$A_G = 90\,000 \cdot \pi$ mm²

A_B ... Fläche des weißen Balkens

$A_B = 547 \cdot 139 = 76\,033$

$A_B = 76\,033$ mm²

$\frac{A_B}{A_G} = 0{,}2689\ldots = 26{,}89\ldots\ \% \approx 27\ \%$

tan(α)	C
sin(α)	A

A	$\frac{v}{u}$
B	$\frac{w}{v}$
C	$\frac{v}{w}$
D	$\frac{u}{v}$

x ... Länge des neuen Balkens

$\frac{x}{2} = \sqrt{300^2 - 69{,}5^2} = \sqrt{85\,169{,}75}$

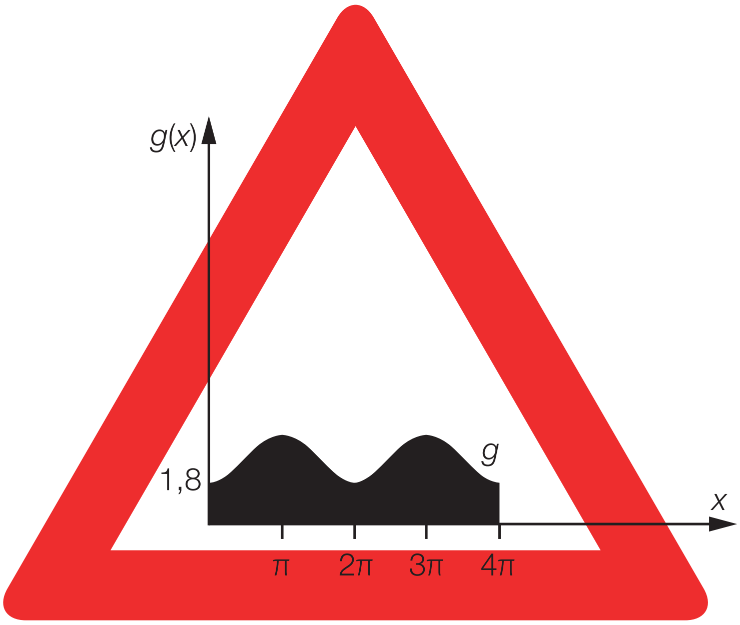
$x = 2 \cdot \sqrt{85\,169{,}75} = 583{,}677\ldots$

$x \approx 584$ mm

b) Halbe Seite heißt auch halber Winkel. Im gleichseitigen Dreieck ist $\alpha = 60° \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30°$.

$\tan(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577\ldots \Rightarrow$ Die Steigung ist größer als 50 %.

c)



$A = \int_0^{4\pi} \cos(x + \pi) + 2{,}8$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 2

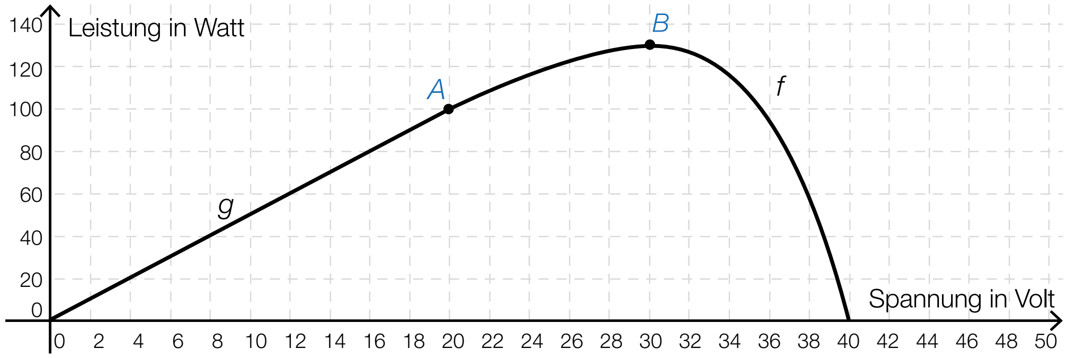
Thema: Verkehr

Quellen: –

Solarzelle

Eine Solarzelle wandelt kurzwellige Strahlungsenergie, wie zum Beispiel Sonnenlicht, direkt in elektrische Energie um.

a) In der nachstehenden Grafik ist die Leistungskurve einer Solarzelle dargestellt:



Der Verlauf der Leistungskurve wird im Intervall [0; 20] durch eine lineare Funktion g und im Intervall [20; 40] durch eine Polynomfunktion f vom Grad 4 beschrieben. Im Punkt A gehen die beiden Funktionsgraphen knickfrei ineinander über (das bedeutet, dass die Funktionen an dieser Stelle den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben). Im Punkt B hat die Funktion f einen Hochpunkt. Die maximale Leistung der Solarzelle beträgt 130 Watt.

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

x ... Spannung in Volt mit $20 \leq x \leq 40$
$f(x)$ ... Leistung bei der Spannung x in Watt

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a, b, c, d und e berechnet werden können.

b) Wenn keine elektrische Energie erzeugt wird, entladen sich die eingebauten Kondensatoren. Der zeitabhängige Spannungsverlauf kann dabei durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden.

Es gilt:
$u(t) = u_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

t ... Zeit in ms
$u(t)$ ... Spannung zur Zeit t in Volt

Die Spannung wurde zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten gemessen. Für $t = 0$ ms beträgt die Spannung 10 Volt und für $t = 20$ ms beträgt die Spannung 5 Volt.

1) Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion u auf, die die Entladung des Kondensators beschreibt.

Dieser Entladevorgang kann auch durch eine Differenzialgleichung beschrieben werden.

2) Kreuzen Sie diejenige Differenzialgleichung an, die diesen Entladevorgang richtig beschreibt. *[1 aus 5]*

t ... Zeit in ms
$u(t)$ ... Spannung zur Zeit t in Volt
$k > 0$ … Proportionalitätsfaktor

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = k \cdot u$	☐
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -k$	☐
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -k \cdot u$	☐
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = k \cdot t$	☐
$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -k \cdot t$	☐

c) Der *Energieertrag* von Photovoltaikanlagen eines bestimmten Typs ist annähernd normalverteilt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 6$ Kilowattstunden (kWh).

Für 10 zufällig ausgewählte Anlagen dieses Typs wurden folgende Energieerträge in kWh gemessen:

195	198	210	204	196	202	210	199	192	201

1) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ der Messwerte.
2) Ermitteln Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ des Energieertrags.
3) Beschreiben Sie, wie sich die Breite des Konfidenzintervalls ändert, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit α kleiner wird.

d) Ein anderer Hersteller produziert Solarzellen, deren Arbeitsspannung annähernd normalverteilt ist mit dem Erwartungswert $\mu = 0{,}65$ Volt und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}15$ Volt.

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent dieser Solarzellen mit einer Spannung von mehr als 0,8 Volt arbeiten.

Möglicher Lösungsweg

a1) Aufstellen des Gleichungssystems:

I: $f(20) = 100 \Rightarrow 160\,000 \cdot a + 8\,000 \cdot b + 400 \cdot c + 20 \cdot d + e = 100$

II: $f'(20) = 5 \Rightarrow 32\,000 \cdot a + 1\,200 \cdot b + 40 \cdot c + d = 5$

III: $f(30) = 130 \Rightarrow 810\,000 \cdot a + 27\,000 \cdot b + 900 \cdot c + 30 \cdot d + e = 130$

IV: $f'(30) = 0 \Rightarrow 108\,000 \cdot a + 2\,700 \cdot b + 60 \cdot c + d = 0$

V: $f(40) = 0 \Rightarrow 2\,560\,000 \cdot a + 64\,000 \cdot b + 1\,600 \cdot c + 40 \cdot d + e = 0$

b1) $u_0 = 10$

$5 = 10 \cdot e^{-20 \cdot k}$

$k = 0{,}03465...$

$u(t) = 10 \cdot e^{-0{,}03465... \cdot t}$

b2)

$\frac{du}{dt} = -k \cdot u$	☒

c1) $\overline{x} = 200{,}7$ kWh

c2) Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$200{,}7 \pm z_{0{,}975} \cdot \frac{6}{\sqrt{10}}$

$z_{0{,}975} = 1{,}959...$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall für μ in kWh:
[196,98; 204,42] (Intervallgrenzen gerundet)

c3) Wird die Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner, so wird das Konfidenzintervall breiter.

X ... Spannung in V
$P(X > 0{,}8) = 0{,}15865...$

Rund 15,87 % der Solarzellen arbeiten mit einer Spannung von mehr als 0,8 Volt.

d1) X ... Spannung in V
$P(X > 0{,}8) = 0{,}15865...$

Rund 15,87 % der Solarzellen arbeiten mit einer Spannung von mehr als 0,8 Volt.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Pac-Man

Aufgabennummer: B_292

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Pac-Man ist ein Videospiel, das 1980 veröffentlicht wurde. Die Spielfigur Pac-Man muss Punkte in einem Labyrinth fressen, während sie von Gespenstern verfolgt wird.

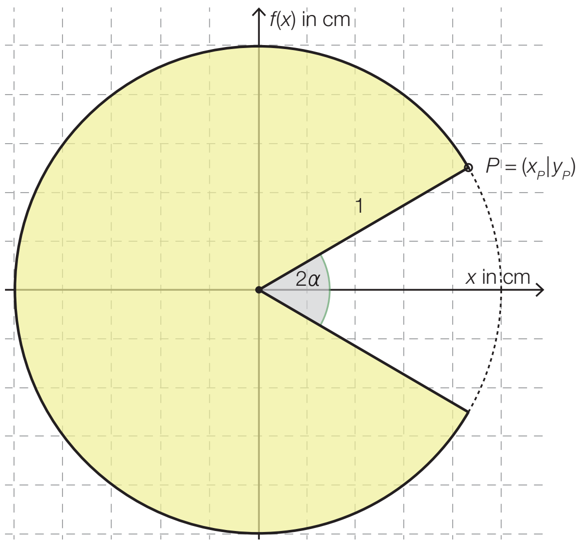


Abbildung 1: Pac-Man

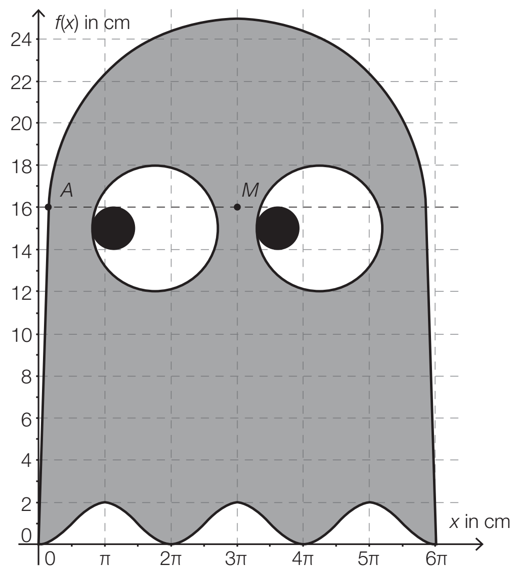


Abbildung 2: Gespenst

a) In Abbildung 1 ist Pac-Man dargestellt. Der Kreisabschnitt in der oberen Hälfte des Koordinatensystems kann mit dem Funktionsgraphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ im Intervall $-1 \leq x \leq x_P$ dargestellt werden.

– Veranschaulichen Sie in der Abbildung 1 den $\cos(\alpha)$.

– Kennzeichnen Sie in der Abbildung 1 diejenige Fläche, die mit dem nachstehenden bestimmten Integral berechnet wird.

$$F = \int_0^{x_P} \left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{y_P}{x_P} \cdot x \right) \mathrm{d}x$$

– Berechnen Sie den Flächeninhalt von Pac-Man mit Radius 1 cm und $\alpha = \frac{\pi}{5}$ rad.

b) In Abbildung 2 wird ein Gespenst durch 4 Funktionen im Intervall $[0; 6\pi]$ dargestellt. Der Punkt A hat die Koordinaten $(0{,}5\,|\,16)$. Der Kopf wird durch einen Halbkreis dargestellt. Die Seitenlinien entsprechen 2 Geraden.

– Stellen Sie eine mögliche Winkelfunktion f für die dargestellte Wellenlinie auf.

– Berechnen Sie die Länge der äußeren Umrisslinie der dargestellten Figur. Verwenden Sie zur Berechnung der Länge der Wellenlinie die nachstehende Formel für die Bogenlänge.

$$b_f = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$

c) Erwischt Pac-Man eine „Kraftpille“, so kann er für eine gewisse Zeit lang selbst Gespenster fangen und damit Bonuspunkte sammeln. In Abbildung 3 ist eine mögliche Spielsituation dargestellt. Ein Spieler versucht, mit Pac-Man eine der Kraftpillen zu erreichen, und wird von 3 Gespenstern verfolgt.

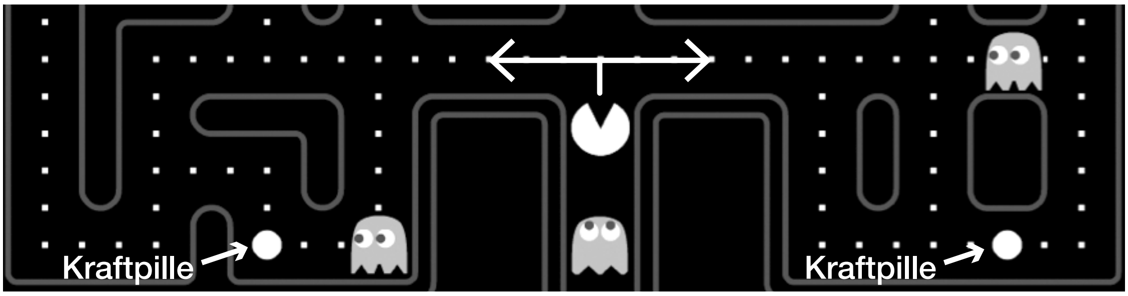


Abbildung 3

Der Spieler entscheidet sich mit angegebener Wahrscheinlichkeit für eine der beiden dargestellten Richtungen (links/rechts) und versucht, die jeweilige Kraftpille zu erreichen. In der nachstehenden Tabelle sind die möglichen Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten angegeben.

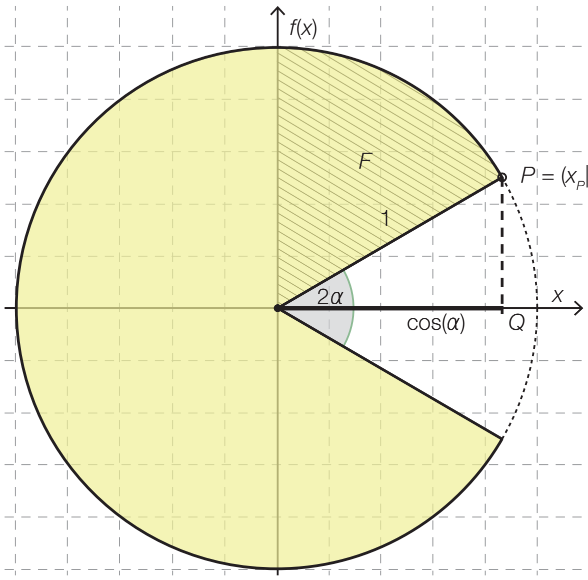
	Wahl der Richtung	ein Gespenst erwischt Pac-Man	Pac-Man erreicht eine Kraftpille
links	25 %	65 %	35 %
rechts	75 %	45 %	55 %

– Stellen Sie die möglichen Ausgänge des Spielverlaufs und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten durch ein Baumdiagramm dar.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Pac-Man eine der Kraftpillen erreicht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



F_{PM} ... Flächeninhalt von Pac-Man

$F_{PM} = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4}{5} \cdot \pi = 2{,}513...$

$F_{PM} \approx 2{,}51\text{ cm}^2$

b) $f(x) = \cos(x + \pi) + 1$ oder $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2}) + 1$

Umfang des Halbkreises: $L_1 = (6 \cdot \pi - 1) \cdot \frac{\pi}{2} = 28{,}03801\ldots$

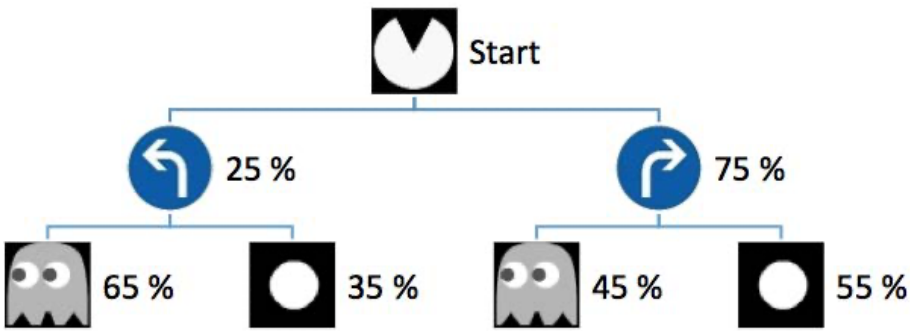
Länge der beiden Seitenlinien: $L_2 = 2 \cdot \sqrt{0{,}5^2 + 16^2} = 32{,}01562\ldots$

Bogenlänge der Wellenlinie (unabhängig von der Winkelfunktion!):

$L_3 = 6 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos(x)^2}\,dx = 6 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin(x)^2}\,dx = 22{,}9211\ldots$

L = Länge der Umrisslinie $= L_1 + L_2 + L_3 = 82{,}974...$
$L \approx 82{,}97$ cm

c)



P(„Wahrscheinlichkeit, eine Kraftpille zu erreichen“) $= 0{,}25 \cdot 0{,}35 + 0{,}75 \cdot 0{,}55 = 0{,}5$

Pac-Man erreicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % eine der Kraftpillen.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3
c) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Pac-Man

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Programmieren

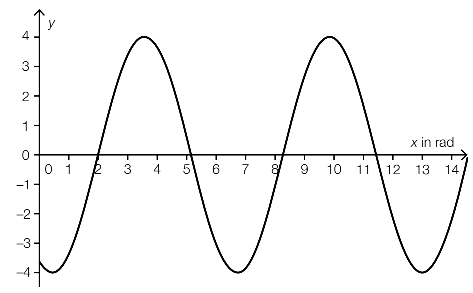
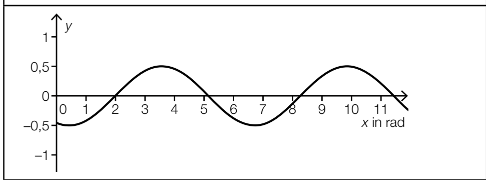
Aufgabennummer: B_031

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Um bestimmte grafische Objekte zu animieren, muss ein Programmierer über verschiedene mathematische Hintergründe Bescheid wissen.

a) Um das Auf-und-ab-Fliegen zweier Hexen am Bildschirm darzustellen, werden Wellenlinien benötigt.

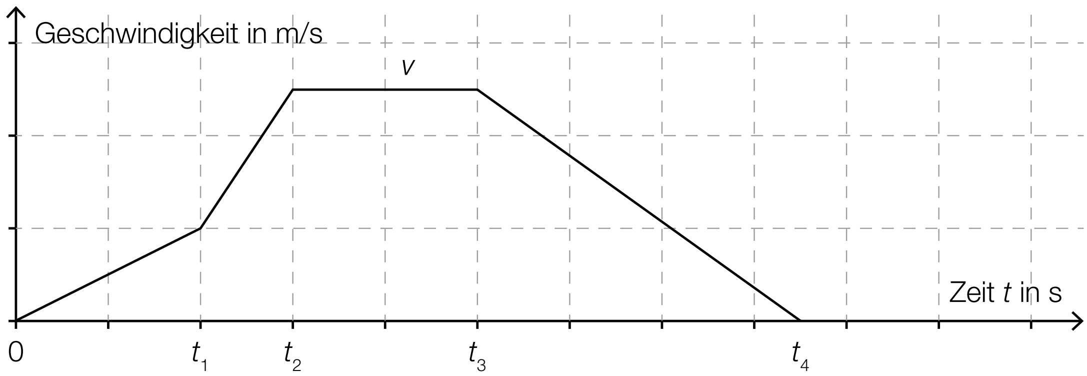
– Ordnen Sie den beiden Flugkurven jeweils den passenden Funktionsterm aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

A	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x + 2)$
B	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x - 2)$
C	$4 \cdot \sin(x + 2)$
D	$4 \cdot \sin(x - 2)$

– Erklären Sie den Einfluss des Parameters c in der allgemeinen Sinusfunktion $y(x) = a \cdot \sin(x + b) + c$.

b) Ein Ball wird animiert. Die nachstehende Abbildung zeigt den Geschwindigkeit-Zeit-Verlauf des rollenden Balles.



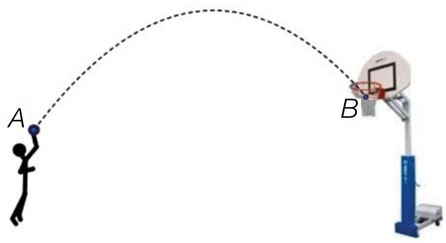
– Skizzieren Sie das dazugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm.
– Erklären Sie die physikalische Bedeutung derjenigen Fläche, die der Graph der Funktion v mit der Zeitachse einschließt.

c) Eine Figur in einem Spiel wirft einen Ball in einen Basketballkorb. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen. Der Ball soll im Punkt $A = (3|5)$ starten. Die Mitte des Korbes befindet sich im Punkt $B = (12|7)$. Die Flugbahn kann näherungsweise durch eine Polynomfunktion 2. Grades beschrieben werden.

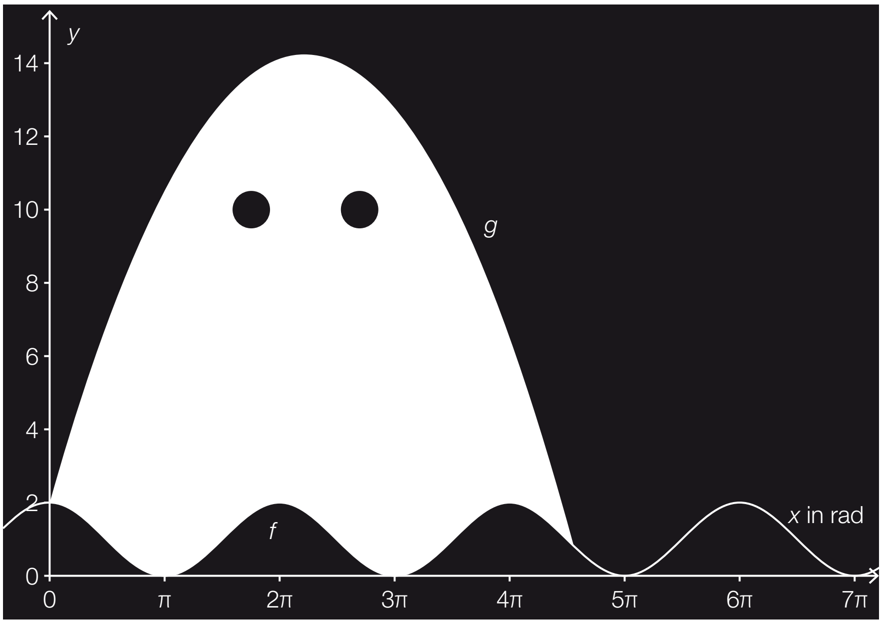
– Begründen Sie, warum durch die 2 gegebenen Punkte die Flugbahn nicht eindeutig bestimmt ist.

Der Abschusswinkel beträgt 46°.

– Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Flugbahn.



d) Der nachstehend abgebildete Geist wird durch den Funktionsgraphen f mit $f(x) = \cos(x) + 1$ und g mit $g(x) = -0{,}25 \cdot x^2 + 3{,}5 \cdot x + 2$ begrenzt. Zwei Kreise mit einem Radius von jeweils 0,5 cm bilden die Augen. Die Funktionsgraphen f und g schneiden sich an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 14{,}3$.

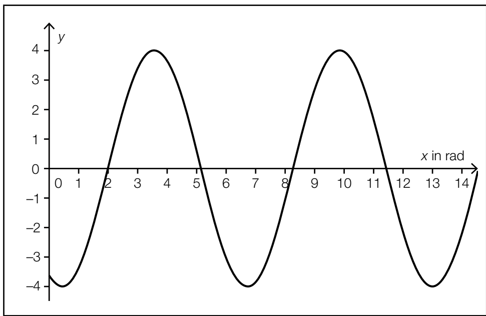
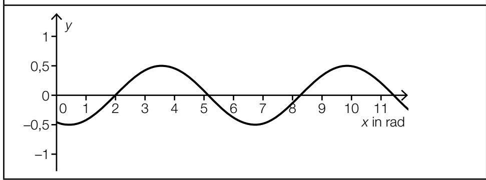


– Berechnen Sie den Flächeninhalt des abgebildeten Geistes.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

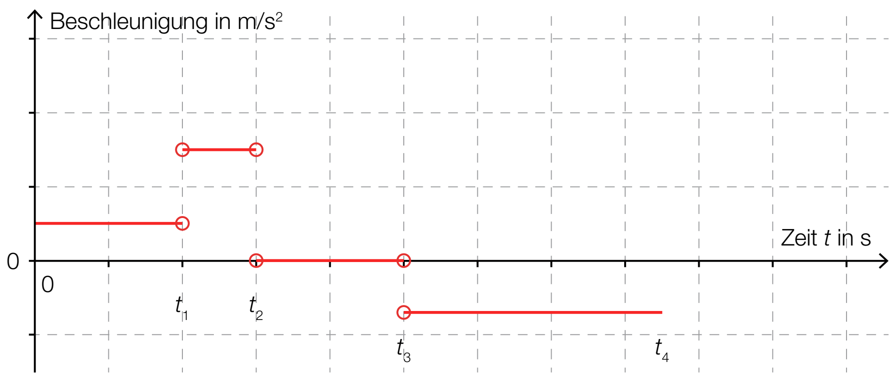
a)

	D
	B

A	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x + 2)$
B	$\frac{1}{2} \cdot \sin(x - 2)$
C	$4 \cdot \sin(x + 2)$
D	$4 \cdot \sin(x - 2)$

Ein positiver Parameter c verschiebt den Funktionsgraphen der Funktion um c nach oben, ein negativer Parameter c verschiebt die Funktion um $|c|$ nach unten.

b)



Als Ableitungsfunktion ist die Beschleunigung-Zeit-Funktion an den Sprungstellen nicht definiert. Es ist nicht gefordert, diese Definitionslücken zu berücksichtigen.

Die Fläche, die der Funktionsgraph v mit der Zeitachse einschließt, entspricht dem zurückgelegten Weg in Metern im Zeitintervall $0 \leq t \leq t_4$.

c) Eine allgemeine Polynomfunktion 2. Grades ($f(x) = a + x^2 + b \cdot x + c$) hat 3 Parameter. Es werden deshalb 3 Bedingungen für 3 Gleichungen benötigt, um diese eindeutig zu bestimmen. Es fehlt also eine 3. Bedingung.

Aus den 3 Bedingungen werden die 3 Gleichungen erstellt:
I: $A \in f$: $9 \cdot a + 3 \cdot b + c = 5$
II: $B \in f$: $144 \cdot a + 12 \cdot b + c = 7$
III: $f'(3) = \tan(46°)$: $2 \cdot 3 \cdot a + b = \tan(46°)$

Das Lösen des Gleichungssystems ergibt: $a \approx -0{,}09$, $b \approx 1{,}58$ und $c \approx 1{,}08$, somit:
$f(x) = -0{,}09 \cdot x^2 + 1{,}58 \cdot x + 1{,}08$.

d) Der Flächeninhalt der Kreise beträgt: $A_K = 2 \cdot 0{,}5^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ cm².

Flächeninhalt des Geistes:

$\left(\int_0^{14{,}3} -0{,}25 \cdot x^2 + 3{,}5 \cdot x + 2 - \cos(x) - 1 \, \mathrm{d}x\right) - \frac{\pi}{2} = 125{,}9216\ldots$ cm²

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4
d) 2

Thema: IT

Quellen: –

Statuen und Skulpturen (1)*

Aufgabennummer: B_378

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Das Maria-Theresien-Denkmal in Wien wird vermessen. Es werden die Höhenwinkel $\alpha = 45{,}38°$ und $\beta = 38{,}19°$ gemessen. Weiters ist die in der nachstehenden Abbildung eingetragene Länge bekannt.

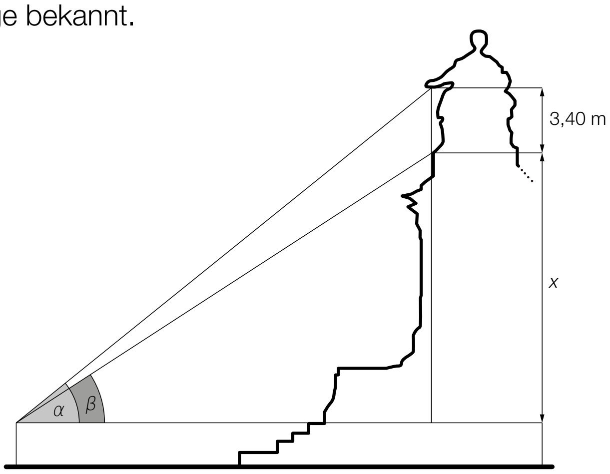
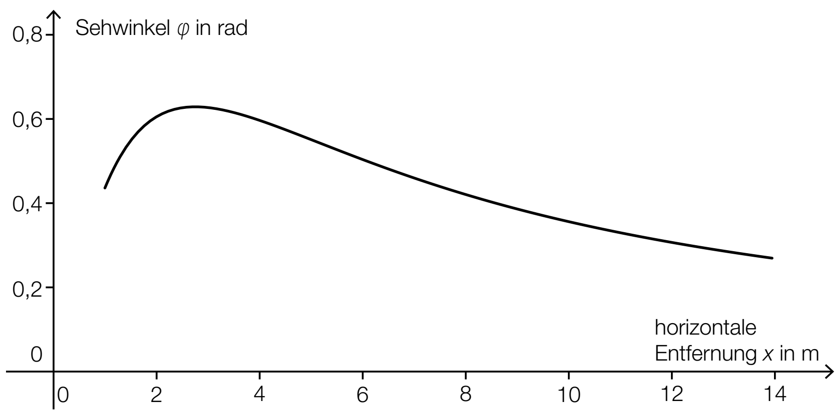


Abbildung nicht maßstabgetreu!

– Berechnen Sie die in der obigen Abbildung mit x bezeichnete Länge.

b) Eine Fotografin möchte eine auf einem Sockel stehende Skulptur unter dem größtmöglichen Sehwinkel fotografieren. Folgende Abbildung gibt zu jeder horizontalen Entfernung x zur Skulptur im Intervall [1; 14] den Sehwinkel φ an:



– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung die horizontale Entfernung mit dem größtmöglichen Sehwinkel.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man vorgehen muss, um diese horizontale Entfernung mithilfe der Differenzialrechnung zu berechnen, wenn eine Gleichung der Funktion mit dem dargestellten Graphen bekannt ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Das Abschlusselement einer Säule soll aus Marmor hergestellt werden. Dieses kann durch Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse beschrieben werden:

$f(x) = 4 - \frac{x}{2} - \sin(x)$ mit $0 \leq x \leq 5$

x, $f(x)$ … Koordinaten in Dezimetern (dm)

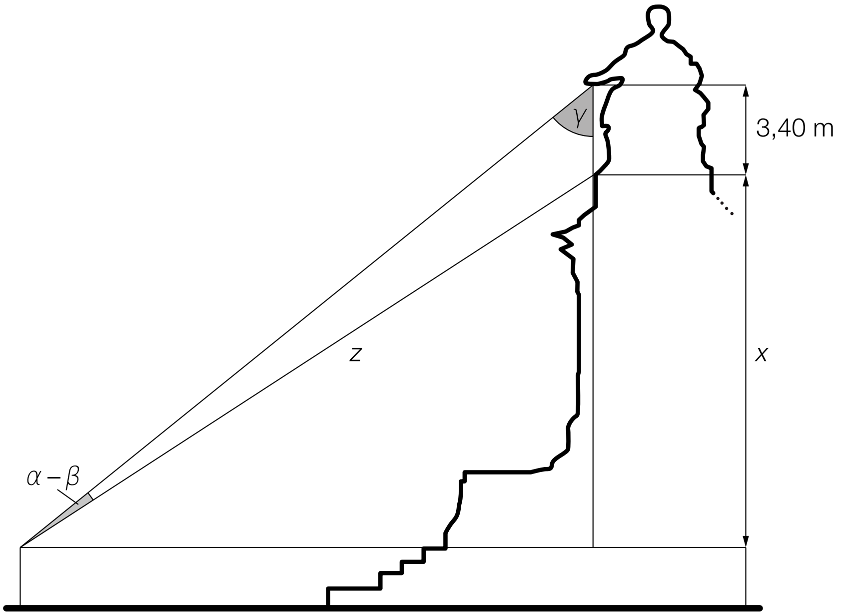
– Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f.
– Kennzeichnen Sie in Ihrer Darstellung den kleinsten und den größten Radius dieses Abschlusselements.

Die Dichte des verwendeten Marmors beträgt 2,7 kg/dm³.

– Berechnen Sie die Masse des Abschlusselements.

Möglicher Lösungsweg

a)



$\gamma = 90° - \alpha = 44{,}62°$

$\alpha - \beta = 7{,}19°$

$$\frac{z}{\sin(44{,}62°)} = \frac{3{,}4}{\sin(7{,}19°)}$$

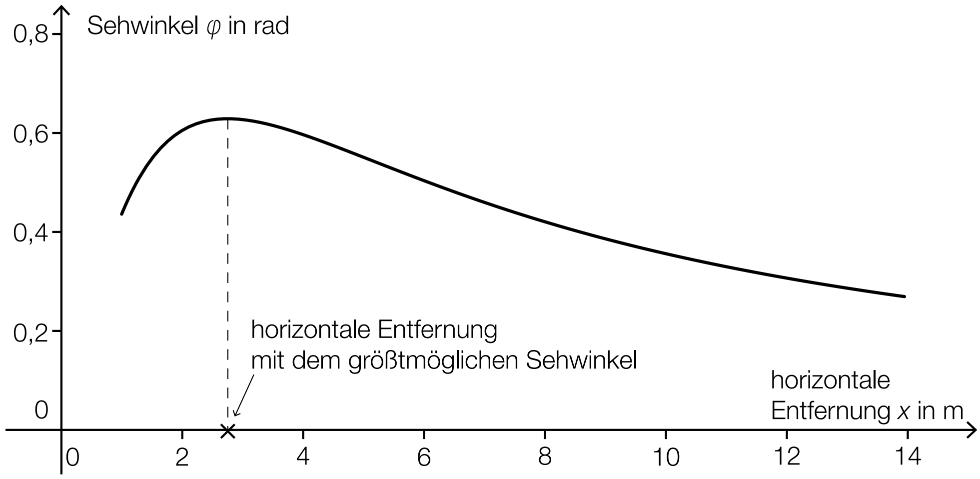
$z = 19{,}08\ \ldots$

$$\sin(38{,}19°) = \frac{x}{19{,}08\ldots}$$

$x = 11{,}797\ldots$

Die Länge x beträgt rund 11,80 m.

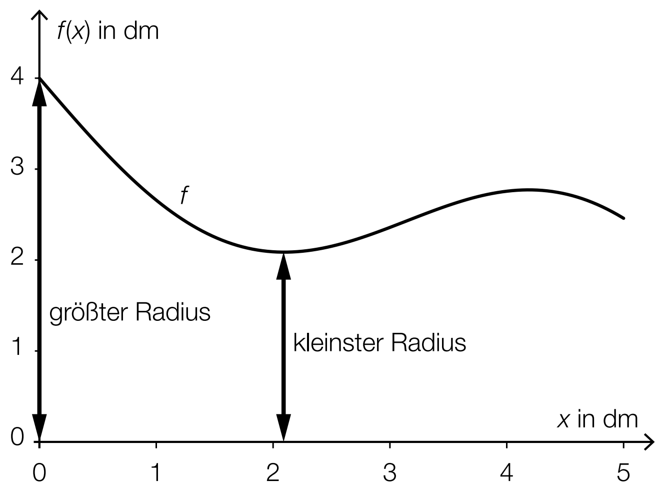
b)



Es muss die Maximumstelle der Funktion ermittelt werden. Daher bildet man die 1. Ableitung und berechnet deren Nullstellen. Diejenige Nullstelle, die im dargestellten Bereich liegt, ist die gesuchte Extremstelle.

Dass es nur eine solche Nullstelle im dargestellten Bereich gibt, geht aus dem Graphen hervor.

c)



$V = \pi \cdot \int_0^5 \left(4 - \frac{x}{2} - \sin(x)\right)^2 \mathrm{d}x = 109{,}78\ldots$

Die Masse (in kg) ist das Produkt aus Dichte (in kg/dm³) und Volumen (in dm³):

$2{,}7 \cdot 109{,}78\ldots = 296{,}41\ldots$

Die Masse beträgt rund 296,4 kg.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für einen richtigen Lösungsansatz (z. B. mithilfe des Sinussatzes)
   1 × B: für die richtige Berechnung von x

b) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen in der Abbildung
   1 × C2: für die richtige Dokumentation der Berechnung

c) 1 × B1: für die richtige Darstellung des Funktionsgraphen
   1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Radien
   1 × A: für die richtige Verwendung des Volumsintegrals
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Masse

Skispringen (2)*

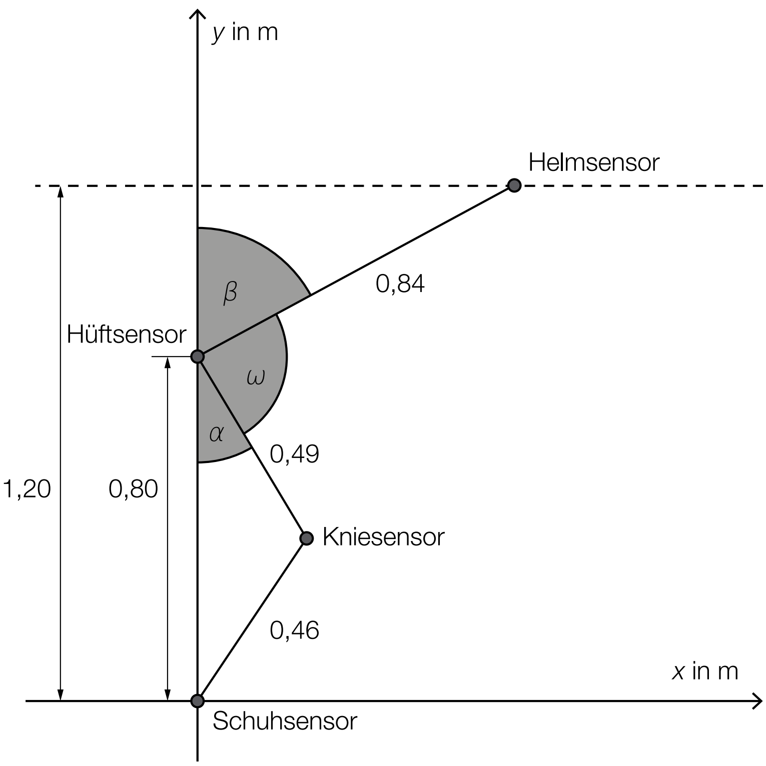
Aufgabennummer: B_380

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Für die Analyse eines Bewegungsablaufs beim Skispringen wurden 4 Sensoren an der Ausrüstung eines Skispringers befestigt.

1. Sensor: Schuh
2. Sensor: Knie
3. Sensor: Hüfte
4. Sensor: Helm

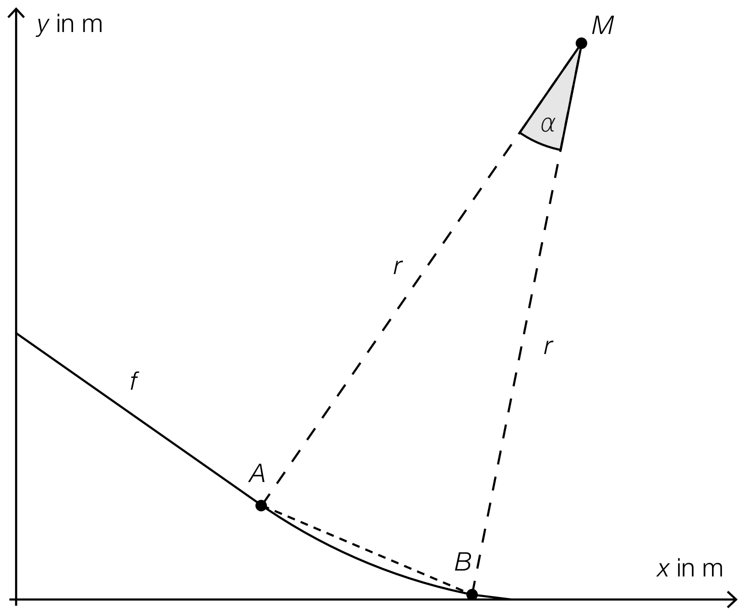
In der nachstehenden Abbildung sind die Positionen der Sensoren für eine Position im Bewegungsablauf des Skispringers in einem Koordinatensystem dargestellt (Angaben in Metern).



– Berechnen Sie den Winkel ω.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Anlauf der Mühlenkopfschanze in Willingen (Deutschland) ist in der nachstehenden Abbildung vereinfacht als Graph einer Funktion *f* dargestellt.



A und *B* sind Punkte eines Kreises mit Mittelpunkt *M* und Radius $r = 105{,}6$ m.
Die geradlinige Strecke *AB* hat eine Länge von 43,4 m.

– Berechnen Sie den Winkel α.
– Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Strecke *AB* kürzer als der Kreisbogen von *A* nach *B* ist.

c) Der Zusammenhang zwischen der Absprunggeschwindigkeit und der Sprungweite soll untersucht werden. Es wird vermutet, dass die Sprungweite linear von der Absprunggeschwindigkeit abhängt.

Es stehen folgende Messdaten zur Verfügung:

Absprunggeschwindigkeit in km/h	88,0	89,9	90,2	91,2	91,5	91,9	92,5
Sprungweite in m	110,0	112,5	113,7	115,8	116,6	118,7	120,0

– Bestimmen Sie für diese Datenpaare eine Gleichung der linearen Regressionsfunktion.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a) $0{,}46^2 = 0{,}49^2 + 0{,}8^2 - 2 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}8 \cdot \cos(\alpha)$

$\alpha = \arccos\left(\frac{0{,}46^2 - 0{,}49^2 - 0{,}8^2}{-2 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}8}\right)$

$\alpha = 31{,}49...°$

$\cos(\beta) = \frac{0{,}4}{0{,}84}$

$\beta = 61{,}56...°$

$\omega = 180° - \alpha - \beta$

$\omega = 86{,}94...° \approx 86{,}9°$

b) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{r} = \frac{21{,}7}{105{,}6}$

$\alpha = 23{,}716...°$

Kreisbogen b von A nach B:

$b = \frac{\alpha \cdot r \cdot \pi}{180°}$

$b = \frac{23{,}716...° \cdot 105{,}6 \cdot \pi}{180°} = 43{,}711...$

prozentueller Unterschied zwischen der Länge der Strecke AB und dem Kreisbogen b:

$\frac{43{,}711... - 43{,}4}{43{,}711...} = 0{,}00712... \approx 0{,}71\ \%$

Die Streckenlänge $\overline{AB}$ ist um rund 0,71 % kürzer als der Kreisbogen b.

c) Ermittlung der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 2{,}3 \cdot x - 90{,}6$ *(Koeffizienten gerundet)*

x ... Absprunggeschwindigkeit in km/h
$f(x)$ ... Sprungweite bei einer Absprunggeschwindigkeit x in m

Wird die Absprunggeschwindigkeit um 1 km/h erhöht, so ist die Sprungweite gemäß dem Modell um rund 2,3 m größer.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für einen richtigen Lösungsansatz (z. B.: mittels Cosinussatz)
   1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels ω

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Winkels α
   1 × B2: für das richtige Bestimmen des prozentuellen Unterschieds

c) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Gleichung der Regressionsfunktion
   1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

Waschmittel (2)*

Aufgabennummer: B_381

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Firma Blitzweiß produziert ein neues Waschmittel.

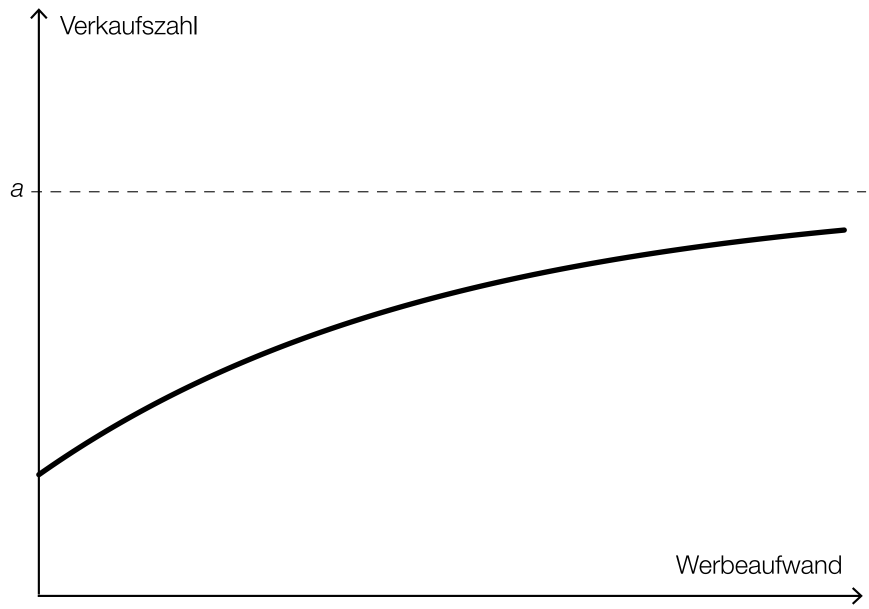
a) Die Abhängigkeit der Verkaufszahlen vom Werbeaufwand x kann für einen Monat modellhaft durch die Funktion V beschrieben werden:

$V(x) = a - b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

a, b, λ sind positive Parameter der Funktion mit $a > b$.

– Ermitteln Sie unter Verwendung der Parameter von V die Verkaufszahl, wenn kein Werbeaufwand betrieben wird.
– Begründen Sie mathematisch, warum für $x \to \infty$ die Funktion V asymptotisch gegen a strebt.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion V für einen bestimmten Wert λ_1.



– Zeichnen Sie den Funktionsverlauf für einen Wert λ_2 mit $\lambda_2 > \lambda_1$ in die obige Abbildung ein. (Die Parameter a und b bleiben unverändert.)

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Kostenfunktion K für die Produktion eines Tages kann folgendermaßen beschrieben werden:

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

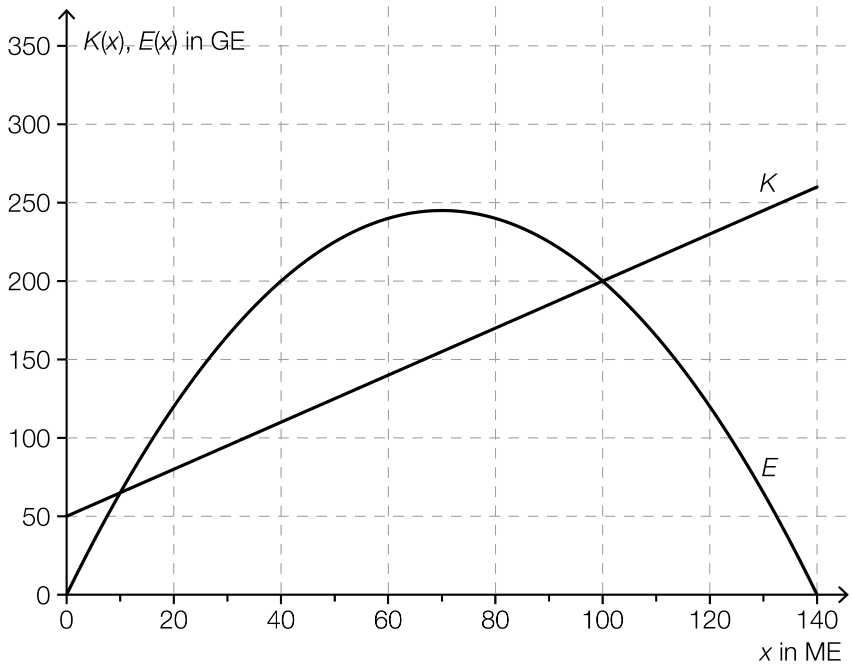
x … Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ … Produktionskosten für x ME in Geldeinheiten (GE)

Folgende Informationen sind verfügbar:
Die Fixkosten betragen € 500.

x in ME	20	30	50
$K(x)$ in GE	604	672	920

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a, b, c und d in Matrizenform auf.
– Berechnen Sie die Parameter a, b, c und d.

c) In der nachstehenden Abbildung sind die Funktionsgraphen der linearen Kostenfunktion K und der quadratischen Erlösfunktion E eines Produkts dargestellt.

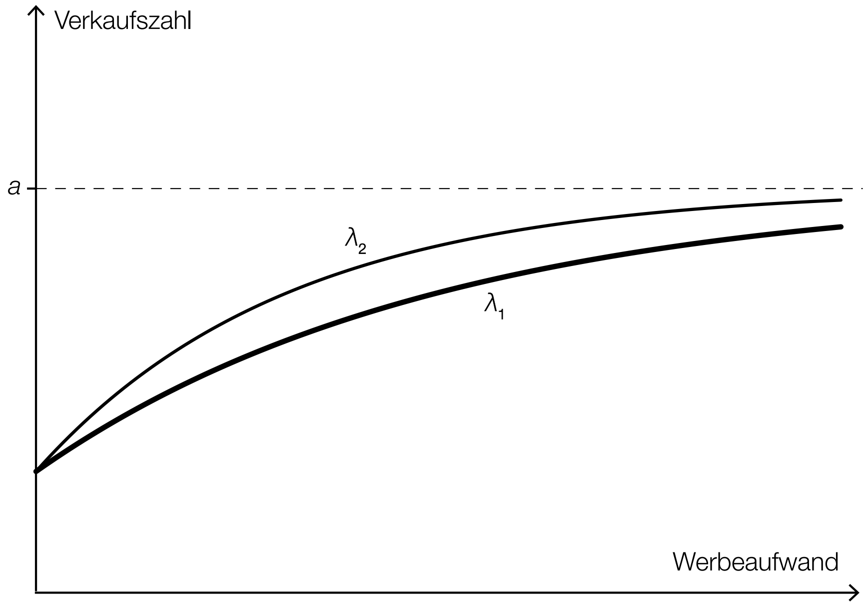


– Stellen Sie eine Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.
– Kennzeichnen Sie den Gewinnbereich in der obigen Abbildung.
– Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Verkaufszahl ohne Werbeaufwand: $V(0) = a - b$
Wenn x gegen unendlich geht, strebt $e^{-\lambda \cdot x}$ und daher auch das Produkt $b \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegen 0 und V somit gegen a.



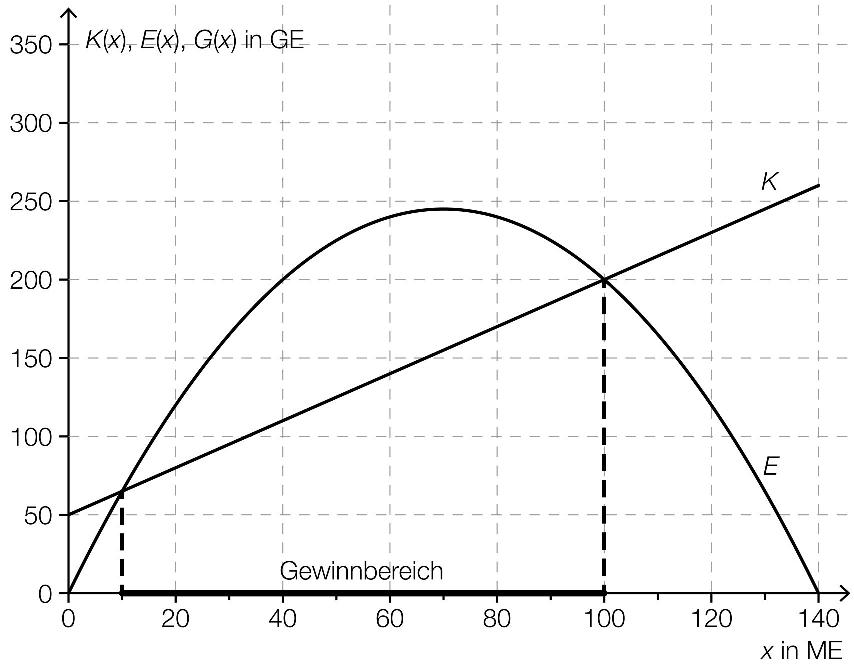
b) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8\,000 & 400 & 20 & 1 \\ 27\,000 & 900 & 30 & 1 \\ 125\,000 & 2\,500 & 50 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 604 \\ 672 \\ 920 \end{pmatrix}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{1}{375}$, $b = -\frac{2}{25}$, $c = \frac{86}{15}$ und $d = 500$

c) Ablesen aus dem Funktionsgraphen: $K(0) = 50$ und $K(100) = 200$

$\Rightarrow$ $K(x) = 1{,}5 \cdot x + 50$



Für die Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = E(x) - K(x)$.
Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Verkaufszahl ohne Werbeaufwand unter Verwendung der Parameter der Funktion

1 × D: für die richtige Erklärung, warum für wachsende x die Verkaufszahlen V gegen a streben

1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsverlaufs (Startwert und charakteristischer Verlauf einer Sättigungsfunktion, wobei die Kurve mit λ_2 oberhalb der gegebenen Kurve verläuft)

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems in Matrizenform

1 × B: für die richtige Berechnung der Parameter

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Kostenfunktion

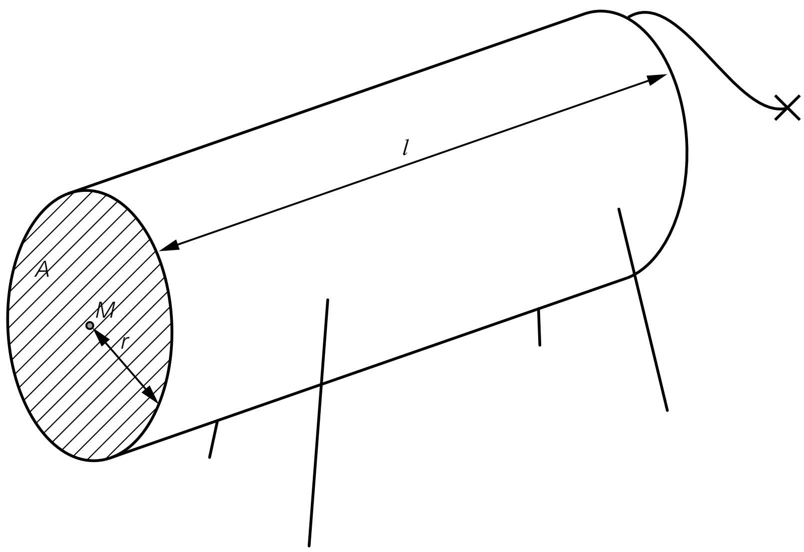
1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Gewinnbereichs

1 × D: für die richtige mathematische Erklärung

Modell-Kuh*

Aufgabennummer: B_385		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Um in einer Faustformel einen Zusammenhang zwischen Brustumfang und Volumen einer Kuh herzustellen, wird die Kuh modellhaft als Zylinder mit einer kreisförmigen Querschnittsfläche und der Länge l angenommen.



Dazu muss der Flächeninhalt A der Kreisfläche durch den Umfang u des Kreises ausdrückt werden.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A in Abhängigkeit vom Umfang u auf.

A = ____________________

In diesem Modell wird die Länge l des Zylinders als das 9-Fache des Radius r angenommen.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V in Abhängigkeit vom Umfang u auf.

V = ____________________

Der Brustumfang einer Kuh ist um 10 % größer als jener einer anderen Kuh.

– Bestimmen Sie, um wie viel Prozent das Volumen dieser Kuh größer ist als das Volumen der anderen Kuh.

* ehemalige Klausuraufgabe

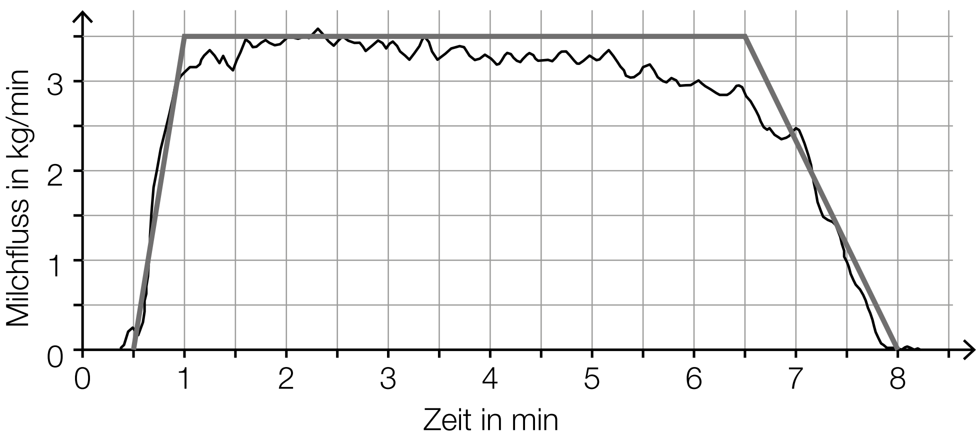
b) Die nachstehende Tabelle gibt den Brustumfang und die Lebendmasse von 8 Kühen an.

Brustumfang in cm	Lebendmasse in kg
153	240
155	303
161	285
163	320
165	373
167	318
169	387
170	358

In einem vereinfachten Modell kann für Brustumfänge von 150 cm bis 170 cm ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden angegebenen Größen angenommen werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. (Die Lebendmasse soll in Abhängigkeit vom Brustumfang beschrieben werden.)
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie mithilfe dieses Modells die Lebendmasse, die man bei einem Brustumfang von 160 cm erwarten kann.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Milchfluss während eines Melkvorgangs in Kilogramm pro Minute (kg/min) in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten (min).
Für weitere Berechnungen wird der Milchfluss durch einen Streckenzug in Form eines Trapezes modelliert. Dieser Streckenzug ist ebenfalls eingezeichnet.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Grafik die während dieses Melkvorgangs insgesamt gemolkene Milchmenge.
– Bestimmen Sie näherungsweise die während dieses Melkvorgangs insgesamt gemolkene Milchmenge.

Möglicher Lösungsweg

a) $u = 2 \cdot r \cdot \pi \;\Rightarrow\; r = \dfrac{u}{2 \cdot \pi}$

$A = r^2 \cdot \pi$

$\Rightarrow\; A = \dfrac{u^2}{4 \cdot \pi}$

$l = 9 \cdot r$

$V = A \cdot 9 \cdot r$

$V = \dfrac{u^2}{4 \cdot \pi} \cdot \dfrac{9 \cdot u}{2 \cdot \pi} = \dfrac{9 \cdot u^3}{8 \cdot \pi^2}$

$V_{neu} = \dfrac{9 \cdot (1{,}1 \cdot u)^3}{8 \cdot \pi^2} = \dfrac{9 \cdot 1{,}1^3 \cdot u^3}{8 \cdot \pi^2} = 1{,}1^3 \cdot V = 1{,}331 \cdot V$

Wenn der Umfang um 10 % steigt, nimmt gemäß diesem Modell das Volumen um 33,1 % zu.

b) Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$y = 6{,}50 \cdot x - 736$ *(Koeffizienten gerundet)*

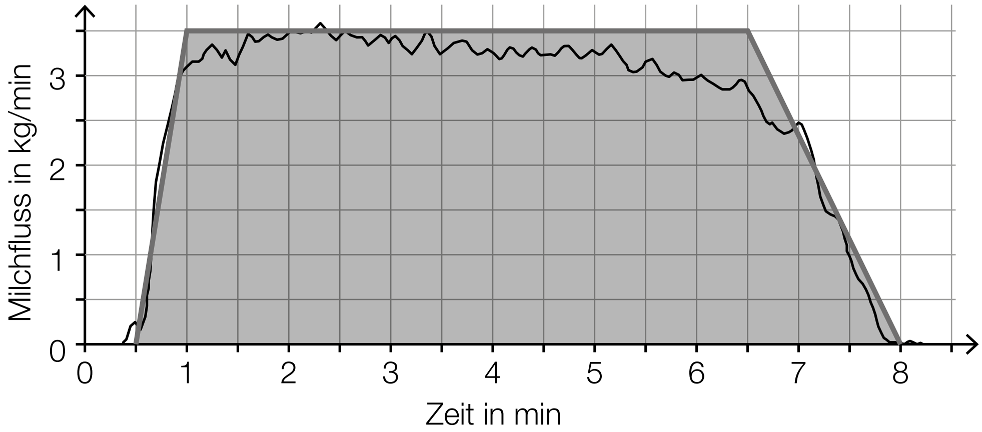
x … Brustumfang in cm
y … Lebendmasse in kg

Gemäß dem Modell steigt die Lebendmasse pro Zentimeter Brustumfang um rund 6,50 kg.

x = 160 cm:
$6{,}50\ldots \cdot 160 - 736{,}\ldots = 304{,}2\ldots \approx 304$

Gemäß dem Modell kann man bei einem Brustumfang von 160 cm eine Lebendmasse von rund 304 kg erwarten.

c)



Auch das Veranschaulichen der Milchmenge als Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der horizontalen Achse ist als richtig zu werten.

Die gemolkene Milchmenge entspricht dem Flächeninhalt A des Trapezes:

$$A = \frac{(7{,}5 + 5{,}5) \cdot 3{,}5}{2} = 22{,}75$$

Es wurden 22,75 kg Milch gemolken.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Formel für A in Abhängigkeit von u
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Formel für V in Abhängigkeit von u
1 × A3: für das richtige Bestimmen des prozentuellen Unterschieds

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C: für eine richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für die richtige Berechnung der Lebendmasse bei 160 cm Brustumfang

c) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Milchmenge als Fläche zwischen dem Streckenzug bzw. dem Graphen der Funktion und der horizontalen Achse
1 × B: für das richtige Bestimmen der insgesamt gemolkenen Milchmenge

Angry Birds (1)*

Aufgabennummer: B_377

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Computerspiel *Angry Birds* muss man mithilfe einer Schleuder Schweine treffen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Vögel zur Verfügung. Einige dieser Vögel haben besondere Funktionen, die durch einen Mausklick ausgelöst werden können. Koordinaten bzw. Abstände sind im Folgenden in Längeneinheiten (LE) angegeben.

a) Die Flugparabel des Vogels *Red* bei einem Wurf kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in Längeneinheiten (LE)
$f(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Red trifft kein Schwein und prallt auf den Boden auf.

– Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt der Vogel auf dem Boden aufprallt.

Der Weg, den der Vogel vom Abschusspunkt bis zum Aufprall am Boden zurücklegt, entspricht der Länge der Kurve zwischen diesen Punkten. Für die Länge s der Kurve in einem Intervall $[a; b]$ gilt:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

– Berechnen Sie den vom Vogel zurückgelegten Weg vom Abschusspunkt bis zum Aufprall am Boden.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Flugbahn des Vogels *Chuck* kann zu Beginn durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$g(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Der Spieler löst in 3 LE horizontaler Entfernung vom Abschusspunkt durch einen Mausklick eine Spezialfunktion aus. Der Vogel bewegt sich ab diesem Punkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt entlang der Tangente an den gegebenen Funktionsgraphen.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $P = (3|g(3))$.
– Veranschaulichen Sie die Flugbahn von Chuck vom Abschusspunkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt mithilfe einer geeigneten Grafik.

c) Die Flugbahn des Vogels *Matilda* kann durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.
Der Funktionsgraph schneidet die vertikale Achse bei 12. Er verläuft durch die Punkte $A = (1|16)$ und $B = (5|32)$. A ist ein Hochpunkt des Funktionsgraphen.

– Stellen Sie mithilfe der angegebenen Informationen ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

d) Bei einem anderen Angriff durch den Vogel Matilda kann die Flugbahn durch den Graphen der Funktion h beschrieben werden.

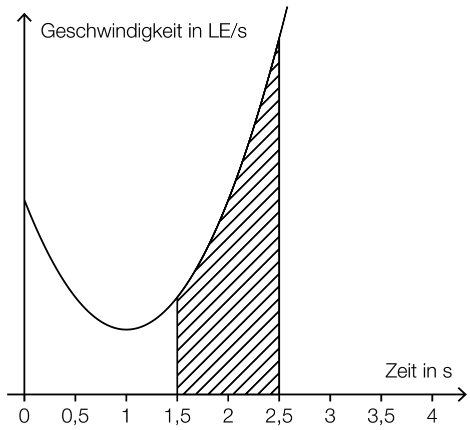
$h(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 8$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$h(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Ein Schwein befindet sich im Punkt $P = (5|20)$.

– Berechnen Sie den Abstand des Schweins vom Abschusspunkt.
– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt.

e) Die nachstehende Grafik stellt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Vogels bei einem Wurf dar.



– Beschreiben Sie die Bedeutung der in der Grafik eingezeichneten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

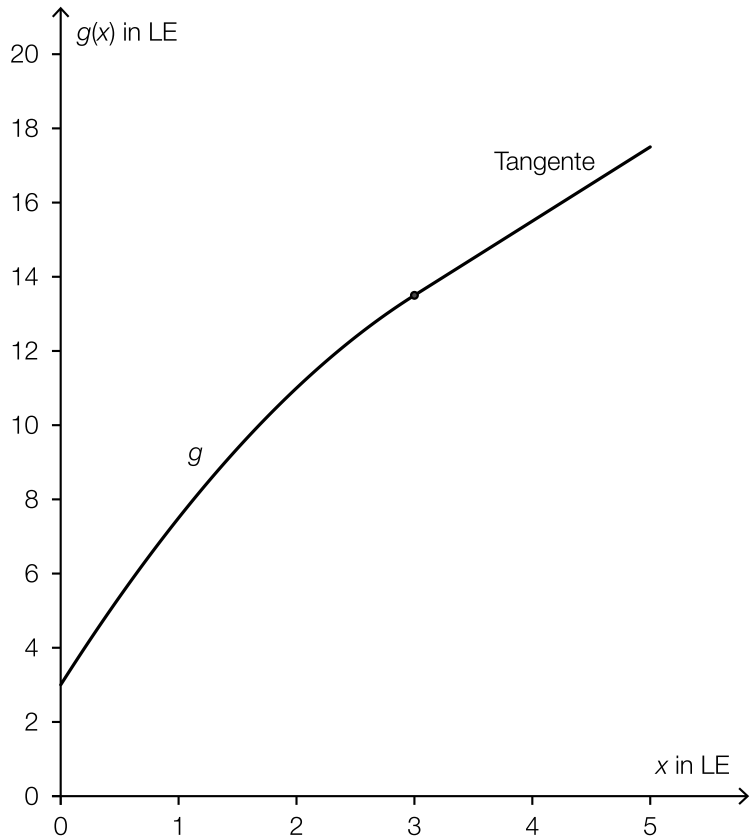
a) $-0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1 = 0$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -1)$
$x_2 = 10$

Der Vogel prallt in einer horizontalen Entfernung von 10 LE auf den Boden auf.

$\int_0^{10} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x = 11{,}51\ldots$
Der vom Vogel zurückgelegte Weg beträgt rund 11,5 LE.

b) $g(3) = 13{,}5$
$g'(x) = -x + 5 \;\Rightarrow\; g'(3) = 2$
$13{,}5 = 2 \cdot 3 + d \;\Rightarrow\; d = 7{,}5$
Tangentengleichung: $y = 2 \cdot x + 7{,}5$



c) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

I: $f(0) = 12$
II: $f(1) = 16$
III: $f(5) = 32$
IV: $f'(1) = 0$

d) Koordinaten des Abschusspunkts: $A = (0|8)$
Position des Schweins: $P = (5|20)$

$\sqrt{5^2 + (20 - 8)^2} = 13$

Der Abstand des Schweins vom Abschusspunkt beträgt 13 LE.

$h(5) = 18$

Der Punkt P liegt nicht auf Matildas Flugbahn.

e) Die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion beschreibt den vom Vogel zurückgelegten Weg im Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s] nach dem Abschuss.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der horizontalen Entfernung
1 × B2: für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges

b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Tangentengleichung
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Flugbahn
(für $0 \leq x \leq 3$ Graph von g, für $3 \leq x \leq 5$ Tangente)

c) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung

d) 1 × B: für die richtige Berechnung des Abstands
1 × D: für die richtige Überprüfung, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt

e) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Fläche im gegebenen Sachzusammenhang unter Bezugnahme auf das Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s]

Lichtwellenleiter*

Aufgabennummer: B_379		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

In einem Glasfaserkabel nimmt die Intensität des Lichts mit der Entfernung vom Anfangspunkt exponentiell ab. Dieser Zusammenhang kann durch die Funktion I beschrieben werden:

$I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

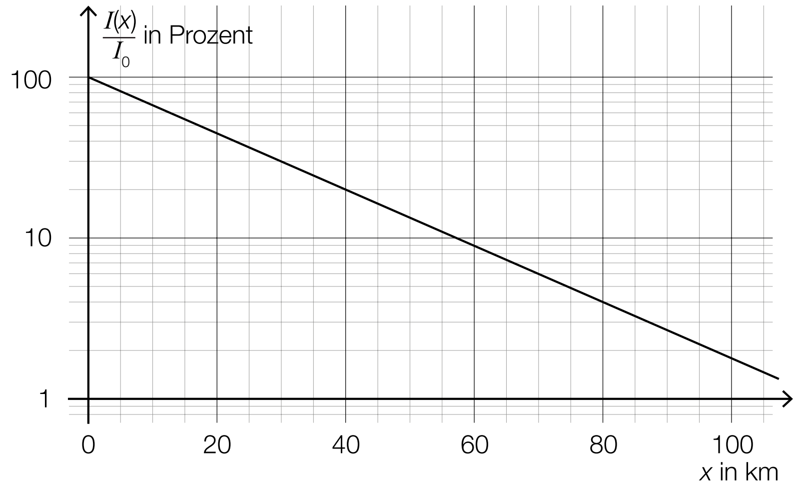
x ... Entfernung entlang des Kabels vom Anfangspunkt des Kabels
$I(x)$ ... Lichtintensität in der Entfernung x
I_0 ... Lichtintensität am Anfangspunkt des Kabels
λ ... positive Konstante

a) Dabei wird angenommen, dass die lokale Änderungsrate der Lichtintensität in Abhängigkeit von der Entfernung proportional zur jeweils vorhandenen Lichtintensität ist.

- Stellen Sie die Differenzialgleichung für I auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-\lambda$ ($\lambda > 0$).
- Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die Lösung dieser Differenzialgleichung mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ durch $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegeben ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Lichtintensität (in Prozent von I_0) in einem Glasfaserkabel in Abhängigkeit von x wird in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem folgendermaßen dargestellt:



– Ermitteln Sie, wie viel Prozent an Intensität das Licht nach 80 Kilometern (km) verloren hat.

Um Signale zu übertragen, muss die Lichtintensität noch mindestens 20 % der Lichtintensität I_0 betragen.

– Lesen Sie die maximale Länge eines Lichtwellenleiters ab, der diese Bedingung erfüllt.
– Ermitteln Sie den Wert des Parameters λ mithilfe der in der obigen Abbildung dargestellten Exponentialfunktion.

c) Um den Intensitätsverlust in einem Lichtwellenleiter zu bestimmen, wird die nach 1 km noch vorhandene Intensität gemessen.
Die Größe zur Beschreibung des Intensitätsverlusts ist die Dämpfung D, die in Dezibel angegeben wird:

$D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$ in Dezibel (dB)

I_0 ... Anfangsintensität
I ... noch vorhandene Intensität nach 1 km

Ein modernes Glasfaserkabel weist nach 1 km noch eine Intensität von 95,5 % des Anfangswertes I_0 auf.

– Berechnen Sie, welcher Dämpfung dies entspricht.

Bei älteren Glasfaserkabeln stellte man pro Kilometer Kabellänge eine Dämpfung von 20 dB fest.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsintensität I_0 nach 1 km noch vorhanden waren.

Für die Dämpfung wird oft auch die Formel $D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$ angegeben.

– Zeigen Sie mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen: $D_1 = -D$.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -\lambda \cdot I$

$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\lambda \cdot \mathrm{d}x$ (oder: $\frac{I'}{I} = -\lambda$)

$\int \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\lambda \int \mathrm{d}x$ (oder: $\int \frac{I'(x)}{I(x)}\mathrm{d}x = -\lambda \int \mathrm{d}x$)

$\ln|I| = -\lambda \cdot x + C_1$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: $I(x) = C \cdot e^{-\lambda \cdot x}$
Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$:
$I_0 = C$
spezielle Lösung der Differenzialgleichung: $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

b) An der Stelle $x = 80$ gilt: $\frac{I(80)}{I_0} = 4\ \%$.
Daher hat das Licht 96 % an Intensität verloren.

An der Stelle $x = 40$ gilt: $\frac{I(40)}{I_0} = 20\ \%$.
Die maximale Länge des Lichtleiters beträgt also 40 km.

$0{,}2 = e^{-\lambda \cdot 40}$
$\lambda = \frac{\ln(5)}{40} = 0{,}04023\ldots$

c) $D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{0{,}955 \cdot I_0}\right) = 0{,}19\ldots$
Die Dämpfung beträgt rund 0,2 dB.

$20 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$
$I = I_0 \cdot 10^{-2}$

Nach 1 km war noch 1 % der Anfangsintensität vorhanden.

$D_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$
$D_1 = 10 \cdot (\lg(I) - \lg(I_0))$
Durch Herausheben von –1 erhält man:
$D_1 = -10 \cdot (\lg(I_0) - \lg(I))$
$D_1 = -10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right)$
$\Rightarrow\ D_1 = -D$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
1 × B: für das richtige Anwenden der Methode *Trennen der Variablen* zur Ermittlung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung
1 × D: für den richtigen Nachweis zur speziellen Lösung der Differenzialgleichung

b) 1 × C1: für das richtige Ermitteln des Intensitätsverlusts
1 × C2: für das richtige Ablesen der maximalen Länge
1 × A: für das richtige Ermitteln des Parameters λ

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Dämpfung
1 × B2: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
1 × D: für den richtigen Nachweis mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen

BMB Bundesministerium für Bildung

Belastung von Bauteilen

Aufgabennummer: B_069

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt verschiedene Bauteile her, die einer gewissen Belastung standhalten müssen. Die Belastung, der die Bauteile standhalten, ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ.

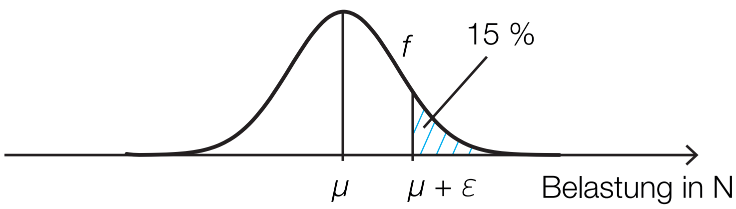
a) Das Unternehmen behauptet, dass der Erwartungswert der Belastung, der die Bauteile standhalten, $\mu = 122$ Newton (N) beträgt.

Eine Stichprobe ergab folgende Werte:

118,5 N	122 N	120,5 N	117 N	118,5 N	121 N	121,5 N	119,5 N

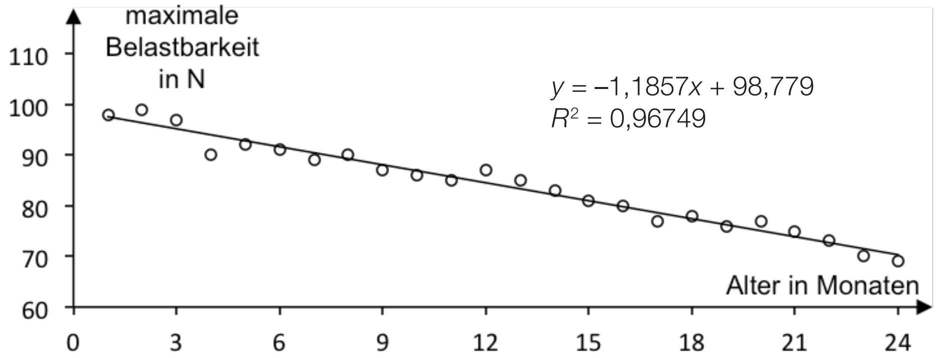
– Ermitteln Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} dieser Stichprobe.
– Zeigen Sie, dass der angegebene Erwartungswert nicht im zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich enthalten ist.

b) Für andere Bauteile beträgt der Erwartungswert für die Belastbarkeit $\mu = 102$ Newton (N). Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Interpretieren Sie den in der obigen Abbildung gekennzeichneten Flächeninhalt im gegebenen Sachzusammenhang.
– Geben Sie einen mathematischen Ausdruck an, der die in der Abbildung dargestellte Wahrscheinlichkeit beschreibt.
– Berechnen Sie ε für $\sigma = 3{,}5$ N.

c) In einer Messreihe wurden Bauteile abhängig von ihrem Alter auf ihre maximale Belastbarkeit getestet (siehe nachstehende Abbildung). Anhand der Daten wurde eine lineare Regressionsfunktion erstellt.



Das Tabellenkalkulationsprogramm liefert statt des Korrelationskoeffizienten r sein Quadrat r^2 (= R^2).

– Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten r.
– Interpretieren Sie diesen Korrelationskoeffizienten hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen dem Alter eines Bauteils und der maximalen Belastbarkeit.

Regressionsfunktionen werden mithilfe der *Methode der kleinsten Quadrate* erstellt.

– Erklären Sie diese Methode.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 119{,}8125$ N; $s_{n-1} = 1{,}73076...$ N

zweiseitiger Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$118{,}36 \text{ N} \leq \mu \leq 121{,}26 \text{ N}$

Der angegebene Wert von 122 N liegt nicht im 95%-Vertrauensbereich.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Bauteil einer Belastung von mindestens $(102 + \varepsilon)$ N standhält, beträgt 15 %.

oder:

15 % der Bauteile können mit mindestens $(102 + \varepsilon)$ N belastet werden, ohne dabei Schaden zu nehmen.

$P(X \geq 102 + \varepsilon) = 0{,}15$ oder $\int_{\mu+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}15$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\varepsilon \approx 3{,}63$ N

c) Korrelationskoeffizient $r \approx -0{,}9836$

Im gemessenen Bereich lässt der Korrelationskoeffizient einen starken linearen Zusammenhang zwischen dem Alter der Bauteile und der Belastbarkeit vermuten, wobei mit zunehmendem Alter die Belastbarkeit abnimmt.

Methode der kleinsten Quadrate:
Die Ausgleichsfunktion wird so aufgestellt, dass die Summe der quadrierten vertikalen Abstände der Messwerte zur Regressionsgerade so klein wie möglich, also ein Minimum, wird.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung der Stichprobe (u)
1 x D: für den richtigen Nachweis (a)

b) 1 × C: für die richtige Interpretation der Grafik (u)
1 × A: für den richtigen mathematischen Ausdruck (u)
1 × B: für die richtige Berechnung von ε (a)

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten (u)
1 × C: für die richtige Interpretation des Zusammenhangs (u)
1 × D: für die richtige Erklärung der *Methode der kleinsten Quadrate* (u)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz, A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 3

Thema: Technik

Quellen: –

Newton'sches Abkühlungsgesetz

Die nachstehende Differenzialgleichung beschreibt den Temperaturverlauf eines abkühlenden Bauteils in Abhängigkeit von der Zeit:

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T_U - T)$$

t … Zeit in Minuten (min)
$T(t)$ … Temperatur des Bauteils zur Zeit t in °C
T_U … Umgebungstemperatur in °C
k … Proportionalitätsfaktor in min^{-1}

a) Das Bauteil A wird in einen Kühlraum gebracht, in dem es eine Temperatur von $T_U = -10$ °C hat. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung lautet:

$T(t) = -10 - C \cdot e^{-k \cdot t}$

1) Zeigen Sie, dass diese Funktion T die allgemeine Lösung der gegebenen Differenzialgleichung ist.

b) Das Bauteil B wird in eine Lagerhalle ($T_U = 15$ °C) gebracht. Für den Proportionalitätsfaktor k gilt in diesem Fall: $k = 0{,}8\ \text{min}^{-1}$.
Zu Beginn ($t = 0$) hat dieses Bauteil eine Temperatur von 80 °C.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* die Lösung für dieses Anfangswertproblem.

c) Das Bauteil *C* wird im Freien gelagert. Die Lösung der Differenzialgleichung für dieses Bauteil lautet:

$T(t) = 5 \cdot (8 \cdot e^{-k \cdot t} - 1)$

1) Geben Sie die Umgebungstemperatur T_U an.

T_U = ____________ °C

2) Geben Sie die Temperatur zu Beginn ($t = 0$) dieses Abkühlungsvorganges an.

Temperatur zu Beginn: ____________ °C

Möglicher Lösungsweg

a1) $T(t) = -10 - C \cdot e^{-k \cdot t}$
$T'(t) = k \cdot C \cdot e^{-k \cdot t}$
Einsetzen in Differenzialgleichung: $k \cdot C \cdot e^{-k \cdot t} = k \cdot (T_U + 10 + C \cdot e^{-k \cdot t})$

$k \cdot C \cdot e^{-k \cdot t} = k \cdot C \cdot e^{-k \cdot t}$
Die angegebene Lösung ist korrekt.

b1) $\int \frac{dT}{15 - T} = 0{,}8 \cdot \int dt$ oder $\int \frac{T'}{15 - T} \cdot dt = 0{,}8 \cdot \int dt$

$\frac{\ln|15 - T|}{-1} = 0{,}8 \cdot t + C_1$

$T(t) = 15 - C \cdot e^{-0{,}8 \cdot t}$

$T(0) = 80$
$15 - C = 80$
$C = -65$

$T(t) = 15 + 65 \cdot e^{-0{,}8 \cdot t}$

c1) $T_U = -5$ °C

c2) Temperatur zu Beginn: 35 °C

Magneten

Ein Unternehmen stellt Dauermagneten für verschiedene technische Anwendungen her.
Ein bestimmter Magnet wird nach dem Erhitzen abgekühlt.

a) Der Abkühlungsprozess A verläuft dabei modellhaft nach folgender Differenzialgleichung:

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T_U - T)$$

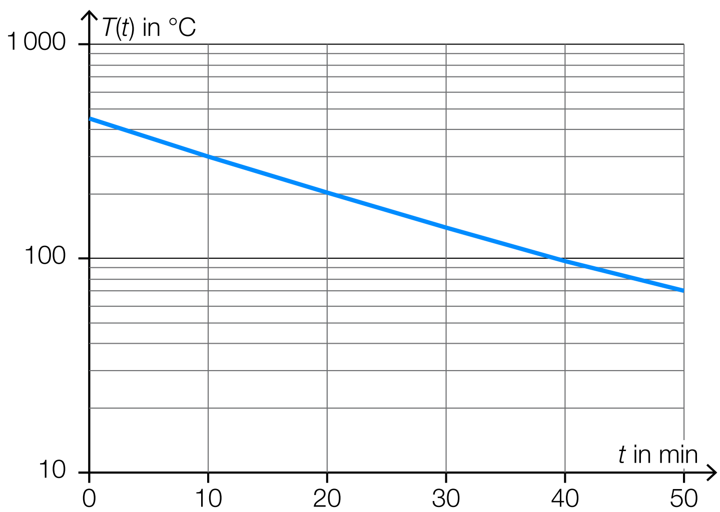
t … Zeit in Minuten (min)
$T(t)$ … Temperatur des Magneten zur Zeit t in °C
T_U … Umgebungstemperatur in °C
k … Proportionalitätsfaktor

1) Erklären Sie, warum der Proportionalitätsfaktor k für diesen Abkühlungsprozess positiv sein muss.
2) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung durch *Trennen der Variablen*.

Es gilt: $T_U = 30$ °C
Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Temperatur des Magneten 440 °C.

3) Ermitteln Sie den Wert der Integrationskonstante.

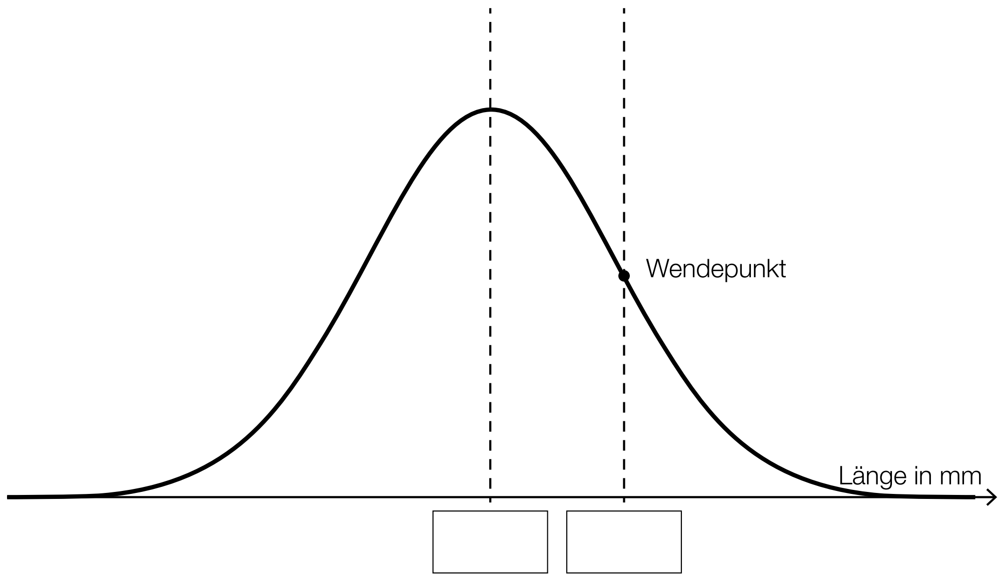
b) Der Abkühlungsprozess B lässt sich modellhaft durch die Funktion T beschreiben:
$T(t) = 20 + 430 \cdot e^{-k \cdot t}$



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung des Funktionsgraphen von T die Temperatur zur Zeit $t = 10$ min ab.
2) Berechnen Sie k mithilfe des abgelesenen Werts.

c) Die erforderliche Länge (= Sollwert) der Magneten für den Einbau in elektronische Geräte ist 2,5 mm.
Messungen haben ergeben, dass die Länge des Magneten näherungsweise normalverteilt ist mit dem Erwartungswert μ = 2,5 mm und der Standardabweichung σ = 0,05 mm.
X ... Länge des Magneten in mm

1) Tragen Sie in der nachstehend abgebildeten Dichtefunktion die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Magnete werden aussortiert, wenn ihre Länge nicht im Intervall [2,4 mm; 2,6 mm] liegt.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Magnet aussortiert wird.
3) Ermitteln Sie, welche Standardabweichung erforderlich wäre, wenn nur 1 % der Magnete aussortiert werden soll.

Möglicher Lösungsweg

a1) Beim Abkühlprozess ist der Klammerausdruck $T_U - T$ negativ. Da die Änderung $\frac{dT}{dt}$ negativ ist, muss der Proportionalitätsfaktor k positiv sein.

a2) $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_U)$

$\frac{dT}{T - T_U} = -k \cdot dt$

$\int \frac{dT}{T - T_U} = -k \cdot \int dt$

$\ln|T - T_U| = -k \cdot t + C_1$

$T(t) = T_U + C \cdot e^{-k \cdot t}$

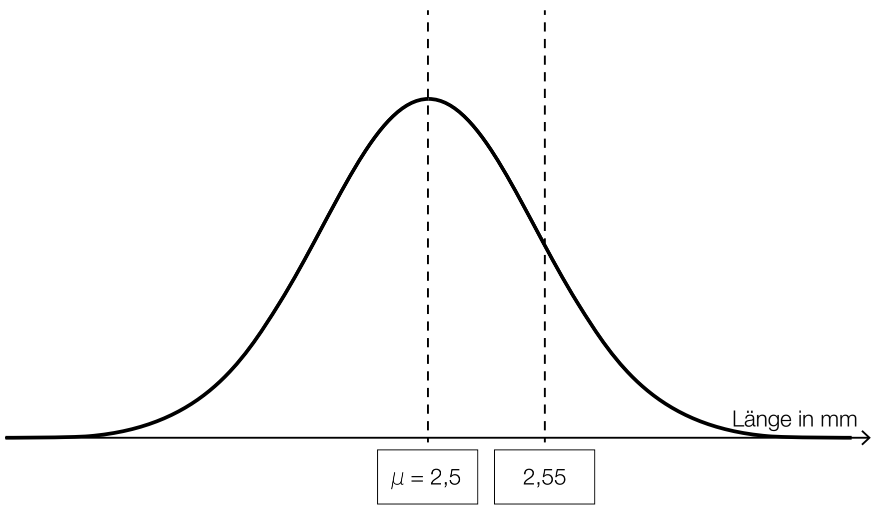
a3) $440 = 30 + C \cdot e^{-k \cdot 0}$
$C = 410$

b1) $T = 300$ °C

b2) $300 = 20 + 430 \cdot e^{-k \cdot 10}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$k = 0{,}04289...$

c1)



c2) $1 - P(2{,}4 \leq X \leq 2{,}6) \approx 0{,}0455$

c3) $P(X \leq 2{,}6) = 0{,}995$

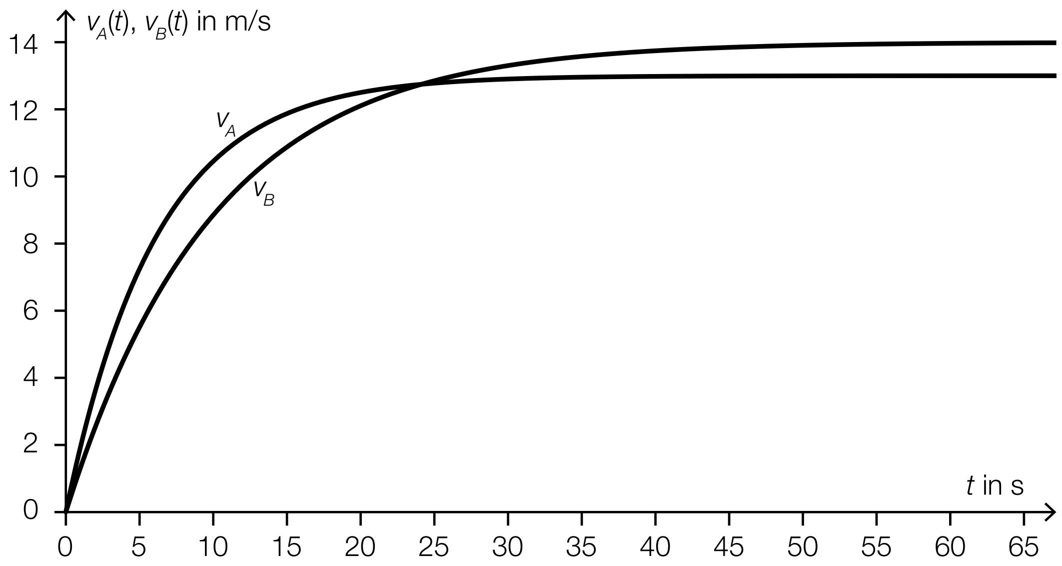
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\sigma = 0{,}0388...$ mm

Motorbootrennen (2)*

Aufgabennummer: B_360

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Abbildung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zweier Motorboote *A* und *B* während einer Wettfahrt modellhaft dargestellt.



a) Für die Funktion v_B gilt:

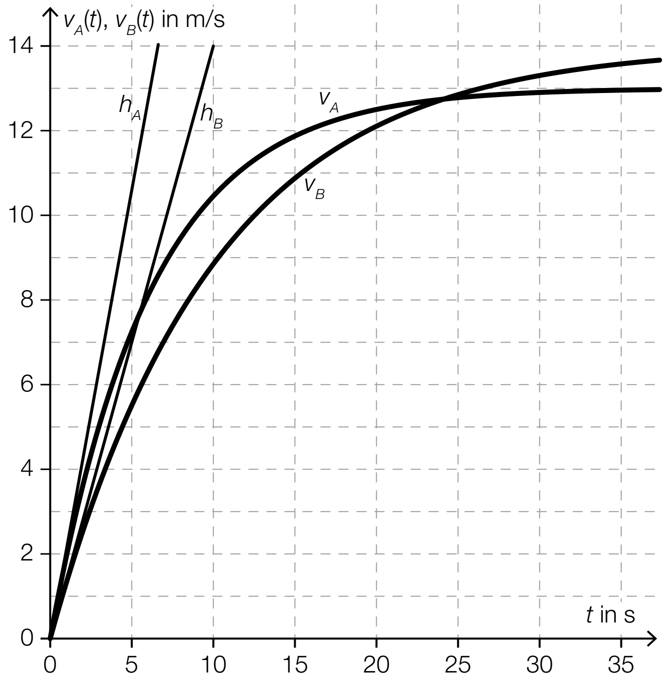
$v_B(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0,1 \cdot t})$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Beschleunigung des Bootes pro Sekunde abnimmt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Tangenten h_A und h_B an die Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen zur Zeit $t = 0$.

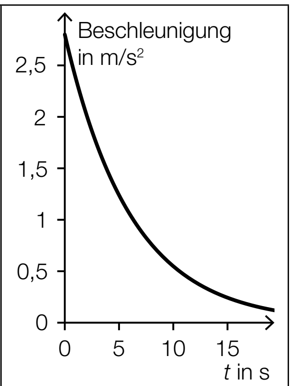


1) Interpretieren Sie die Steigung der Tangente h_A im gegebenen Sachzusammenhang.

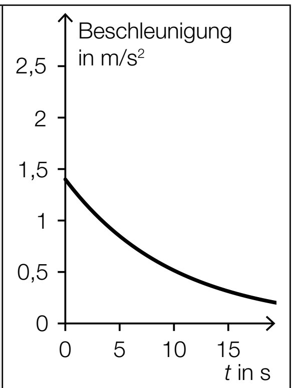
2) Ordnen Sie den beiden Ableitungsfunktionen $\frac{dv_A}{dt}$ und $\frac{dv_B}{dt}$ jeweils die entsprechende Grafik aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\frac{dv_A}{dt}$	
$\frac{dv_B}{dt}$	

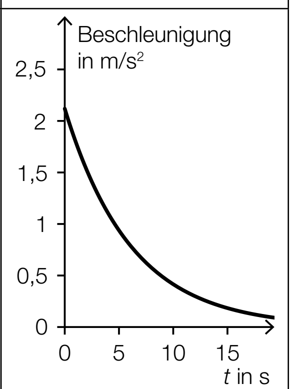
A



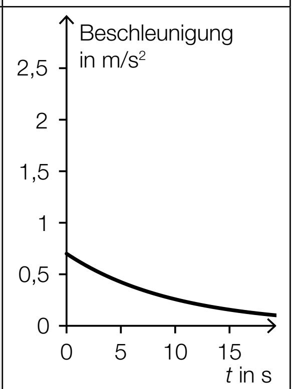
C



B



D



c) Eine Funktionsgleichung der in der obigen Abbildung dargestellten Funktion v_B für das Motorboot B lautet:

$v_B(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot t})$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Motorboots B während der ersten 30 Sekunden.

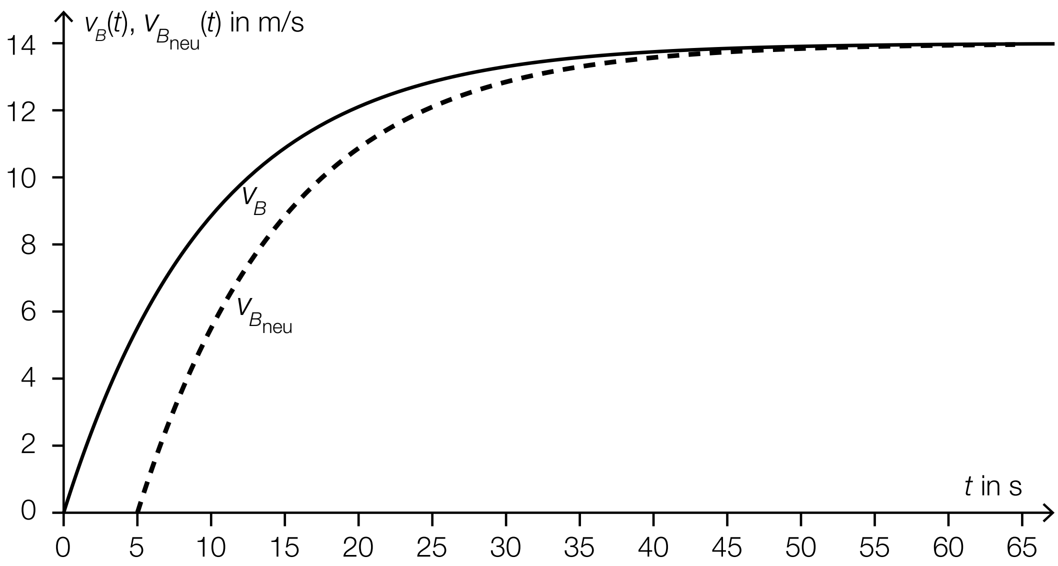
2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung desjenigen Weges s, den das Motorboot B in den ersten n Sekunden zurücklegt.

$s =$ ______________________________

Nach einer Fahrt von 700 m überholt das Motorboot B das Motorboot A.

3) Berechnen Sie den Zeitpunkt dieses Überholens.

In der nachstehenden Abbildung beschreibt der Graph der Funktion $v_{B_{neu}}$ den Fall, dass das Motorboot B um 5 Sekunden später startet (bei sonst unverändertem Geschwindigkeitsverlauf).



4) Erstellen Sie ausgehend von der Funktion v_B eine Gleichung der Funktion $v_{B_{neu}}$.

Möglicher Lösungsweg

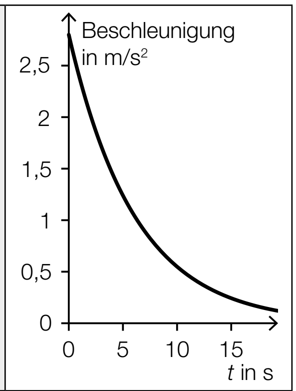
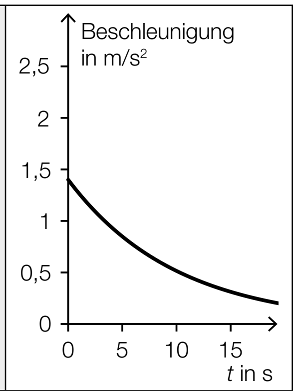
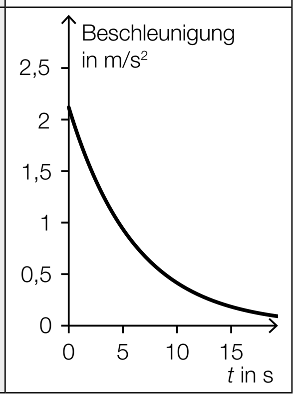
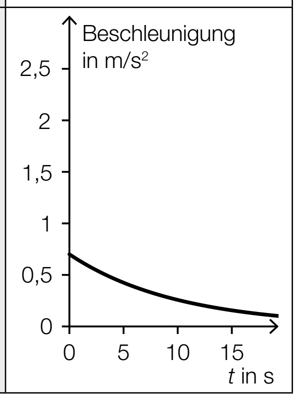
a1) $v_B'(t) = 1{,}4 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} = 1{,}4 \cdot 0{,}9048...^t$

Pro Sekunde nimmt die Beschleunigung in Bezug auf den jeweils vorigen Wert um rund 9,5 % ab.

b1) Die Steigung der Tangente h_A gibt die Beschleunigung des Motorboots A zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

b2)

$\frac{dv_A}{dt}$	B
$\frac{dv_B}{dt}$	C

A		C	
B		D	

c1) $\frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} v_B(t)\,dt = 9{,}56...$

Die mittlere Geschwindigkeit während der ersten 30 Sekunden beträgt rund 9,6 m/s.

c2) $s = \int_0^n v_B(t)\,dt$

c3) $700 = \int_0^n v_B(t)\,dt$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$n = 59{,}9...$

Das Motorboot B überholt das Motorboot A nach rund 60 Sekunden.

c4) $v_{B_{\text{neu}}}(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot (t-5)})$

oder:

$v_{B_{\text{neu}}}(t) = v_B(t - 5)$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes

b) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Steigung der Tangente h_A im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Zuordnung

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der mittleren Geschwindigkeit
1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des zurückgelegten Weges
1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts des Überholens
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion $v_{B_{neu}}$

Rohre

Aufgabennummer: B_178

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Rohrleitungen und Rohrleitungssysteme stellen wesentliche technische Bestandteile in landwirtschaftlichen Betrieben dar.

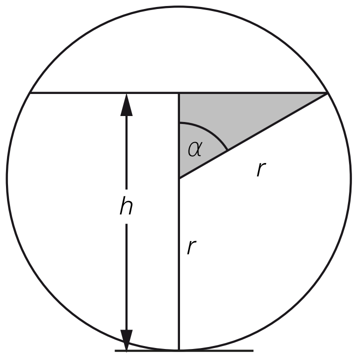
a) Bei einer konstanten Durchflussmenge von 5 Litern pro Sekunde (L/s) nimmt die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers mit zunehmendem Rohrdurchmesser ungefähr gemäß der Funktion v mit $v(d) = \frac{63{,}7}{d^2}$ ab.

d … Rohrdurchmesser in cm
$v(d)$ … Strömungsgeschwindigkeit bei einem Durchmesser d in m/s

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion d.

– Stellen Sie die Umkehrfunktion bis zu einem Rohrdurchmesser von 12 cm bzw. einer Strömungsgeschwindigkeit von 26 m/s grafisch dar.

b) Ein Rohr mit einem Innenradius r ist bis zu einer Höhe h mit Wasser gefüllt (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α mithilfe der Größen r und h.

α = ______________________________

– Berechnen Sie den Flächeninhalt des in der obigen Abbildung markierten Dreiecks für $r = 10$ cm und $h = 12$ cm.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Rohrquerschnittsfläche bei einem Radius von $r = 10$ cm und bei einer Höhe des Wasserstands von $h = 12$ cm noch frei sind.

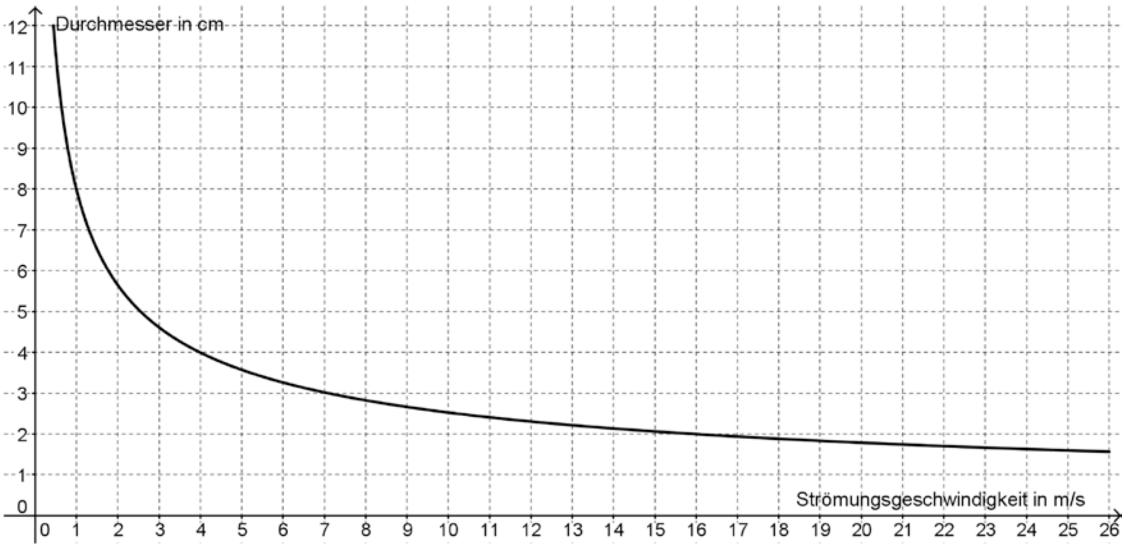
c) Bei einem Rohrleitungssystem werden Rohre miteinander verschweißt. Es sind 52 Schweißstellen notwendig. Erfahrungsgemäß hält eine Schweißstelle innerhalb eines fixen Zeitraums mit 98%iger Wahrscheinlichkeit.
Das Reißen einer Schweißstelle verändert die Wahrscheinlichkeit bei den anderen Schweißstellen nicht.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung derjenigen Wahrscheinlichkeit auf, dass innerhalb des fixen Zeitraums mindestens n Schweißstellen reißen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $d(v) = \sqrt{\frac{63{,}7}{v}}$



b) $\alpha = \arccos\left(\frac{h-r}{r}\right)$

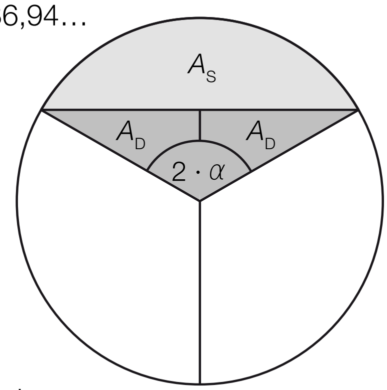
A_D … Flächeninhalt des Dreiecks

$A_D = \frac{2 \cdot \sqrt{10^2 - 2^2}}{2} = \sqrt{96} = 9{,}79\ldots$

$A_D \approx 9{,}8\text{ cm}^2$

A_S … Flächeninhalt des Kreissektors mit dem Winkel $2 \cdot \alpha$

$A_S = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{2 \cdot \alpha}{360°} = \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{2 \cdot \arccos \cdot \left(\frac{12-10}{10}\right)}{360°} = 136{,}94\ldots$



A_{frei} … Flächeninhalt des freien Teils des Querschnitts

$A_{frei} = A_S - 2 \cdot A_D = 117{,}347\ldots$

A_{gesamt} … Gesamtflächeninhalt des Querschnitts

$A_{gesamt} = \pi \cdot 10^2 = 314{,}159\ldots$

$\frac{A_{frei}}{A_{gesamt}} = 0{,}37353\ldots$

Es sind noch rund 37,35 % der Rohrquerschnittsfläche frei.

c) X … Anzahl der gerissenen Schweißstellen

$P(X \geq n) = \sum_{i=n}^{52} \binom{52}{i} \cdot 0{,}02^i \cdot 0{,}98^{52-i}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1

Thema: Sonstiges

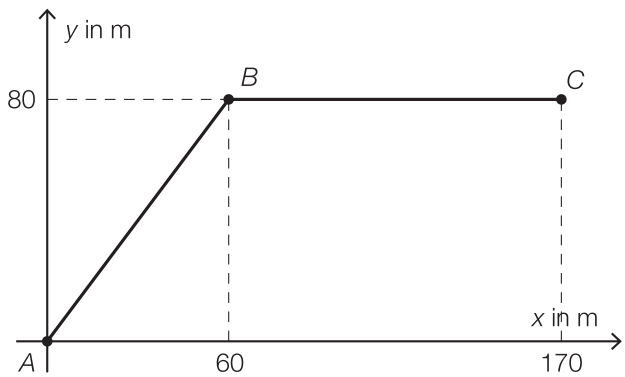
Quellen: –

Kräfte*

Aufgabennummer: B_406

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Durch eine Kraft $\vec{F}_{Zug} = \begin{pmatrix} 260 \\ 140 \end{pmatrix}$ Newton (N) wird eine Last von A nach B und danach von B nach C gezogen (siehe nachstehende Skizze).



Die beim Ziehen dieser Last erbrachte Arbeit W in Newtonmetern (Nm) kann folgendermaßen berechnet werden:

$W = \vec{F}_{Zug} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{F}_{Zug} \cdot \overrightarrow{BC}$

– Berechnen Sie die Arbeit W.

b) Drei Kräfte $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 800 \\ 200 \\ 700 \end{pmatrix}$ N, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -100 \\ 700 \\ -400 \end{pmatrix}$ N und $\vec{F}_3$ greifen an einem Körper in einem Punkt an und halten einander das Gleichgewicht, d. h.: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

– Berechnen Sie $\vec{F}_3$.
– Berechnen Sie den Betrag von $\vec{F}_3$.
– Ermitteln Sie denjenigen Winkel, den $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ einschließen.

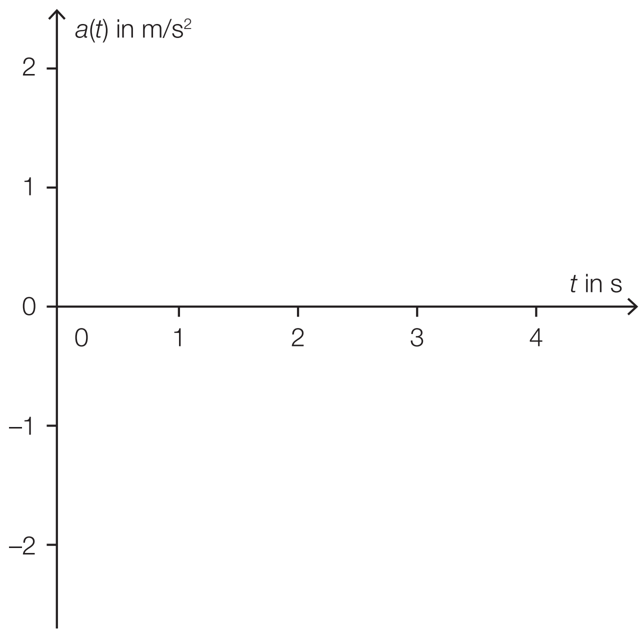
* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Der Geschwindigkeitsverlauf einer durch eine bestimmte Kraft hervorgerufenen Bewegung ist durch die Funktion v gegeben:

$$v(t) = 2 \cdot t - \frac{t^2}{2}$$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)

– Begründen Sie, warum im Zeitintervall $0 \leq t \leq 4$ gilt: $v(t) \geq 0$
– Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem das zugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm für $0 \leq t \leq 4$.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$W = \begin{pmatrix} 260 \\ 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 260 \\ 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \end{pmatrix} = 26\,800 + 28\,600 = 55\,400$$

Die Arbeit beträgt 55 400 Nm.

b) $\overrightarrow{F_3} = -\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} -700 \\ -900 \\ -300 \end{pmatrix}$ N

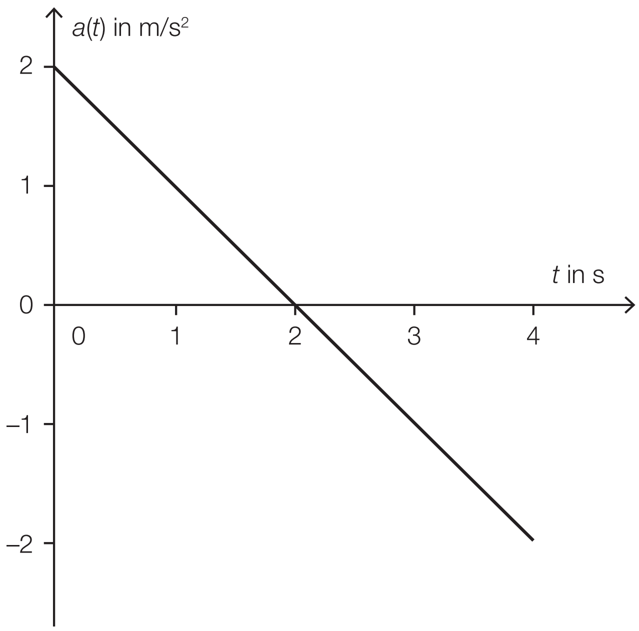
$|\overrightarrow{F_3}| = 1\,178{,}9\ldots \text{ N} \approx 1\,179 \text{ N}$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{F_2}}{|\overrightarrow{F_1}| \cdot |\overrightarrow{F_2}|}\right) = 104{,}49\ldots° \approx 104{,}5°$$

Der Ergänzungswinkel auf 360° ist ebenfalls als richtig zu werten.

c) Der Graph der Funktion v ist eine nach unten offene Parabel mit den Nullstellen $t_1 = 0$ und $t_2 = 4$. Daher sind die Funktionswerte im Zeitintervall $0 \leq t \leq 4$ positiv.

Auch eine Begründung anhand einer Grafik ist als richtig zu werten.



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die richtige Darstellung der Wege von *A* nach *B* und von *B* nach *C* mithilfe von Vektoren

1 × B: für die richtige Berechnung der Arbeit *W*

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Vektors $\vec{F}_3$

1 × B2: für die richtige Berechnung des Betrags des Vektors $\vec{F}_3$

1 × B3: für das richtige Ermitteln des Winkels

c) 1 × D: für die richtige Begründung

Auch eine Begründung anhand einer Grafik ist als richtig zu werten.

1 × A: für das richtige Zeichnen des Beschleunigung-Zeit-Diagramms im gegebenen Intervall

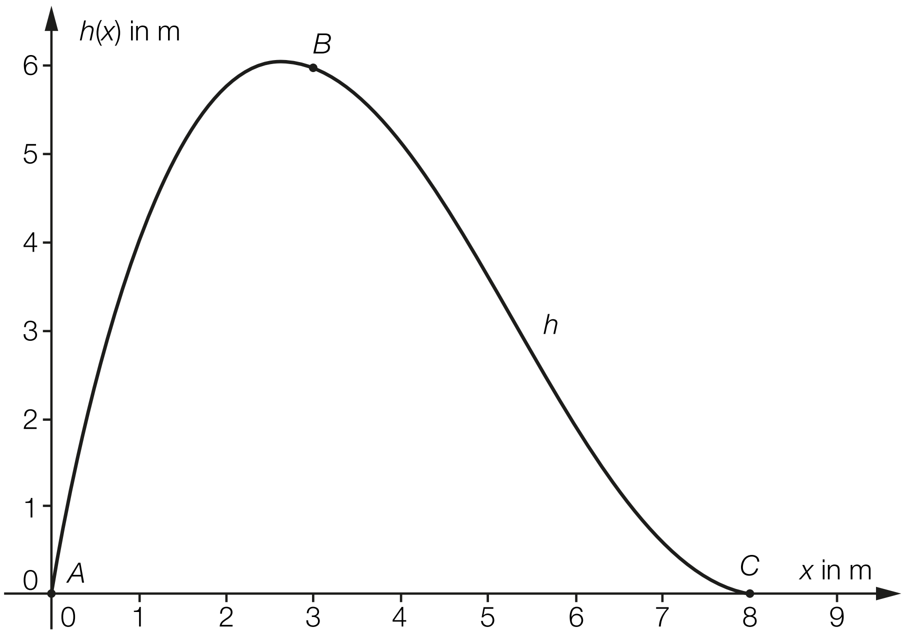
Drohnen

Aufgabennummer: B_362

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Unter einer *Drohne* versteht man ein unbemanntes Luftfahrzeug, das entweder durch einen Computer an Bord oder vom Boden aus über eine Fernsteuerung betrieben wird.

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Flugbahn einer Drohne.



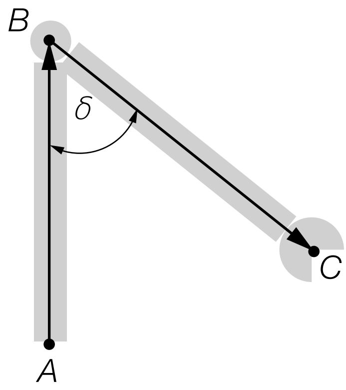
x ... horizontale Entfernung vom Startpunkt A in m
$h(x)$ ... Höhe der Drohne in der Entfernung x in m

Die Flugbahn der Drohne lässt sich näherungsweise durch eine Polynomfunktion h dritten Grades beschreiben. Die Flugbahn verläuft durch den Punkt B und erreicht ein Minimum im Punkt C.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, das zur Berechnung der Koeffizienten der Polynomfunktion benötigt wird.
– Ermitteln Sie eine Gleichung der Polynomfunktion.
– Berechnen Sie die Länge der Flugbahn zwischen A und C.

b) Bei der Fertigung von Drohnen werden Roboterarme eingesetzt.

Ein zweiteiliger Arm eines Roboters lässt sich am Computer durch zwei Vektoren beschreiben, die durch die Punkte $A = (1|1|1)$, $B = (3|4|5)$ und $C = (5|2|-1)$ festgelegt sind (Maße in m).

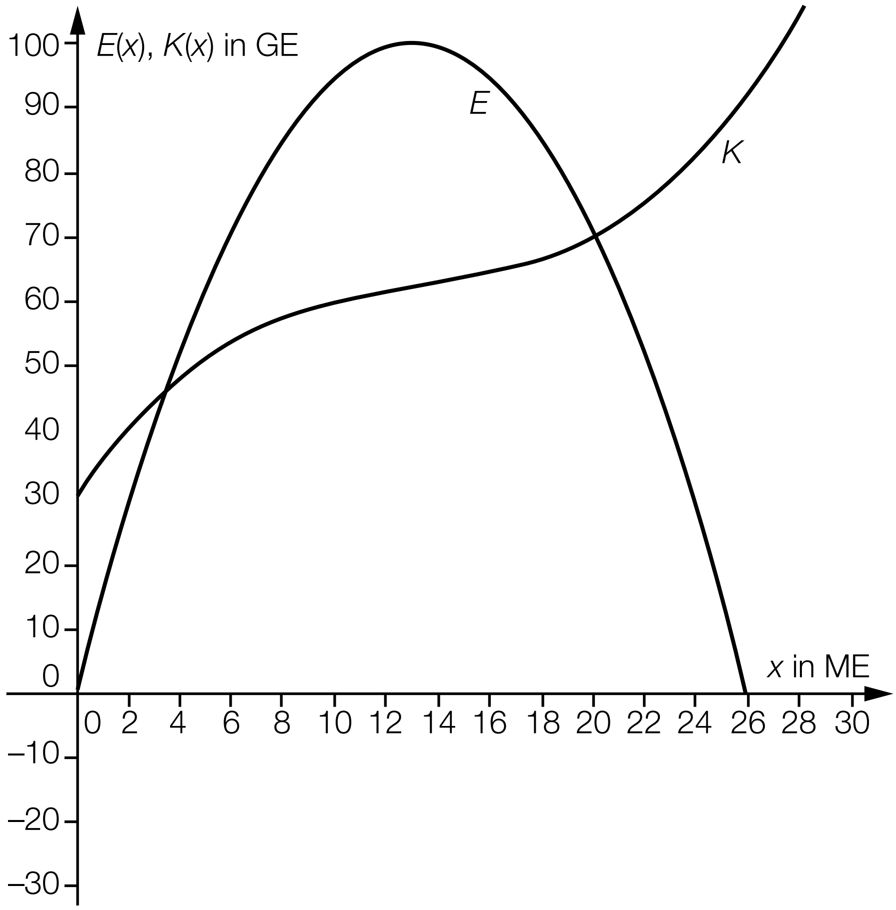


– Berechnen Sie den Winkel δ zwischen den beiden Roboterarmen.

c) Für eine Drohne werden Kondensatoren mit einer bestimmten Kapazität benötigt. Die Kapazitäten sind annähernd normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 1{,}2$ Mikrofarad (µF). Aus einer Lieferung werden 30 Kondensatoren entnommen. Die Messungen der Kapazitäten ergaben den Mittelwert $\bar{x} = 12$ µF.

– Ermitteln Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Kapazität.
– Begründen Sie, warum sich die Breite des 95-%-Konfidenzintervalls halbiert, wenn der Stichprobenumfang vervierfacht wird.

d) Ein Unternehmen produziert Drohnen. Die anfallenden Kosten werden durch die Kostenfunktion K in Abhängigkeit von der produzierten Menge x beschrieben. Der durch den Verkauf dieser Drohnen entstehende Erlös in Abhängigkeit von der abgesetzten Menge wird durch die Erlösfunktion E beschrieben (siehe nachstehende Grafik).



– Schätzen Sie mithilfe der Grafik den maximalen Gewinn ab.
– Zeichnen Sie in der Grafik näherungsweise den Graphen der Gewinnfunktion G ein.
– Kennzeichnen Sie in der Grafik die Gewinnschwelle und die obere Gewinngrenze.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$B = (3|6) \quad C = (8|0)$

I: $h(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
II: $h(3) = 6 \Rightarrow 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = 6$
III: $h(8) = 0 \Rightarrow 512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + d = 0$
IV: $h'(8) = 0 \Rightarrow 192 \cdot a + 16 \cdot b + c = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$$a = \frac{2}{25}, \quad b = -\frac{32}{25}, \quad c = \frac{128}{25}, \quad d = 0$$

$$h(x) = \frac{2}{25} \cdot x^3 - \frac{32}{25} \cdot x^2 + \frac{128}{25} \cdot x$$

Berechnung der Weglänge s:

$$h'(x) = \frac{6}{25} \cdot x^2 - \frac{64}{25} \cdot x + \frac{128}{25}$$

$$s = \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{25} \cdot x^2 - \frac{64}{25} \cdot x + \frac{128}{25}\right)^2}\, dx$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$s = 15{,}245\ldots$ m

b) $$\cos(\delta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$$

$$\delta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}\right)$$

$$\delta = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\-6\end{pmatrix}}{\sqrt{29} \cdot 2 \cdot \sqrt{11}}\right)$$

$\delta = 43{,}292\ldots° \approx 43{,}29°$

c) Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$12 \pm z_{0{,}975} \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{30}}$$

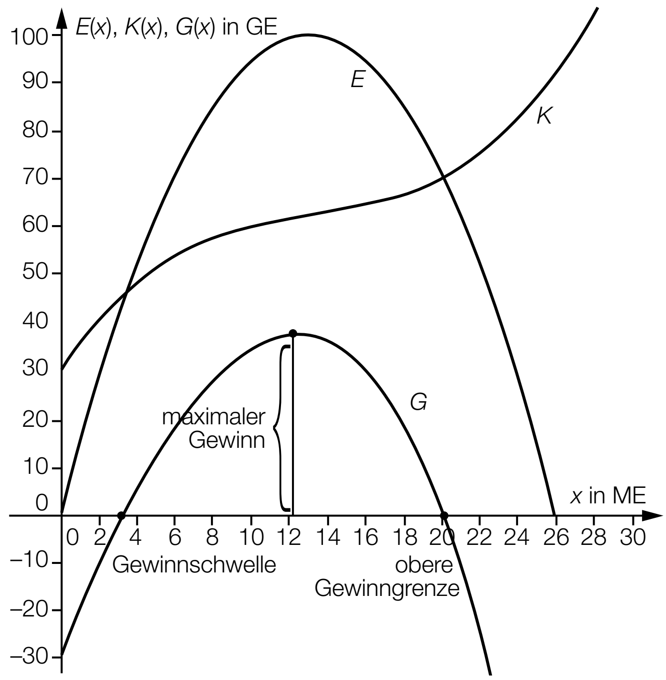
$z_{0{,}975} = 1{,}959\ldots$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall für μ in μF:
[11,57; 12,43] (Intervallgrenzen gerundet)

Eine Vervierfachung der Stichprobenumfangs n bedeutet:

$$\text{Breite}_{\text{neu}} = z_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4 \cdot n}} = z_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot z_{0{,}975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\text{Breite}_{\text{alt}}}{2}$$

d)



Der maximale Gewinn beträgt rund 38 GE.
Ablesetoleranz: [35; 40]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mit den Punkten (u)
   1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mit der Minimumstelle (u)
   1 × B1: für das richtige Lösen des Gleichungssystems (a)
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Weglänge (a)

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels (u)
   1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags des Drehmoments (a)

c) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Konfidenzintervalls (u)
   1 × D: für den richtigen Nachweis (u)

d) 1 × C1: für die richtige Schätzung des maximalen Gewinns im Intervall [35; 40] (u)
   1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Gewinnfunktion (u)
   1 × C2: für das richtige Kennzeichnen der Gewinnschwelle und der oberen Gewinngrenze (u)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 4
b) 2
c) 2
d) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: –

BMB
Bundesministerium
für Bildung

CO_2-Gehalt der Luft*

Aufgabennummer: B_398

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der CO_2-Gehalt der Luft ist ein wichtiger Indikator für die Qualität der Luft. Er wird als Volumenanteil in parts per million (ppm) angegeben.

a) Die Luft in einem geschlossenen Raum mit einem Luftvolumen von 800 m³ hat einen CO_2-Gehalt von 1 100 ppm.

– Ermitteln Sie das CO_2-Volumen (in m³) in diesem Raum.

Eine Lüftungsanlage wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet. Es strömt nun gleichmäßig Frischluft mit einem CO_2-Gehalt von 400 ppm in den Raum. Die Durchflussrate beträgt dabei 2,5 m³/s. Gleichzeitig wird die durchmischte Luft mit derselben Durchflussrate abgesaugt.

– Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, die das CO_2-Volumen im Raum in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. $V(t)$ ist dabei das CO_2-Volumen (in m³) zum Zeitpunkt t (in s).

b) In Schulklassen ist der CO_2-Gehalt an Wintertagen nach 2 Unterrichtsstunden annähernd normalverteilt. Eine Stichprobe in 7 zufällig ausgewählten Klassen ergibt folgende Messwerte:

CO_2-Gehalt in ppm	2 500	2 780	3 500	4 000	2 800	2 740	3 850

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} dieser Messwerte.
– Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ des CO_2-Gehalts.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

Möglicher Lösungsweg

a) $0{,}0011 \cdot 800\ \text{m}^3 = 0{,}88\ \text{m}^3$
Das CO_2-Volumen beträgt $0{,}88\ \text{m}^3$.

$$\frac{dV}{dt} = 2{,}5 \cdot 0{,}0004 - 2{,}5 \cdot \frac{V}{800}$$

b) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 3\,167{,}14\ldots$ ppm
$s_{n-1} = 603{,}17\ldots$ ppm

Zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$$\bar{x} \pm t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

$n = 7 \quad \Rightarrow \quad f = 6$
$t_{6;\,0{,}975} = 2{,}44691\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in ppm: $2\,609{,}29\ldots \leq \mu \leq 3\,724{,}98\ldots$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des CO_2-Volumens
1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung von arithmetischem Mittel und Standardabweichung
1 × B2: für die richtige Berechnung des Vertrauensbereichs

Kalt – warm (1)*

Aufgabennummer: B_394

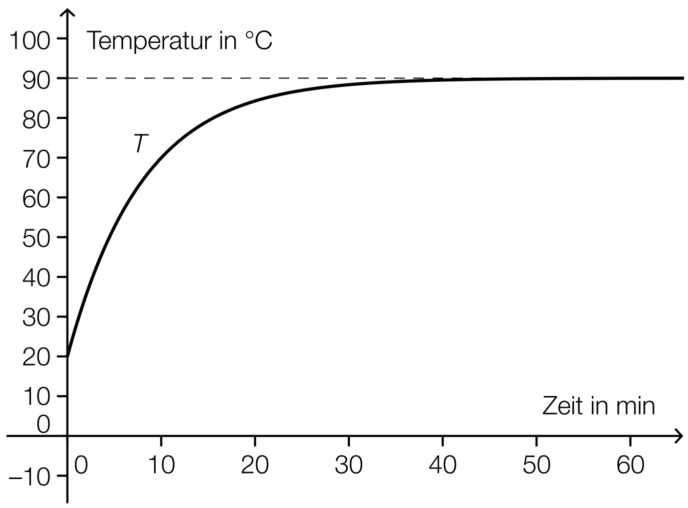
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der unten stehenden Grafik ist ein Erwärmungsvorgang dargestellt, der durch die Funktion T beschrieben wird:

$T(t) = a \cdot (1 - e^{-\frac{t}{8}}) + 20$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$T(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
a ... Konstante

Der Graph dieser Funktion T ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Konstante a.
– Interpretieren Sie die nachstehende Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$\frac{1}{b} \cdot \int_0^b T(t)\,\mathrm{d}t = 60\text{ °C}$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Temperaturverlauf von abkühlendem Wasser wird durch die Funktion T beschrieben:

$T(t) = 8 + 42 \cdot e^{-\frac{t}{84}}$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$T(t)$ ... Temperatur des Wassers zur Zeit t in °C

– Stellen Sie den Temperaturverlauf in den ersten 5 Stunden grafisch dar.
– Stellen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von T zur Zeit $t = 0$ auf.

Die Tangente soll zur näherungsweisen Beschreibung des Temperaturverlaufs verwendet werden. Dabei werden Abweichungen von maximal 2 °C toleriert.

– Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem die Abweichung maximal 2 °C beträgt.

c) Folgende Differenzialgleichung beschreibt den Temperaturverlauf eines abkühlenden Körpers in Abhängigkeit von der Zeit:

$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = k \cdot (T - T_U)$ mit $T > T_U$

t ... Zeit
T ... Temperatur
T_U ... Umgebungstemperatur (konstant)
k ... Konstante

Dabei nähert sich die Temperatur T des abkühlenden Körpers der Umgebungstemperatur T_U.

– Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, welches Vorzeichen k haben muss.
– Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
– Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $T(0) = T_0$.

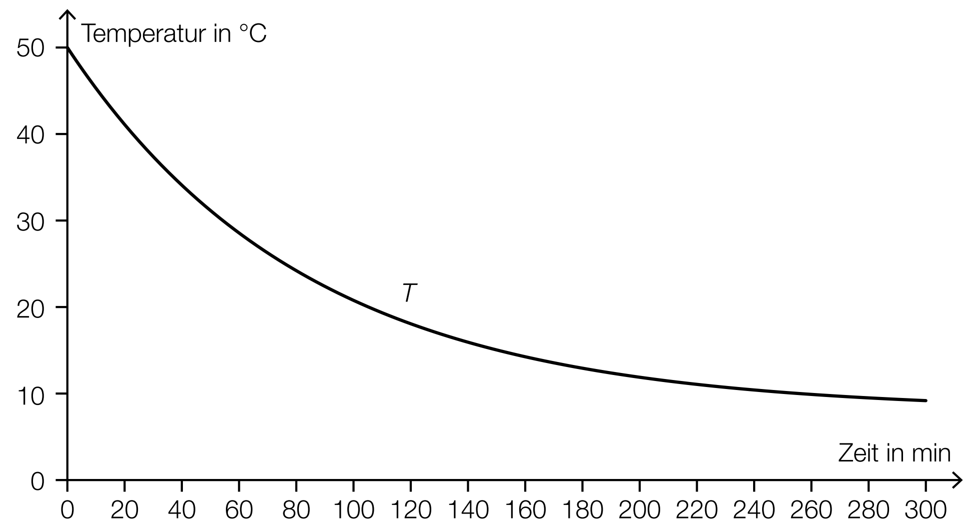
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $a = 70$

Im Intervall $[0; b]$ beträgt die mittlere Temperatur 60 °C.

b)



Gleichung der Tangente(nfunktion): $f(t) = k \cdot t + d$
$k = T'(0) = -0{,}5$
$d = 50$
$\Rightarrow \quad f(t) = -0{,}5 \cdot t + 50$

$8 + 42 \cdot e^{-\frac{t}{84}} - (-0{,}5 \cdot t + 50) = 2$
Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz für $t > 0$: $t = 27{,}3\ldots$
Zeitintervall: $[0; 27]$

c) Für $T > T_U$ handelt es sich um einen Abnahmeprozess, also muss $\frac{dT}{dt}$ negativ sein. Da $(T - T_U)$ positiv ist, muss also k negativ sein.

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_U)$$

$$\frac{dT}{T - T_U} = k \cdot dt \quad \left(\text{oder: } \frac{T'}{T - T_U} = k\right)$$

$$\int \frac{dT}{T - T_U} = k \cdot \int dt \quad \left(\text{oder: } \int \frac{T'(t)}{T(t) - T_U}\,dt = k \cdot \int dt\right)$$

$$\ln|T(t) - T_U| = k \cdot t + C_1$$

allgemeine Lösung: $T(t) = T_U + C \cdot e^{k \cdot t}$

$T(0) = T_0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = T_U + C$
$T(t) = T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{k \cdot t}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der Konstanten *a*
1 × C2: für die richtige Interpretation der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang

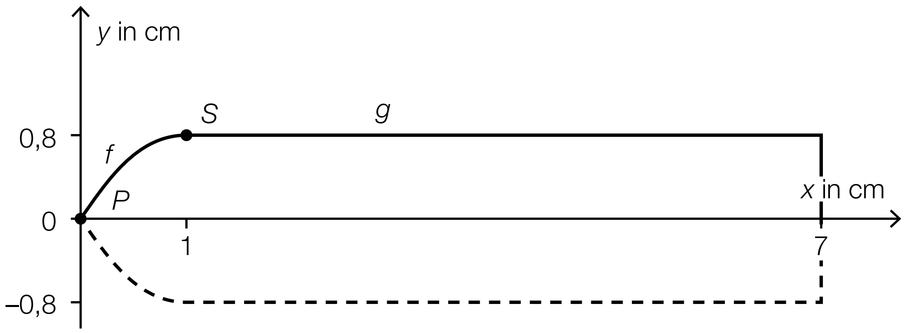
b) 1 × B1: für das richtige Darstellen des Temperaturverlaufs in den ersten 5 Stunden
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Tangente
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Zeitintervalls

c) 1 × D: für die richtige Argumentation
1 × B1: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Lösung mit $T(0) = T_0$

Blut

Das Blut erfüllt wichtige Funktionen in unserem Körper. Es transportiert zum Beispiel den Wirkstoff von Medikamenten durch den Körper.

a) Zur Verabreichung von Medikamenten werden spezielle Dosiervorrichtungen verwendet. Die Form des Flüssigkeitsbehälters einer solchen Vorrichtung entsteht durch Rotation der dargestellten Kurve um die x-Achse. Die Funktion f ist eine quadratische Funktion mit dem Scheitelpunkt S. Die Funktion g ist eine konstante Funktion.



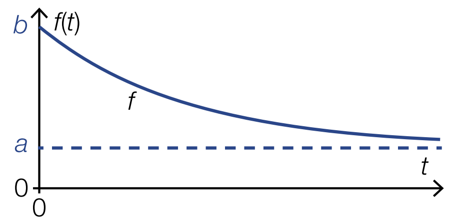
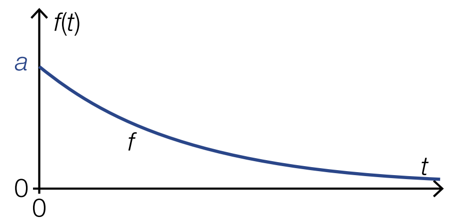
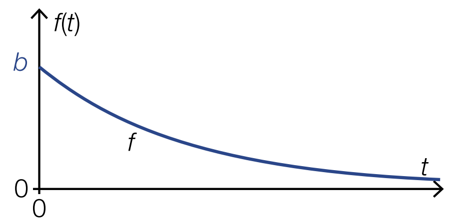
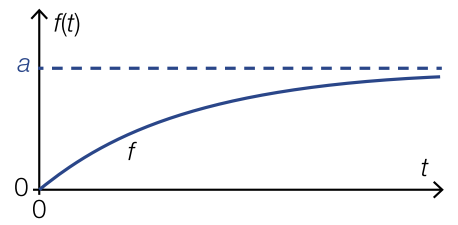
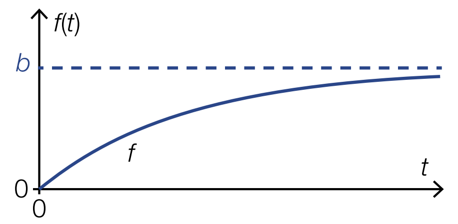
1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf.
2) Berechnen Sie das Volumen des Flüssigkeitsbehälters in Millilitern.

b) Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffmenge eines Medikaments im Blut lässt sich näherungsweise durch die Funktion f beschreiben:

$f(t) = a - a \cdot e^{-b \cdot t}$

t … Zeit ab Verabreichung des Medikaments in min
$f(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg
$a > 0$, $b > 0$ … Konstanten

1) Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, in der der Graph der Funktion f richtig dargestellt ist. *[1 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\frac{1}{30} \cdot \int_0^{30} f(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Karl Landsteiner entwickelte das AB0-Blutgruppensystem. Er entdeckte auch die beiden Rhesusfaktoren Rh+ und Rh–.
37 % der österreichischen Bevölkerung haben die Blutgruppe A, Rh+.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 60 zufällig ausgewählten Personen der österreichischen Bevölkerung höchstens 15 Personen die Blutgruppe A, Rh+ haben.
2) Interpretieren Sie die Bedeutung des Ausdrucks $\sum_{k=2}^{6} \binom{60}{k} \cdot 0{,}37^{k} \cdot 0{,}63^{60-k}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Die Funktion w beschreibt den zeitlichen Verlauf der Wirkstoffmenge im Blut eines Patienten. w erfüllt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -k \cdot w + D$$

t … Zeit ab Verabreichung des Wirkstoffs
$w(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut des Patienten zur Zeit t
D, k … Konstanten

1) Zeigen Sie mit der Methode *Trennen der Variablen*, dass die Differenzialgleichung die Lösung $w(t) = \frac{D}{k} - C \cdot e^{-k \cdot t}$ hat.

Möglicher Lösungsweg

a1) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$
\begin{array}{ll}
\text{I:} & f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \\
\text{II:} & f(1) = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 0{,}8 \\
\text{III:} & f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot a + b = 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$a = -0{,}8$
$b = 1{,}6$
$c = 0$

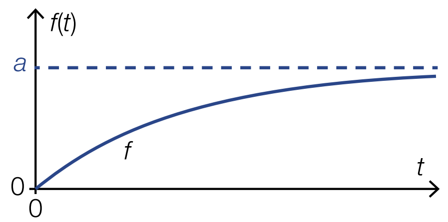
$f(x) = -0{,}8 \cdot x^2 + 1{,}6 \cdot x$

a2) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f(x))^2 \,\mathrm{d}x + 0{,}8^2 \cdot \pi \cdot 6$

$V = 13{,}136\ldots$

Das Volumen des Flüssigkeitsbehälters beträgt rund 13,14 ml.

b1)

	☒

b2) Mit dem Ausdruck wird die durchschnittliche Wirkstoffmenge des Medikaments im Blut in den ersten 30 Minuten ab Verabreichung berechnet.

c1) X ... Anzahl der Personen mit Blutgruppe A, Rh+
Binomialverteilung mit $n = 60$ und $p = 0{,}37$
$P(X \leq 15) = 0{,}0339$
Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 3,4 % haben höchstens 15 Personen die Blutgruppe A, Rh+.

c2) Mit diesem Ausdruck wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass unter 60 zufällig ausgewählten Personen der österreichischen Bevölkerung mindestens 2 und höchstens 6 Personen die Blutgruppe A, Rh+ haben.

d1) $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -k \cdot w + D$

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{-k \cdot w + D} = \int \mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{k} \cdot \ln|-k \cdot w + D| = t + C_1$$

$$w(t) = \frac{D}{k} - C \cdot e^{-k \cdot t}$$

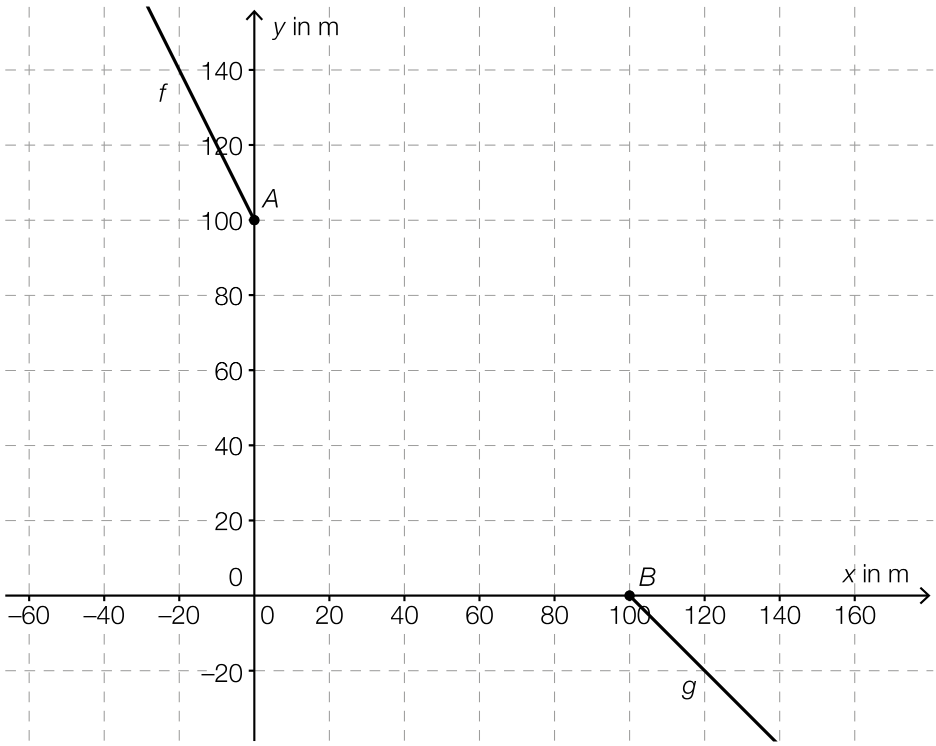
Straßenbau (2)*

Aufgabennummer: B_408

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Zwischen zwei Punkten A und B soll eine Verbindungsstraße errichtet werden.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Bauplan in einem Koordinatensystem in der Draufsicht (von oben betrachtet).



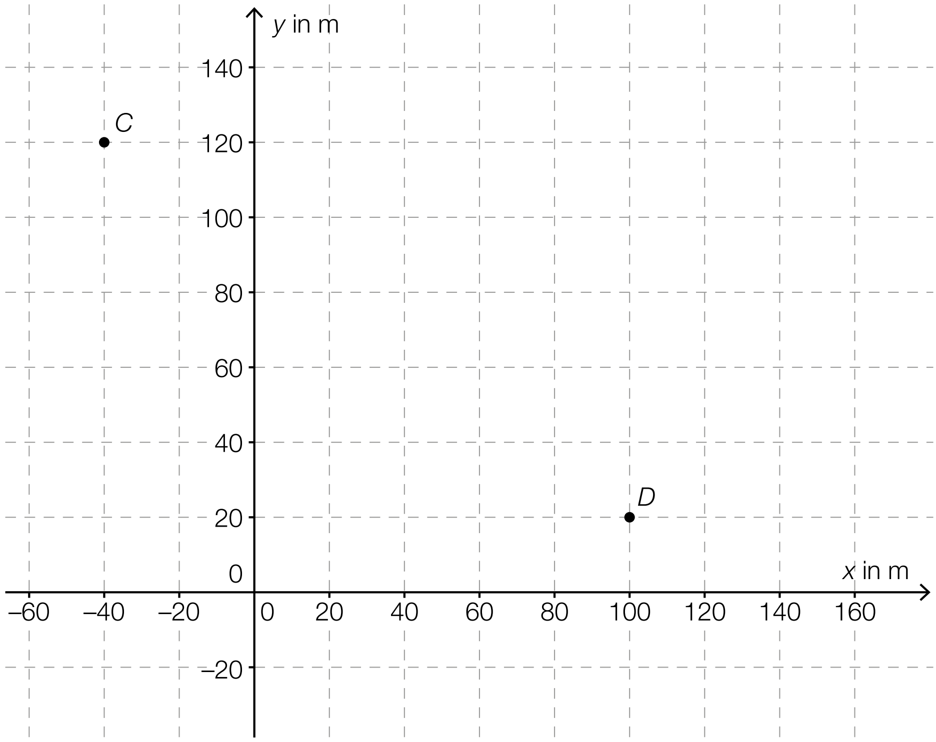
Zu Punkt A führt eine Straße, die durch den Graphen der linearen Funktion f dargestellt ist. Zu Punkt B führt eine Straße, die durch den Graphen der linearen Funktion g dargestellt ist.

Die neue Straße, die A und B verbindet, soll durch den Graphen einer Polynomfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden. Diese Polynomfunktion soll im Punkt A die gleiche Steigung wie f und im Punkt B die gleiche Steigung wie g haben.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion h.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten von h.

* ehemalige Klausuraufgabe

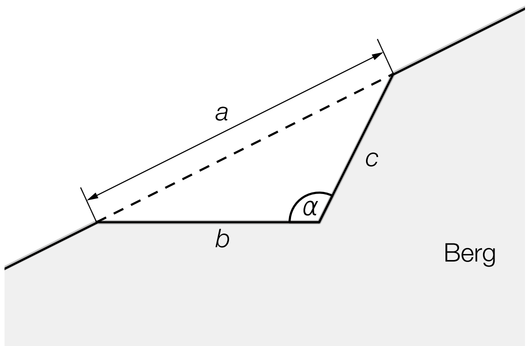
b) Zwischen zwei Punkten C und D soll eine geradlinige Verbindungsstraße errichtet werden (siehe nachstehendes Koordinatensystem).



– Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{CD}$.
– Berechnen Sie den Betrag des Vektors $\overrightarrow{CD}$.

c) Ein Straßenabschnitt soll an einem Berghang entlangführen. Der Querschnitt der geplanten Trasse ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

Die Seite b ist 15 m und die Seite c ist 11,8 m lang.
Der Winkel beträgt $\alpha = 116{,}6°$.



– Berechnen Sie den Flächeninhalt des von a, b und c eingeschlossenen Dreiecks.
– Berechnen Sie die Länge der Seite a.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $h(0) = 100$
II: $h(100) = 0$
III: $h'(0) = -2$
IV: $h'(100) = -1$

oder:

I: $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 100$
II: $a \cdot 100^3 + b \cdot 100^2 + c \cdot 100 + d = 0$
III: $3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 + c = -2$
IV: $3 \cdot a \cdot 100^2 + 2 \cdot b \cdot 100 + c = -1$

Berechnen der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}0001$
$b = 0{,}02$
$c = -2$
$d = 100$

b) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -40 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ -100 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{140^2 + (-100)^2} = 172{,}0... \approx 172$

c) $A = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin(\alpha)}{2} \approx 79{,}132...$
Der Flächeninhalt beträgt rund 79,13 m².

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)}$
$a = 22{,}86...$
Die Seite *a* ist rund 22,9 m lang.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *A* und *B*
1 × A2: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Steigung im Punkt *A* bzw. *B*
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors
1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags des Vektors

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Länge der Seite *a*

Sinkende Kugeln*

Aufgabennummer: B_407

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Sinkgeschwindigkeit einer in einer Flüssigkeit sinkenden Metallkugel kann durch eine Funktion v beschrieben werden:

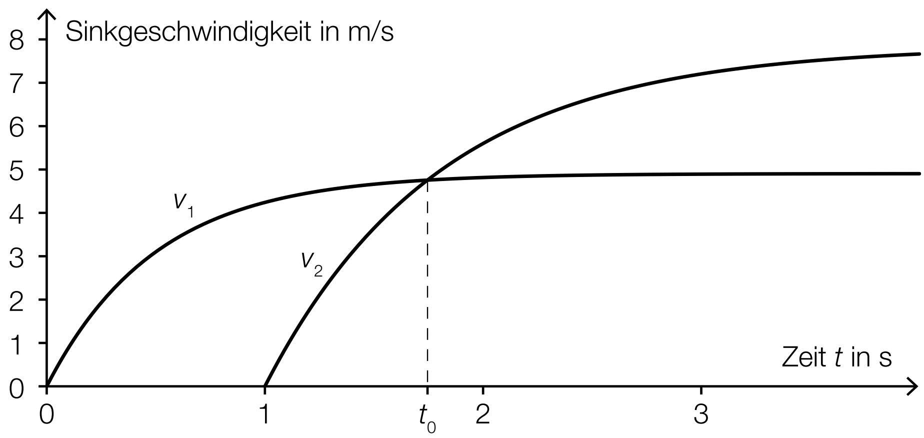
$v(t) = g \cdot \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit ab Beginn des Sinkens in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)
τ ... Zeitkonstante in s mit $\tau > 0$
g ... Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s²)

a) – Begründen Sie mathematisch, warum die Sinkgeschwindigkeit ständig zunimmt.

b) Eine Kugel K_2 beginnt 1 Sekunde nach einer Kugel K_1 zu sinken.

In der nachstehenden Grafik sind die Sinkgeschwindigkeit v_1 der Kugel K_1 und die Sinkgeschwindigkeit v_2 der Kugel K_2 dargestellt. Die Zeitkonstante der Sinkgeschwindigkeit v_2 beträgt $\tau_2 = 0{,}8$ s.



– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion v_2 für $t \geq 1$.

Zum Zeitpunkt t_0 ist die Beschleunigung der Kugel K_2 größer als die Beschleunigung der Kugel K_1.

– Beschreiben Sie, wie man dies in der obigen Grafik erkennen kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Sinkgeschwindigkeit einer bestimmten Kugel kann durch die Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = g \cdot 0{,}25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}25}}\right) \text{ mit } t \geq 0$$

t ... Zeit ab Beginn des Sinkens in s
$v(t)$ ... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

– Berechnen Sie denjenigen Weg, den die Kugel in der ersten Sekunde zurücklegt.

Im Zeitintervall $[0; t_1]$ legt die Kugel einen Weg von 8 m zurück.

– Bestimmen Sie die Zeit t_1.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für größer werdendes t wird $e^{-\frac{t}{\tau}}$ immer kleiner und damit $\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ immer größer.

b) $v_2(t) = g \cdot 0{,}8 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-1}{0{,}8}}\right)$

An der Stelle t_0 ist die Steigung der Funktion v_2 größer als die Steigung der Funktion v_1.

c) $s(1) = \int_0^1 g \cdot 0{,}25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}25}}\right) \mathrm{d}t = 1{,}8506...$

In der ersten Sekunde legt die Kugel rund 1,85 m zurück.

$s(t_1) = 8$

$\int_0^{t_1} g \cdot 0{,}25 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}25}}\right) \mathrm{d}t = 8$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 3{,}51...$

$(t_2 = -0{,}70...)$

Die Kugel benötigt rund 3,5 Sekunden, um diesen Weg zurückzulegen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung

b) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion v_2
1 × C: für die richtige Beschreibung

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung desjenigen Weges, den die Kugel in der ersten Sekunde zurücklegt
1 × B2: für das richtige Bestimmen der Zeit t_1

Fairtrade*

Aufgabennummer: B_399

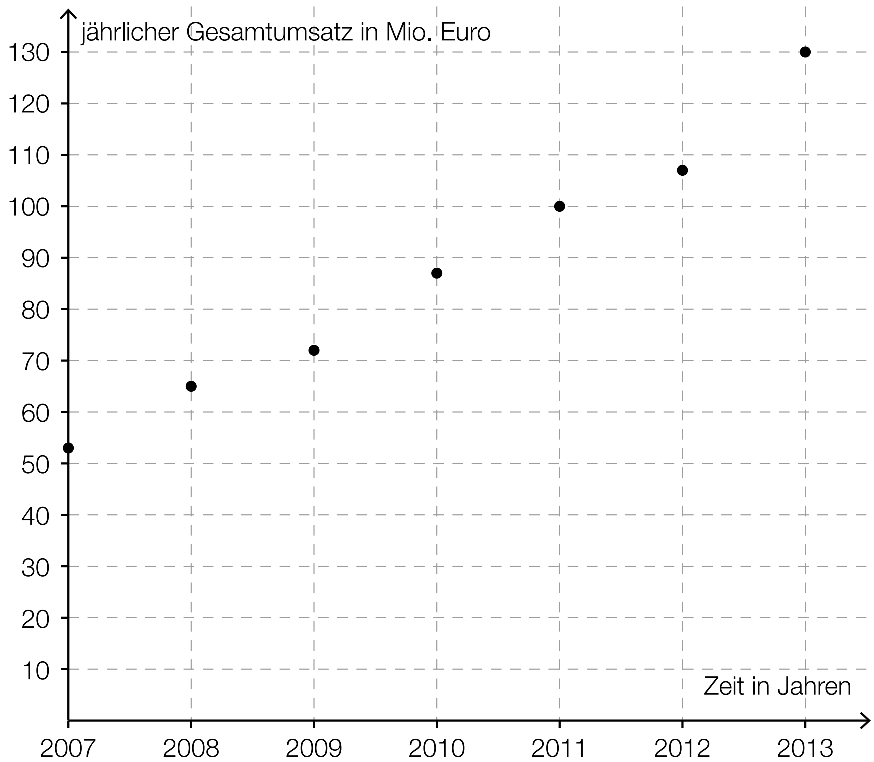
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Gesamtumsatz von Fairtrade-Produkten in Österreich ist in den letzten Jahren deutlich gestiegen:

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
jährlicher Gesamtumsatz in Millionen (Mio.) Euro	53	65	72	87	100	107	130

Quelle: http://www.fairtrade.at/fileadmin/AT/Materialien/2013_FAIRTRADE_Inside_Zahlen_Fakten.pdf [05.09.2016].

a) Die nachstehende Abbildung zeigt diese Gesamtumsatzentwicklung.



Der jährliche Gesamtumsatz soll in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2007.
– Zeichnen Sie den Graphen der Regressionsfunktion im obigen Koordinatensystem ein.
– Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Regressionsfunktion ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Gesamtumsatzentwicklung ist.
– Berechnen Sie anhand dieses Modells den zu erwartenden jährlichen Gesamtumsatz im Jahr 2020.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Betrachtet man nur den Zeitraum von 2009 bis 2013, so kann die Entwicklung des Gesamtumsatzes näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(t) = 13{,}6 \cdot t + 72$

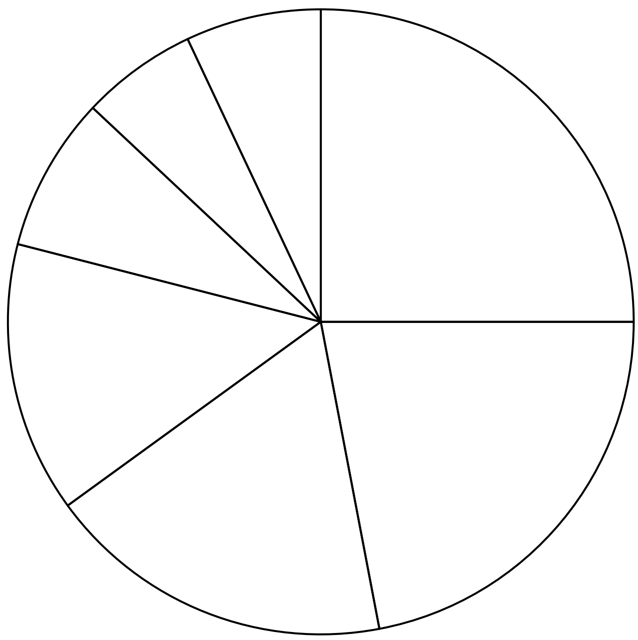
t ... Zeit in Jahren ab 2009 ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2009)
$f(t)$ ... jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro

– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Im Jahr 2012 teilte sich der Gesamtumsatz auf folgende 7 Bereiche auf:
Baumwolle, frische Früchte, Fruchtsäfte, Kaffee, Rosen, Süßwaren und Rest.

Der Umsatz an Kaffee betrug in diesem Jahr 18 % des Gesamtumsatzes.

– Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm denjenigen Sektor, der dem Umsatz an Kaffee entspricht.



Der Umsatz an Süßwaren betrug 2012 etwa 24 Mio. Euro.

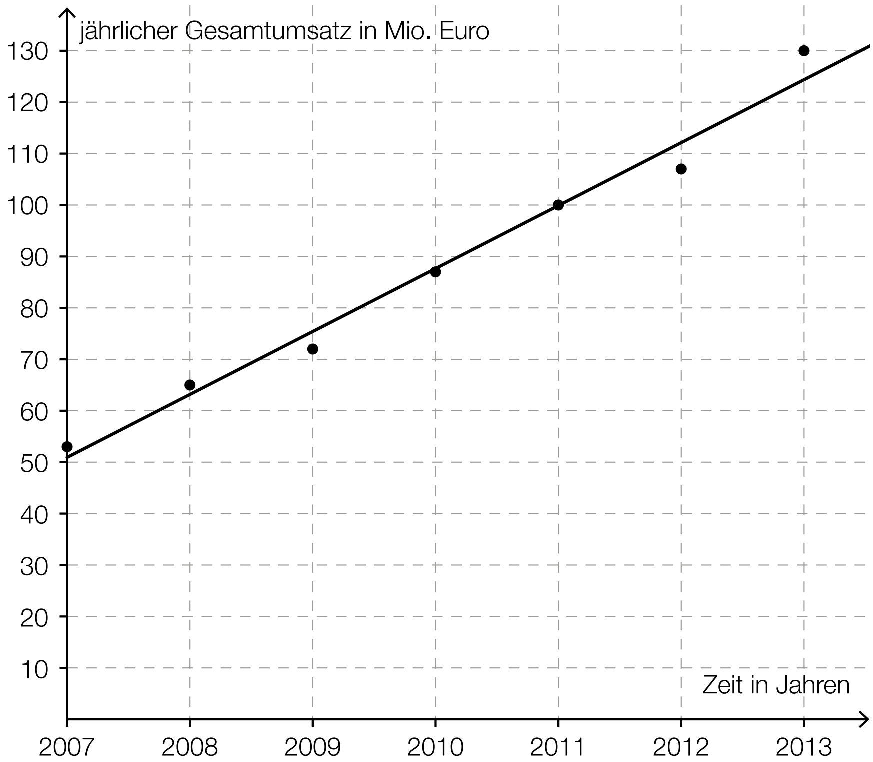
– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Umsatz an Süßwaren in Bezug auf den Gesamtumsatz im Jahr 2012 (siehe Tabelle) betrug.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 12{,}25 \cdot t + 50{,}96$ (Koeffizienten gerundet)

t … Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2007)
$f(t)$ … jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro



Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}991$

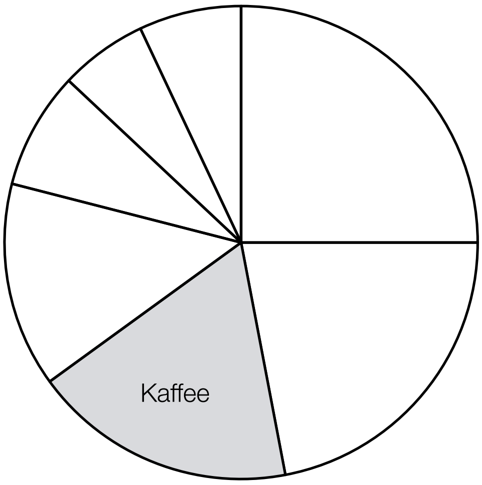
Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$f(13) = 210{,}2\ldots$

Gemäß diesem Modell wird der jährliche Gesamtumsatz im Jahr 2020 rund 210 Millionen Euro betragen.

b) Gemäß diesem Modell steigt der jährliche Gesamtumsatz pro Jahr um 13,6 Millionen Euro.

c)



$\frac{24}{107} = 0{,}2242\ldots \approx 22{,}4\ \%$

Der Umsatz an Süßwaren betrug im Jahr 2012 rund 22,4 Prozent des Gesamtumsatzes.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
1 × B2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Regressionsfunktion
1 × D: für die richtige Beurteilung mithilfe des Korrelationskoeffizienten
1 × B3: für die richtige Berechnung des jährlichen Gesamtumsatzes im Jahr 2020

b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Sektors, der den Umsatz an Kaffee darstellt
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

Widerstände*

Aufgabennummer: B_396

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

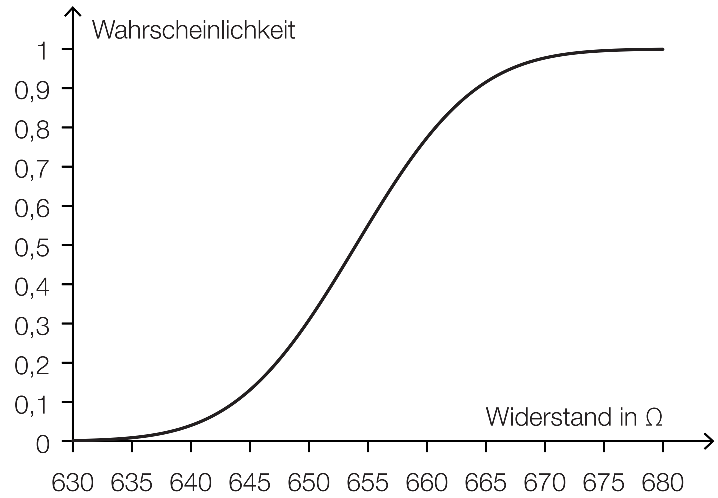
a) Bei der Produktion von elektrischen Widerständen können die Widerstandswerte als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100{,}0\ \Omega$ und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}2\ \Omega$ angenommen werden. Eine Zufallsstichprobe von 20 Widerständen wird untersucht.

– Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert der Widerstandswerte mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

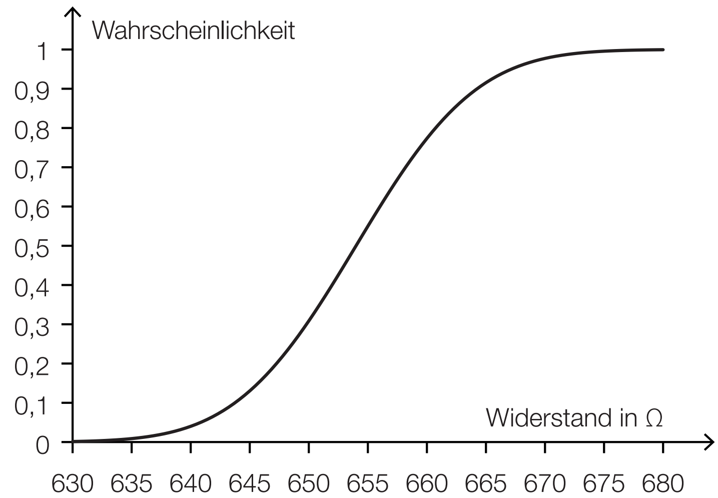
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei der Produktion von anderen elektrischen Widerständen können die Widerstandswerte als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 654\ \Omega$ und der Standardabweichung $\sigma = 8\ \Omega$ angenommen werden.

– Veranschaulichen Sie in der nachstehenden Darstellung der Verteilungsfunktion dieser Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 650)$.



– Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Verteilungsfunktion einer Normalverteilung mit gleichem μ und kleinerem σ als in der gegebenen Darstellung.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

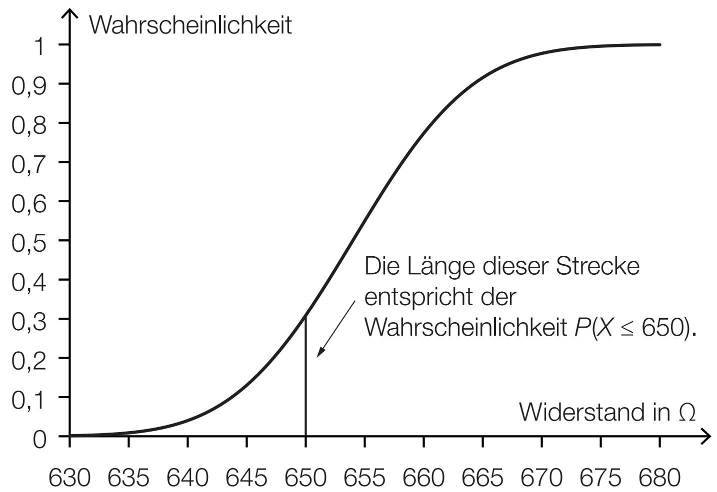
a) Zweiseitigen 90-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

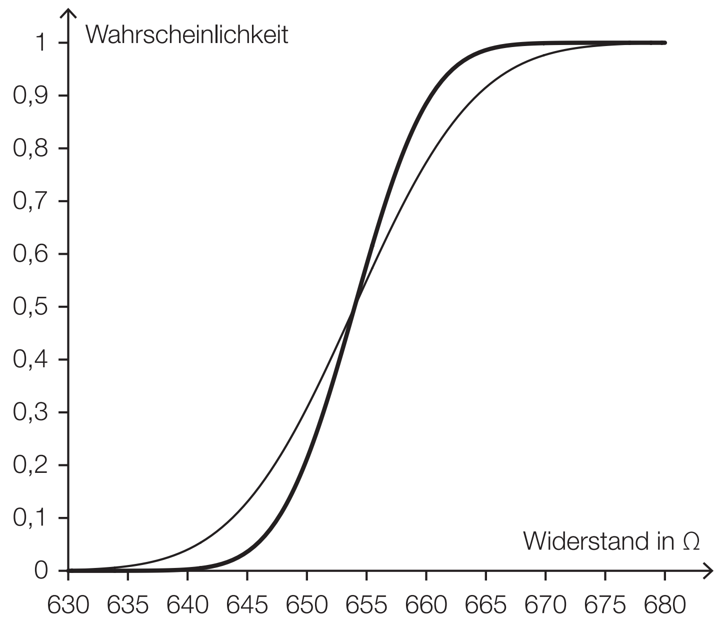
$$100 \pm u_{0,95} \cdot \frac{3,2}{\sqrt{20}}$$

$u_{0,95} = 1,644...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in Ω: [98,8; 101,2] (*gerundet*).

b)





Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Zufallsstreubereich für einen Stichprobenmittelwert mithilfe der Normalverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs

b) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit
1 × A2: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet; Abweichung der Funktionswerte von der gegebenen Verteilungsfunktion auf beiden Seiten von μ richtig eingezeichnet)

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Prismen und Linsen*

Aufgabennummer: B_411

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

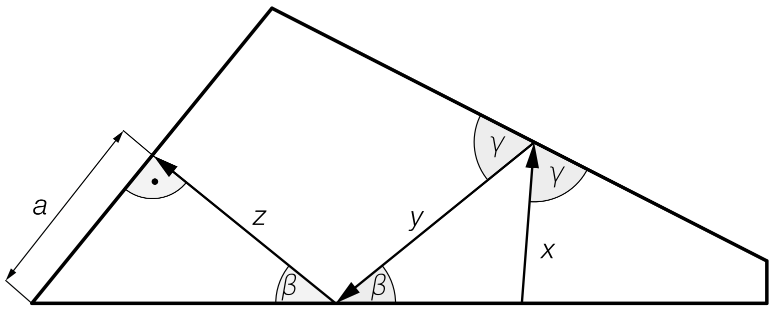
Der Verlauf eines Lichtstrahls durch ein Glasprisma wird als *Strahlengang* bezeichnet.

a) In einem Spezialglas beträgt die Lichtgeschwindigkeit 205 337 300 m/s.

In einem aus diesem Glas gefertigten Prisma beträgt die Länge des Strahlengangs 5 cm.

– Berechnen Sie, wie viele Sekunden es dauert, bis ein Lichtstrahl dieses Prisma durchquert hat.

b) Ein Strahlengang durch ein Glasprisma einer Filmkamera kann folgendermaßen dargestellt werden:



Hinweis: Die Skizze ist nicht maßstabgetreu!

$a = 0{,}50$ cm
$x = 0{,}55$ cm
$\beta = 40°$
$\gamma = 68°$

– Berechnen Sie die Länge $x + y + z$ des Strahlengangs.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Bei der Abbildung eines Gegenstands mithilfe einer Sammellinse gelten folgende Beziehungen:

$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ und $b = \frac{g \cdot f}{g - f}$

B ... Höhe des Bildes
G ... Höhe des Gegenstands
b ... Abstand des Bildes von der Linse
g ... Abstand des Gegenstands von der Linse
f ... Brennweite der Linse

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Wenn $g = 3 \cdot f$ gilt, dann ist B größer als G.	☐
Wenn $g = 3 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist B kleiner als G.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☐
Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist B größer als G.	☐

d) Ein Unternehmen fertigt Linsen aus Glas für industrielle Anwendungen. Die Dicke spezieller Linsen (gemessen in der Linsenmitte) erweist sich als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ:

μ = 12,000 mm
σ = 0,060 mm

– Berechnen Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem die Dicke einer zufällig ausgewählten Linse mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

Eine Linse erreicht Präzisionsqualität, wenn die Abweichung vom Erwartungswert nicht mehr als ±0,040 mm beträgt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Linse Präzisionsqualität hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

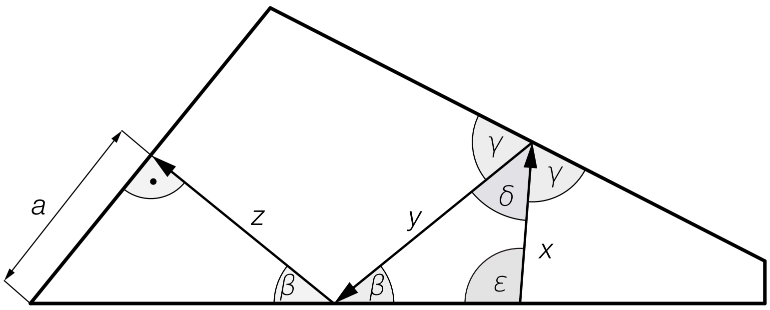
a) $\dfrac{0{,}05\text{ m}}{205\,337\,300\text{ m/s}} = 2{,}43... \cdot 10^{-10}\text{ s} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-10}\text{ s}$

b) $z = \dfrac{0{,}5}{\tan(40°)} = 0{,}595...$

$\delta = 180° - 2 \cdot \gamma = 44°$
$\varepsilon = 180° - \beta - \delta = 96°$

$y = \dfrac{0{,}55 \cdot \sin(96°)}{\sin(40°)} = 0{,}850...$

$x + y + z = 1{,}996...$



Die Länge des Strahlengangs beträgt rund 2,00 cm.

c)

Wenn $g = 2 \cdot f$ gilt, dann ist $B = G$.	☒

d) Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a < X < \mu + a) = 0{,}90 \Rightarrow [11{,}901; 12{,}099]$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(11{,}960 < X < 12{,}040) = 0{,}495... \approx 50\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer in Sekunden

b) 1 × A1: für die richtige Modellierung am rechtwinkeligen Dreieck zur Berechnung von z
1 × A2: für die richtige Modellierung am schiefwinkeligen Dreieck zur Berechnung von y
1 × B: für die richtige Berechnung der Länge des Strahlengangs

c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

d) 1 × B1: für die richtige Berechnung des symmetrischen Intervalls
1 × B2: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Weinbau (1)*

Aufgabennummer: B_412

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Aus nostalgischen Gründen werden in einem kleinen Weingut Trauben der Sorte *Welschriesling* mit einer renovierten Handpresse gepresst.
Der zylinderförmige Korb, in dem die Weintrauben gepresst werden, hat dabei die folgenden Abmessungen:
Höhe h = 80 cm, Innenradius r = 42 cm.

– Überprüfen Sie nachweislich mithilfe der Volumsformel des Drehzylinders, ob die nachstehenden Aussagen jeweils richtig sind.

Aussage 1: „Wäre die Presse 1,6 m hoch (bei gleichem Durchmesser), so würde sie das doppelte Volumen fassen."
Aussage 2: „Hätte die Presse einen Innenradius von 84 cm (bei gleicher Höhe), so würde sie das doppelte Volumen fassen."

Der Korb ist zu 95 % mit Trauben gefüllt. Aus diesen Trauben werden 350 Liter Traubenmost gepresst.

– Berechnen Sie den prozentuellen Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Volumen der Trauben.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Weine der Sorten *Zweigelt* und *Grüner Veltliner* werden in Kisten zu 12 Flaschen und Kartons zu 6 Flaschen verkauft. Die Preise pro Flasche sind unabhängig von der Packungsgröße.

1 Kiste *Zweigelt* und 1 Karton *Grüner Veltliner* kosten insgesamt € 47,40.
2 Kisten *Grüner Veltliner* und 1 Karton *Zweigelt* kosten insgesamt € 72.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem der Preis für eine Flasche *Zweigelt* und der Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner* berechnet werden können.
– Berechnen Sie den Preis für eine Flasche *Zweigelt* und den Preis für eine Flasche *Grüner Veltliner*.

c) Der Wein wird mit einem manuellen Reihenfüller in Flaschen abgefüllt. Das Füllvolumen der Flaschen kann dabei als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ angenommen werden. Es liegen 95 % der Füllvolumina in dem um μ symmetrischen Intervall von 995 Millilitern (ml) bis 1015 ml.

– Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Füllvolumens der Flaschen.
– Berechnen Sie die Standardabweichung σ.

Möglicher Lösungsweg

a) Aussage 1 ist richtig, weil das Volumen direkt proportional zur Höhe ist.
Aussage 2 ist falsch, weil das Volumen nicht direkt proportional zum Radius ist.
Bei Verdoppelung des Radius erhält man das vierfache Volumen.

Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.

Volumen der Trauben im Korb in Litern: $0{,}95 \cdot 4{,}2^2 \cdot \pi \cdot 8 = 421{,}1...$
relativer Anteil des Traubenmosts am ursprünglichen Traubenvolumen:
$\frac{350}{421{,}1...} = 0{,}8310... \approx 83{,}1\ \%$

b) z ... Preis für 1 Flasche *Zweigelt*
g ... Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*

I: $12 \cdot z + 6 \cdot g = 47{,}40$
II: $24 \cdot g + 6 \cdot z = 72$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$z = 2{,}80$
$g = 2{,}30$

Preis für 1 Flasche *Zweigelt*: € 2,80
Preis für 1 Flasche *Grüner Veltliner*: € 2,30

c) $\mu = \frac{995 + 1\,015}{2} = 1\,005$
Der Erwartungswert beträgt 1 005 ml.

X ... Füllvolumen in ml
$P(X \leq 1\,015) = 0{,}975$
Berechnung von σ mittels Technologieeinsatz: $\sigma = 5{,}1...$

Die Standardabweichung beträgt rund 5 ml.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für den richtigen Nachweis zur Aussage 1
1 × D2: für den richtigen Nachweis zur Aussage 2
Auch ein rechnerischer Nachweis ist jeweils als richtig zu werten.
1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Anteils

b) 1 × A: für das richtige Erstellen eines Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Preise

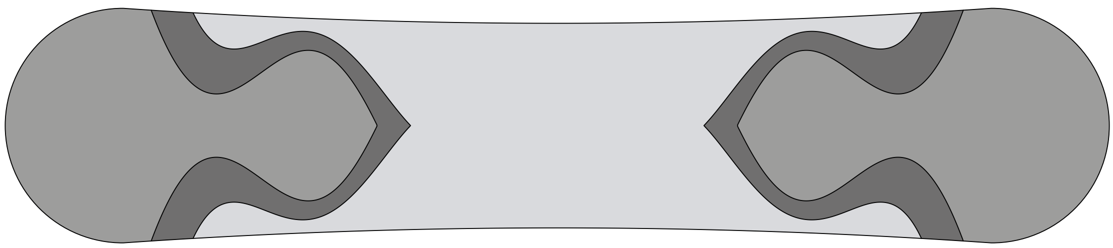
c) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts
1 × B2: für die richtige Berechnung der Standardabweichung

Snowboard (1)*

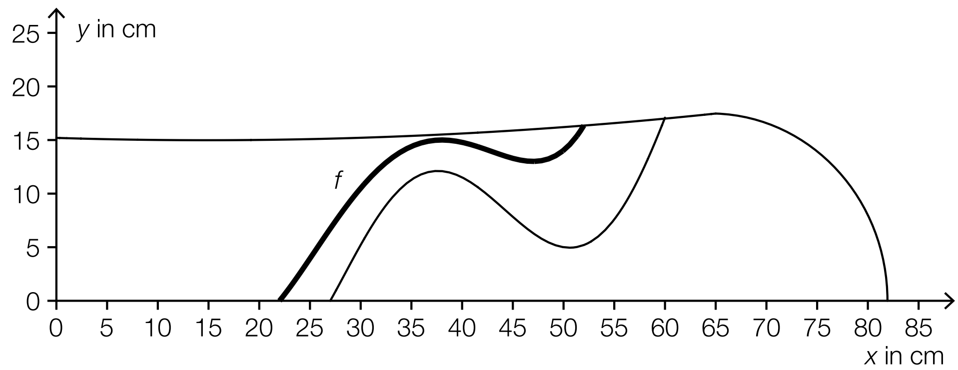
Aufgabennummer: B_392

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Design für ein Freestyle-Snowboard sieht folgendermaßen aus:



a) Das Snowboard-Design setzt sich aus 4 zueinander symmetrischen Elementen zusammen. Eines dieser Elemente ist in folgender Grafik dargestellt:



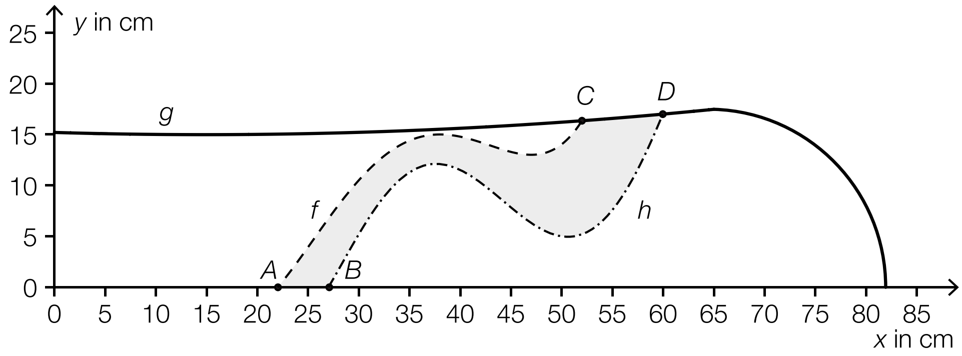
Die in der obigen Grafik markierte Kurve kann als Graph einer Polynomfunktion 4. Grades mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ dargestellt werden. Von dieser Funktion sind folgende Eigenschaften bekannt:

Bei $x = 22$ hat die Funktion f eine Nullstelle.
Der Punkt $(38|15)$ ist ein Hochpunkt.
Der Punkt $(47|13)$ ist ein Tiefpunkt.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten dieser Polynomfunktion 4. Grades berechnen kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die geschwungene Farbfläche des Snowboards wird durch die Graphen der Funktionen f, g und h sowie die x-Achse begrenzt:



$A = (22|0)$
$B = (27|0)$
$C = (52|16{,}5)$
$D = (60|17)$

Im nachstehenden Ansatz zur Berechnung des Inhalts dieser grau markierten Fläche in cm^2 wurde eine Teilfläche nicht berücksichtigt.

$A_1 = \int_{22}^{27} f(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad$ $A_2 = \int_{27}^{52} \left[f(x) - h(x)\right]\mathrm{d}x$

– Kennzeichnen Sie in der obigen Grafik die fehlende Teilfläche.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A_3 dieser Teilfläche auf.

$A_3 =$ ____________________

c) Die Kosten bei der Produktion von Snowboards einer *limited edition* können durch die Funktion K, der Erlös beim Verkauf kann durch die Funktion E beschrieben werden:

$K(x) = 0{,}27 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 591{,}67 \cdot x + 10\,000$
$E(x) = 1\,000 \cdot x$

x ... Anzahl der Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktion von x ME in Geldeinheiten (GE)
$E(x)$ ... Erlös beim Verkauf von x ME in GE

Es wird angenommen, dass alle produzierten Snowboards auch verkauft werden.

– Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion auf.
– Berechnen Sie den maximalen Gewinn.
– Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

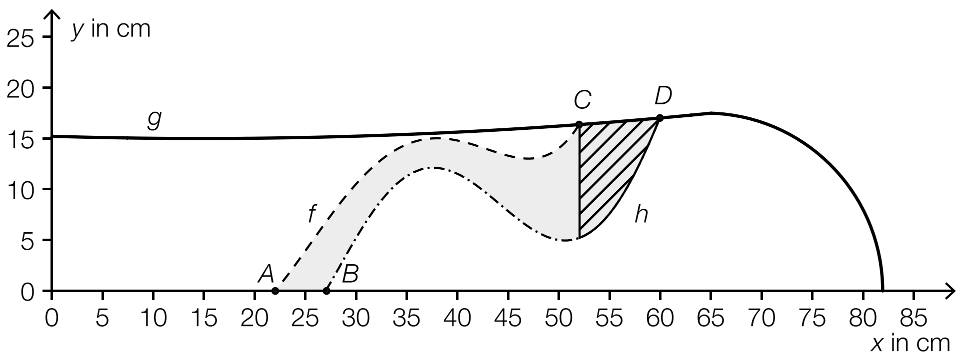
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$f(22) = 0$		$22^4 \cdot a + 22^3 \cdot b + 22^2 \cdot c + 22 \cdot d + e = 0$
$f(38) = 15$		$38^4 \cdot a + 38^3 \cdot b + 38^2 \cdot c + 38 \cdot d + e = 15$
$f'(38) = 0$	*oder:*	$4 \cdot 38^3 \cdot a + 3 \cdot 38^2 \cdot b + 2 \cdot 38 \cdot c + d = 0$
$f(47) = 13$		$47^4 \cdot a + 47^3 \cdot b + 47^2 \cdot c + 47 \cdot d + e = 13$
$f'(47) = 0$		$4 \cdot 47^3 \cdot a + 3 \cdot 47^2 \cdot b + 2 \cdot 47 \cdot c + d = 0$

b)



$$A_3 = \int_{52}^{60} \left[g(x) - h(x)\right] \mathrm{d}x$$

c) $G(x) = -0{,}27 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 + 408{,}33 \cdot x - 10\,000$

$G'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 47{,}62\ldots \quad (x_2 = -10{,}58\ldots)$
$G(47{,}62\ldots) = 14\,303{,}372\ldots$
Der maximale Gewinn beträgt rund 14 303,37 GE.

Nullstellen der Gewinnfunktion: $G(x) = 0$
$(x_1 = -31{,}15\ldots)$
$x_2 = 17{,}07\ldots$
$x_3 = 69{,}63\ldots$

Der Gewinnbereich lautet: [17,1; 69,6].

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung

b) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der fehlenden Teilfläche
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Gewinnfunktion
1 × B1: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Gewinnbereichs

Dreieckspannung*

Aufgabennummer: B_414

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Gegeben ist folgender periodischer dreieckförmiger Spannungsverlauf:

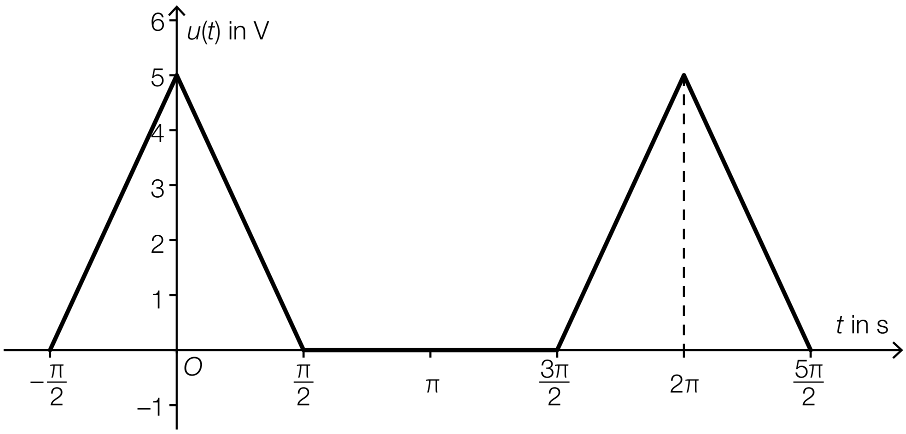
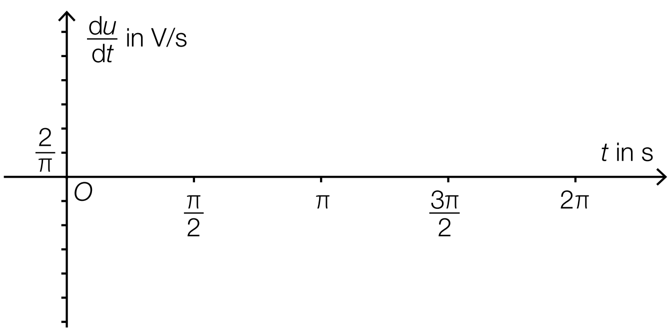


Abbildung 1

a) – Erstellen Sie die Funktionsgleichungen des in Abbildung 1 dargestellten dreieckförmigen Spannungsverlaufs auf geeigneten Teilintervallen des Bereichs $0 \leq t \leq 2\pi$.
– Berechnen Sie den Effektivwert des in Abbildung 1 dargestellten dreieckförmigen Spannungsverlaufs.
– Veranschaulichen Sie die Ableitungsfunktion des in Abbildung 1 dargestellten dreieckförmigen Spannungsverlaufs im Intervall $0 \leq t \leq 2\pi$ im nachstehenden Diagramm.



* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der in Abbildung 1 dargestellte dreieckförmige Spannungsverlauf kann mithilfe einer Fourier-Reihe beschrieben werden.

– Argumentieren Sie anhand der grafischen Darstellung, warum die Fourier-Koeffizienten der Sinusschwingungen 0 sein müssen.
– Ermitteln Sie den Gleichanteil der in obiger Abbildung 1 dargestellten Spannung.

c) Der in der nachstehenden Abbildung 2 dargestellte rechteckförmige Spannungsverlauf mit Periode 2π hat einen Gleichanteil von 3 Volt (V).

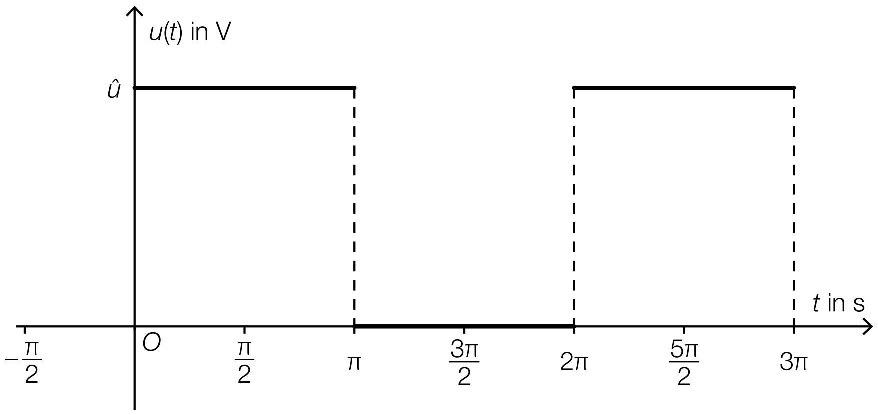


Abbildung 2

– Bestimmen Sie $\hat{u}$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

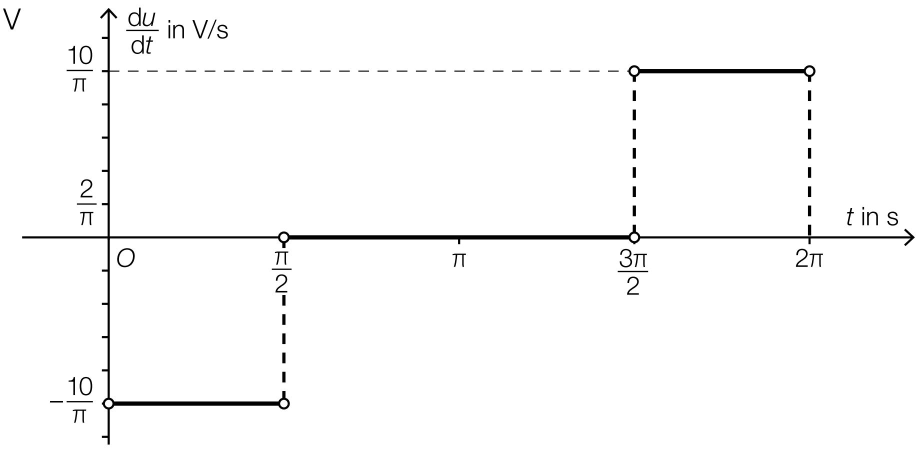
Möglicher Lösungsweg

a) $$u(t) = \begin{cases} -\frac{10}{\pi} \cdot t + 5 & \text{für } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{10}{\pi} \cdot t - 15 & \text{für } \frac{3\pi}{2} \leq t < 2\pi \end{cases}$$

$$u_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{10}{\pi} \cdot t + 5\right)^2 \mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 0^2 \,\mathrm{d}t + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(\frac{10}{\pi} \cdot t - 15\right)^2 \mathrm{d}t\right]$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$u_{\text{eff}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$ V ≈ 2,04 V



Die Ableitungsfunktion $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ist an den Sprungstellen nicht definiert. Es ist nicht gefordert, diese Definitionslücken zu berücksichtigen.

b) Da der dargestellte Spannungsverlauf symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse ist, handelt es sich um eine gerade Funktion. Daher sind die Fourier-Koeffizienten der Sinusschwingungen null.

$\overline{u} = \frac{1}{2\pi} \cdot 5 \cdot \frac{\pi}{2}$ V = 1,25 V

c) $\hat{u} = 6$ V

Lösungsschlüssel

a) $1 \times$ A1: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung im Intervall $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$
$1 \times$ A2: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung im Intervall $\frac{3\pi}{2} \leq t < 2\pi$
$1 \times$ B: für die richtige Berechnung des Effektivwerts
$1 \times$ A3: für das richtige Veranschaulichen der Ableitungsfunktion (Es ist nicht gefordert, die Definitionslücken zu berücksichtigen.)

b) $1 \times$ D: für die richtige Argumentation
$1 \times$ B: für das richtige Ermitteln des Gleichanteils

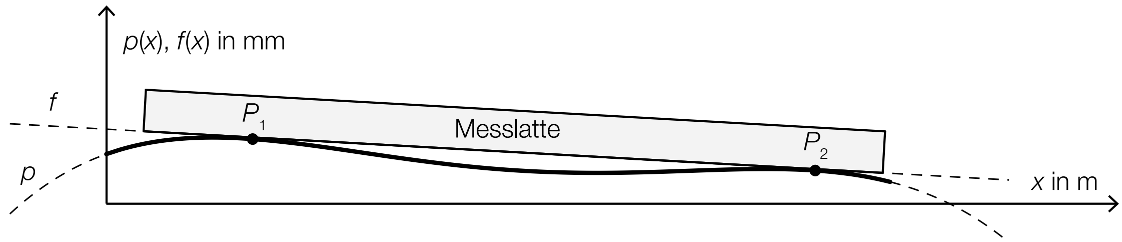
c) $1 \times$ A: für das richtige Bestimmen von $\hat{u}$

Bodenunebenheiten*

Aufgabennummer: B_405

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um Unebenheiten eines Bodens festzustellen, wird eine Messlatte verwendet.



Das Profil des Bodens kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion p beschrieben werden, die Unterkante der Messlatte kann durch den Graphen einer linearen Funktion f beschrieben werden.

a) Die Messlatte berührt den Boden in den Punkten $P_1 = (x_1|p(x_1))$ und $P_2 = (x_2|p(x_2))$. Die Steigung der linearen Funktion f ist k.

Eine der folgenden Aussagen stimmt nicht mit der obigen Abbildung überein.

– Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$k = \frac{p(x_2) - p(x_1)}{x_2 - x_1}$	☐
$p'(x_1) = 0$	☐
$p'(x_2) = k$	☐
$p'(x_1) = p'(x_2)$	☐
$f(x_1) = p(x_1)$	☐

b) – Begründen Sie, warum der Grad der in der obigen Abbildung dargestellten Polynomfunktion p größer oder gleich 4 sein muss.

* ehemalige Klausuraufgabe

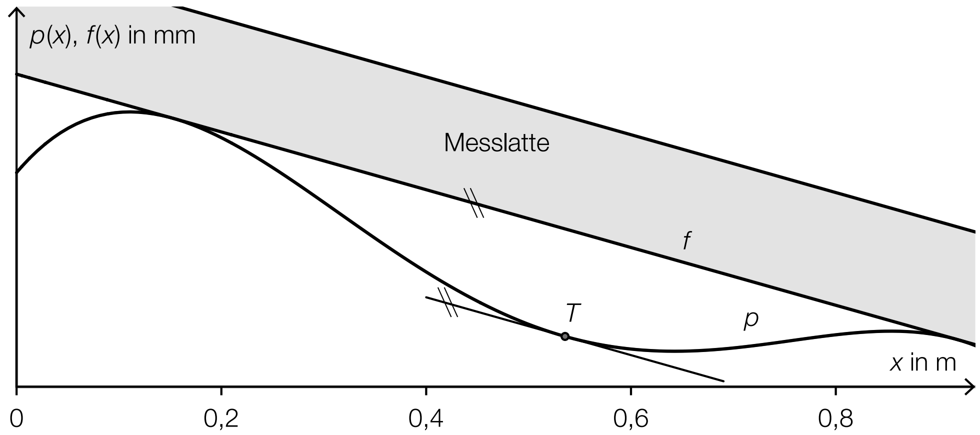
c) Der Graph der Polynomfunktion p mit $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ verläuft durch die folgenden 5 Punkte:

$A = (0|1{,}8)$, $B = (0{,}25|2{,}1)$, $C = (0{,}5|0{,}4)$, $D = (0{,}75|0{,}7)$, $E = (1|0{,}5)$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$ ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion p auf.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion p.

d) Um die Unebenheit eines anderen Bodens zu ermitteln, soll der Punkt T bestimmt werden. Im Punkt T ist die Tangente an den Graphen von p parallel zur Geraden f (siehe nachstehende Skizze).



Es gilt:

$p(x) = -70{,}000 \cdot x^4 + 150{,}000 \cdot x^3 - 100{,}000 \cdot x^2 + 17{,}000 \cdot x + 3{,}000$
$f(x) = -4{,}046 \cdot x + 4{,}378$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$, $f(x)$ ... vertikale Koordinate in Millimetern (mm)

– Erstellen Sie eine Gleichung, mit der die x-Koordinate des Punktes T berechnet werden kann.
– Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes T.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

$p'(x_1) = 0$	☒

b) Der Graph der Funktion hat mindestens 2 Wendepunkte.

oder:

Die Funktion hat mindestens 3 lokale Extrema.

oder:

Es gibt mindestens 4 Schnittpunkte mit einer geeigneten Geraden.

c) $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

I: $p(0) = 1{,}8$
II: $p(0{,}25) = 2{,}1$
III: $p(0{,}5) = 0{,}4$
IV: $p(0{,}75) = 0{,}7$
V: $p(1) = 0{,}5$

oder:

I: $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 1{,}8$
II: $a \cdot 0{,}25^4 + b \cdot 0{,}25^3 + c \cdot 0{,}25^2 + d \cdot 0{,}25 + e = 2{,}1$
III: $a \cdot 0{,}5^4 + b \cdot 0{,}5^3 + c \cdot 0{,}5^2 + d \cdot 0{,}5 + e = 0{,}4$
IV: $a \cdot 0{,}75^4 + b \cdot 0{,}75^3 + c \cdot 0{,}75^2 + d \cdot 0{,}75 + e = 0{,}7$
V: $a \cdot 1^4 + b \cdot 1^3 + c \cdot 1^2 + d \cdot 1 + e = 0{,}5$

Berechnung der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:

$a = -69{,}333...$
$b = 146{,}666...$
$c = -95{,}666...$
$d = 17{,}033...$
$e = 1{,}8$

d) $p'(x) = f'(x)$
$p'(x) = -4{,}046$

$-280 \cdot x^3 + 450 \cdot x^2 - 200 \cdot x + 17 = -4{,}046$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = 0{,}1527...)$
$x_2 = 0{,}5357...$
$(x_3 = 0{,}9187...)$

Die x-Koordinate des Punktes T ist 0,5357...

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × D: für die richtige Begründung

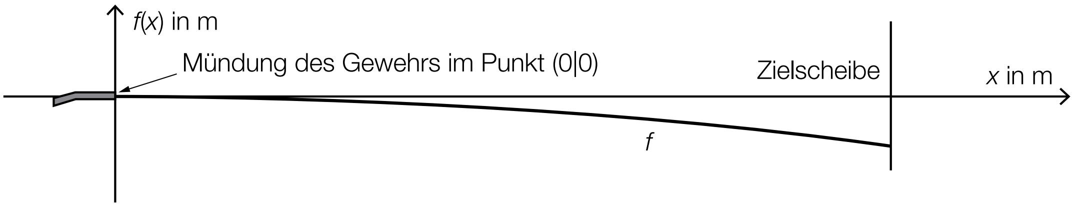
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

d) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung zur Berechnung der x-Koordinate des Punktes T
1 × B: für die richtige Berechnung der x-Koordinate des Punktes T

Flugbahnen*

Aufgabennummer: B_389		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Ein Gewehr wird so eingespannt, dass der Lauf des Gewehrs waagrecht verläuft. Beim Schießen auf eine Zielscheibe trifft das Projektil im Vergleich zur Abschusshöhe tiefer auf (siehe nachstehende Skizze).



Die Flugbahn eines Projektils kann unter Vernachlässigung des Luftwiderstands näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 2. Grades f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

– Begründen Sie, warum für die dargestellte Flugbahn gilt: $b = 0$ und $c = 0$.
– Begründen Sie anhand des Funktionsgraphen, warum a negativ sein muss.

Die Zielscheibe ist in horizontaler Richtung 100 Meter von der Mündung des Gewehrs entfernt.
Das Projektil trifft im Vergleich zur Abschusshöhe um 8 Zentimeter tiefer auf der Zielscheibe auf.

– Berechnen Sie den Parameter a.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Flugbahn eines schräg nach oben abgeschossenen Projektils kann durch den Graphen einer Funktion h beschrieben werden:

$$h(x) = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2$$

x … horizontal zurückgelegte Wegstrecke in Metern (m)
$h(x)$ ... Höhe an der Stelle x in m
v ... Abschussgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
g ... Erdbeschleunigung (konstant)
$0° < \alpha < 90°$ ... Abschusswinkel (gemessen von der Horizontalen)

Für eine spezielle Flugbahn gilt:

$$h(x) = 0{,}03492 \cdot x - \frac{g}{7{,}192 \cdot 10^5} \cdot x^2$$

– Bestimmen Sie die zugehörige Abschussgeschwindigkeit v.

c) Ein Geschoss, das unter einem Winkel α abgeschossen wird, trifft nach der Schussweite $x(\alpha)$ wieder auf dem Boden auf. Dabei gilt näherungsweise:

$$x(\alpha) = \frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

α … Abschusswinkel mit $0° < \alpha < 90°$
$x(\alpha)$ … Schussweite bei einem Abschusswinkel α in m
v ... Abschussgeschwindigkeit in m/s
g ... Erdbeschleunigung (konstant)

– Berechnen Sie denjenigen Winkel, bei dem die Schussweite am größten ist.
– Zeigen Sie mithilfe der 2. Ableitung, dass für diesen berechneten Winkel die Schussweite maximal sein muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Da sich der Scheitel der dargestellten Parabel im Ursprung des Koordinatensystems befindet, gilt: $b = 0$ und $c = 0$.

Da der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist, gilt: $a < 0$.

$-0{,}08 = a \cdot 100^2 \;\Rightarrow\; a = -8 \cdot 10^{-6}$

b) Koeffizientenvergleich:
$0{,}03492 = \tan(\alpha) \;\Rightarrow\; \alpha = 1{,}99\ldots°$

$7{,}192 \cdot 10^5 = 2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(1{,}99\ldots°) \;\Rightarrow\; v = 600{,}0\ldots \approx 600$

Die Abschussgeschwindigkeit beträgt rund 600 m/s.

c) $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha} = 0$:

$\frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] = 0 \;\Rightarrow\; \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \;\Rightarrow\; \alpha = 45°$

$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\alpha^2} < 0$ für $\alpha = 45°$:

$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\alpha^2} = -\frac{8 \cdot v^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) < 0$, wenn $0 < \alpha < 90°$

Lösungsschlüssel

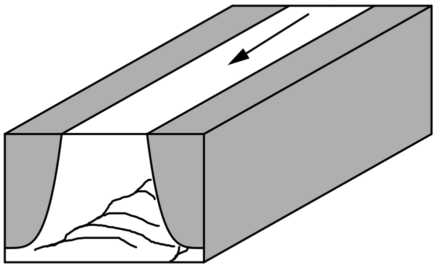
a) 1 × D1: für die richtige Begründung zu den Parametern *b* und *c*
1 × D2: für die richtige Begründung zum Vorzeichen des Parameters *a*
1 × B: für die richtige Berechnung des Parameters *a*

b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung von α (Koeffizientenvergleich)
1 × B: für die richtige Berechnung der Abschussgeschwindigkeit

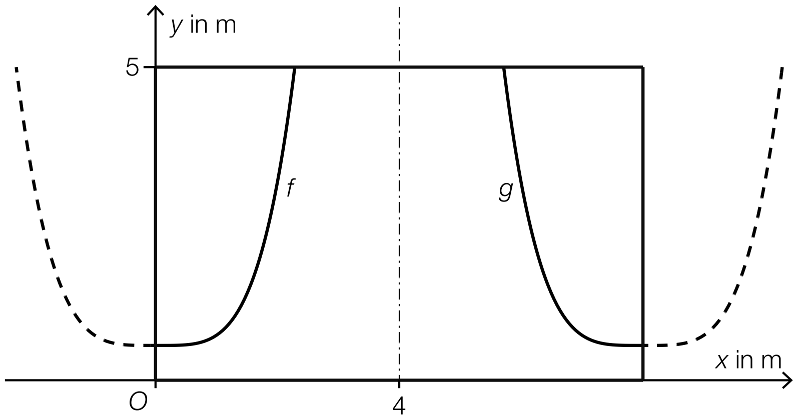
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels
1 × D: für den richtigen Nachweis

Sandfang einer Kläranlage

In einer Kläranlage strömt das Abwasser langsam durch den sogenannten *Sandfang*. Dabei sinken Sand und kleine Steine auf den Boden und können somit abgeschieden werden (siehe nebenstehende Abbildung).



a) In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt eines Sandfangs dargestellt.



Die Graphen der Funktionen f und g beschreiben einen Teil des oben dargestellten Querschnitts.

$f(x) = 0{,}25 \cdot x^4 + 1$

$g(x) = a \cdot (x - u)^4 + v$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in m

a, u, v ... Parameter

Die Graphen der Funktionen f und g sind zueinander symmetrisch bezüglich der Senkrechten bei $x = 4$.

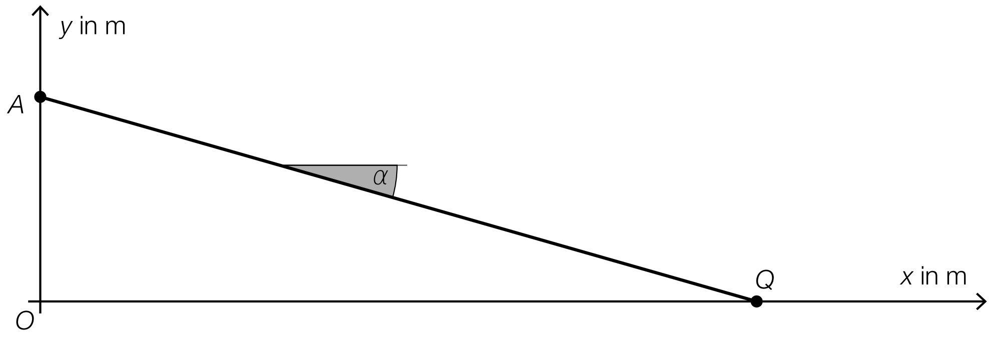
1) Geben Sie die Werte der Parameter a, u und v der Funktion g an.

$a =$ ____________________

$u =$ ____________________

$v =$ ____________________ *[0/1 P.]*

b) Das Abwasser durchströmt den Sandfang. Dabei sinken die im Abwasser enthaltenen Sandkörner zu Boden. In der nachstehenden Abbildung ist ein stark vereinfachtes Modell dieses Vorgangs für ein bestimmtes Sandkorn dargestellt.



Das Sandkorn bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit vom Punkt A zum Punkt Q.
Die Position X des Sandkorns zur Zeit t (in Sekunden) wird beschrieben durch:

$$X = A + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ v_y \end{pmatrix}$$

v_y ist die senkrechte Komponente des Geschwindigkeitsvektors dieses Sandkorns (in m/s).

1) Stellen Sie mithilfe von v_y eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

$\alpha =$ ____ *[0/1 P.]*

Es gilt: $A = (0|4)$ und $Q = (15|0)$

2) Berechnen Sie v_y. *[0/1 P.]*

c) Die Sinkgeschwindigkeit eines Steinchens in einer Flüssigkeit kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - k \cdot v$
t ... Zeit
$v(t) \geq 0$ ... Sinkgeschwindigkeit
g, k ... positive Konstanten

1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. *[0/1 P.]*

Die Sinkgeschwindigkeit des Steinchens nähert sich dabei dem Wert v_E.

2) Geben Sie v_E an.

v_E = ____________________ *[0/1 P.]*

Die Eigenschaften der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v und der zugehörigen Beschleunigung-Zeit-Funktion a hängen unter anderem von der Anfangsbedingung ab.

3) Ordnen Sie den beiden Anfangsbedingungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

$v(0) = 0$	
$v(0) = \frac{2 \cdot g}{k}$	

A	v und a sind streng monoton steigend.
B	v ist streng monoton steigend und a ist streng monoton fallend.
C	v und a sind streng monoton fallend.
D	v ist streng monoton fallend und a ist streng monoton steigend.

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = 0{,}25$
$u = 8$
$v = 1$

a1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Parameter a, u und v.

b1) $\alpha = \arctan\left(\frac{v_y}{0{,}3}\right)$

Auch die Formel $\alpha = \arctan\left(\frac{-v_y}{0{,}3}\right)$ *ist als richtig zu werten.*

b2) $15 = 0 + t \cdot 0{,}3$
$t = 50$

$0 = 4 + 50 \cdot v_y$
$v_y = -0{,}08$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von v_y.

c1) $\int \frac{\mathrm{d}v}{g - k \cdot v} = \int \mathrm{d}t$ *oder* $\int \frac{v'}{g - k \cdot v}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t$

$\frac{\ln|g - k \cdot v(t)|}{-k} = t + C_1$

$g - k \cdot v(t) = e^{-k \cdot t} \cdot C_2$

$v(t) = \frac{g}{k} - C \cdot e^{-k \cdot t}$

c2) $v_E = \frac{g}{k}$

c3)

$v(0) = 0$	B
$v(0) = \frac{2 \cdot g}{k}$	D

A	*v* und *a* sind streng monoton steigend.
B	*v* ist streng monoton steigend und *a* ist streng monoton fallend.
C	*v* und *a* sind streng monoton fallend.
D	*v* ist streng monoton fallend und *a* ist streng monoton steigend.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
c2) Ein Punkt für das richtige Angeben von v_E.
c3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Leistungsdiagnostik im Sport*

Aufgabennummer: B_417

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei höherer Belastung benötigt der Körper mehr Sauerstoff und produziert als „Abfallprodukt“ Laktat.

Ab einer gewissen Laktatkonzentration ist das Herz-Kreislauf-System nicht mehr in der Lage, die arbeitenden Muskeln mit genügend Sauerstoff zu versorgen. Diese Laktatkonzentration heißt *anaerobe Schwelle*.

a) Für einen bestimmten Sportler kann die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beim Laufen näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = 0{,}0461 \cdot e^{0{,}29 \cdot x} + 0{,}9$

x ... Geschwindigkeit beim Laufen in Kilometern pro Stunde (km/h)
$f(x)$ ... Laktatkonzentration bei der Geschwindigkeit x in Millimol pro Liter Blut (mmol/L)

Erreicht die Laktatkonzentration die anaerobe Schwelle, so beträgt der Steigungswinkel von f an dieser Stelle 45°.

– Bestimmen Sie die anaerobe Schwelle dieses Sportlers.

b) Bei einem bestimmten Sportler wird die Herzschlagfrequenz in Abhängigkeit von der Laufgeschwindigkeit bestimmt:

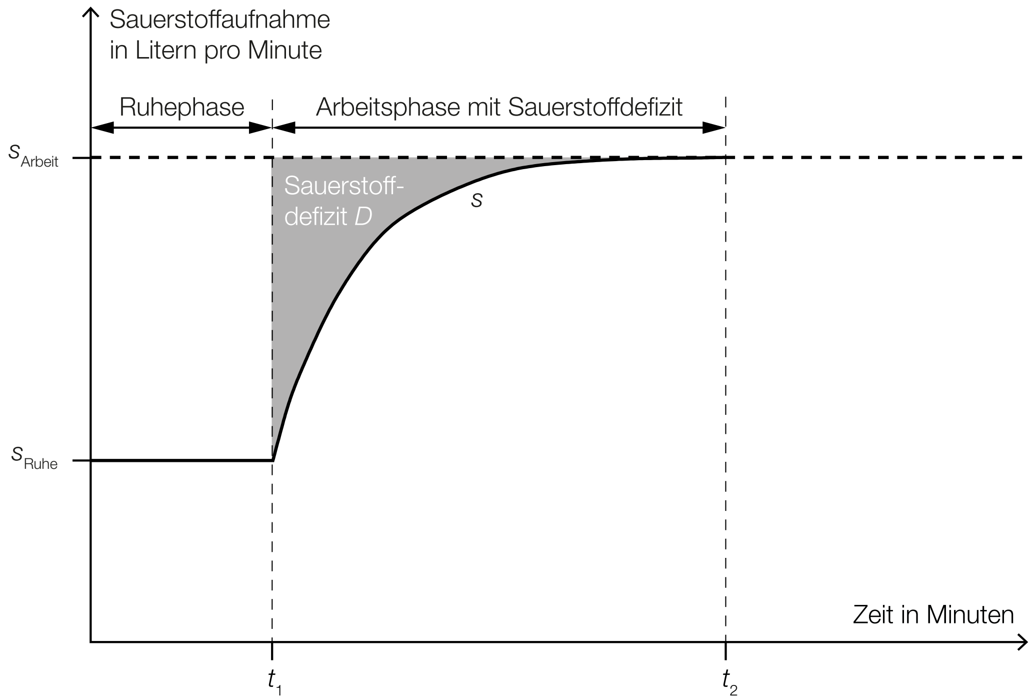
Laufgeschwindigkeit in Kilometern pro Stunde	11,0	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5
Herzschlagfrequenz in min^{-1}	140	150	162	168	175	182	190	200

Die Herzschlagfrequenz in Abhängigkeit von der Laufgeschwindigkeit soll mithilfe einer linearen Ausgleichsfunktion beschrieben werden.

– Bestimmen Sie eine Gleichung dieser linearen Ausgleichsfunktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Nach Beginn einer körperlichen Belastung beim Sport (Arbeitsphase) passt sich das Atmungssystem nur verzögert dem erhöhten Sauerstoffbedarf an. Erst nach einigen Minuten wird eine ausreichende Versorgung erreicht. Bis dahin kommt es zu einem Sauerstoffdefizit.



– Stellen Sie eine Formel auf, mit der man das Sauerstoffdefizit D (grau markierte Fläche in obiger Skizze) berechnen kann, wenn eine Gleichung der Funktion s bekannt ist.

D = ____

– Geben Sie die Einheit von D an.

d) Das Absinken der Sauerstoffaufnahme nach Beendigung einer körperlichen Belastung beim Sport kann mit der folgenden Differenzialgleichung beschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -1{,}386 \cdot (y - 0{,}3)$$

t ... Zeit nach Beendigung der körperlichen Belastung in Minuten (min)
$y(t)$ ... Sauerstoffaufnahme zur Zeit t in Litern pro Minute (L/min)

– Lösen Sie diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Eine Tangentensteigung von 45° entspricht $f'(x) = 1$.

$0{,}013369 \cdot e^{0{,}29 \cdot x} = 1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 14{,}878... \approx 14{,}88$

$f(14{,}878...) = 4{,}348...$

Die anaerobe Schwelle dieses Sportlers liegt bei rund 4,35 mmol/L.

b) Bestimmen der Gleichung der linearen Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(x) = 16{,}36 \cdot x - 37{,}68$ *(Koeffizienten gerundet)*

x ... Laufgeschwindigkeit in km/h
$f(x)$ ... Herzschlagfrequenz bei der Laufgeschwindigkeit x in min^{-1}

c) $D = (t_2 - t_1) \cdot s_{\text{Arbeit}} - \int_{t_1}^{t_2} s(t)\,\mathrm{d}t$

oder:

$D = \int_{t_1}^{t_2} [s_{\text{Arbeit}} - s(t)]\,\mathrm{d}t$

Die Einheit von D lautet:
$\frac{\text{L}}{\text{min}} \cdot \text{min} = \text{L}$

d) $\frac{\mathrm{d}y}{y - 0{,}3} = -1{,}386\,\mathrm{d}t$ $\left(\textit{oder: } \frac{y'}{y - 0{,}3} = -1{,}386\right)$
$\int \frac{\mathrm{d}y}{y - 0{,}3} = \int -1{,}386\,\mathrm{d}t$ $\left(\textit{oder: } \int \frac{y'(t)}{y(t) - 0{,}3}\,\mathrm{d}t = \int -1{,}386\,\mathrm{d}t\right)$
$\ln|y(t) - 0{,}3| = -1{,}386 \cdot t + C_1$
$y(t) = C_2 \cdot e^{-1{,}386 \cdot t} + 0{,}3$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Bestimmen der anaeroben Schwelle

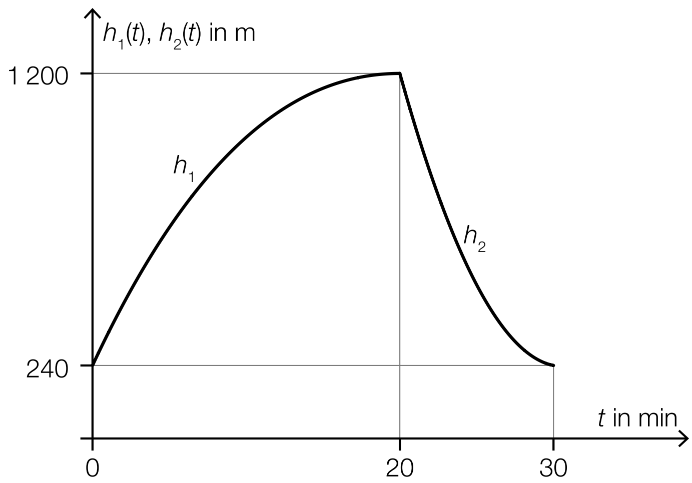
b) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Gleichung der linearen Ausgleichsfunktion

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel zur Berechnung von D
1 × C: für das richtige Angeben der Einheit von D

d) 1 × B: für das richtige Lösen der Differenzialgleichung

Ballonfahren

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel), in der sich ein Heißluftballon während einer bestimmten Fahrt befindet. Diese Seehöhe wird durch die Graphen der Funktionen h_1 und h_2 beschrieben.



Der Heißluftballon startet zur Zeit $t = 0$ in 240 m Seehöhe.

Für die 1. Ableitung von h_1 gilt:
$h_1'(t) = 0{,}09 \cdot t^2 - 7{,}2 \cdot t + 108$

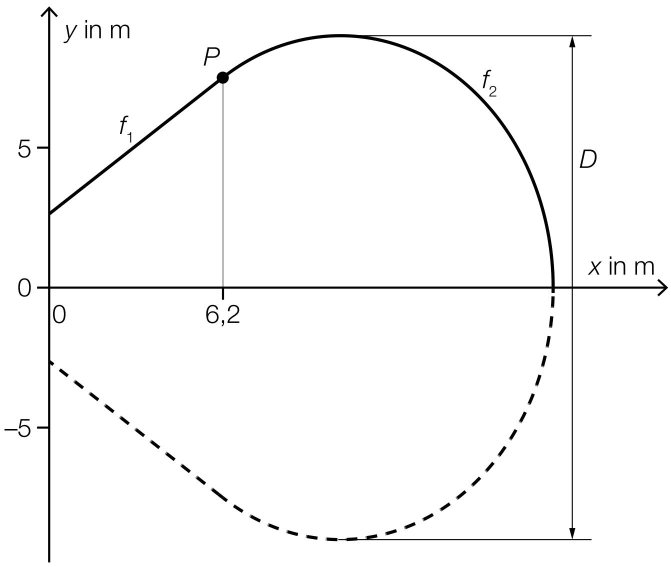
1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion h_1 auf. *[0/1 P.]*

Nach 20 min befindet sich der Heißluftballon in 1 200 m Seehöhe und beginnt mit dem Sinkflug. Die Höhe während des Sinkflugs wird durch den Graphen der quadratischen Funktion h_2 mit $h_2(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben. Nach 30 min landet der Heißluftballon mit einer Sinkgeschwindigkeit von 10 m/min auf 240 m Seehöhe.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c. *[0/1/2 P.]*

3) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c. *[0/1 P.]*

b) Die Form eines bestimmten Heißluftballons entsteht durch Rotation der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 um die x-Achse (siehe nachstehende Abbildung).



Für die Funktion f_2 gilt:

$$f_2(x) = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{-x^2 + 20{,}8 \cdot x - 50{,}4}$$

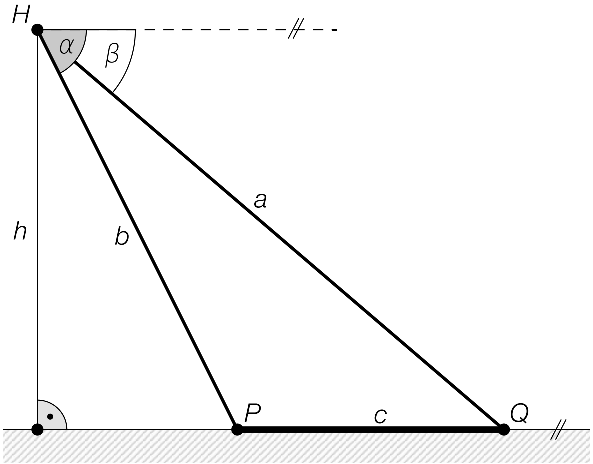
1) Berechnen Sie den maximalen Durchmesser D des Heißluftballons. *[0/1 P.]*

Der Graph der Funktion f_1 ist die Tangente an den Graphen der Funktion f_2 im Punkt P.

2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f_1 auf. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie das Volumen des Heißluftballons. *[0/1 P.]*

c) Bei einer bestimmten Ballonfahrt wird vom Punkt H aus der Punkt P unter dem Tiefenwinkel α und der Punkt Q unter dem Tiefenwinkel β gesehen.



1) Ordnen Sie den beiden Streckenlängen jeweils den zutreffenden Ausdruck zu deren Berechnung aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

b	
h	

A	$a \cdot \sin(\beta)$
B	$c \cdot \sin(\beta)$
C	$\frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$
D	$\sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)}$

Gegeben sind die Winkel $\alpha = 65°$ und $\beta = 23°$ sowie die Streckenlänge $c = 2800$ m.

2) Berechnen Sie h. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\int h_1'(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}03 \cdot t^3 - 3{,}6 \cdot t^2 + 108 \cdot t + C$

$h_1(0) = 240 \quad \Rightarrow \quad C = 240$
$h_1(t) = 0{,}03 \cdot t^3 - 3{,}6 \cdot t^2 + 108 \cdot t + 240$

a2) $h_2'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$
I: $h_2(20) = 1\,200$
II: $h_2(30) = 240$
III: $h_2'(30) = -10$

oder:

I: $a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 1\,200$
II: $a \cdot 30^2 + b \cdot 30 + c = 240$
III: $2 \cdot a \cdot 30 + b = -10$

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 8{,}6$
$b = -526$
$c = 8\,280$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion h_1.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten a, b und c.

b1) $f_2'(x) = 0 \quad oder \quad \frac{5}{8} \cdot \frac{-2 \cdot x + 20{,}8}{\sqrt{-x^2 + 20{,}8 \cdot x - 50{,}4}} = 0$
$x = 10{,}4$
$D = 2 \cdot f_2(10{,}4) = 2 \cdot 9{,}5 = 19$

b2) $f_1(x) = k \cdot x + d$
$k = f_2'(6{,}2) = 0{,}8288...$

$f_2(6{,}2) = 7{,}917...$
$d = f_2(6{,}2) - 6{,}2 \cdot k = 2{,}778...$

$f_1(x) = 0{,}8288... \cdot x + 2{,}778...$

b3) $f_2(x) = 0 \quad oder \quad \frac{5}{4} \cdot \sqrt{-x^2 + 20{,}8 \cdot x - 50{,}4} = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = 2{,}8) \quad x_2 = 18$

$V = \pi \cdot \left(\int_0^{6{,}2} (f_1(x))^2 \, dx + \int_{6{,}2}^{18} (f_2(x))^2 \, dx\right) = 3\,106{,}1...$
Das Volumen des Heißluftballons beträgt rund 3 106 m³.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des maximalen Durchmessers *D*.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion f_1.
b3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Volumens des Heißluftballons.

c1)

b	D
h	A

A	$a \cdot \sin(\beta)$
B	$c \cdot \sin(\beta)$
C	$\frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$
D	$\sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)}$

c2) $\frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\alpha - \beta)}$

$b = \frac{c \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{2\,800 \cdot \sin(23°)}{\sin(42°)} = 1\,635{,}0...$
$h = b \cdot \sin(\alpha) = 1\,635{,}0... \cdot \sin(65°) = 1\,481{,}8...$

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *h*.

Servomotor*

Aufgabennummer: B_213

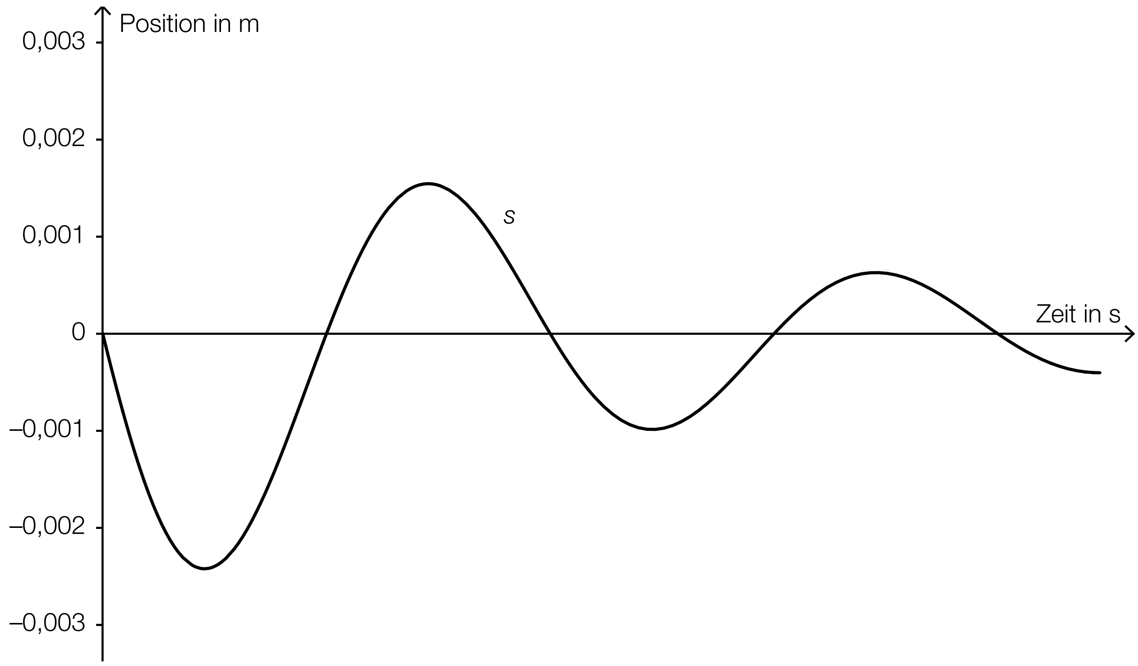
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Servomotor steuert die Bewegung eines Bauteils. Diese kann näherungsweise durch folgende Funktion s beschrieben werden:

$s(t) = -0{,}003 \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$s(t)$ ... Position des Bauteils bezogen auf die Ausgangslage zum Zeitpunkt t in Metern (m)

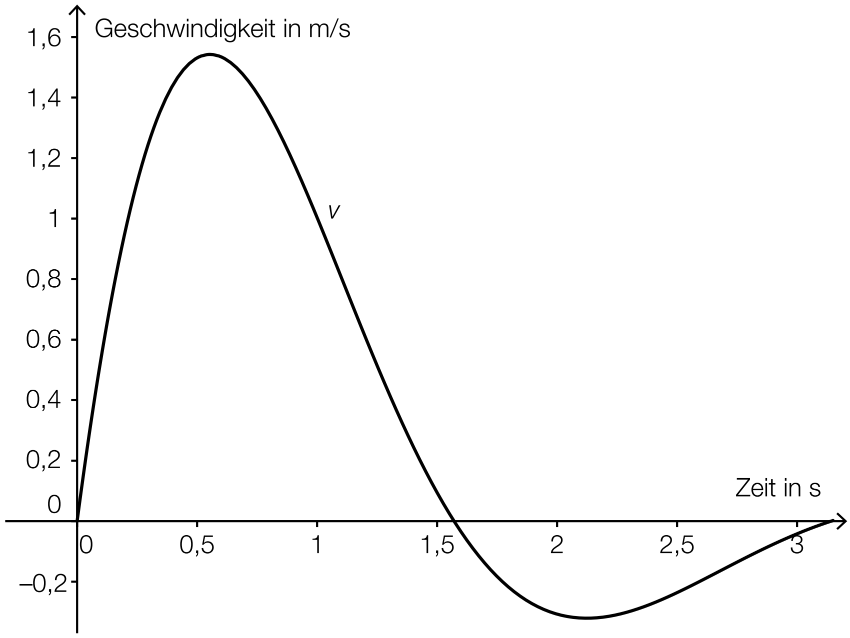
Der Graph der Funktion s ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Markieren Sie die Stelle $t = \frac{\pi}{7}$ in der obigen Abbildung.
– Interpretieren Sie die Stelle $t = \frac{\pi}{7}$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt dieser Bewegung, zu dem die Geschwindigkeit erstmals null beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Werkstück wird von einem Servomotor auf einem geradlinigen Förderband vor- und zurückbewegt. Das zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

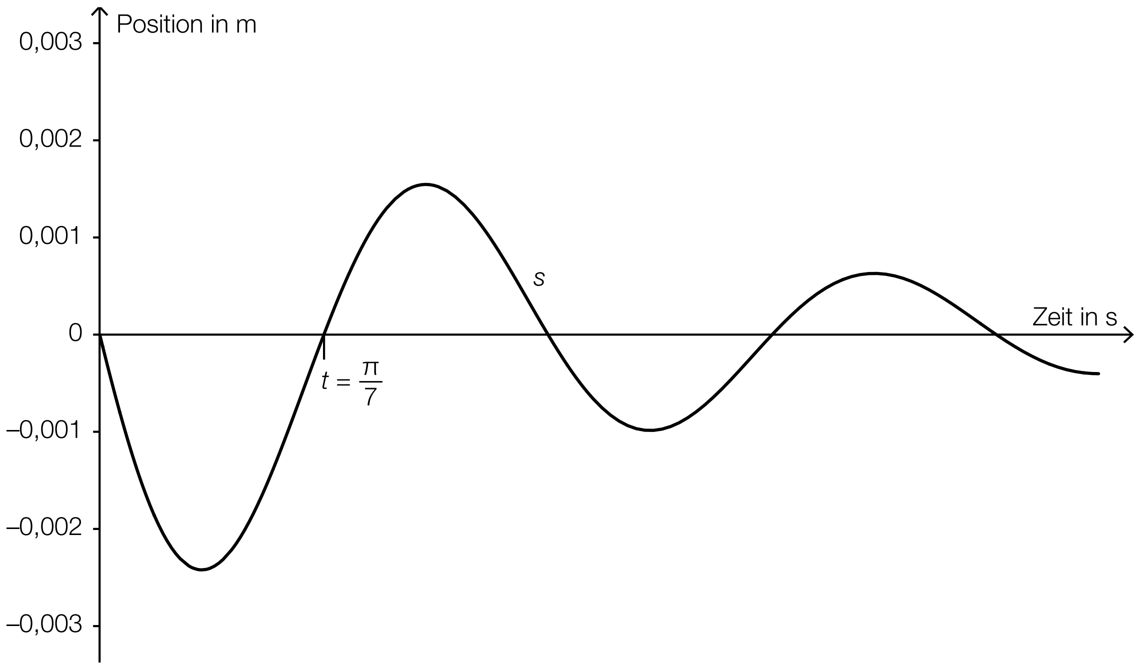


– Markieren Sie in der obigen Abbildung das gesamte Zeitintervall, in dem die Beschleunigung negativ ist.
– Erklären Sie anhand der obigen Abbildung, warum die Position des Werkstücks am Ende der Bewegung nicht der Position am Anfang der Bewegung entspricht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

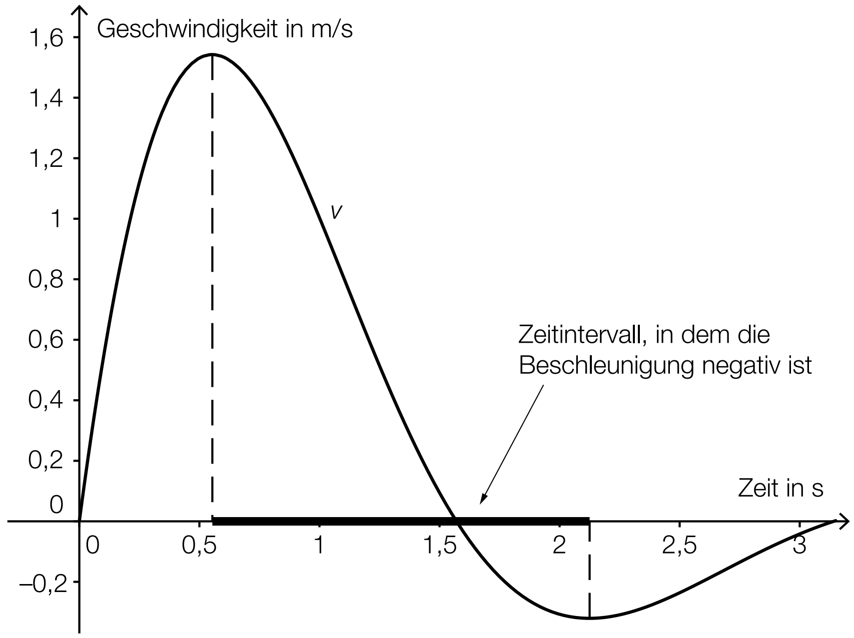


Nach $\frac{\pi}{7}$ Sekunden befindet sich das Bauteil erstmals wieder in der Ausgangslage.

Zeitpunkte mit Geschwindigkeit 0 ergeben sich aus: $s'(t) = 0$.

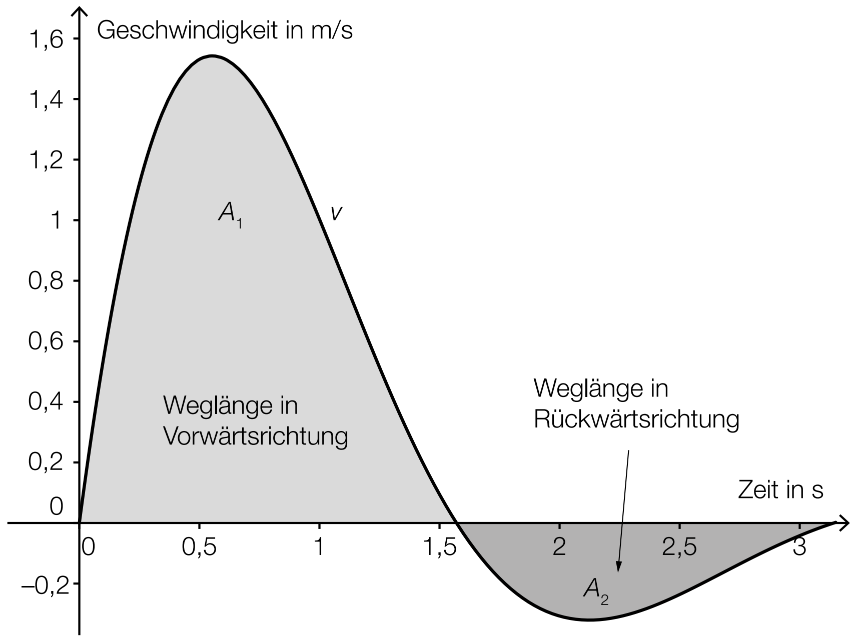
Lösung mittels Technologieeinsatz (für den ersten Zeitpunkt mit $s'(t) = 0$):
$t = 0{,}204...$
Nach etwa 0,20 Sekunden ist die Geschwindigkeit erstmals null.

b)



Da der Flächeninhalt oberhalb der Zeitachse (= Weglänge in Vorwärtsrichtung) deutlich größer ist als jener unterhalb der Zeitachse (= Weglänge in Rückwärtsrichtung), befindet sich das Werkstück am Ende der Bewegung nicht wieder in der Ausgangsposition.

oder:



$A_1 > A_2$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Markieren der Stelle $t = \frac{\pi}{7}$
1 × C2: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Bestimmung der ersten Extremstelle von s

b) 1 × C: für das richtige Markieren des Zeitintervalls zwischen den Extremstellen
1 × D: für die richtige Erklärung

Bügeleisen*

Aufgabennummer: B_217

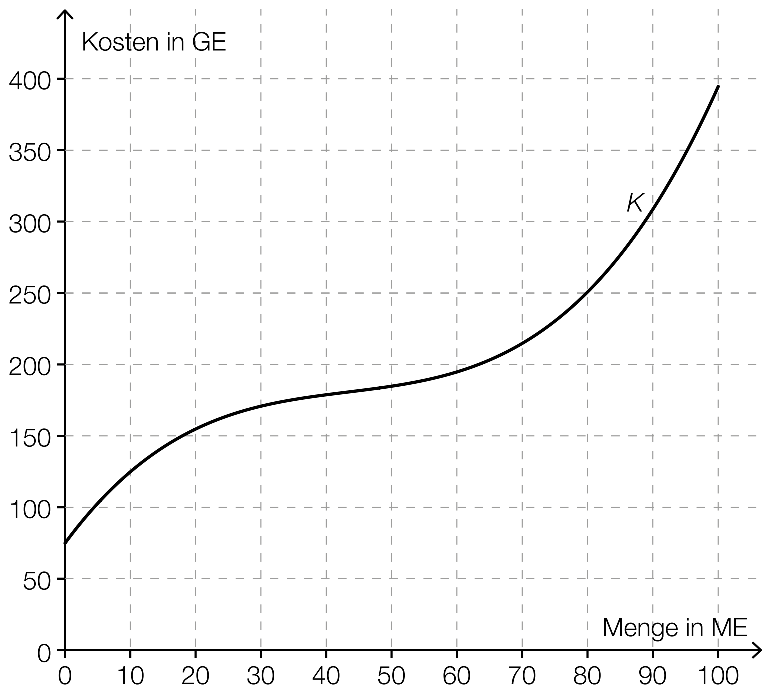
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75$ mit $x \geq 0$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

a) Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.



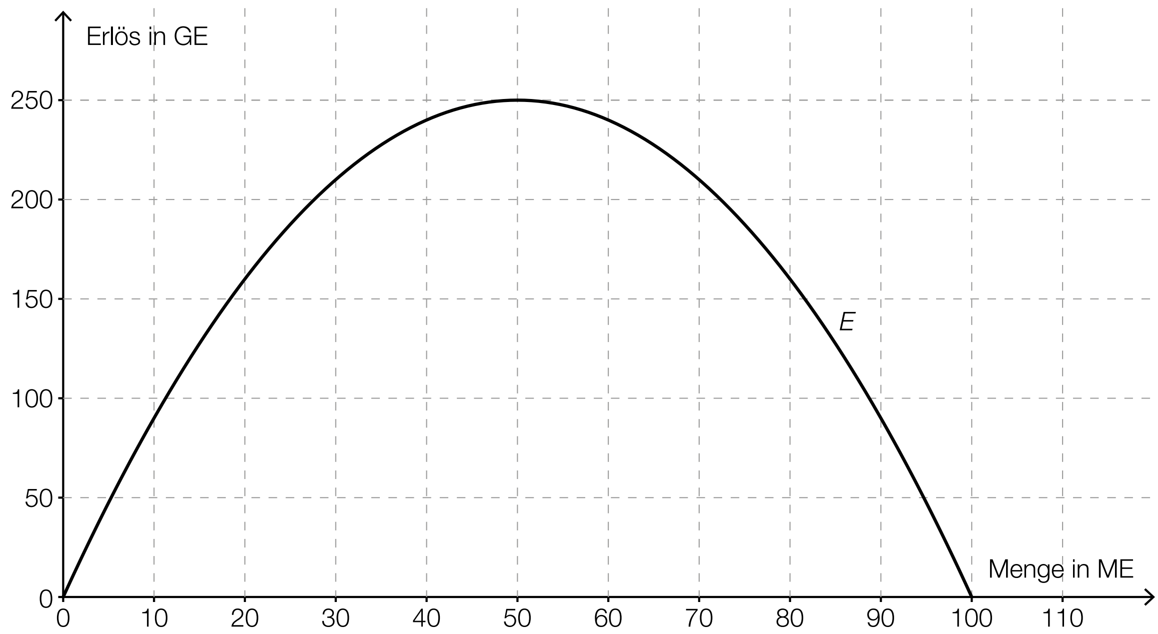
Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) – Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.
– Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind.

c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



– Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss.
– Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf.
– Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Intervall [0; 43] ist der Kostenverlauf degressiv.
Toleranzbereich der oberen Grenze: [40; 50]

b) $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}001 \cdot x^2 - 0{,}13 \cdot x + 6{,}2 + \frac{75}{x}$

$\overline{K}'(x) = 0{,}002 \cdot x - 0{,}13 - \frac{75}{x^2}$
$\overline{K}'(x_{opt}) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $x_{opt} = 72{,}19...$
Bei einer Produktion von rund 72,2 ME sind die Stückkosten minimal.

$\overline{K}(x_{opt}) = K'(x_{opt})$
minimale Stückkosten bei dieser Produktionsmenge: $\overline{K}(72{,}2) = 3{,}06...$
Grenzkosten bei dieser Produktionsmenge: $K'(72{,}2) = 3{,}06...$

Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) Der Koeffizient a muss negativ sein, weil der Funktionsgraph eine nach unten geöffnete Parabel ist.

$E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$
$E(100) = 0$
$E(50) = 250$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x$

$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x - (0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75)$
$G(x) = -0{,}001 \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 + 3{,}8 \cdot x - 75$

$G(x) = 50$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 34{,}17...,\ x_2 = 58{,}42...$
Bei einer Produktion von rund 34,2 ME bzw. rund 58,4 ME kann jeweils ein Gewinn von 50 GE erzielt werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des gesamten Bereichs, in dem der Kostenverlauf degressiv ist

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Produktionsmenge, bei der die Stückkosten minimal sind
1 × D: für den richtigen Nachweis
Auch ein allgemeiner Nachweis ist zulässig.

c) 1 × D: für die richtige Argumentation mithilfe des Funktionsgraphen
1 × A: für das richtige Aufstellen der Gleichung der Erlösfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung

Sport und Gesundheit*

Aufgabennummer: B_254

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Höhe eines Golfballs über dem horizontalen Boden in Abhängigkeit von der Zeit seit dem Abschlag kann näherungsweise durch eine Funktion h beschrieben werden:

$$h(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$$

t ... Zeit seit dem Abschlag in s
$h(t)$ ... Höhe des Golfballs über dem Boden zur Zeit t in m
v_0 ... Abschlaggeschwindigkeit in m/s
α ... Abschlagwinkel
g ... Erdbeschleunigung in m/s² (konstant)

– Zeigen Sie, dass der Golfball zur Zeit $t = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$ die maximale Höhe über dem Boden erreicht.
– Berechnen Sie für $v_0 = 60$ m/s, $\alpha = 30°$ und $g = 9{,}81$ m/s² denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Golfball wieder auf dem Boden aufkommt.

Die Schlagweite w (in m) kann mithilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$w = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$$

– Argumentieren Sie ausgehend von dieser Formel, dass bei konstanter Abschlaggeschwindigkeit v_0 die Schlagweite maximal ist, wenn $\alpha = 45°$ beträgt.
– Geben Sie an, wie sich die Schlagweite bei konstantem Abschlagwinkel α verändert, wenn man die Abschlaggeschwindigkeit v_0 verdreifacht.

b) Die *Vitalkapazität* ist eine Kenngröße für die Funktion der Lunge.

Ein sportmedizinisches Institut berechnet den Sollwert der Vitalkapazität eines erwachsenen Mannes mithilfe folgender Formel:

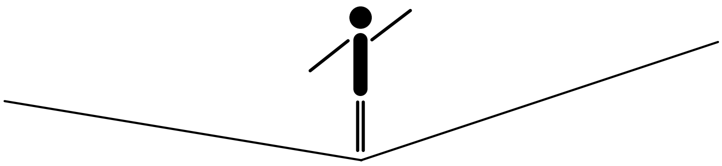
$$V_m = (27{,}63 - 0{,}112 \cdot x) \cdot y$$

V_m ... Sollwert der Vitalkapazität in cm³
x ... Alter in Jahren
y ... Körpergröße in cm

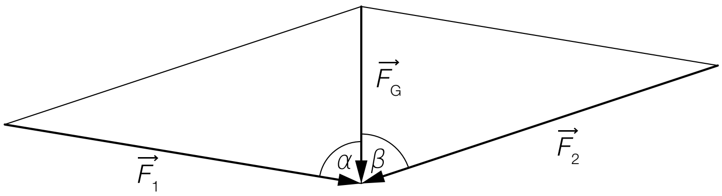
– Ermitteln Sie, um wie viel Liter der Sollwert der Vitalkapazität eines 180 cm großen erwachsenen Mannes in einem Zeitraum von 10 Jahren sinkt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) *Slacklinen* ist eine Trendsportart, bei der man auf einem gespannten Gurtband, der sogenannten *Slackline*, balanciert.
Eine Slackline wird über einen See gespannt. Ein sportlicher Badegast versucht, über die Slackline den See zu queren, ohne dabei ins Wasser zu fallen.



Das zugehörige Kräfteparallelogramm ist nachfolgend dargestellt:



$\vec{F}_G$ ... Gewichtskraft der Person auf dem Seil
$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ ... Seilkräfte

Im Folgenden wird für Kräfte die Schreibweise $|\vec{F}| = F$ verwendet.

– Berechnen Sie F_2 für $F_G = 588{,}6$ Newton, $\alpha = 82°$ und $\beta = 75°$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $h'(t) = v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t$

$h'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$

(Da es sich beim Graphen der Funktion h *um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, muss der Nachweis, dass es sich dabei um eine Maximumstelle handelt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, nicht erbracht werden.)*

$0 = 60 \cdot \sin(30°) \cdot t - \frac{9{,}81}{2} \cdot t^2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$(t_1 = 0)$, $t_2 = 6{,}11...$

Der Golfball kommt nach etwa 6,1 s wieder auf dem Boden auf.

Die Wurfweite ist umso größer, je größer $\sin(2 \cdot \alpha)$ ist; der maximale Wert dieses Ausdrucks ist 1:

$\sin(2 \cdot \alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \alpha = 90° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°$

Die Schlagweite ist bei dreifacher Abschlaggeschwindigkeit 9-mal so groß.

b) Der Sollwert der Vitalkapazität sinkt um $0{,}112 \cdot 10 \cdot 180 \text{ cm}^3 = 0{,}2016 \text{ L}$.

c) $F_2 = \frac{588{,}6 \cdot \sin(82°)}{\sin(23°)} = 1\,491{,}7...$

$F_2 \approx 1\,492 \text{ N}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × D1: für den richtigen Nachweis zur maximalen Höhe
1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts
1 × D2: für die richtige Argumentation
1 × C: für die richtige Beschreibung

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln desjenigen Wertes, um den der Sollwert der Vitalkapazität sinkt
1 × A: für das richtige Übertragen des Ergebnisses in die Einheit Liter

c) 1 × B: für die richtige Berechnung von F_2

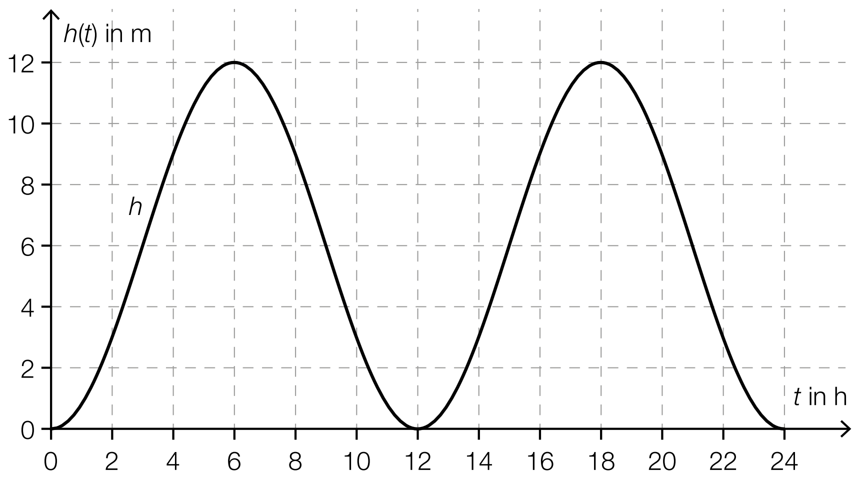
Ebbe und Flut*

Aufgabennummer: B_414

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ebbe und Flut beeinflussen die Höhe des Meeresspiegels.

a) Der tiefste Wasserstand wird als Niedrigwasser bezeichnet. Die zeitliche Abhängigkeit der Höhe des Wasserstands über diesem Wert kann näherungsweise durch eine Funktion h mit $h(t) = A + B \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Stunden und $B > 0$.



– Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und B ab.
– Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω.
– Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Wassertiefe in einem Hafenbecken kann näherungsweise durch die folgende Funktion H beschrieben werden:

$$H(t) = 6 + 1{,}8 \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$$

t ... Zeit nach Mitternacht in h
$H(t)$ ... Wassertiefe zur Zeit t in m

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 6 im gegebenen Sachzusammenhang.
– Berechnen Sie die Wassertiefe um 8:20 Uhr morgens.
– Geben Sie an, welche Zeitpunkte im gegebenen Sachzusammenhang durch die Lösungen der Gleichung $H'(t) = 0$ berechnet werden.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = 6$, $B = 6$
(keine Ablesetoleranz)

Die Periodendauer T ist 12, daher ergibt sich:

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

$t_0 = 3$ h und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

(*Jeder Wert* $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$ *ist als richtig zu werten.)*

b) Im Durchschnitt beträgt die Wassertiefe im Hafenbecken 6 m.

8:20 Uhr entspricht $t = \frac{25}{3}$

$H\left(\frac{25}{3}\right) = 5{,}15...$

Die Wassertiefe um 8:20 Uhr beträgt rund 5,2 m.
Man berechnet diejenigen Zeitpunkte (in h nach Mitternacht), zu denen der Wasserstand maximal bzw. minimal ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen von A und B
1 × B1: für das richtige Bestimmen von ω
1 × B2: für das richtige Bestimmen von φ

b) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Zahl 6 im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B: für die richtige Berechnung der Wassertiefe um 8:20 Uhr morgens
1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

Benutzerfreundlichkeit von Websites*

Aufgabennummer: B_422

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein für die Zeitoptimierung wichtiges Kriterium ist die Anzahl der Buttons, die auf einer Internetseite angeklickt werden können.

Das *Gesetz von Hick* beschreibt die Zeit, die man benötigt, um sich für einen von n Buttons zu entscheiden:

$t(n) = a + b \cdot \log_2(n)$

n ... Anzahl der Buttons
$t(n)$ ... Entscheidungszeit bei n Buttons in Millisekunden (ms)
a, b ... positive Konstanten in ms

– Ermitteln Sie anhand des Gesetzes von Hick, um wie viel sich die Entscheidungszeit vergrößert, wenn man die Anzahl der Buttons n verdoppelt.

b) Die Anzahl der täglichen Zugriffe auf eine bestimmte Website kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Eine Zufallsstichprobe von 10 Werten wurde erhoben:

9730	9932	8960	10488	9842	10340	10234	9549	9751	10190

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} dieser Zufallsstichprobe.
– Bestimmen Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Normalverteilung.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

Möglicher Lösungsweg

a) Entscheidungszeit bei Verdoppelung der Anzahl der Buttons:

$$t(2 \cdot n) = a + b \cdot \underbrace{\log_2(2 \cdot n)}_{= \log_2(2) + \log_2(n) = 1 + \log_2(n)} = a + b \cdot \left[1 + \log_2(n)\right] = a + b + b \cdot \log_2(n) = b + \underbrace{a + b \cdot \log_2(n)}_{= t(n)} = b + t(n)$$

Die Entscheidungszeit erhöht sich um b Millisekunden.

b) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 9\,901{,}6$
Stichprobenstandardabweichung: $s_{n-1} = 446{,}87...$

$$\mu_u = \bar{x} - t_{n-1;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = 9\,901{,}6 - 2{,}262... \cdot \frac{446{,}87...}{\sqrt{10}} = 9\,581{,}9...$$

$$\mu_o = \bar{x} + t_{n-1;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} = 9\,901{,}6 + 2{,}262... \cdot \frac{446{,}87...}{\sqrt{10}} = 10\,221{,}2...$$

95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert: [9582; 10221]

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Erhöhung der Entscheidungszeit

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Stichprobenmittelwertes und der Stichprobenstandardabweichung
1 × B2: für die richtige Bestimmung des Konfidenzintervalls

Wohnungen (1)*

Aufgabennummer: B_423

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder erstellt Statistiken zu den Trends auf dem Immobilienmarkt. Es werden die ortsüblichen Kaufpreise und Mieten erhoben. Die Höhe der Kaufpreise bzw. der Mieten hängt in der Regel stark von der Größe, der Ausstattung und der Lage der Wohnungen ab.

a) Für eine österreichische Landeshauptstadt hat der Fachverband der Immobilien- und Vermögenstreuhänder die Mietpreise in Euro pro m² für Wohnungen bis zu 60 m² mit gutem Wohnwert erhoben:

Ende des Jahres ...	Mietpreis in Euro pro m²
2003	8,10
2004	7,90
2005	8,20
2006	8,50
2007	8,80
2008	9,30
2009	9,60
2010	9,70
2011	10,30
2012	10,80

Der Mietpreis in Euro pro m² soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschrieben werden.

– Ermitteln Sie mithilfe von linearer Regression eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 2003.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.
– Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den Mietpreis pro m² für das Ende des Jahres 2018.

Ein anderes Modell verwendet zur Beschreibung der Mietpreisentwicklung die Funktion B.

$B(t) = 7{,}77 \cdot 1{,}035^t$

t ... Zeit in Jahren ab Ende des Jahres 2003
$B(t)$ ... Mietpreis zur Zeit t in Euro pro m²

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Parameters 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Laut einer Erhebung aus dem Jahr 2001 lebten im Bundesland Tirol in 303632 Wohnungen 661026 Personen. Die nachstehende Tabelle gibt die Anzahl dieser Wohnungen aufgelistet nach dem Merkmal „Anzahl der Wohnräume" an.

Anzahl der Wohnräume	Anzahl der Wohnungen
1	19372
2	28973
3	61002
4	80331
5	56878
6	57076
Summe	303632

– Beschreiben Sie in Worten, was durch folgende Ausdrücke im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:

(1) $\frac{661026}{303632} \approx 2{,}18$

(2) $\frac{1 \cdot 19372 + 2 \cdot 28973 + 3 \cdot 61002 + 4 \cdot 80331 + 5 \cdot 56878 + 6 \cdot 57076}{303632} \approx 3{,}98$

c) Der durchschnittliche Preis für Eigentumswohnungen mit gutem Wohnwert wurde in einer Landeshauptstadt jeweils am Ende des Jahres erhoben.

Die nachstehende Tabelle gibt die prozentuelle Steigerung des Preises pro m^2 am Ende des Jahres gegenüber dem Preis pro m^2 am Ende des jeweiligen Vorjahres für die Jahre 2009 bis 2013 an.

Ende des Jahres ...	Preissteigerung gegenüber dem Preis pro m^2 am Ende des jeweiligen Vorjahres
2009	5,5 %
2010	1,2 %
2011	7,1 %
2012	6,7 %
2013	5,4 %

Am Ende des Jahres 2013 kostete eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert durchschnittlich € 3.362 pro m^2.

– Berechnen Sie den durchschnittlichen Preis pro m^2 für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert am Ende des Jahres 2010.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Lösung mittels Technologieeinsatz:
$M(t) = 0{,}32 \cdot t + 7{,}69$ (Koeffizienten gerundet)

Die Mietpreise pro m^2 sind im angegebenen Zeitraum um durchschnittlich rund € 0,32 pro Jahr angestiegen.

$M(15) = 12{,}454... \approx 12{,}45$
Gemäß diesem Modell beträgt der Mietpreis pro m^2 am Ende des Jahres 2018 rund € 12,45.

Der Änderungsfaktor 1,035 gibt an, dass die Mietpreise pro m^2 jährlich um 3,5 % steigen.

b) Der Ausdruck (1) gibt die durchschnittliche Anzahl der Personen pro Wohnung (rund 2,18) an.
Der Ausdruck (2) gibt die durchschnittliche Anzahl der Wohnräume pro Wohnung (rund 3,98) an.

c) $\frac{3362}{1{,}054 \cdot 1{,}067 \cdot 1{,}071} = 2791{,}2... \approx 2791$
Der durchschnittliche Preis pro m^2 für eine Eigentumswohnung mit gutem Wohnwert lag am Ende des Jahres 2010 bei rund € 2.791.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln einer Gleichung der Regressionsfunktion
1 × C1: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für das Ende des Jahres 2018
1 × C2: für die richtige Interpretation des Werts 1,035 im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (1) im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Beschreibung von Ausdruck (2) im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Preises pro m^2 am Ende des Jahres 2010

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Im Möbelhaus*

Aufgabennummer: B_427

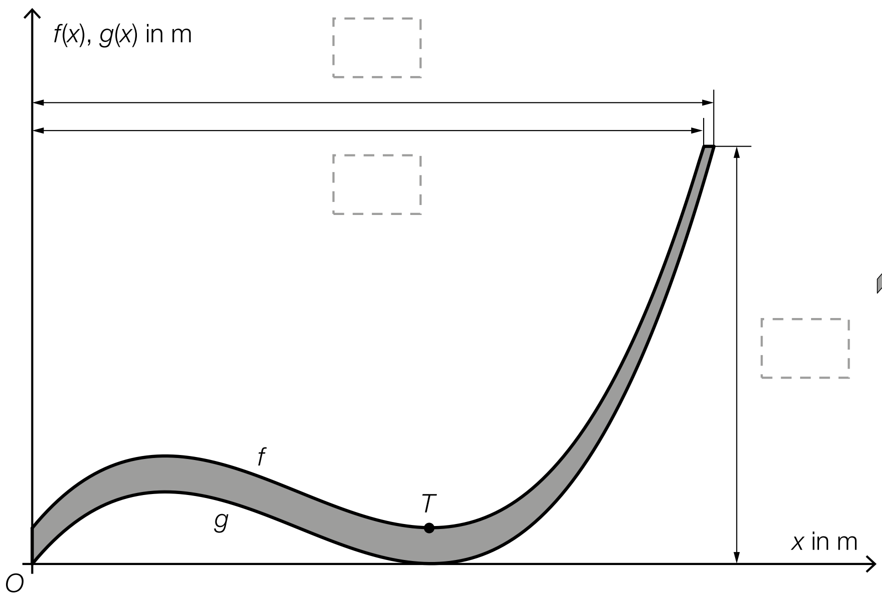
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

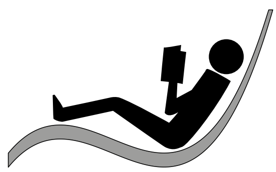
a) Der Profilverlauf einer Liege kann mithilfe der Funktionen f und g näherungsweise beschrieben werden.

Mit folgendem Ausdruck kann der Inhalt der in der nachstehenden Abbildung grau dargestellten Fläche berechnet werden:

$$\int_0^a (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + (b - a) \cdot c - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

– Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen a, b und c in der nachstehenden Abbildung in die entsprechenden Kästchen ein.





Es gilt:

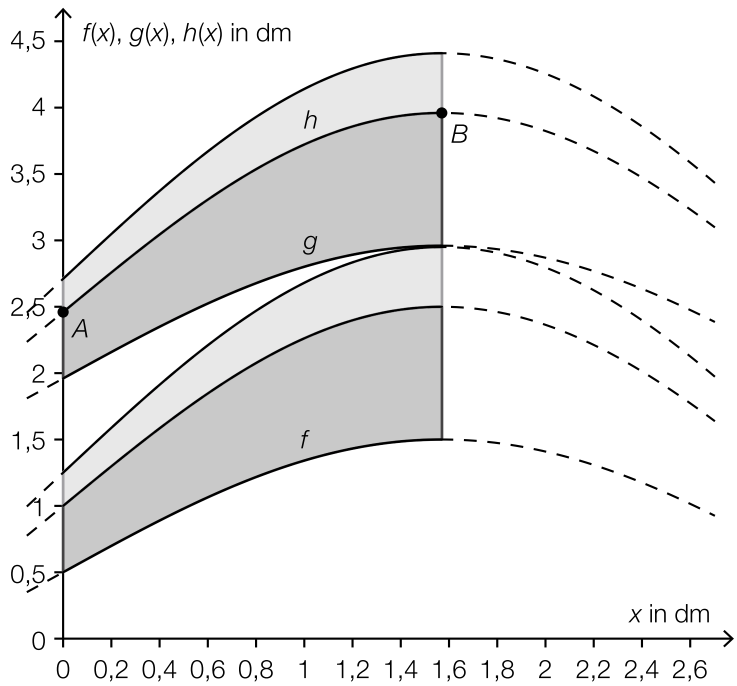
$f(x) = 1{,}033 \cdot x^3 - 2{,}26 \cdot x^2 + 1{,}237 \cdot x + 0{,}1$
$g(x) = 1{,}033 \cdot x^3 - 2{,}26 \cdot x^2 + 1{,}237 \cdot x$

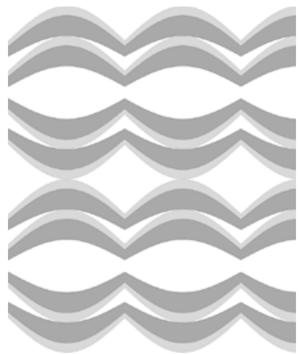
x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in m

– Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T des Graphen der Funktion f.
– Berechnen Sie den Steigungswinkel von f an der Stelle $x_0 = 1{,}6$.
– Begründen Sie, warum die Funktion f an jeder Stelle die gleiche Steigung wie die Funktion g hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Stoffmuster im Retro-Stil entsteht, indem ein Ausschnitt immer wieder kopiert und gespiegelt wird. Dabei werden die Begrenzungslinien als Graphen von Funktionen modelliert (siehe nachstehende Abbildungen).





Für die Funktion f gilt:

$f(x) = \sin(x) + 0{,}5$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in dm

Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion f entlang der vertikalen Achse um 1,46 dm nach oben.

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

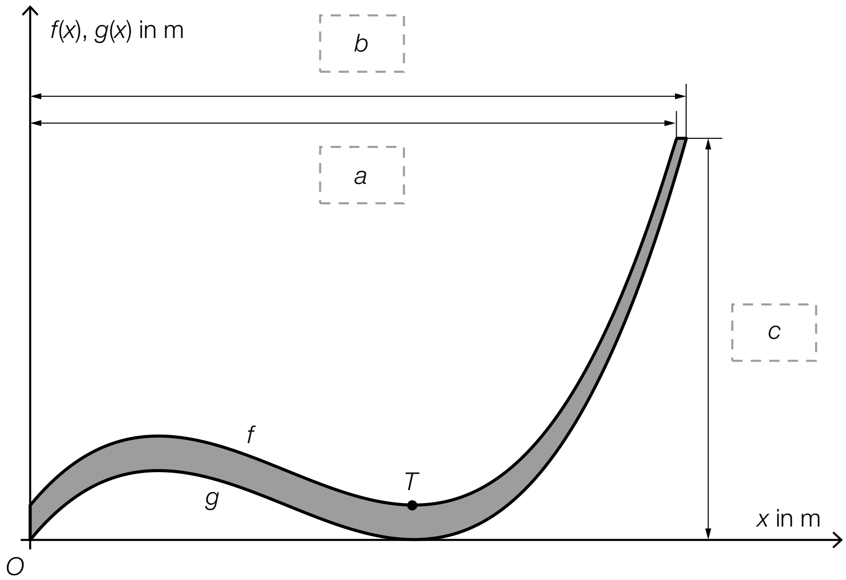
Der Graph der Funktion h mit $h(x) = a \cdot \sin(x) + b$ verläuft durch den Punkt $A = (0 \mid 2{,}46)$ und den Hochpunkt $B = \left(\frac{\pi}{2} \middle| 3{,}96\right)$.

– Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$f'(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = 0{,}365...)$, $x_2 = 1{,}093...$
$f(x_2) = 0{,}100...$
$T \approx (1{,}09 | 0{,}10)$

$\alpha = \arctan(f'(1{,}6)) = \arctan(1{,}938...) = 62{,}711...° \approx 62{,}71°$
Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

Die ersten Ableitungen der beiden Funktionen sind identisch, also haben die beiden Funktionen an jeder Stelle die gleiche Steigung.

b) $g(x) = \sin(x) + 1{,}96$ oder $g(x) = f(x) + 1{,}46$

$2{,}46 = a \cdot \sin(0) + b \quad \Rightarrow \quad b = 2{,}46$
$3{,}96 - 2{,}46 = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad a = 1{,}5$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Eintragen von *a*, *b* und *c*
1 × B1: für die richtige Berechnung der Koordinaten von *T*
1 × B2: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.
1 × D: für die richtige Begründung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen einer Gleichung der Funktion *g*
1 × B: für das richtige Bestimmen der Koeffzienten *a* und *b*

Ausbreitung von Licht*

Aufgabennummer: B_428

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Bei einem physikalischen Experiment wird Licht durch einen Spalt geschickt und dabei abgelenkt.
Man interessiert sich für Winkel α mit $0° \leq \alpha \leq 90°$ und $\sin(\alpha) = \frac{(n + 0{,}5) \cdot \lambda}{d}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

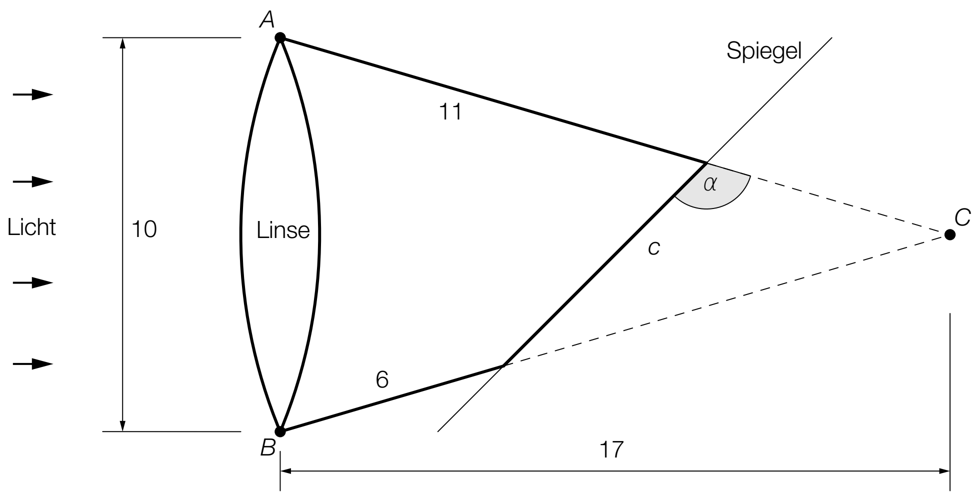
λ ... Wellenlänge des Lichts in m ($\lambda > 0$)
d ... Spaltbreite in m ($d > 0$)

– Geben Sie an, welche Beziehung zwischen d und λ erfüllt sein muss, damit diese Gleichung für $n = 0$ eine Lösung für α hat.

Bei einem bestimmten Experiment gilt: $d = 0{,}01$ mm
$\lambda = 632$ nm

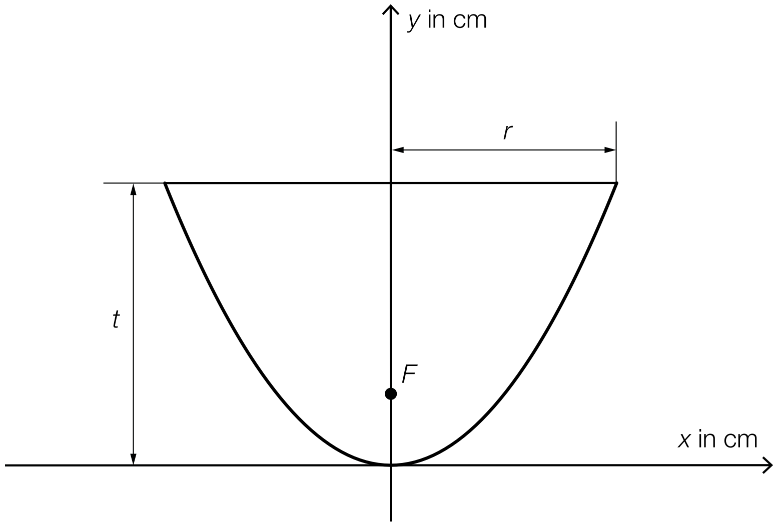
– Ermitteln Sie diejenigen natürlichen Zahlen n, für die diese Gleichung eine Lösung für α hat.

b) Bei einem Experiment wird das von einer Sammellinse gebündelte Licht auf einen schräg gestellten Spiegel gerichtet (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze, alle Abmessungen in cm). Es gilt: $\overline{AC} = \overline{BC}$.



– Berechnen Sie die Länge c.
– Berechnen Sie den stumpfen Winkel α.

c) Viele Scheinwerfer haben die Form eines Rotationsparaboloids, das durch Rotation einer Parabel mit der Gleichung $y = a \cdot x^2$ um die y-Achse entsteht. Dabei befindet sich die Lampe des Scheinwerfers im Brennpunkt $F = \left(0 \middle| \frac{1}{4 \cdot a}\right)$ (siehe nachstehende Abbildung).



– Berechnen Sie die Koordinaten des Brennpunkts F für $r = 12$ cm und $t = 15$ cm.

Jemand behauptet: „Verdoppelt man bei gleichbleibender Tiefe t eines Rotationsparaboloids den Radius r, so vervierfacht sich dadurch die y-Koordinate des Brennpunkts."

– Überprüfen Sie diese Behauptung nachweislich auf ihre Richtigkeit.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Nenner muss größer gleich dem Zähler sein, also: $0{,}5 \cdot \lambda \leq d$.

$$\frac{(n + 0{,}5) \cdot 632 \cdot 10^{-9}}{0{,}01 \cdot 10^{-3}} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad n \leq 15{,}3...$$

Daher gibt es für $n = 0, 1, 2, \ldots, 15$ jeweils eine Lösung für α.

b) Berechnung der Schenkel des gleichschenkeligen Dreiecks und des Winkels zwischen den Schenkeln: $s = \sqrt{17^2 + 5^2} = 17{,}72...$

$\gamma = 2 \cdot \arctan\left(\frac{5}{17}\right) = 32{,}77...°$

Mit dem Cosinussatz ergibt sich die Länge c:

$\sqrt{(s - 11)^2 + (s - 6)^2 - 2 \cdot (s - 11) \cdot (s - 6) \cdot \cos(\gamma)} = 7{,}07...$

$c \approx 7{,}1$ cm

$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{s - 6}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad (\alpha_1 \approx 63{,}7...°),\ \alpha_2 = 116{,}2...°$$

c) Da P ein Punkt der Parabel ist, gilt: $15 = 144 \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{15}{144}$.

Die Koordinaten des Brennpunkts lauten somit:

$$F = \left(0 \left| \frac{1}{4 \cdot \frac{15}{144}} \right.\right) = (0|2{,}4)$$

Ist $R = (r|t)$ ein Punkt der Parabel, dann muss $t = a \cdot r^2$, also $a = \frac{t}{r^2}$ sein.

Die y-Koordinate von F lautet: $y_F = \frac{r^2}{4 \cdot t}$.

Eine Verdoppelung des Radius bewirkt somit eine Vervierfachung der y-Koordinate.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Angeben der Beziehung zwischen d und λ
1 × A: für das richtige Ermitteln der entsprechenden Werte von n

b) 1 × A: für die richtige Modellbildung (z. B. mithilfe eines gleichschenkeligen Dreiecks und eines allgemeinen Dreiecks)
1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge c
1 × B2: für die richtige Berechnung des Winkels α

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der y-Koordinate des Brennpunkts
1 × D: für die richtige Überprüfung

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Fundamentale Wechselwirkungen*

Aufgabennummer: B_429

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

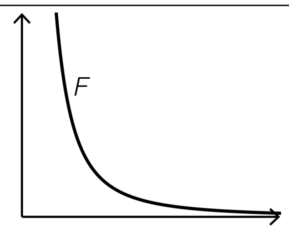
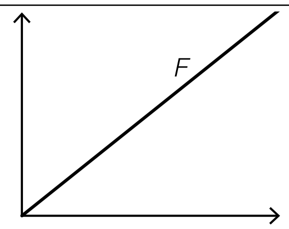
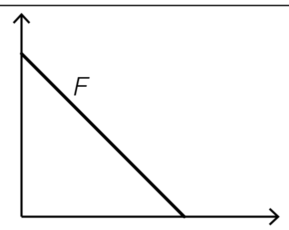
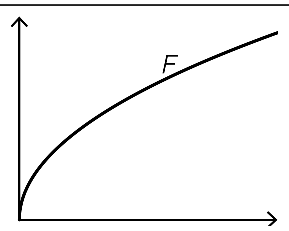
a) Mithilfe des Gravitationsgesetzes kann man den Betrag F der Gravitationskraft zwischen 2 Körpern berechnen:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F ... Betrag der Gravitationskraft
m_1 ... Masse des 1. Körpers
m_2 ... Masse des 2. Körpers
G ... Gravitationskonstante ($G > 0$)
r ... Abstand der beiden Körper

– Ordnen Sie den beiden Abhängigkeiten jeweils die zutreffende Grafik aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Betrag F der Gravitationskraft abhängig vom Abstand r (m_1 und m_2 konstant)	
Betrag F der Gravitationskraft abhängig von der Masse m_1 (m_2 und r konstant)	

A	
B	
C	
D	

* ehemalige Klausuraufgabe

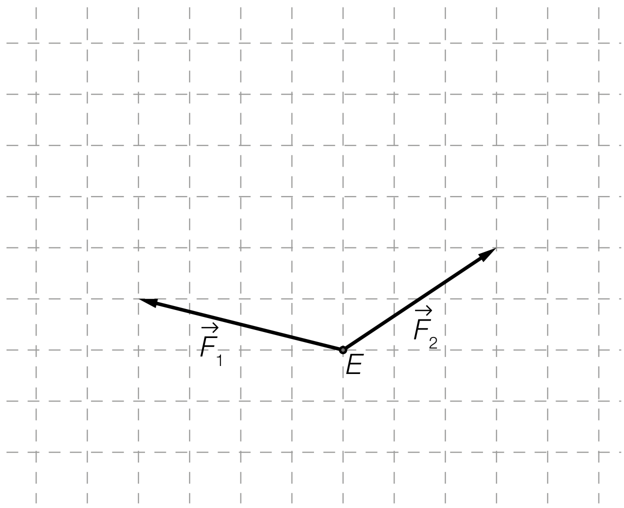
b) Die „elektromagnetische Wechselwirkung“ ist 10 000-Milliarden-mal so groß wie die „schwache Wechselwirkung“.

– Ergänzen Sie in der nachstehenden Tabelle die fehlende Hochzahl für die „schwache Wechselwirkung“.

Wechselwirkung	Stärke
elektromagnetische Wechselwirkung	1
schwache Wechselwirkung	$10^{\boxed{}}$
Gravitation	10^{-39}

– Ermitteln Sie, um welchen Faktor die „schwache Wechselwirkung“ stärker als die Gravitation ist.

c) In der nachstehenden Grafik sind 2 Kräfte, die auf ein Teilchen im Punkt E wirken, dargestellt.



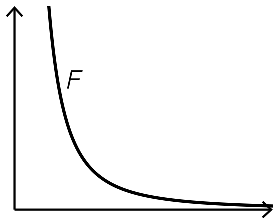
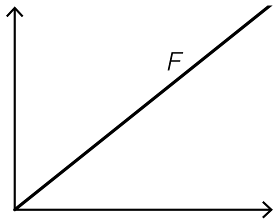
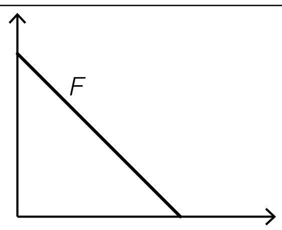
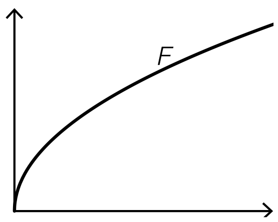
– Zeichnen Sie die Gesamtkraft, die sich aus der Summe der beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ ergibt, ausgehend vom Punkt E in der obigen Grafik ein.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

Betrag F der Gravitationskraft abhängig vom Abstand r (m_1 und m_2 konstant)	A
Betrag F der Gravitationskraft abhängig von der Masse m_1 (m_2 und r konstant)	B

A	
B	
C	
D	

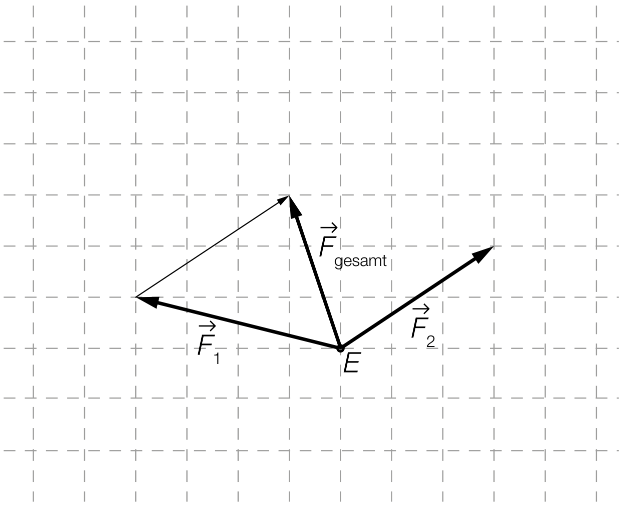
b)

Wechselwirkung	Stärke
elektromagnetische Wechselwirkung	1
schwache Wechselwirkung	10^{-13}
Gravitation	10^{-39}

$$\frac{10^{-13}}{10^{-39}} = 10^{26}$$

Die „schwache Wechselwirkung" ist um den Faktor 10^{26} stärker als die Gravitation.

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Zuordnung

b) 1 × A: für das richtige Ergänzen der fehlenden Hochzahl
1 × B: für das richtige Ermitteln des Faktors

c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der Gesamtkraft

Widerstandstemperatursensoren*

Aufgabennummer: B_430		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Der Zusammenhang zwischen Widerstand und Temperatur eines Sensors wird näherungsweise durch die quadratische Funktion R beschrieben:

$R(T) = 100 \cdot (1 + 0{,}003850 \cdot T - 5{,}775 \cdot 10^{-7} \cdot T^2)$ mit $T \geq 0$

T ... Temperatur in °C
$R(T)$ ... Widerstand bei der Temperatur T in Ohm (Ω)

– Berechnen Sie für $T = 450$ °C den Betrag des relativen Fehlers bei Verwendung der Funktion R, wenn der tatsächliche Widerstand 260 Ω beträgt.

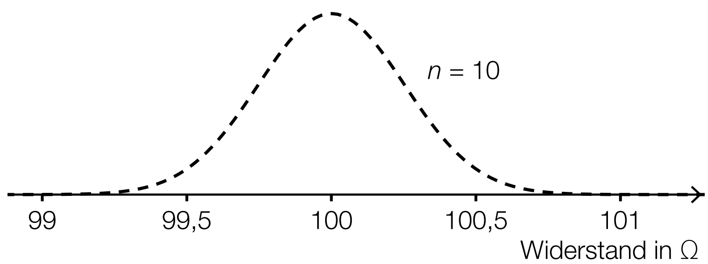
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Unternehmen produziert Widerstandstemperatursensoren. Der Widerstand dieser Sensoren bei 0 °C ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 100\ \Omega$ und $\sigma = 0{,}8\ \Omega$.

Eine Zufallsstichprobe von 10 Sensoren wird der Produktion entnommen, und es wird jeweils der Widerstand bei 0 °C gemessen.

– Geben Sie die geschätzten Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte an.
– Ermitteln Sie den zum Erwartungswert μ symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 98 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion der Verteilung der Stichprobenmittelwerte für eine Zufallsstichprobe von $n = 10$ Sensoren strichliert dargestellt.



– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung einen möglichen Graphen der Dichtefunktion für einen Stichprobenumfang $n > 10$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{|R(450) - 260|}{260} = 0{,}0059... \approx 0{,}6\ \%$

b) $\mu_{\bar{X}} = 100\ \Omega$

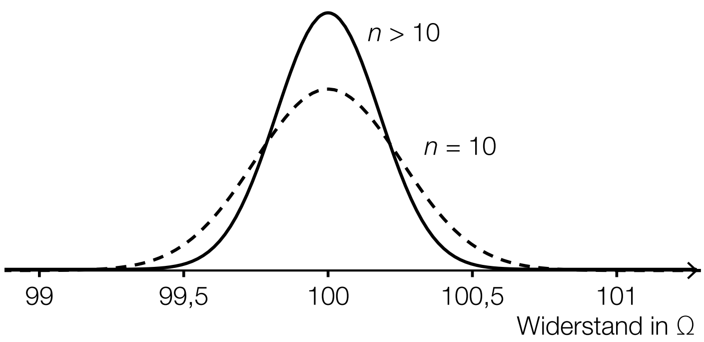
$\sigma_{\bar{X}} = \frac{0{,}8}{\sqrt{10}}\ \Omega$

Zweiseitigen 98-%-Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$100 \pm z_{0,99} \cdot \frac{0{,}8}{\sqrt{10}}$

$z_{0,99} = 2{,}326...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallstreubereich in Ω: [99,41; 100,59] (gerundet).



Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Betrags des relativen Fehlers

b) 1 × A1: für das richtige Angeben der Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte
1 × B: für das richtige Ermitteln des Zufallsstreubereichs
1 × A2: für das richtige Skizzieren des Funktionsgraphen (Maximalwert höher und Kurve schmäler)

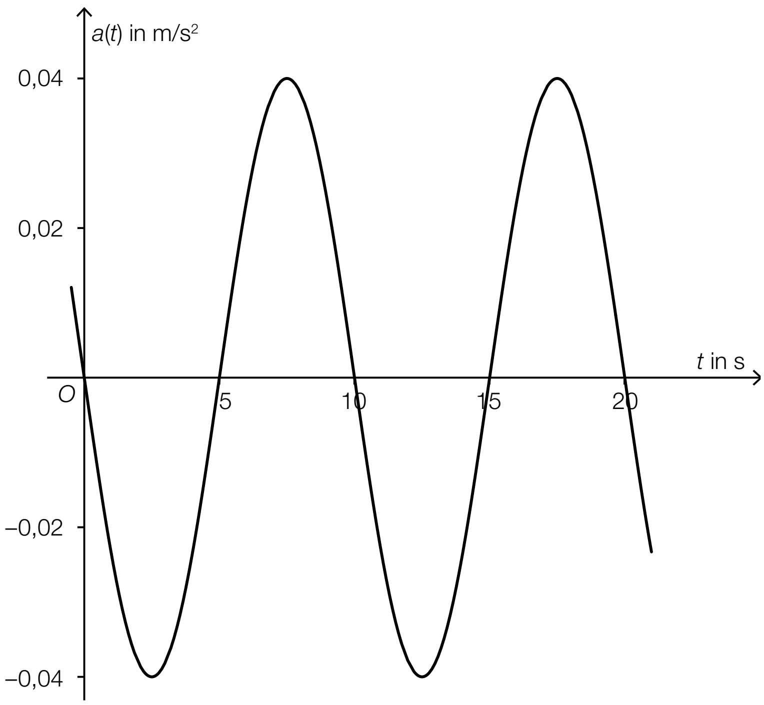
Federpendel*

Aufgabennummer: B_431

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein an einer Feder befestigter Körper bewegt sich unter dem Einfluss der Federkraft.

a) Das nachstehende Beschleunigung-Zeit-Diagramm zeigt den sinusförmigen Verlauf der Beschleunigung eines Körpers durch die Federkraft. Es gilt: $a(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ mit $A > 0$.



– Bestimmen Sie A, ω und φ mithilfe des obigen Diagramms.
– Markieren Sie im obigen Diagramm alle Punkte, in denen der Betrag der Geschwindigkeit maximal ist.

b) Die Geschwindigkeit eines Körpers in Abhängigkeit von der Zeit kann durch eine Funktion v mit $v(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden (A, $\omega > 0$).

– Vervollständigen Sie die nachstehende Aussage mit $t_2 \neq t_1$ so, dass sie richtig ist.

Für $t_2 = t_1 + \frac{\boxed{} \cdot \pi}{\boxed{}}$ ist $\int_{t_1}^{t_2} A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\,\mathrm{d}t = 0$.

– Zeigen Sie, dass $A \cdot \omega$ die maximale Steigung der Funktion v ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluss einer Federkraft wird durch Reibung gedämpft. Für die Auslenkung aus der Ruhelage (Startposition) gilt:

$f(t) = e^{-t} \cdot \sin(3 \cdot t)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$f(t)$ ... Auslenkung aus der Ruhelage zur Zeit t in m

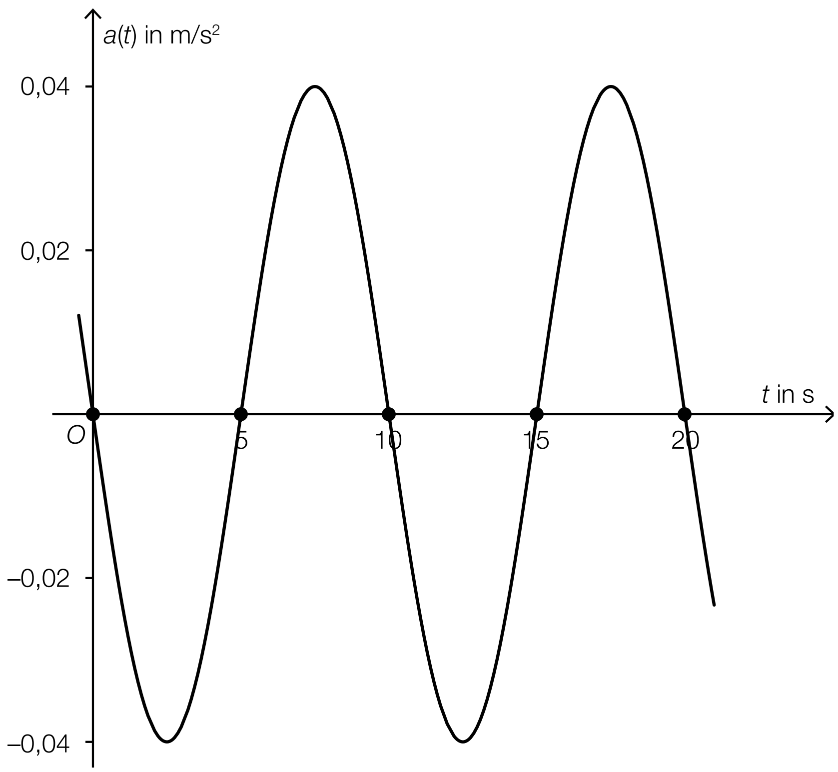
– Bestimmen Sie diejenigen Intervalle, in denen der Betrag der Auslenkung aus der Ruhelage größer als 0,2 m ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = 0{,}04$
Die Periodendauer T ist 10, daher ergibt sich:
$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{10} = \frac{\pi}{5}$
$t_0 = 5$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:
$\varphi = -5 \cdot \frac{\pi}{5} = -\pi$

(Jeder Wert $\varphi = -\pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)



b) $t_2 = t_1 + \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$
Auch ein Vielfaches der Periodendauer ist als richtig zu werten.

$v'(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$

Da der maximale Wert von $\cos(\omega \cdot t + \varphi)$ gleich 1 ist, ergibt sich als maximale Steigung von v genau $A \cdot \omega$.

c) Lösen der Gleichungen $f(t) = \pm 0{,}2$ mittels Technologieeinsatz:
$]0{,}07...;\ 0{,}87...[$ und $]1{,}33...;\ 1{,}60...[$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen von A
1 × B1: für das richtige Bestimmen von ω
1 × B2: für das richtige Bestimmen von φ
1 × C2: für das richtige Markieren aller Punkte, in denen der Betrag der Geschwindigkeit maximal ist

b) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Aussage
1 × D: für den richtigen Nachweis

c) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Intervalle

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Elektrische Bauteile*

Aufgabennummer: B_432

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der zeitliche Verlauf der Spannung beim Entladen eines Kondensators kann näherungsweise durch eine Funktion u beschrieben werden:

$u(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

t … Zeit ab Beginn des Entladevorgangs
$u(t)$ … Spannung am Kondensator zur Zeit t
U_0 … Spannung zur Zeit $t = 0$
τ … Zeitkonstante

– Erstellen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion u an der Stelle $t = 0$.

b) Der zeitliche Verlauf der Stromstärke in einer Spule kann durch eine Funktion f beschrieben werden, deren Graph in der unten stehenden Abbildung 1 dargestellt ist.

– Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in Abbildung 2.

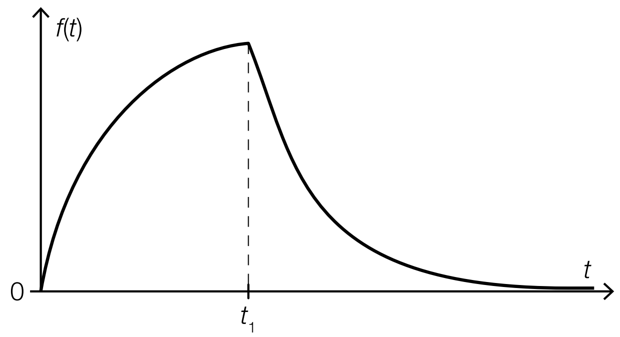


Abbildung 1

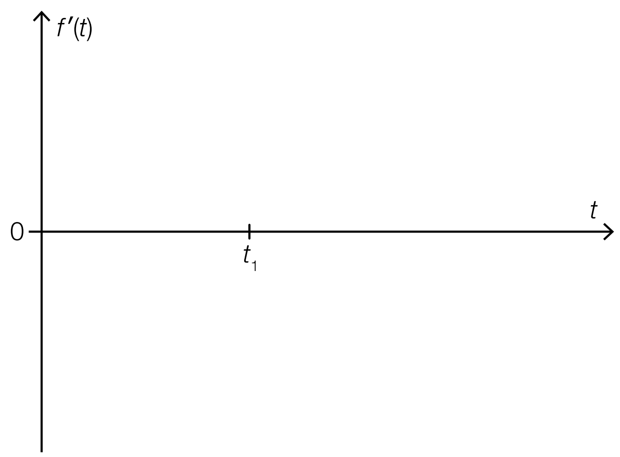


Abbildung 2

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der zeitliche Verlauf der Spannung an einem Kondensator kann nach dem Einschalten des Stroms durch die Funktion u beschrieben werden:

$$u(t) = 40 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0,24}}\right)$$

t … Zeit nach dem Einschalten des Stroms in s
$u(t)$ … Spannung am Kondensator zur Zeit t in Volt (V)

– Erklären Sie, ausgehend von der Funktionsgleichung für u, warum die Spannung des Kondensators für $t \to \infty$ asymptotisch gegen 40 V geht.

Im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ steigt die Spannung am Kondensator von $u(t_1) = 5$ V auf $u(t_2) = 30$ V.

– Berechnen Sie den linearen Mittelwert der Spannung im Zeitintervall $[t_1; t_2]$.

Ihnen wird folgende fehlerhafte Berechnung der 1. Ableitung von u vorgelegt:

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -40 \cdot e^{-\frac{t}{0,24}}$$

– Geben Sie an, welche Ableitungsregel hier missachtet wurde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

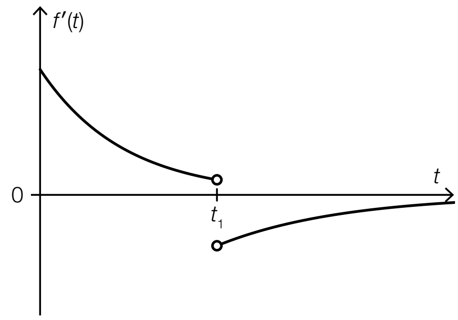
a) Tangente $g(t) = k \cdot t + d$ an der Stelle $t = 0$:

$k = u'(0) = -\frac{U_0}{\tau}$

$d = U_0$

$\Rightarrow \quad g(t) = -\frac{U_0}{\tau} \cdot t + U_0$

b)



c) Da der Ausdruck $e^{-\frac{t}{0,24}}$ für steigende Werte von t gegen null geht, nähert sich der Klammerausdruck dem Wert 1. Daher nähert sich der Funktionswert asymptotisch dem Wert 40 V.

Durch Lösen der Gleichung $u(t_1) = 5$ bzw. $u(t_2) = 30$ erhält man die Integrationsgrenze $t_1 = 0{,}0320...$ bzw. $t_2 = 0{,}3327...$

$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} u(t)\,\mathrm{d}t = 20{,}04...$

Der lineare Mittelwert der Spannung in diesem Zeitintervall beträgt rund 20,0 V.

Die Kettenregel wurde missachtet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Tangente

b) 1 × A1: für die richtige Skizze des Graphen der Ableitungsfunktion im Bereich $0 < t < t_1$ (richtiges Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion)
1 × A2: für die richtige Skizze des Graphen der Ableitungsfunktion im Bereich $t > t_1$ (richtiges Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion)

c) 1 × D: für die richtige Erklärung des Verhaltens der Funktion
1 × B: für die richtige Berechnung des linearen Mittelwerts
1 × C: für das richtige Angeben, dass die Kettenregel missachtet wurde, oder eine richtige Beschreibung

Differenzialgleichungen in der Technik

Aufgabennummer: B_426

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Für die Geschwindigkeit eines bestimmten Körpers in einer Flüssigkeit gilt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a + b \cdot v$$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s
a, b … Konstanten

1) Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an.

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung lautet:
$v(t) = C \cdot e^{-2 \cdot t}$
C … Konstante

2) Ermitteln Sie die Konstante b.

Die Lösung dieser Differenzialgleichung lautet für eine bestimmte Anfangsbedingung:
$v(t) = 5 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}$

3) Ermitteln Sie die Konstante a.
4) Ermitteln Sie die zugehörige Anfangsbedingung für $t = 0$.

b) Bei einer bestimmten chemischen Reaktion ändern sich die vorhandenen Massen der beteiligten Stoffe mit der Zeit. Für die Masse eines beteiligten Stoffes gilt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 8 - 2 \cdot m$$

t … Zeit ab Beginn der Beobachtung in s
$m(t)$ … Masse dieses Stoffes zur Zeit t in mg

Eine spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung wurde unter Verwendung einer Anfangsbedingung ermittelt.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D zu, sodass zutreffende Aussagen entstehen.

Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differenzialgleichung …	
Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph dieser speziellen Lösung der Differenzialgleichung …	

A	… asymptotisch der t-Achse.
B	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 8.
C	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 4.
D	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt –2.

c) Die Temperatur eines Werkstücks bei einer bestimmten Wärmebehandlung kann in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden. Dabei kann es sich um einen Abkühlungsvorgang oder einen Erwärmungsvorgang handeln. Für den Zusammenhang gilt die folgende Differenzialgleichung:

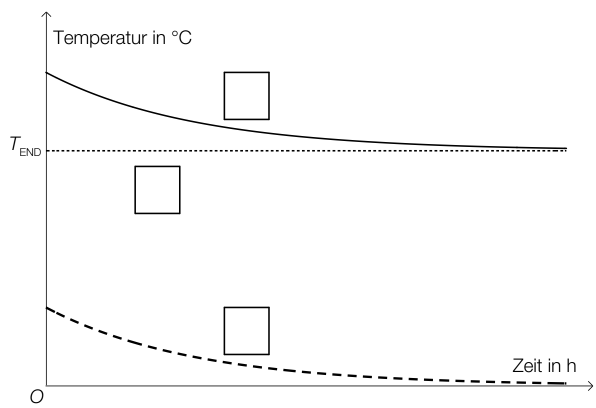
$$\frac{dT}{dt} + b \cdot T = a$$

t … Zeit ab Beginn der Beobachtung in h
$T(t)$ … Temperatur des Werkstücks zur Zeit t in °C
a, b … Konstanten

Die Lösung dieser Differenzialgleichung kann mithilfe des Ansatzes $T(t) = T_h(t) + T_p(t)$ und einer Anfangsbedingung bestimmt werden, wobei gilt:

$T(t)$ … Lösung der Differenzialgleichung
$T_h(t)$ … Lösung des homogenen Teils der Differenzialgleichung
$T_p(t)$ … (eine beliebige) partikuläre Lösung der Differenzialgleichung

Die nebenstehende Abbildung zeigt für einen bestimmten Abkühlungsvorgang die Graphen von T, T_h und T_p.

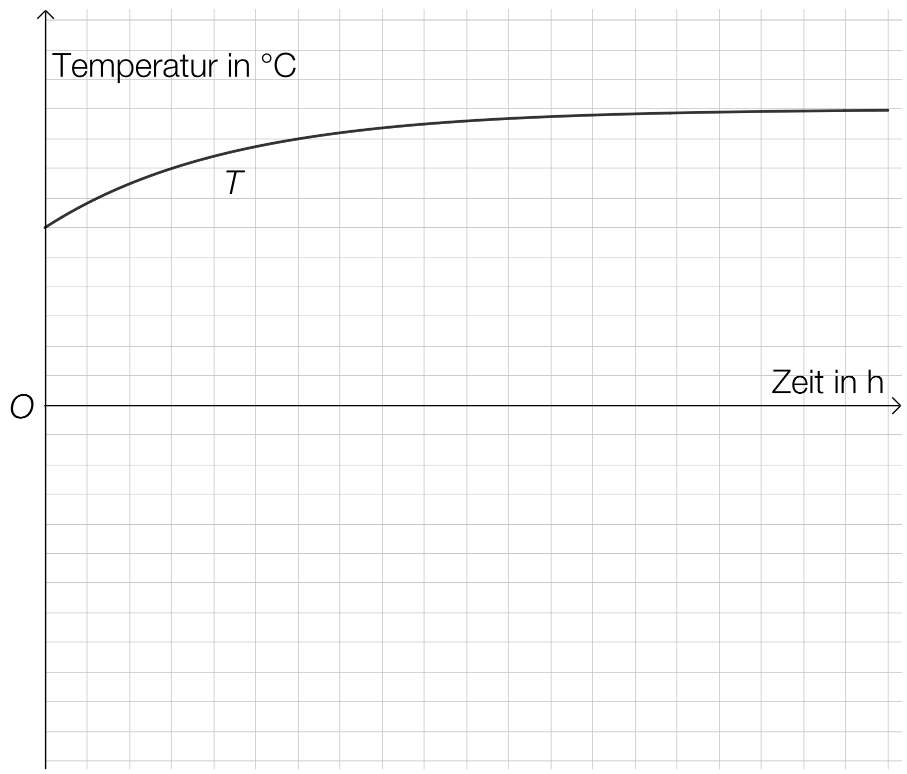


1) Geben Sie mithilfe von *a* und *b* eine Formel zur Ermittlung von T_{END} an.

T_{END} = ____

2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die richtige Bezeichnung der Graphen in die Kästchen ein (T, T_h bzw. T_p).

Die nachstehende Abbildung zeigt für einen bestimmten Erwärmungsvorgang den Graphen von T.



3) Skizzieren Sie in der obigen Abbildung die Graphen von T_p und T_h.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a1) homogene Differenzialgleichung: $\frac{dv}{dt} = b \cdot v$

a2) Einsetzen in die homogene Differenzialgleichung:
$-2 \cdot C \cdot e^{-2 \cdot t} = b \cdot C \cdot e^{-2 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad b = -2\,s^{-1}$

a3) Einsetzen in die inhomogene Differenzialgleichung: $\frac{dv}{dt} = a + b \cdot v$
$8 \cdot e^{-2 \cdot t} = a - 2 \cdot (5 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}) \quad \Rightarrow \quad a = 10\ \text{m/s}^2$

a4) $v(0) = 1$ m/s

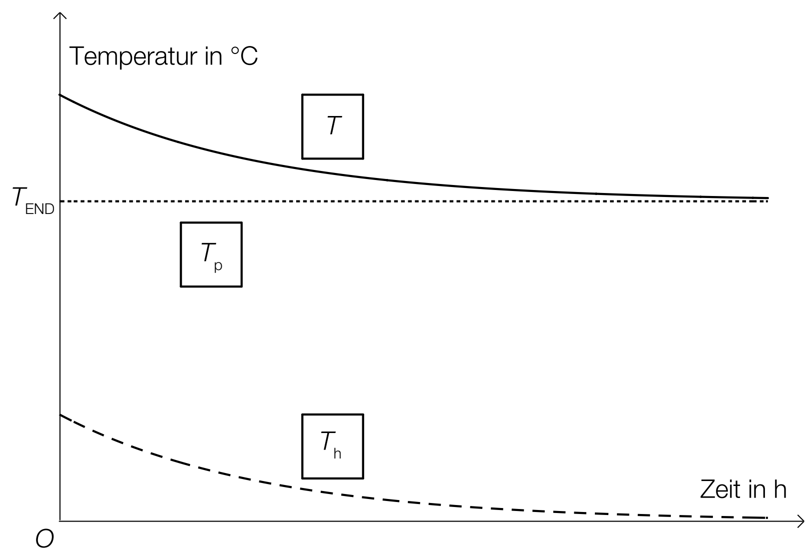
b1)

Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differenzialgleichung …	A
Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph dieser speziellen Lösung der Differenzialgleichung …	C

A	… asymptotisch der t-Achse.
B	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 8.
C	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 4.
D	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt –2.

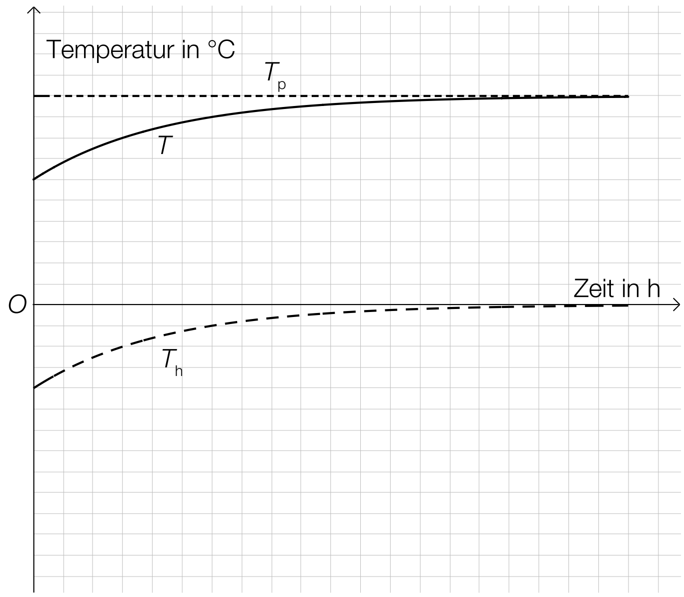
c1) $T_{END} = \frac{a}{b}$

c2)



Möglicher Lösungsweg

c3)



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) schwer
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 4
b) 1
c) 3

Thema: Technik

Quellen: –

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Hydraulik

Aufgabennummer: B_287

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Hydraulikzylinder sind mittels Flüssigkeit betriebene Arbeitszylinder. Zwischen dem Durchmesser d_K des Zylinderkolbens und dem Betrag F_A der ausfahrenden Kraft besteht folgender Zusammenhang:

$$F_A = p \cdot \frac{d_K^2 \cdot \pi}{4}$$

F_A … Betrag der ausfahrenden Kraft in Newton (N)
p … Druck in N/mm²
d_K … Kolbendurchmesser in mm

In der nachstehenden Tabelle sind einige Messwerte einer Testreihe für einen mit dem Druck p = 10 N/mm² belasteten Hydraulikzylinder angegeben.

d_K in mm	50	60	70	80	90
F_A in kN	18,59	27,15	39,03	51,29	62,24

– Berechnen Sie für den Messwert bei d_K = 70 mm den relativen Fehler des Messwerts bezüglich des aus der Formel erhaltenen Wertes für F_A in Prozent.
– Erstellen Sie für die Messwerte ein alternatives Modell zur Berechnung von F_A in Abhängigkeit von d_K in Form einer quadratischen Ausgleichsfunktion.

Ausgleichsfunktionen werden mit der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt.

– Kreuzen Sie die auf diese Methode zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass der erste und der letzte Messpunkt auf dem Funktionsgraphen liegen.	☐
Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass möglichst viele Messpunkte genau auf dem Funktionsgraphen liegen.	☐
Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass die Summe der Quadrate der senkrechten Abstände der Messpunkte vom Funktionsgraphen möglichst klein ist.	☐
Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass die Summe der senkrechten Abstände der Messpunkte vom Funktionsgraphen null ist.	☐
Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass die Steigung der Ausgleichsfunktion möglichst gering ist.	☐

b) Für die Modellierung eines speziellen Gehäuses eines Hydraulikzylinders wird die Funktion f verwendet.

$$f(x) = \frac{1}{0{,}1 \cdot x + 0{,}35} - 0{,}85$$

x, $f(x)$ … Koordinaten in Längeneinheiten

– Zeichnen Sie die Funktion f im Intervall $[-20; 20]$.

Rotiert die Funktion f im Intervall $[0; x_N]$ um die x-Achse, erhält man ein Modell des gewünschten Gehäuses, wobei x_N die Nullstelle der Funktion f ist.

– Berechnen Sie das Volumen des Gehäuses.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $F_A = p \cdot \frac{d_K^2 \cdot \pi}{4}$

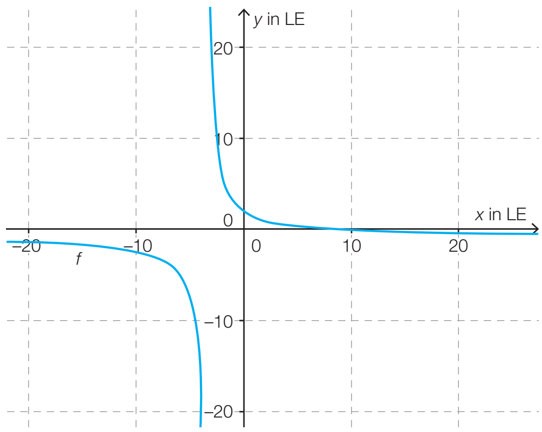
$F_A = 10 \cdot \frac{70^2 \cdot \pi}{4} = 38\,484{,}51\ldots\text{ N} \approx 38{,}4845\text{ kN}$

relativer Fehler: $\frac{39{,}03 - 38{,}4845}{38{,}4845} = 0{,}01417\ldots \approx 1{,}4\ \%$

Ermitteln der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$F_A(d_K) = 0{,}0037 \cdot d_K^2 + 0{,}5984 \cdot d_K - 21{,}025$ (Koeffizienten gerundet)

[...]	
[...]	
Die Parameter der Ausgleichsfunktion werden so bestimmt, dass die Summe der Quadrate der senkrechten Abstände der Messpunkte vom Funktionsgraphen möglichst klein ist.	☒
[...]	
[...]	

b)



$x_N \approx 8{,}265$

$V_x = \pi \cdot \int_0^{8{,}265} (f(x))^2\,dx = 17{,}0678\ldots\text{ VE}$

$V_x \approx 17{,}07\text{ VE}$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht

Punkteanzahl:

a) 3
b) 3

Thema: Sonstiges

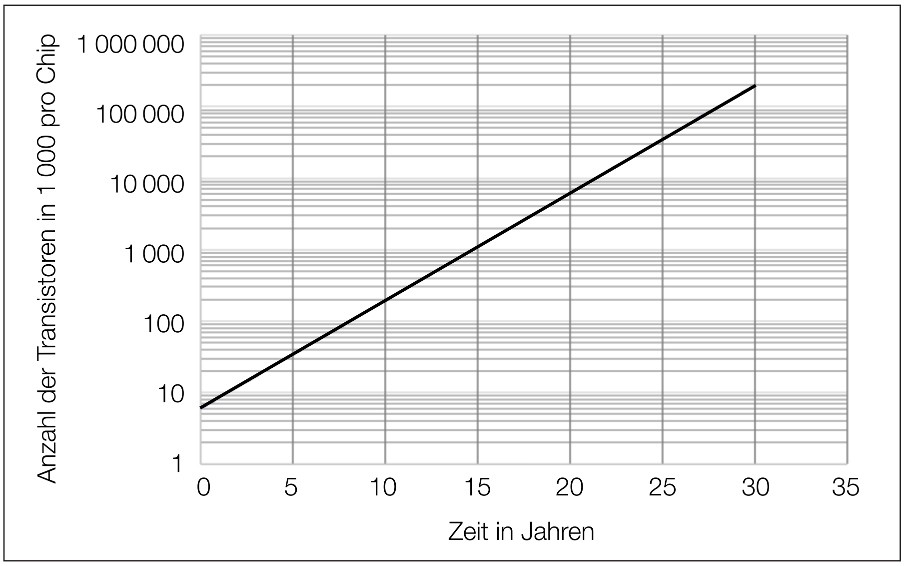
Quellen: –

Computer

Aufgabennummer: B_370

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das Moore'sche Gesetz beschreibt die Zunahme der Anzahl an Transistoren pro Chip in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren (siehe nachstehende Grafik). Für das Jahr 1974 wird die Zeit $t = 0$ Jahre festgelegt.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Transistoren pro Chip erstmals 3 000 000 erreicht hat.

Für die Gleichung der in der Grafik veranschaulichten Funktion gilt:

$y(t) = y_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$y(t)$ ... Anzahl der Transistoren in 1 000 Stück pro Chip

– Ermitteln Sie die Parameter y_0 und λ mithilfe der Grafik.

b) – Weisen Sie nach, dass eine Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot b^x$ in einem Koordinatensystem mit logarithmischer Skalierung der y-Achse als Gerade dargestellt wird.

c) Ein Unternehmen produziert Bauteile für Computer. Die Gesamtkosten pro Tag für x produzierte ME können durch eine Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.

$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x … pro Tag produzierte Bauteile in ME
$K(x)$ … Gesamtkosten pro Tag bei x produzierten ME in Euro

Folgende Wertepaare sind bekannt:

x in ME	0	40	60
$K(x)$ in GE	12000	27520	30720

Weiters ist bekannt, dass die Grenzkosten $K'(x)$ bei einer Produktion von 50 ME 157 GE/ME betragen.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d auf.
– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c und d.
– Berechnen Sie die Stelle des Minimums der Grenzkostenfunktion.
– Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Stelle im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Die Lebensdauer einer Sorte Akkus ist annähernd normalverteilt. Eine Stichprobe des Umfangs $n = 8$ hat den Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 1005$ Ladezyklen und die Stichprobenstandardabweichung $s_{n-1} = 48$ Ladezyklen.

– Ermitteln Sie das zweiseitige Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Lebensdauer mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 1$ %.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Nach etwa 18 Jahren ist die Anzahl an Transistoren pro Chip auf 3 000 000 angewachsen. Das entspricht dem Jahr 1992.

Ablesen von 2 Funktionswerten, z. B. $y(0) = 6$, $y(30) = 200\,000$

$y_0 = 6$

$200\,000 = 6 \cdot e^{30 \cdot \lambda}$

$\ln\left(\frac{200\,000}{6}\right) = 30 \cdot \lambda$

$\lambda = 0{,}347\ldots$

$y(t) = 6 \cdot e^{0{,}347\ldots \cdot t}$

b) $y = a \cdot b^x$

$\lg(y) = \lg(a) + x \cdot \lg(b)$

Diese Form entspricht einer Geraden, wenn die y-Achse logarithmisch skaliert ist.

c) $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$K'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $K(0) = 12\,000 \Rightarrow 12\,000 = d$

II: $K(40) = 27\,520 \Rightarrow 40^3 \cdot a + 40^2 \cdot b + 40 \cdot c + d = 27\,520$

III: $K(60) = 30\,720 \Rightarrow 60^3 \cdot a + 60^2 \cdot b + 60 \cdot c + d = 30\,720$

IV: $K'(50) = 157 \Rightarrow 3 \cdot 50^2 \cdot a + 2 \cdot 50 \cdot b + c = 157$

$K(x) = 0{,}03 \cdot x^3 - 6{,}8 \cdot x^2 + 612 \cdot x + 12\,000$

Berechnung der Minimumstelle:

$K'(x) = 0{,}09 \cdot x^2 - 13{,}6 \cdot x + 612$

$K''(x) = 0{,}18 \cdot x - 13{,}6$

$0{,}18 \cdot x - 13{,}6 = 0$

$x = 75{,}555\ldots$

Bei rund 75,56 produzierten ME ist der Kostenanstieg bei einer zusätzlich produzierten ME am geringsten.

d) Zweiseitigen 99-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$1\,005 \pm t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{48}{\sqrt{8}}$

$n = 8 \Rightarrow f = 7$

$t_{7;\,0{,}995} = 3{,}499...$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ:

[945,61... ; 1064,38...] (Intervallgrenzen gerundet)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) schwer
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 4
d) 1

Thema: Sonstiges

Quelle: www.computerbild.de/artikel/cb-Ratgeber-Kurse-Wissen-Prozessor-CPU-2999823.html

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

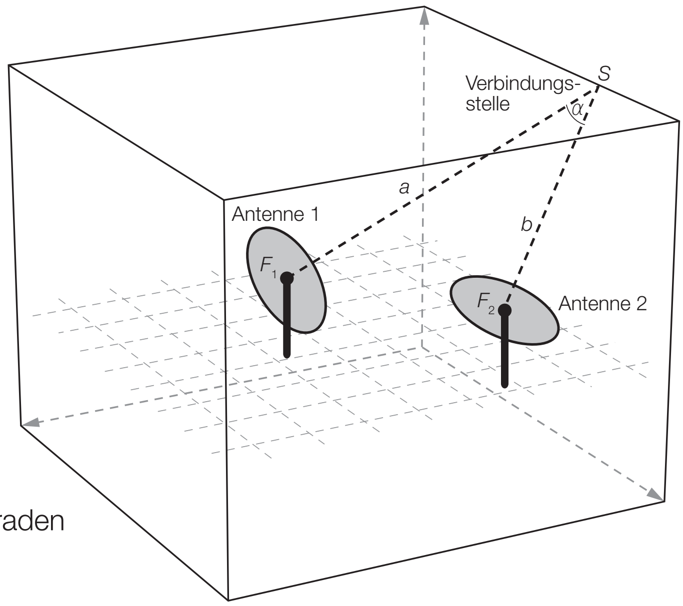
Richtfunk

Aufgabennummer: B_375

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Richtfunksysteme sind Funksysteme zur Übertragung von Informationen zwischen festen Standorten. Oft werden Parabolantennen für das Empfangen und das Senden der Strahlung verwendet.

a) Ein Richtstrahl, der entlang der Geraden a verläuft, wird vom Punkt $F_1 = (-50|-40|0)$ (Angaben in Metern) in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ gesendet.



– Stellen Sie eine Gleichung der Geraden a in Parameterform auf.

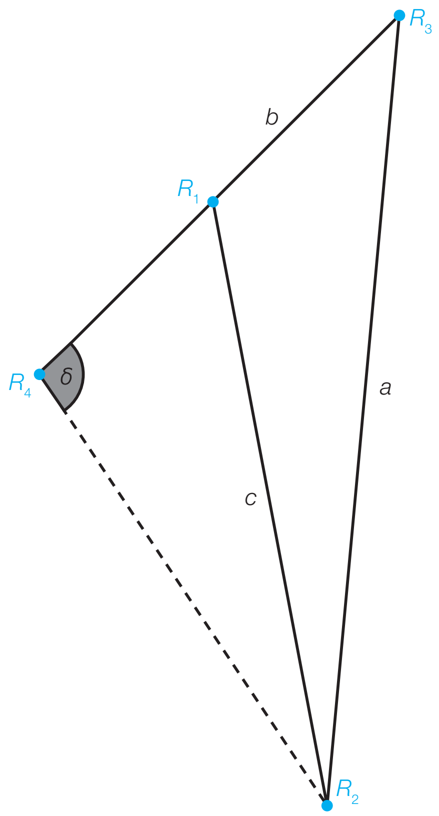
Ein Richtstrahl, der von F_2 aus gesendet wird, verläuft entlang der Geraden

$$b\colon X = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15{,}5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

– Ermitteln Sie die Koordinaten desjenigen Schnittpunkts S, in dem die beiden Richtstrahlen auf die Verbindungsstelle treffen.
– Berechnen Sie denjenigen Winkel α, den die beiden Richtstrahlen miteinander einschließen.

b) Auf einer Karte sind vier Richtfunkstationen R_1, R_2, R_3 und R_4 eingezeichnet (siehe nebenstehende Abbildung).

– Dokumentieren Sie, wie man aus den bekannten Richtfunkstrecken a, b und c sowie dem Winkel δ die Länge der Richtfunkstrecke zwischen R_2 und R_4 berechnen kann.



c) Der Antennengewinn-Faktor G ist ein Maß für die Verstärkung einer Antenne.

$$G = \frac{4 \cdot \pi}{\lambda^2} \cdot A \cdot \eta$$

η ... dimensionsloser Parameter
A … Antennenfläche in m^2
λ … Wellenlänge in m
G … Antennengewinn-Faktor

– Geben Sie an, um welchen Faktor sich G verändert, wenn λ verdoppelt wird.

Für den Antennengewinn g in Dezibel (dB) gilt:
$G = 10^{\frac{g}{10}}$

– Zeigen Sie mithilfe der Logarithmusrechenregeln, dass eine Verdoppelung von G eine Erhöhung von g um rund 3 dB hervorruft.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Gerade a: $X = \begin{pmatrix} -50 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

Berechnung des Schnittpunkts der beiden Richtstrahlen:

$$\begin{pmatrix} -50 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15{,}5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem:

I: $-50 + 16 \cdot s = 15 + 15{,}5 \cdot t$

II: $-40 + 12 \cdot s = 12 + 10 \cdot t$

III: $15 \cdot s = 45 \cdot t$

I: $16 \cdot s - 15{,}5 \cdot t = 65$

II: $12 \cdot s - 10 \cdot t = 52$

III: $15 \cdot s - 45 \cdot t = 0$

Ermitteln von s und t aus I und II: $s = 6$, $t = 2$

Einsetzen in III: $15 \cdot 6 - 45 \cdot 2 = 0$

$S = (46|32|90)$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15{,}5 \\ 10 \\ 45 \end{pmatrix}}{\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2} \cdot \sqrt{15{,}5^2 + 10^2 + 45^2}}$$

$\alpha = 30{,}925\ldots°$

b) Man berechnet zuerst den Winkel α mithilfe des Cosinussatzes:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c}\right)$$

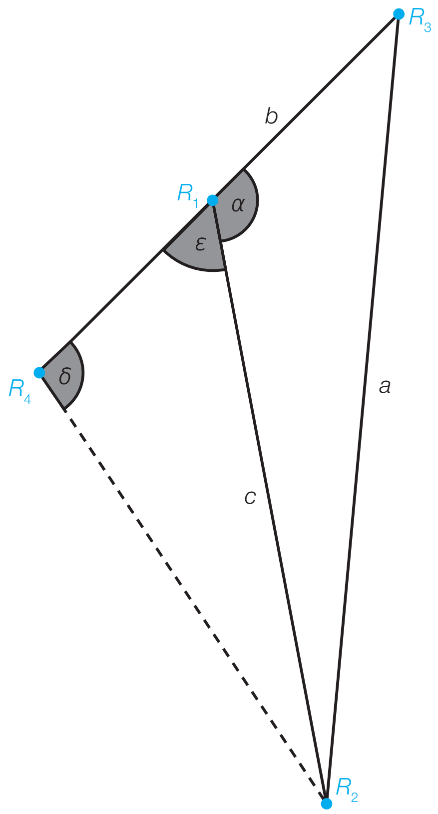
Anschließend berechnet man den Winkel ε:

$\varepsilon = 180° - \alpha$

Dann berechnet man die gesuchte Seite mithilfe des Sinussatzes:

$$\frac{c}{\sin(\delta)} = \frac{\overline{R_2R_4}}{\sin(\varepsilon)}$$

$$\overline{R_2R_4} = \frac{c \cdot \sin(\varepsilon)}{\sin(\delta)}$$



c) Wenn die Wellenlänge λ verdoppelt wird, beträgt G nur noch ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

$G = 10^{\frac{g}{10}}$

$\lg(G) = \frac{g}{10}$

$10 \cdot \lg(G) = g$

Für eine Verdoppelung von G gilt:

$$g_{\text{neu}} = 10 \cdot \lg(2 \cdot G) = \underbrace{10 \cdot \lg(2)}_{= 3{,}010\ldots} + \underbrace{10 \cdot \lg(G)}_{= g} \approx 3 + g$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) –
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

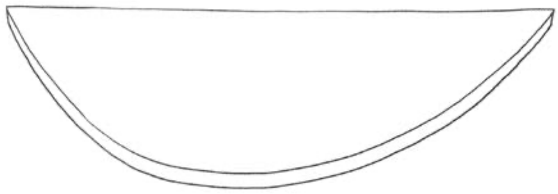
a) 3
b) 2
c) 2

Thema: Nachrichtentechnik

Quellen: –

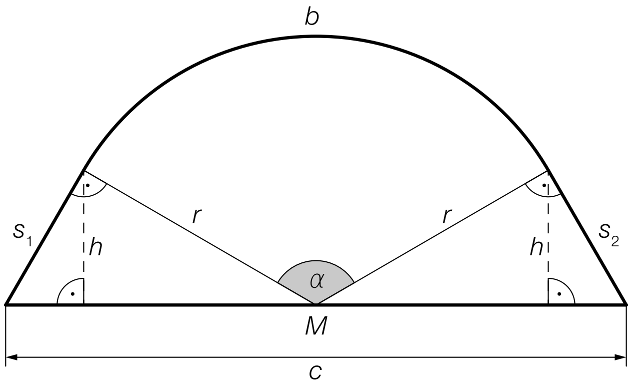
Tischplatte

Eine Tischlerei erhält die nachstehend abgebildete Skizze einer Tischplatte und erstellt dazu drei Entwürfe.



a) Der erste Entwurf für die Tischplatte ist in der unten stehenden Abbildung dargestellt.

Die Begrenzungslinie der Tischplatte setzt sich aus dem Kreisbogen b mit dem Mittelpunkt M und den Strecken s_1, s_2 und c zusammen.



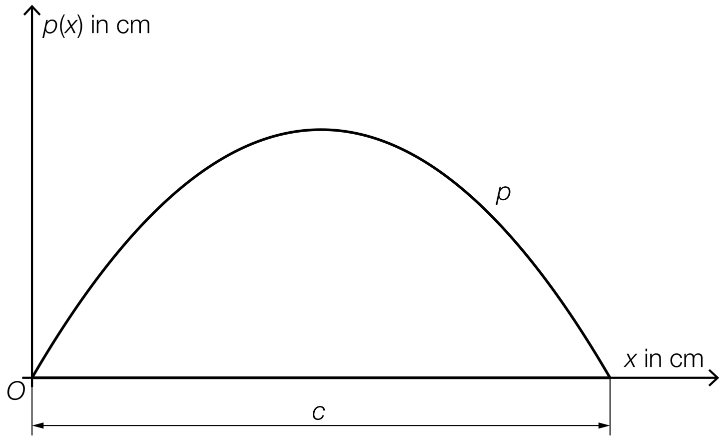
1) Stellen Sie mithilfe von r und α eine Formel zur Berechnung von h auf.

$h =$ ______________________________ [0/1 P.]

2) Markieren Sie in der obigen Abbildung eine Strecke x, deren Länge mit der nachstehenden Formel berechnet werden kann.

$x = \frac{c}{2} - \sqrt{r^2 - h^2}$ [0/1 P.]

b) Im zweiten Entwurf wird die Begrenzungslinie der Tischplatte durch die Strecke c und den Graphen der quadratischen Funktion p modelliert (siehe nachstehende Abbildung).



1) Markieren Sie in der obigen Abbildung eine Fläche, deren Inhalt durch den nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$$\frac{c}{2} \cdot p\left(\frac{c}{2}\right) - \int_0^{\frac{c}{2}} p(x)\,\mathrm{d}x$$

[0/1 P.]

$S = (35|30)$ ist der Scheitelpunkt der quadratischen Funktion p.

2) Vervollständigen Sie die nachstehende Funktionsgleichung von p durch Eintragen der fehlenden Zahlen und Rechenzeichen in die dafür vorgesehenen Kästchen.

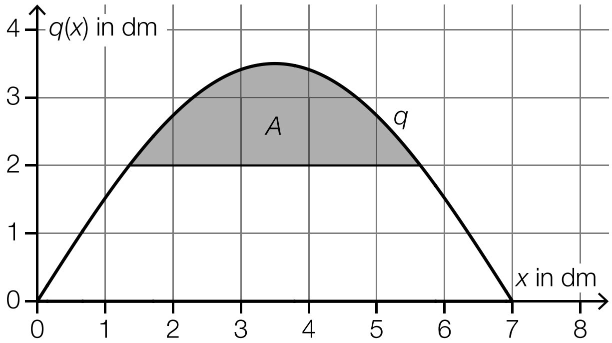
$$p(x) = -\frac{6}{245} \cdot \left(x \,\square\, \boxed{}\right)^2 \,\square\, \boxed{}$$

[0/1 P.]

c) Im dritten Entwurf wird die Tischplatte durch die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion q und der x-Achse modelliert (siehe nachstehende Abbildung).

$q(x) = \frac{7}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7} \cdot x\right)$ mit $0 \leq x \leq 7$

x, $q(x)$ ... Koordinaten in dm



1) Ermitteln Sie den Inhalt A der grau markierten Fläche. *[0/1 P.]*

Jemand ermittelt die Ableitungsfunktion q' und löst anschließend die nachstehende Gleichung.

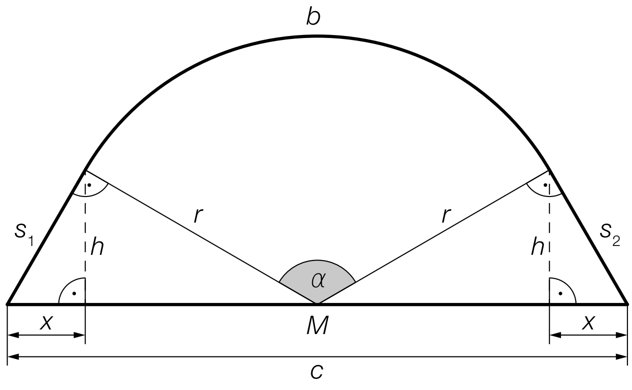
$0 = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7} \cdot x_P\right)$ mit $0 \leq x_P \leq 7$

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Punktes $P = (x_P \mid q(x_P))$. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

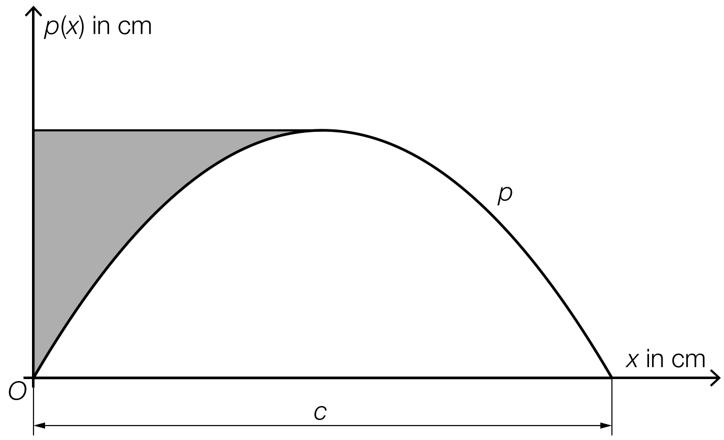
a1) $h = r \cdot \sin\left(\frac{180° - \alpha}{2}\right)$ *oder* $h = r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

a2)



a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das Markieren einer der beiden richtigen Strecken.

b1)



b2) $p(x) = -\frac{6}{245} \cdot (x - 35)^2 + 30$

b1) Ein Punkt für das Markieren der richtigen Fläche.
b2) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Funktionsgleichung.

c1) $q(x) = 2$ *oder* $\frac{7}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7} \cdot x\right) = 2$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 1{,}35...$
$x_2 = 5{,}64...$

$A = \int_{x_1}^{x_2} (q(x) - 2)\,\mathrm{d}x = 4{,}22...$

c2) Der Punkt P ist der Hochpunkt (Extrempunkt) von q.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Inhalts A der grau markierten Fläche.
c2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung des Punktes P.

Abrissbirnen*

Aufgabennummer: B_012

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Abrissbirnen sind kugel- oder birnenförmige Werkzeuge zum Abreißen von Gebäuden.

a) Eine Abrissbirne hat die Form einer Kugel mit dem Durchmesser d. Die Masse m und die Dichte ϱ der Kugel sind bekannt. Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

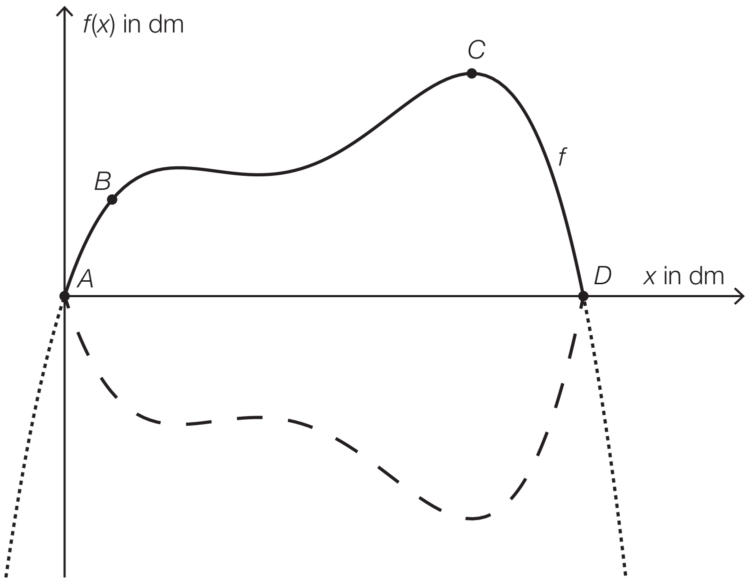
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Durchmessers d aus m und ϱ.

$d =$ ______________________________

Eine einfache Regel besagt: „Um die Masse einer Kugel zu verdoppeln, ist ihr Durchmesser um rund ein Viertel zu vergrößern."

– Zeigen Sie allgemein, dass diese Regel richtig ist.

b) Eine andere Abrissbirne kann als Körper modelliert werden, der durch Rotation des Graphen der Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ um die x-Achse entsteht.



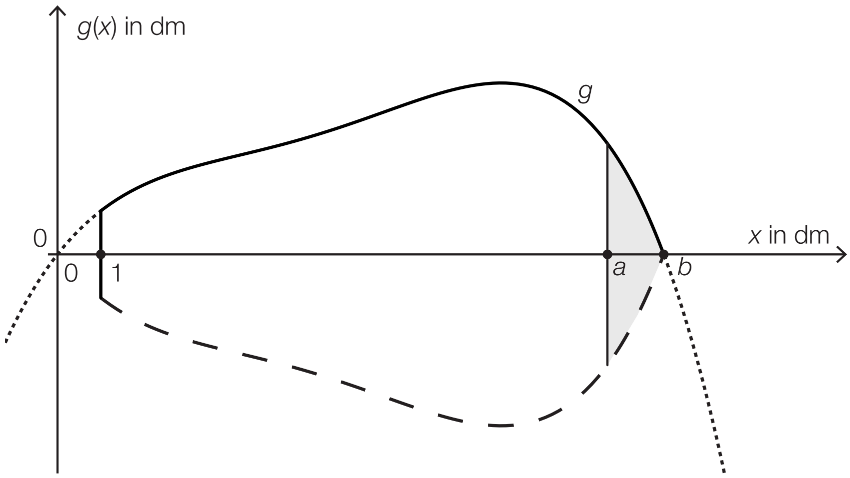
Dabei gilt:
$A = (0|0)$, $B = (1{,}1|2{,}2)$, $C = (9{,}4|5{,}1)$, $D = (12|0)$
Im Punkt C hat die Abrissbirne den größten Durchmesser.

– Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu A, B, C und D ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Polynomfunktion f.
– Ermitteln Sie die Koeffizienten von f.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; b]$ um die x-Achse entsteht die Form einer weiteren Abrissbirne (siehe nachstehende Abbildung):

$$g(x) = -0{,}00157 \cdot x^4 + 0{,}03688 \cdot x^3 - 0{,}29882 \cdot x^2 + 1{,}26325 \cdot x$$



– Berechnen Sie die Nullstelle b.

Das Volumen dieser Abrissbirne soll verkleinert werden.
Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; a]$ um die x-Achse entsteht die Form einer Abrissbirne mit einem um 10 dm³ kleineren Volumen.

– Berechnen Sie die in der obigen Abbildung dargestellte Stelle a.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$; $V = \frac{m}{\varrho}$ $\Rightarrow$ $r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot \varrho}}$ $\Rightarrow$ $d = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot m}{\pi \cdot \varrho}}$ *oder* $d = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot \varrho}}$

d_{neu} ... Durchmesser bei doppelter Masse

$$d_{neu} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2 \cdot m}{\pi \cdot \varrho}} = \sqrt[3]{2} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{\frac{6 \cdot m}{\pi \cdot \varrho}}}_{= d} = \sqrt[3]{2} \cdot d \approx 1{,}26 \cdot d$$

Der Durchmesser ist daher um rund 26 % (also um rund ein Viertel) zu vergrößern.

b) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

I: $f(0) = 0$
II: $f(1{,}1) = 2{,}2$
III: $f(9{,}4) = 5{,}1$
IV: $f(12) = 0$
V: $f'(9{,}4) = 0$

oder:

I: $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e = 0$
II: $a \cdot 1{,}1^4 + b \cdot 1{,}1^3 + c \cdot 1{,}1^2 + d \cdot 1{,}1 + e = 2{,}2$
III: $a \cdot 9{,}4^4 + b \cdot 9{,}4^3 + c \cdot 9{,}4^2 + d \cdot 9{,}4 + e = 5{,}1$
IV: $a \cdot 12^4 + b \cdot 12^3 + c \cdot 12^2 + d \cdot 12 + e = 0$
V: $4 \cdot a \cdot 9{,}4^3 + 3 \cdot b \cdot 9{,}4^2 + 2 \cdot c \cdot 9{,}4 + d = 0$

Berechnung der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}0066...$
$b = 0{,}1461...$
$c = -1{,}0476...$
$d = 2{,}9843...$
$e = 0$

c) Berechnung der Nullstelle b mittels Technologieeinsatz: $b = 14{,}0...$

$$\pi \cdot \int_a^b (g(x))^2 \, dx = 10$$

Berechnung der Stelle a mittels Technologieeinsatz: $a = 12{,}7...$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × D: für den richtigen Nachweis

b) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Nullstelle b
1 × B2: für die richtige Berechnung der Stelle a

Durchmesser einer Stahlwelle*

Aufgabennummer: B_019		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Ein Unternehmen stellt auf computergesteuerten Drehmaschinen Stahlwellen für Elektromotoren in Massenproduktion her.

a) Bei Maschine *A* sind die Durchmesser der hergestellten Stahlwellen annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 10,00 mm. In der nachstehenden Abbildung 1 ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.

Abbildung 1:

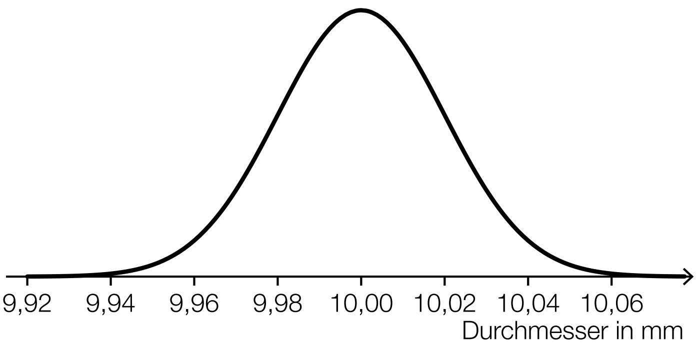
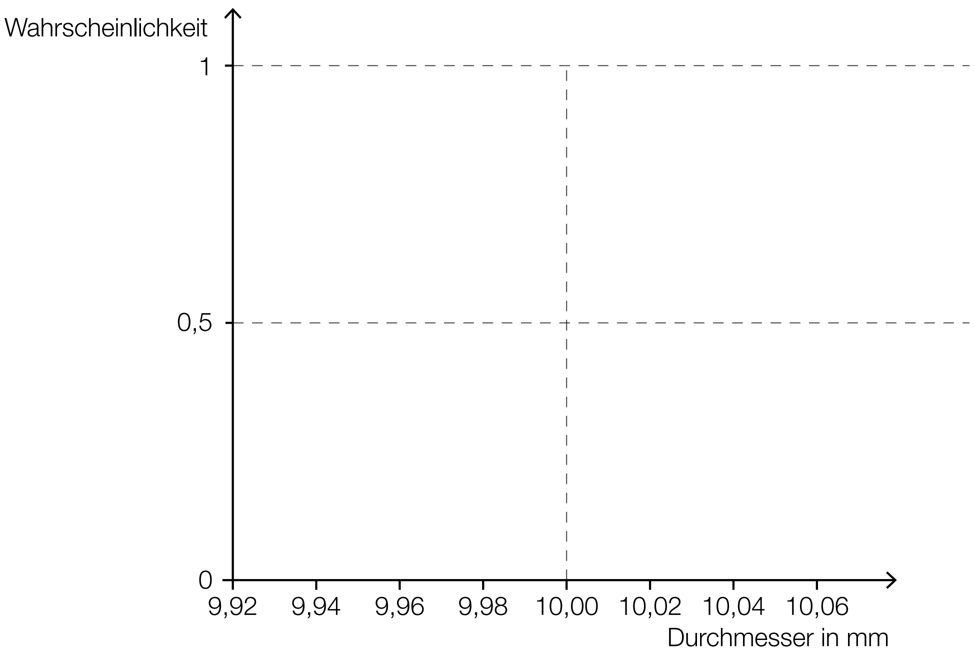


Abbildung 2:



– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion.
– Veranschaulichen Sie mithilfe der Verteilungsfunktion in Abbildung 2 die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Stahlwelle einen Durchmesser von mindestens 10,02 mm hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei Maschine *B* sind die Durchmesser der hergestellten Stahlwellen annähernd normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 0{,}02$ mm. Ein Durchmesser von 9,97 mm wird von 0,1 % der Stahlwellen unterschritten.

– Ermitteln Sie den zugehörigen Erwartungswert μ.

c) Bei Maschine *C* sind die Durchmesser der hergestellten Stahlwellen annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 10{,}00$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}03$ mm.

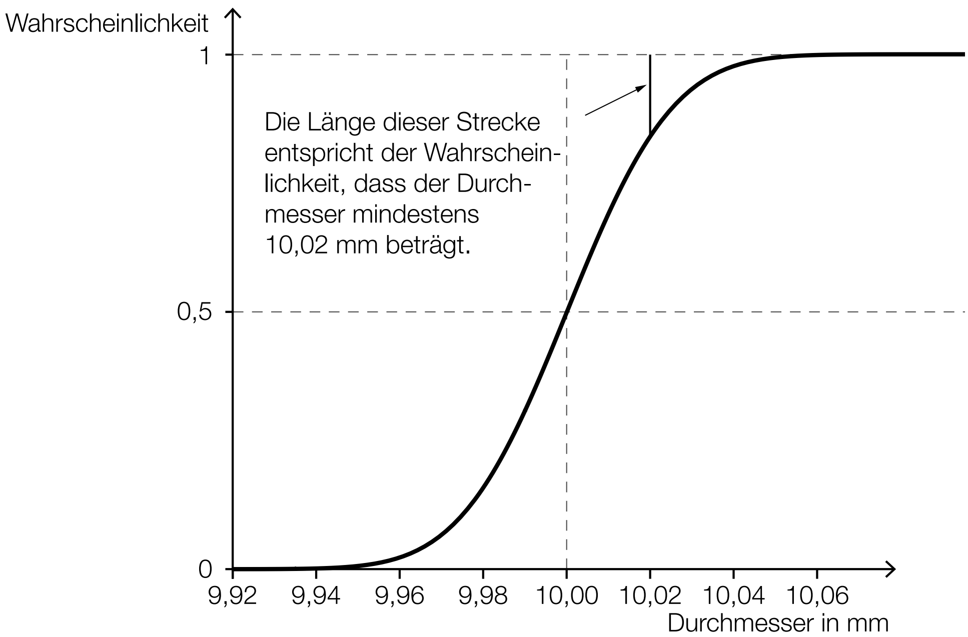
Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang *n* untersucht.

– Berechnen Sie für $n = 30$ den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 99 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.
– Geben Sie an, um welchen Faktor sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit sich die Breite des 99-%-Zufallsstreubereichs halbiert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) X ... Durchmesser in mm

$P(X \leq 9{,}97) = 0{,}001$

Berechnung von μ mittels Technologieeinsatz:

$\mu = 10{,}031... \text{ mm} \approx 10{,}03 \text{ mm}$

c) $\mu = 10{,}00$ mm und $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}03}{\sqrt{30}}$ mm

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

[9,985...; 10,014...]

Eine Halbierung der Breite erfordert, dass der Stichprobenumfang mit dem Faktor 4 multipliziert wird.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion in Abbildung 2 (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet)
   1 × A2: für die richtige Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Erwartungswerts μ

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs
   1 × C: für die richtige Angabe des Faktors

*Wings for Life World Run**

Aufgabennummer: B_022		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Beim *Wings for Life World Run* starten alle Läufer/innen gleichzeitig. Eine halbe Stunde später verlässt ein Verfolgerauto („Catcher-Car") den Start und fährt den Läuferinnen und Läufern nach. Die Teilnehmer/innen laufen jeweils so lange, bis sie vom Catcher-Car eingeholt werden.

Der vom Catcher-Car innerhalb der ersten 2,5 Stunden ab dem Start der Läufer/innen zurückgelegte Weg kann näherungsweise durch die folgende stückweise definierte Funktion s beschrieben werden:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0{,}5 \\ \boxed{} & \text{für } 0{,}5 < t \leq 1{,}5 \\ 16 \cdot t - 9 & \text{für } 1{,}5 < t \leq 2{,}5 \end{cases}$$

t ... Zeit ab dem Start der Läufer/innen in h
$s(t)$ ... der vom Catcher-Car zur Zeit t zurückgelegte Weg in km

Im Zeitintervall]0,5; 1,5] fährt das Catcher-Car mit konstanter Geschwindigkeit.

– Ergänzen Sie die Weg-Zeit-Funktion für das Zeitintervall]0,5; 1,5] in der gegebenen Funktionsdefinition.

Die Geschwindigkeit eines bestimmten Läufers kann näherungsweise durch folgende Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}73 \cdot t^2 + 2{,}43 \cdot t + 10$

t ... Zeit ab dem Start des Läufers in h
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Läufers zur Zeit t in km/h

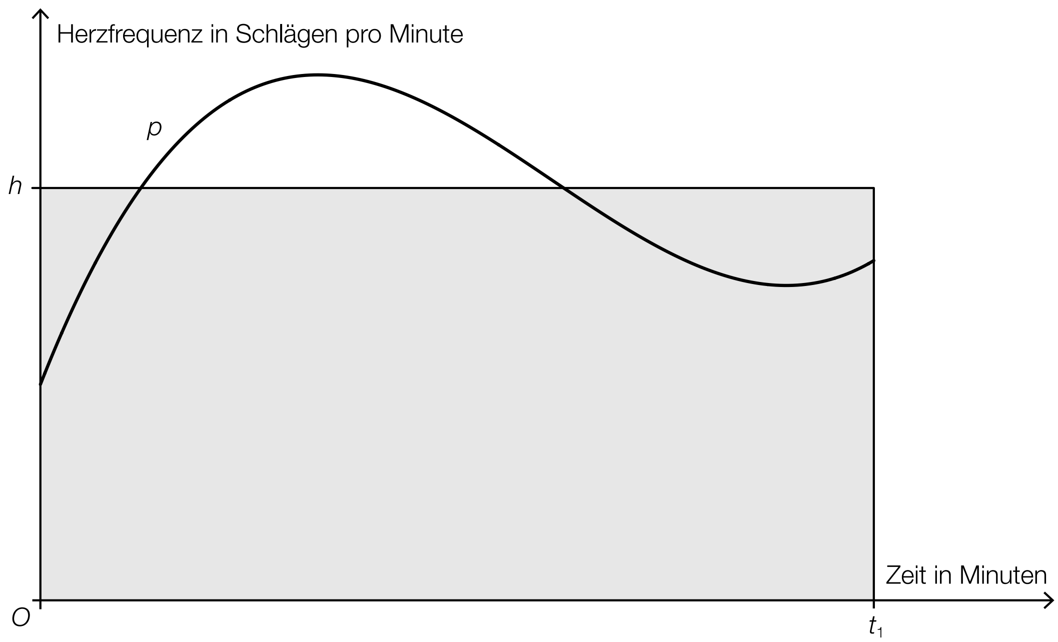
Der Läufer wird im Zeitintervall]1,5; 2,5] eingeholt.

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem dieser Läufer vom Catcher-Car eingeholt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der zeitliche Verlauf der Herzfrequenz einer Läuferin kann näherungsweise durch eine Funktion p beschrieben werden.

Der Graph von p ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Flächeninhalt des grau markierten Rechtecks entspricht dem Inhalt der Fläche unter dem Funktionsgraphen von p im Intervall $[0; t_1]$.



– Interpretieren Sie die Bedeutung von h im gegebenen Sachzusammenhang.
– Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Formel zur Berechnung von h, wenn die Funktion p bekannt ist.

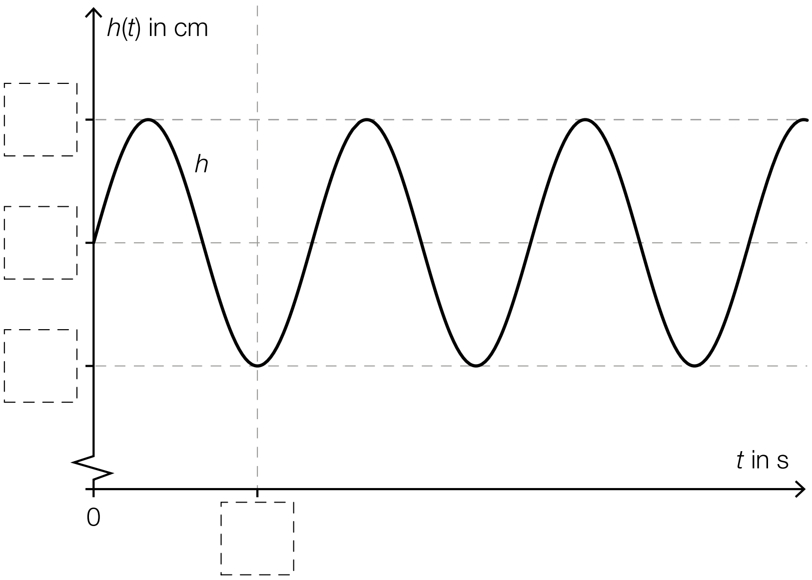
h = ____

c) Beim Laufen bewegt sich der Schwerpunkt des menschlichen Körpers in regelmäßigen Zeitabständen auf und ab.

Modellhaft kann der zeitliche Verlauf der Höhe des Schwerpunkts durch die Funktion h beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

$h(t) = 5 \cdot \sin(6 \cdot \pi \cdot t) + 110$

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... Höhe des Schwerpunkts über dem Boden zur Zeit t in cm



– Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s(0{,}5) = 0$
$s(1{,}5) = 15$

$s(t) = 15 \cdot (t - 0{,}5)$ für $0{,}5 < t \leq 1{,}5$

$\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t = 16 \cdot T - 9$

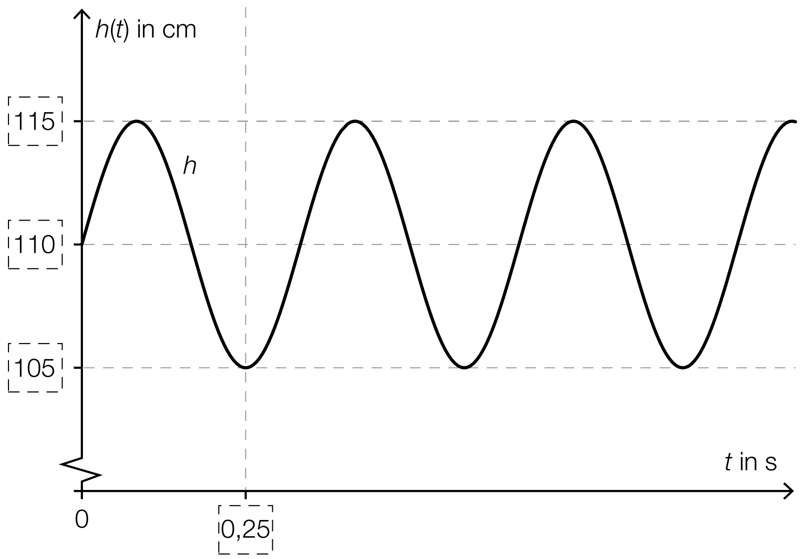
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $T = 1{,}97...$

Der Läufer wird nach etwa 2 Stunden eingeholt.

b) Die Seitenlänge h des Rechtecks stellt die mittlere Herzfrequenz im Zeitintervall $[0; t_1]$ dar.

$h = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} p(t)\,\mathrm{d}t$

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Ergänzen der Weg-Zeit-Funktion im Zeitintervall]0,5; 1,5]
1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts, zu dem der Läufer eingeholt wird

b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

c) 1 × C: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahlen

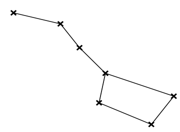
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sternbild *Großer Wagen* (2)*

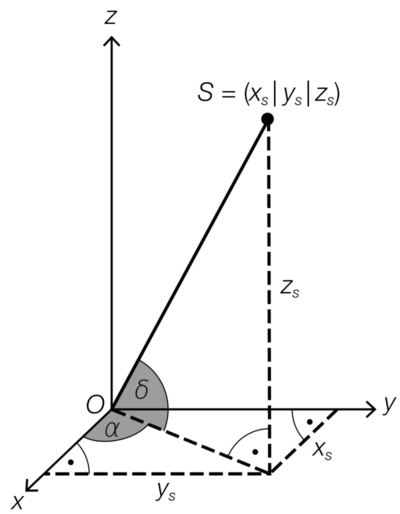
Aufgabennummer: B_032

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Entfernungen zwischen Sternen können in Lichtjahren angegeben werden.
Die nebenstehende Abbildung zeigt eine schematische Darstellung des Sternbilds *Großer Wagen*.



a) Astronomen verwenden verschiedene Koordinatensysteme. In einem Koordinatensystem mit der Erde im Koordinatenursprung O kann die Position eines Sterns S mithilfe der Winkel α und δ sowie der Entfernung $\overline{OS}$ von der Erde angegeben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Koordinate z_S aus dem Winkel δ und der Entfernung $\overline{OS}$.

z_S = ____

– Ordnen Sie den Koordinaten x_S und y_S jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

x_S =	
y_S =	

A	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
B	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
C	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\delta)$
D	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\delta)$

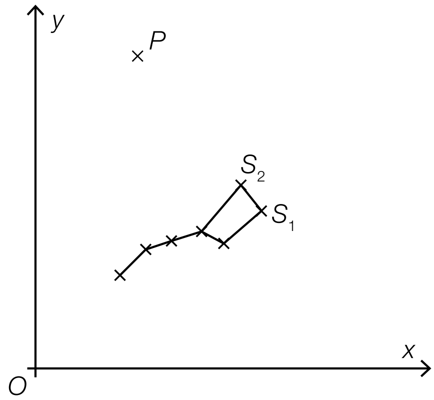
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Alkaid und Dubhe sind zwei Sterne des Sternbilds *Großer Wagen*. Ihre Positionen können mittels ihrer Koordinaten in Lichtjahren in Bezug auf ein bestimmtes kartesisches Koordinatensystem angegeben werden. Dabei befindet sich die Erde im Koordinatenursprung O.

Alkaid: $A = (-60|-31|79)$
Dubhe: $D = (-57|14|109)$

– Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OD}$.
– Ermitteln Sie die Entfernung der beiden Sterne voneinander.

c) In der nachstehenden Abbildung sind der *Große Wagen* und der Polarstern P in einem Koordinatensystem dargestellt.



Die Position des Polarsterns P kann nach folgender Faustregel bestimmt werden:
Der Polarstern P liegt auf der Geraden, die durch die Punkte S_1 und S_2 verläuft. Der Abstand zwischen S_2 und P ist das 5-Fache der Länge der Strecke S_1S_2.

– Übertragen Sie die Faustregel mithilfe der Vektorrechnung in einen mathematischen Ausdruck zur Berechnung von P.

Es gilt: $S_1 = (5{,}5|3{,}8)$ und $S_2 = (5{,}0|4{,}4)$

– Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P.

d) In der Astronomie wird als Maß für die Entfernung r eines Sterns von der Erde der sogenannte *Entfernungsmodul* $5 \cdot \lg\left(\frac{r}{10}\right)$ verwendet.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der <u>nicht</u> dem Entfernungsmodul entspricht. *[1 aus 5]*

$-5 \cdot \lg\left(\frac{10}{r}\right)$	☐
$-5 + \lg(r^5)$	☐
$\lg\left(\left(\frac{r}{10}\right)^5\right)$	☐
$5 \cdot \lg(r) - \lg(10)$	☐
$5 \cdot (\lg(r) - 1)$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $z_S = \overline{OS} \cdot \sin(\delta)$

$x_S =$	D
$y_S =$	C

A	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
B	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\delta)$
C	$\overline{OS} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\delta)$
D	$\overline{OS} \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\delta)$

b) $\cos(\varphi) = \dfrac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}}{\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OD}\right|} = \dfrac{11\,597}{\sqrt{10\,802} \cdot \sqrt{15\,326}} = 0{,}901... \quad \Rightarrow \quad \varphi = 25{,}66...°$

Der Winkel beträgt rund 25,7°.

$\sqrt{(-60-(-57))^2 + (-31-14)^2 + (79-109)^2} = 54{,}16...$

Die Entfernung der beiden Sterne beträgt rund 54,2 Lichtjahre.

c) $S_2 + 5 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$ *oder* $\overrightarrow{OS_2} + 5 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$

$\begin{pmatrix} 5{,}0 \\ 4{,}4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 7{,}4 \end{pmatrix}$

$P = (2{,}5\,|\,7{,}4)$

d)

$5 \cdot \lg(r) - \lg(10)$	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × C: für die richtige Zuordnung

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Winkels
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Entfernung

c) 1 × A: für das richtige Übertragen der Faustregel in einen mathematischen Ausdruck
1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten des Punktes P

d) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Bewegung eines Bootes*

Aufgabennummer: B_074

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Bewegung eines Bootes wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -k \cdot v$$

m … Masse des Bootes
$v > 0$ … Geschwindigkeit des Bootes
$k > 0$ … Konstante
t … Zeit

– Argumentieren Sie mathematisch anhand der Differenzialgleichung, dass die Geschwindigkeit mit zunehmender Zeit t abnimmt.
– Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

b) Ein Boot wird von einem Motorboot geschleppt. Zur Zeit $t = 0$ s wird das Schleppseil gelöst.
Die nachstehende Tabelle gibt die Geschwindigkeit des Bootes zu 4 verschiedenen Zeiten an.

Zeit in s	3	9	15	21
Geschwindigkeit in m/s	6,5	2,5	1,1	0,5

– Ermitteln Sie mithilfe der Daten aus der obigen Tabelle eine Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit des Bootes beschreibt.
– Ermitteln Sie mit dieser Ausgleichsfunktion einen Schätzwert für die Geschwindigkeit des Bootes zur Zeit $t = 5$ s.

c) Für einen bestimmten Zeitraum kann der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines anderen Motorboots durch die Funktion v_{MB} näherungsweise beschrieben werden:

$$v_{MB}(t) = a + b \cdot (e^{-0,1 \cdot t} - e^{-t})$$

t ... Zeit
$v_{MB}(t)$ ... Geschwindigkeit des Motorboots zur Zeit t
a, b ... positive Konstante

– Argumentieren Sie mathematisch, dass die Gerade mit der Gleichung $v = a$ eine Asymptote dieser Funktion ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{k}{m} \cdot v$

Da v, m und k größer als null sind, bedeutet das Minuszeichen, dass die Geschwindigkeit abnimmt.

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

oder:

$\int \frac{v'}{v} \mathrm{d}t = \int -\frac{k}{m} \mathrm{d}t$

$\ln|v(t)| = -\frac{k}{m} \cdot t + C_1$

$v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

b) Ermitteln der Gleichung der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$v(t) = 9{,}49 \cdot 0{,}8677^t$ *(Parameter gerundet)*

oder:

$v(t) = 9{,}49 \cdot e^{-0{,}1419 \cdot t}$ *(Parameter gerundet)*

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in s

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Parameter bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$v(5) = 4{,}66...$

Die Geschwindigkeit des Bootes zur Zeit $t = 5$ s beträgt rund 4,7 m/s.

c) Für t gegen unendlich gehen $e^{-0{,}1 \cdot t}$ und e^{-t} gegen null und damit geht auch $b \cdot (e^{-0{,}1 \cdot t} - e^{-t})$ gegen null. Somit ist die Gerade mit der Gleichung $v = a$ eine Asymptote von v_{MB}.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Argumentation
   1 × B: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung

b) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion
   1 × B2: für das richtige Ermitteln der Geschwindigkeit

c) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation

Smartphones (2)*

Aufgabennummer: B_079

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Akku eines Smartphones entlädt sich aufgrund von Hintergrundanwendungen auch dann, wenn das Gerät nicht aktiv benützt wird.

Für ein bestimmtes Smartphone wird die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent beobachtet. Zur Zeit $t = 0$ ist der Akku vollständig aufgeladen.

Zeit t in Stunden	Akku-Ladestand in Prozent
0	100
3	94
6	81
10	71
18	43

Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands in Prozent soll beschrieben werden.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

Bei einem Akku-Ladestand von 15 % sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

– Berechnen Sie, wie viele Stunden nach dem vollständigen Aufladen dies gemäß diesem linearen Regressionsmodell der Fall ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands beim Aufladen lässt sich näherungsweise durch die Funktion A beschreiben:

$A(t) = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn des Aufladens in h
$A(t)$ … Akku-Ladestand zur Zeit t in Prozent
λ … positiver Parameter

– Argumentieren Sie mathematisch, dass sich die Funktionswerte von A mit wachsendem t dem Wert 100 annähern.

2 Stunden nach Beginn des Aufladens beträgt der Akku-Ladestand 80 %.

– Berechnen Sie λ.
– Berechnen Sie, zu welcher Zeit nach Beginn des Aufladens der Akku-Ladestand 90 % beträgt.

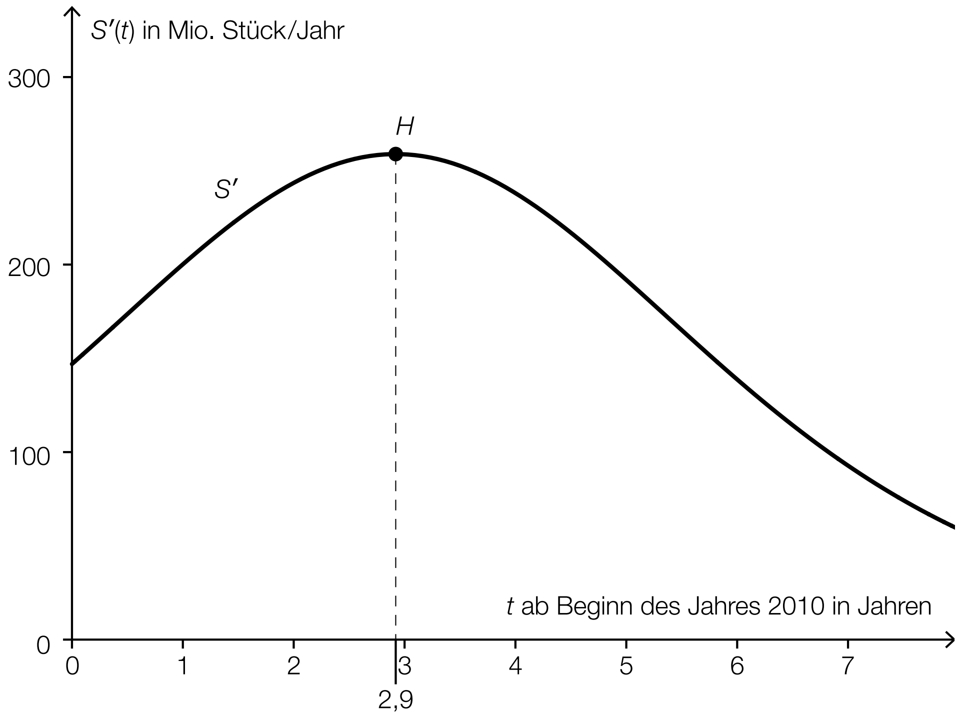
c) Die Entwicklung der weltweiten Verkaufszahlen von Smartphones kann modellhaft durch die Funktion S beschrieben werden:

$$S(t) = \frac{1\,918}{1 + 4{,}84 \cdot e^{-0{,}54 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2010)
$S(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften Smartphones in Millionen Stück

– Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells die Anzahl der bis zum Beginn des Jahres 2020 insgesamt verkauften Smartphones.

Im nachstehenden Diagramm ist der Graph der Ableitungsfunktion S' dargestellt. Auf dem Graphen von S' ist der Hochpunkt H markiert.



– Beschreiben Sie die mathematische Bedeutung der Stelle $t = 2{,}9$ in Bezug auf die Funktion S.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$L(t) = -3{,}210 \cdot t + 101{,}554$ *(Koeffizienten gerundet)*

t ... Zeit in h
$L(t)$ ... Akku-Ladestand zur Zeit t in %

$15 = -3{,}210 \cdot t + 101{,}554$
$t = 26{,}9...$

Nach etwa 27 Stunden sollte das Smartphone wieder ans Stromnetz angeschlossen werden.

b) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-\lambda \cdot t}$ gegen null, und damit geht $100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ gegen 100.

$80 = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot 2}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = 0{,}72345...$

$90 = 100 - 85 \cdot e^{-0{,}72345... \cdot t}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 2{,}9...$

Nach etwa 3 Stunden ist ein Ladestand von 90 % erreicht.

c) $S(10) = \frac{1\,918}{1 + 4{,}84 \cdot e^{-0{,}54 \cdot 10}} = 1\,876{,}9...$

Gemäß diesem Modell werden bis zum Beginn des Jahres 2020 rund 1 877 Millionen Smartphones verkauft.

$t = 2{,}9$ ist die Wendestelle der Funktion S.

oder:

$t = 2{,}9$ ist die Stelle maximalen Wachstums von S.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion
   1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

b) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation
   1 × B1: für die richtige Berechnung von λ
   1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

c) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Funktionswerts
   1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Stelle $t = 2{,}9$ in Bezug auf die Funktion S

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Höhe der Wolkenuntergrenze*

Aufgabennummer: B_110

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Höhe der Wolkenuntergrenze kann auf verschiedene Arten näherungsweise bestimmt werden.

a) Die Höhe der Wolkenuntergrenze wurde früher mithilfe eines Nachtwolkenscheinwerfers bestimmt. Folgende Anweisung musste man dabei befolgen:

„Platzieren Sie auf einer horizontalen Ebene den Scheinwerfer in einem Punkt P so, dass sein Lichtstrahl senkrecht nach oben gerichtet ist.
Dort erzeugt er auf der Wolkenuntergrenze in der Höhe h einen punktförmigen Lichtfleck L.
Begeben Sie sich in einen anderen Punkt Q dieser Ebene und messen Sie die Streckenlänge $\overline{PQ}$.
Messen Sie den Höhenwinkel α, unter dem der Lichtfleck L nun von Punkt Q aus gesehen wird.“

– Veranschaulichen Sie den beschriebenen Sachverhalt mithilfe einer Skizze. Beschriften Sie P, Q, L, h und α in dieser Skizze.
– Erstellen Sie eine Formel, mit deren Hilfe man die Höhe der Wolkenuntergrenze h mit den gemessenen Größen bestimmen kann.

h = ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein *Ceilometer* ist ein Messgerät, mit dem man aufgrund einer Lichtlaufzeitmessung die Höhe der Wolkenuntergrenze bestimmen kann. Dabei gilt:

$h = \frac{c \cdot t}{2}$

h … Höhe der Wolkenuntergrenze in m
t … Lichtlaufzeit in s
$c \approx 300\,000\,000$ m/s ... Lichtgeschwindigkeit

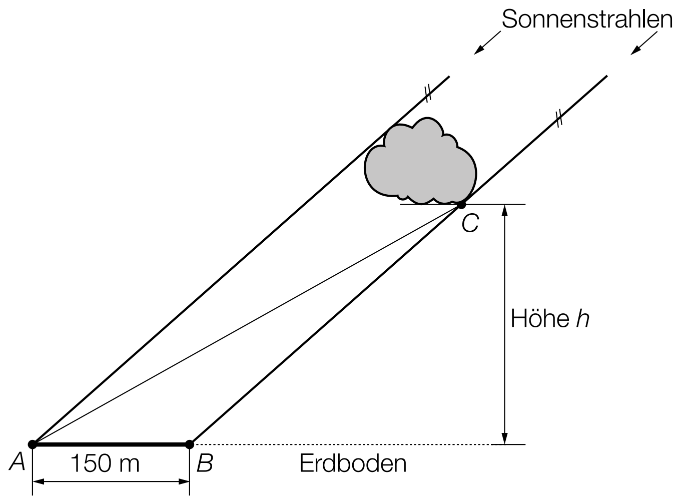
Das Gerät misst eine Lichtlaufzeit von 10 μs.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die Höhe der Wolkenuntergrenze h in Metern korrekt ermittelt wird. *[1 aus 5]*

$\frac{300 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{2}$	☐
$\frac{300 \cdot 10^{6} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{5}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{8} \cdot 10 \cdot 10^{9}}{2}$	☐
$\frac{3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{-5}}{2}$	☐

c) Eine Wolke wirft einen 150 m langen Schatten auf den Erdboden. Von A aus sieht man die Wolke unter dem Sehwinkel $\alpha = 4°$. Der Einfallswinkel der parallelen Sonnenstrahlen gegenüber der Horizontalen beträgt $\beta = 30°$.

Die folgende Abbildung stellt diese Situation vereinfacht und nicht maßstabgetreu dar:

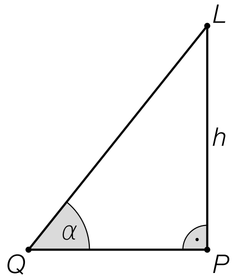


– Tragen Sie die gegebenen Winkel α und β in die obige Abbildung ein.
– Berechnen Sie die Entfernung $\overline{BC}$.
– Berechnen Sie die Höhe h.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

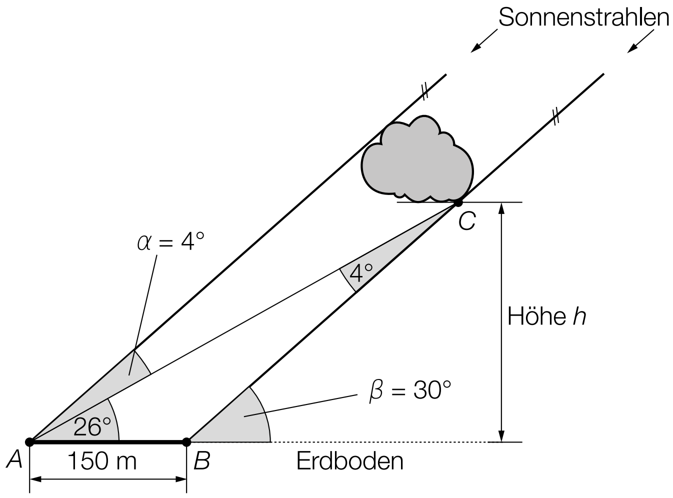


$h = \overline{PQ} \cdot \tan(\alpha)$

b)

$\frac{3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-5}}{2}$	☒

c)



$$\frac{\overline{BC}}{\sin(26°)} = \frac{150}{\sin(4°)}$$

$$\overline{BC} = \frac{150}{\sin(4°)} \cdot \sin(26°) = 942{,}6...$$

Die Entfernung $\overline{BC}$ beträgt rund 943 m.

$$\sin(\beta) = \frac{h}{\overline{BC}}$$

$$h = \overline{BC} \cdot \sin(\beta) = 471{,}3...$$

Die Höhe h beträgt rund 471 m.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Veranschaulichen in der Skizze
   1 × A2: für das richtige Erstellen der Formel

b) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

c) 1 × C: für das richtige Eintragen der beiden gegebenen Winkel
   1 × B1: für die richtige Berechnung der Entfernung $\overline{BC}$
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe h

Würfel (2)*

Aufgabennummer: B_115

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das im Folgenden beschriebene Spiel wird mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.

Es werden 2 Spielwürfel gleichzeitig geworfen und es wird deren Augensumme bestimmt. Nun sollen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden.

– Tragen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in die nachstehende Tabelle ein.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit											

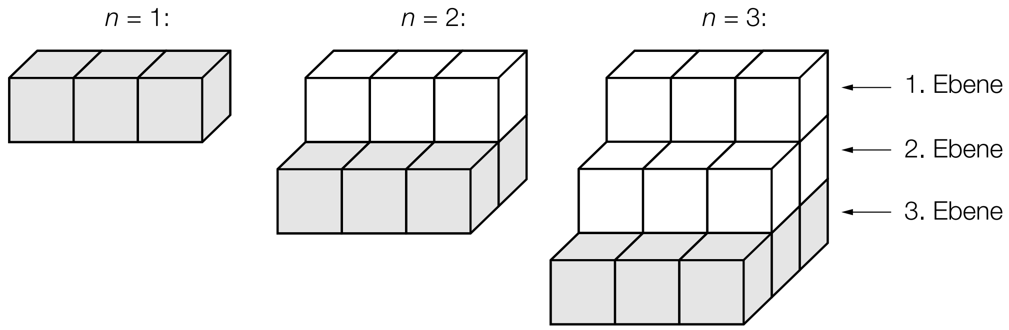
Es wird Ihnen nun folgendes Spiel vorgeschlagen:

Sie gewinnen, wenn die Augensumme 5, 6, 7 oder 8 beträgt.
oder
Sie gewinnen mit allen übrigen Augensummen.

– Ermitteln Sie, welche der beiden Möglichkeiten die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Mit Würfeln wird eine Treppe gebaut:



Das obige Bauschema soll auf diese Art fortgesetzt werden.

– Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz, mit dem man die Anzahl der Würfel in der n-ten Ebene berechnen kann.
– Bestimmen Sie, wie viele Würfel in der 7. Ebene liegen.

Die Anzahl s_n der Würfel, die für eine solche Treppe aus n Ebenen insgesamt benötigt wird, kann mithilfe der folgenden Formel bestimmt werden:

$s_n = 1{,}5 \cdot (n^2 + n)$

– Berechnen Sie, aus wie vielen Ebenen eine solche Treppe besteht, wenn man insgesamt 360 Würfel verbaut.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$P(\text{„Augensumme ist 5, 6, 7 oder 8“}) = \frac{4+5+6+5}{36} = \frac{20}{36}$

$P(\text{„übrige Augensummen“}) = 1 - \frac{20}{36} = \frac{16}{36}$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Augensumme 5, 6, 7 oder 8 zu erhalten, ist größer.

b) $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = a_n + 3$

$a_7 = 21$

$360 = 1{,}5 \cdot (n^2 + n)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$n_1 = 15$, ($n_2 = -16$)
Die Treppe besteht aus 15 Ebenen, wenn man insgesamt 360 Würfel verbaut.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten
1 × B: für das richtige Ermitteln, welche der beiden Möglichkeiten die höhere Gewinnwahrscheinlichkeit hat

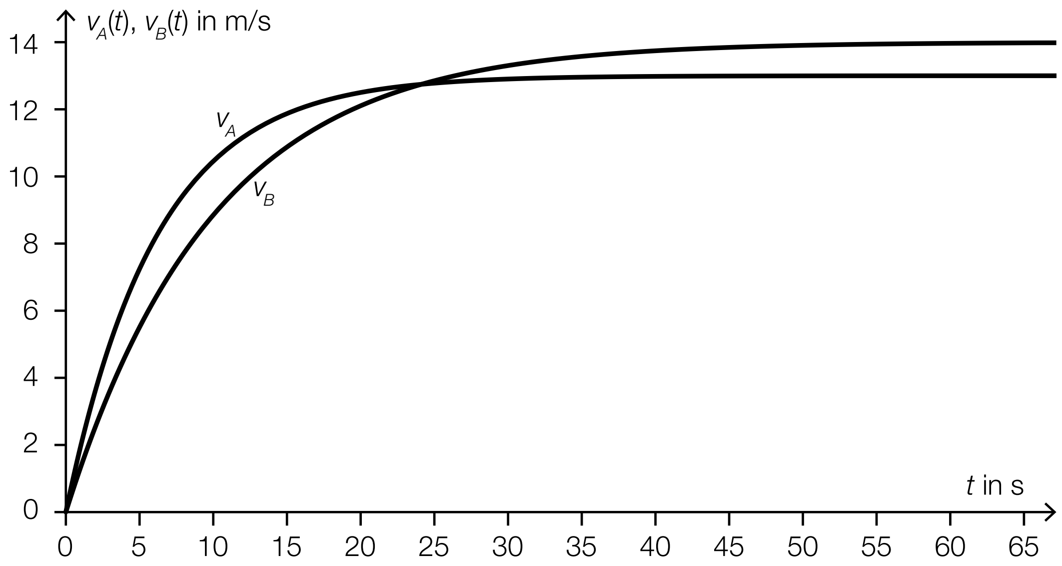
b) 1 × A: für das richtige Erstellen des rekursiven Bildungsgesetzes
1 × B1: für das richtige Bestimmen der Anzahl der Würfel in der 7. Ebene
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der Ebenen

Motorbootrennen (1)*

Aufgabennummer: B_359

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In der nachstehenden Abbildung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zweier Motorboote *A* und *B* während einer Wettfahrt modellhaft dargestellt.



a) Für die Funktion v_B gilt:

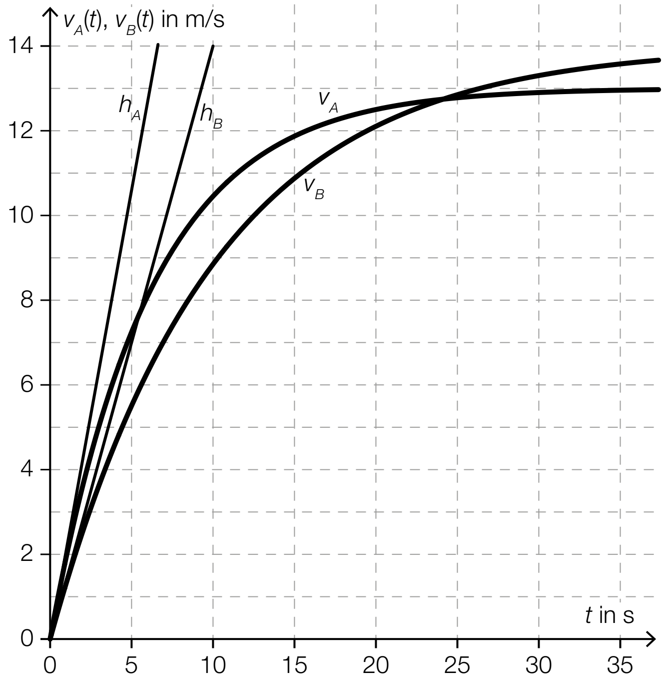
$v_B(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot t})$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Beschleunigung des Bootes pro Sekunde abnimmt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Tangenten h_A und h_B an die Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen zur Zeit $t = 0$.

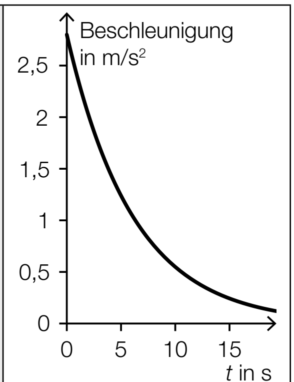


1) Interpretieren Sie die Steigung der Tangente h_A im gegebenen Sachzusammenhang.

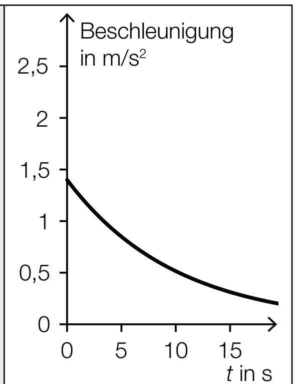
2) Ordnen Sie den beiden Ableitungsfunktionen $\frac{dv_A}{dt}$ und $\frac{dv_B}{dt}$ jeweils die entsprechende Grafik aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\frac{dv_A}{dt}$	
$\frac{dv_B}{dt}$	

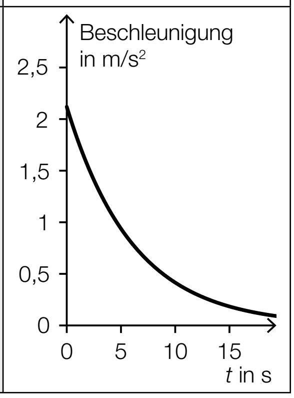
A



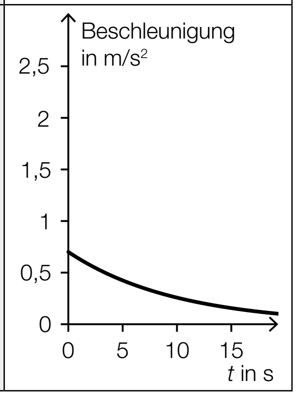
C



B



D



c) Eine Funktionsgleichung der in der obigen Abbildung dargestellten Funktion v_B für das Motorboot B lautet:

$v_B(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot t})$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

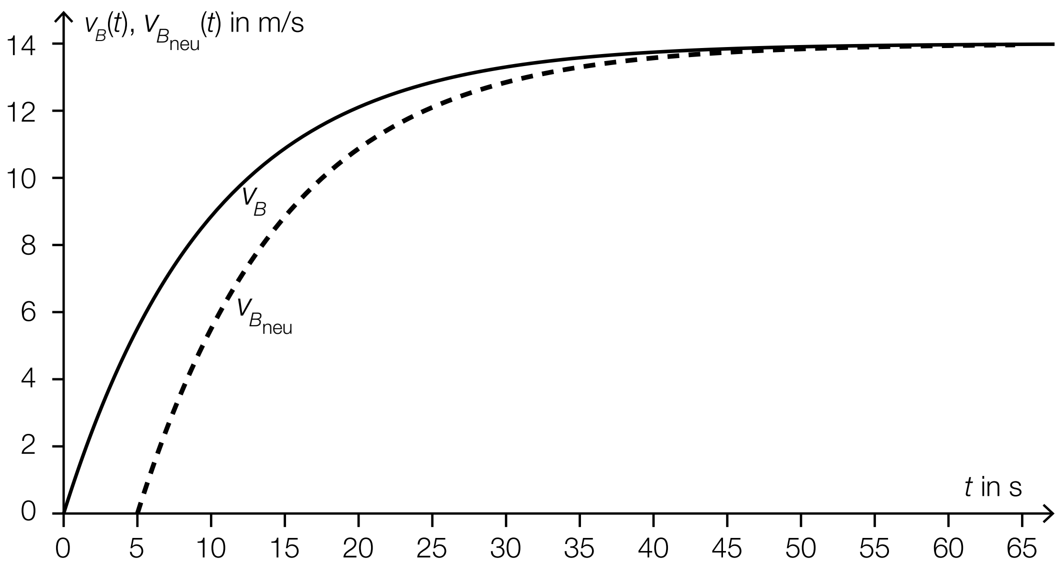
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung desjenigen Weges s, den das Motorboot B in den ersten n Sekunden zurücklegt.

$s =$ ____

Nach einer Fahrt von 700 m überholt das Motorboot B das Motorboot A.

2) Berechnen Sie den Zeitpunkt dieses Überholens.

In der nachstehenden Abbildung beschreibt der Graph der Funktion $v_{B_{neu}}$ den Fall, dass das Motorboot B um 5 Sekunden später startet (bei sonst unverändertem Geschwindigkeitsverlauf).



3) Erstellen Sie ausgehend von der Funktion v_B eine Gleichung der Funktion $v_{B_{neu}}$.

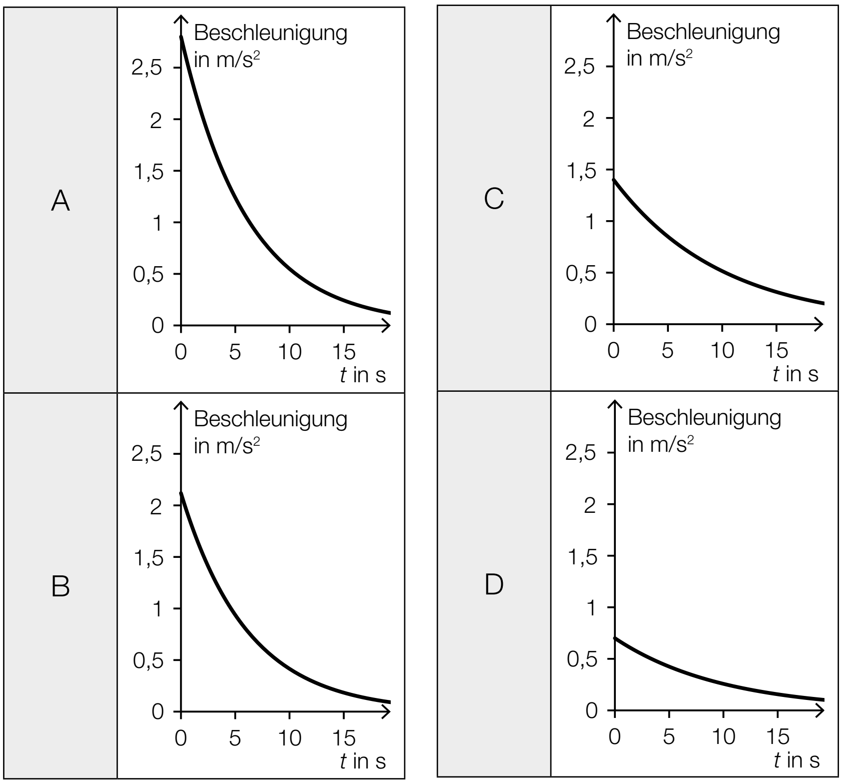
Möglicher Lösungsweg

a1) $v_B'(t) = 1{,}4 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} = 1{,}4 \cdot 0{,}9048...^t$
Pro Sekunde nimmt die Beschleunigung in Bezug auf den jeweils vorigen Wert um rund 9,5 % ab.

b1) Die Steigung der Tangente h_A gibt die Beschleunigung des Motorboots A zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

b2)

$\frac{dv_A}{dt}$	B
$\frac{dv_B}{dt}$	C



c1) $s = \int_0^n v_B(t)\,\mathrm{d}t$

c2) $700 = \int_0^n v_B(t)\,\mathrm{d}t$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$n = 59{,}9...$
Das Motorboot B überholt das Motorboot A nach rund 60 Sekunden.

c3) $v_{B_{\text{neu}}}(t) = 14 \cdot (1 - e^{-0{,}1 \cdot (t-5)})$

oder:

$v_{B_{\text{neu}}}(t) = v_B(t - 5)$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes

b) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Steigung der Tangente h_A im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für die richtige Zuordnung

c) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des zurückgelegten Weges
1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts des Überholens
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion $v_{B_{\text{neu}}}$

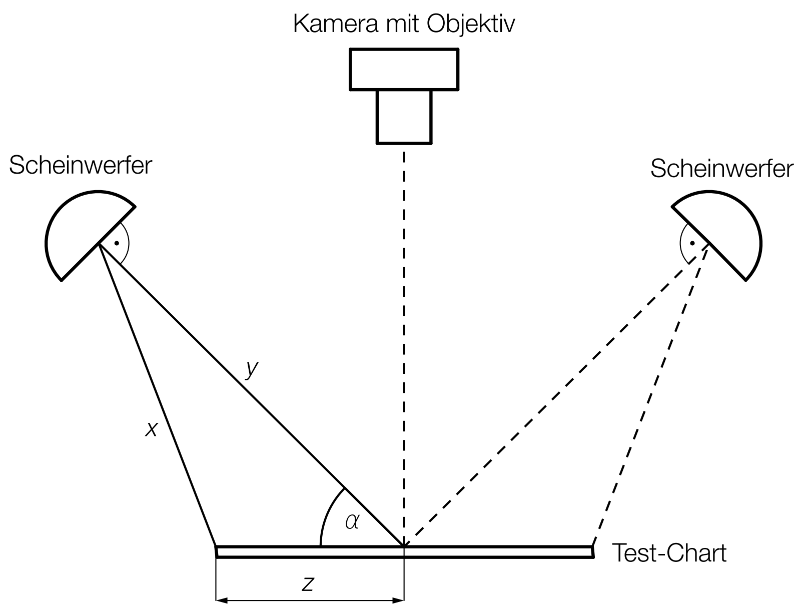
Qualitätstest bei Objektiven (1)*

Aufgabennummer: B_326

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Um das Objektiv einer Digitalkamera zu testen, fotografiert man eine genormte Tafel (Test-Chart) mit einem Test-Motiv und lässt das Foto von einer speziellen Software auswerten.

a) Eine Fotografin möchte ihr neues Objektiv testen. Dazu verwendet sie folgenden Aufbau:



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus y, z und α.

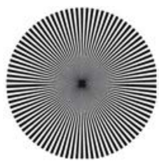
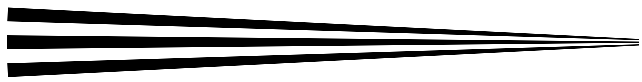
$x =$ ____

Bei einem bestimmten Test gilt:
$\alpha = 45°$
$x = 121$ cm
$z = 70$ cm

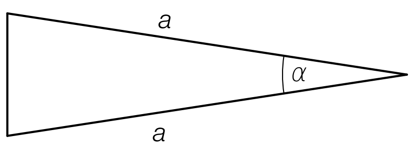
2) Berechnen Sie die Entfernung y.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein beliebtes Motiv für solche Test-Charts ist ein spezieller Stern:

ganzer Stern	Detailansicht
	

Ein Stern besteht aus einzelnen Abschnitten, die abwechselnd schwarz und weiß sind. Jeder dieser Abschnitte kann näherungsweise als Dreieck mit folgenden Abmessungen beschrieben werden:



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des obigen Dreiecks aus a und α.

A = ____

Ein ganzer Stern besteht aus n weißen und n schwarzen Abschnitten.

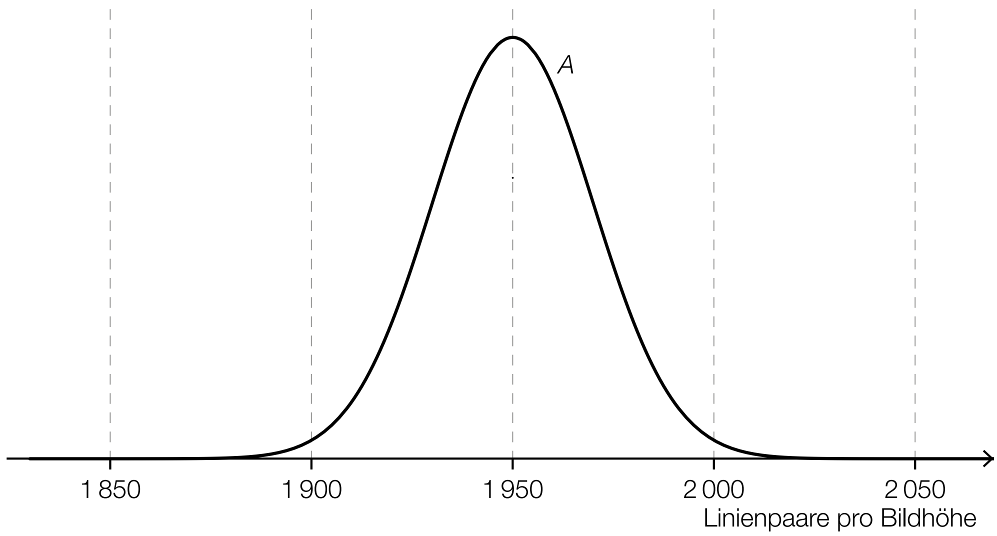
2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α aus n.

α = ____

c) Ein für Digitalkameras relevantes Qualitätsmerkmal ist die Anzahl der Linienpaare pro Bildhöhe (LP/BH).

Für einen bestimmten Objektiv-Typ ist diese Kenngröße annähernd normalverteilt. Die Objektive werden von 3 verschiedenen Herstellern – A, B und C – jeweils mit dem Erwartungswert $\mu = 1\,950$ LP/BH und der Standardabweichung σ_A, σ_B bzw. σ_C produziert.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion für Hersteller A dargestellt.



1) Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion für Hersteller B, wenn für die Standardabweichungen gilt: $\sigma_A < \sigma_B$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein neu produziertes Objektiv des Herstellers C mindestens 1 900 LP/BH darstellen kann, beträgt 97,7 %.

2) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ_C.

Möglicher Lösungsweg

a1) $x = \sqrt{y^2 + z^2 - 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos(\alpha)}$

a2) γ ... Winkel gegenüber von z
β ... Winkel gegenüber von y

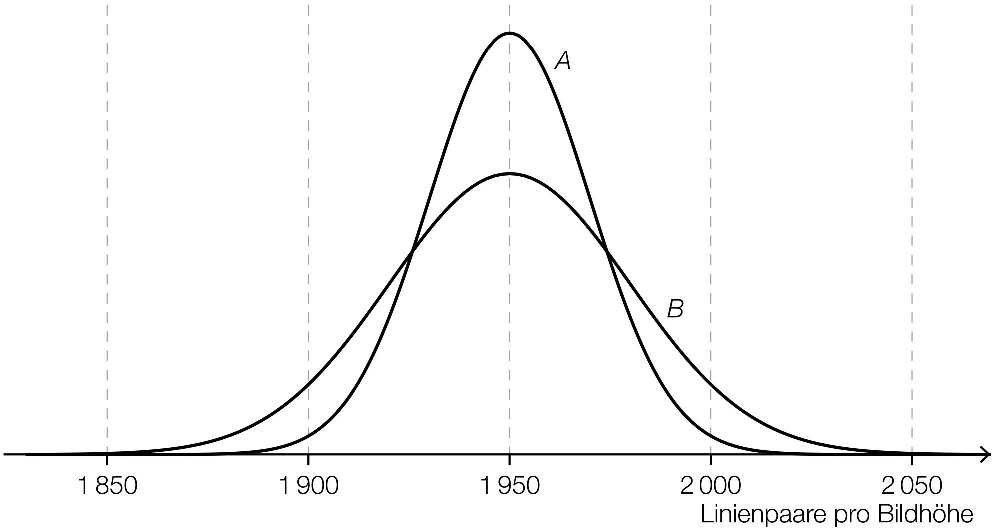
$\frac{121}{\sin(45°)} = \frac{70}{\sin(\gamma)} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 24{,}1...°$
$\beta = 180° - 45° - 24{,}1...° = 110{,}8...°$

$\frac{y}{\sin(110{,}8...°)} = \frac{121}{\sin(45°)} \quad \Rightarrow \quad y = 159{,}9...$
Die Entfernung y beträgt rund 160 cm.

b1) $A = \frac{a^2 \cdot \sin(\alpha)}{2}$

b2) $\alpha = \frac{360°}{2 \cdot n}$

c1)



c2) X ... Anzahl der Linienpaare pro Bildhöhe
$P(X \geq 1\,900) = 0{,}977$

Berechnung von σ_C mittels Technologieeinsatz:
$\sigma_C = 25{,}0...$
Die Standardabweichung beträgt bei Objektiven des Herstellers C rund 25 LP/BH.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von x
1 × A2: für den richtigen Ansatz zur Berechnung der Entfernung y
1 × B: für die richtige Berechnung der Entfernung y

b) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A
1 × A2: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Winkels α

c) 1 × A: für das richtige Skizzieren des Graphen der Dichtefunktion für Hersteller B (Maximumstelle ebenfalls bei 1 950 LP/BH, Glockenkurve niedriger und breiter als bei A)
1 × B: für die richtige Berechnung der Standardabweichung σ_C

Gebäudetechnik*

Aufgabennummer: B_260

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Bereich der Gebäudetechnik spielen Temperatur, Schalldämmung und CO_2-Gehalt der Luft eine wichtige Rolle.

a) Die mittlere Tagestemperatur in Bregenz soll für einen bestimmten Zeitraum durch eine Polynomfunktion 3. Grades T angenähert werden:

$T(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$

t … Zeit in Tagen
$T(t)$ … mittlere Tagestemperatur zur Zeit t in °C

Es wurden folgende Daten ermittelt:
Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) lag die mittlere Tagestemperatur bei –5 °C.
Zur Zeit $t = 98$ Tage betrug sie +8 °C; zu dieser Zeit lag auch der Wendepunkt des Temperaturverlaufs vor.
Zur Zeit $t = 210$ Tage erreichte die mittlere Tagestemperatur +20 °C.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

b) Um das Gesamtschalldämmmaß R_{Ges} einer Wand aus Ziegelmauer und Fenster in Dezibel (dB) zu berechnen, wird in der Gebäudetechnik die nachstehende Formel verwendet.

$R_{Ges} = -10 \cdot \lg\left(f_F \cdot 10^{-\frac{R_F}{10}} + f_Z \cdot 10^{-\frac{R_Z}{10}}\right)$

f_F … relativer Flächenanteil des Fensters an der gesamten Wandfläche
f_Z … relativer Flächenanteil der Ziegelmauer an der gesamten Wandfläche
R_F, R_Z … Schalldämmmaß des Fensters bzw. der Ziegelmauer in dB
R_{Ges} … Gesamtschalldämmmaß der Wand in dB

Ein Bauunternehmen plant, aus einer 50 m² großen Wand eine Fensterfläche herauszubrechen. Dabei hat das Fenster ein Schalldämmmaß von $R_F = 43$ dB, die Ziegelmauer ein Schalldämmmaß von $R_Z = 65$ dB.

Es wird ein Gesamtschalldämmmaß R_{Ges} von mindestens 55 dB für diese Wand gefordert.

1) Erstellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des relativen Flächenanteils f_F, den die Fensterfläche in dieser Wand maximal erreichen darf.

2) Berechnen Sie diese Fensterfläche in m².

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In einem Schlafzimmer mit einem Luftvolumen von 45 m^3 wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Lüftungsanlage eingeschaltet. Zu diesem Zeitpunkt beträgt der CO_2-Gehalt der Luft im Zimmer 0,2 Vol.-%, d. h., das CO_2-Volumen beträgt 0,2 % des gesamten Luftvolumens.

Die nachstehende Differenzialgleichung beschreibt das CO_2-Volumen V (in m^3) im Schlafzimmer in Abhängigkeit von der Zeit t (in min) ab dem Einschalten der Lüftung:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0{,}006 - \frac{V}{3}$$

1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

2) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit der ursprüngliche CO_2-Gehalt halbiert ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) $T(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$
$T''(t) = 6 \cdot a \cdot t + 2 \cdot b$

$T(0) = -5$
$T(98) = 8$
$T(210) = 20$
$T''(98) = 0$

oder:

$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = -5$
$a \cdot 98^3 + b \cdot 98^2 + c \cdot 98 + d = 8$
$a \cdot 210^3 + b \cdot 210^2 + c \cdot 210 + d = 20$
$6 \cdot a \cdot 98 + 2 \cdot b = 0$

b1) $55 = -10 \cdot \lg\left(f_F \cdot 10^{-\frac{43}{10}} + (1 - f_F) \cdot 10^{-\frac{65}{10}}\right)$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$f_F = 0{,}0571...$

maximale Fensterfläche: $0{,}0571... \cdot 50 = 2{,}857...$

Die maximale Fensterfläche, die das geforderte minimale Gesamtschalldämmmaß erfüllt, beträgt rund 2,86 m².

c1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$V(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0{,}018$

t … Zeit in min
$V(t)$ … CO_2-Volumen zur Zeit t in m^3

oder:

allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $\frac{dV}{dt} + \frac{V}{3} = 0$:
$V_h(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}}$

Lösungsansatz zur Ermittlung der partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung
$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{3} = 0{,}006$:
$V_p(t) = a$
$0 + \frac{a}{3} = 0{,}006 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}018$
$V(t) = V_h(t) + V_p(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0{,}018$

Auch eine Berechnung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung mit einem anderen Ansatz (z. B. mit der Methode Trennen der Variablen*) ist als richtig zu werten.*

c2) $V(0) = 0{,}002 \cdot 45 = 0{,}09$
$0{,}09 = C \cdot e^{-\frac{0}{3}} + 0{,}018 \quad \Rightarrow \quad C = 0{,}072$
$\frac{1}{2} \cdot V(0) = 0{,}045 = 0{,}072 \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0{,}018$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 2{,}94\ldots$

Nach etwa 2,9 min ist der ursprüngliche CO_2-Gehalt halbiert.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der gegebenen Temperaturen
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 2. Ableitung

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung zur Berechnung des relativen Flächenanteils f_F
1 × B: für die richtige Berechnung der maximalen Fensterfläche in m^2

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung
1 × B2: für das richtige Ermitteln derjenigen Zeit, nach der der ursprüngliche CO_2-Gehalt halbiert ist

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Energieverbrauch*

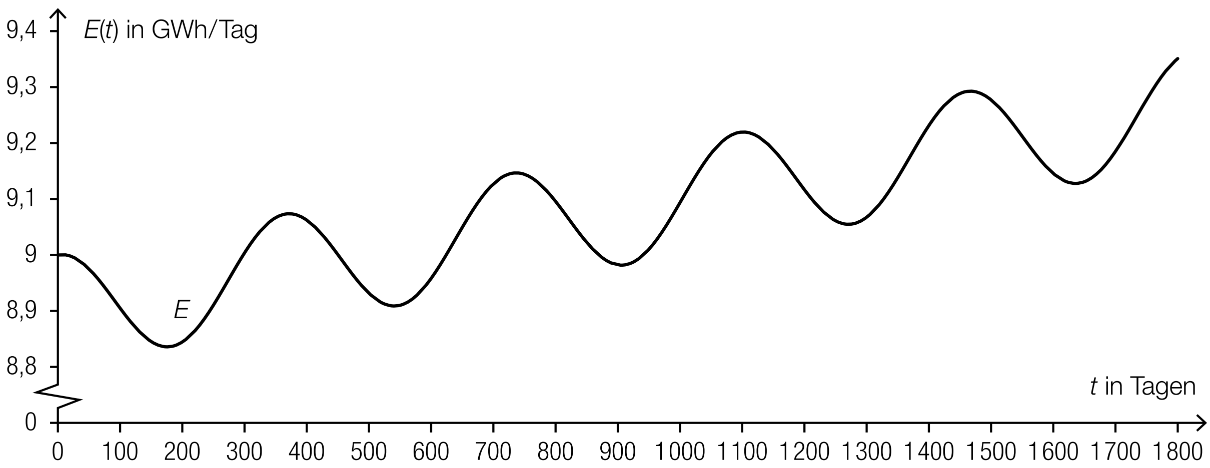
Aufgabennummer: B_214

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Energieverbrauch einer Großstadt unterliegt Schwankungen. Mit der Funktion E wird der voraussichtliche Energieverbrauch pro Tag für die nächsten 5 Jahre modelliert:

$$E(t) = 8{,}9 + 0{,}0002 \cdot t + 0{,}1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{mit } t \geq 0$$

t ... Zeit in Tagen
$E(t)$ ... Energieverbrauch zur Zeit t in Gigawattstunden pro Tag (GWh/Tag)



a) 1) Lesen Sie aus dem oben dargestellten Graphen ab, nach wie vielen Tagen der Energieverbrauch ständig über 9,1 GWh pro Tag liegen wird.

2) Berechnen Sie die Minimumstelle der Funktion E im Zeitintervall [400; 700].

b) 1) Veranschaulichen Sie in der obigen Grafik diejenige trapezförmige Fläche, deren Flächeninhalt mittels $\frac{E(1\,400) + E(1\,500)}{2} \cdot 100$ berechnet wird.

c) 1) Schreiben Sie die reelle Funktion f mit $f(t) = \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right)$ mithilfe der Winkelfunktion Cosinus an.

$f(t) = \cos(\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad})$

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) Nach etwa 1 330 Tagen wird der Energieverbrauch ständig über 9,1 GWh pro Tag liegen.
Toleranzbereich: [1 300; 1 350]

a2) $E'(t) = 0$ mit $400 \leq t \leq 700$

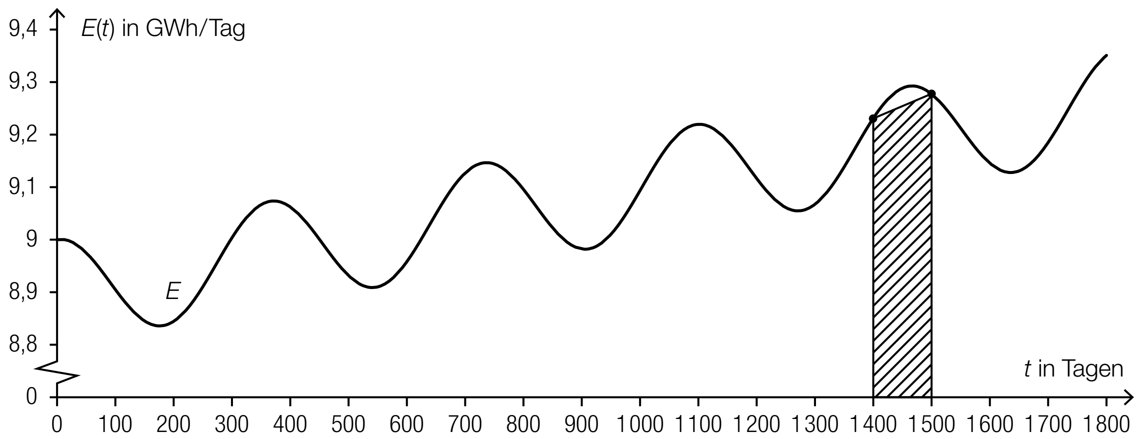
oder:

$$0{,}0002 + \frac{\pi}{1\,825} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ mit } 400 \leq t \leq 700$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 540{,}7...$

Dass es sich bei der berechneten Stelle um eine Minimumstelle handelt, ist aus der Grafik ersichtlich.

b1)



c1) $f(t) = \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365}\right)$

Auch $\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + 2 \cdot k \cdot \pi\right)$ *mit einem beliebigen* $k \in \mathbb{Z}$ *ist als richtig zu werten.*

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [1 300; 1 350]
1 × B: für die richtige Berechnung der Minimumstelle (Ein Nachweis, dass es sich bei der berechneten Stelle um eine Minimumstelle handelt, ist nicht erforderlich.)

b) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der trapezförmigen Fläche

c) 1 × A: für das richtige Anschreiben der Funktion f mithilfe der Winkelfunktion Cosinus

Papierflieger*

Aufgabennummer: B_020

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Für die Flugeigenschaften eines Papierfliegers ist unter anderem der Strömungskoeffizient c mitbestimmend.

$$c = \frac{F_W}{\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot A}$$

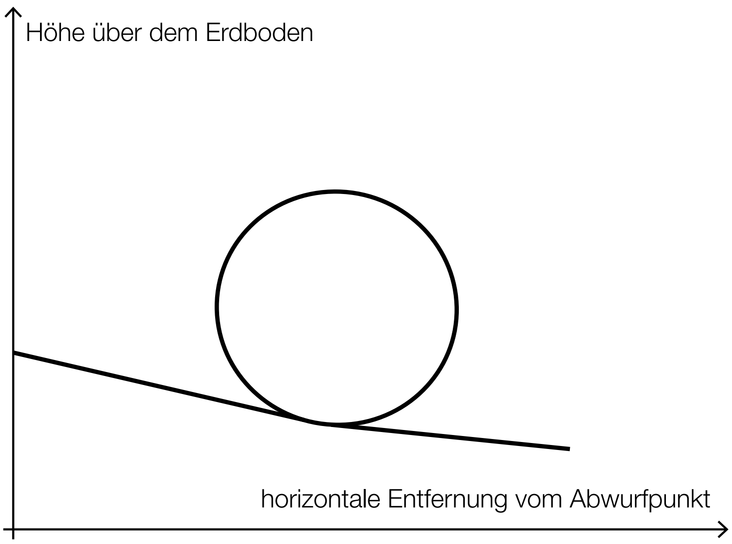
c ... Strömungskoeffizient
F_W ... Strömungswiderstand
A ... Flächeninhalt der angeströmten Fläche
v ... Strömungsgeschwindigkeit
ϱ ... Dichte der Luft

1) Formen Sie die obige Formel nach F_W um.

F_W = ____

2) Beschreiben Sie, wie sich F_W verändert, wenn v verdoppelt wird und alle anderen Größen unverändert bleiben.

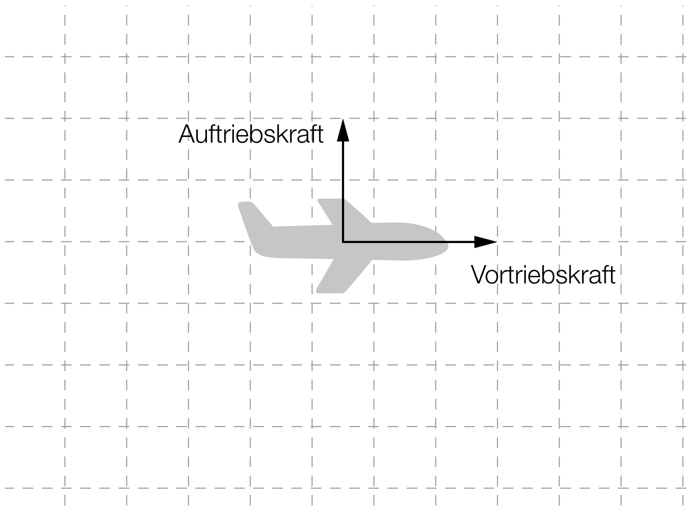
b) Im nachstehenden Diagramm ist modellhaft die Flugbahn eines Papierfliegers dargestellt, wenn dieser einen sogenannten Looping fliegt.



1) Begründen Sie, warum die dargestellte Flugbahn nicht als Funktionsgraph aufgefasst werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

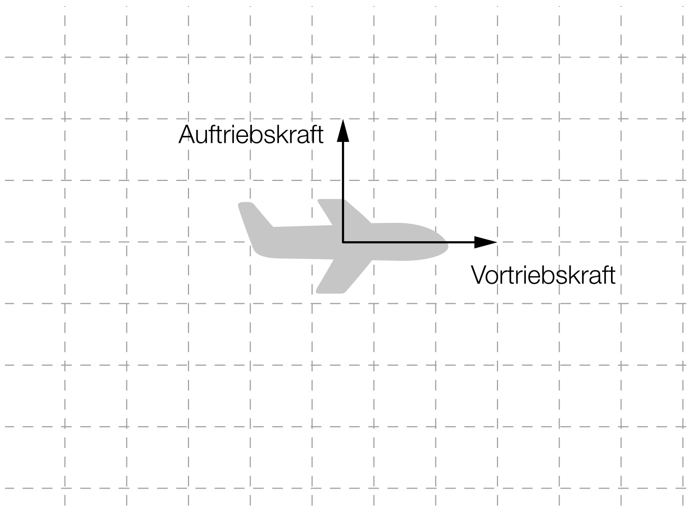
c) Bei einem angetriebenen Flugzeug wirken unter anderem die Auftriebskraft und die Vortriebskraft ein. In der nachstehenden Abbildung sind die zugehörigen Kraftvektoren als Pfeile dargestellt.



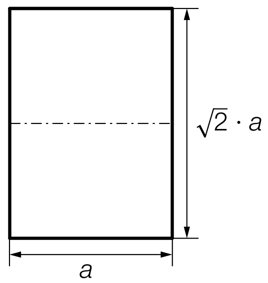
1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die aus Auftriebskraft und Vortriebskraft resultierende Kraft als Pfeil ein.

Bei einem angetriebenen Flugzeug gilt während einer Flugphase:
Der Strömungswiderstand ist der Gegenvektor zur Vortriebskraft.
Die Schwerkraft ist der Gegenvektor zur Auftriebskraft.

2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Vektor für die Schwerkraft und den Vektor für den Strömungswiderstand als Pfeile ein.



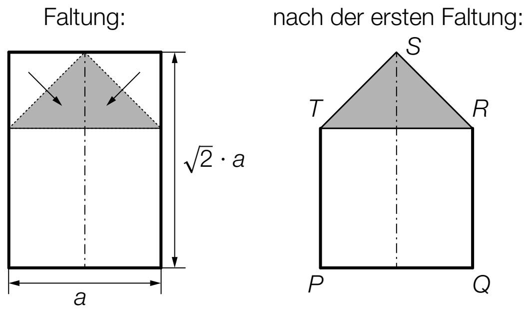
d) Zum Falten von Papierfliegern wird sehr oft Papier in einem DIN-Format verwendet. Für diese Formate gilt, dass die Seitenlängen im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen (siehe nachstehende Abbildung).



Ein solches Papier wird entlang der Blattmitte (siehe strichpunktiert eingezeichnete Linie) gefaltet.

1) Zeigen Sie, dass die Seitenlängen des dabei entstandenen Rechtecks wieder im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen.

In der nachstehenden Abbildung ist der erste Faltschritt für einen Papierflieger aus einem Papier in einem DIN-Format dargestellt. (Die eingezeichnete strichpunktierte Linie verläuft entlang der Mitte.)



2) Begründen Sie, warum das in der obigen Abbildung grau markierte Dreieck *RST* rechtwinkelig ist.

Der Papierflieger soll nach der ersten Faltung bemalt werden.

3) Erstellen Sie mithilfe von a eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des Fünfecks *PQRST*.

$A =$ ____

Bei Papier im DIN-A4-Format ist die kürzere Seite 210 mm lang.

4) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Fünfecks *PQRST* für ein Papier im DIN-A4-Format in cm^2.

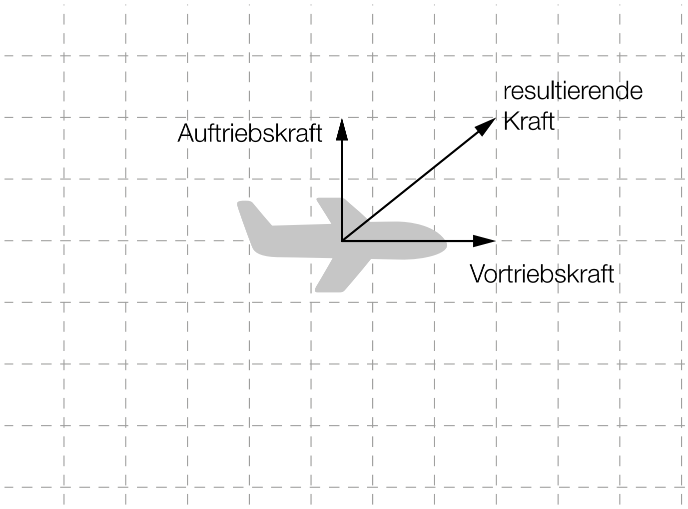
Möglicher Lösungsweg

a1) $F_W = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot A$

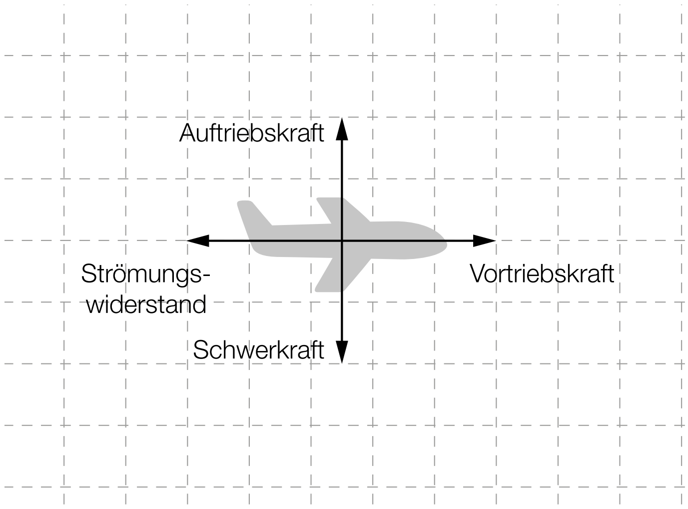
a2) Wird v verdoppelt, so wird F_W vervierfacht.

b1) Dies ist keine Funktion, weil man nicht jeder horizontalen Entfernung vom Abwurfpunkt genau eine Höhe über dem Erdboden zuordnen kann.

c1)



c2)



Sind die Vektoren als Pfeile ausgehend von anderen Anfangspunkten eingezeichnet, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.

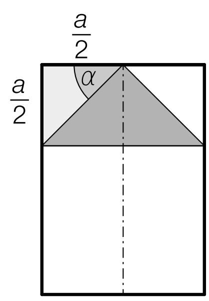
d1) Wird das Papier so wie eingezeichnet gefaltet, so ergibt sich für die Seitenlängen des entstehenden Rechtecks:

längere Seite: a

kürzere Seite: $\frac{\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Die beiden Seitenlängen stehen also im Verhältnis $\frac{a}{\sqrt{2}} : a = 1 : \sqrt{2}$.

d2)



Da das kleine linke Dreieck (siehe obige Skizze) gleichschenkelig und rechtwinkelig ist, gilt für den eingezeichneten Winkel $\alpha = 45°$. Dasselbe gilt auch im kongruenten Dreieck rechts, und somit gilt für den Winkel an der Spitze des markierten Dreiecks:
$180° - 2 \cdot \alpha = 90°$.

d3) $A = (a \cdot \sqrt{2} \cdot a) - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \sqrt{2} \cdot a^2 - \frac{a^2}{4}$

d4) $A = \sqrt{2} \cdot 21^2 - \frac{21^2}{4} = 513{,}41...$

Der Flächeninhalt der zu bemalenden Fläche beträgt rund 513 cm^2.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Umformen der Formel
1 × C: für die richtige Beschreibung

b) 1 × D: für die richtige Begründung

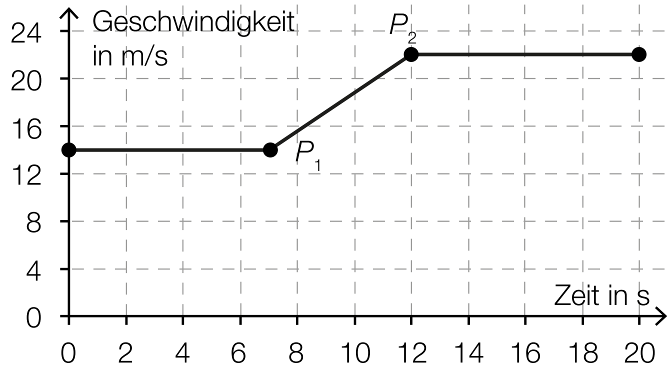
c) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen der resultierenden Kraft als Pfeil
1 × A2: für das richtige Einzeichnen der beiden Gegenvektoren als Pfeile

d) 1 × D1: für den richtigen Nachweis
1 × D2: für die richtige Begründung
1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A
1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts in cm^2

Linienbus

Aufgabennummer: B_070		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Die nachstehende Abbildung zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der Bewegung eines Busses.



a) – Beschreiben Sie die 3 verschiedenen Bewegungsabläufe hinsichtlich der Geschwindigkeit des Busses.

– Berechnen Sie denjenigen Weg, den der Bus in den ersten 20 Sekunden zurücklegt.

b) – Stellen Sie eine Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v im Bereich von P_1 bis P_2 auf.

– Erstellen Sie das Beschleunigung-Zeit-Diagramm für das Intervall [0 s; 20 s].

c) Der Geschwindigkeitsverlauf in Abhängigkeit von der Zeit t im Bereich von P_1 bis P_2 soll durch eine Funktion der Form $v(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden, deren Graph durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft. Zu den Zeitpunkten $t = 7$ s und $t = 12$ s ist die Beschleunigung null.

– Stellen Sie die zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c und d benötigten Bedingungen auf.

– Geben Sie das entstehende Gleichungssystem in Matrixform an.

– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c und d der Funktion v.

d) In den Bussen einer bestimmten Linie soll die Auslastung überprüft werden.
Die Anzahl der Passagiere pro Bus ist näherungsweise normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 44$ Personen und der Standardabweichung $\sigma = 12$ Personen.
In 25 Bussen wird eine Überprüfung der Passagieranzahl durchgeführt.

- Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.
- Argumentieren Sie, wie sich der Stichprobenumfang ändern muss, wenn sich die Breite des 95-%-Zufallsstreubereichs halbieren soll.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Intervall [0 s; 7 s]: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit von 14 m/s (gleichförmige Bewegung)
Intervall [7 s; 12 s]: (gleichförmig) beschleunigte Bewegung
Intervall [12 s; 20 s]: Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit von 22 m/s (gleichförmige Bewegung)

Der zurückgelegte Weg entspricht der Fläche unter dem Graphen der Funktion v.

$s_1 = 14 \cdot 7 = 98$

$s_2 = \frac{14 + 22}{2} \cdot 5 = 90$

$s_3 = 22 \cdot 8 = 176$

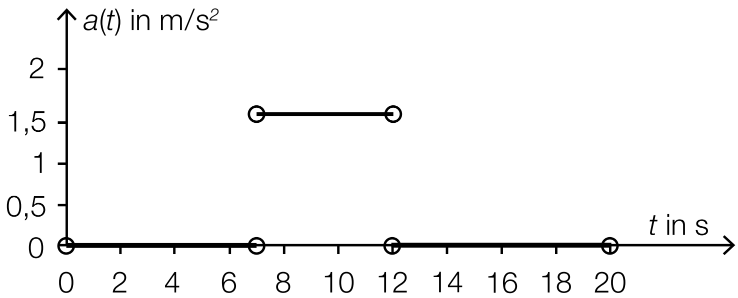
$s_{\text{gesamt}} = s_1 + s_2 + s_3 = 364$ m

b) $v(t) = k \cdot t + d$

$k = \frac{22 - 14}{12 - 7} = 1{,}6$

$d = 14 - 1{,}6 \cdot 7 = 2{,}8$

$v(t) = 1{,}6 \cdot t + 2{,}8$



c) I: $v(7) = 14$
II: $v(12) = 22$
III: $v'(7) = 0$
IV: $v'(12) = 0$

$$\begin{pmatrix} 343 & 49 & 7 & 1 \\ 1728 & 144 & 12 & 1 \\ 147 & 14 & 1 & 0 \\ 432 & 24 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen der Koeffizienten mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}128$; $b = 3{,}648$; $c = -32{,}256$; $d = 104{,}944$

d) zweiseitigen 95-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$44 \pm z_{0,975} \cdot \frac{12}{\sqrt{25}}$

$z_{0,975} = 1{,}959\ldots$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich:
[39; 49] (Intervallgrenzen gerundet auf Ganze)

Die Breite des Zufallsstreubereichs ist $b = 2 \cdot z_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Um b zu halbieren, müsste der Stichprobenumfang n vervierfacht werden, weil
$\frac{b}{2} = 2 \cdot z_{0,975} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4 \cdot n}}$.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 4
d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Sightseeing in London

Aufgabennummer: B_361		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Zu den bekanntesten Sehenswürdigkeiten Londons zählen das *London Eye*, der *Big Ben* und die *Tower Bridge*.

a) Das *London Eye* ist das höchste Riesenrad Europas. Der Aufhängepunkt einer Gondel beschreibt einen Kreis mit einem Durchmesser von 121 m und erreicht eine maximale Höhe von 135 m. Das sich mit konstanter Geschwindigkeit drehende Rad benötigt für eine volle Umdrehung 40 Minuten.

Die Höhe des Aufhängepunkts einer Gondel über dem Boden kann in Abhängigkeit von der Zeit durch eine allgemeine Sinusfunktion h beschrieben werden:

$h(t) = a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$

t … Zeit in min
$h(t)$ … Höhe des Aufhängepunkts über dem Boden zur Zeit t in m

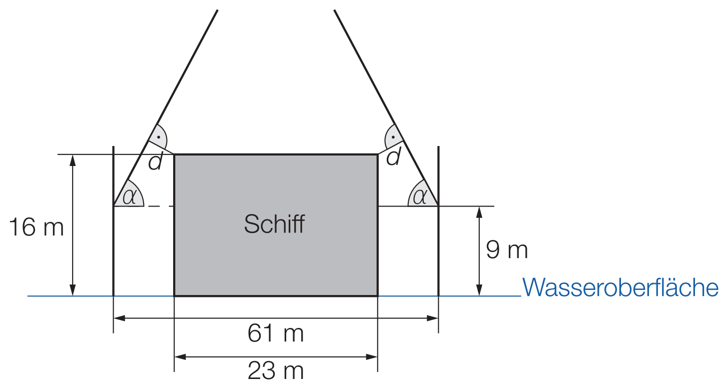
Zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Aufhängepunkt an der tiefsten Stelle.

– Ermitteln Sie die Parameter a, b, c und d.

Wählt man für $t = 0$ denjenigen Zeitpunkt, zu dem sich der Aufhängepunkt an der höchsten Stelle befindet, so wird die Höhe des Aufhängepunkts in Abhängigkeit von der Zeit durch die Funktion g beschrieben.

– Erklären Sie, in welchen Parametern sich die Funktion g von h unterscheidet.

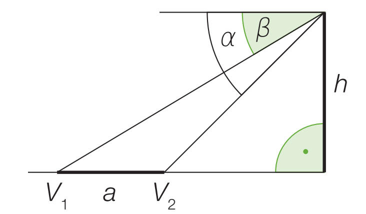
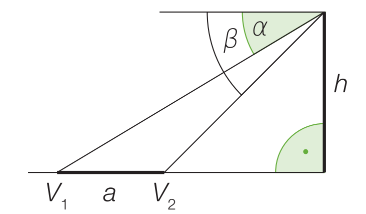
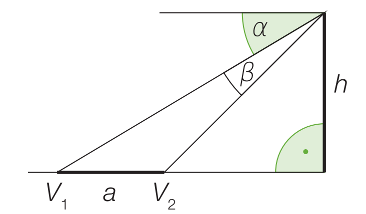
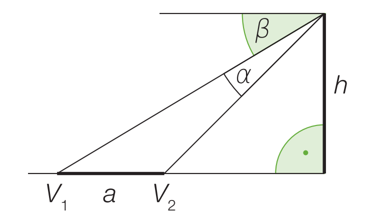
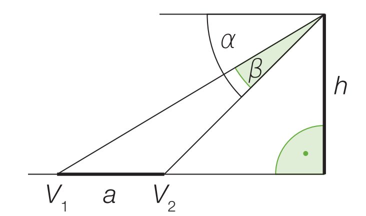
b) Die *Tower Bridge* ist eine Klappbrücke, die über die Themse führt. Um großen Schiffen die Durchfahrt zu ermöglichen, können die Brückenarme des 61 m langen Mittelteils hochgeklappt werden. Die Gelenke der Brückenarme liegen rund 9 m über der Wasseroberfläche. Ein Schiff fährt genau in der Mitte des Flusses und soll unter der Brücke durchfahren (siehe nachstehende Abbildung).



– Berechnen Sie denjenigen Winkel α, um den beide Brückenarme jeweils geöffnet werden müssen, damit das Schiff mit einem Abstand von $d = 2$ m die Brücke passieren kann.

c) Um die Höhe des *Big Ben* zu bestimmen, werden zwei Punkte in einer Ebene festgelegt. Vom Vermessungspunkt V_1 wird der Höhenwinkel α zur Spitze des *Big Ben* gemessen. Von einem um a Meter näher zum Turm gelegenen Vermessungspunkt V_2 wird zur Spitze ein Höhenwinkel β gemessen.

– Kreuzen Sie die zu diesem Sachverhalt passende Skizze an. *[1 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h aus a, α und β auf.

$h =$ ____________________________________

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Radius des Rades entspricht der Amplitude a der Sinusfunktion: $a = \frac{121}{2} = 60{,}5$
b ist die Kreisfrequenz: $b = \frac{2\pi}{40} = \frac{\pi}{20}$

c ist der Nullphasenwinkel. Die Funktion h soll bei $t = 0$ ein Minimum haben. Als Werte für c kommen daher alle Minimumstellen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ infrage: $c = -\frac{\pi}{2}$ oder $c = \frac{3\pi}{2}$ oder ...

d bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen. Mit $d = 0$ wäre $h(0) = -60{,}5$, da jedoch $h(0) = 14$ sein muss, ist $d = 14 + 60{,}5 = 74{,}5$.

$a = 60{,}5$; $b = \frac{\pi}{20}$; $c = -\frac{\pi}{2}$; $d = 74{,}5$

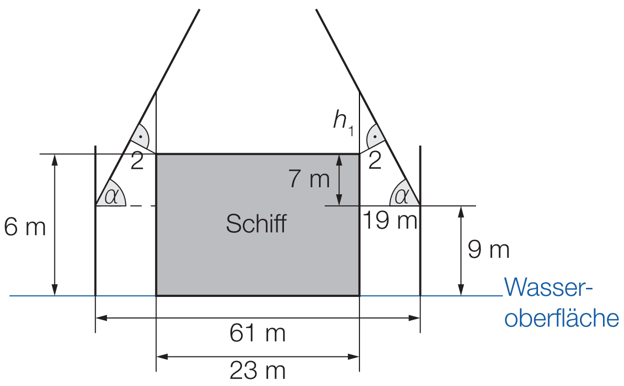
Die Amplitude a (Radius des Kreises), die Kreisfrequenz b (Drehgeschwindigkeit) und der Abstand d bleiben gleich.
Befindet sich der Aufhängepunkt zum Zeitpunkt $t = 0$ im höchsten Punkt, ändert sich nur der Nullphasenwinkel, wodurch eine Verschiebung des Graphen in horizontaler Richtung bewirkt wird.

b) $\sin(90° - \alpha) = \frac{2}{h_1}$

$h_1 = \frac{2}{\sin(90° - \alpha)}$

$\tan(\alpha) = \frac{h_1 + 7}{19}$

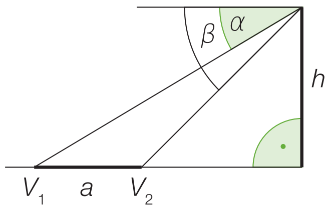
$\tan(\alpha) = \frac{\frac{2}{\sin(90° - \alpha)} + 7}{19}$



Lösen mittels Technologieeinsatz:
$\alpha = 25{,}893\ldots°$

Die Brückenarme müssen in einem Winkel von rund $\alpha = 25{,}89°$ geöffnet werden.

c)

[...]	
	☒
[...]	
[...]	
[...]	

$$h = \frac{a \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\alpha)}{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}$$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) schwer

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: –

Ampelschaltung

Aufgabennummer: B_329		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Laut § 38 Abs. 6 Satz 1 der Straßenverkehrsordnung (StVO) gilt:
„Das grüne Licht ist jeweils mit viermal grünblinkendem Licht zu beenden, wobei die Leucht- und die Dunkelphase abwechselnd je eine halbe Sekunde zu betragen haben.“

a) Ein Auto fährt mit 72 km/h auf eine Kreuzung zu. Als es sich 100 m vor der Ampel befindet, beginnt das Grünblinken.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Fahrer noch beim Grünblinken in die Kreuzung einfahren kann, wenn er mit gleicher Geschwindigkeit weiterfährt.

Bei konstanter Bremsung hat das Auto eine Bremsverzögerung von 8 m/s².

– Berechnen Sie die Bremszeit des Autos bis zum Stillstand.

b) Auf einer Straße mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung von 60 km/h sind zwei Ampeln 300 m voneinander entfernt. Ein Auto steht vor der ersten Ampel, die Rot anzeigt. Für die Beschleunigung-Zeit-Funktion a gilt bis zum Erreichen von 60 km/h:

$a(t) = -2{,}5 \cdot t^2 + 8{,}55 \cdot t$

t … Zeit in s
$a(t)$ … Beschleunigung zur Zeit t in m/s²

– Berechnen Sie, nach wie vielen Metern das Auto die Geschwindigkeit von 60 km/h erreicht hat.

Nach dem Erreichen von 60 km/h fährt das Auto mit dieser Geschwindigkeit weiter. Das Auto soll noch beim Grünblinken die zweite Ampel erreichen.

– Berechnen Sie, nach wie vielen Sekunden die zweite Ampel zu blinken anfangen darf, wenn das Auto genau bei Schaltung auf Grün von der ersten Ampel wegfährt.

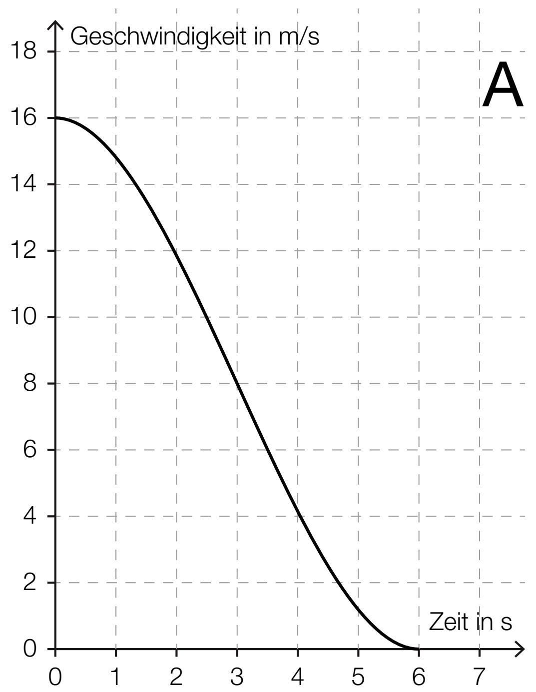
c) Eine Ampel hat folgendes Anzeigeprogramm:

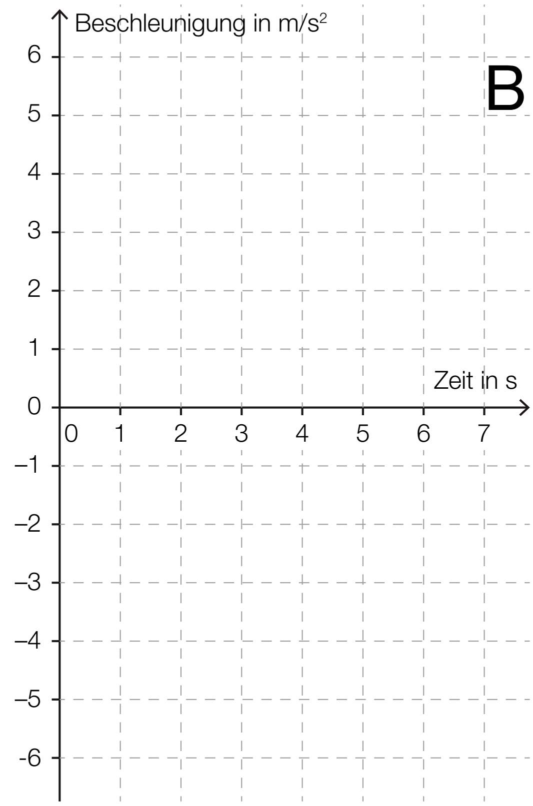
Ampelphase	Dauer
Rot	30 s
Gelb	3 s
Grün	20 s
Grün blinkend	4 s

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die Ampel bei einer Gelbphase anzutreffen.
– Interpretieren Sie den Ausdruck $\left(1 - \frac{30}{57}\right)^n$ im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Das Abbremsen vor der Ampel erfolgt nicht konstant, sondern lässt sich mit einer Polynomfunktion 3. Grades beschreiben. In Grafik A ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm des Bremsvorgangs dargestellt.

– Skizzieren Sie in Grafik B das zugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm.





– Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die zu Grafik A passt. *[1 aus 5]*

Das Auto hat nach 3 Sekunden seine Höchstgeschwindigkeit erreicht.	☐
Das Auto ist am Anfang (t = 0 s) 16 m von der Ampel entfernt.	☐
Der Bremsweg des Autos beträgt rund 24 m.	☐
Die Anfangsgeschwindigkeit des Autos beträgt 16 km/h.	☐
Die durchschnittliche Beschleunigung während des Bremsvorgangs beträgt $-\frac{16}{6}$ m/s².	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Zeit für die Strecke bis zur Ampel: $\frac{100}{20} = 5$

Der Fahrer braucht bis zur Ampel 5 s, das Grünblinken endet jedoch schon nach 4 s, er kann daher nicht mehr beim Grünblinken in die Kreuzung einfahren.

$\text{Bremszeit} = \frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Bremsverzögerung}} = \frac{20}{8} = 2{,}5$

Die Bremszeit beträgt 2,5 s.

b) $v(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{2{,}5}{3} \cdot t^3 + 4{,}275 \cdot t^2 + v(0)$, wobei $v(0) = 0$

$\frac{60}{3{,}6} = -\frac{2{,}5}{3} \cdot t^3 + 4{,}275 \cdot t^2$

$t_1 = -1{,}709\ldots$, $t_2 = 3{,}407\ldots$, $t_3 = 3{,}432\ldots$

Nach rund 3,41 s hat das Auto eine Geschwindigkeit von 60 km/h erreicht.

$\int_0^{3{,}407\ldots} \left(-\frac{2{,}5}{3} \cdot t^3 + 4{,}275 \cdot t^2\right) \mathrm{d}t = 28{,}287\ldots$

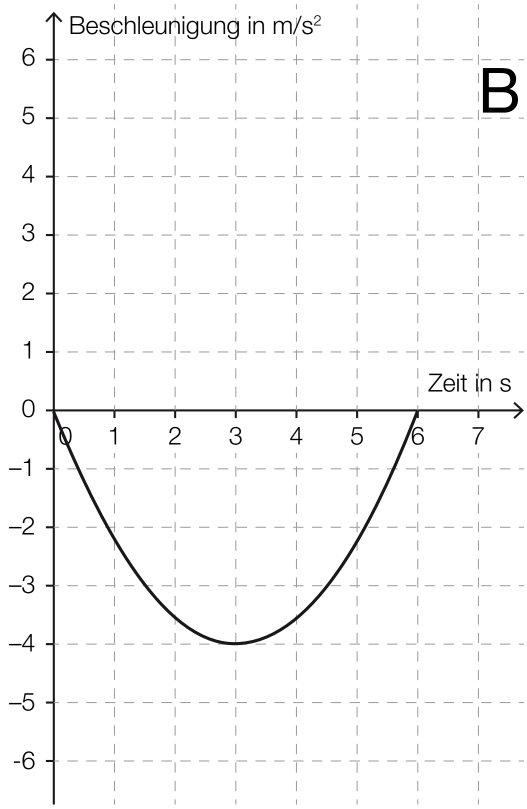
$300 - 28{,}287\ldots = 271{,}712\ldots$

Es bleiben noch rund 271,71 m bis zur Ampel. Bei einer konstanten Geschwindigkeit von 60 km/h $\left(= \frac{60}{3{,}6}\text{ m/s}\right)$ braucht das Auto dafür rund 16,30 s. Insgesamt braucht das Auto bis zur nächsten Ampel rund 19,71 s. 4 s vorher fängt die Ampel zu blinken an.
Nach rund 15,71 s darf die Ampel frühestens zu blinken anfangen.

c) $P(\text{„Gelb“}) = \frac{3}{57} = \frac{1}{19}$

Der Ausdruck $\left(1 - \frac{30}{57}\right)^n$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass man bei n Anfahrten die Ampel nie bei Rot erreicht.

d)



Die durchschnittliche Beschleunigung während des Bremsvorgangs beträgt $-\frac{16}{6}$ m/s².	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 4 Analysis
c) 5 Stochastik
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) schwer	b) 4
c) mittel	c) 2
d) mittel	d) 2

Thema: Verkehr

Quellen: —

Wirkstoffkonzentration

Aufgabennummer: B_369

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Konzentration von verabreichten Wirkstoffen im Blut nimmt mit der Zeit ab.

a) In gewissen Zeitabständen wurde die Konzentration des Wirkstoffs im Blut einer Patientin gemessen. Die gemessenen Werte sind in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Zeit nach Beginn der Verabreichung in h	Wirkstoffkonzentration in mg/L
0	1
4	0,65
5	0,5
8	0,25
12	0,15
16	0,1

– Ermitteln Sie mithilfe von exponentieller Regression eine Funktionsgleichung, mit der die Abnahme der Konzentration näherungsweise beschrieben werden kann.
– Stellen Sie die gemessenen Werte und die ermittelte Funktionsgleichung grafisch dar.

b) Die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge in Abhängigkeit von der Zeit ist proportional zur jeweils im Organismus vorhandenen Wirkstoffmenge.

– Stellen Sie eine zu diesem Sachverhalt passende Differenzialgleichung auf. $W(t)$ ist dabei die Wirkstoffmenge zur Zeit t.

c) Über eine Infusion werden einem Patienten pro Minute 2,3 mg eines Wirkstoffs verabreicht. Gleichzeitig wird ein Teil des Wirkstoffs wieder ausgeschieden.
Die Änderung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut lässt sich durch die folgende Differenzialgleichung beschreiben:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{50} \cdot \left(y - \frac{115}{3}\right)$$

t … Zeit in min
$y(t)$ … Konzentration des Wirkstoffs in mg/L

– Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* unter der Voraussetzung, dass sich zu Beginn der Infusion 0 mg des Wirkstoffs im Blut befinden.
– Erklären Sie, warum eine Funktion der Form $y(t) = a \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ für $a, k > 0$ ein beschränktes Wachstum beschreibt.

d) Für die Wirksamkeit eines Medikaments ist eine bestimmte Konzentration eines Wirkstoffs im Blut notwendig. Im Rahmen einer Versuchsreihe wurden folgende Zeiten von der Verabreichung bis zum Erreichen dieser Konzentration bei einer Stichprobe von 10 Personen gemessen (Zeit in Minuten):

60	48	50	65	69	53	64	57	67	56

– Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} für die vorliegenden Daten.

Die Zeit bis zum Erreichen dieser Konzentration wird als normalverteilt angenommen.

– Ermitteln Sie den zweiseitigen Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ dieser Normalverteilung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 1\ \%$.

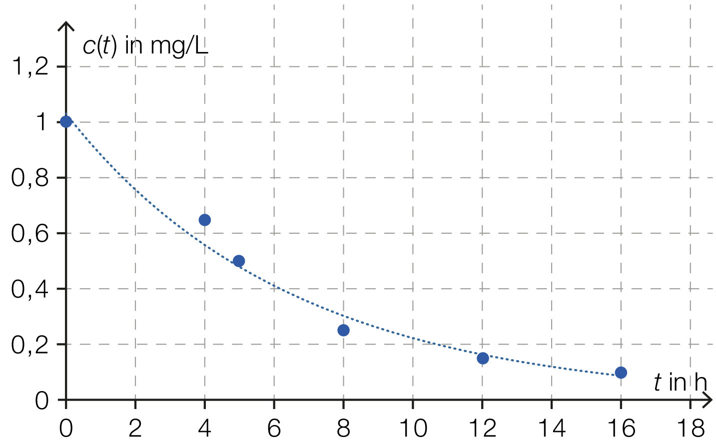
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) t ... Zeit nach Beginn der Verabreichung in h
$c(t)$ ... Wirkstoffkonzentration zur Zeit t in mg/L

Ermittlung der Funktionsgleichung mittels Technologieeinsatz:

$c(t) = 1{,}0266 \cdot e^{-0{,}1526 \cdot t}$ oder $c(t) = 1{,}0266 \cdot 0{,}8585^t$ (Koeffizienten gerundet)



b) $\frac{dW}{dt} = -k \cdot W$

$-k$ ... Proportionalitätsfaktor ($k > 0$)

c) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{50} \cdot \left(y - \frac{115}{3}\right)$

$\frac{\mathrm{d}y}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50} \cdot \mathrm{d}t$ $\left(\text{oder: } \frac{y'}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50}\right)$

$\int \frac{\mathrm{d}y}{y - \frac{115}{3}} = -\frac{3}{50} \cdot \int \mathrm{d}t$ $\left(\text{oder: } \int \frac{y'(t)}{y(t) - \frac{115}{3}} \cdot \mathrm{d}t = -\frac{3}{50} \cdot \int \mathrm{d}t\right)$

$\ln\left|y(t) - \frac{115}{3}\right| = -\frac{3}{50} \cdot t + C_1$

allgemeine Lösung:
$y(t) = C \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t} + \frac{115}{3}$

Ermitteln der speziellen Lösung:
$y(0) = 0$
$C \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot 0} + \frac{115}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{115}{3}$

$y(t) = -\frac{115}{3} \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t} + \frac{115}{3}$

$y(t) = a \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$
Die Funktion wächst, weil mit steigendem t der Term $e^{-k \cdot t}$ kleiner wird und somit der Funktionswert $y(t)$ größer. Die Funktion nähert sich asymptotisch dem Wert a, weil für wachsendes t der Term $(1 - e^{-k \cdot t})$ gegen 1 strebt. Sie kann nicht über diesen Wert hinausgehen.

d) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 58{,}9$ min
$s_{n-1} = 7{,}279...$ min

Zweiseitigen 99-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:
$58{,}9 \pm t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{7{,}279...}{\sqrt{10}}$

$n = 10 \quad \Rightarrow \quad f = 9$
$t_{9;0{,}995} = 3{,}249...$

Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in min:
[51,42; 66,38] (Intervallgrenzen gerundet)

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 1
c) mittel	c) 3
d) mittel	d) 2

Thema: Medizin

Quellen: –

Auf der Baustelle

Aufgabennummer: B_333		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Zur Bewegung von Lasten werden auf einer Baustelle verschiedene Hilfsmittel eingesetzt.

a) Mithilfe einer nahezu reibungsfreien festen Seilrolle soll eine Palette hochgehoben werden (siehe Abb. 1).
Auf das Seil wirkt eine Kraft von $F = 1{,}5$ kN unter einem Winkel $\alpha = 35°$.

Abb. 1

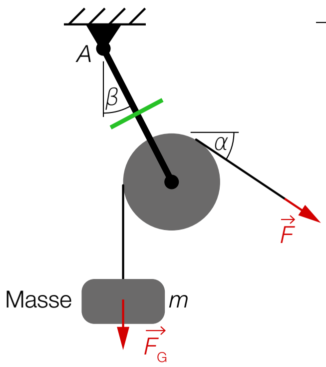
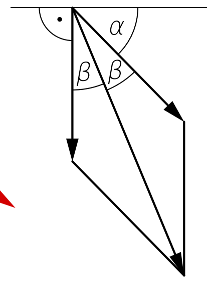


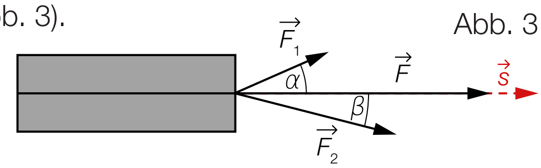
Abb. 2



- Beschriften Sie in Abb. 2 die Kräfte in der Skizze mit $\vec{F}_G$, $\vec{F}$ und $\vec{R}$, wobei $\vec{R}$ die Resultierende ist, die auf die Seilrolle wirkt.
- Berechnen Sie den Betrag der resultierenden Kraft $\vec{R}$.

b) Ein Wagen soll von 2 Bauarbeitern mit einer Kraft $\vec{F}$ gezogen werden.
$\vec{F}$ ist die Summe der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ (siehe Abb. 3).

Abb. 3



- Erstellen Sie eine Formel zur Ermittlung des Betrags der Kraft $\vec{F}_1$, wenn man den Betrag der Kraft $\vec{F}$ und die Winkel α und β kennt.

Beim Ziehen einer Last wird Arbeit W verrichtet.
Die Formel für die Arbeit W lautet: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

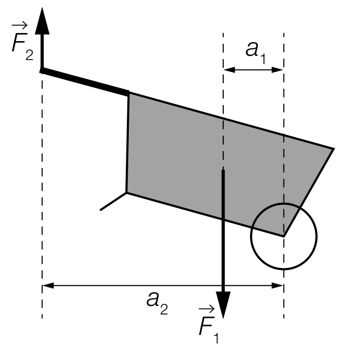
- Zeigen Sie, dass es im Fall der gegebenen Situation genügt, nur das Produkt der Beträge von $\vec{F}$ und $\vec{s}$ zu berechnen.

Wird die Last nur von einer Person gezogen, schließt die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ N mit dem Weg $\vec{s} = \begin{pmatrix} 100 \\ 130 \end{pmatrix}$ m einen Winkel φ ein.

- Berechnen Sie die zu verrichtende Arbeit W.
- Berechnen Sie den Winkel φ.

c) 30 kg Schutt werden in einer Schubkarre abtransportiert. Dabei wirkt die Gewichtskraft $\overrightarrow{F_1}$ auf die Schubkarre. Zum Entladen muss die Schubkarre gekippt werden. Die Kraft $\overrightarrow{F_2}$, mit der man am äußersten Ende der Haltegriffe nach oben drücken muss, kann mithilfe des Hebelgesetzes $F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2$ ermittelt werden. Die Gewichtskraft ist das Produkt aus Masse m und Erdbeschleunigung g.

Abb. 4



– Berechnen Sie den Betrag der Kraft $\overrightarrow{F_2}$, wenn $a_1 = 250$ mm und $a_2 = 1\,500$ mm gilt. (Rechnen Sie mit $g = 9{,}81$ m/s^2.)

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

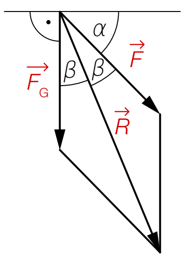
Möglicher Lösungsweg

a) $\beta = \frac{90° - \alpha}{2}$; $\cos(\beta) = \frac{\frac{R}{2}}{F}$

$R = 2 \cdot F \cdot \cos\left(\frac{90° - \alpha}{2}\right)$

$R = 2 \cdot 1{,}5 \cdot \cos(27{,}5°) = 2{,}6610\ldots \approx 2{,}66$

$R \approx 2{,}66$ kN



b) $\frac{F_1}{\sin(\beta)} = \frac{F}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$

$F_1 = \frac{\sin(\beta) \cdot F}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$

$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$

$\vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\varphi)$, φ ist der Winkel zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$.

$\varphi = 0°$, da der Körper in Richtung der Kraft $\vec{F}$ gezogen wird.

$\Rightarrow \quad \cos(0°) = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|$

$\vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 130 \end{pmatrix} = 33\,000 \qquad W = 33\,000$ Nm

$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| \cdot |\vec{s}|}\right) \qquad \varphi = 25{,}86\ldots° \approx 25{,}9°$

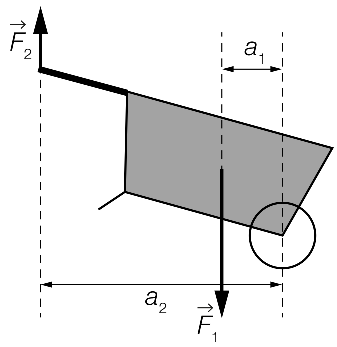
c) $F_2 = F_1 \cdot \frac{a_1}{a_2}$, $F_1 = m \cdot g$

$F_1 = 30 \cdot 9{,}81 = 294{,}3$

$F_1 = 294{,}3$ N

$F_2 = 294{,}3 \cdot (250)/(1\,500) = 49{,}05$

$F_2 = 49{,}05$ N



Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren, A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 4
c) 2

Thema: Physik

Quellen: –

Babynahrung

Aufgabennummer: B_028

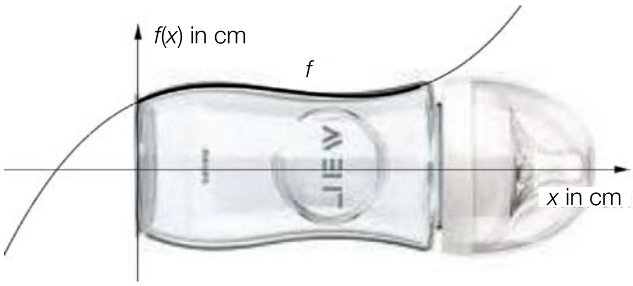
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Bei der Zubereitung von Säuglingsmilch muss das Dosierungsverhältnis genau eingehalten werden. Ein gestrichener Messlöffel Pulver wird in 30 ml Wasser gegeben.

- Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion auf, die die Anzahl der Messlöffel L in Abhängigkeit von der Wassermenge w in Millilitern modellhaft beschreibt.
- Beschreiben Sie, welchen Zusammenhang die Umkehrfunktion in diesem Fall angibt.

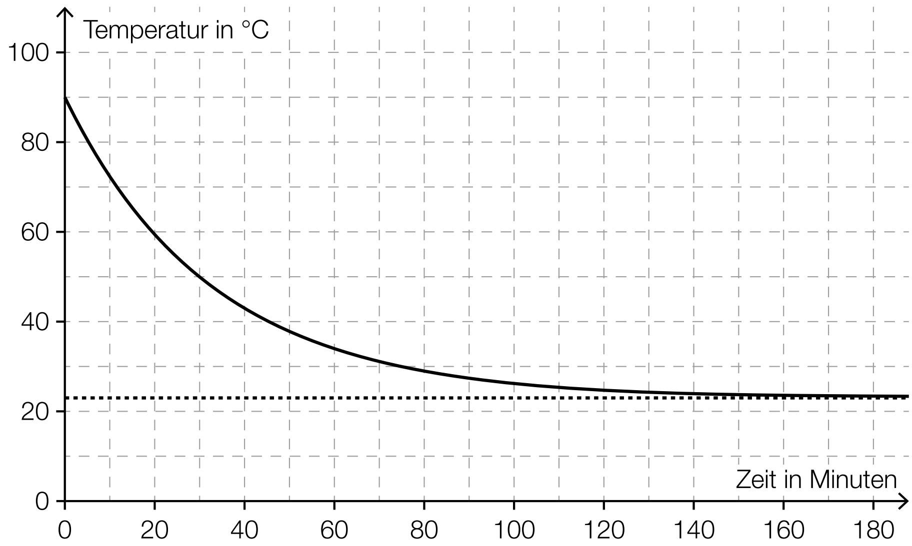
b) Der Querschnitt der abgebildeten ca. 10 cm hohen Babyflasche hat als Begrenzungslinie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}008 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 0{,}494 \cdot x + 2{,}596$.

x … Flaschenhöhe in cm
$f(x)$ … Radius der Flasche in der Höhe x in cm



- Bestimmen Sie den maximalen Durchmesser der Flasche.
- Erstellen Sie eine Formel für das Füllvolumen in Abhängigkeit von der Flaschenhöhe.
- Berechnen Sie, in welcher Höhe sich die Markierung für 150 ml befinden muss.

c) Die nachstehende Grafik zeigt den Graphen einer Funktion, die das Abkühlen von heißem Wasser in einer Babyflasche bei einer Raumtemperatur von 23 °C darstellt.



– Kreuzen Sie die richtige Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach 3 Stunden ist die Wassertemperatur unter 23 °C gesunken.	☐
Die Wassertemperatur halbiert sich jede halbe Stunde.	☐
Die Temperaturabnahme wird durch eine quadratische Funktion beschrieben.	☐
Nach ca. 35 Minuten ist die Temperatur des Wassers auf die Hälfte der Anfangstemperatur gesunken.	☐
Je mehr Zeit vergeht, desto schneller kühlt das Wasser ab.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $L(w) = \frac{w}{30}$

Die Umkehrfunktion gibt in diesem Fall an, welche Menge Wasser für eine bestimmte Anzahl von Messlöffeln benötigt wird.

b) Hochpunkt der Funktion f: $(2{,}45\ldots \mid 3{,}14\ldots)$
Die y-Koordinate muss verdoppelt werden, um den maximalen Durchmesser zu erhalten.
Der maximale Durchmesser beträgt rund 6,3 cm.

Formel für das Volumen: $V = \pi \cdot \int_0^h (0{,}008 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 0{,}494 \cdot x + 2{,}596)^2\,\mathrm{d}x$
150 ml = 150 cm³

$$\pi \cdot \int_0^h (0{,}008 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 0{,}494 \cdot x + 2{,}596)^2\,\mathrm{d}x = 150 \quad \Rightarrow \quad h = 5{,}35\ldots$$

Die Markierung muss sich in rund 5,4 cm Höhe befinden.

c)

	☐
	☐
	☐
Nach ca. 35 Minuten ist die Temperatur des Wassers auf die Hälfte der Anfangstemperatur gesunken.	☒
	☐

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Meerwasser und mehr Wasser*

Aufgabennummer: B_509		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Die Funktion V beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Wasservolumens eines bestimmten Sees. Dabei wird das Wasservolumen in Kubikmetern und die Zeit t in Tagen angegeben.

V erfüllt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0{,}001 \cdot (350 - V) \quad \text{mit} \quad V > 0$$

1) Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von V das Wasservolumen dieses Sees gemäß diesem Modell zunimmt.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

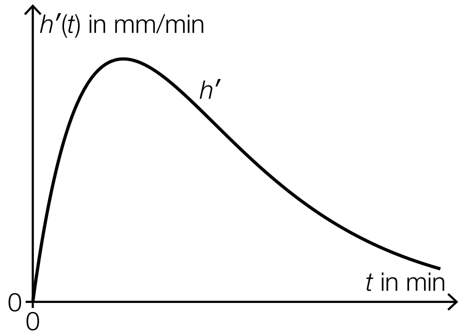
Zur Zeit $t = 0$ beträgt das Wasservolumen 150 m³.

3) Berechnen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Während eines Regenschauers wird der Wasserstand in einem bestimmten, anfangs leeren zylinderförmigen Gefäß gemessen.

Die Funktion h' beschreibt modellhaft die momentane Änderungsrate des Wasserstands in diesem Gefäß (siehe nachstehende Abbildung).



$h'(t) = 1{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$ mit $0 \leq t \leq 15$

t ... Zeit in min
$h'(t)$ ... momentane Änderungsrate des Wasserstands zur Zeit t in mm/min

1) Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem gemäß diesem Modell die momentane Änderungsrate des Wasserstands mindestens 1 mm/min beträgt.

c) Der innerhalb eines Tages schwankende Wasserstand in einem bestimmten Hafenbecken kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der niedrigste Wasserstand wird zur Zeit $t = 0$ erreicht und beträgt 2 m, der höchste Wasserstand beträgt 4 m.

$f(t) = a + b \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$

t ... Zeit nach dem niedrigsten Wasserstand in h
$f(t)$ ... Wasserstand zur Zeit t in m

1) Geben Sie die Parameter a und b der Funktion f an.

Möglicher Lösungsweg

a1) Das Volumen nimmt zu, wenn die momentane Änderungsrate $\frac{dV}{dt}$ positiv ist. Dies ist dann der Fall, wenn V kleiner als 350 ist.

a2) $\int \frac{1}{350 - V} \, dV = \int 0{,}001 \, dt$ *oder* $\int \frac{V'}{350 - V} \, dt = \int 0{,}001 \, dt$

$-\ln|350 - V(t)| = 0{,}001 \cdot t + C_1$
$V(t) = 350 - C \cdot e^{-0{,}001 \cdot t}$

a3) $V(0) = 150 \quad \Rightarrow \quad C = 200$
$V(t) = 350 - 200 \cdot e^{-0{,}001 \cdot t}$

b1) $h'(t) = 1$ *oder* $1{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}3 \cdot t} = 1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t_1 = 0{,}86...$ und $t_2 = 8{,}47...$
Im Zeitintervall [0,86...; 8,47...] beträgt die momentane Änderungsrate des Wasserstands mindestens 1 mm/min.

c1) $a = 3$
$b = -1$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der speziellen Lösung der Differenzialgleichung.
b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Zeitintervalls.
c1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters a.
Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters b.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fußballtore

Aufgabennummer: B_279		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Ein Betrieb produziert Fußballtore.

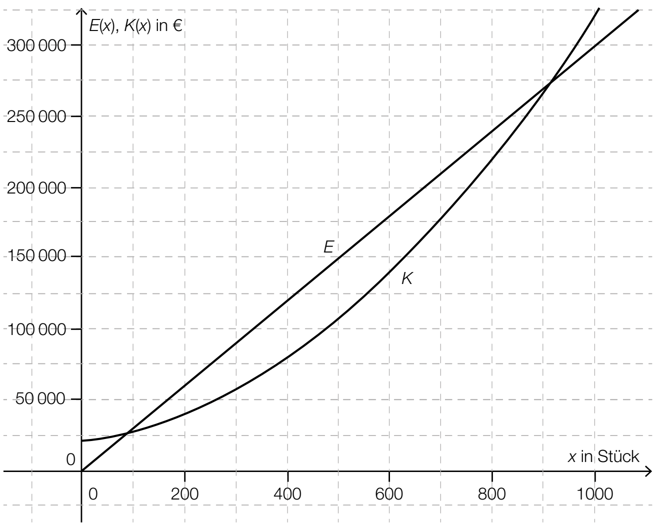
a) Die Preisfunktion der Nachfrage p_N ist bekannt:

$p_N(x) = -40 \cdot x + 920$ mit $0 \leq x \leq 23$

x … nachgefragte Menge in ME
p_N … Preis bei der Nachfrage x in GE/ME

– Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Erlösfunktion E auf.
– Zeichnen Sie den Graphen der Erlösfunktion E für den angegebenen Definitionsbereich in ein Koordinatensystem.
– Lesen Sie aus der Grafik diejenige Menge ab, bei der der maximale Erlös erzielt wird.

b) In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der Gesamtkostenfunktion K und der Erlösfunktion E für Trainingstore dargestellt.



– Kennzeichnen Sie in der Abbildung den Gewinnbereich.
– Lesen Sie aus der Abbildung die Werte für die Gewinnschwelle und die obere Gewinngrenze ab.
– Dokumentieren Sie, wie man mithilfe der Differenzialrechnung jene Anzahl x_{max} ermittelt, für die der größte Gewinn erzielt wird, wenn die Funktionsgleichungen von E und K bekannt sind.

c) Für die Fußballtore werden Netze produziert.
Die Fixkosten betragen € 3.000.
Bei der Produktion von 10 Netzen betragen die Stückkosten € 320 pro Netz.
Bei der Produktion von 100 Netzen betragen die Gesamtkosten € 5.450.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der zugehörigen quadratischen Gesamtkostenfunktion ermittelt werden können.
– Übertragen Sie das Gleichungssystem in Matrizenschreibweise.

d) Für nichtlineare Gesamtkostenfunktionen gilt: Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der Stückkostenfunktion an der Stelle des lokalen Stückkostenminimums.

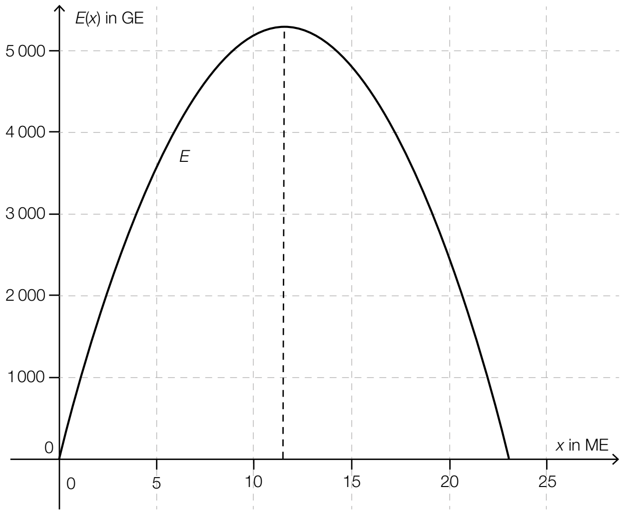
– Zeigen Sie die Richtigkeit dieses Sachverhalts mithilfe der 1. Ableitung der Stückkostenfunktion.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

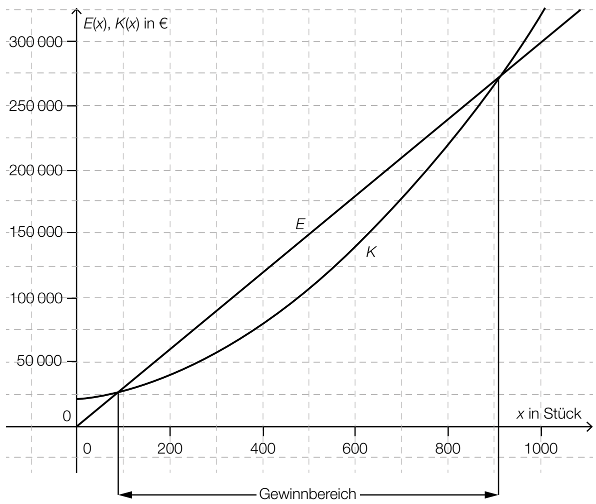
Möglicher Lösungsweg

a) $E(x) = p_N(x) \cdot x$
$E(x) = -40 \cdot x^2 + 920 \cdot x$

Der maximale Erlös wird bei $x = 11{,}5$ ME erzielt.
(Ablesetoleranz: ±0,5 ME)



b)



Gewinnschwelle bei $x \approx 90$ Stück
obere Gewinngrenze bei $x \approx 910$ Stück
(Ablesetoleranz: ±10 Stück)

Zuerst wird die Gewinnfunktion G ermittelt: $G(x) = E(x) - K(x)$
Das Lösen der Gleichung $G'(x) = 0$ liefert die Stückzahl x_{max}, für die der maximale Gewinn erzielt wird (Überprüfung des Maximums mit $G''(x_{max}) < 0$).

c) $K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = a \cdot x + b + \frac{c}{x}$

x … Anzahl der produzierten Netze

$K(x)$ … Gesamtkosten bei der Produktion von x Netzen in €

$\overline{K}(x)$ … Stückkosten bei der Produktion von x Netzen in € pro Netz

I: $K(0) = 3\,000 \quad \Rightarrow \quad c = 3\,000$

II: $\overline{K}(10) = 320 \quad \Rightarrow \quad 10 \cdot a + b + 0{,}1 \cdot c = 320$

III: $K(100) = 5\,450 \quad \Rightarrow \quad 10\,000 \cdot a + 100 \cdot b + c = 5\,450$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0{,}1 \\ 10\,000 & 100 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\,000 \\ 320 \\ 5\,450 \end{pmatrix}$$

d) Das lokale Minimum der Stückkostenfunktion ermittelt man durch das Nullsetzen ihrer 1. Ableitung:

$$\left(\frac{K(x)}{x}\right)' = 0$$

Die Quotientenregel liefert:

$$\frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad K'(x) = \frac{K(x)}{x} \text{ (Grenzkosten = Stückkosten)}$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von Grenzkostenfunktion und Stückkostenfunktion.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —
d) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 3
b) leicht	b) 3
c) mittel	c) 3
d) schwer	d) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Staudamm (1)*

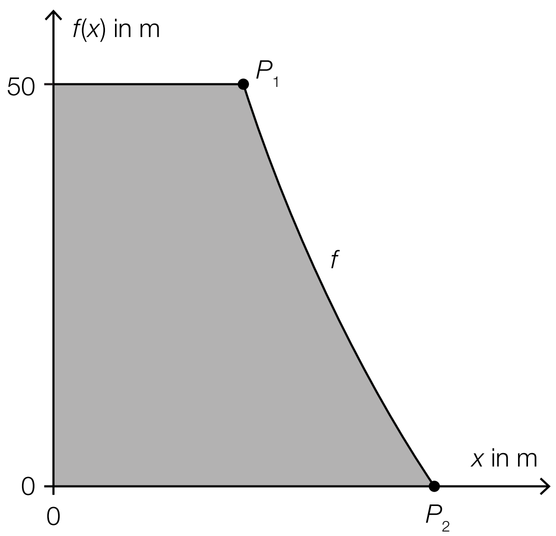
Aufgabennummer: B_441

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Ein Staudamm hat den unten – nicht maßstabgetreu – dargestellten Querschnitt mit den Punkten $P_1 = (10|50)$ und $P_2 = (20|0)$. Alle Angaben erfolgen in Metern. Der Verlauf zwischen den Punkten P_1 und P_2 wird durch den Graphen der Funktion f beschrieben:

$f(x) = 216{,}1 - 72{,}1 \cdot \ln(x)$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

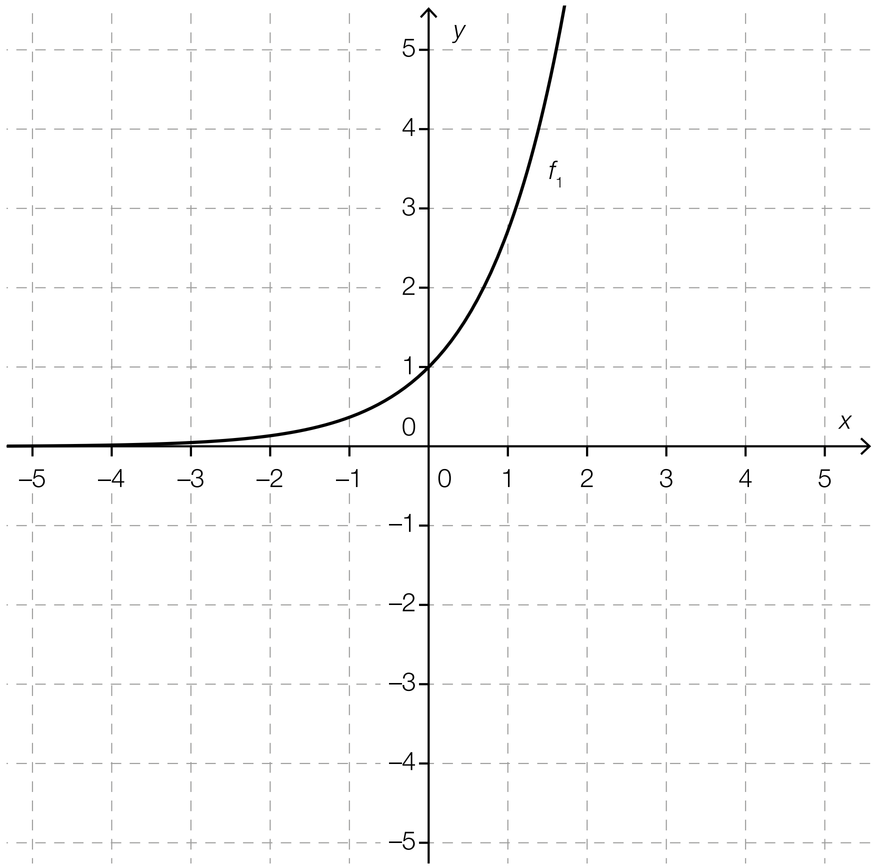


1) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Staudamms (graue Fläche).

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im unten stehenden Diagramm ist der Graph einer Exponentialfunktion f_1 eingezeichnet.

1) Zeichnen Sie in diesem Diagramm den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion f_2 ein.



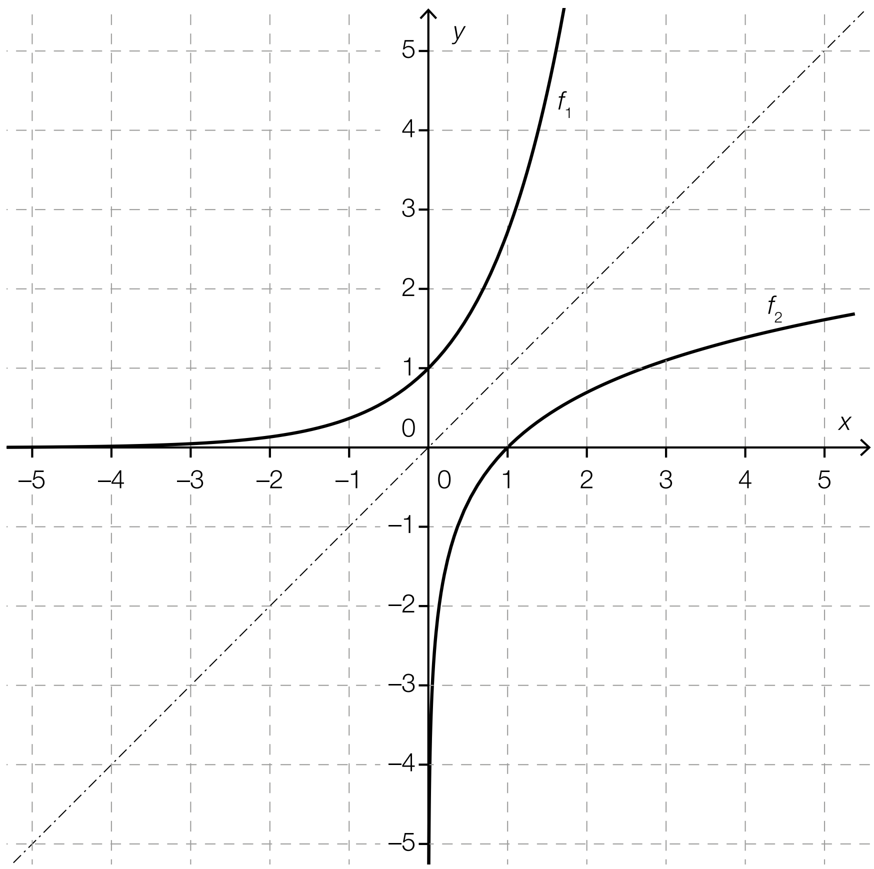
2) Beschreiben Sie, welche Bedeutung die Gerade $y = x$ für den Zusammenhang der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 hat.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = 10 \cdot 50 + \int_{10}^{20} (216{,}1 - 72{,}1 \cdot \ln(x))\,\mathrm{d}x = 722{,}31\ldots \approx 722{,}3$

Der Inhalt der Querschnittsfläche beträgt rund 722,3 m².

b1)



b2) Die Funktionsgraphen liegen symmetrisch zur Geraden $y = x$.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Inhalts der Querschnittsfläche
1 × B: für die richtige Berechnung des Inhalts der Querschnittsfläche

b1) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Umkehrfunktion f_2

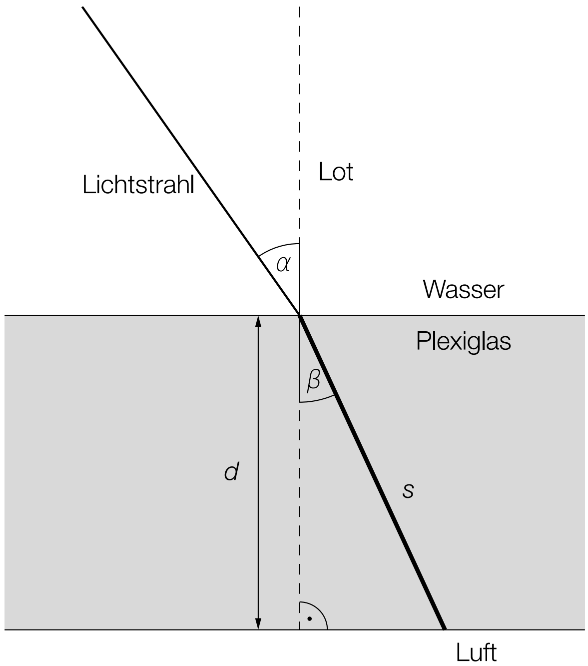
b2) 1 × C: für die richtige Beschreibung zur Bedeutung der Geraden $y = x$

Tauchgang*

Aufgabennummer: B_416

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die nachstehende Grafik zeigt den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.



α ... Winkel zwischen Lichtstrahl und Lot im Wasser
β ... Winkel zwischen Lichtstrahl und Lot im Plexiglas

Der Zusammenhang zwischen α und β kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$\sin(\alpha)$ verhält sich zu $\sin(\beta)$ wie 1,49 zu 1,33.

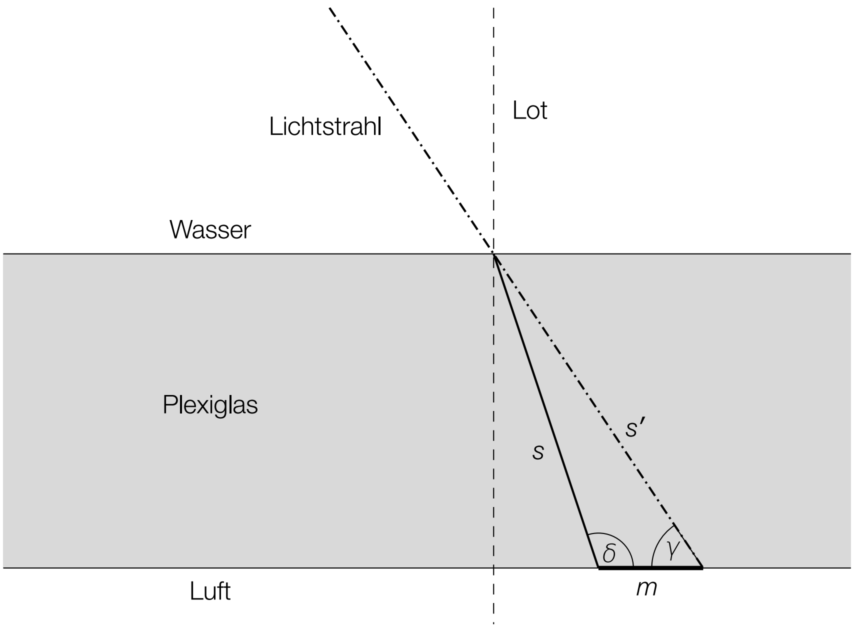
1) Berechnen Sie den Winkel β, wenn gilt: $\alpha = 35°$.

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge s, wenn die Dicke d und der Winkel β bekannt sind.

$s =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die nachstehende nicht maßstabgetreue Grafik zeigt den Verlauf eines anderen Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.



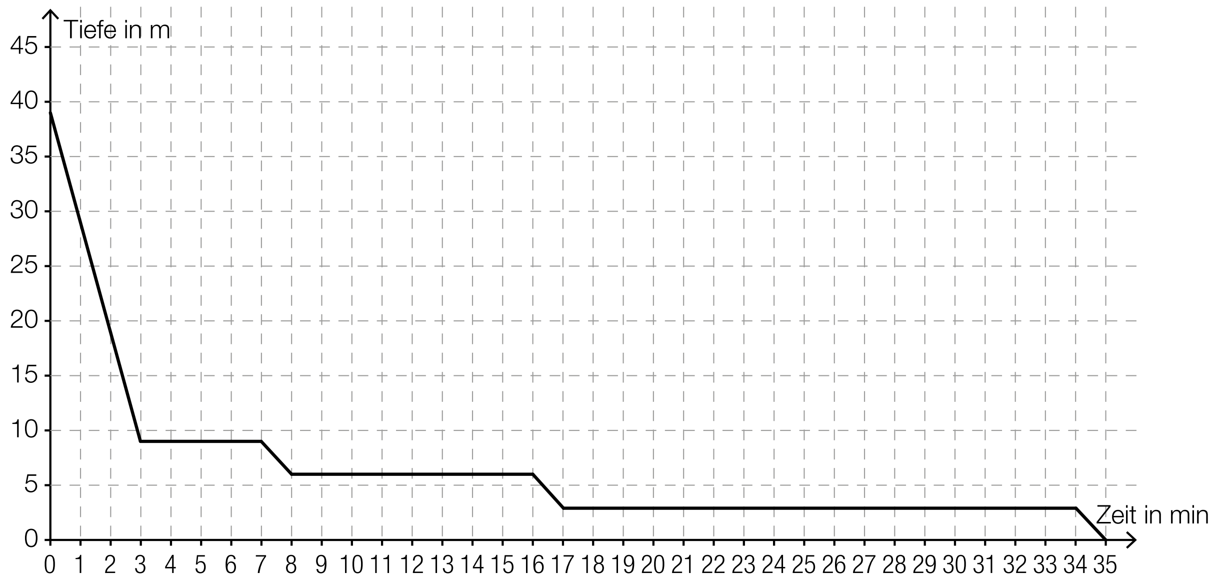
s ... Weg, den der Lichtstrahl im Plexiglas zurücklegt
s' ... Weg, den der Lichtstrahl ohne Ablenkung zurücklegen würde

Dabei gilt: $s = 4{,}52$ mm und $s' = 4{,}77$ mm. Außerdem kennt man den Winkel $\gamma = 57°$.

1) Berechnen Sie den stumpfen Winkel δ.

2) Berechnen Sie die Länge der Strecke m.

c) Das nachstehende Diagramm zeigt, wie bei einem bestimmten Tauchgang aus 39 m Tiefe aufgetaucht wurde.



1) Interpretieren Sie die waagrechten Abschnitte des Graphen im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Markieren Sie im obigen Diagramm ein Zeitintervall, in dem die Auftauchgeschwindigkeit rund 10 m/min beträgt.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{1,49}{1,33}$

$\beta = 30,79...° \approx 30,8°$

a2) $s = \frac{d}{\cos(\beta)}$

b1) Sinussatz:

$\frac{s}{\sin(\gamma)} = \frac{s'}{\sin(\delta)}$

$(\delta_1 = 62,25...°)$
$\delta_2 = 117,74...°$

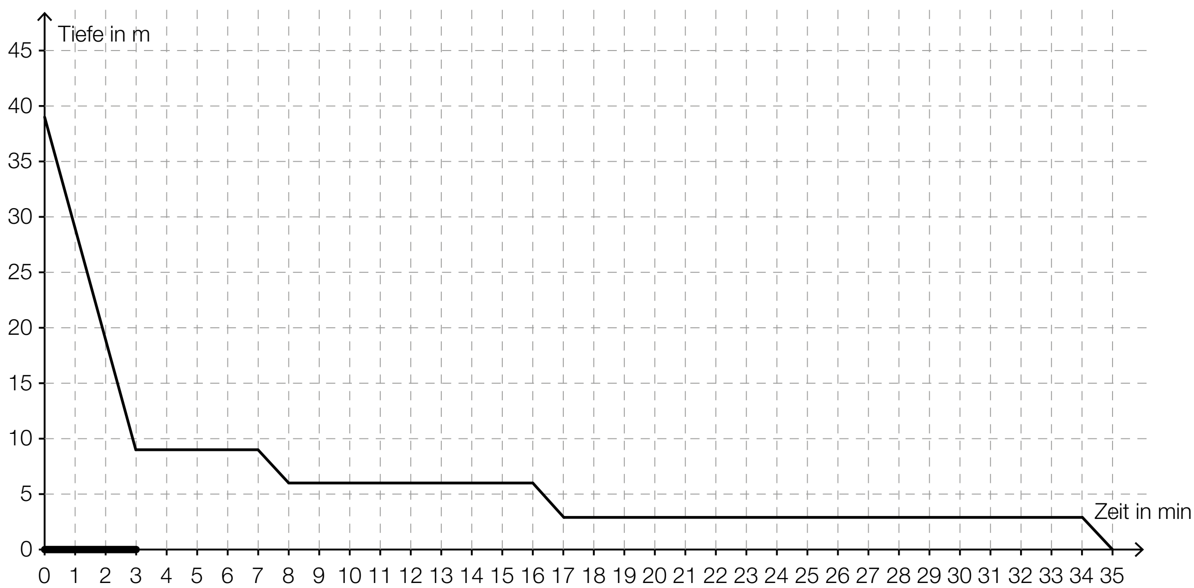
Wird der spitze Winkel nicht erwähnt und nur der stumpfe als Lösung angegeben, so ist dies ebenfalls richtig.

b2) Winkel, den s und s' einschließen: $180° - \delta_2 - \gamma = 5,258...° \approx 5,26°$

Cosinussatz: $m^2 = s^2 + s'^2 - 2 \cdot s \cdot s' \cdot \cos(5,26°)$
$m = \sqrt{s^2 + s'^2 - 2 \cdot s \cdot s' \cdot \cos(5,26°)} = 0,493...$
$m \approx 0,49$ mm

c1) Die waagrechten Abschnitte sind diejenigen Zeitabschnitte, in denen die Taucherin/der Taucher auf gleicher Tiefe bleibt.

c2) Auftauchgeschwindigkeit 10 m/min:



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels β
a2) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung von δ
b2) 1 × B2: für die richtige Berechnung von m

c1) 1 × C1: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
c2) 1 × C2: für die richtige Markierung des Intervalls

Sinusfunktion*

Aufgabennummer: B_437

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Eine Glimmlampe beginnt zu leuchten, sobald die angelegte Spannung eine Zündspannung U_Z übersteigt. Sie erlischt wieder, sobald die angelegte Spannung die Löschspannung U_L unterschreitet. Für eine bestimmte Glimmlampe gilt:

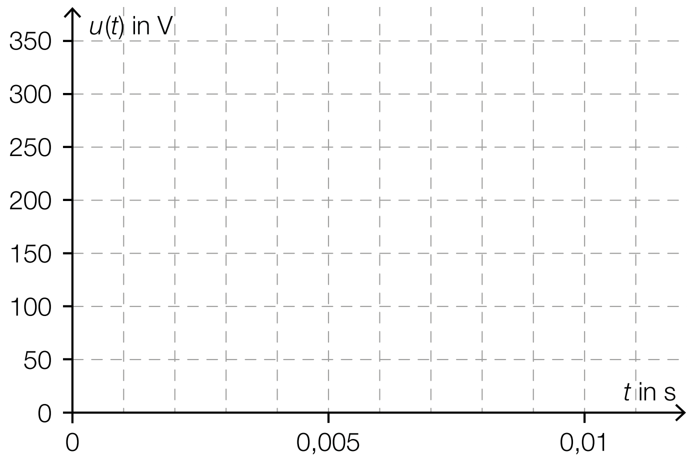
$U_Z = 150$ V
$U_L = 100$ V

Die angelegte Spannung kann näherungsweise durch die Funktion u beschrieben werden:

$u(t) = 325 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$

t ... Zeit in s
$u(t)$ ... Spannung zur Zeit t in Volt (V)

1) Veranschaulichen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Funktionsgraphen von u und kennzeichnen Sie dasjenige Zeitintervall $[t_1; t_2]$, in dem die Glimmlampe leuchtet.



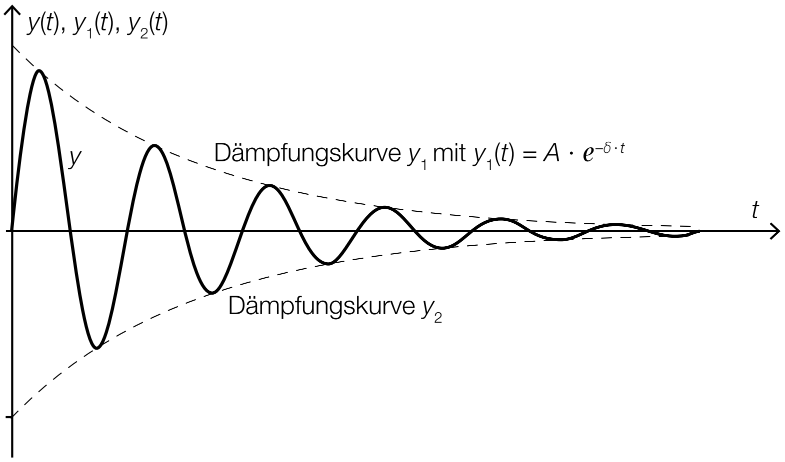
2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Zeit die Glimmlampe im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die in der nachstehenden Abbildung dargestellte gedämpfte Schwingung wird durch die Funktion y beschrieben:

$y(t) = A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$

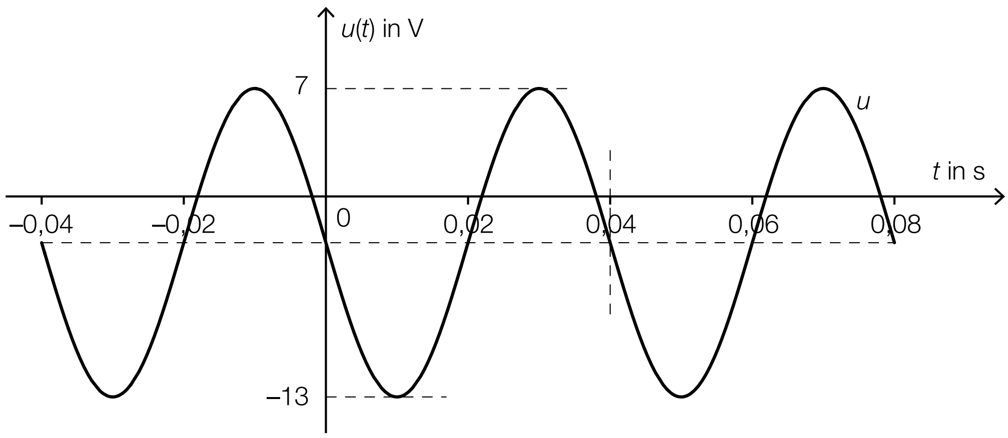
t ... Zeit
$y(t)$ ... Auslenkung zur Zeit t



1) Erstellen Sie eine Gleichung der zu y_1 symmetrischen Dämpfungskurve y_2 (siehe obige Abbildung).

2) Zeigen Sie, dass an den Stellen t_k, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 berührt, gilt:
$t_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$ mit $k = 0, 1, 2, 3, ...$

c) Der zeitliche Verlauf einer Spannung kann durch eine Funktion u mit $u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + d$ beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden und $A > 0$.



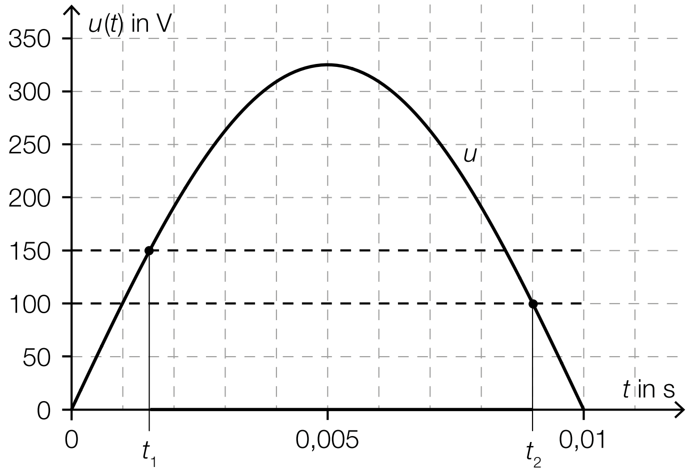
1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm die Parameter A und d ab.

2) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter ω.

3) Bestimmen Sie mithilfe des obigen Diagramms den Parameter φ.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $u(t_1) = 150 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0{,}00152\ldots$

$u(t_2) = 100 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 0{,}00900\ldots$

$\frac{t_2 - t_1}{0{,}01} = 0{,}7477\ldots$

Im Zeitintervall [0; 0,01] leuchtet die Glimmlampe rund 74,8 % der Zeit.

b1) $y_2(t) = -A \cdot e^{-\delta \cdot t}$

b2) Die Stellen, an denen der Funktionsgraph von y die Dämpfungskurve y_1 bzw. y_2 schneidet, erhält man als Lösungen der Gleichung $A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t}$.

$A \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \pm A \cdot e^{-\delta \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \sin(\omega \cdot t) = \pm 1$

$\omega \cdot t_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{\pi}{2 \cdot \omega} + k \cdot \frac{\pi}{\omega} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\omega}$

c1) $A = 10$

$d = -3$

c2) Die Periodendauer T ist 0,04, daher ergibt sich:

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}04} = 50 \cdot \pi$

c3) $t_0 = -0{,}02$ und $\varphi = -t_0 \cdot \omega$, daher ergibt sich:

$\varphi = 0{,}02 \cdot 50 \cdot \pi = \pi$

(Jeder Wert $\varphi = \pi + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ ist als richtig zu werten.)

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige grafische Veranschaulichen des Zeitintervalls
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung von y_2
b2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (Gleichung zur Berechnung der Schnittpunkte)
1 x D: für den richtigen Nachweis

c1) 1 × C: für das richtige Ablesen von A und d
c2) 1 x B1: für das richtige Bestimmen von ω
c3) 1 x B2: für das richtige Bestimmen von φ

Flugbahn und Bewegungsgleichung (1)*

Aufgabennummer: B_438

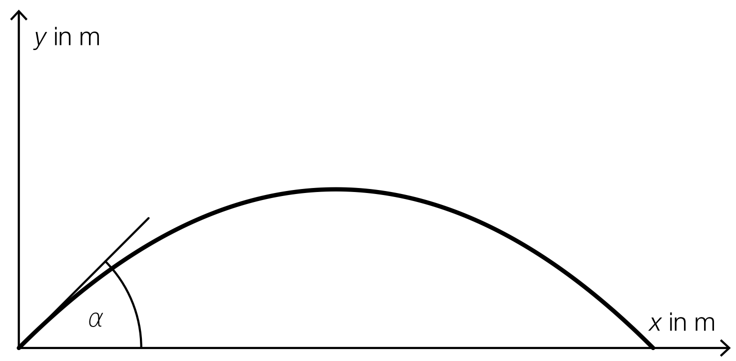
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Flugbahn eines Geschoßes kann durch eine Funktion mit folgender Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$y = x \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot g \cdot x^2$$

x, y ... Koordinaten in m
v ... Abschussgeschwindigkeit in m/s
g ... Erdbeschleunigung (g = 9,81 m/s²)
α ... Abschusswinkel (0° < α < 90°)

Die quadratische Gleichung $x \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot g \cdot x^2 = 10$ wird für bestimmte Werte von v und α nach x aufgelöst. Man erhält die Lösung $x_1 = x_2 = 15$.
Der Funktionsgraph der zugehörigen Flugbahn ist in der nachstehenden Abbildung nicht maßstabgetreu dargestellt.



1) Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes P der Flugbahn an, der der oben angegebenen Lösung entspricht.

2) Berechnen Sie den Abschusswinkel α für die in der Grafik dargestellte Funktion.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Unter Berücksichtigung des Luftwiderstands gilt für die Fallgeschwindigkeit eines Fallschirmspringers bis zum Öffnen des Schirms:

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{b}} \cdot \left(1 - \frac{2}{e^{2 \cdot \sqrt{b \cdot g} \cdot t} + 1}\right)$$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$v(t)$ ... Fallgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s
b ... Parameter in m^{-1}
g ... Erdbeschleunigung in m/s^2

1) Stellen Sie den Graphen der Funktion v mit $b = 0{,}003\ m^{-1}$ und $g = 9{,}81\ m/s^2$ im Bereich $0 \leq t \leq 25$ dar.

Die Fallgeschwindigkeit strebt für wachsendes t asymptotisch gegen einen Wert v_{max}.

2) Lesen Sie aus der von Ihnen erstellten Grafik einen Näherungswert für v_{max} ab.

c) Der zurückgelegte Weg eines Motorrads, das nach dem Auskuppeln ausrollt, wird annähernd durch die Funktion s beschrieben:

$$s(t) = 250 \cdot (1 - e^{-0{,}04 \cdot t})$$

t ... Zeit seit dem Auskuppeln in s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg des Motorrads zur Zeit t in m

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, mit der die Geschwindigkeit des Motorrads in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben wird.
2) Berechnen Sie diejenige Geschwindigkeit, mit der das Motorrad zum Zeitpunkt des Auskuppelns fuhr.

Möglicher Lösungsweg

a1) $P = (15|10)$

a2) Die Punkte $(0|0)$, $(15|10)$ und $(30|0)$ liegen auf dem Graphen der quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

$(0|0)$: $c = 0$
$(15|10)$: $15^2 \cdot a + 15 \cdot b = 10$
$(30|0)$: $30^2 \cdot a + 30 \cdot b = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $a = -\frac{2}{45}$; $b = \frac{4}{3}$

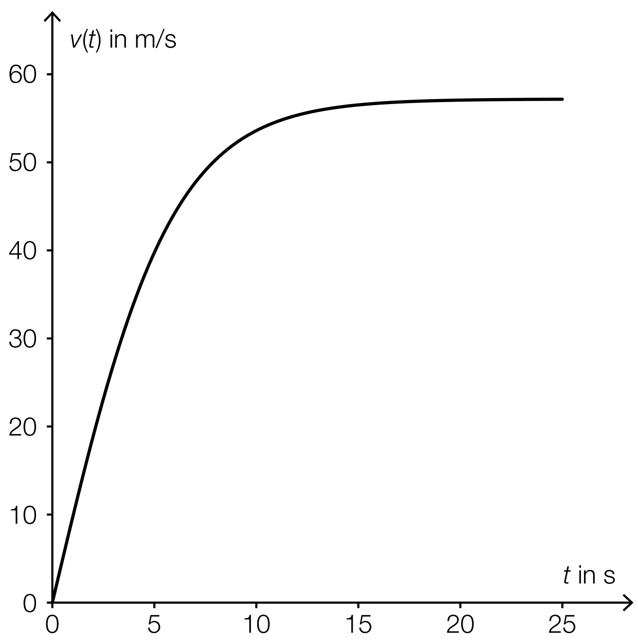
$\Rightarrow \quad y = -\frac{2}{45} \cdot x^2 + \frac{4}{3} \cdot x$

Der Vergleich mit der gegebenen Funktionsgleichung zeigt:

$\tan(\alpha) = \frac{4}{3}$

$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}130...° \approx 53{,}13°$

b1)



b2) Daraus wird v_{max} mit rund 57 m/s abgelesen.
Toleranzbereich: [55; 60]

c1) $v(t) = \dot{s}(t) = 10 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t}$

c2) $v(0) = 10$

Die Geschwindigkeit zu Beginn des Auskuppelns beträgt 10 m/s.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Angabe der Koordinaten
a2) 1 × A: für einen richtigen Ansatz zur Berechnung des Winkels (Modellierung der quadratischen Funktion)
1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels α

b1) 1 × B: für die richtige grafische Darstellung der Fallgeschwindigkeit
b2) 1 × C: für das richtige Ablesen eines Näherungswerts für die maximale Fallgeschwindigkeit im Toleranzbereich [55; 60]

c1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit

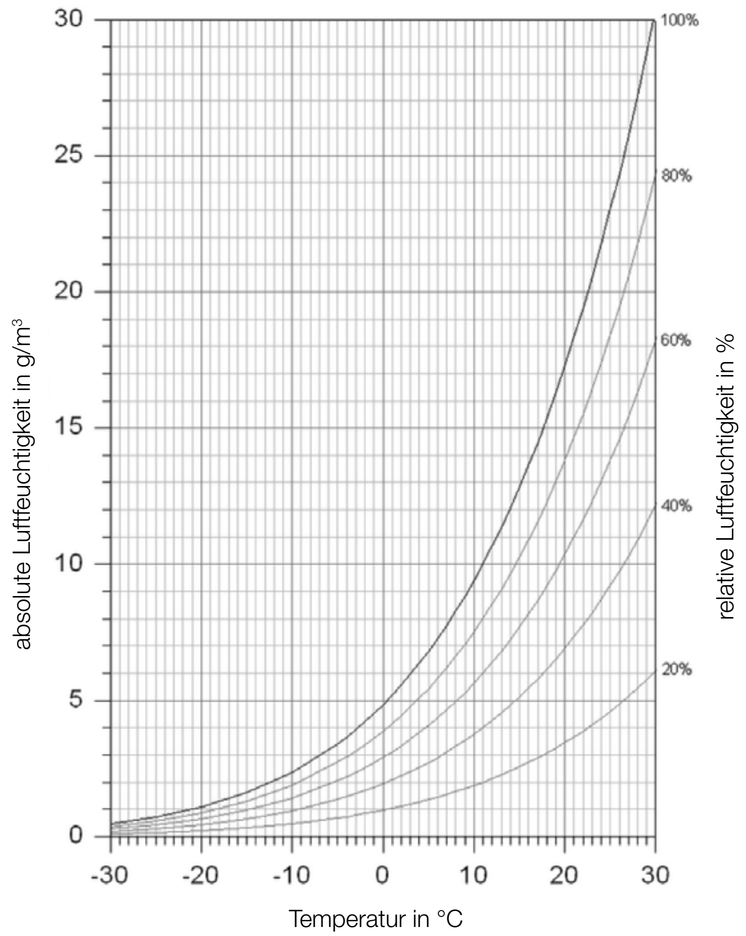
Luftfeuchtigkeit

Aufgabennummer: B_113

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In Abhängigkeit von der Temperatur kann Luft nur eine gewisse Höchstmenge an Wasserdampf aufnehmen. Das geläufigste Maß für den Wassergehalt der Luft ist die relative Luftfeuchtigkeit in Prozent.

Die nachstehende Grafik stellt den Zusammenhang zwischen der Temperatur in °C und der absoluten Luftfeuchtigkeit in g/m³ bei verschiedenen relativen Luftfeuchtigkeiten dar.



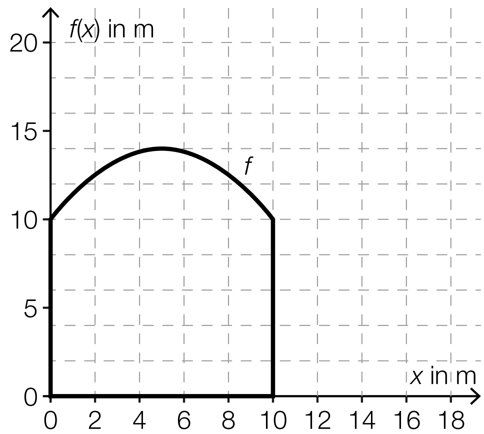
a) Die in der Grafik abgebildete Kurve für die relative Luftfeuchtigkeit von 100 % soll durch eine Exponentialfunktion F angenähert werden.

$F(\vartheta) = F_0 \cdot e^{k \cdot \vartheta}$

ϑ ... Temperatur in °C
$F(\vartheta)$ ... absolute Luftfeuchtigkeit bei der Temperatur ϑ in g/m³
F_0 ... absolute Luftfeuchtigkeit bei $\vartheta = 0$ °C in g/m³
k ... Konstante

– Berechnen Sie aus den absoluten Luftfeuchtigkeiten für die Temperaturen 0 °C und 20 °C die Parameter F_0 und k.
– Zeigen Sie, dass der Graph dieser Funktion in einem Koordinatensystem mit logarithmischer Skalierung auf der Ordinatenachse eine Gerade ist.

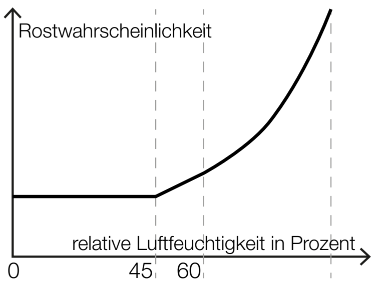
b) In der nachstehenden Grafik ist die Grundfläche eines Festsaals dargestellt. Die gekrümmte Begrenzungslinie ist der Graph einer quadratischen Funktion f. Die Höhe des Festsaals beträgt 3,5 m.



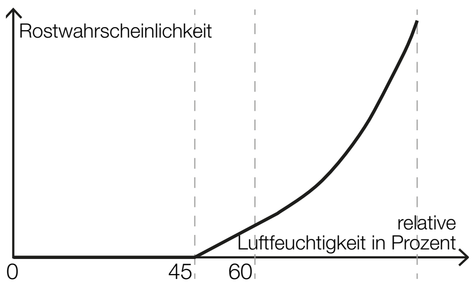
– Stellen Sie eine Funktionsgleichung für f auf.
– Berechnen Sie diejenige Masse des Wassers, die bei einer relativen Luftfeuchtigkeit von 80 % und einer Temperatur von 28 °C in der Raumluft gelöst ist.

c) Bis zu einer relativen Luftfeuchtigkeit von 45 % ist es praktisch unmöglich, dass sich Rost bildet. Zwischen 45 % und 60 % relativer Luftfeuchtigkeit ist die Rostwahrscheinlichkeit zur relativen Luftfeuchtigkeit proportional. Über 60 % relativer Luftfeuchtigkeit steigt die Rostwahrscheinlichkeit mit steigender relativer Luftfeuchtigkeit exponentiell an.

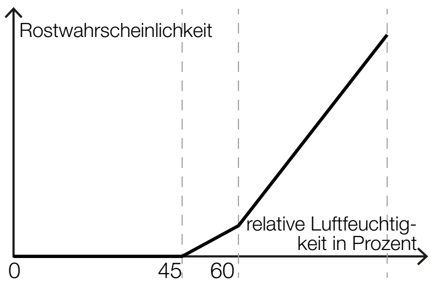
– Kreuzen Sie dasjenige Diagramm an, das den Sachverhalt richtig darstellt. *[1 aus 5]*



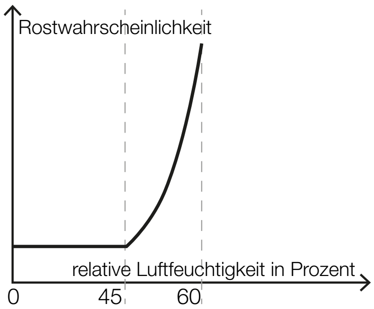
☐



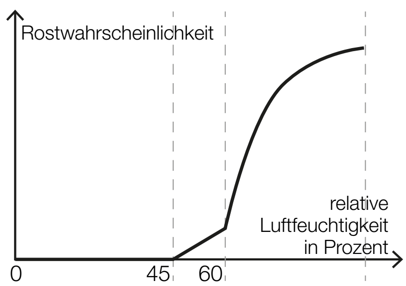
☐



☐



☐



☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $F(0) = 5 \;\Rightarrow\; F_0 = 5$

$F(20) = 17 \;\Rightarrow\; 5 \cdot e^{k \cdot 20} = 17 \;\Rightarrow\; k = 0{,}06118\ldots$

Das Logarithmieren der Gleichung $F(\vartheta) = F_0 \cdot e^{k \cdot \vartheta}$ liefert:
$\ln\big(F(\vartheta)\big) = k \cdot \vartheta + \ln(F_0)$ mit k als Steigung und $\ln(F_0)$ als Ordinatenabschnitt

b) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$f(0) = 10 \;\Rightarrow\; c = 10$

$f(5) = 14 \;\Rightarrow\; a \cdot 25 + b \cdot 5 + c = 14$

$f(10) = 10 \;\Rightarrow\; a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}16;\ b = 1{,}6;\ c = 10$

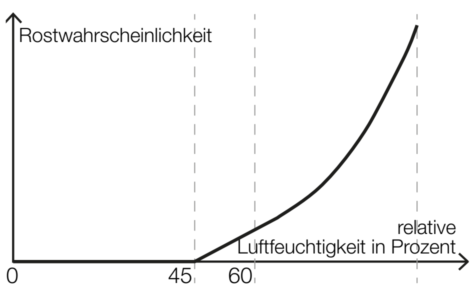
$f(x) = -0{,}16 \cdot x^2 + 1{,}6 \cdot x + 10$

$V = G \cdot h$
$G = \int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = 126{,}\overline{6}\ \mathrm{m}^2$
$V = 126{,}\overline{6} \cdot 3{,}5 = 443{,}\overline{3}\ \mathrm{m}^3$

Bei einer Temperatur von 28 °C und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 80 % befinden sich in 1 m³ Luft 22 g Wasser.
Masse des gesamten Wassers = $443{,}\overline{3} \cdot 22 = 9\,753{,}\overline{3}$ g

c)

[...]	
[...]	
[...]	

	☒
[...]	

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 4 Analysis
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) –

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 3
c) 1

Thema: Physik

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gastwirtschaft*

Aufgabennummer: B_443

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

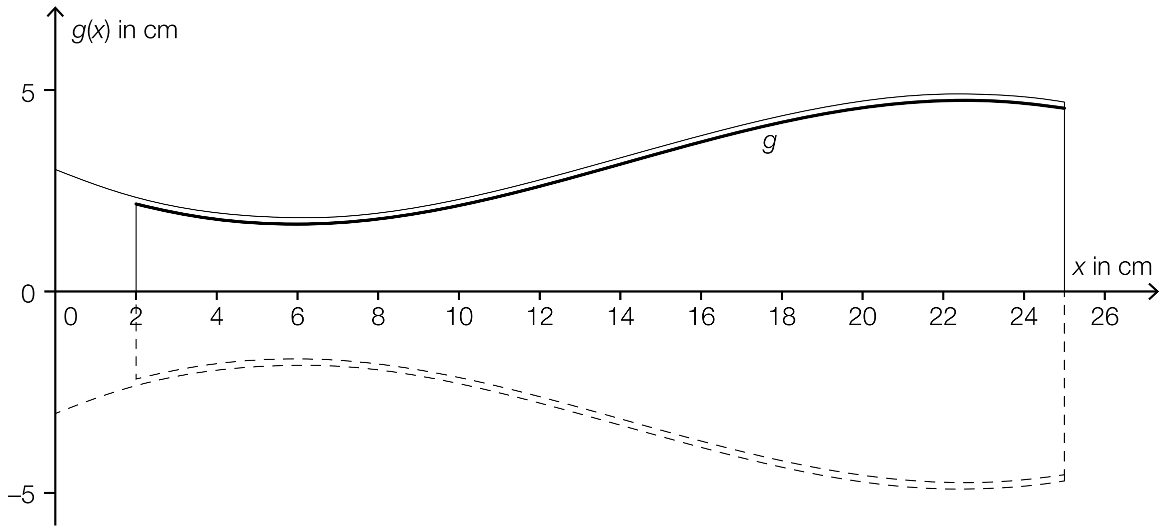
a) Automatische Abfüllanlagen für Getränke sollen möglichst gleichmäßige Füllmengen gewährleisten.
Die Füllmenge bei einer bestimmten Abfüllanlage ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 500$ ml und der Standardabweichung $\sigma = 4{,}5$ ml.

Die Füllmenge wird mithilfe einer Stichprobe des Umfangs n überprüft.

1) Berechnen Sie für $n = 10$ den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 99 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

2) Begründen Sie, warum das Maximum der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte $\overline{X}$ für $n = 5$ kleiner als jenes für $n = 10$ ist.

b) Die Form eines Weizenbierglases kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Funktion g um die x-Achse dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Es gilt:

$g(x) = -0{,}00108 \cdot x^3 + 0{,}046 \cdot x^2 - 0{,}4367 \cdot x + 3$ mit $2 \leq x \leq 25$

$x, g(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie den kleinsten Innendurchmesser des Weizenbierglases.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Weizenbierglases in Litern.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) $\mu = 500$ ml und $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}5}{\sqrt{10}}$ ml

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

[496,33...; 503,66...]

a2) Die Standardabweichung einer Stichprobe ist umso größer, je kleiner der Stichprobenumfang n ist. Daher ist der Graph der Dichtefunktion für $n = 5$ breiter als für $n = 10$. Da der gesamte Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion immer 1 beträgt, muss das Maximum für $n = 5$ kleiner als für $n = 10$ sein.

b1) $g'(x) = 0$ *oder* $-0{,}00324 \cdot x^2 + 0{,}092 \cdot x - 0{,}4367 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 6{,}025...$
($x_2 = 22{,}369...$)

Anhand der Grafik ist erkennbar, dass der Tiefpunkt an der Stelle x_1 ist, ein (rechnerischer) Nachweis, dass x_1 eine Minimumstelle ist, ist daher nicht erforderlich.

Innendurchmesser: $d = 2 \cdot g(x_1) = 3{,}60...$

Der kleinste Innendurchmesser des Weizenbierglases beträgt rund 3,6 cm.

b2) $V = \pi \cdot \int_2^{25} (g(x))^2 \, dx = 678{,}6...$

Das Füllvolumen des Weizenbierglases beträgt rund 0,68 L.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zufallsstreubereichs
a2) 1 × D: für die richtige Begründung
b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des kleinsten Innendurchmessers
b2) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Füllvolumens in Litern

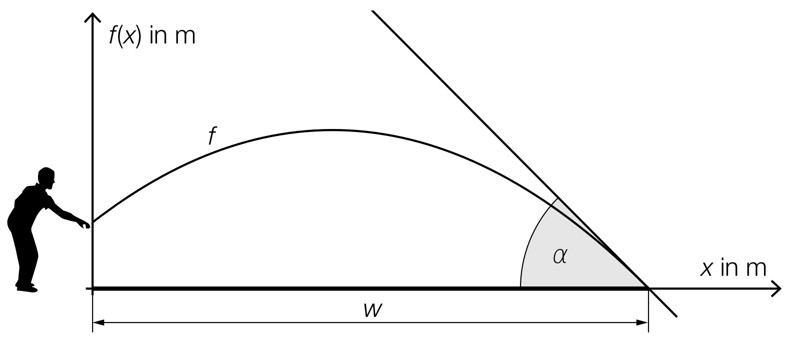
Boule*

Aufgabennummer: B_444

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Boule ist eine Sportart, bei der Kugeln geworfen werden. Ziel ist es, mit den eigenen Kugeln möglichst nah an eine Zielkugel zu gelangen.

a) Peter wirft eine Kugel. Die Flugbahn dieser Kugel kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



$f(x) = -0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

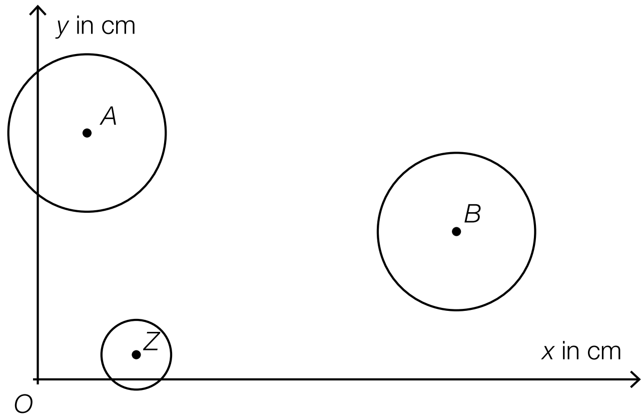
1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 1,1 in der obigen Funktionsgleichung im gegebenen Sachzusammenhang.
2) Berechnen Sie die Wurfweite w.

Peter möchte, dass der Aufprallwinkel α der Kugel im Intervall [42°; 44°] liegt.

3) Überprüfen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, ob der Aufprallwinkel α in diesem Intervall liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für eine genauere Analyse eines Boule-Spiels wird mithilfe einer Drohne ein Luftbild aufgenommen.



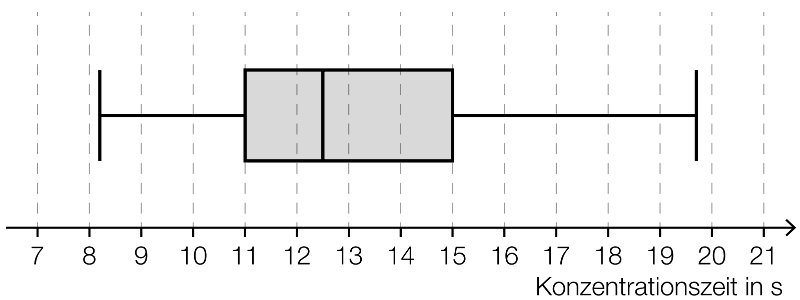
$A = (2|10)$ ... Auflagepunkt der ersten Kugel
$B = (17|6)$ ... Auflagepunkt der zweiten Kugel
$Z = (4|1)$ ... Auflagepunkt der Zielkugel

1) Berechnen Sie die Länge der Strecke BZ.

Während des Spiels bewegt sich die erste Kugel entlang der Strecke AB 3 cm in Richtung B.

2) Berechnen Sie die Koordinaten der neuen Position des Auflagepunkts der ersten Kugel.

c) Die Zeit, die benötigt wird, um sich vor einem Wurf zu konzentrieren, nennt man Konzentrationszeit.
Im nachstehenden Boxplot sind die Konzentrationszeiten von Emma bei mehreren Würfen zusammengefasst.



1) Lesen Sie aus dem Boxplot den Interquartilsabstand der Konzentrationszeiten von Emma ab.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Abwurfhöhe beträgt 1,1 m.

a2) $f(x) = 0$ *oder* $-0{,}0959 \cdot x^2 + 0{,}767 \cdot x + 1{,}1 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
($x_1 = -1{,}241...$)
$x_2 = 9{,}239...$

Die Wurfweite w beträgt rund 9,24 m.

a3) $\alpha = |\arctan(f'(9{,}239...))| = 45{,}1...°$

Der Aufprallwinkel α liegt also nicht im gegebenen Intervall.

b1) $\overline{BZ} = \sqrt{13^2 + 5^2} = 13{,}92...$

Die Länge der Strecke BZ beträgt rund 13,9 cm.

b2) Ansatz: $A_{neu} = A + 3 \cdot \overrightarrow{AB}_0$ *oder* $\overrightarrow{OA}_{neu} = \overrightarrow{OA} + 3 \cdot \overrightarrow{AB}_0$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}$

$\overrightarrow{AB}_0 = \frac{1}{\sqrt{241}} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix}$

$A_{neu} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{241}} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}89... \\ 9{,}22... \end{pmatrix}$

Der neue Auflagepunkt der ersten Kugel hat gerundet die Koordinaten (4,9|9,2).

c1) Interquartilsabstand: 4 s

Lösungsschlüssel

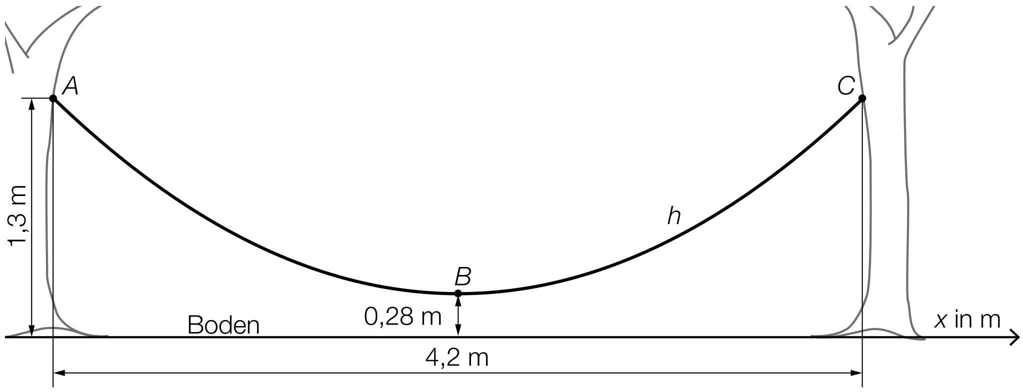
a1) 1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl 1,1 im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wurfweite w
a3) 1 × D: für die richtige Überprüfung mithilfe der Differenzialrechnung
b1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge der Strecke BZ
b2) 1 × A: für den richtigen Ansatz mithilfe des Einheitsvektors
1 × B2: für die richtige Berechnung der Koordinaten
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen des Interquartilsabstands

Hängematten*

Aufgabennummer: B_445

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Graph der quadratischen Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschreibt näherungsweise den Durchhang einer Hängematte (siehe nachstehende Abbildung).



x, $h(x)$ ... Koordinaten in m

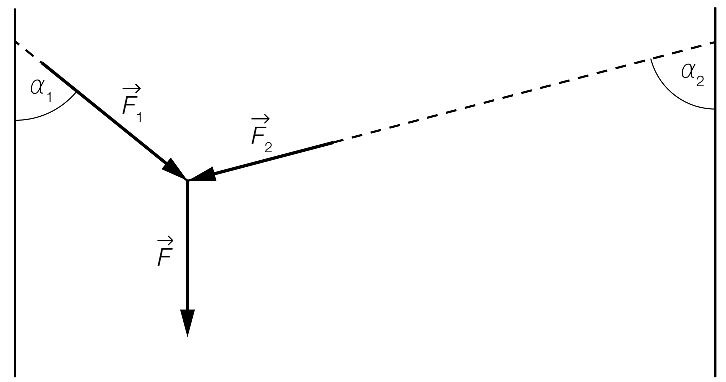
Der Graph der Funktion h verläuft durch die Befestigungspunkte A und C. Der Scheitelpunkt von h wird mit B bezeichnet. Die Punkte A und C liegen auf gleicher Höhe über dem Boden.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende senkrechte Koordinatenachse so ein, dass für den Koeffizienten b gilt: $b = 0$

2) Berechnen Sie den Koeffizienten a.

* ehemalige Klausuraufgabe

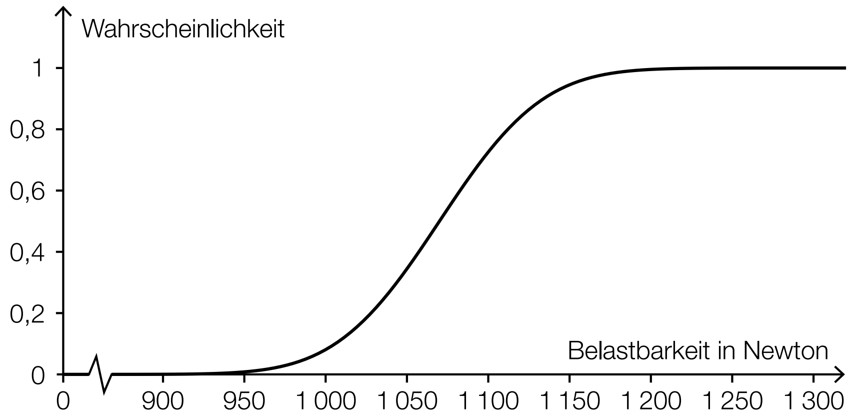
b) Eine Hängematte wird an zwei senkrechten Stangen befestigt.
In der nachstehenden Abbildung ist die belastete Hängematte modellhaft dargestellt. Es wirkt eine Kraft $\vec{F}$ mit $|\vec{F}| = 800$ Newton (N) senkrecht nach unten. Die Kraft $\vec{F}$ wird in die Komponenten $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zerlegt.



Es gilt: $\alpha_1 = 50°$ und $\alpha_2 = 75°$

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Kräftezerlegung mithilfe eines Kräfteparallelogramms.
2) Berechnen Sie $|\vec{F}_1|$.

c) Die Belastbarkeit von Seilen eines bestimmten Herstellers kann näherungsweise als normalverteilt angenommen werden. Das nachstehende Diagramm zeigt den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion.



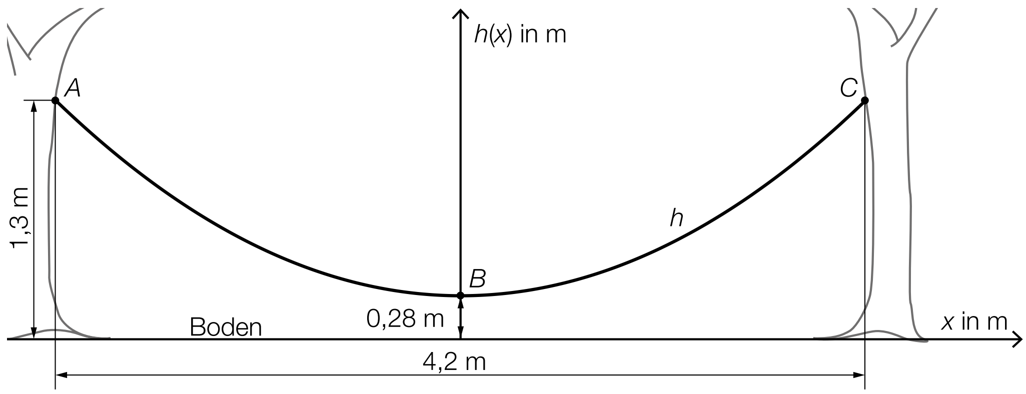
1) Veranschaulichen Sie im obigen Diagramm die Wahrscheinlichkeit, dass die Belastbarkeit eines zufällig ausgewählten Seiles mindestens 1 050 Newton (N) beträgt.

Die Maschine zur Herstellung der Seile soll bei gleichbleibender Standardabweichung $\sigma = 50$ N auf einen neuen Erwartungswert μ_{neu} eingestellt werden, sodass nur bei 1 Promille der Seile die Belastbarkeit weniger als 1 000 N beträgt.

2) Berechnen Sie, auf welchen Erwartungswert μ_{neu} die Maschine eingestellt werden muss.

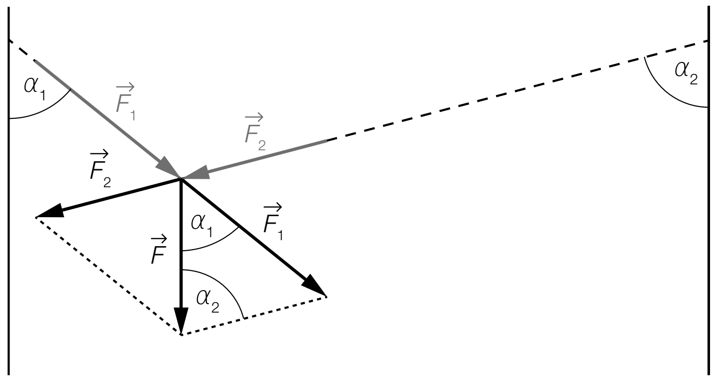
Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $h(2{,}1) = 1{,}3$ *oder* $a \cdot 2{,}1^2 + 0{,}28 = 1{,}3 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}23129...$

b1)

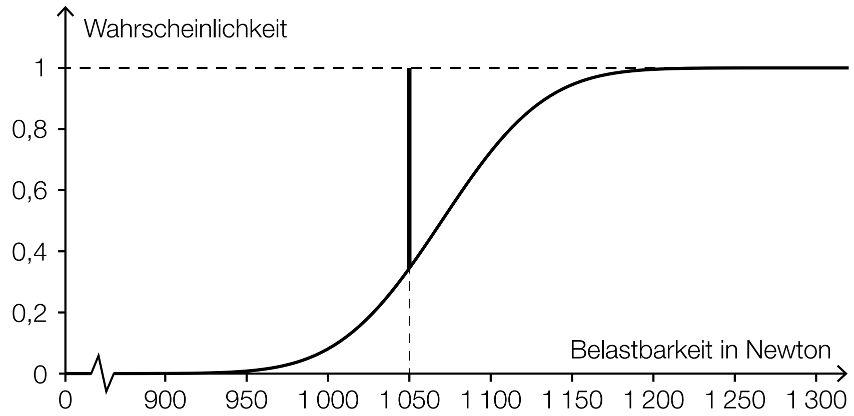


b2) $\dfrac{|\vec{F}|}{\sin(180° - \alpha_1 - \alpha_2)} = \dfrac{|\vec{F}_1|}{\sin(\alpha_2)}$

$|\vec{F}_1| = \dfrac{800 \cdot \sin(75°)}{\sin(55°)} = 943{,}3...$

$|\vec{F}_1|$ beträgt rund 943 Newton.

c1)



c2) X ... Belastbarkeit in N

$P(X < 1\,000) = 0{,}001$

Berechnung von μ_{neu} mittels Technologieeinsatz:

$\mu_{neu} = 1\,154{,}51...\text{ N} \approx 1\,154{,}5\text{ N}$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der senkrechten Koordinatenachse
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten *a*
b1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Kräftezerlegung mithilfe eines Kräfteparallelogramms
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung von $|\vec{F}_1|$
c1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit im Diagramm
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Erwartungswerts μ_{neu}

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bahnsteige (1)*

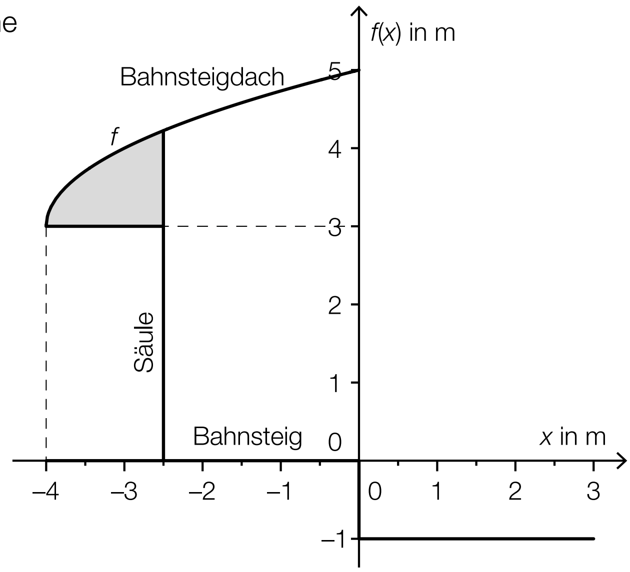
Aufgabennummer: B_446

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Auf dem Bahnhof Linz wird eine Betonkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs verwendet.

Bildquelle: BMBWF

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine vereinfachte Darstellung der Betonkonstruktion.



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche.

A = ____________________

Der in der obigen Abbildung dargestellte Graph der Funktion f wird beschrieben durch:

$f(x) = \sqrt{x - a} + b$ mit $x \geq a$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m
a, b ... Parameter

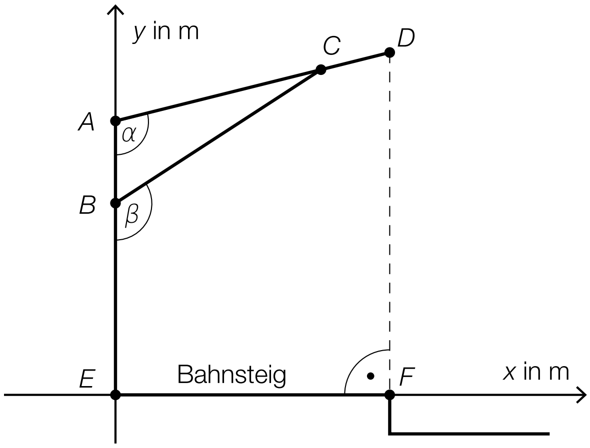
2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Parameter a und b der Funktion f ab.

a = ____________________

b = ____________________

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Skizze ist eine Holzkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs dargestellt.



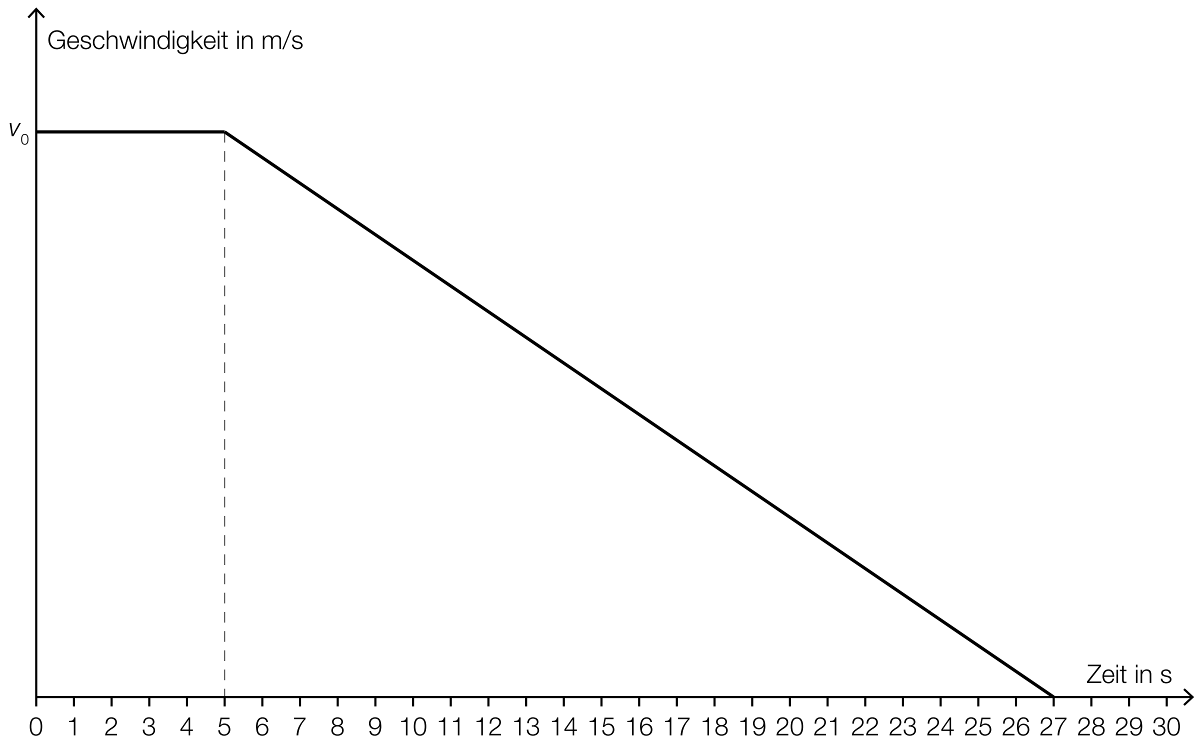
1) Erstellen Sie mithilfe von $\overline{AE}$, $\overline{AD}$ und α eine Formel zur Berechnung von $\overline{DF}$.

$\overline{DF}$ = ______________________________________

Es gilt: $A = (0|4)$, $B = (0|2{,}8)$, $\alpha = 104°$ und $\beta = 123°$

2) Berechnen Sie die Länge $\overline{BC}$.

c) Die Geschwindigkeit eines Zuges bei der Einfahrt in einen Bahnhof ist im unten stehenden Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm modellhaft dargestellt.
In den ersten 5 s ist die Geschwindigkeit des Zuges gleich v_0. Anschließend nimmt die Geschwindigkeit des Zuges linear ab. Die Einfahrt dauert insgesamt 27 s. Dabei legt der Zug insgesamt 240 m zurück.



1) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_0.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der linearen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion im Zeitintervall [5; 27].

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \int_{-4}^{-2,5} f(x)\,\mathrm{d}x - 3 \cdot 1,5$

a2) $a = -4$
$b = 3$

b1) $\overline{DF} = \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \sin(\alpha - 90°)$

b2) $\overline{AB} = 1,2$ m

$\frac{1,2}{\sin(19°)} = \frac{\overline{BC}}{\sin(104°)} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} = 3,576...\text{ m} \approx 3,58\text{ m}$

c1) $240 = v_0 \cdot 5 + \frac{v_0 \cdot 22}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = 15$

Die Geschwindigkeit v_0 beträgt 15 m/s.

c2) $v(t) = k \cdot t + d$

$k = -\frac{15}{22}$

$0 = k \cdot 27 + d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{405}{22}$

$v(t) = -\frac{15}{22} \cdot t + \frac{405}{22}$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A
a2) 1 × C: für das richtige Ablesen von a und b
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Länge $\overline{BC}$
c1) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Geschwindigkeit
c2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion

Blutdruck*

Aufgabennummer: B_448		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Durch die Einnahme eines Medikaments zur Regulierung des Blutdrucks gelangen Wirkstoffe ins Blut.

Die Wirkstoffmenge im Blut kann näherungsweise durch eine Funktion m beschrieben werden, deren 1. Ableitung bekannt ist:

$m'(t) = 1{,}2 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in min
$m'(t)$ ... momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg/min

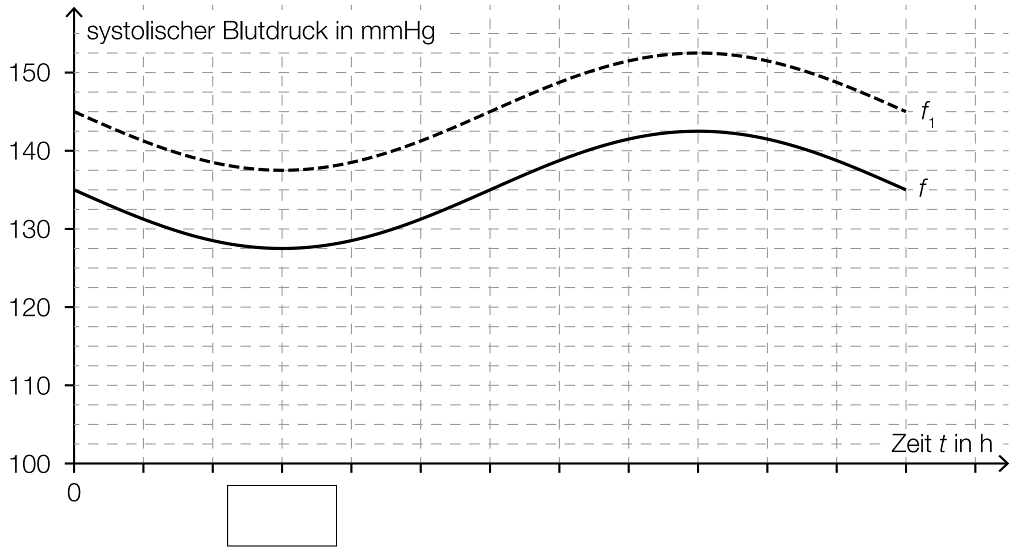
Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Wirkstoffmenge im Blut 10 mg.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion m.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die zeitliche Entwicklung des sogenannten *systolischen Blutdrucks* einer Testperson wird durch eine Funktion f modelliert (siehe nachstehende Abbildung).



Die Funktion f wird beschrieben durch:

$$f(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 135$$

t ... Zeit in h
$f(t)$ ... systolischer Blutdruck zur Zeit t in Millimeter Quecksilbersäule (mmHg)
a ... Parameter

1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zeitangabe in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

2) Bestimmen Sie den Parameter a.

Der Graph der Funktion f_1 in der obigen Abbildung entsteht durch vertikale Verschiebung des Graphen von f.

3) Erstellen Sie ausgehend von f eine Funktionsgleichung für f_1.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\int m'(t)\,\mathrm{d}t = -30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + C$

$m(0) = 10 \quad \textit{oder} \quad -30 + C = 10 \quad \Rightarrow \quad C = 40$

$m(t) = -30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + 40$

a2) $m(t) = 0 \quad \textit{oder} \quad -30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + 40 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
($t_1 = -7{,}6\ldots$)
$t_2 = 399{,}9\ldots$

Nach etwa 400 min ist der Wirkstoff vollständig abgebaut.

b1) Im Kästchen ist die Zahl 6 einzutragen.

b2) $a = -7{,}5$

b3) $f_1(t) = f(t) + 10$

oder:

$f_1(t) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 145$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der der Wirkstoff vollständig abgebaut ist
b1) 1 × C1: für das richtige Eintragen der Zeitangabe
b2) 1 × C2: für das richtige Bestimmen von a
b3) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

Lauftraining*

Aufgabennummer: B_449

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Anna, Beate und Clara bereiten sich auf einen Laufwettbewerb vor. Dabei verfolgen sie unterschiedliche Trainingspläne.

a) Anna und Beate überlegen sich folgende Trainingspläne:

		Trainingstag			
		1	2	3	4
Länge der Trainingsstrecke in km	Anna	1,5	1,65	1,815	
	Beate	1,5	2	2,5	

1) Zeigen Sie, dass die Längen der Trainingsstrecken von Anna an den ersten 3 Tagen eine geometrische Folge bilden.

2) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf.

Die Längen der Trainingsstrecken von Beate an den ersten 3 Tagen bilden eine arithmetische Folge.

3) Stellen Sie für diese Folge ein rekursives Bildungsgesetz auf.

4) Ergänzen Sie unter Verwendung der jeweiligen Bildungsgesetze die fehlenden Werte in der letzten Spalte der obigen Tabelle.

b) Clara berechnet die Längen ihrer Trainingsstrecken folgendermaßen:

$c_n = 2{,}75 + 0{,}125 \cdot n$

n … Trainingstag
c_n … Länge der Trainingsstrecke am n-ten Tag in km

1) Berechnen Sie, am wievielten Trainingstag Claras Trainingsstrecke eine Länge von 8 km hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{1{,}65}{1{,}5} = 1{,}1 \quad \frac{1{,}815}{1{,}65} = 1{,}1$

Es handelt sich um eine geometrische Folge, da die Quotienten aufeinanderfolgender Glieder der Folge gleich sind.

a2) Anna: $a_1 = 1{,}5 \quad a_{n+1} = 1{,}1 \cdot a_n$

a3) Beate: $b_1 = 1{,}5 \quad b_{n+1} = b_n + 0{,}5$

a4) Tabellenwert für Anna: 1,9965
Tabellenwert für Beate: 3

b1) $8 = 2{,}75 + 0{,}125 \cdot n \quad \Rightarrow \quad n = 42$

Am 42. Trainingstag läuft Clara eine Strecke von 8 km.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für den richtigen Nachweis
a2) 1 × A1: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes für Annas Trainingsstrecken
a3) 1 × A2: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes für Beates Trainingsstrecken
a4) 1 × A3: für das richtige Ergänzen der fehlenden Tabellenwerte
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung

Bateman-Funktion

Aufgabennummer: B_114

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der oralen Einnahme eines Medikaments mit einem bestimmten Wirkstoff kann der Verlauf der Wirkstoffkonzentration im Blut durch die Bateman-Funktion c beschrieben werden.

$$c(t) = \frac{D}{V} \cdot \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot (e^{-k_2 \cdot t} - e^{-k_1 \cdot t}) \text{ mit } t \geq 0$$

D ... Gesamtdosis des Wirkstoffs in mg
V ... Verteilungsvolumen in L
k_1, k_2 ... wirkstoffspezifische Koeffizienten

Es gilt: $D, V, k_1, k_2 > 0$ und $k_1 \neq k_2$

t ... Zeit nach der Einnahme in h
$c(t)$ ... Konzentration des Wirkstoffs im Blut zur Zeit t in mg/L

a) – Vergleichen Sie die beiden Exponentialterme $e^{-k_2 \cdot t}$ und $-e^{-k_1 \cdot t}$ im Hinblick auf ihr jeweiliges Monotonieverhalten.

b) Für ein bestimmtes Medikament gilt: $k_1 = 0{,}5\ \text{h}^{-1}$, $k_2 = 0{,}15\ \text{h}^{-1}$

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Abnahme des Wirkstoffs am schnellsten erfolgt.

c) Für ein bestimmtes Medikament gilt: $k_1 = 0{,}5\ \text{h}^{-1}$, $k_2 = 0{,}15\ \text{h}^{-1}$, $V = 7$ L
Das Medikament wirkt nur, wenn die Wirkstoffkonzentration größer gleich 2 mg/L Blut ist.

– Zeigen Sie, dass eine Verdoppelung der Gesamtdosis D von 50 mg auf 100 mg nicht zu einer Verdoppelung der Wirkungsdauer führt.

d) Der Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Bateman-Funktion c wird in der Medizin mit AUC (*area under the curve*, Fläche unter der Kurve) bezeichnet. Es gilt:

$$\text{AUC} = \frac{D}{V \cdot k_2}$$

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Fläche unter der Kurve multipliziert mit dem Verteilungsvolumen ergibt die Gesamtdosis.	☐
Die Gesamtdosis ist gleich dem Produkt der Fläche unter der Kurve mit dem Verteilungsvolumen dividiert durch den Eliminationskoeffizienten k_2.	☐
Das Verteilungsvolumen ist gleich dem Produkt der Fläche unter der Kurve und der Gesamtdosis dividiert durch den Eliminationskoeffizienten k_2.	☐
Der Eliminationskoeffizient k_2 ist gleich dem Quotienten aus Gesamtdosis und Verteilungsvolumen.	☐
Die Gesamtdosis ist gleich dem Produkt aus der Fläche unter der Kurve, dem Verteilungsvolumen und dem Eliminationskoeffizienten k_2.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Formelteil $(e^{-k_2 \cdot t} - e^{-k_1 \cdot t})$ kann als Summe zweier Exponentialterme gesehen werden:

$(e^{-k_2 \cdot t} + (-e^{-k_1 \cdot t}))$

Der Term $e^{-k_2 \cdot t}$ ist aufgrund des negativen Vorzeichens des Exponenten streng monoton fallend.
Der Term $-e^{-k_1 \cdot t}$ ist aufgrund des negativen Vorzeichens des Exponenten und des negativen Vorzeichens vor der Basis streng monoton steigend.

b) $c(t) = \frac{D}{V} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}35} \cdot (e^{-0{,}15 \cdot t} - e^{-0{,}5 \cdot t})$

$c''(t) = \frac{D}{V} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}35} \cdot (0{,}15^2 \cdot e^{-0{,}15 \cdot t} - 0{,}5^2 \cdot e^{-0{,}5 \cdot t})$

$c''(t) = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t = 6{,}879\ldots$

Die Abnahme der Wirkstoffkonzentration erfolgt rund 6,88 h nach der Einnahme am schnellsten.

c) (1) $2 = \frac{50}{7} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}35} \cdot (e^{-0{,}15 \cdot t} - e^{-0{,}5 \cdot t})$

$t_1 = 0{,}701\ldots$, $t_2 = 10{,}705\ldots$

Die Wirkungsdauer ist also rund 10,00 h.

(2) $2 = \frac{100}{7} \cdot \frac{0{,}5}{0{,}35} \cdot (e^{-0{,}15 \cdot t} - e^{-0{,}5 \cdot t})$

$t_1 = 0{,}309\ldots$, $t_2 = 15{,}455\ldots$

Die Wirkungsdauer ist also rund 15,15 h.

15,15 h sind nicht das Doppelte von 10,00 h. Die Wirkungsdauer wird also durch die Einnahme der doppelten Dosis nicht verdoppelt.

Auch andere Argumentationen, z. B. grafische, sind zulässig.

d)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
Die Gesamtdosis ist gleich dem Produkt aus der Fläche unter der Kurve, dem Verteilungsvolumen und dem Eliminationskoeffizienten k_2.	☒

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Chemie

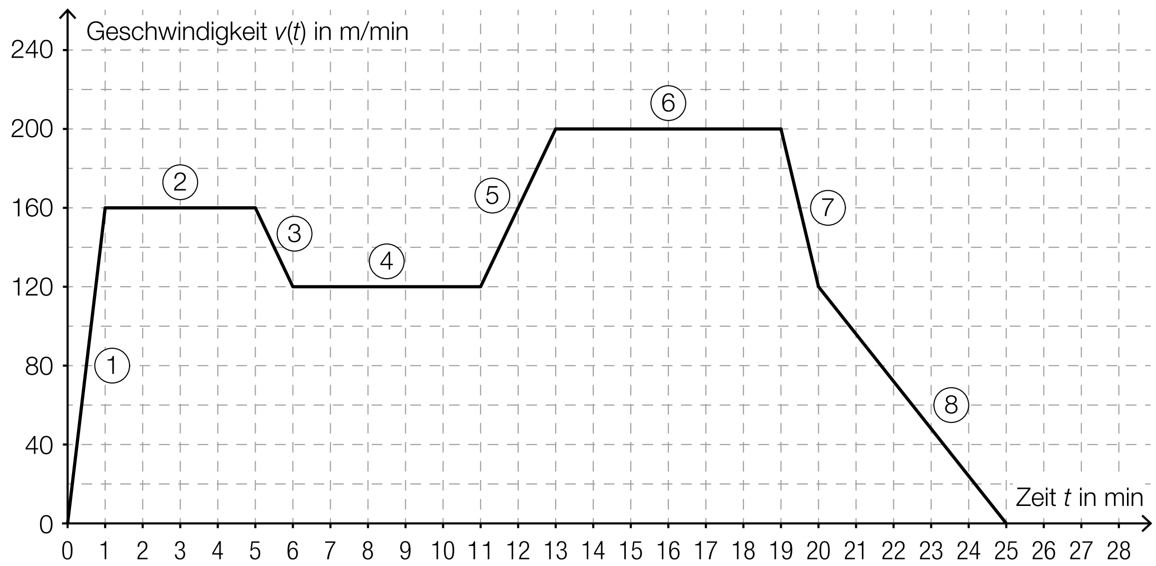
Quellen: —

Auf dem Laufband (2)*

Aufgabennummer: B_458

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft den Verlauf der Geschwindigkeit eines Läufers während einer Trainingseinheit von 25 min. Die abschnittsweise definierte lineare Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v setzt sich aus 8 Abschnitten zusammen.



a) 1) Geben Sie an, in welchem der 8 Abschnitte die Beschleunigung am größten ist.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v für den Abschnitt 5, also für das Zeitintervall [11 min; 13 min].

b) 1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Länge desjenigen Weges, den der Läufer in den ersten 11 min zurücklegt.

2) Ermitteln Sie die Länge dieses Weges in Kilometern.

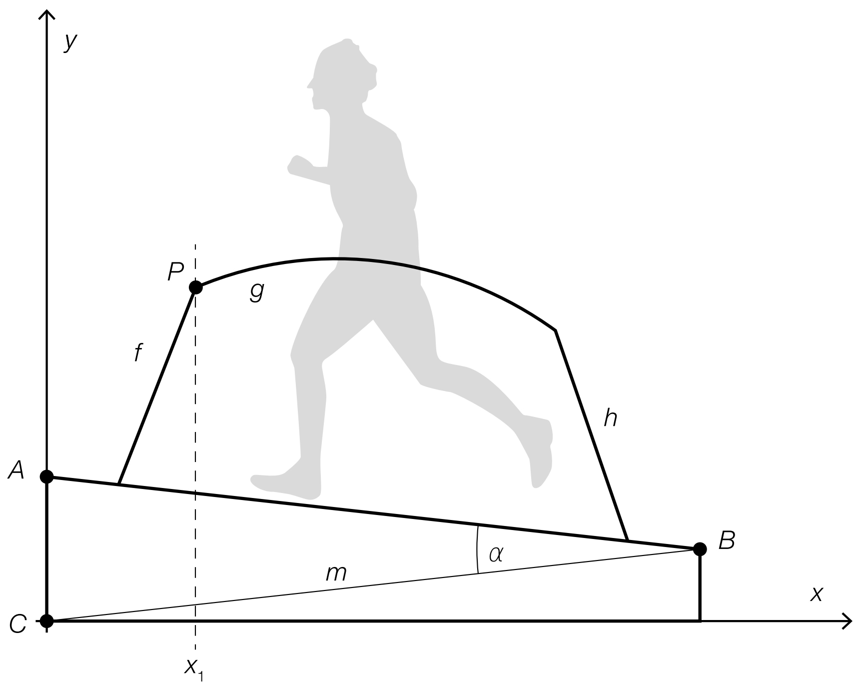
c) Der im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellte Verlauf kann im Zeitintervall [0 min; 25 min] durch die Funktion v beschrieben werden.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die entsprechende Einheit an.

$$\frac{1}{25} \cdot \int_0^{25} v(t)\,\mathrm{d}t$$

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Die nachstehende Abbildung zeigt vereinfacht die Seitenansicht eines Laufbands.



1) Beschriften Sie im Dreieck ABC die Länge z und den Winkel φ so, dass gilt:
$$\frac{m}{\sin(\varphi)} = \frac{z}{\sin(\alpha)}$$

Folgende Größen sind bekannt: $m = 155$ cm, $\alpha = 13°$ und $\overline{AB} = 150$ cm

2) Berechnen Sie die Höhe $\overline{AC}$ des Laufbands.

Die Darstellung des Haltegriffs in der obigen Abbildung setzt sich aus den Graphen der Funktionen f, g und h zusammen.
f ist eine lineare Funktion mit der Steigung k.
f und g schneiden einander im Punkt P.

Der Winkel β wird mit folgender Formel berechnet:

$$\beta = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_1) \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ g'(x_1) \end{pmatrix}\right|}\right)$$

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel β ein.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Beschleunigung ist in Abschnitt 1 am größten.

a2) $v(t) = k \cdot t + d$

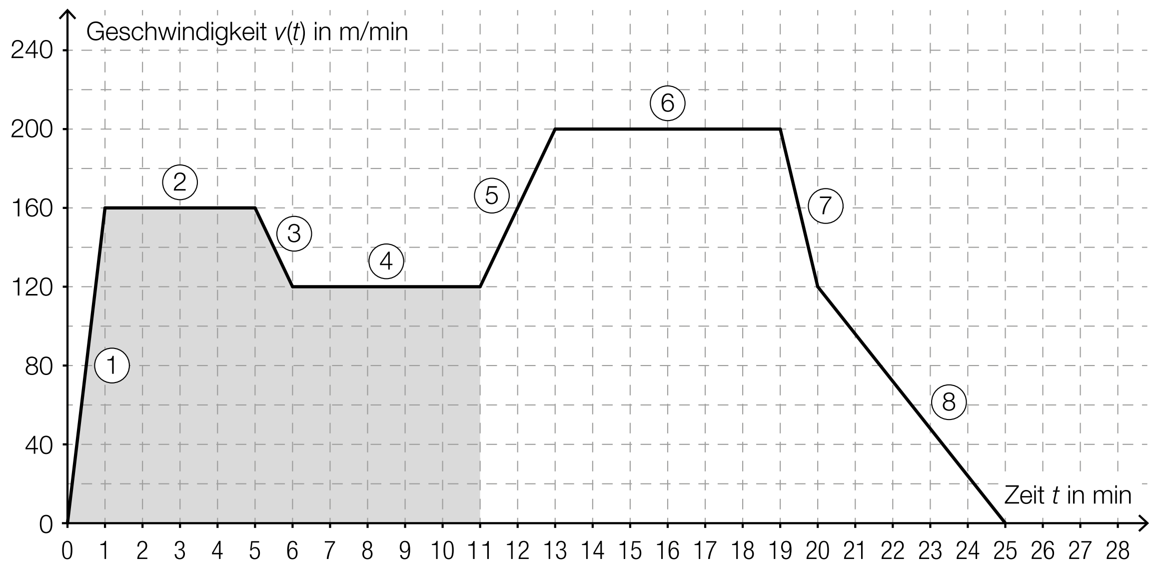
$k = \frac{200 - 120}{13 - 11} = 40$

$120 = 40 \cdot 11 + d \quad \Rightarrow \quad d = -320$

$v(t) = 40 \cdot t - 320 \text{ mit } 11 \leq t \leq 13$

t ... Zeit in min
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/min

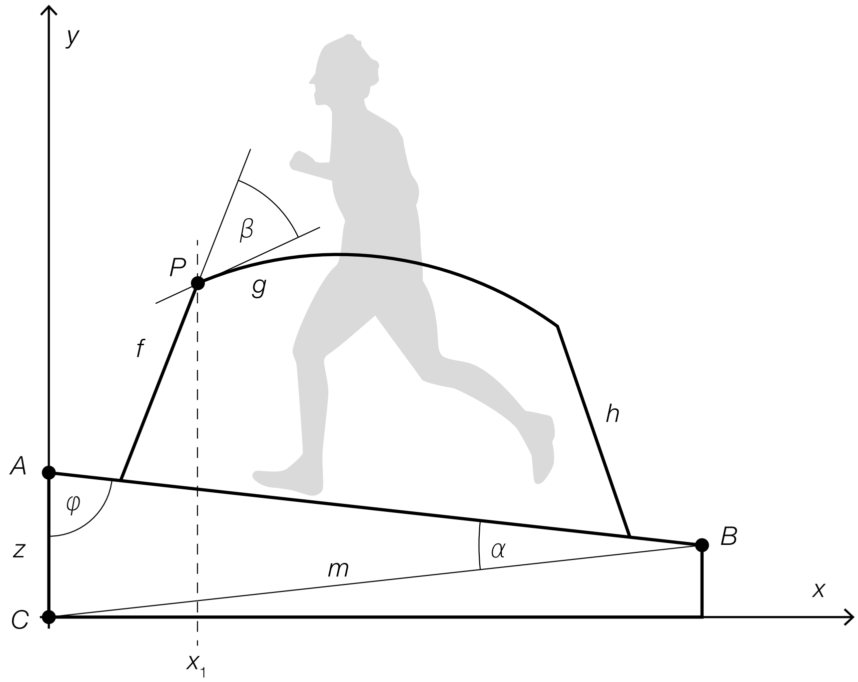
b1)



b2) Länge des im Zeitintervall [0 min; 11 min] zurückgelegten Weges in Metern:
$\frac{160}{2} + 4 \cdot 160 + \frac{160 + 120}{2} + 5 \cdot 120 = 1460$
Die Länge des in diesem Zeitintervall zurückgelegten Weges beträgt 1,46 km.

c1) Es wird die mittlere Geschwindigkeit für die Trainingseinheit in m/min berechnet.

d1 und d3)



d2) $\overline{AC} = \sqrt{m^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot m \cdot \overline{AB} \cdot \cos(\alpha)} = \sqrt{155^2 + 150^2 - 2 \cdot 155 \cdot 150 \cdot \cos(13°)}$
$= 34{,}88...$

Die Höhe $\overline{AC}$ beträgt rund 34,9 cm.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Angabe des Abschnitts
a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
b1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Länge des zurückgelegten Weges
b2) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Länge des zurückgelegten Weges in Kilometern
c1) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit
d1) 1 × C: für das richtige Beschriften von z und φ
d2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe $\overline{AC}$
d3) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Winkels β

Champagner*

Aufgabennummer: B_215		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Champagner wird im französischen Weinbaugebiet *Champagne* nach streng festgelegten Regeln erzeugt.

a) Eine Flasche Champagner wird zur Zeit $t = 0$ in einen Kühlschrank mit einer Temperatur von $\vartheta_U = 4$ °C gelegt. Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Temperatur des Champagners 16 °C und nach 2 Stunden beträgt sie 10 °C.
Die Temperatur des Champagners in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktion ϑ beschrieben:

t ... Zeit in h
$\vartheta(t)$ ... Temperatur des Champagners zur Zeit t in °C

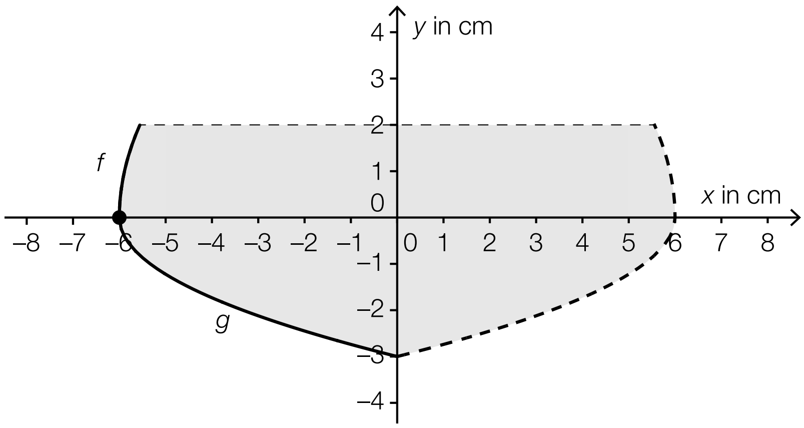
Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Champagners ist dabei direkt proportional zur jeweiligen Temperaturdifferenz $\vartheta - \vartheta_U$.

1) Stellen Sie die Differenzialgleichung für die Temperaturfunktion ϑ des Champagners auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit k.

2) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Abkühlungsprozess.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Champagnerglas (ohne Stiel, Glasdicke nicht berücksichtigt) kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Wurzelfunktion f und des Graphen der Wurzelfunktion g um die y-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für f gilt: $y = 3 \cdot \sqrt{x + a}$
Für g gilt: $y = -\sqrt{1{,}5 \cdot x + 9}$

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert für a ab.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Champagnerglases.

In das Champagnerglas werden 150 ml Champagner gefüllt.

3) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe.

c) Ein Händler verkauft die Sorten *Tradition*, *Rosé* und *Réserve* an 3 verschiedene Kunden in folgenden Mengen:

- Sorte *Tradition*:
  120 Flaschen an Kunde A, 12 Flaschen an Kunde B, 600 Flaschen an Kunde C
- Sorte *Rosé*:
  84 Flaschen an Kunde A, 60 Flaschen an Kunde B, 420 Flaschen an Kunde C
- Sorte *Réserve*:
  36 Flaschen an Kunde A, 72 Flaschen an Kunde B, 144 Flaschen an Kunde C

Kunde A bezahlt insgesamt € 9.864, Kunde B € 7.344 und Kunde C € 47.196.

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem in Matrizenform auf, mit dem man für jede Sorte den Preis pro Flasche berechnen kann.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = k \cdot (\vartheta - 4)$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\vartheta(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + 4$

oder:

$\int \frac{\vartheta'}{\vartheta - 4} \mathrm{d}t = \int k \, \mathrm{d}t$
$\ln|\vartheta(t) - 4| = k \cdot t + C_1$
$\vartheta(t) - 4 = C \cdot e^{k \cdot t}$
$\vartheta(t) = C \cdot e^{k \cdot t} + 4$

$\vartheta(0) = 16$ *oder* $C \cdot e^{k \cdot 0} + 4 = 16$
$C = 12$

$\vartheta(2) = 10$ *oder* $12 \cdot e^{k \cdot 2} + 4 = 10$
$k = \frac{\ln(0,5)}{2} = -0,34657... \approx -0,3466$

$\vartheta(t) = 12 \cdot e^{-0,3466 \cdot t} + 4$

b1) $a = 6$

b2) $V_y = \pi \cdot \left(\int_0^2 \left(\frac{y^2}{9} - 6\right)^2 \mathrm{d}y + \int_{-3}^0 \left(\frac{y^2 - 9}{1,5}\right)^2 \mathrm{d}y\right) = 396,2...$

Das Füllvolumen beträgt rund 396 ml.

b3) $\pi \cdot \int_{-3}^h \left(\frac{y^2 - 9}{1,5}\right)^2 \mathrm{d}y = 150$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$h = -0,275...$
$3 - 0,275... = 2,724...$

Die Füllhöhe beträgt rund 2,72 cm.

Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn nur der Wert für h *richtig ermittelt wurde.*

c1) x ... Preis für eine Flasche der Sorte *Tradition*
y ... Preis für eine Flasche der Sorte *Rosé*
z ... Preis für eine Flasche der Sorte *Réserve*

$$\begin{pmatrix} 120 & 84 & 36 \\ 12 & 60 & 72 \\ 600 & 420 & 144 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,864 \\ 7\,344 \\ 47\,196 \end{pmatrix}$$

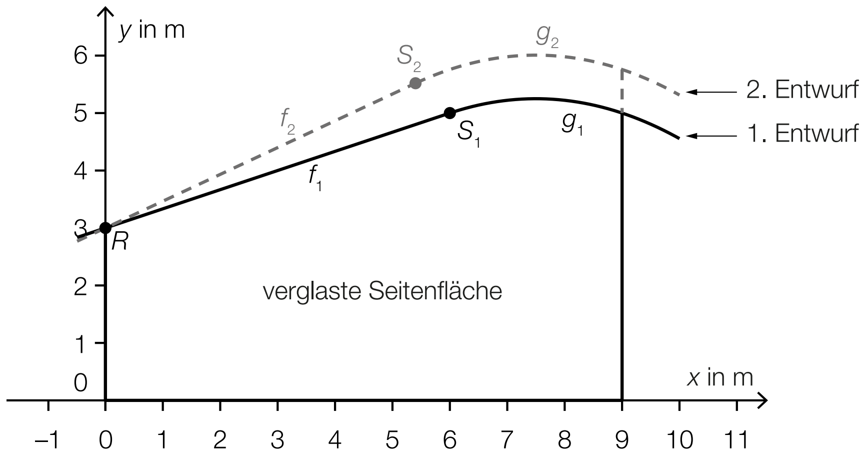
Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
a2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (allgemeine Lösung der Differenzialgleichung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Lösung der Differenzialgleichung für den gegebenen Abkühlungsprozess
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen von a
b2) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Füllvolumens
b3) 1 × B2: für die richtige Berechnung der Füllhöhe
c1) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems in Matrizenform

Ausstellungshalle*

Aufgabennummer: B_116		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

In der nachstehenden Abbildung sind 2 verschiedene Entwürfe für eine Ausstellungshalle in der Seitenansicht dargestellt.



a) Im 1. Entwurf wird die Dachlinie mithilfe der Funktionen f_1 und g_1 beschrieben:

$f_1(x) = 3 + \frac{x}{3}$ mit $-0{,}5 \leq x \leq 6$

$g_1(x) = -\frac{1}{9} \cdot x^2 + \frac{5}{3} \cdot x - 1$ mit $6 \leq x \leq 10$

1) Berechnen Sie die Länge der Dachlinie im Intervall [–0,5; 10].

b) Für den 1. Entwurf soll der Inhalt A der zu verglasenden Seitenfläche unterhalb der Graphen der Funktionen f_1 und g_1 im Intervall [0; 9] berechnet werden.

1) Beschreiben Sie, welcher Fehler in der nachstehenden Berechnung gemacht wurde.

$$A = \int_0^6 f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_6^9 g_1(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^9 (f_1(x) + g_1(x))\,\mathrm{d}x$$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im 2. Entwurf wird die Dachlinie mithilfe der Funktionen f_2 und g_2 beschrieben.
Der Graph der linearen Funktion f_2 soll durch den Punkt $R = (0|3)$ verlaufen und einen Steigungswinkel von 25° haben.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f_2 auf.

Die Funktion f_2 geht im Punkt $S_2 = (x_{S_2}|y_{S_2})$ knickfrei in die Funktion g_2 über, das heißt, die Funktionen g_2 und f_2 haben im Punkt S_2 den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung.

Die Funktion g_2 ist gegeben durch:
$g_2(x) = -\frac{1}{9} \cdot x^2 + \frac{5}{3} \cdot x + c$ mit $x_{S_2} < x < 10$

2) Berechnen Sie die x-Koordinate x_{S_2}.

3) Berechnen Sie c.

d) Der Schallpegel in der Ausstellungshalle soll durch zusätzliche Absorptionsflächen vermindert werden. Dabei gilt:

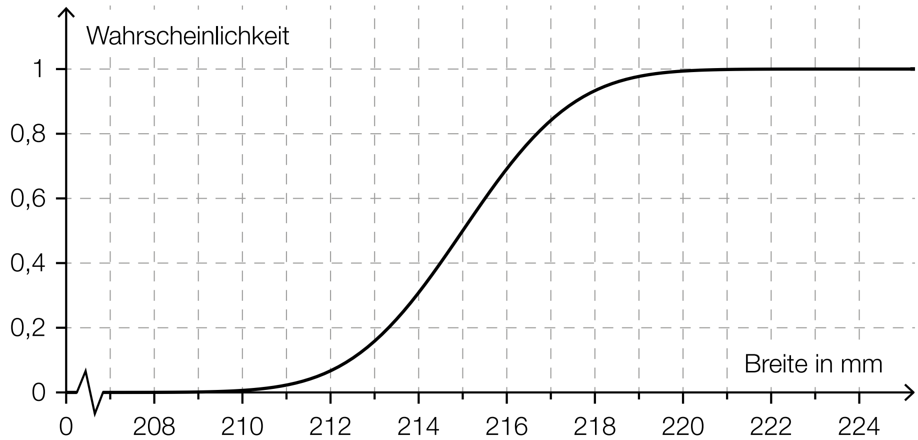
$L(A) = 10 \cdot \lg\left(1 + \frac{A}{10}\right)$
A … Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche in m²
$L(A)$ … Schallpegelminderung bei einer zusätzlichen Absorptionsfläche A in Dezibel (dB)

1) Berechnen Sie den Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche, die für eine Schallpegelminderung um 10 dB benötigt wird.

e) Die Breite bestimmter Dachziegel ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 215 mm und der Standardabweichung σ = 2 mm.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Dachziegel eine Breite von mindestens 212 mm und höchstens 217 mm hat.

2) Veranschaulichen Sie diese Wahrscheinlichkeit in der nachstehenden grafischen Darstellung der zugehörigen Verteilungsfunktion.



Möglicher Lösungsweg

a1) $\int_{-0,5}^{6} \sqrt{1 + ((f_1'(x))^2}\, dx + \int_{6}^{10} \sqrt{1 + ((g_1'(x))^2}\, dx = 11{,}0...$

Die Länge der Dachlinie beträgt rund 11 m.

b1) Die beiden Integrale dürften nicht zusammengefasst werden.

c1) $f_2(x) = 3 + \tan(25°) \cdot x$

c2) $g_2'(x) = \tan(25°)$ *oder* $-\frac{2}{9} \cdot x + \frac{5}{3} = \tan(25°)$
$x_{S_2} = 5{,}40...$

c3) $g_2(5{,}40...) = f_2(5{,}40...) \quad \Rightarrow \quad c = -0{,}24...$

d1) $L(A) = 10$ *oder* $10 \cdot \lg\left(1 + \frac{A}{10}\right) = 10$
$A = 90$

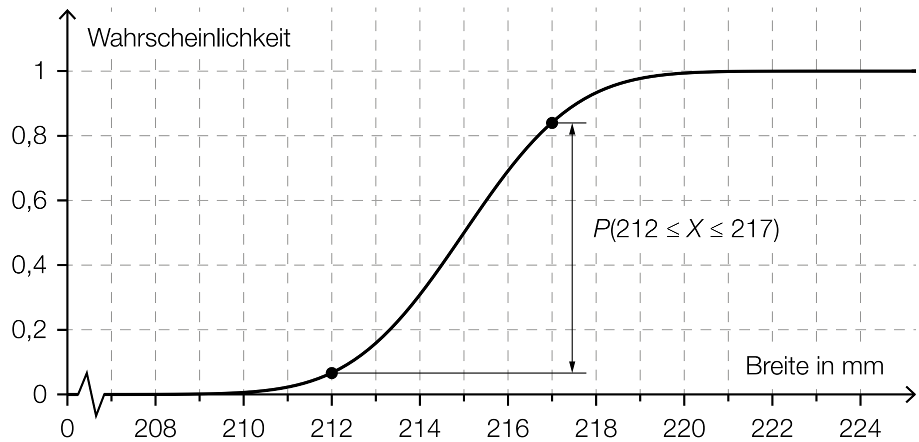
Es wird eine zusätzliche Absorptionsfläche von 90 m² genötigt.

e1) X ... Breite in mm

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(212 \leq X \leq 217) = 0{,}7745...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 77,5 %.

e2)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Länge der Dachlinie
b1) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Fehlers
c1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von f_2
c2) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Koordinate x_{S_2}
c3) 1 × B2: für die richtige Berechnung von c
d1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Inhalts der zusätzlichen Absorptionsfläche
e1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
e2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit

Goldener Schnitt

Aufgabennummer: B_291

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Strecke (vgl. Abbildung 1) wird in die zwei Teile a und b geteilt ($a > b$).
Gilt $a : b = (a + b) : a$, dann bezeichnet man das Teilungsverhältnis $\phi = a : b$ als den *Goldenen Schnitt*.

Abbildung 1

a) – Zeigen Sie, dass für $b = 1$ gilt: $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Wenn man von einem Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, ein Quadrat A abtrennt (Abbildung 2), dann entspricht das Seitenverhältnis des verbleibenden Rechtecks B ebenfalls dem Goldenen Schnitt.

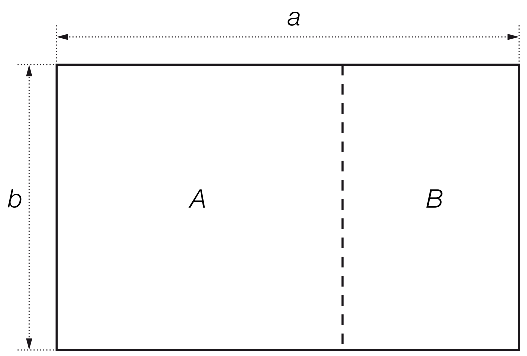


Abbildung 2

– Zeigen Sie diese Eigenschaft für den Fall $b = 1$.

b) Ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem Goldenen Schnitt entspricht, wird als *Goldenes Rechteck* bezeichnet. In Abbildung 3 wird ein Goldenes Rechteck fortlaufend durch Abtrennung eines Quadrats geteilt. Anschließend wird in den einzelnen Quadraten ein Viertelkreis gezeichnet. Dadurch entsteht eine sogenannte *Goldene Spirale*.

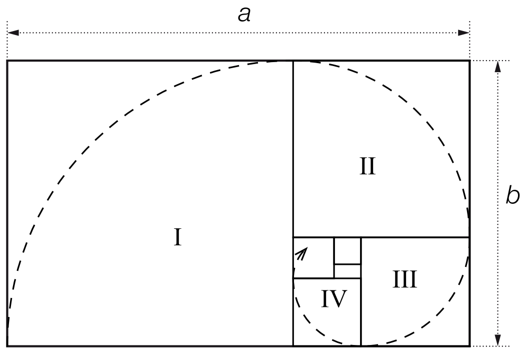


Abbildung 3

– Berechnen Sie die Länge dieser Spirale für die Quadrate I bis IV, wenn die Seitenlängen des Rechtecks a = 144 cm und b = 89 cm betragen.

c) Schon nach dem antiken Schönheitsideal gilt ein Mensch als wohlproportioniert, wenn die Höhe des Nabels die Körpergröße im Goldenen Schnitt teilt. In einer Bevölkerungsgruppe entsprechen 87 % diesem Ideal.

– Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 zufällig ausgewählten Personen dieser Bevölkerungsgruppe mindestens 3 diesem Ideal entsprechen.

In einer anderen Bevölkerungsgruppe wurden die Daten von 5 Personen erhoben:

x = Höhe bis zum Nabel in cm	105	115	108	121	114
y = Körpergröße in cm	159	174	161	182	171

– Ermitteln Sie mithilfe der gegebenen Daten eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

d) Das Seitenverhältnis eines rechteckigen digitalen Bilderrahmens mit einer Diagonale von d = 10 Zoll entspricht mit 1,6 in etwa dem Goldenen Schnitt.

– Berechnen Sie die Breite (= längere Rechteckseite) des Bildschirms in Zentimetern (1 Zoll = 2,54 cm).

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Für $b = 1$ gilt:

$a : 1 = (a + 1) : a \;\Rightarrow\; a^2 = a + 1 \;\Rightarrow\; a^2 - a - 1 = 0$

$a_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Die zweite Lösung $a_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ kann aufgrund der Voraussetzung $a > 1$ nicht auftreten.

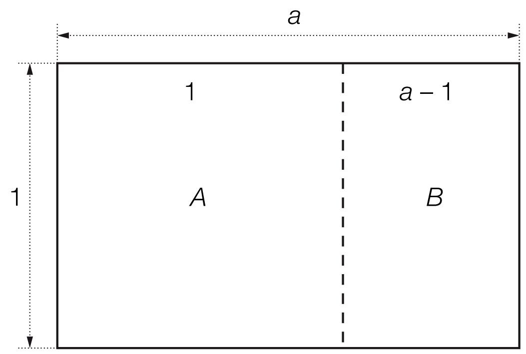
$a : 1 = \phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Für das ursprüngliche Rechteck gilt:

$\dfrac{a}{1} = \dfrac{a + 1}{a} \;\Rightarrow a - 1 = \dfrac{1}{a}$

und durch den Kehrwert $1 : (a - 1) = a : 1$

Somit entspricht das Seitenverhältnis des Rechtecks B dem Goldenen Schnitt.



Alternativer Lösungsweg:

Im ursprünglichen Rechteck gilt: $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Das Seitenverhältnis des Rechtecks B entspricht genau dann dem Goldenen Schnitt, wenn gilt:

$\dfrac{1}{a - 1} = \dfrac{a}{1}$

$\dfrac{1}{a - 1} = \dfrac{a}{1} \;\Leftrightarrow\; 1 = (a - 1) \cdot a \;\Leftrightarrow\; a^2 - a - 1 = 0$

Diese Gleichung ist für $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ laut Voraussetzung erfüllt.

b) Radien der Viertelkreise: $r_{\mathrm{I}} = 89$, $r_{\mathrm{II}} = 144 - 89 = 55$, $r_{\mathrm{III}} = 89 - 55 = 34$, $r_{\mathrm{IV}} = 55 - 34 = 21$

Länge der Spirale: $\frac{\pi}{2} \cdot 89 + \frac{\pi}{2} \cdot 55 + \frac{\pi}{2} \cdot 34 + \frac{\pi}{2} \cdot 21 = 99{,}5 \cdot \pi \approx 312{,}59$ cm

c) Binomialverteilung mit $p = 0{,}87$ und $n = 5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9820\ldots \approx 98{,}2\,\%$

Ermitteln der Gleichung mittels Technologieeinsatz:

$y = 1{,}5064 \cdot x - 0{,}2163$ *(Parameter gerundet)*

d) $d = 25{,}4$ cm; $\frac{\text{Breite}}{\text{Höhe}} = \frac{b}{h} = 1{,}6 \;\Rightarrow\; h = \frac{b}{1{,}6}$

Pythagoras: $d^2 = b^2 + h^2 = b^2 + \left(\frac{b}{1{,}6}\right)^2 \;\Rightarrow\; b^2 = \frac{d^2}{1 + \left(\frac{1}{1{,}6}\right)^2}$

Breite $b = 21{,}539\ldots \approx 21{,}54$ cm

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2
d) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: Elam, Kimberley: *Proportion und Komposition. Geometrie im Design.* New York: Princeton Architectural Press 2006.

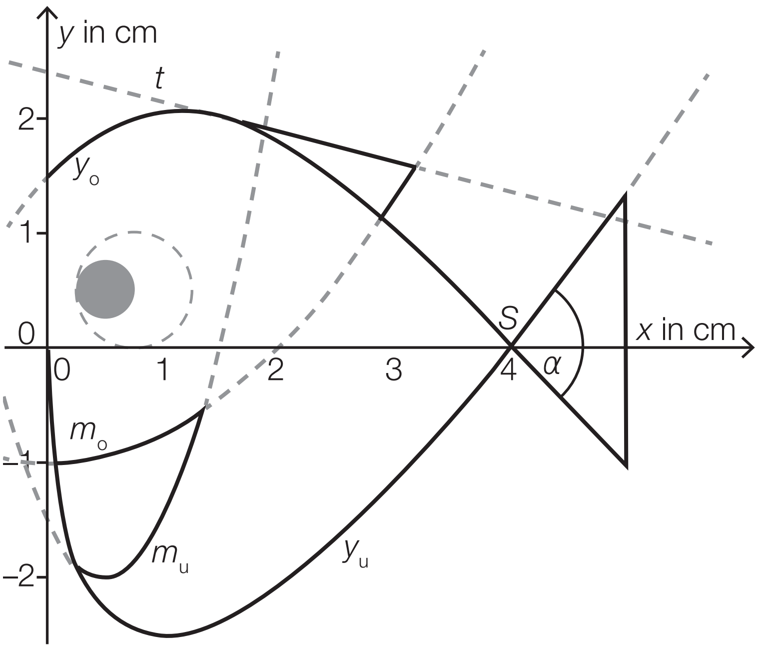
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Nemo

Aufgabennummer: B_364

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Schülerin hat mithilfe mathematischer Funktionen den Fisch *Nemo* gestaltet:



Die Funktionen y_u und y_o sind definiert durch:

$y_u(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(x - 2 \cdot \sqrt{x}\right)$ und $y_o(x) = \frac{11}{256} \cdot x^3 - \frac{33}{64} \cdot x^2 + x + \frac{3}{2}$

x, $y_u(x)$, $y_o(x)$ … Koordinaten in cm

a) – Berechnen Sie den Winkel α.

b) Die obere Begrenzungslinie der Rückenflosse ist durch eine Tangente t an die Funktion y_o im Punkt $x = 1{,}5$ cm erzeugt.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung der Tangente t auf.

c) – Weisen Sie nach, dass $S = (4\,|\,0)$ der Wendepunkt der Funktion y_o ist.

– Markieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche A, die dem Ausdruck $A = \int_0^4 y_o(x)\,dx$ entspricht.

d) Der Mund von Nemo wird durch die 2 quadratischen Funktionen m_o und m_u erzeugt.

– Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils die richtige Funktionsgleichung zu. *[2 zu 4]*

m_o	
m_u	

A	$y(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 - 1$
B	$y(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$
C	$y(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$
D	$y(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 1$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $y_o'(x) = \frac{33}{256} \cdot x^2 - \frac{33}{32} \cdot x + 1$ und $y_u'(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$k_1 = y_o'(4) = -\frac{17}{16} = -1{,}0625$ und $k_2 = y_u'(4) = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$\alpha_1 = \arctan(k_1) = -46{,}735\ldots°$ und $\alpha_2 = \arctan(k_2) = 51{,}340\ldots°$

$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = 98{,}075\ldots° \approx 98{,}08°$

b) $t(x) = k \cdot x + d$

$k = y_o'(1{,}5) = -\frac{263}{1024}$

$t(1{,}5) = y_o(1{,}5) \Rightarrow -\frac{263}{1024} \cdot 1{,}5 + d = \frac{4065}{2048} \Rightarrow d = \frac{2427}{1024}$

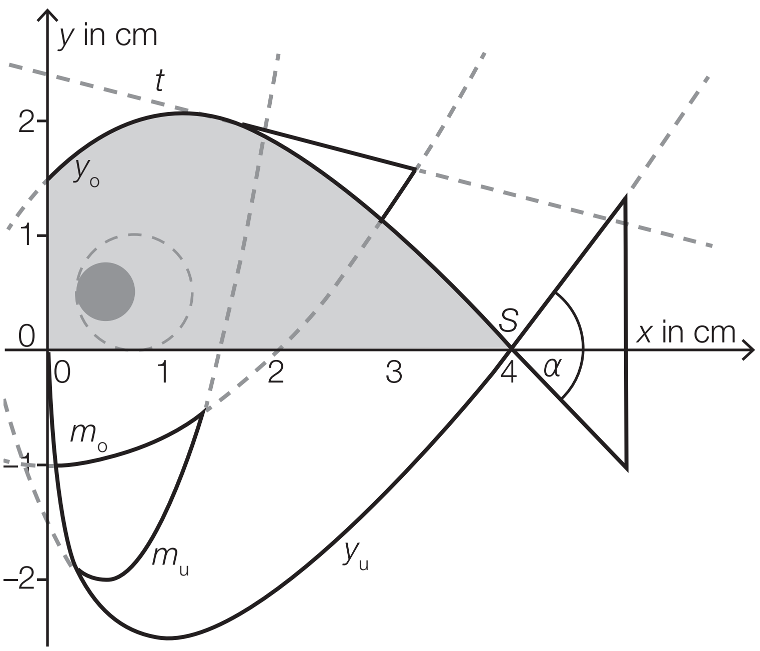
$t(x) = -\frac{263}{1024} \cdot x + \frac{2427}{1024} \approx -0{,}26 \cdot x + 2{,}37$

c) $y_o''(x) = \frac{33}{128} \cdot x - \frac{33}{32}$

$y_o''(4) = 0$

$y_o'''(x) = \frac{33}{128} \neq 0$

Da $y_o''(4) = 0$ und $y_o'''(4) \neq 0$ ist, ist 4 eine Wendestelle von y_o. Somit ist $(4 | y_o(4)) = (4 | 0)$ ein Wendepunkt von y_o.



d)

m_o	D
m_u	C

A	$y(x) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 - 1$
B	$y(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$
C	$y(x) = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 2$
D	$y(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 1$

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) –
d) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) A Modellieren und Transferieren
d) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 1
b) mittel	b) 1
c) leicht	c) 2
d) leicht	d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: –

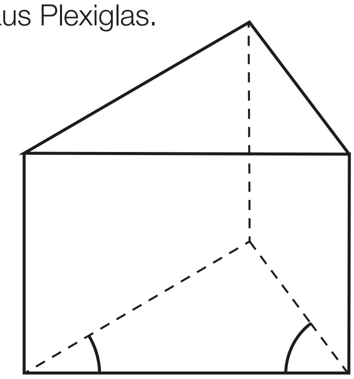
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Plexiglasprismen

Aufgabennummer: B_358

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Maschine produziert Prismen mit dreieckiger Grundfläche aus Plexiglas.



a) Von den Prismen sind von der Grundfläche die Maße
$c = 9$ cm, $a = 5$ cm, $\alpha = 25°$ bekannt
(siehe nebenstehende Skizze).

– Begründen Sie, warum mit diesen 3 Angaben das Dreieck nicht eindeutig bestimmt ist.

– Berechnen Sie die Flächeninhalt A der Grundfläche unter der Annahme, dass der Winkel $\beta < 90°$ ist.

b) Die Masse der Prismen kann als normalverteilt angenommen werden. Für eine Stichprobe des Umfangs $n = 7$ wurden die folgenden Messwerte ermittelt.

Masse in Gramm (g)	285,2	283,7	285,2	281,4	282,6	282,3	283,3

– Ermitteln Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Massen der Prismen.

c) Die Intensität I_0 des in das Prisma eintretenden Lichts nimmt mit der Eindringtiefe x exponentiell ab. Nach Durchdringen einer Schicht von 1 cm Dicke ist die Lichtintensität auf 85 % des ursprünglichen Wertes I_0 geschwächt.

Die Lichtintensität kann in Abhängigkeit von der Eindringtiefe durch eine Funktion I beschrieben werden.

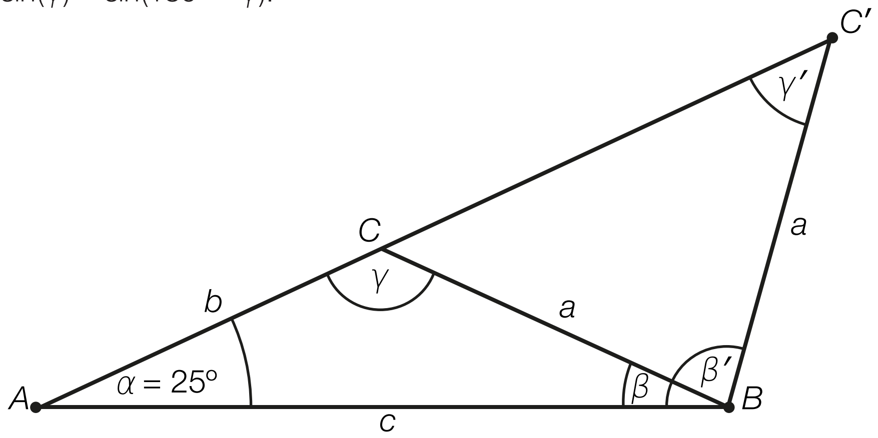
x … Eindringtiefe in cm
$I(x)$ … Lichtintensität in der Eindringtiefe x in %
$I_0 = 100$ % … Lichtintensität beim Eintritt in das Prisma

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion I auf.
– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion I für $0 \leq x \leq 15$.
– Zeigen Sie, dass der Quotient $\frac{I'(x)}{I(x)}$ konstant ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Dreieck ist nicht eindeutig bestimmt, da die dem Winkel α gegenüberliegende Seite a kürzer als die Seite c ist. Bei Berechnung des Winkels γ mithilfe des Sinussatzes ergeben sich 2 mögliche Lösungen für diesen Winkel, da für $0 \leq \gamma \leq 90°$ gilt:
$\sin(\gamma) = \sin(180° - \gamma)$.



Den Winkel γ erhält man mithilfe des Sinussatzes: $\sin(\gamma) = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{a}$

$\gamma' = 49{,}527...°$ und $\gamma = 130{,}472...°$

$\beta = 180° - \gamma - 25° = 24{,}527...°$

$A = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2} = 9{,}340... \approx 9{,}34\text{ cm}^2$

b) Berechnung mittels Technologieeinsatz: $\bar{x} = 283{,}3857...$, $s_{n-1} = 1{,}4392...$

Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

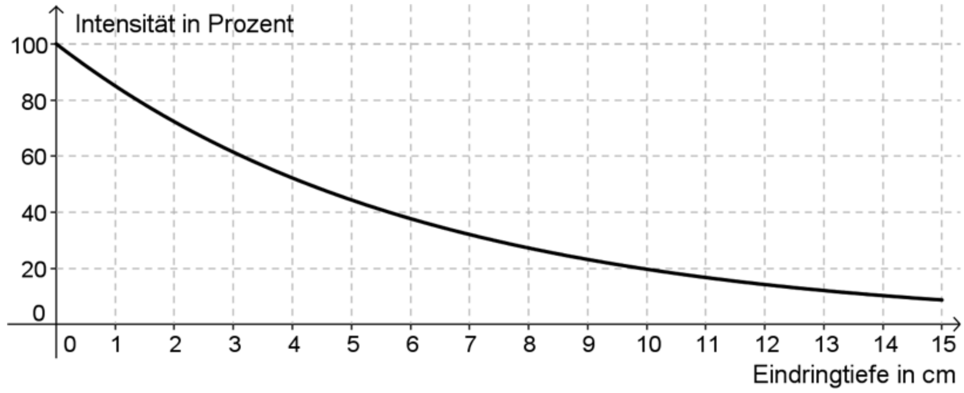
$\bar{x} \pm t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$

$n = 7 \ \Rightarrow \ f = 6$

$t_{6;\,0{,}975} \approx 2{,}4469...$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall für μ in g: [282,0546...; 284,7167...]

c) $I(x) = I_0 \cdot 0{,}85^x$ oder $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ mit $\lambda = -\ln(0{,}85) = 0{,}1625\ldots$



$I'(x) = \ln(0{,}85) \cdot I(x)$, womit $\frac{I'(x)}{I(x)} = \ln(0{,}85)$ konstant ist.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren, B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren, B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 1
c) mittel	c) 3

Thema: Sonstiges

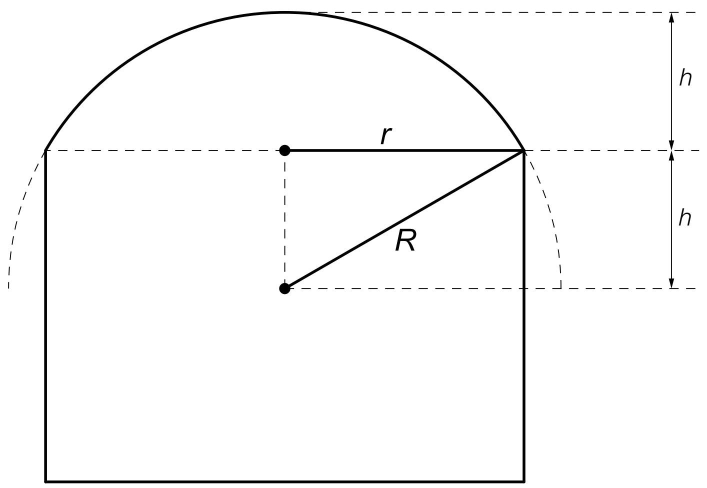
Quellen: Teile der hier vorliegenden Aufgabe wurden im Rahmen des Itemwriterseminars in Innsbruck im Herbst 2013 als Übungstestaufgabe für den Unterricht zur Vorbereitung für den Teil A der SRDP erstellt.

Veranstaltungszentrum

Aufgabennummer: B_036		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Ein neues Veranstaltungszentrum wird geplant.

a) Das Gebäude hat die Form eines Zylinders mit einer aufgesetzten Kuppel in Form eines Kugelsegments (einer abgeschnittenen Kugel).
Die Höhe h der Kuppel entspricht dem halben Kugelradius R (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Radius r des Basiskreises der Kuppel aus h.

r = ______________________________

– Berechnen Sie den Flächeninhalt des Basiskreises der Kuppel für eine Kuppelhöhe von $h = 16$ m.

b) In der Planung des Veranstaltungszentrums wird eine Grundfläche von 2500 m^2 angenommen. 17 % dieser Fläche sind für Haustechnik, Notausgänge und Personal reserviert und daher für Besucher/innen gesperrt. Die Bauvorschrift erlaubt maximal 2 Besucher/innen je Quadratmeter Grundfläche.

– Berechnen Sie die maximal erlaubte Anzahl an Besucherinnen und Besuchern für dieses Veranstaltungszentrum.

Die kreisförmige Bodenfläche des Veranstaltungszentrums wird um *k* % vergrößert. Einer der nachstehenden Terme gibt den Änderungsfaktor des Radius der Bodenfläche des Veranstaltungszentrums an.

– Kreuzen Sie den zutreffenden Term an. *[1 aus 5]*

$1 + \frac{k}{100}$	☐
$\frac{100}{k}$	☐
$\left(1 + \frac{k}{100}\right)^2$	☐
$\sqrt{1 + \frac{k}{100}}$	☐
$1 - \frac{k}{100}$	☐

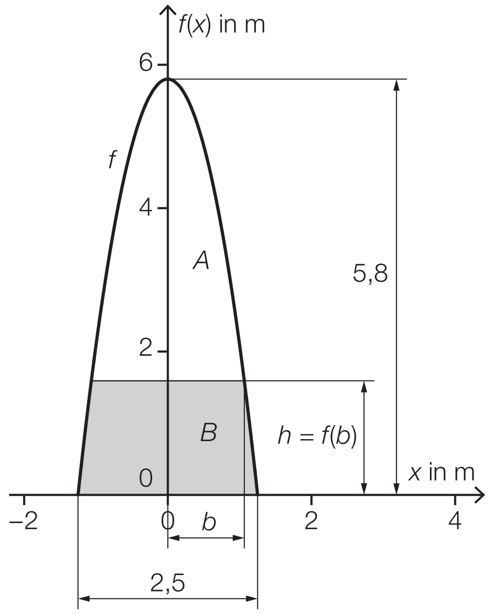
c) Die Veranstalter wissen aus Erfahrung, dass 15 % der verkauften Eintrittskarten letztendlich nicht zum Besuch der Veranstaltung genutzt werden. Für den 1000 Besucher/innen fassenden Konzertsaal werden 1150 Karten verkauft.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 1000 Personen, die eine Eintrittskarte gekauft haben, tatsächlich zur Veranstaltung erscheinen.

d) Die nebenstehende Abbildung zeigt die Form eines Fensters des Veranstaltungszentrums. Die bogenförmige Begrenzungslinie des Fensters hat die Form einer Parabel.

– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung der zugehörigen quadratischen Funktion f.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts B auf. Verwenden Sie darin die Längen b und $f(b)$ und den allgemeinen Funktionsterm $f(x)$ der Parabel.



B = ______________________________

Die Flächeninhalte A und B verhalten sich zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnitts $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

– Berechnen Sie, in welcher Höhe h die horizontale Trennungslinie verläuft.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $r^2 = R^2 - h^2 = (2 \cdot h)^2 - h^2 = 3 \cdot h^2$
$r = \sqrt{3} \cdot h$

$h = 16$ m
$r = 27{,}7\ldots$ m
$A = 2412{,}7\ldots \approx 2413$ m²

b) $2500 \cdot 0{,}83 = 2075$ m²
$2075 \cdot 2 = 4150$
Die maximal erlaubte Anzahl an Besucherinnen und Besuchern beträgt 4150.

$\sqrt{1 + \frac{k}{100}}$	☒

c) X = „Anzahl der zum Besuch der Veranstaltung genutzten Eintrittskarten"
Bionominalverteilung mit $p = 0{,}85$ und $n = 1150$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X > 1000) = 0{,}0270\ldots$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 2,7 % erscheinen mehr als 1000 Personen zur Veranstaltung.

d) $f(x) = a \cdot x^2 + c$

$f(0) = 5{,}8 \quad \Rightarrow \quad c = 5{,}8$

$f(1{,}25) = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 1{,}252 + 5{,}8 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3{,}712$

$f(x) = -3{,}712 \cdot x^2 + 5{,}8$

$$B = 2 \cdot \left(b \cdot f(b) + \int_b^{1{,}25} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\frac{\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x - b \cdot f(b)}{b \cdot f(b) + \int_b^{1{,}25} f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $b = 1{,}064\ldots$ m

$f(b) = 1{,}591\ldots$ m

Die Höhe h der horizontalen Trennungslinie beträgt rund 1,59 m.

Klassifikation

☐ Teil A ☒ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 5 Stochastik
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) 1 Zahlen und Maße
c) –
d) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) –
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) schwer

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 4

Thema: Sonstiges

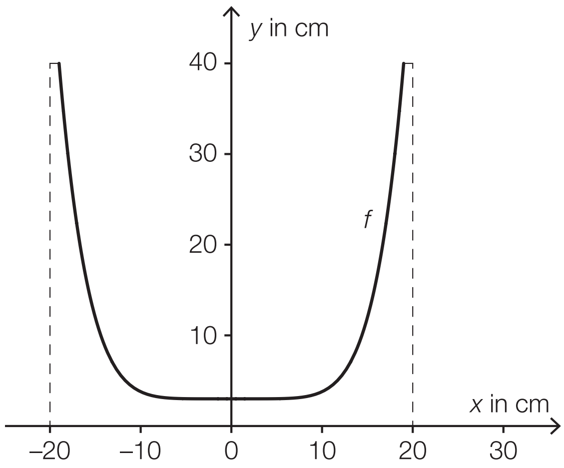
Quellen: –

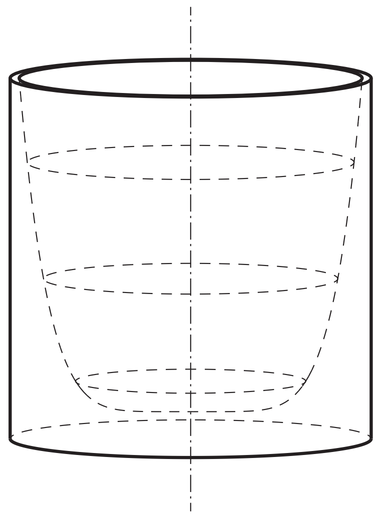
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Blumentopf*

Aufgabennummer: B_474		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Ein Unternehmen produziert Blumentöpfe.
Der Außendurchmesser eines solchen Blumentopfs beträgt 40 cm. Auch die Gesamthöhe des Blumentopfs beträgt 40 cm. (Siehe nachstehende Abbildung.)





Für die Funktion f mit $f(x) = y$ gilt:

$$y = \frac{37}{19^6} \cdot x^6 + 3 \quad \text{mit} \quad -19 \leq x \leq 19$$

1) Begründen Sie, warum f eine gerade Funktion ist.

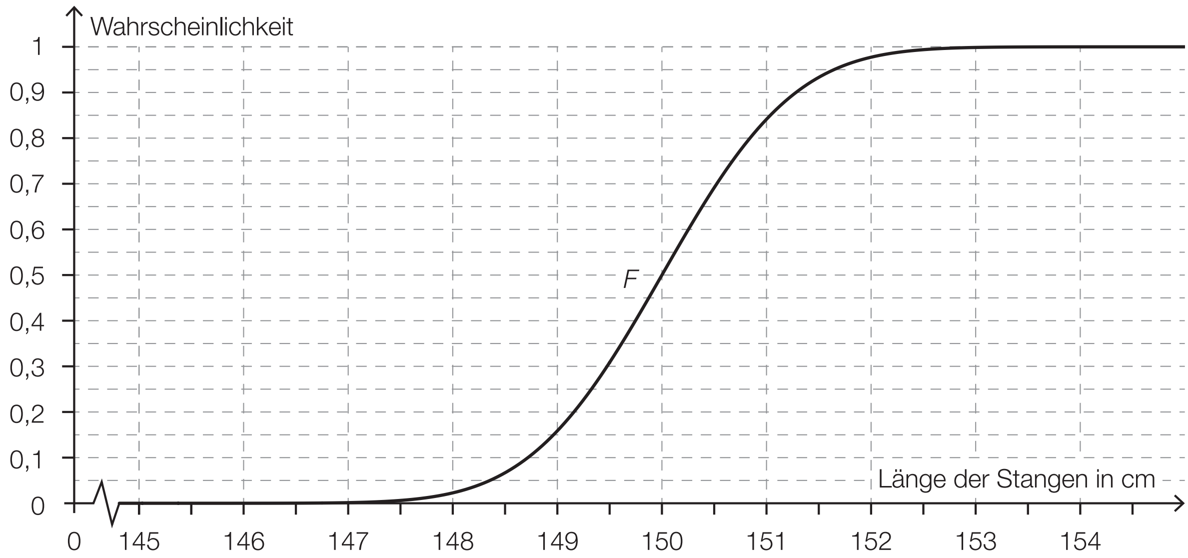
Die Innenwand des Blumentopfs entsteht durch Rotation des oben dargestellten Graphen von f um die y-Achse.

2) Berechnen Sie das Innenvolumen des Blumentopfs.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Unternehmen produziert Stangen für Kletterpflanzen. Die Länge dieser Stangen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 150$ cm.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion F.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert der Standardabweichung ab.

2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, die durch den nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$1 - F(149{,}5)$

Ein anderes Unternehmen produziert auch solche Stangen. Die Länge dieser Stangen ist ebenfalls annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 150$ cm. Es ist bekannt, dass 92,3 % dieser Stangen eine Länge von höchstens 151 cm haben.

3) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung.

c) Der Erlös aus dem Verkauf von Blumentöpfen kann durch die Funktion E beschrieben werden:

$E(x) = 20 \cdot x - 0{,}12 \cdot x^2$

x … Verkaufsmenge in ME
$E(x)$ … Erlös bei der Verkaufsmenge x in GE

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall für x, in dem der Erlös mindestens 100 GE beträgt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Funktion f ist gerade, weil der Graph symmetrisch zur y-Achse ist.

oder:

Die Funktion f ist gerade, weil $f(x) = f(-x)$.

oder:

Die Funktion f ist gerade, weil f eine Polynomfunktion ist, in der die einzige auftretende Potenz von x einen geradzahligen Exponenten hat.

a2) Ansatz: $\pi \cdot \int_3^{40} x^2 \, dy$

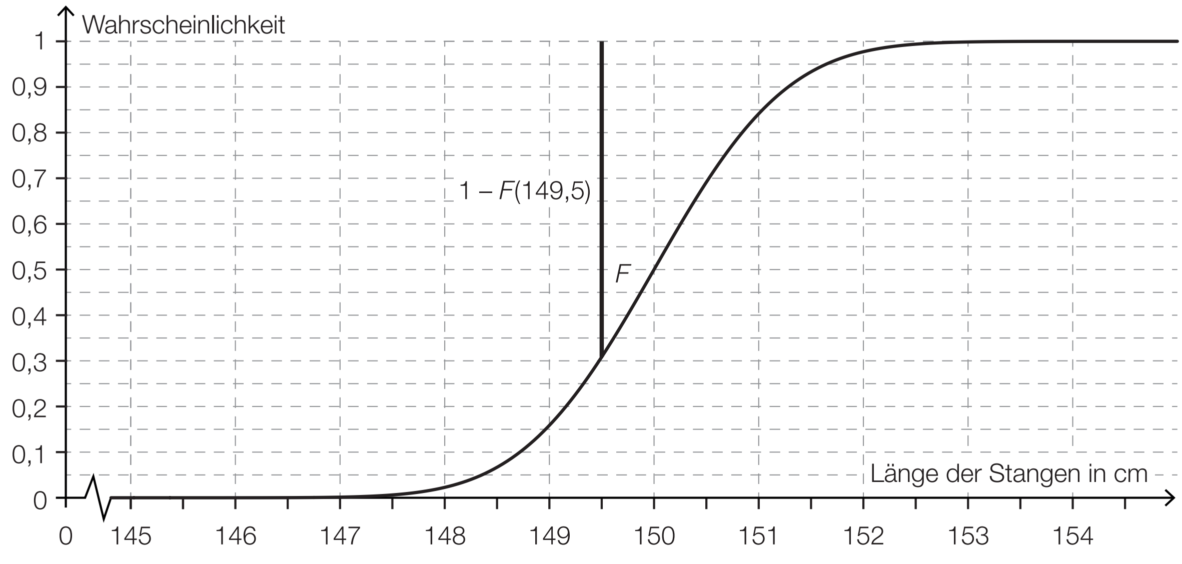
$$\pi \cdot \int_3^{40} 19^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{y-3}{37}} \, dy = 31\,471{,}6...$$

Das Innenvolumen des Blumentopfs beträgt rund 31 472 cm³.

b1) $\sigma = 1$ cm

Toleranzbereich: [0,7; 1,3]

b2)



b3) X ... Länge der Stangen in cm

$P(X \leq 151) = 0{,}923$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\sigma = 0{,}70...$ cm

c1) $E(x) = 100$ *oder* $20 \cdot x - 0{,}12 \cdot x^2 = 100$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 5{,}15\ldots$
$x_2 = 161{,}50\ldots$

Intervall: $[5{,}15\ldots; 161{,}50\ldots]$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für das richtige Begründen
a2) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für das richtige Berechnen des Innenvolumens
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Standardabweichung (Toleranzbereich: [0,7; 1,3])
b2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit
b3) 1 × B: für das richtige Berechnen der Standardabweichung
c1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Intervalls

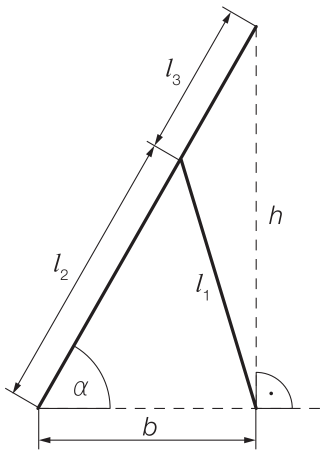
Hochstuhl für Kinder*

Aufgabennummer: B_476

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Das nebenstehende Bild zeigt einen Hochstuhl für Kleinkinder.

In der nachstehenden Abbildung sind Teile des Hochstuhls schematisch dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe von l_1, l_2 und b eine Formel zur Berechnung von α.

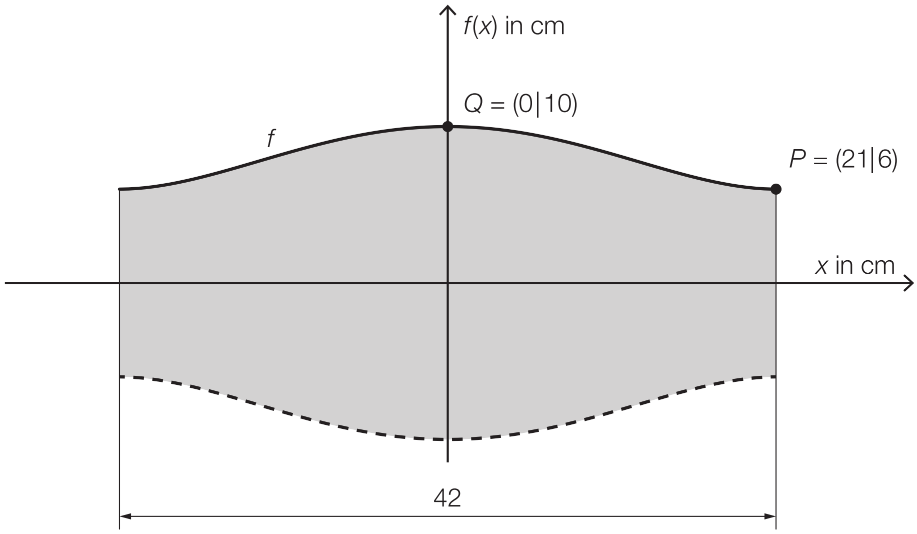
$\alpha =$ ____________________

2) Markieren Sie in der obigen Abbildung die Winkel β und γ, für die gilt:

$$\frac{\sin(\beta)}{h} = \frac{\sin(\gamma)}{l_3}$$

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist ein Modell der Rückenlehne eines bestimmten Hochstuhls dargestellt.



Die obere Begrenzungslinie lässt sich näherungsweise durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ beschreiben. Im Punkt P verläuft die Tangente an den Graphen der Funktion f waagrecht.

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu P und Q ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

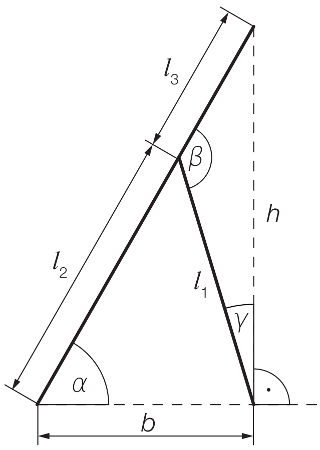
Die untere Begrenzungslinie entsteht durch Spiegelung des Graphen der Funktion f an der x-Achse.

3) Ermitteln Sie den Inhalt der in der obigen Abbildung grau markierten Fläche.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + l_2^2 - l_1^2}{2 \cdot b \cdot l_2}\right)$

a2)



b1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$

I: $f(0) = 10$
II: $f(21) = 6$
III: $f'(21) = 0$

oder:

I: $10 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c$
II: $6 = a \cdot 21^4 + b \cdot 21^2 + c$
III: $0 = 4 \cdot a \cdot 21^3 + 2 \cdot b \cdot 21$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{4}{194\,481} = 0{,}00002056...$

$b = -\frac{8}{441} = -0{,}01814...$

$c = 10$

b3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$2 \cdot \int_{-21}^{21} f(x)\,\mathrm{d}x = 683{,}2$

Der Flächeninhalt beträgt 683,2 cm².

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
a2) 1 × C: für das richtige Markieren der beiden Winkel
b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte P und Q
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung
b2) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Koeffizienten
b3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Inhalts der Fläche

Bitterfelder Bogen*

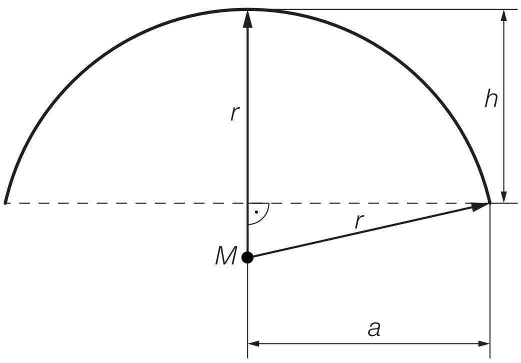
Aufgabennummer: B_477

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der *Bitterfelder Bogen* ist eine Stahlkonstruktion, die aus mehreren Bögen besteht. Ein aus Rampen bestehender Fußweg führt innerhalb der Bögen zu einer Aussichtsplattform.

Bildquelle: Joeb07 [GFDL or CC BY 3.0], from Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bitterfelder_Bogen_(2).jpg [20.11.2018].

a) In der nachstehenden Skizze wird der äußere Rand der Stahlkonstruktion näherungsweise durch einen Kreisbogen mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r dargestellt.

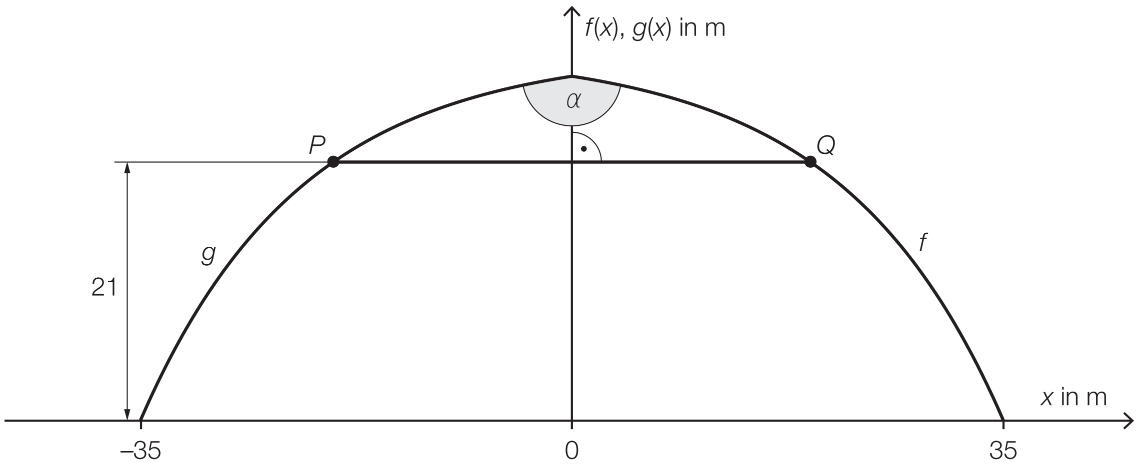


1) Erstellen Sie aus a und h eine Formel zur Berechnung des Radius r.

$r =$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Verlauf des Bogens kann näherungsweise durch die Graphen der Funktionen f und g dargestellt werden. Die Graphen der beiden Funktionen sind zueinander symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Es gilt:
$f(x) = 30 \cdot \left(1 - e^{\frac{x-35}{13}}\right)$ mit $0 \leq x \leq 35$

In einer Höhe von 21 m befindet sich die Aussichtsplattform.

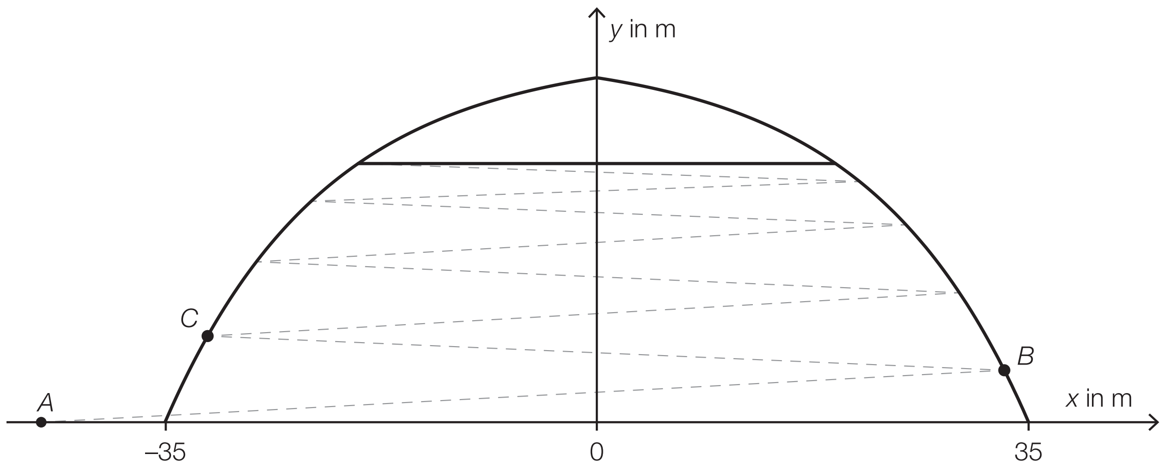
1) Berechnen Sie die Länge $\overline{PQ}$.

2) Berechnen Sie den Schnittwinkel α der Graphen der Funktionen f und g.

3) Interpretieren Sie das Ergebnis des nachstehenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang.

$$2 \cdot \int_0^{35} \sqrt{1 + \left(-\frac{30}{13} \cdot e^{\frac{x-35}{13}}\right)^2}\, dx = 94{,}57\ldots$$

c) Der Fußweg zur Aussichtsplattform besteht aus einzelnen Rampen (siehe strichlierte Geradenstücke in der nachstehenden modellhaften Abbildung).



Es gilt: $A = (-45\,|\,0)$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 78 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$

1) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B.

Die Neigungswinkel der Rampen sind jeweils gleich groß.

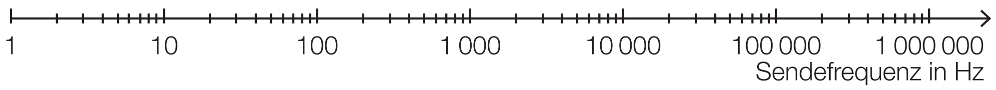
Es soll eine Parameterdarstellung der Geraden g durch die Punkte B und C erstellt werden.

2) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$g\colon X = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$

d) Ein Läufer verwendet den Fußweg zur Aussichtsplattform als Trainingsstrecke. Mithilfe eines Brustgurts misst er seine Herzfrequenz. Diese wird an seine Pulsuhr mit einer Sendefrequenz von 5 Kilohertz (kHz) übermittelt.

1) Tragen Sie in der nachstehenden logarithmischen Skala die Sendefrequenz des Brustgurts ein.



Der Läufer hat wiederholt seinen Maximalpuls (in Herzschlägen pro Minute) gemessen:

182	192	183	185	189	185	179	189	192

Der Maximalpuls des Läufers kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.

2) Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert des Maximalpulses.

Möglicher Lösungsweg

a1) $r^2 = a^2 + (r - h)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a^2}{2 \cdot h} + \frac{h}{2}$

b1) $f(x) = 21 \quad oder \quad 30 \cdot \left(1 - e^{\frac{x-35}{13}}\right) = 21 \quad \Rightarrow \quad x = 19{,}34...$

$\overline{PQ} = 2 \cdot 19{,}34... = 38{,}69...$

Die Länge $\overline{PQ}$ beträgt rund 38,7 m.

b2) $f'(x) = -\frac{30}{13} \cdot e^{\frac{x-35}{13}}$

$f'(0) = -0{,}156...$

Steigungswinkel: $\arctan(-0{,}156...) = -8{,}88...°$

$\alpha = 180° - 2 \cdot 8{,}8...° = 162{,}23...°$

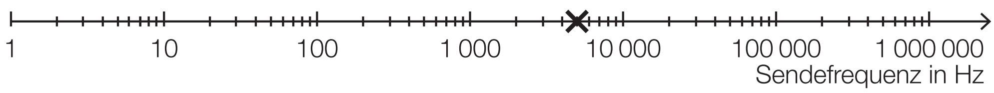
b3) Es wird die Länge des Bogens berechnet.

c1) $\begin{pmatrix} -45 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 78 \\ 4{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$

$B = (33 \mid 4{,}2)$

c2) $g: X = \begin{pmatrix} 33 \\ 4{,}2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -78 \\ 4{,}2 \end{pmatrix}$

d1)



d2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

Stichprobenmittelwert: $\bar{x} = 186{,}22...$

Stichprobenstandardabweichung: $s_{n-1} = 4{,}54...$

Berechnung des Vertrauensbereichs mithilfe der t-Verteilung:

$\mu_u = 186{,}22... - t_{8;0{,}975} \cdot \frac{4{,}54...}{\sqrt{9}} = 182{,}72...$

$\mu_o = 186{,}22... + t_{8;0{,}975} \cdot \frac{4{,}54...}{\sqrt{9}} = 189{,}71...$

Vertrauensbereich: [182,7; 189,7] (in Herzschlägen pro Minute)

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b1) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Länge $\overline{PQ}$
b2) 1 × B2: für das richtige Berechnen des Schnittwinkels α
b3) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Koordinaten des Punktes B
c2) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahlen
d1) 1 × A: für das richtige Eintragen in der logarithmischen Skala
d2) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Vertrauensbereichs

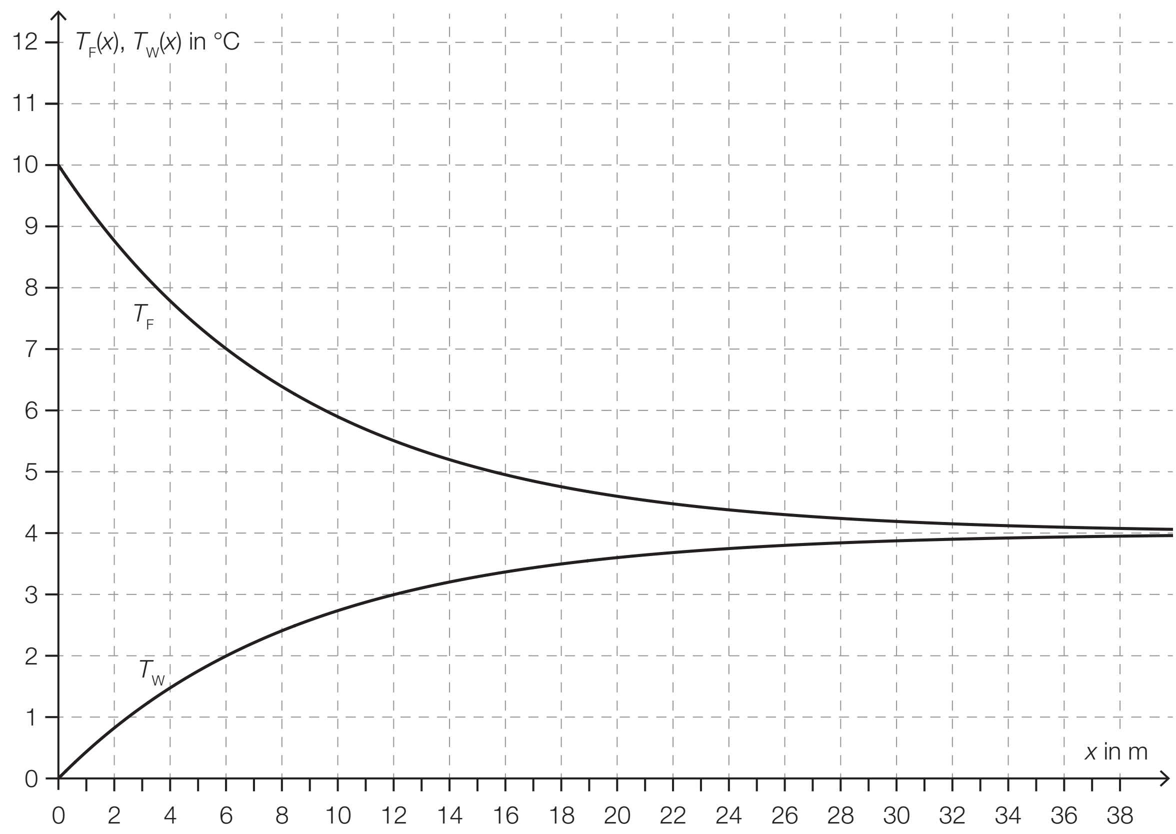
Limnologie*

Aufgabennummer: B_478

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Limnologie erforscht wichtige Kenngrößen von stehenden Gewässern wie etwa Temperatur oder Dichte.

a) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Wassertemperatur eines Sees in Abhängigkeit von der Tiefe x im Frühling (T_F) und im Winter (T_W). Die Wassertemperatur nähert sich in beiden Fällen asymptotisch dem Wert 4 °C.



Die Wassertemperatur des Sees im Frühling kann in Abhängigkeit von der Tiefe x näherungsweise durch eine Exponentialfunktion T_F mit $T_F(x) = a + b \cdot e^{c \cdot x}$ beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a, b und c der Funktion T_F.

Für ein bestimmtes x_1 gilt: $T_F(x_1) - T_W(x_1) = 5$

2) Ermitteln Sie x_1 mithilfe der obigen Abbildung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der Limnologie wird für bestimmte Zwecke eine Funktion g verwendet:

$$g(x) = a \cdot \left(1 - \frac{x}{b}\right)^{-1}$$

a, b ... positive Parameter

1) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf die Funktion g nicht zutrifft. *[1 aus 5]*

$g(0) = a$	☐
Für $0 < x < b$ gilt: $g(x) > a$	☐
g ist für $0 < x < b$ monoton steigend.	☐
Die Funktion g hat eine Polstelle.	☐
$g(b) = 0$	☐

c) Die Dichte von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur kann unter bestimmten Bedingungen näherungsweise durch die Funktion ϱ beschrieben werden:

$\varrho(T) = a - b \cdot (T - 4)^2$ mit $0 < T \leq 10$

T ... Temperatur in °C
$\varrho(T)$ ... Dichte von Wasser bei der Temperatur T in kg/m^3
a, b ... positive Parameter

1) Lesen Sie aus der obigen Funktionsgleichung die Koordinaten des Scheitelpunkts S von ϱ ab.

   S = (________|________)

2) Argumentieren Sie mathematisch, dass der Scheitelpunkt ein Hochpunkt der Funktion ϱ ist.

Es gilt: $a = 999{,}972$ und $b = 0{,}007$
Die Gleichung einer Tangente an den Graphen der Funktion ϱ lautet: $f(T) = 0{,}028 \cdot T + d$

3) Berechnen Sie den Parameter d.

Jemand verwendet zur Berechnung der Dichte von Wasser bei 10 °C die obige Funktion ϱ mit den Parametern $a = 999{,}972$ und $b = 0{,}007$.
Die Dichte von Wasser bei 10 °C beträgt jedoch laut einer Tabelle 999,700 kg/m^3.

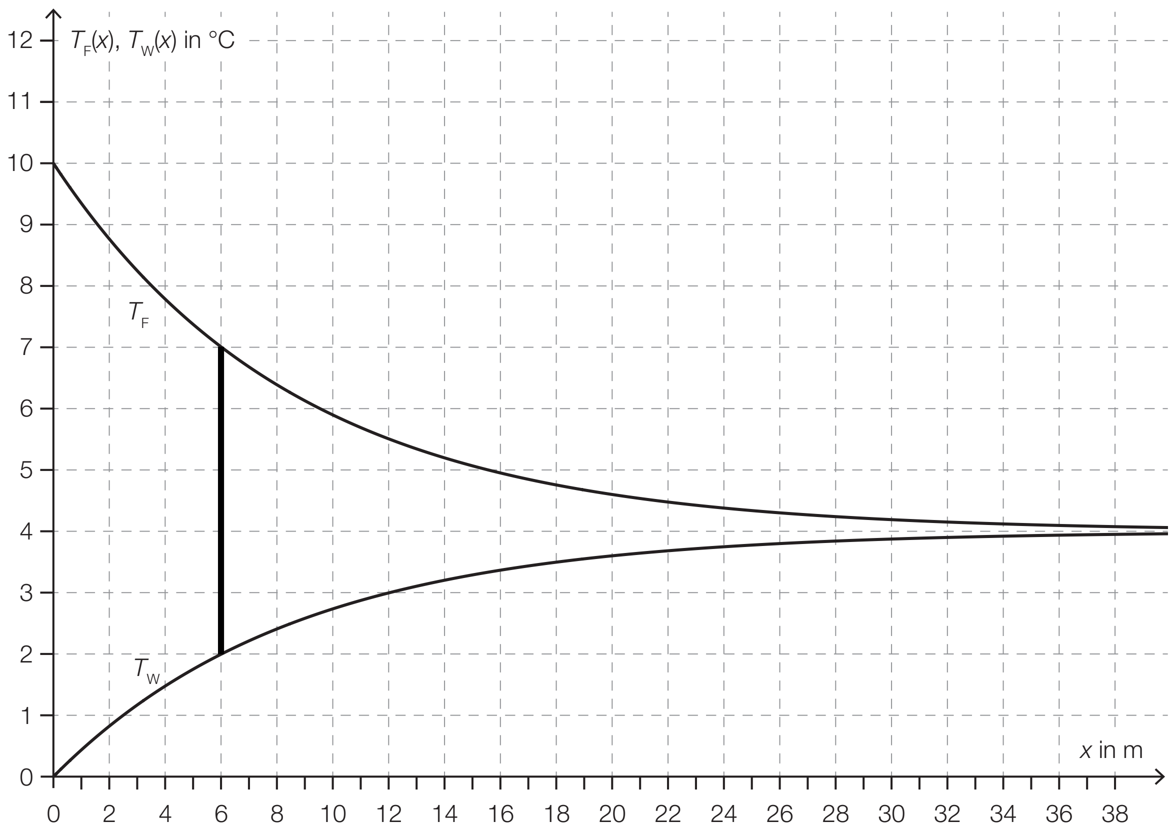
4) Berechnen Sie den Betrag des absoluten Fehlers bei Verwendung der Funktion ϱ anstelle des Tabellenwerts.

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = 4$, $b = 6$

Einsetzen des Punktes mit den Koordinaten (6|7): $7 = 4 + 6 \cdot e^{c \cdot 6}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$c = -0{,}1155...$

a2)



An der Stelle $x_1 = 6$ ergibt sich eine Temperaturdifferenz von 5 °C.
Toleranzbereich: [5,9; 6,1]

b1)

$g(b) = 0$	☒

c1) $S = (4\,|\,a)$

c2) Es liegt ein Hochpunkt vor, da die 2. Ableitung von ϱ negativ ist ($\varrho''(T) = -2 \cdot b < 0$).

oder:

Es liegt ein Hochpunkt vor, weil der Koeffizient des quadratischen Gliedes ($-b$) negativ ist.

c3) $\varrho'(T) = -0{,}014 \cdot T + 0{,}056$

$\varrho'(T_1) = 0{,}028 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2$
$d = \varrho(2) - 0{,}028 \cdot 2 = 999{,}888$

c4) $|\varrho(10) - 999{,}7| = 0{,}02$

Betrag des absoluten Fehlers: 0,02 kg/m^3

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Ermitteln der Parameter *a* und *b*
1 × B: für das richtige Ermitteln des Parameters *c*
a2) 1 × A2: für das richtige Ermitteln von x_1 (Toleranzbereich: [5,9; 6,1])
b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Koordinaten des Scheitelpunkts
c2) 1 × D: für das richtige mathematische Argumentieren
c3) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Parameters *d*
c4) 1 × B2: für das richtige Berechnen des Betrags des absoluten Fehlers

Kfz-Bestand (1)*

Aufgabennummer: B_300

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die nachstehende Tabelle gibt den Kraftfahrzeug-Bestand (Kfz-Bestand) in Österreich für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1992 bis 2012 jeweils zum Jahresende an.

Ende des Jahres ...	Kfz-Bestand in Millionen
1992	4,5
1997	5,2
2002	5,4
2007	5,8
2012	6,3

Datenquelle: Statistik Austria (Hrsg.): *Statistisches Jahrbuch Österreichs 2015*. Wien: Verlag Österreich 2014, S. 446.

a) Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands soll mit den Daten der obigen Tabelle durch eine lineare Regressionsfunktion K beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands mit einem anderen mathematischen Modell zu beschreiben, wurden, ausgehend von den Daten der obigen Tabelle, die nachstehenden Berechnungen durchgeführt.

$\sqrt[20]{\frac{6{,}3}{4{,}5}} = 1{,}0169...$

$1{,}0169... - 1 = 0{,}0169... \approx 1{,}7\ \%$

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang.

Jemand berechnet weiters:

$2 = 1{,}0169...^t$

$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0169...)} = 41{,}20... \approx 41{,}2$

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der berechneten Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Der Kfz-Bestand kann nicht unbeschränkt wachsen.

Die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands kann in einem Modell beschränkten Wachstums durch die Funktion K_B beschrieben werden:

$K_B(t) = 9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_B(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

Der Graph der Funktion K_B soll durch die Datenpunkte für die Jahre 1992 und 2012 verlaufen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Parameter b und λ der Funktion K_B ermittelt werden können.
2) Ermitteln Sie die Parameter b und λ.
3) Ermitteln Sie mithilfe dieses Modells eine Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020.

d) In einem logistischen Modell wird die zeitliche Entwicklung des Kfz-Bestands durch die Funktion K_L beschrieben:

$$K_L(t) = \frac{22{,}5}{3 + 2 \cdot e^{-0{,}06264 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K_L(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

1) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich der Kfz-Bestand gemäß diesem Modell langfristig dem Wert 7,5 Millionen annähert.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$K(t) = 0{,}084 \cdot t + 4{,}6$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ für das Ende des Jahres 1992
$K(t)$ ... Kfz-Bestand zur Zeit t in Millionen

a2) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand um 84 000 Kraftfahrzeuge pro Jahr zu.

a3) $K(t) = 8$ *oder* $0{,}084 \cdot t + 4{,}6 = 8$
$t = 40{,}47...$

Gemäß diesem Modell ist nach etwa 40,5 Jahren mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen.

Die Lösung kann entweder als Zeit nach Ende des Jahres 1992 oder als Kalenderjahr angegeben werden.

b1) Gemäß diesem Modell nimmt der Kfz-Bestand pro Jahr um rund 1,7 % zu.

b2) Gemäß diesem Modell verdoppelt sich der Kfz-Bestand nach (jeweils) rund 41,2 Jahren.

c1) $K_B(0) = 4{,}5$
$K_B(20) = 6{,}3$

oder:

$9 - b = 4{,}5$
$9 - b \cdot e^{-\lambda \cdot 20} = 6{,}3$

c2) $b = 9 - 4{,}5 = 4{,}5$
$\lambda = \frac{\ln(4{,}5) - \ln(2{,}7)}{20} = 0{,}025541...$

c3) $K_B(28) = 6{,}79...$

Gemäß diesem Modell beträgt der Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020 rund 6,8 Millionen.

d1) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-0{,}06264 \cdot t}$ gegen null, der Nenner also gegen 3 und damit der Funktionswert gegen 7,5.

Lösungsschlüssel

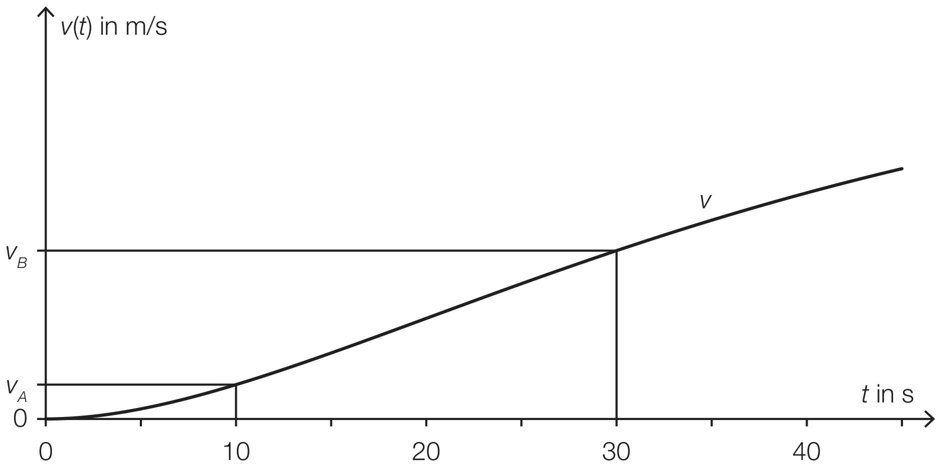
a1) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
a2) 1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der mit einem Kfz-Bestand von 8 Millionen zu rechnen ist
b1) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Zahl 1,7 % im gegebenen Sachzusammenhang
b2) 1 × C2: für die richtige Interpretation der Zahl 41,2 im gegebenen Sachzusammenhang
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Parameter b und λ
c3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Prognose für den Kfz-Bestand am Ende des Jahres 2020
d1) 1 × D: für die richtige mathematische Argumentation

Straßenbahn (2)*

Aufgabennummer: B_298

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Straßenbahn fährt von einer Haltestelle los. Ihr Geschwindigkeitsverlauf für die ersten 45 Sekunden ist im nachstehenden Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellt.



t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Die Geschwindigkeit der Straßenbahn nimmt im Zeitintervall [10; 30] linear zu.

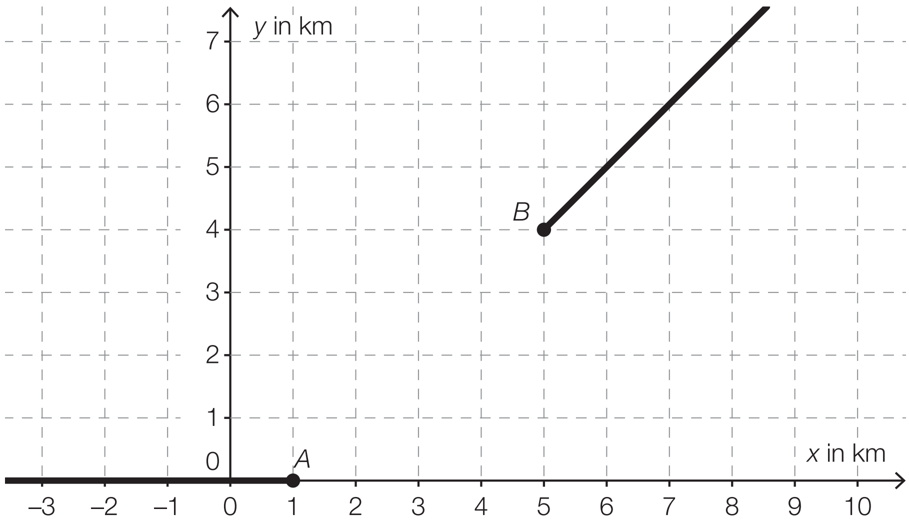
1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit der Straßenbahn 15 Sekunden nach Beginn der Fahrt aus v_A und v_B.

$v(15) =$ ____________________

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind 2 geradlinige Gleise, die im Punkt A bzw. im Punkt B enden, modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden. „Knickfrei" bedeutet, dass die entsprechenden Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

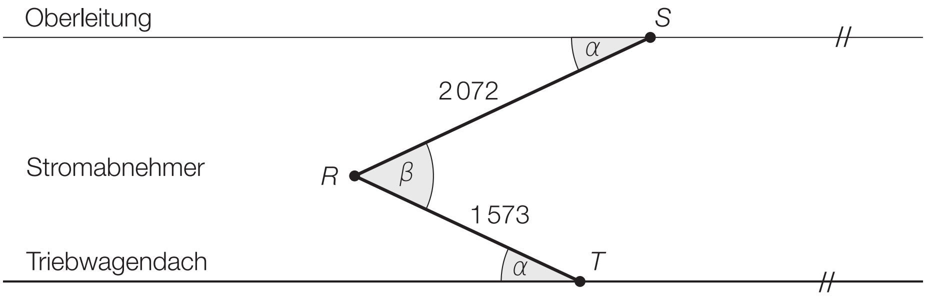
Diese Gleisverbindung soll durch eine Polynomfunktion g mit
$g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ modelliert werden (x, $g(x)$ in km).

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion g.

Mithilfe dieses Gleichungssystems erhält man: $g(x) = -\frac{1}{16} \cdot x^3 + \frac{11}{16} \cdot x^2 - \frac{19}{16} \cdot x + \frac{9}{16}$

2) Berechnen Sie die Länge dieser Gleisverbindung zwischen den Punkten A und B.

c) Straßenbahnen sind mit einem Stromabnehmer, der am Triebwagendach montiert ist, ausgestattet. Die nachstehende Abbildung zeigt einen Stromabnehmer mit den entsprechenden Maßangaben in Millimetern.
Es gilt: $\alpha = 25{,}1°$



1) Berechnen Sie den Winkel β.

2) Berechnen Sie den Abstand $\overline{TS}$.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Steigung der linearen Funktion entspricht der Beschleunigung der Straßenbahn im betrachteten Zeitintervall.

a2) $v(15) = v_A + \frac{v_B - v_A}{4}$

b1) $g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$g(1) = 0$
$g(5) = 4$
$g'(1) = 0$
$g'(5) = 1$

oder:

$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$
$a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 4$
$3 \cdot a \cdot 1^2 + 2 \cdot b \cdot 1 + c = 0$
$3 \cdot a \cdot 5^2 + 2 \cdot b \cdot 5 + c = 1$

b2) $\int_1^5 \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,\mathrm{d}x = 5{,}778...$
Die Länge dieser Gleisverbindung beträgt rund 5,78 km.

c1) $\beta = 2 \cdot \alpha = 50{,}2°$

c2) $\overline{TS} = \sqrt{2072^2 + 1573^2 - 2 \cdot 2072 \cdot 1573 \cdot \cos(50{,}2°)} = 1610{,}8...$
Der Abstand $\overline{TS}$ beträgt rund 1611 mm.

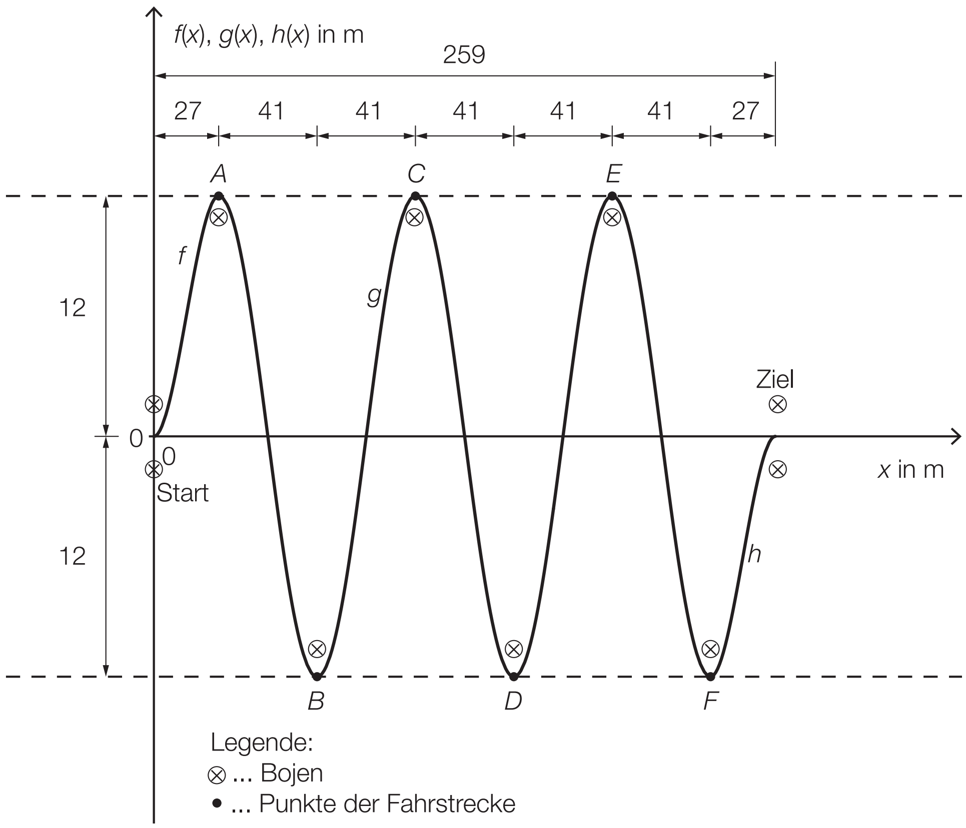
Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel für $v(15)$
b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Länge der Gleisverbindung zwischen den Punkten A und B
c1) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Winkels β
c2) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Abstands $\overline{TS}$

Wasserski-Wettbewerb (2)*

Aufgabennummer: B_471		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Bei einem Wasserski-Wettbewerb muss ein Slalom um 6 Bojen gefahren werden (siehe nachstehende Abbildung).



In einem vereinfachten Modell kann die Bahn einer Wasserskifahrerin abschnittsweise durch die Graphen dreier Funktionen beschrieben werden:

Funktion f ... vom Start bis zum Punkt A
Funktion g ... vom Punkt A bis zum Punkt F
Funktion h ... vom Punkt F bis ins Ziel
x, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in m

* ehemalige Klausuraufgabe

a) Für die gesamte Fahrt benötigt die Wasserskifahrerin 30 s.

1) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{\int_0^{27} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx + \int_{27}^{232} \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx + \int_{232}^{259} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx}{30}$$

b) Die Bahn der Wasserskifahrerin zwischen den Punkten A und F kann mithilfe des Graphen der Funktion g beschrieben werden.

Es gilt: $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$

1) Bestimmen Sie die Parameter a, b und c.

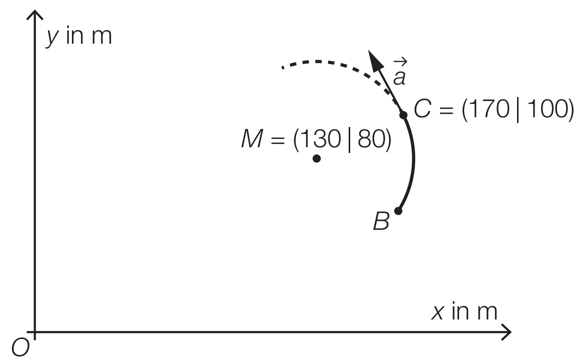
c) Die Bahn der Wasserskifahrerin vom Start bis zum Punkt A kann durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$ beschrieben werden.
Der Graph der Funktion h entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um 232 m nach rechts und um 12 m nach unten.

1) Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung der Funktion h an. *[1 aus 5]*

$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 + 12$	☐
$h(x) = a \cdot (x + 12)^3 + b \cdot (x + 12)^2 - 232$	☐
$h(x) = a \cdot (x - 12)^3 + b \cdot (x - 12)^2 + 232$	☐
$h(x) = a \cdot (x + 232)^3 + b \cdot (x + 232)^2 - 12$	☐
$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 - 12$	☐

d) Für das Publikum gibt es in der Pause die Möglichkeit, sich in einem Reifen hinter einem Motorboot durch das Wasser ziehen zu lassen. Bei einer wilden Fahrt kann es vorkommen, dass man aus dem Reifen geschleudert wird und ins Wasser fällt.

Die nachstehende Abbildung zeigt einen kurzen Ausschnitt des Weges eines Reifens bei einer solchen Fahrt. Vom Punkt B zum Punkt C ist dieser kreisförmig mit dem Mittelpunkt M. Im Punkt C wird der „Reifenfahrer" in der durch den Vektor $\vec{a}$ angegebenen tangentialen Richtung aus dem Reifen geschleudert.



1) Begründen Sie, warum $\vec{a} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ ist.

Der „Reifenfahrer" fällt in einer Entfernung von 2 m vom Punkt C ins Wasser.

2) Berechnen Sie die Koordinaten desjenigen Punktes, in dem der „Reifenfahrer" ins Wasser fällt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Es wird die mittlere Geschwindigkeit der Wasserskifahrerin in m/s berechnet.

b1) $a = 12$

$b = \frac{2 \cdot \pi}{82} = \frac{\pi}{41}$

Bestimmen von c durch Einsetzen:
$g(x) = 12 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{41} \cdot x + c\right)$
$g(27) = 12$

$\Rightarrow \quad c = \frac{-13 \cdot \pi}{82} = -0{,}498...$

Jeder Wert $c = -0{,}498... + 2 \cdot k \cdot \pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$ *ist als richtig zu werten.*

c1)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$h(x) = a \cdot (x - 232)^3 + b \cdot (x - 232)^2 - 12$	☒

d1) Da die Tangente normal auf den Radius steht, ist das Skalarprodukt 0.

d2) $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 170 \\ 100 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 169{,}1... \\ 101{,}7... \end{pmatrix}$

Der Reifenfahrer fällt ungefähr im Punkt (169 | 102) ins Wasser.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit

b1) 1 × C: für das richtige Ablesen des Parameters *a*
1 × B1: für das richtige Bestimmen des Parameters *b*
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Parameters *c*

c1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

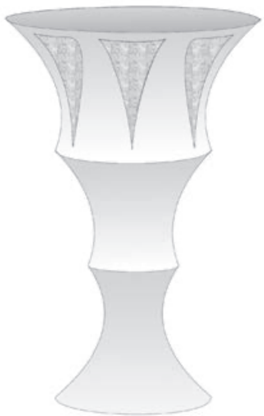
d1) 1 × D: für die richtige Begründung

d2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Koordinaten

Kunstvolle Becher*

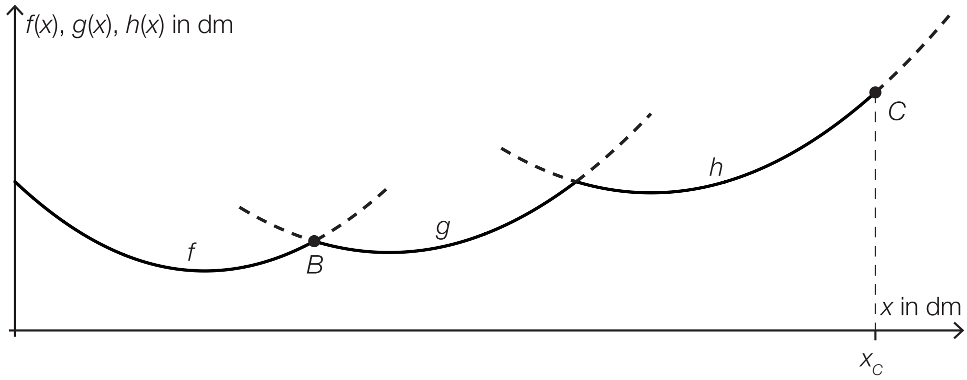
Aufgabennummer: B_472		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Bei einer Ausgrabung wurden antike Becher gefunden.
Eine Künstlerin wird anlässlich dieses Fundes damit beauftragt, eine becherförmige Skulptur zu entwerfen.



* ehemalige Klausuraufgabe

a) Die äußere Begrenzungslinie der becherförmigen Skulptur kann abschnittsweise durch die quadratischen Funktionen f, g und h modelliert werden:



Es wird folgende Berechnung durchgeführt:
$\gamma = 90° - \arctan(h'(x_C))$

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel γ ein.

Für die Funktionen f und g gilt:
$f(x) = 0{,}117 \cdot x^2 - 1{,}18 \cdot x + 5$
$g(x) = 0{,}0952 \cdot x^2 - 1{,}9 \cdot x + 12{,}1$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in dm

f und g schneiden einander im Punkt B.

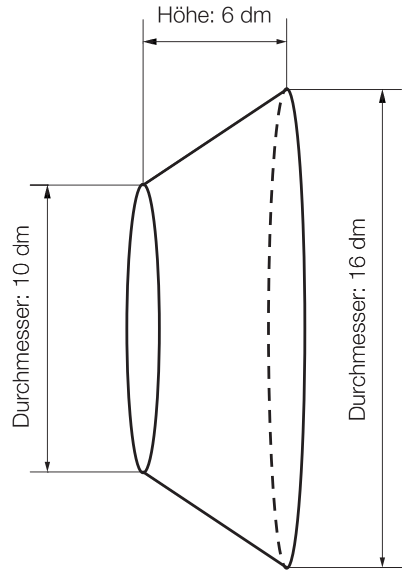
2) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts B.

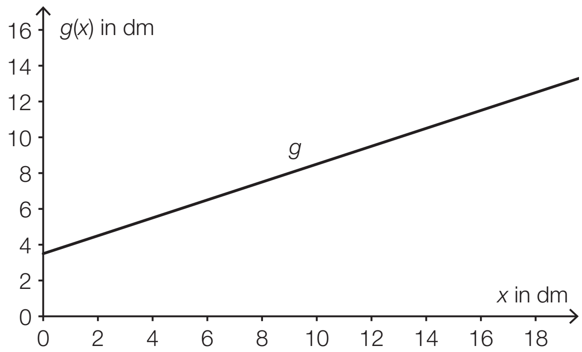
3) Berechnen Sie den Schnittwinkel von f und g im Schnittpunkt B.

Für einen alternativen Entwurf sollen die dargestellten Graphen entlang der vertikalen Achse verschoben werden.

4) Geben Sie an, wie sich eine solche Verschiebung auf die Koeffizienten von f auswirkt.

b) Der Sockel, auf dem die Skulptur montiert werden soll, hat die Form eines Kegelstumpfs (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung):





Dieser Kegelstumpf kann als Rotationskörper mithilfe der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$

x, $g(x)$ ... Koordinaten in dm

1) Kreuzen Sie diejenige Formel an, mit deren Hilfe man das Volumen des dargestellten Kegelstumpfs berechnen kann. *[1 aus 5]*

$V = \pi \cdot \int_0^6 (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_3^9 (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_3^6 (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_{10}^{16} (g(x))^2 \, dx$	☐
$V = \pi \cdot \int_5^8 (g(x))^2 \, dx$	☐

c) Die Skulptur wird aus einer Legierung hergestellt, die aus Aluminium, Silizium und einer kleinen Menge Magnesium besteht.

Die Dichte von Aluminium beträgt 2,70 g/cm³.

1) Geben Sie die Dichte ϱ von Aluminium in der Einheit kg/m³ an.

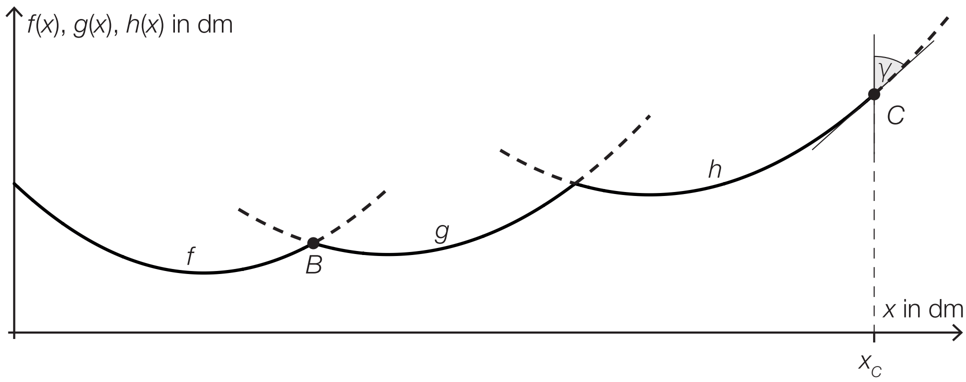
ϱ = ____ kg/m³

Der Radius eines Magnesium-Atoms beträgt $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m. Ein Silizium-Atom hat einen um 0,04 nm kleineren Radius.

2) Berechnen Sie den Radius eines Silizium-Atoms in Nanometern.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f(x) = g(x)$

oder:

$0{,}0952 \cdot x^2 - 1{,}9 \cdot x + 12{,}1 = 0{,}117 \cdot x^2 - 1{,}18 \cdot x + 5$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -40{,}975...)$
$x_2 = 7{,}948... \approx 7{,}95$
$f(x_2) = 3{,}012... \approx 3{,}01$
$B \approx (7{,}95|3{,}01)$

a3) $g'(7{,}948...) = -0{,}386...$
$f'(7{,}948...) = 0{,}679...$

Berechnung des Schnittwinkels:
$\arctan(0{,}679...) + |\arctan(-0{,}386...)| = 55{,}350...° \approx 55{,}4°$

Auch eine Berechnung des zugehörigen Supplementärwinkels (124,6°) ist als richtig zu werten.

a4) Es ändert sich nur der Koeffizient 5 der Funktion *f*.

b1)

[...]	
$V = \pi \cdot \int_3^9 (g(x))^2 \, dx$	☒
[...]	
[...]	
[...]	

c1) $\varrho = 2\,700 \text{ kg/m}^3$

c2) $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m = 0,15 nm
0,15 nm – 0,04 nm = 0,11 nm
Der Radius eines Silizium-Atoms beträgt 0,11 nm.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C1: für das richtige Einzeichnen des Winkels γ
a2) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Koordinaten von B
a3) 1 × B2: für die richtige Berechnung des Schnittwinkels (Auch eine Berechnung des zugehörigen Supplementärwinkels (124,6°) ist als richtig zu werten.)
a4) 1 × C2: für die richtige Angabe zur Auswirkung auf die Koeffizienten
b1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × A: für das richtige Angeben der Dichte in kg/m^3
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Radius eines Silizium-Atoms in Nanometern

Wasseräquivalent einer Schneedecke*

Aufgabennummer: B_473

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Das Wasseräquivalent W einer Schneedecke gibt diejenige Höhe an, bis zu der das Wasser steht, wenn die Schneedecke schmilzt. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Wasser nicht abfließen kann und das Wasser und die Schneedecke gleich große Flächen bedecken.

a) Das Wasseräquivalent W einer Schneedecke kann mithilfe folgender Formel berechnet werden:

$$W = \frac{m}{\varrho_{\text{Wasser}} \cdot A}$$

m ... Masse des Schnees (bzw. Masse des Wassers) in kg
ϱ_{Wasser} ... Dichte des Wassers in kg/m^3
A ... Flächeninhalt der schneebedeckten Fläche in m^2

1) Zeigen Sie, dass das Wasseräquivalent mit der obigen Formel in der Längeneinheit Meter ermittelt wird.

b) Die von der Erde abgestrahlte Gammastrahlung wird beim Durchgang durch eine Schneedecke abgeschwächt. Die Abschwächung hängt vom Wasseräquivalent der Schneedecke ab.

Die Funktion E beschreibt die Intensität der abgeschwächten Gammastrahlung in Abhängigkeit vom Wasseräquivalent W der Schneedecke. Die 1. Ableitung $\frac{dE}{dW}$ ist direkt proportional zu $-E$. Die zugehörige Proportionalitätskonstante $k > 0$ wird als Absorptionskoeffizient bezeichnet.

1) Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung auf.

2) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) Durch das Einsetzen der Einheiten folgt:

$$\frac{\text{kg}}{\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \text{m}^2} = \text{m}$$

b1) $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}W} = -k \cdot E$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$E(W) = C \cdot e^{-k \cdot W}$

oder:

$$\frac{E'}{E} = -k$$

$$\int \frac{E'}{E}\,\mathrm{d}W = \int -k\,\mathrm{d}W$$

$$\ln|E(W)| = -k \cdot W + C_1$$

$$E(W) = C \cdot e^{-k \cdot W}$$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für den richtigen Nachweis
b1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung
b2) 1 × B: für das richtige Bestimmen der allgemeinen Lösung

Wagenheber*

Aufgabennummer: B_299

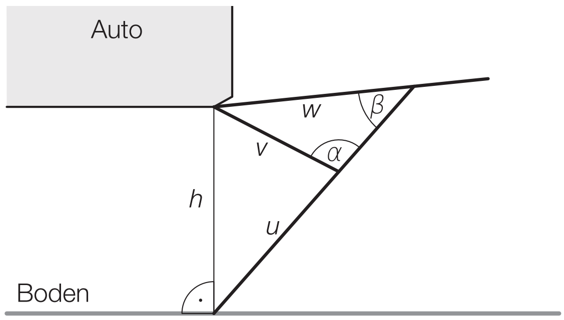
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Wagenheber ist ein Hilfsmittel, um ein Auto anzuheben.

a) Eine mögliche Bauart eines Wagenhebers ist im nebenstehenden Bild dargestellt.

Bildquelle: Bukk – own work, public domain, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:STORZ_Wagenheber.jpg [04.08.2020] (adaptiert).

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine schematische – nicht maßstabgetreue – Darstellung dieses Wagenhebers.



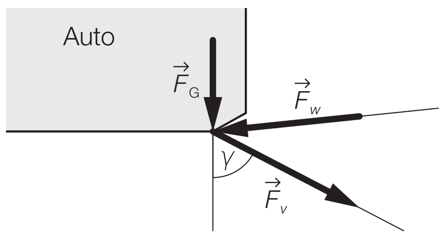
1) Erstellen Sie mithilfe von u, v und α eine Formel zur Berechnung der Höhe h.

h = ____________________

Es gilt: $v = 20$ cm, $w = 30$ cm, $\beta = 41°$

2) Berechnen Sie den stumpfen Winkel α.

Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ kann in die Kräfte $\vec{F}_w$ und $\vec{F}_v$ zerlegt werden (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



Es gilt (alle Angaben in Kilonewton):

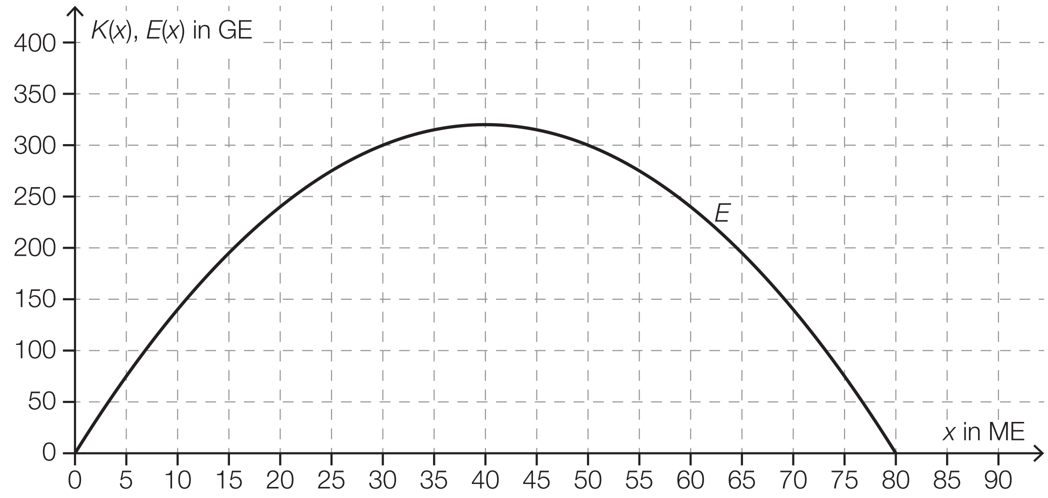
$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}75 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{F}_w = \begin{pmatrix} -1{,}18 \\ -0{,}12 \end{pmatrix}$$

3) Ermitteln Sie die Kraft $\vec{F}_v$.

4) Berechnen Sie den Winkel γ.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Unternehmen verkauft Wagenheber eines bestimmten Modells. Der Erlös kann in Abhängigkeit von der verkauften Menge x näherungsweise durch die quadratische Erlösfunktion E beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Die Fixkosten dieser Produktion betragen 100 GE.
Die obere Gewinngrenze beträgt 50 ME.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der linearen Kostenfunktion K ein.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den maximalen Gewinn ab.

Möglicher Lösungsweg

a1) $h = \sqrt{u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos(180° - \alpha)}$ *oder* $h = \sqrt{u^2 + v^2 + 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos(\alpha)}$

a2) $\frac{w}{\sin(\alpha)} = \frac{v}{\sin(\beta)} \quad \Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{w \cdot \sin(\beta)}{v} = \frac{30 \cdot \sin(41°)}{20}$

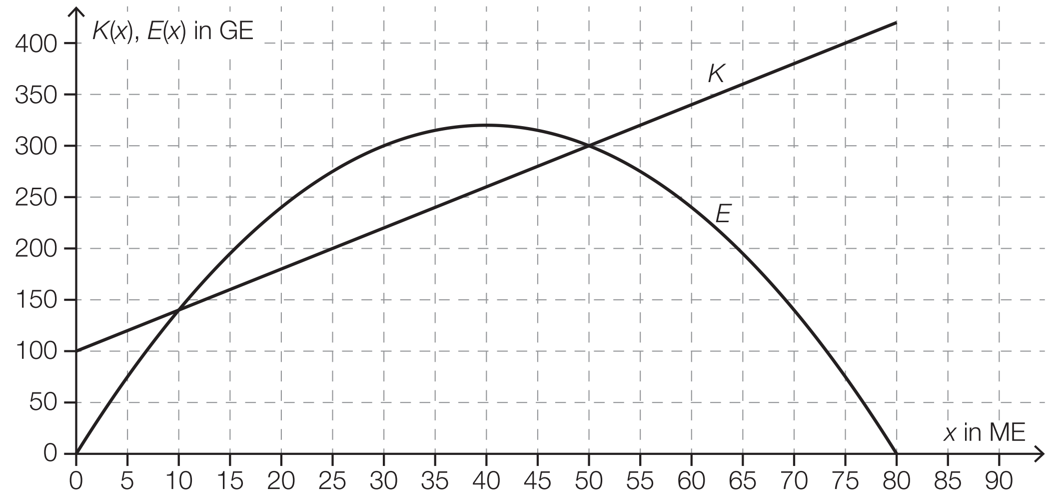
$(\alpha_1 = 79{,}7...°) \quad \alpha_2 = 100{,}2...°$

Für die Punktevergabe ist nur die Angabe des stumpfen Winkels erforderlich.

a3) $\vec{F}_v = \vec{F}_G - \vec{F}_w = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1{,}18 \\ -0{,}12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}18 \\ -0{,}63 \end{pmatrix}$

a4) $\gamma = \arctan\left(\frac{1{,}18}{0{,}63}\right) = 61{,}9...°$

b1)



b2) Der maximale Gewinn beträgt 80 GE.
Toleranzbereich: [70; 90]

Lösungsschlüssel

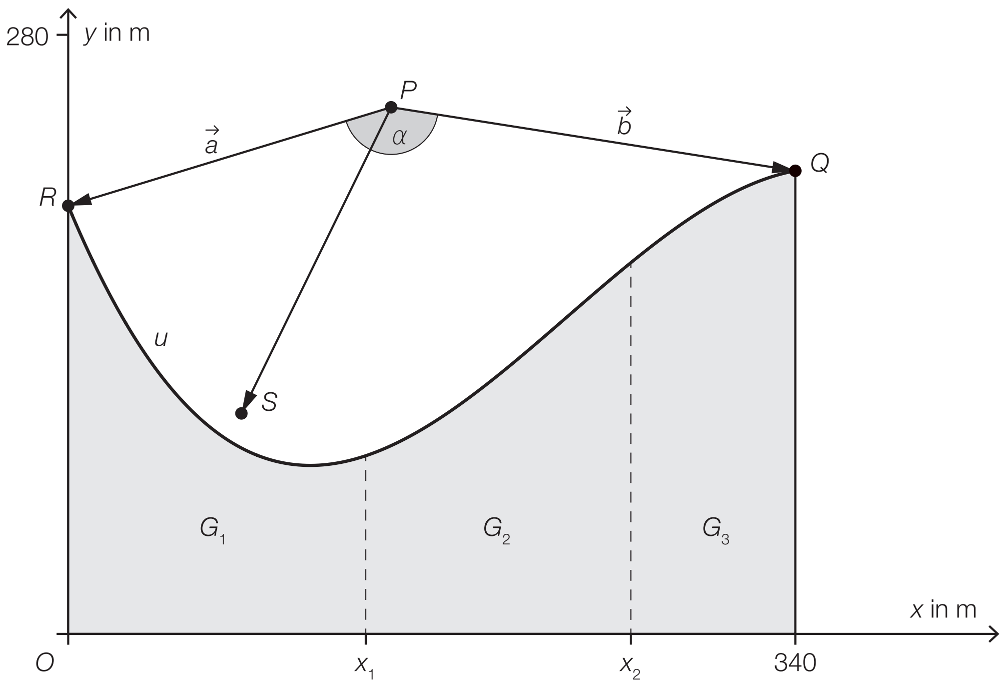
a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
a2) 1 × B1: für das richtige Berechnen des stumpfen Winkels α
a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Kraft $\vec{F}_v$
a4) 1 × B3: für das richtige Berechnen des Winkels γ
b1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion
b2) 1 × C: für das richtige Ablesen des maximalen Gewinns (Toleranzbereich: [70; 90])

Grundstück am See*

Aufgabennummer: B_301

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Drei Geschwister erwerben ein Grundstück am See. Sie unterteilen das Grundstück in die 3 Grundstücke G_1, G_2 und G_3 (siehe nachstehende Abbildung).



Die Uferbegrenzungslinie wird näherungsweise durch den Graphen der Funktion u beschrieben.

* ehemalige Klausuraufgabe

a) Jemand fotografiert von einem Boot im Punkt P aus das Ufer des Grundstücks. Damit die Uferbegrenzungslinie zwischen den Punkten R und Q auf dem Foto ist, muss das Objektiv den Winkel α erfassen können.

1) Stellen Sie mithilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

α = ____

Das Boot fährt geradlinig mit einer konstanten Geschwindigkeit v (in m/s) vom Punkt P zum Punkt S.

2) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

$$\frac{|\overrightarrow{PS}|}{v}$$

b) Das gesamte Grundstück besteht aus den 3 flächengleichen Grundstücken G_1, G_2 und G_3 (siehe obige Abbildung).

Für die Funktion u gilt:

$u(x) = -2 \cdot 10^{-5} \cdot x^3 + 1{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 2{,}4 \cdot x + 200$ mit $0 \leq x \leq 340$

x, $u(x)$ ... Koordinaten in m

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gesamten Grundstücks.

Die Stelle x_1 markiert die Grenze zwischen den Grundstücken G_1 und G_2.

2) Berechnen Sie die Stelle x_1.

3) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck zur Berechnung des Umfangs des Grundstücks G_2 an. *[1 aus 5]*

$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_0^{x_1} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$u(x_2) - u(x_1) + x_1 + x_2 + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_0^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐
$x_2 - x_1 + u(x_1) - u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,dx$	☐

c) Beim Erwerb eines Grundstücks muss aufgrund der aktuellen Gesetzeslage Grunderwerbsteuer bezahlt werden. Die Höhe dieser Steuer richtet sich nach dem Grundstückswert.

Der Grundstückswert für das Grundstück am See beträgt € 1.640.000.
Die Grunderwerbsteuer wird folgendermaßen aus dem Grundstückswert errechnet:

- 0,5 % für die ersten € 250.000
- 2 % für die nächsten € 150.000
- darüber hinaus 3,5 % des Grundstückswerts, d. h., nur die Beträge über € 400.000 sind mit 3,5 % zu versteuern

1) Berechnen Sie die Grunderwerbsteuer für dieses Grundstück.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

a2) Mit diesem Ausdruck wird die Fahrzeit vom Punkt P zum Punkt S in Sekunden berechnet.

b1) $\int_0^{340} u(x)\,\mathrm{d}x = 45\,881{,}8...$

Das Grundstück hat einen Flächeninhalt von rund 45 882 m².

b2) $\frac{45\,881{,}8...}{3} = \int_0^{x_1} u(x)\,\mathrm{d}x$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1)_1 = 139{,}1...$
$((x_1)_2 = 646{,}4...)$

b3)

$x_2 - x_1 + u(x_1) + u(x_2) + \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'(x))^2}\,\mathrm{d}x$	☒

c1) $250\,000 \cdot 0{,}005 + 150\,000 \cdot 0{,}02 + (1\,640\,000 - 400\,000) \cdot 0{,}035 = 47\,650$

Die Grunderwerbsteuer für dieses Grundstück beträgt € 47.650.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
a2) 1 × C: für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit
b1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Flächeninhalts des gesamten Grundstücks
b2) 1 × B2: für das richtige Berechnen von x_1
b3) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Grunderwerbsteuer

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Obstfliegenfalle*

Aufgabennummer: B_486

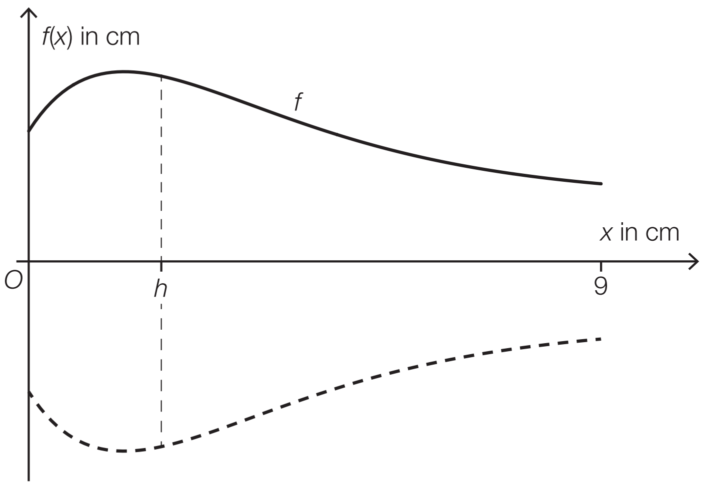
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Obstfliegen können mithilfe von Glasgefäßen eingefangen werden (siehe nebenstehende Abbildung).
Die Gefäße werden bis zu einer bestimmten Höhe mit einer Flüssigkeit befüllt, die die Obstfliegen anlocken soll.

Bildquelle: BMBWF

* ehemalige Klausuraufgabe

a) Die Obstfliegenfalle kann durch Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für die Funktion f gilt:

$f(x) = 1 + 2{,}7 \cdot (x + 0{,}5) \cdot e^{-\frac{2 \cdot x + 1}{4}}$ für $0 \leq x \leq 9$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

Die Obstfliegenfalle wird mit 50 cm³ Flüssigkeit befüllt.

In einem Abstand h vom Boden der Obstfliegenfalle soll eine Markierung für diese Flüssigkeitsmenge angebracht werden (siehe obige Abbildung).
Mit der nachstehenden Gleichung soll dieser Abstand h berechnet werden.

$$\pi \cdot \int_0^{\boxed{}} (f(x))^2 \, dx = \boxed{}$$

1) Vervollständigen Sie die obige Gleichung durch Eintragen in die dafür vorgesehenen Kästchen.
2) Berechnen Sie h.

b) Die äußere Begrenzungslinie einer anderen, zur Seite gekippten Obstfliegenfalle soll durch eine Polynomfunktion 5. Grades p mit $p(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$ modelliert werden.

Die lokalen Extrempunkte von p haben die Koordinaten $(1{,}5|3)$ und $(9|1)$.

1) Erstellen Sie alle Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p, die sich aus diesen Informationen ergeben.
2) Begründen Sie, warum die Koeffizienten der Funktion p mithilfe dieser Gleichungen nicht eindeutig bestimmt werden können.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\pi \cdot \int_0^{\boxed{h}} (f(x))^2 \, dx = \boxed{50}$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$h = 2{,}04\ldots$

b1) $p'(x) = 5 \cdot a \cdot x^4 + 4 \cdot b \cdot x^3 + 3 \cdot c \cdot x^2 + 2 \cdot d \cdot x + e$

I: $p(1{,}5) = 3$
II: $p(9) = 1$
III: $p'(1{,}5) = 0$
IV: $p'(9) = 0$

oder:

I: $7{,}59375 \cdot a + 5{,}0625 \cdot b + 3{,}375 \cdot c + 2{,}25 \cdot d + 1{,}5 \cdot e + f = 3$
II: $59\,049 \cdot a + 6\,561 \cdot b + 729 \cdot c + 81 \cdot d + 9 \cdot e + f = 1$
III: $25{,}3125 \cdot a + 13{,}5 \cdot b + 6{,}75 \cdot c + 3 \cdot d + e = 0$
IV: $32\,805 \cdot a + 2\,916 \cdot b + 243 \cdot c + 18 \cdot d + e = 0$

b2) Zur Berechnung der 6 Koeffizienten der Funktion p wären 6 Gleichungen notwendig.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Gleichung
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen von h
b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Extremstellen
b2) 1 × D: für das richtige Begründen

Elektromagnetische Strahlung*

Aufgabennummer: B_487

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Beim Eindringen von elektromagnetischer Strahlung in ein Medium nimmt die Intensität mit der Eindringtiefe ab. Die Funktion E beschreibt die Intensität der Strahlung in Abhängigkeit von der Eindringtiefe.

x ... Eindringtiefe in m
$E(x)$ ... Intensität bei der Eindringtiefe x in Watt pro Quadratmeter (W/m²)

Die 1. Ableitung der Funktion E nach der Eindringtiefe x ist proportional zur Funktion E.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Differenzialgleichung. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-k$ ($k > 0$).

$$\frac{dE}{dx} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

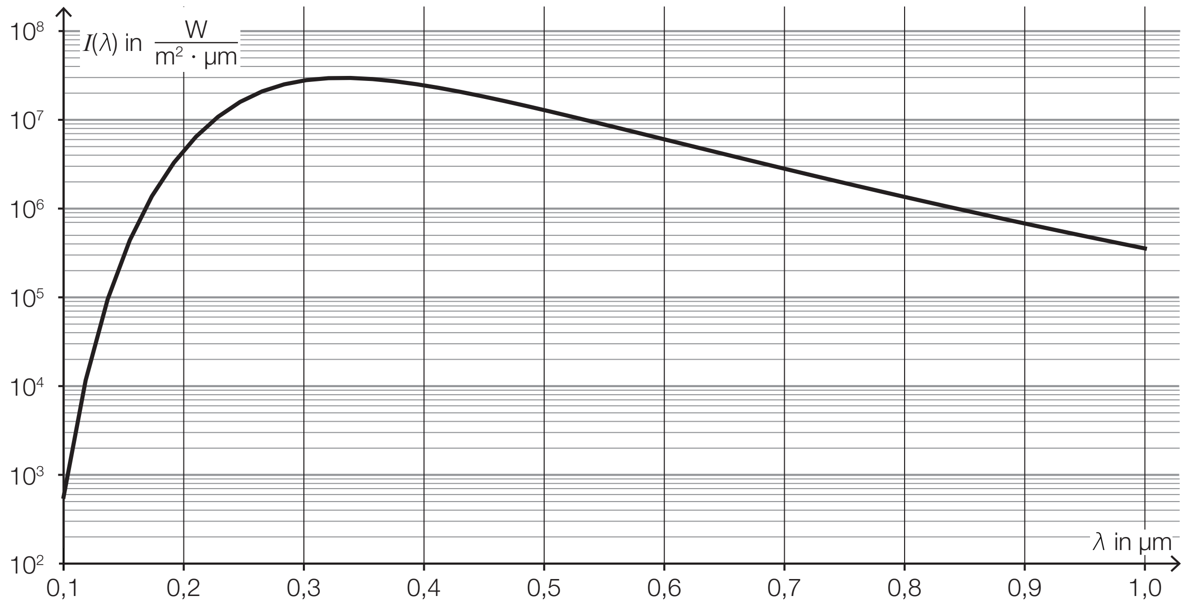
Beim Durchgang von Strahlung durch ein Medium treten Störeinflüsse auf. Diese Störeinflüsse werden durch Addition einer Konstanten S auf der rechten Seite der Differenzialgleichung berücksichtigt.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Streuung von Sonnenstrahlung an kleinen Molekülen der Atmosphäre ist dafür verantwortlich, dass der Himmel tagsüber blau erscheint.

Die Intensität der gestreuten Sonnenstrahlung kann in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ näherungsweise durch die Funktion I beschrieben werden. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion I in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung das Maximum der Funktion I ab.

I_{max} = ______________________ $\frac{W}{m^2 \cdot \mu m}$

Der relative Anteil der gestreuten Sonnenstrahlung an der gesamten Sonnenstrahlung hängt von der Wellenlänge λ ab. In einem bestimmten Wellenlängenbereich gilt:

$A(\lambda) = 1 - e^{\frac{-0{,}0106}{\lambda^4}}$

λ ... Wellenlänge in µm
$A(\lambda)$ ... relativer Anteil der gestreuten Sonnenstrahlung bei der Wellenlänge λ

2) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich $A(\lambda)$ für größer werdendes λ dem Wert 0 nähert.

c) Der sogenannte *Poynting-Vektor* $\vec{S}$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^3$, der bei Berechnungen mit elektromagnetischen Wellen verwendet wird.

Dabei gilt:

$\vec{S} = k \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$
$\vec{E}, \vec{B}$ ... Vektoren in $\mathbb{R}^3$ zur Beschreibung von elektromagnetischen Wellen
k ... Konstante, $k > 0$

1) Geben Sie an, wie groß der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{S}$ und $\vec{B}$ ist.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der zu $\vec{S} = k \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$ äquivalent ist. *[1 aus 5]*

$k = \frac{\vec{S}}{\vec{B} \times \vec{E}}$	☐
$k \cdot \vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$	☐
$-\vec{S} = k \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E}\right)$	☐
$\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\vec{S}} = k$	☐
$\vec{S} = -k \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -k \cdot E$

a2) Differenzialgleichung mit Störfunktion S: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -k \cdot E + S$

Lösung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*:

$\frac{\mathrm{d}E}{-k \cdot E + S} = \mathrm{d}x \quad \left(\textit{oder: } \frac{E'}{-k \cdot E + S} = 1\right)$

$\int \frac{\mathrm{d}E}{-k \cdot E + S} = \int \mathrm{d}x \quad \left(\textit{oder: } \int \frac{E'(x)}{-k \cdot E(x) + S} \mathrm{d}x = \int 1 \, \mathrm{d}x\right)$

$\frac{\ln|-k \cdot E(x) + S|}{-k} = x + C_1$

$-k \cdot E(x) + S = C_2 \cdot e^{-k \cdot x}$

$E(x) = C \cdot e^{-k \cdot x} + \frac{S}{k}$

b1) $I_{max} = 3 \cdot 10^7 \, \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mu\mathrm{m}}$

b2) Für größer werdendes λ nähert sich der relative Anteil dem Wert 0, da der Ausdruck $e^{\frac{-0{,}0106}{\lambda^4}}$ immer weiter gegen 1 geht.

c1) Der Winkel zwischen $\vec{S}$ und $\vec{B}$ beträgt 90°.

c2)

$-\vec{S} = k \cdot \left(\vec{B} \times \vec{E}\right)$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Vervollständigen der Differenzialgleichung
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen von I_{max}
b2) 1 × D: für das richtige mathematische Argumentieren
c1) 1 × C1: für das richtige Angeben des Winkels
c2) 1 × C2: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Schlafdauer*

Aufgabennummer: B_492

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es wurden verschiedene Untersuchungen zur durchschnittlichen täglichen Schlafdauer unterschiedlicher Personengruppen durchgeführt.

a) Das Ergebnis einer Befragung von 50 Personen zur Schlafdauer ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Schlafdauer in Stunden	6	7	8	9	10
Anzahl der Personen	3	16	20	10	1

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Schlafdauer dieser 50 Personen.

Bei 9 Personen wurden die Schlafdauer und die Fernsehzeit erhoben:

Schlafdauer in Stunden	6	7	7	8	8	9	9	10	10
Fernsehzeit in Stunden	4	4	2	3	3	2	2	1	2

Die Fernsehzeit soll in Abhängigkeit von der Schlafdauer beschrieben werden.

2) Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion.

3) Interpretieren Sie das Vorzeichen der Steigung der Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

4) Berechnen Sie gemäß diesem Modell die Fernsehzeit bei einer Schlafdauer von 7,5 h.

b) Die durchschnittliche tägliche Schlafdauer X von älteren Personen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 364 min und der Standardabweichung σ = 50 min.

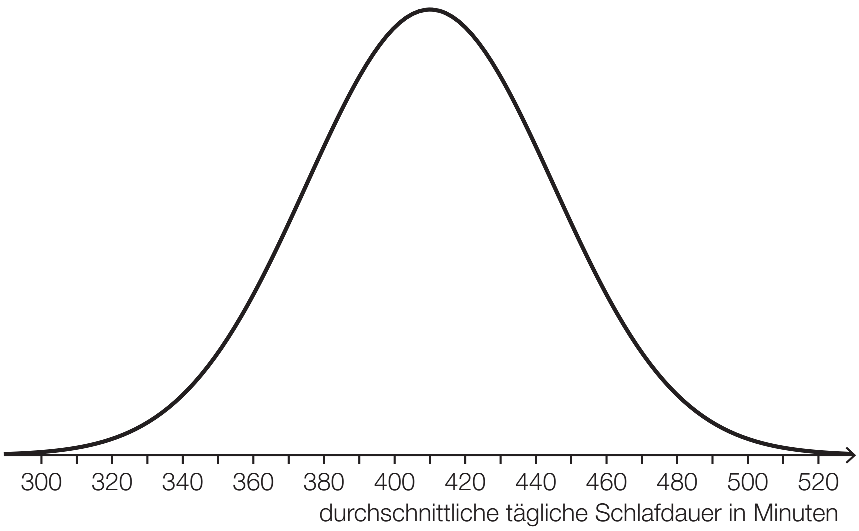
1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte ältere Person eine durchschnittliche tägliche Schlafdauer zwischen 300 min und 480 min hat.

2) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$P(X \geq 400) = P\left(X \leq \boxed{}\right)$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für die Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren ist die durchschnittliche tägliche Schlafdauer annähernd normalverteilt. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

μ = ______________________ min

Für eine andere Altersgruppe beträgt der Erwartungswert 399 min. Die Standardabweichung ist die gleiche wie in der Altersgruppe von 19 bis 39 Jahren.

2) Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Dichtefunktion für diese Altersgruppe vom oben abgebildeten Graphen unterscheidet.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 7{,}8$ h

a2) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:
$f(x) = -0{,}5857 \cdot x + 7{,}3714$ *(Koeffizienten gerundet)*

x … Schlafdauer in Stunden
$f(x)$ … Fernsehzeit bei der Schlafdauer x in Stunden

a3) Wird die Schlafdauer erhöht, so sinkt die Fernsehzeit.

a4) $f(7{,}5) = 2{,}9...$

Bei einer Schlafdauer von 7,5 h beträgt die Fernsehzeit gemäß diesem Modell rund 3 h.

b1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(300 < X < 480) = 0{,}889...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 89 %.

b2) $P(X \geq 400) = P\left(X \leq \boxed{328}\right)$

c1) $\mu = 410$ min
Toleranzbereich: [405; 415]

c2) Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist im Vergleich zum abgebildeten Graphen nach links verschoben.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des arithmetischen Mittels
a2) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Gleichung der linearen Regressionsfunktion
a3) 1 × C: für das richtige Interpretieren des Vorzeichens der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang
a4) 1 × B3: für das richtige Berechnen der Fernsehzeit
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit
b2) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahl
c1) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Erwartungswerts (Toleranzbereich: [405; 415])
c2) 1 × C2: für das richtige Beschreiben

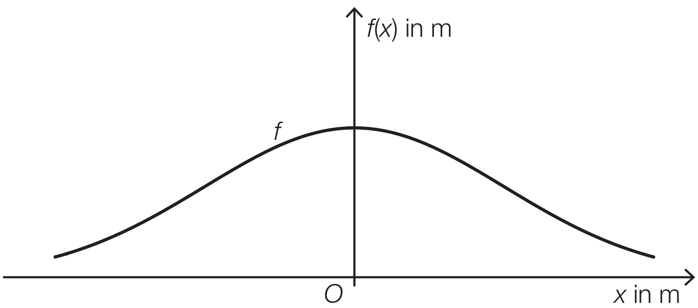
Grünbrücken*

Aufgabennummer: B_495

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Über Grünbrücken können wildlebende Tiere stark befahrene Verkehrswege wie z. B. Autobahnen gefahrlos überqueren.

a) In der nachstehenden Abbildung ist eine Grünbrücke modellhaft dargestellt.



Die Höhe der Grünbrücke kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x^2}$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m
a, b ... positive Parameter

Die Grünbrücke hat an der Stelle $x = 0$ m eine Höhe von 10 m.
Die Grünbrücke hat an der Stelle $x = 20$ m eine Höhe von 6 m.

1) Geben Sie den Parameter a an.

2) Berechnen Sie den Parameter b.

3) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der die Steigung von f am größten ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Verschiedene Formen von Grünbrücken sollen modelliert werden. Dazu wird der Graph der Funktion g untersucht.

$g(x) = a \cdot e^{-b \cdot (x+c)^2}$ mit $a, b, c > 0$

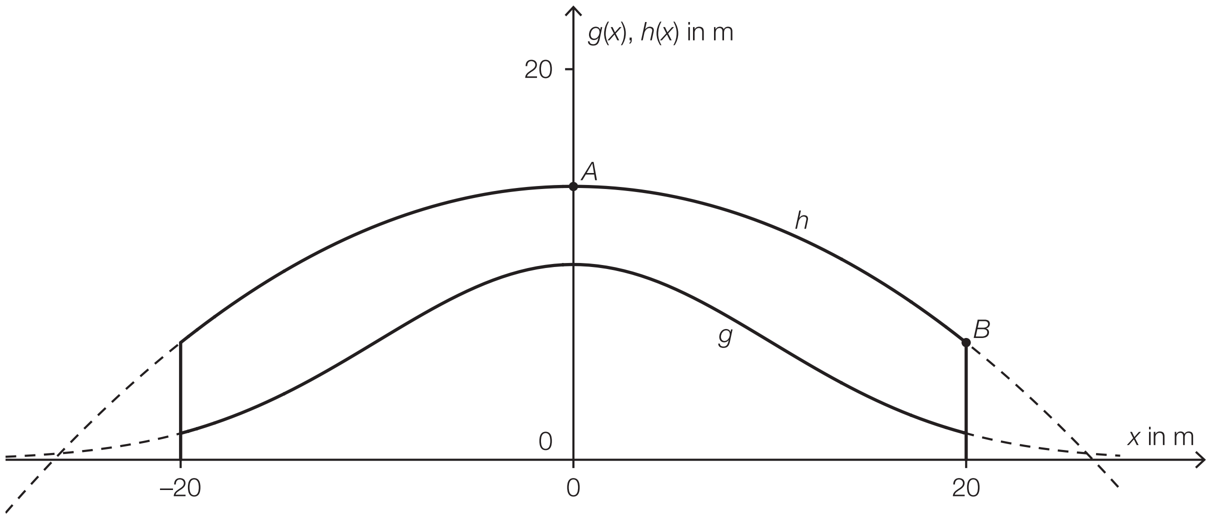
1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils die zutreffende Fortsetzung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Eine Vergrößerung des Parameters a bewirkt, ...	
Eine Vergrößerung des Parameters c bewirkt, ...	

A	... dass das Maximum der Funktion größer wird.
B	... dass der Graph nach links verschoben wird.
C	... dass der Graph nach rechts verschoben wird.
D	... dass das Maximum der Funktion kleiner wird.

c) Als Geländer einer Grünbrücke ist eine Betonmauer geplant.

Die obere und die untere Begrenzungslinie der Betonmauer (in der Seitenansicht) können im Intervall [–20; 20] näherungsweise durch den Graphen der Funktion h und den Graphen der Funktion g beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.
$\int_0^{20} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{20} g(x)\,\mathrm{d}x$

Die Funktion h ist eine Polynomfunktion 2. Grades.

Der Scheitelpunkt von h ist $A = (0|14)$. Weiters verläuft h durch den Punkt $B = (20|6)$.

2) Ermitteln Sie die Koeffizienten der Funktion h.
3) Berechnen Sie die Länge des Graphen von h im Intervall [–20; 20].

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = 10$

a2) $f(20) = 6$ *oder* $6 = 10 \cdot e^{-400 \cdot b}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$b = 0{,}001277...$

a3) $f''(x) = 0$ *oder* $-2 \cdot a \cdot b \cdot e^{-b \cdot x^2} \cdot (1 - 2 \cdot b \cdot x^2) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = -19{,}78...;$ $x_2 = 19{,}78...$

Die Steigung von f ist an der Stelle $x \approx -19{,}8$ m am größten.

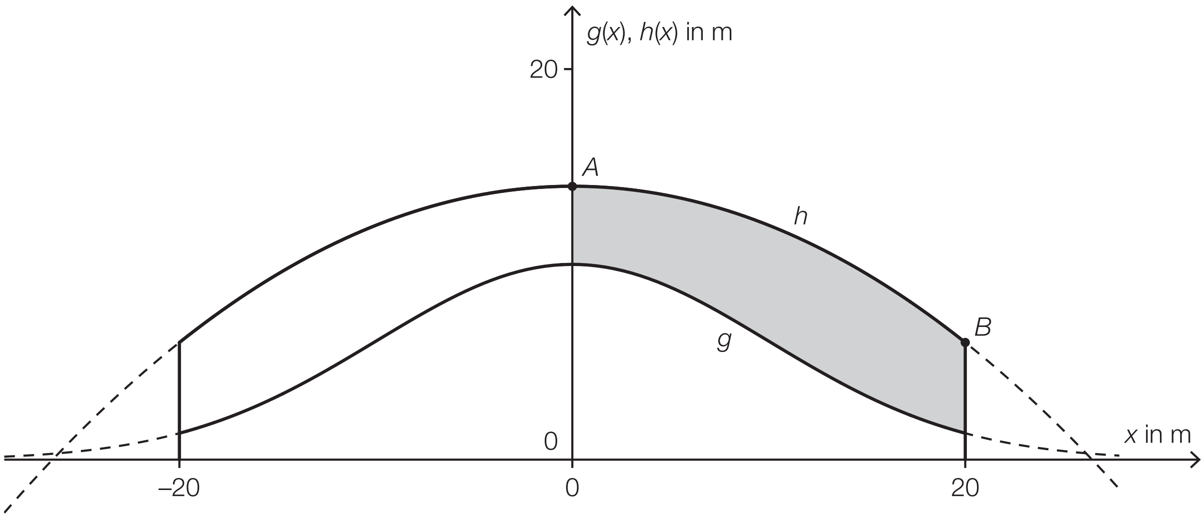
Der Punkt ist auch dann zu vergeben, wenn statt der Lösung $x_1 \approx -19{,}8$ die Lösung $x_2 \approx 19{,}8$ angegeben ist.

b1)

Eine Vergrößerung des Parameters *a* bewirkt, ...	A
Eine Vergrößerung des Parameters *c* bewirkt, ...	B

A	... dass das Maximum der Funktion größer wird.
B	... dass der Graph nach links verschoben wird.
C	... dass der Graph nach rechts verschoben wird.
D	... dass das Maximum der Funktion kleiner wird.

c1)



c2) $h(x) = a \cdot x^2 + c$

$h(0) = 14 \quad \Rightarrow \quad c = 14$

$h(20) = 6 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 400 + 14 = 6 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}02$

c3) $s = \int_{-20}^{20} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$s = 43{,}929...$

Die Länge des Graphen von h beträgt rund 43,93 m.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Angeben des Parameters a
a2) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Parameters b
a3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Stelle mit der größten Steigung
Der Punkt ist auch dann zu vergeben, wenn statt der Lösung $x_1 = -19{,}8$ die Lösung $x_2 = 19{,}8$ angegeben ist.
b1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
c1) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen
c2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten
c3) 1 × B2: für das richtige Berechnen der Länge des Graphen von h im gegebenen Intervall

Kondensator*

Aufgabennummer: B_496

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Kondensator ist ein elektronisches Bauelement, das mithilfe einer Batterie aufgeladen werden kann. Ist der Kondensator bei einem Aufladevorgang zu Beginn ungeladen, so kann der Verlauf der Kondensatorspannung durch die Funktion u beschrieben werden.

$u(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ mit $t \geq 0$

t ... Zeit in s
$u(t)$ ... Kondensatorspannung zur Zeit t in Volt (V)
U_0 ... Spannung der Batterie (konstant) in V
τ ... Zeitkonstante in s

a) Die zugehörige Differenzialgleichung für die Kondensatorspannung u lautet:

$$\tau \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = U_0$$

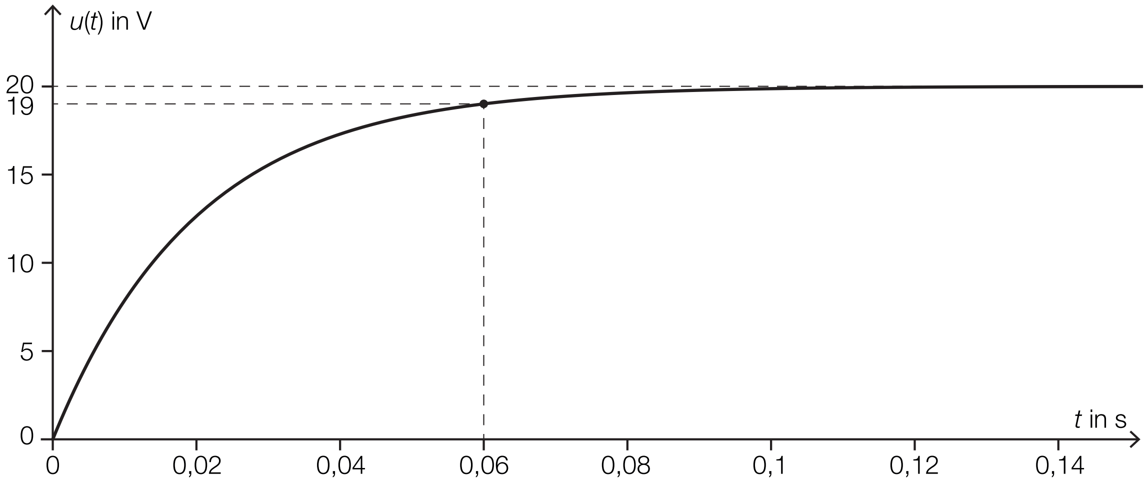
1) Berechnen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

2) Zeigen Sie, dass die Lösung der Differenzialgleichung für die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ der oben angegebenen Funktion u entspricht.

b) 1) Begründen Sie anhand der oben angegebenen Funktionsgleichung, warum die Kondensatorspannung für $t \to \infty$ asymptotisch gegen U_0 geht.

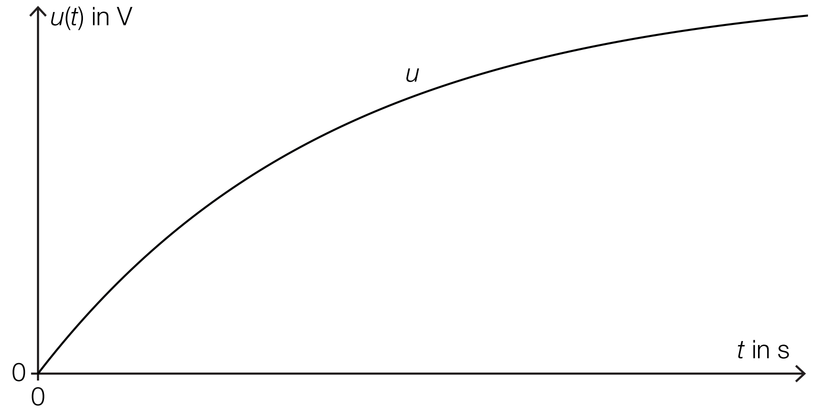
* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Verlauf der Kondensatorspannung für $U_0 = 20$ V dargestellt.



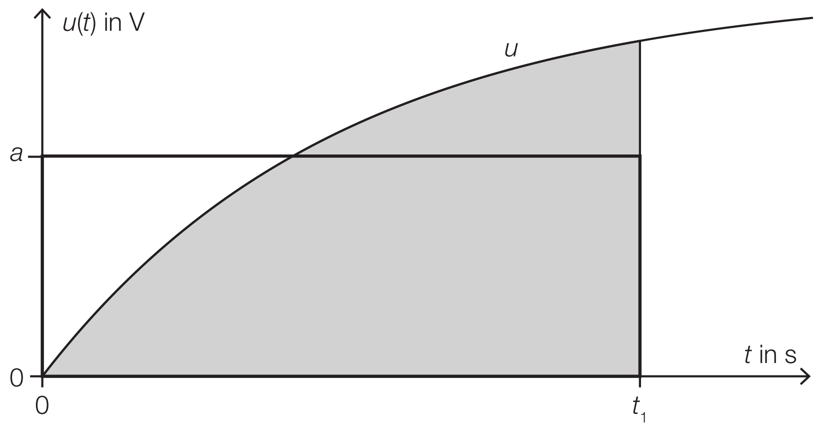
1) Berechnen Sie die Zeitkonstante τ.

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Verlauf der Kondensatorspannung bei einem Aufladevorgang dargestellt.



1) Markieren Sie diejenige Stelle, an der die 1. Ableitung von u im dargestellten Bereich den maximalen Wert annimmt.

Der Inhalt der grau markierten Fläche und der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen t_1 und a sind gleich groß (siehe nachstehende Abbildung).



2) Beschreiben Sie die Bedeutung von a im gegebenen Sachzusammenhang.

3) Erstellen Sie mithilfe der Funktion u eine Formel zur Berechnung von a.

a = ____

Möglicher Lösungsweg

a1) $\tau \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = U_0$

$\int \frac{u'}{U_0 - u} \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\tau} \mathrm{d}t \quad \left(\textit{oder:} \quad \int \frac{\mathrm{d}u}{U_0 - u} = \int \frac{1}{\tau} \mathrm{d}t\right)$

$-\ln|U_0 - u(t)| = \frac{t}{\tau} + C_1$

$U_0 - u(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

$u(t) = U_0 - C \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

a2) $u(0) = 0 \quad \textit{oder} \quad U_0 - C \cdot e^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = U_0$

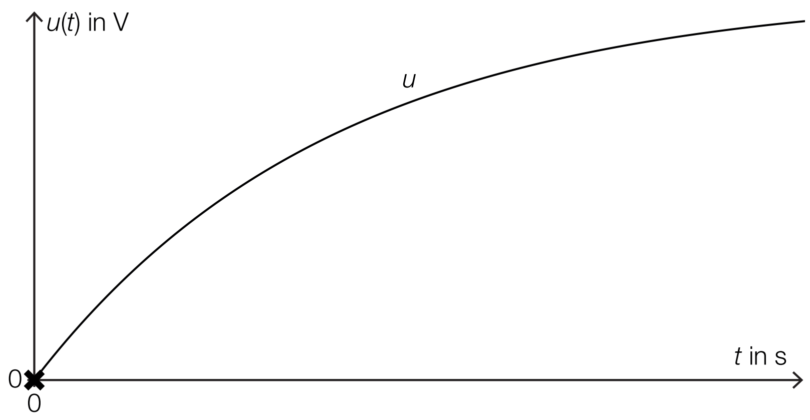
$u(t) = U_0 - U_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

b1) Mit beliebig groß werdendem t geht $e^{-\frac{t}{\tau}}$ gegen null, und damit geht $u(t)$ gegen U_0.

c1) $u(0{,}06) = 19 \quad \textit{oder} \quad 20 \cdot \left(1 - e^{-\frac{0{,}06}{\tau}}\right) = 19$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\tau = 0{,}020...$

d1)



d2) a ist die mittlere Kondensatorspannung im Zeitintervall $[0; t_1]$.

d3) $a = \frac{1}{t_1} \cdot \int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t$

Lösungsschlüssel

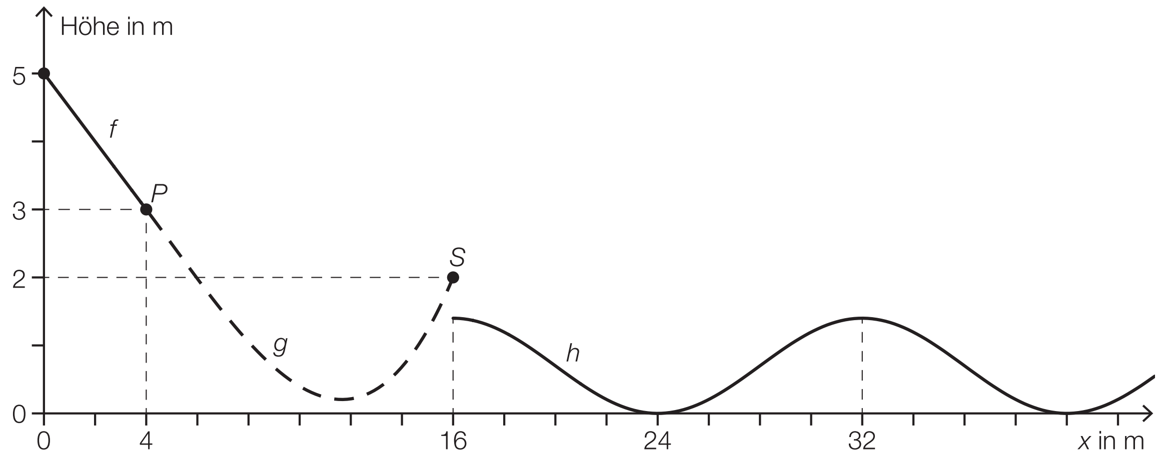
a1) 1 × B: für das richtige Berechnen der allgemeinen Lösung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*
a2) 1 × D: für das richtige Zeigen
b1) 1 × D: für das richtige Begründen
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Zeitkonstanten τ
d1) 1 × C1: für das richtige Markieren der Stelle
d2) 1 × C2: für das richtige Beschreiben der Bedeutung im gegebenen Sachzusammenhang
d3) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

BMX-Bahn*

Aufgabennummer: B_497

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für den Bau einer BMX-Bahn wird ein Plan erstellt. In der nachstehenden Abbildung ist die Profillinie einer geplanten Teilstrecke dargestellt.



a) Die Profillinie wird bis zum Punkt P näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben.
Die Profillinie zwischen den Punkten P und S wird näherungsweise durch die Polynomfunktion 3. Grades g mit $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.
Im Punkt P hat die Polynomfunktion g die gleiche Steigung wie die lineare Funktion f.
Im Punkt S beträgt ihr Steigungswinkel 42°.

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu P und S ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.

2) Übertragen Sie dieses Gleichungssystem in Matrizenschreibweise.

* ehemalige Klausuraufgabe

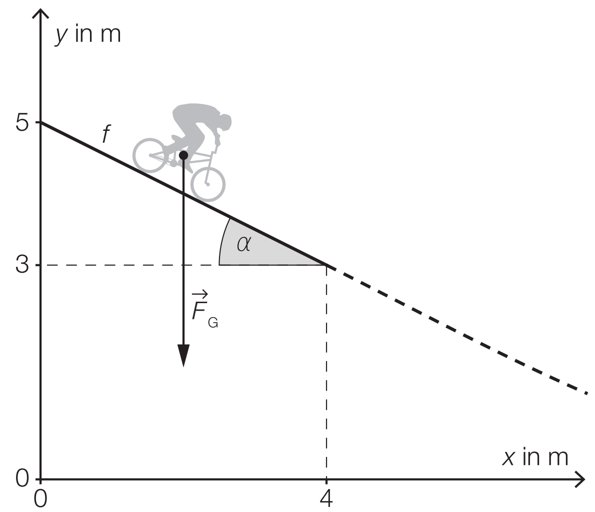
b) Ein Teil der Profillinie wird näherungsweise durch die Funktion h beschrieben:

$h(x) = 0{,}7 \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ mit $x \geq 16$

Der Graph der Funktion h berührt die x-Achse.

1) Geben Sie den Parameter d der Funktion h an.
2) Ermitteln Sie den Höhenunterschied zwischen dem Punkt S und dem Maximum von h.
3) Ermitteln Sie den Parameter b der Funktion h.

c) Im 1. Abschnitt der Teilstrecke wirkt auf einen BMX-Fahrer die Gewichtskraft $\vec{F}_G$.



1) Berechnen Sie den Winkel α.

Die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ kann in zwei Komponenten zerlegt werden:
Eine Komponente ist die Hangabtriebskraft $\vec{F}_H$. Diese ist parallel zur Geraden f.
Die andere Komponente ist die Normalkraft $\vec{F}_N$. Diese ist normal zur Geraden f.

2) Veranschaulichen Sie in der oberen Abbildung die Zerlegung der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in die Komponenten $\vec{F}_H$ und $\vec{F}_N$.
3) Berechnen Sie $|\vec{F}_H|$ für $|\vec{F}_G| = 900$ Newton.

Möglicher Lösungsweg

a1) $g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $g(4) = 3$
II: $g(16) = 2$
III: $g'(4) = -0{,}5$
IV: $g'(16) = \tan(42°) = 0{,}90...$

oder:

I: $64 \cdot a + 16 \cdot b + 4 \cdot c + d = 3$
II: $4096 \cdot a + 256 \cdot b + 16 \cdot c + d = 2$
III: $48 \cdot a + 8 \cdot b + c = -0{,}5$
IV: $768 \cdot a + 32 \cdot b + c = \tan(42°) = 0{,}90...$

a2) $$\begin{pmatrix} 64 & 16 & 4 & 1 \\ 4096 & 256 & 16 & 1 \\ 48 & 8 & 1 & 0 \\ 768 & 32 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -0{,}5 \\ 0{,}90... \end{pmatrix}$$

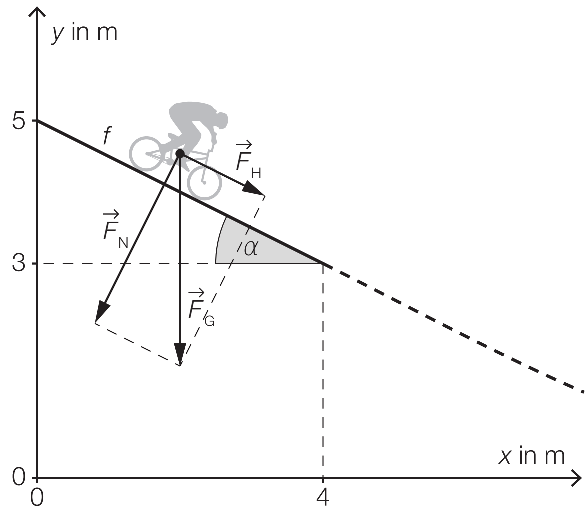
b1) $d = 0{,}7$

b2) $2 - 2 \cdot 0{,}7 = 0{,}6$
Der Höhenunterschied beträgt 0,6 m.

b3) $b = \frac{2 \cdot \pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

c1) $\alpha = \arctan(0{,}5) = 26{,}56...° \approx 26{,}6°$
Auch die Angabe von –26,6° für den Winkel α ist als richtig zu werten.

c2)



c3) $\left|\vec{F}_H\right| = 900 \cdot \sin(26{,}56...°) = 402{,}49...$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung
a2) 1 × A3: für das richtige Übertragen in Matrizenschreibweise
b1) 1 × C: für das richtige Angeben des Parameters d
b2) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Höhenunterschieds
b3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln des Parameters b
c1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Winkels α
c2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Zerlegung von $\vec{F}_G$ als Kräfteparallelogramm oder Kraftdreieck
c3) 1 × B2: für das richtige Berechnen von $\left|\vec{F}_H\right|$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Tunnelvortrieb*

Aufgabennummer: B_521

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für eine Eisenbahnstrecke wird ein Tunnel gegraben.

a) In der nebenstehenden Abbildung 1 ist ein Bagger für den Tunnelbau dargestellt.

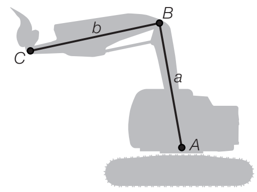


Abbildung 1

In der nachstehenden Abbildung 2 ist eine bestimmte Baggerposition dargestellt.

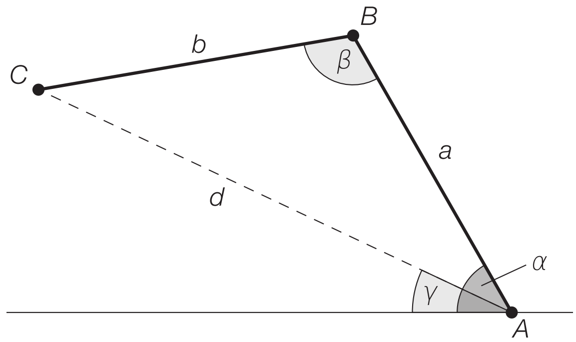


Abbildung 2

1) Veranschaulichen Sie in Abbildung 2 diejenige Länge s, die durch den nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$s = a \cdot \cos(\alpha)$

Es gilt:
$a = 4{,}65$ m
$b = 4{,}50$ m
$\beta = 110°$

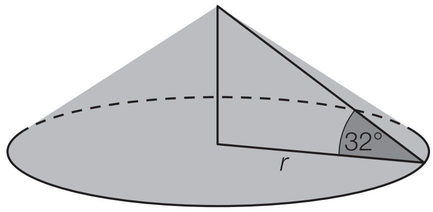
2) Berechnen Sie die Länge d.

* ehemalige Klausuraufgabe

3) Kreuzen Sie die richtige Formel zur Berechnung des Winkels γ an. *[1 aus 5]*

$\gamma = \alpha - \arccos\left(\frac{a}{d}\right)$	☐
$\gamma = \alpha - \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\beta)}{d}\right)$	☐
$\gamma = \arcsin\left(\frac{a \cdot \sin(\alpha)}{d}\right)$	☐
$\gamma = \alpha - \left(\frac{180° - \beta}{2}\right)$	☐
$\gamma = \arccos\left(\frac{b^2 + d^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot d}\right)$	☐

b) Ein Teil des anfallenden Materials wird aufgeschüttet. Der dabei entstehende Schüttkegel hat einen Neigungswinkel von 32° (siehe nachstehende Abbildungen).



Bildquelle: Anton, CC BY-SA 3.0, https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Schuettwinkelrp.jpg [06.04.2021] (adaptiert).

1) Berechnen Sie den Radius *r* eines solchen Schüttkegels mit einem Volumen von 200 m^3.

c) Beim Ausbau des Tunnels werden vorgefertigte Betonelemente eingesetzt. Die Breite dieser Betonelemente ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5$ m und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}005$ m.

Zur Qualitätssicherung werden Zufallsstichproben mit dem Stichprobenumfang $n = 10$ entnommen und die Stichprobenmittelwerte der Breiten ermittelt.

1) Geben Sie den Erwartungswert $\mu_{\bar{x}}$ und die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ für die Verteilung dieser Stichprobenmittelwerte an.

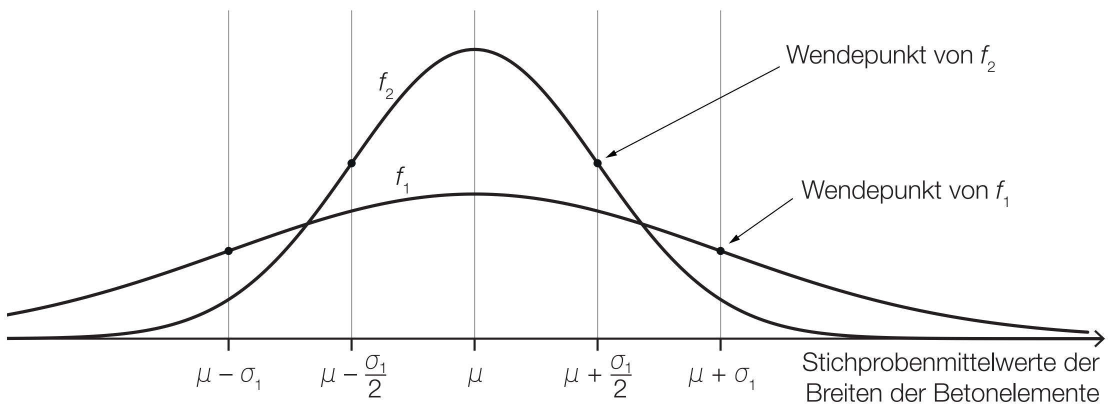
$\mu_{\bar{x}}$ = ______________________ m

$\sigma_{\bar{x}}$ = ______________________ m

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Stichprobenmittelwerte zwischen 4,996 m und 5,004 m liegen.

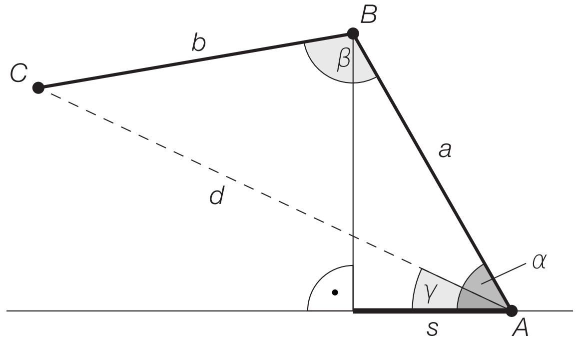
f_1 ist die Dichtefunktion für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte mit dem Stichprobenumfang $n_1 = 6$.
f_2 ist die Dichtefunktion für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte mit dem Stichprobenumfang n_2.

3) Ermitteln Sie mithilfe der nachstehenden Abbildung den Stichprobenumfang n_2.



Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\beta)}$

$d = 7{,}495\ldots\text{ m}$

a3)

$\gamma = \alpha - \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\beta)}{d}\right)$	☒

b1) $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$\tan(32°) = \frac{h}{r} \quad \Rightarrow \quad h = r \cdot \tan(32°)$

$200 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r \cdot \tan(32°)$

$r = 6{,}73\ldots\text{ m}$

c1) $\mu_{\bar{x}} = 5$ m

$\sigma_{\bar{x}} = \frac{0{,}005}{\sqrt{10}}$ m $= 0{,}00158...$ m

c2) $\overline{X}$ ... Stichprobenmittelwerte der Breite für $n = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(4{,}996 \leq \overline{X} \leq 5{,}004) = 0{,}9885...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 98,9 %.

c3) $\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2} \quad \Rightarrow \quad n_2 = 4 \cdot 6 = 24$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Länge s.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge d.
a3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Radius r.
c1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Erwartungswerts und der richtigen Standardabweichung.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
c3) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von n_2.

Attersee*

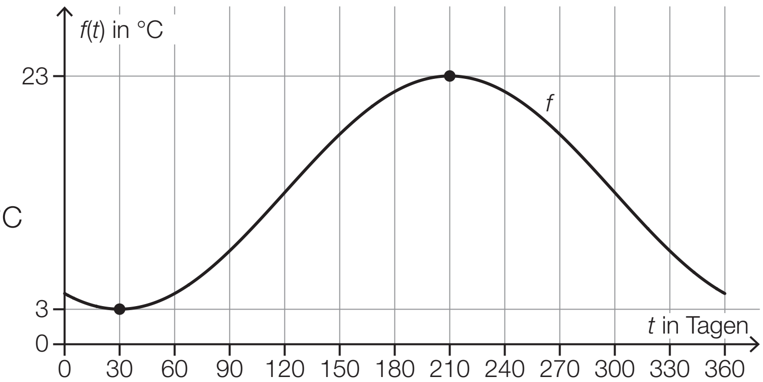
Aufgabennummer: B_524

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der zeitliche Verlauf der Temperatur des Attersees kann modellhaft durch die Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

$$f(t) = a \cdot \sin\left(b \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) + c \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 360$$

t ... Zeit in Tagen
$f(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
a, b, c ... Parameter



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter b.

2) Ordnen Sie den beiden Größen jeweils den zutreffenden Zahlenwert aus A bis D zu.

Amplitude von f	
linearer Mittelwert (Integralmittelwert) von f im Intervall [30; 210]	

A	10
B	12
C	13
D	23

Zur Zeit $t = 120$ betrug die tatsächlich gemessene Temperatur 12 °C.

3) Geben Sie den Betrag des absoluten Fehlers an, der entsteht, wenn man statt der tatsächlich gemessenen Temperatur den Funktionswert an der Stelle $t = 120$ verwendet.

* ehemalige Klausuraufgabe

Zur Überprüfung der Qualität der Modellfunktion f werden 1 000 Messwerte y_i der Temperatur zu verschiedenen Zeiten t_i erhoben.

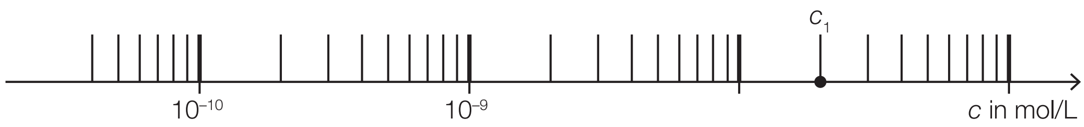
Für jeden dieser Messpunkte $(t_i \mid y_i)$ wird die Differenz des Messwerts y_i zum Funktionswert $f(t_i)$ ermittelt. Diese Differenzen werden jeweils quadriert und danach aufsummiert. Die so erhaltene Summe wird mit s bezeichnet.

4) Vervollständigen Sie die nachstehende Formel zur Berechnung von s.

$$s = \sum_{i=1}^{1\,000} \boxed{}$$

b) Der pH-Wert von Wasser wird mithilfe der Konzentration c der Wasserstoffionen berechnet.

Auf der nachstehenden logarithmischen Skala ist die Konzentration c_1 einer Wasserprobe aus dem Attersee eingetragen.



1) Lesen Sie den Wert von c_1 ab.

c_1 = ______________________ mol/L

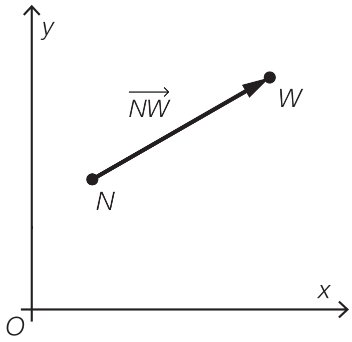
Für den Zusammenhang zwischen der Konzentration c und dem pH-Wert gilt: pH = $-\lg(c)$.

Eine andere Wasserprobe wird untersucht. Das Messgerät zeigt dabei einen pH-Wert von 8,0 an. Aufgrund der Messungenauigkeit muss der tatsächliche pH-Wert der Wasserprobe zwischen 7,9 und 8,1 liegen. Die Konzentration, die einem pH-Wert von 8,0 entspricht, wird mit c_2 bezeichnet.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Konzentration der Wasserprobe höchstens unter bzw. über der Konzentration c_2 liegt.

c) Die beiden Orte Nußdorf und Weyregg liegen auf einander gegenüberliegenden Ufern des Attersees.

Die Schiffsanlegestellen Nußdorf (N) und Weyregg (W) sind im nachstehenden Koordinatensystem dargestellt.



Die Entfernung zwischen den Punkten N und W beträgt 3,5 km.
Die Gerade durch die Punkte N und W hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Ermitteln Sie den Vektor $\overrightarrow{NW}$.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{T}{2} = 180 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2 \cdot \pi}{360} = \frac{\pi}{180}$

a2)

Amplitude von f	A
linearer Mittelwert (Integralmittelwert) von f im Intervall [30; 210]	C

A	10
B	12
C	13
D	23

a3) $|f(120) - 12| = 13 - 12 = 1$

Der Betrag des absoluten Fehlers beträgt 1 °C.

a4) $s = \sum_{i=1}^{1000} (y_i - f(t_i))^2 \quad \textit{oder} \quad \sum_{i=1}^{1000} (f(t_i) - y_i)^2$

b1) $c_1 = 2 \cdot 10^{-8}$ mol/L

b2) $\frac{10^{-8,1} - 10^{-8}}{10^{-8}} = -0{,}205...$

$\frac{10^{-7,9} - 10^{-8}}{10^{-8}} = 0{,}258...$

Die Konzentration c_2 wird höchstens um rund 21 % unter- bzw. um rund 26 % überschritten.

c1) $\overrightarrow{NW} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 3{,}5 = \begin{pmatrix} 2{,}8 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$ (Längen in km)

Lösungsschlüssel

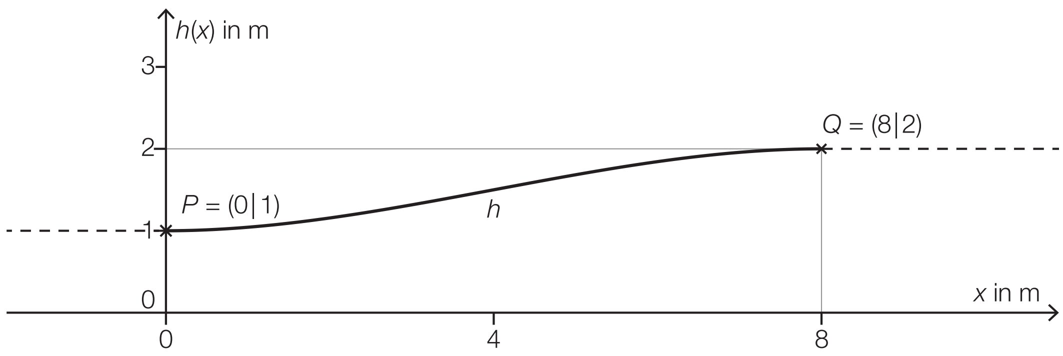
a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters b.
a2) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
a3) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.
a4) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Formel.
b1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Wertes von c_1.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der beiden Prozentsätze.
c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Vektors $\overrightarrow{NW}$.

Förderband*

Aufgabennummer: B_525

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein neues Förderband wird geplant (siehe unten stehende Abbildung). Es soll bis zum Punkt P horizontal verlaufen, dann einen Höhenunterschied von 1 m überwinden und ab dem Punkt Q wieder horizontal verlaufen. Im Intervall $0 \leq x \leq 8$ soll der Verlauf des Förderbands mithilfe einer Funktion h beschrieben werden.



Für die Modellierung der Funktion h werden verschiedene Varianten überlegt. Der Graph der Funktion h soll durch die Punkte P und Q verlaufen und dort jeweils eine waagrechte Tangente haben.

a) Im Modell A wird der Verlauf des Förderbands im Intervall $0 \leq x \leq 8$ durch die Polynomfunktion 3. Grades h mit $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von h.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

b) Im Modell B wird der Verlauf des Förderbands im Intervall $0 \leq x \leq 8$ durch die Funktion h mit $h(x) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) + d$ beschrieben.

1) Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a und d an.

$a =$ ____________________

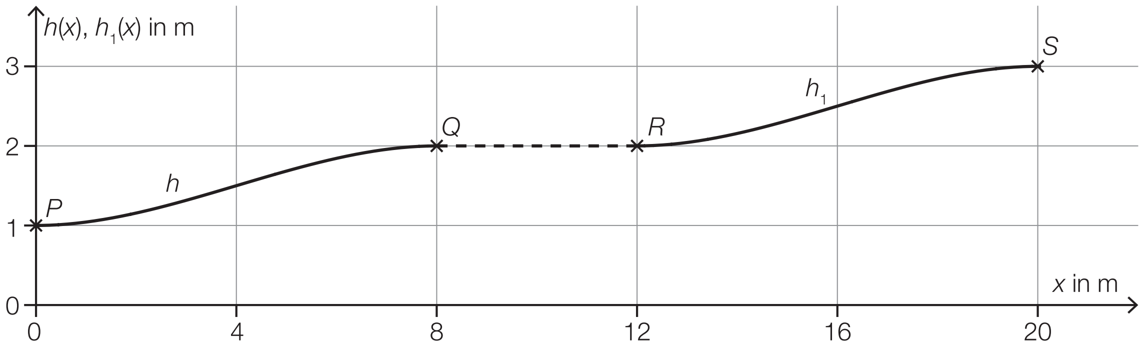
$d =$ ____________________

* ehemalige Klausuraufgabe

Das Förderband soll an keiner Stelle eine Steigung von mehr als 20 % haben.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Vorgabe im Modell B eingehalten wird.

c) Nach dem Punkt Q verläuft das Förderband 4 m horizontal bis zum Punkt R. Vom Punkt R bis zum Punkt S wird der Verlauf des Förderbands durch die Funktion h_1 beschrieben. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Der Graph der Funktion h_1 entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion h.

1) Kreuzen Sie die richtige Funktionsgleichung von h_1 an. *[1 aus 5]*

$h_1(x) = h(x - 12) - 1$	☐
$h_1(x) = h(x - 4) - 1$	☐
$h_1(x) = h(x + 4) + 1$	☐
$h_1(x) = h(x + 12) + 1$	☐
$h_1(x) = h(x - 12) + 1$	☐

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge L des Förderbands vom Punkt P bis zum Punkt S auf.

$L =$ ____________________

Möglicher Lösungsweg

a1) $h'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $h(0) = 1$
II: $h(8) = 2$
III: $h'(0) = 0$
IV: $h'(8) = 0$

oder:

I: $d = 1$
II: $512 \cdot a + 64 \cdot b + 8 \cdot c + d = 2$
III: $c = 0$
IV: $192 \cdot a + 16 \cdot b + c = 0$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{256} = -0{,}00390...$

$b = \frac{3}{64} = 0{,}0468...$

$c = 0$

$d = 1$

b1) $a = -0{,}5$
$d = 1{,}5$

b2) $h(x) = -0{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) + 1{,}5$

$h'(x) = \frac{\pi}{16} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} \cdot x\right) \leq \frac{\pi}{16} < 0{,}2$

oder:

Die größte Steigung liegt an der Wendestelle bei $x = 4$.

$h'(4) = \frac{\pi}{16} < 0{,}2$

Die Vorgabe wird also eingehalten.

c1)

$h_1(x) = h(x - 12) + 1$	☒

c2) $L = 4 + 2 \cdot \int_0^8 \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx$

oder:

$L = 4 + \int_0^8 \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx + \int_{12}^{20} \sqrt{1 + (h_1'(x))^2}\,dx$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen mithilfe der 1. Ableitungen.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten.
b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters *a*.
Ein Punkt für das Angeben des richtigen Parameters *d*.
b2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Körpermaße (2)

a) In einer Schule werden die Oberarmlängen von Mädchen und Burschen einer bestimmten Altersgruppe erhoben.

Die Daten einer Stichprobe von 6 Mädchen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Oberarmlänge in cm	35,8	36,9	37,6	37,8	36,0	37,0

1) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} für die Oberarmlänge der Mädchen dieser Stichprobe. *[0/1 P.]*

Die Oberarmlänge von Burschen dieser Altersgruppe kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Aus einer Stichprobe von 9 Burschen werden für die Oberarmlänge der Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 34{,}7$ cm und die Stichprobenstandardabweichung $s_{n-1} = 0{,}4$ cm ermittelt.

2) Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert der Oberarmlänge von Burschen dieser Altersgruppe. *[0/1 P.]*

b) Von 9 zufällig ausgewählten Mädchen einer anderen Altersgruppe wurden die Oberarmlänge und die Körpergröße gemessen:

Körpergröße in cm	165	164	166	159	163	170	158	168	172
Oberarmlänge in cm	34,5	34,7	34,6	34,0	34,5	35,0	33,8	34,9	34,9

Die Oberarmlänge soll in Abhängigkeit von der Körpergröße näherungsweise durch die lineare Funktion g beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion g auf. *[0/1 P.]*

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Funktion g ein geeignetes Modell zur Beschreibung dieser Abhängigkeit ist. *[0/1 P.]*

3) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der linearen Funktion g im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

c) Der Median des Körperfettanteils von Burschen ist altersabhängig (siehe nachstehende Tabelle).

Alter in Jahren	10	12	14	16
Median des Körperfettanteils in Prozent	18,9	17,8	14,1	15,7

Der Median des Körperfettanteils kann in Abhängigkeit vom Alter *t* durch die Polynomfunktion 3. Grades *f* mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ modelliert werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von *f*. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten. *[0/1 P.]*

Eine Polynomfunktion 3. Grades *h* mit $h(x) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + d_1$ hat 2 lokale Extremstellen.

3) Geben Sie an, welches Vorzeichen die Diskriminante der Gleichung $h'(x) = 0$ haben muss. Begründen Sie Ihre Entscheidung. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 36{,}85$ cm
$s_{n-1} = 0{,}814...$ cm

a2) zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich mithilfe der t-Verteilung bestimmen:

$\bar{x} \pm t_{f;\,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}$
$n = 9 \quad \Rightarrow \quad f = 8$
$t_{8;\,0{,}975} = 2{,}306...$
Daraus ergibt sich folgender Vertrauensbereich für μ in cm: $34{,}39... \leq \mu \leq 35{,}00...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Stichprobenmittelwerts und der Stichprobenstandardabweichung.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Vertrauensbereichs.

b1) $g(x) = 0{,}082 \cdot x + 20{,}98$ *(Koeffizienten gerundet)*

x ... Körpergröße in cm
$g(x)$ ... Oberarmlänge bei der Körpergröße x in cm

b2) Da der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}935...$ nahe bei 1 liegt, kann ein starker positiver linearer Zusammenhang zwischen der Körpergröße und der Oberarmlänge bei Mädchen dieser Altersgruppe vermutet werden.

b3) Nimmt die Körpergröße um 1 cm zu, so nimmt die Oberarmlänge gemäß diesem Modell um 0,082 cm zu.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Regressionsfunktion.
b2) Ein Punkt für das richtige Beurteilen mithilfe des Korrelationskoeffizienten.
b3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang.

c1) I: $f(10) = 18{,}9$
II: $f(12) = 17{,}8$
III: $f(14) = 14{,}1$
IV: $f(16) = 15{,}7$

oder:

I: $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d = 18{,}9$
II: $a \cdot 12^3 + b \cdot 12^2 + c \cdot 12 + d = 17{,}8$
III: $a \cdot 14^3 + b \cdot 14^2 + c \cdot 14 + d = 14{,}1$
IV: $a \cdot 16^3 + b \cdot 16^2 + c \cdot 16 + d = 15{,}7$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = \frac{79}{480} = 0{,}1645\ldots$
$b = -\frac{25}{4} = -6{,}25$
$c = \frac{1\,849}{24} = 77{,}04\ldots$
$d = -\frac{2\,911}{10} = -291{,}1$

c3) Das Vorzeichen der Diskriminante ist positiv, weil die quadratische Funktion h' zwei Nullstellen hat.

c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten.
c3) Ein Punkt für das richtige Angeben und Begründen.

Sinkgeschwindigkeit von Fässern

Über Jahre hinweg wurden Fässer mit Problemstoffen illegal im Meer versenkt.

a) Für die Sinkgeschwindigkeit v_S der Fässer im Wasser in Abhängigkeit von der Zeit t gilt annähernd:
Die momentane Änderungsrate der Sinkgeschwindigkeit ist direkt proportional zur Differenz zwischen der Endgeschwindigkeit S und der aktuellen Sinkgeschwindigkeit v_S. Der Proportionalitätsfaktor wird mit k bezeichnet.

1) Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die diesen Sachverhalt richtig beschreibt. *[1 aus 5]*
[0/1 P.]

$\frac{dv_S}{dt} = k \cdot (S - v_S)$	☐
$\frac{dv_S}{dt} = k \cdot S - v_S$	☐
$\frac{dv_S}{dt} = S - k \cdot v_S$	☐
$\frac{dv_S}{dt} = \frac{k}{S - v_S}$	☐
$\frac{dv_S}{dt} = S - \frac{k}{v_S}$	☐

b) Für bestimmte Fässer kann die Sinkgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dv}{dt} + 0{,}25 \cdot v = 2$$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung durch $v_h(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ gegeben ist.
[0/1 P.]

2) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differenzialgleichung.
[0/1 P.]

c) Von einem Schiff aus werden bestimmte Fässer über Bord geworfen. Diese sinken nach dem Eintauchen ins Wasser senkrecht nach unten. Die Sinkgeschwindigkeit dieser Fässer im Wasser lässt sich näherungsweise durch die Funktion v_1 beschreiben.

$v_1(t) = 8 - 5 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ mit $t \geq 0$

t … Zeit nach dem Eintauchen ins Wasser in s
$v_1(t)$ … Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Berechnen Sie die Sinkgeschwindigkeit der Fässer beim Eintauchen ins Wasser. *[0/1 P.]*

2) Argumentieren Sie mathematisch, dass die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ s am größten ist. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie, nach welcher Zeit ein solches Fass eine Wassertiefe von 100 m erreicht. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

$\frac{dv_S}{dt} = k \cdot (S - v_S)$	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

b1) zugehörige homogene Differenzialgleichung: $\frac{dv_h}{dt} + 0{,}25 \cdot v_h = 0$

$\frac{dv_h}{dt} = -0{,}25 \cdot v_h$

$\int \frac{dv_h}{v_h} = \int -0{,}25\,dt \quad \left(\textit{oder: } \int \frac{v_h'(t)}{v_h(t)}\,dt = \int -0{,}25\,dt\right)$

$\ln|v_h(t)| = -0{,}25 \cdot t + C_1$

$v_h(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$v(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} + 8$

oder:

Lösungsansatz zur Ermittlung der partikulären Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung:

$v_p(t) = a \quad \Rightarrow \quad v_p'(t) = 0$

$0{,}25 \cdot a = 2$

$a = 8$

$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} + 8$

b1) Ein Punkt für das richtige Zeigen mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der allgemeinen Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung.

c1) $v_1(0) = 3$

Die Sinkgeschwindigkeit der Fässer beim Eintauchen ins Wasser beträgt 3 m/s.

c2) $a_1(t) = v_1'(t) = 1{,}25 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$

Die Funktion a_1 ist streng monoton fallend, daher ist die Beschleunigung an der Stelle $t = 0$ maximal.

c3) $100 = \int_0^{t_1} v_1(t)\,\mathrm{d}t$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

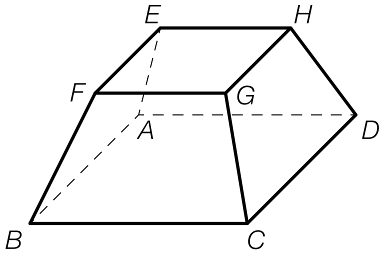
$t_1 = 14{,}94...$

Ein solches Fass erreicht nach etwa 14,9 s eine Wassertiefe von 100 m.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Sinkgeschwindigkeit.
c2) Ein Punkt für das richtige mathematische Argumentieren.
c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeit, nach der ein solches Fass eine Wassertiefe von 100 m erreicht.

Grundstücke und Gebäude

a) In der nachstehenden Abbildung ist ein Betonsockel modellhaft dargestellt.

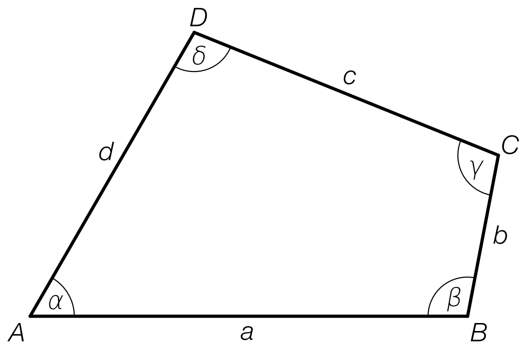


Bei der Darstellung des Modells in einem Koordinatensystem werden folgende Punkte verwendet:
$B = (12|6|2)$, $C = (2|26|2)$, $D = (-10|20|0)$,
$E = (-1{,}5|5{,}5|15{,}5)$, $F = (4{,}5|8{,}5|16{,}5)$, $G = (-0{,}5|18{,}5|16{,}5)$

Die Grundfläche *ABCD* ist rechteckig.

1) Weisen Sie nach, dass die Kante *BC* parallel zur Kante *FG* ist. *[0/1 P.]*
2) Zeigen Sie, dass das Viereck *EFGH* im Punkt *F* einen rechten Winkel hat. *[0/1 P.]*
3) Berechnen Sie denjenigen Winkel, den die Kante *BF* mit der Diagonalen *BD* einschließt. *[0/1 P.]*

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Skizze eines Baugrundstücks.

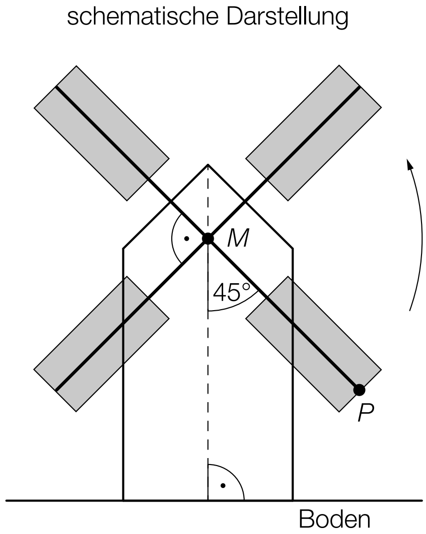


1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts *F* des skizzierten Baugrundstücks auf.

   F = ______________________________ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen *BD* für $a = 40$ m, $d = 30$ m und $\alpha = 60°$. *[0/1 P.]*

c) Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Windmühle Oppelhain in Deutschland.



Bildquelle: Edweisch – own work, public domain, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/BockwindmühleOppelhain.jpg [21.11.2018].

Der Drehpunkt M der Flügel befindet sich 13 m über dem Boden.
Die Länge eines Flügels (Strecke MP) beträgt 10,62 m.

1) Berechnen Sie die Höhe des Punktes P über dem Boden. *[0/1 P.]*

Die Flügel drehen sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn und benötigen für eine volle Umdrehung 10 s. Die obige schematische Darstellung zeigt die Flügelstellung zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Höhe des Punktes P über dem Boden kann durch eine Funktion h in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

$h(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... Höhe des Punktes P über dem Boden zur Zeit t in m

2) Geben Sie die Parameter a und c der Funktion h an.

a = ____________________

c = ____________________ *[0/1 P.]*

3) Geben Sie die Parameter ω und φ der Funktion h an.

ω = ____________________

φ = ____________________ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{FG}$ Die beiden Kanten sind daher parallel.

a2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot (-5) + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 0 = 0$

Das Viereck *EFGH* hat daher im Punkt *F* einen rechten Winkel.

a3) $\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} -7{,}5 \\ 2{,}5 \\ 14{,}5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -22 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BD}}{\left|\overrightarrow{BF}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right|}\right) = 66{,}67...°$

a1) Ein Punkt für das richtige Nachweisen der Parallelität.
a2) Ein Punkt für das richtige Zeigen, dass im Punkt *F* ein rechter Winkel vorliegt.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels.

b1) $F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\beta) + \frac{1}{2} \cdot c \cdot d \cdot \sin(\delta)$

oder:

$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\gamma)$

b2) $\overline{BD} = \sqrt{a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos(\alpha)} = \sqrt{40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos(60°)} = 36{,}0...$

Die Länge der Diagonalen *BD* beträgt rund 36 m.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge der Diagonalen *BD*.

c1) $\cos(45°) = \frac{13 - h_P}{10{,}62}$

$h_P = 5{,}49...\text{ m}$

Der Punkt *P* befindet sich rund 5,5 m über dem Boden.

c2) $a = 10{,}62$

$c = 13$

c3) $\omega = \frac{\pi}{5}$

$\varphi = -\frac{\pi}{4}$ *oder* $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe des Punktes *P* über dem Boden.
c2) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Parameter *a* und *c*.
c3) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Parameter ω und φ.

Federung von Mountainbikes


Bildquelle: BMBWF

a) Bei hochwertigen Federgabeln (siehe nebenstehendes Foto) wird eine mit Luft gefüllte Kammer zur Federung verwendet. Der erforderliche Druck (in der Einheit psi) hängt von der Masse des Fahrers (in kg) ab (siehe nachstehende Tabelle).

Masse des Fahrers in kg	55	70	80	90	100
erforderlicher Druck in psi	115	165	200	230	265

Der erforderliche Druck soll in Abhängigkeit von der Masse des Fahrers näherungsweise durch die lineare Funktion p beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion p auf. *[0/1 P.]*

Ein bestimmter Fahrer hat eine Masse von 82 kg.

Er berechnet einen Wert für den erforderlichen Druck durch lineare Interpolation mit den Werten der obigen Tabelle bei 80 kg und 90 kg.
Den so erhaltenen Wert vergleicht er mit demjenigen Wert, der sich bei Verwendung der linearen Funktion p ergibt.

2) Ermitteln Sie die Differenz dieser beiden Werte. *[0/1 P.]*

b) Eine wichtige Kenngröße einer Feder ist die sogenannte *Federkonstante*.

Bei der Herstellung einer bestimmten Feder wird angenommen, dass die Federkonstante annähernd normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt $\mu = 80$ Newton pro cm (N/cm), die Standardabweichung beträgt $\sigma = 3$ N/cm.

In der Qualitätskontrolle werden Stichproben vom Umfang $n = 8$ untersucht.

1) Berechnen Sie denjenigen zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 99 % aller Stichprobenmittelwerte liegen. *[0/1 P.]*

Eine Stichprobe vom Umfang $n = 8$ ergab die folgenden Messwerte (in N/cm):

69,77   82,12   80,67   78,72   75,28   75,51   75,66   79,13

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob das arithmetische Mittel dieser Stichprobe im oben berechneten Zufallsstreubereich enthalten ist. *[0/1 P.]*

c) Ein Labor untersuchte die Federgabel eines Vorderrads. Dabei wurde die Federkraft in Abhängigkeit von der Längenänderung (Stauchung) der Feder gemessen und modellhaft durch die Funktion F beschrieben. Die Funktion F und die zugehörige 1. Ableitungsfunktion f sind in den unten stehenden Abbildungen dargestellt.

x ... Längenänderung der Feder in mm
$F(x)$ ... Federkraft in Abhängigkeit von x in Newton (N)
$f(x)$ ... 1. Ableitung von F in Abhängigkeit von x in N/mm

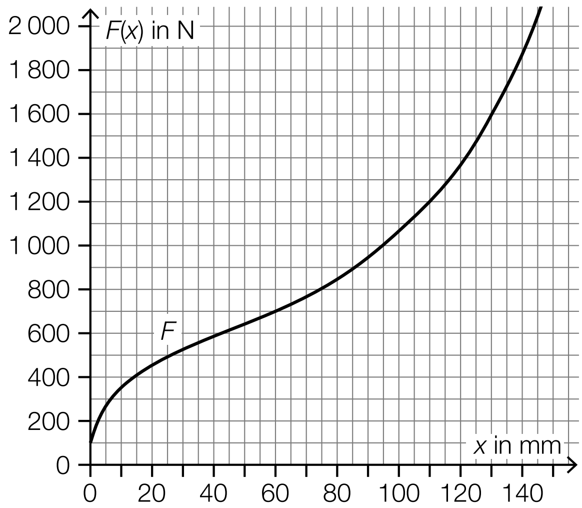


Abbildung 1

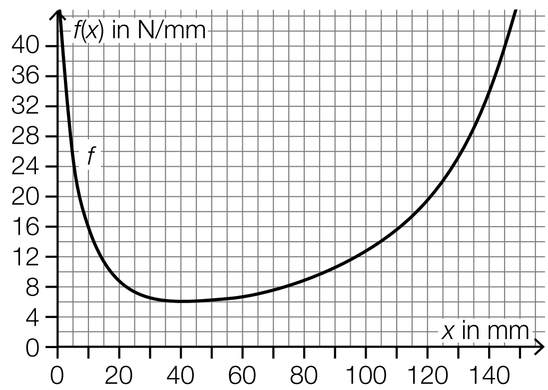


Abbildung 2

1) Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1 die mittlere Änderungsrate von F im Intervall [60 mm; 95 mm]. Geben Sie das Ergebnis mit der zugehörigen Einheit an. *[0/1 P.]*

2) Lesen Sie aus der Abbildung 1 das Ergebnis des nachstehenden Ausdrucks ab.

$\int_{110}^{130} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ____________________ N *[0/1 P.]*

Der Graph der linearen Funktion t mit $t(x) = 16 \cdot x + d$ ist an der Stelle x_1 mit $0 \leq x_1 \leq 40$ Tangente an den Graphen der Funktion F.

3) Lesen Sie aus der Abbildung 2 die Stelle x_1 ab.

$x_1 =$ ____________________ mm *[0/1 P.]*

4) Ordnen Sie auf Basis von Abbildung 2 den beiden Stellen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

$x = 40$	
$x = 20$	

A	$f(x) = 0$
B	$f(x) < 0$
C	$f'(x) < 0$
D	$f'(x) = 0$

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$p(m) = 3{,}32 \cdot m - 67{,}3$ *(Koeffizienten gerundet)*

m ... Masse des Fahrers in kg
$p(m)$ ... Druck bei der Masse m in psi

a2) $p(82) = 204{,}959...$

Berechnung des Wertes durch lineare Interpolation:

$200 + 2 \cdot 3 = 206$

$206 - 204{,}959... = 1{,}040...$

Diese beiden Werte unterscheiden sich um rund 1,04 psi.

Auch eine Angabe der Differenz als „–1,04 psi" *ist als richtig zu werten.*

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion p.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Differenz.

b1) $\mu = 80$ N/cm

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{8}}$ N/cm

Berechnung des 99-%-Zufallsstreubereichs mittels Technologieeinsatz:

$[77{,}267...; 82{,}732...]$ (in N/cm)

b2) Berechnung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ dieser Stichprobe mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 77{,}1075$ N/cm

Das arithmetische Mittel dieser Stichprobe ist nicht im oben berechneten Zufallsstreubereich enthalten.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Zufallsstreubereichs.
b2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

c1) $\frac{1\,000 - 700}{95 - 60} = 8{,}571...$
Die mittlere Änderungsrate beträgt rund 8,57 N/mm.

c2) $\int_{110}^{130} f(x)\,\mathrm{d}x = 400$ N

c3) $x_1 = 10$ mm

c4)

$x = 40$	D
$x = 20$	C

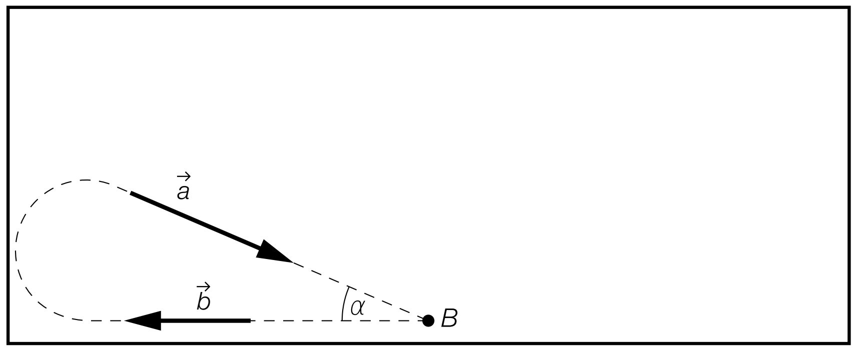
A	$f(x) = 0$
B	$f(x) < 0$
C	$f'(x) < 0$
D	$f'(x) = 0$

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der mittleren Änderungsrate unter Angabe der zugehörigen Einheit.
c2) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Wertes.
c3) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Stelle x_1.
c4) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Pferdesport

Beim Dressurreiten müssen vorgeschriebene Übungen auf dem rechteckigen Dressurplatz absolviert werden.

a) Bei der Übung *In der Ecke kehrt* muss, ausgehend vom Punkt B, die strichliert dargestellte Figur geritten werden. (Siehe nachstehende Abbildung in der Ansicht von oben.)

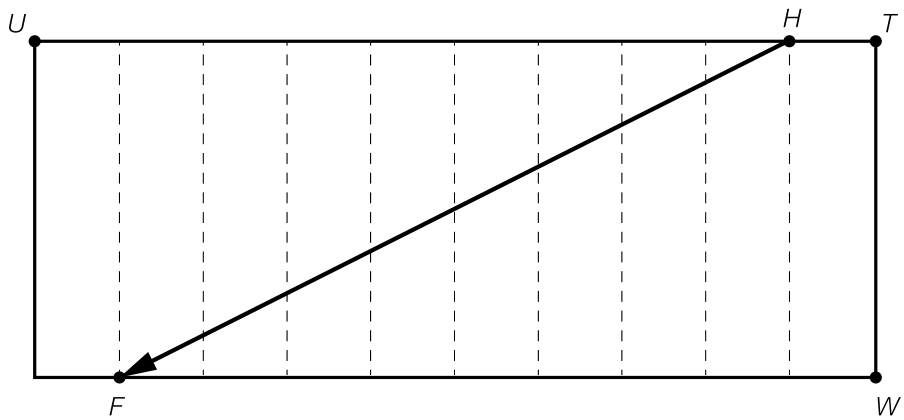


Am Beginn der Figur bewegt sich das Pferd geradlinig in Richtung des Vektors $\vec{b}$, am Ende der Figur geradlinig in Richtung des Vektors $\vec{a}$.

1) Stellen Sie mithilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

α = ____________________ *[0/1 P.]*

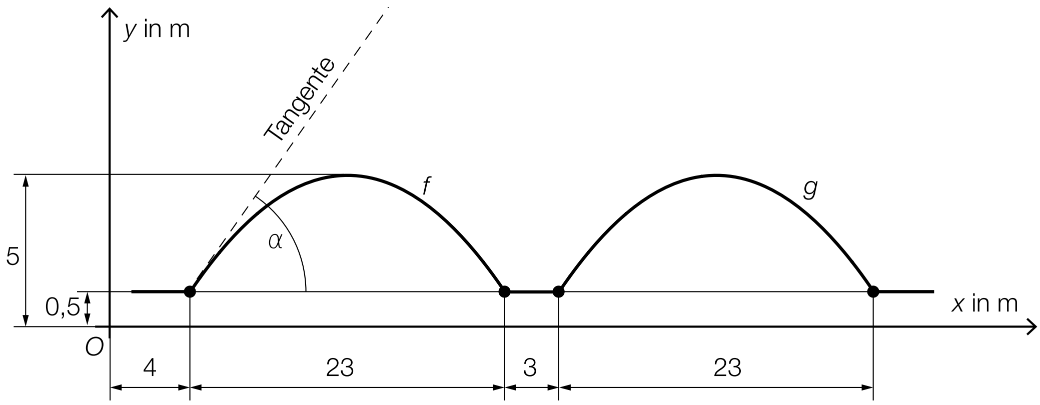
Bei der Übung *Durch die ganze Bahn wechseln* wird vom Punkt H zum Punkt F geritten. Die Strecke UT wird durch die strichliert eingezeichneten Markierungen in 10 gleich große Teile geteilt. (Siehe nachstehende Abbildung in der Ansicht von oben.)



2) Stellen Sie mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{TU}$ und $\overrightarrow{WT}$ eine Formel zur Berechnung des Vektors $\overrightarrow{HF}$ auf.

$\overrightarrow{HF}$ = ____________________ *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist der Weg des Pferdes bei der Übung *Schlangenlinie an der langen Seite* modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



Dieser Weg kann durch 3 Geradenstücke und die Graphen der quadratischen Funktionen f und g dargestellt werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion f auf. *[0/1 P.]*

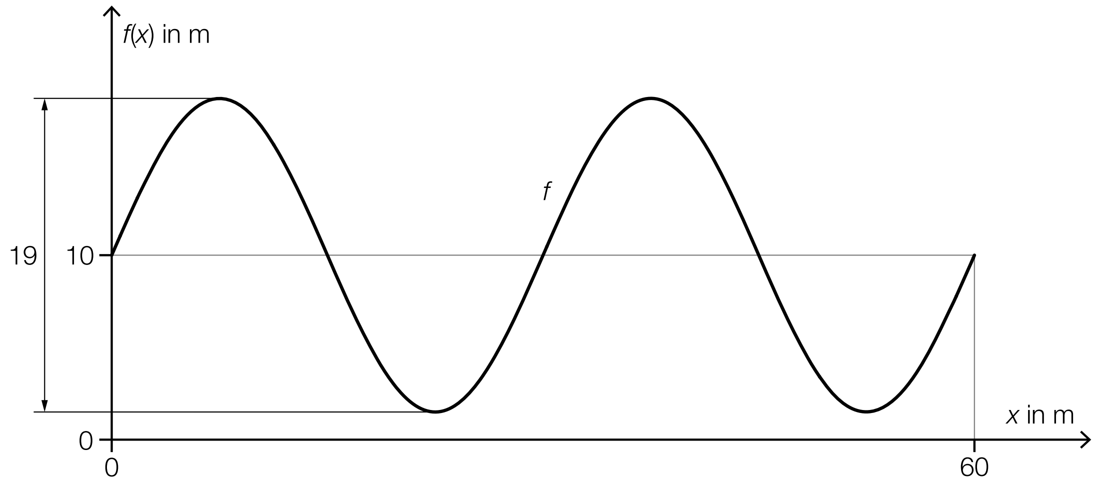
2) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung dargestellten Winkel α. *[0/1 P.]*

Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion f.

3) Kreuzen Sie die richtige Funktionsgleichung von g an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$g(x) = f(x - 30) + 5$	☐
$g(x) = f(x + 30) + 5$	☐
$g(x) = f(x - 26)$	☐
$g(x) = f(x + 26)$	☐
$g(x) = f(x + 27)$	☐

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Weg des Pferdes bei der Übung *Schlangenlinien durch die ganze Bahn* modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d \quad$ mit $\quad 0 \leq x \leq 60$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m
a, b, c, d ... Parameter
$a > 0$, $b > 0$*

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Parameter a und d ab.

$a =$ ____________________

$d =$ ____________________ *[0/1 P.]*

2) Geben Sie die Parameter b und c an.

$b =$ ____________________

$c =$ ____________________ *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den das Pferd entlang des Graphen der Funktion f zurücklegt. *[0/1 P.]*

*adaptiert am 05.05.2023

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = \arccos\left(\frac{-\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

oder:

$\alpha = 180° - \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$

a2) $\overrightarrow{HF} = \frac{8}{10} \cdot \overrightarrow{TU} - \overrightarrow{WT}$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel zur Berechnung des Winkels α.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel zur Berechnung des Vektors $\overrightarrow{HF}$.

b1) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$f(4) = 0{,}5$
$f(15{,}5) = 5$
$f(27) = 0{,}5$

oder:

$a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 0{,}5$
$a \cdot 15{,}5^2 + b \cdot 15{,}5 + c = 5$
$a \cdot 27^2 + b \cdot 27 + c = 0{,}5$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{18}{529} = -0{,}0340...$
$b = \frac{558}{529} = 1{,}0548...$
$c = -\frac{3359}{1058} = -3{,}1748...$
$f(x) = -0{,}034 \cdot x^2 + 1{,}055 \cdot x - 3{,}175$ *(Koeffizenten gerundet)*

b2) $\alpha = \arctan(f'(4)) = \arctan\left(\frac{18}{23}\right) = 38{,}047...°$

b3)

$g(x) = f(x - 26)$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der quadratischen Funktion f.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels α.
b3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) $a = 9{,}5$
$d = 10$

c2) $b = \frac{2 \cdot \pi}{30} = \frac{\pi}{15}$

$c = 0$ oder $c = 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$

c3) $f(x) = 9{,}5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{15} \cdot x\right) + 10$
$\int_0^{60} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = 100{,}33...$
Die Länge des zurückgelegten Weges beträgt rund 100,3 m.

c1) Ein Punkt für das Ablesen der richtigen Werte der Parameter *a* und *d*.
c2) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Parameter *b* und *c*.
c3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge des zurückgelegten Weges.

*adaptiert am 05.05.2023

Heizungstechnik

a) In einem bestimmten Zimmer steigt nach dem Einschalten der Heizung die Temperatur T an. Der Verlauf der Temperatur T kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dT}{dt} = a \cdot (b - T)$$

t ... Zeit nach dem Einschalten der Heizung in min
$T(t)$ ... Temperatur im Zimmer zur Zeit t in °C
a, b ... Parameter

1) Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an. *[0/1 P.]*

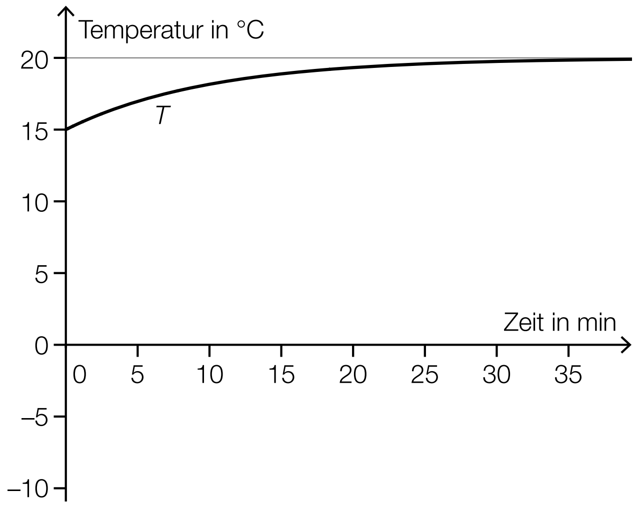
Für die allgemeine Lösung T_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung gilt:

$$T_h(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{10}}$$

C ... Konstante

2) Ermitteln Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

Eine Lösung der Differenzialgleichung $\frac{dT}{dt} = a \cdot (b - T)$ ist durch den Graphen der Funktion T in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.

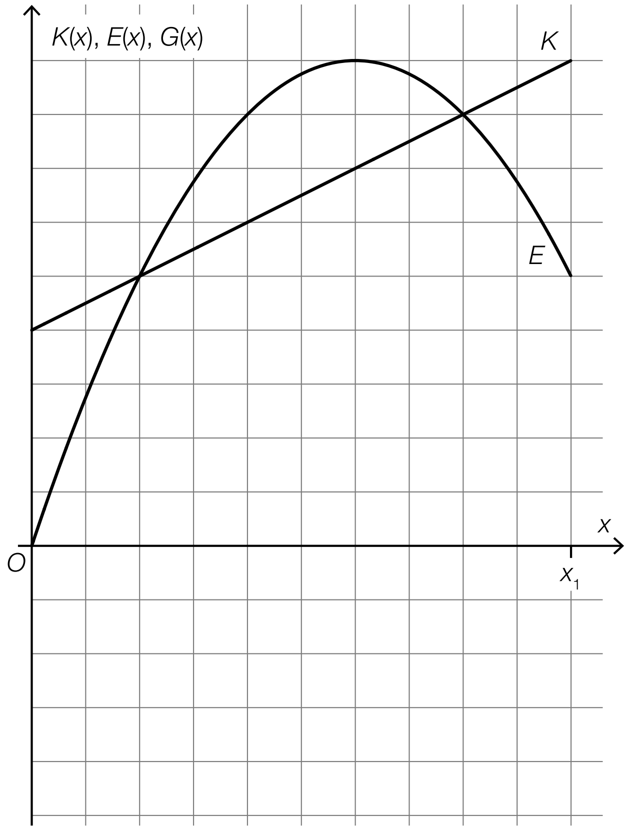


3) Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils den richtigen Wert aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

$T(0)$	
b	

A	–5
B	0
C	15
D	20

b) In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Kostenfunktion K und der Graph der Erlösfunktion E für einen bestimmten Typ von Wärmepumpen dargestellt.



$K(x) = k \cdot x + d$
$E(x) = m \cdot x - n \cdot x^2$

x ... Anzahl der Wärmepumpen mit $0 \leq x \leq x_1$
$K(x)$ ... Kosten bei der Anzahl x
$E(x)$ ... Erlös bei der Anzahl x
k, d, m, n ... positive Koeffizienten

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der zugehörigen Gewinnfunktion G im Intervall $[0; x_1]$ ein. *[0/1 P.]*

Die Gewinnfunktion G ist eine quadratische Funktion mit den Koeffizienten a, b und c.
$G(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

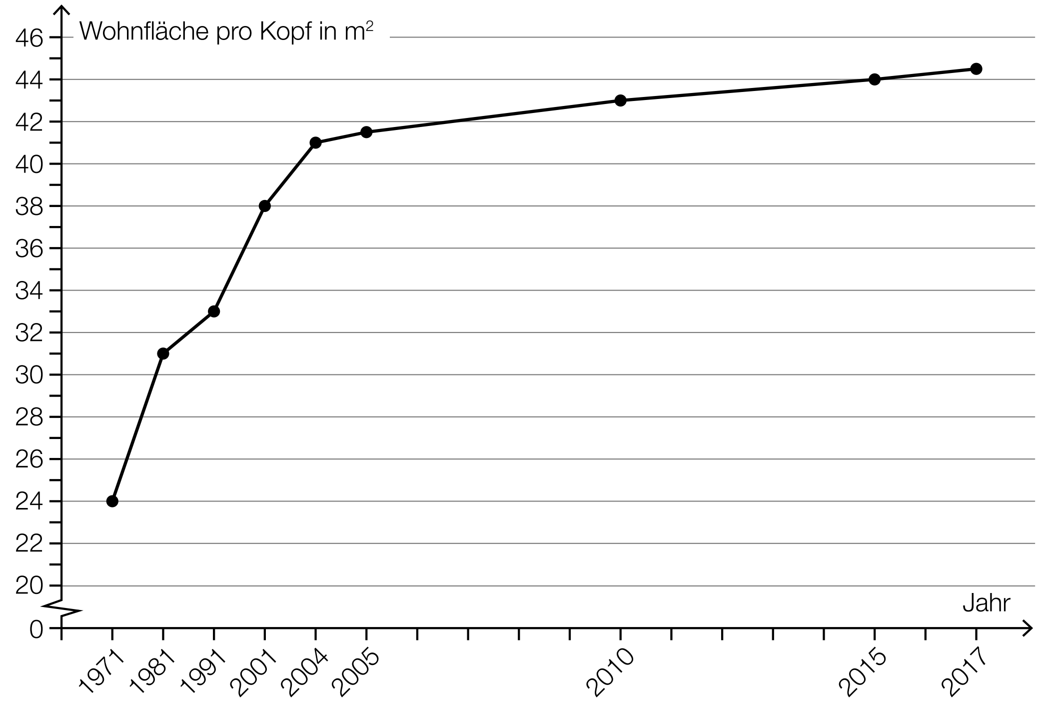
2) Geben Sie die Koeffizienten a und b der Gewinnfunktion G an. Verwenden Sie dabei k, m und n.

$a =$ ______________________

$b =$ ______________________ *[0/1 P.]*

3) Zeigen Sie, dass der Scheitelpunkt der Gewinnfunktion G an der Stelle $x_S = \frac{m - k}{2 \cdot n}$ liegt. *[0/1 P.]*

c) In einem Zeitungsartikel ist die Entwicklung der Wohnfläche pro Kopf in Österreich im Zeitraum von 1971 bis 2017 grafisch dargestellt. Die einzelnen Datenpunkte sind dabei durch Geradenstücke verbunden. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Quelle: Salzburger Nachrichten, 5. Jänner 2019 (adaptiert).

Bernhard betrachtet die Abbildung und behauptet: „Im Zeitraum von 1971 bis 1981 ist die durchschnittliche jährliche Zunahme der Wohnfläche pro Kopf größer als im Zeitraum von 2001 bis 2004."

1) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -a \cdot T$

oder:

$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + a \cdot T = 0$

a2) $-\frac{1}{10} \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{10}} = -a \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{10}}$

$a = \frac{1}{10}$

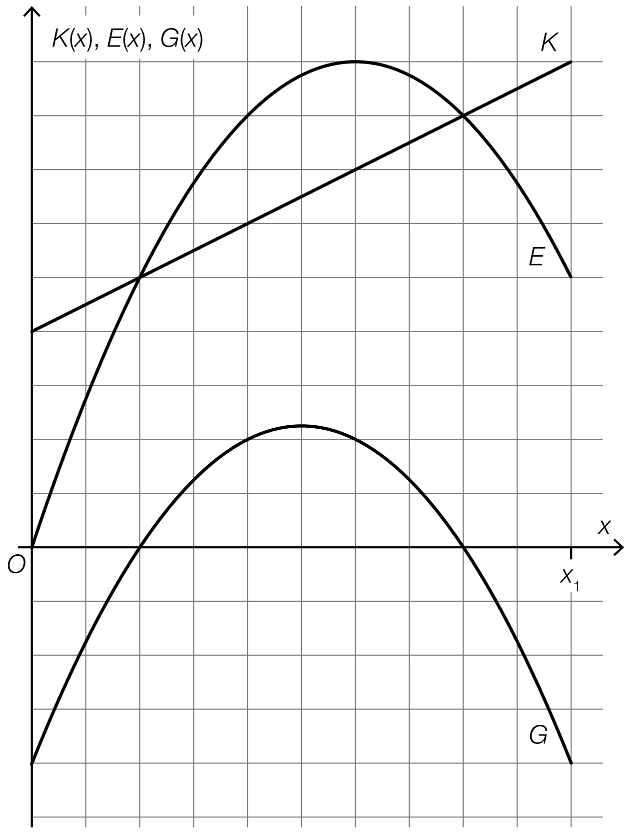
a3)

$T(0)$	C
b	D

A	–5
B	0
C	15
D	20

a1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen homogenen Differenzialgleichung.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters *a*.
a3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

b1)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist das richtige Einzeichnen des Graphen der quadratischen Funktion G an den Stellen $x = 0$ und $x = x_1$ sowie an den beiden Nullstellen relevant.

b2) $a = -n$
$b = m - k$

b3) $G'(x) = -2 \cdot n \cdot x + m - k$
$G'(x_S) = 0$ *oder* $-2 \cdot n \cdot x_S + m - k = 0$
$x_S = \frac{m - k}{2 \cdot n}$

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen im Intervall $[0; x_1]$.
b2) Ein Punkt für das richtige Angeben der Koeffizienten *a* und *b*.
b3) Ein Punkt für das richtige Zeigen.

c1) durchschnittliche jährliche Zunahme der Wohnfläche pro Kopf im Zeitraum von 1971 bis 1981: $\frac{31 - 24}{10} = \frac{7}{10}$
durchschnittliche jährliche Zunahme der Wohnfläche pro Kopf im Zeitraum von 2001 bis 2004: $\frac{41 - 38}{3} = 1$
Bernhards Behauptung ist also falsch.

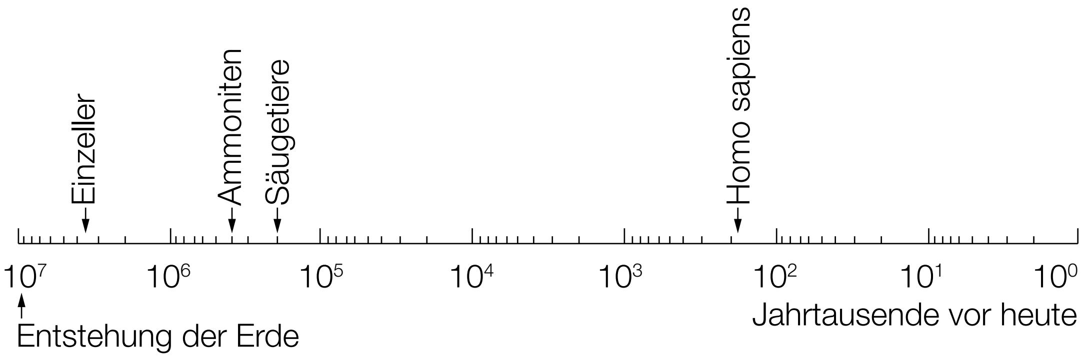
c1) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.

Urzeitlebewesen

a) Wichtige erdgeschichtliche Entwicklungen werden mit dem erstmaligen Auftreten von Tierarten festgehalten. Einige sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Ereignis	Jahrtausende vor heute
Einzeller	3,8 Millionen
Eukaryoten	1,5 Millionen
Ammoniten	400 000
Säugetiere	200 000
Homo sapiens	190

Diese Entwicklungen seit Entstehung der Erde sind auf einer logarithmisch skalierten Zeitachse dargestellt. Auf dieser Achse ist der Zeitraum von der Entstehung der Erde (vor 10^7 Jahrtausenden) dargestellt.



Man schätzt, dass die Photosynthese erstmals vor 2 400 Millionen Jahren auftrat.

1) Markieren Sie das erstmalige Auftreten der Photosynthese auf der obigen Zeitachse.

b) Der Nautilus ist ein heute noch vorkommender Nachfahre des Ammoniten. Er lebt in 300 m Wassertiefe.
Die Lichtintensität sinkt mit zunehmender Wassertiefe. Die Lichtintensität kann durch eine Funktion I beschrieben werden.

x … Wassertiefe in Metern (m)
$I(x)$ … Lichtintensität in der Tiefe x in Prozent der Lichtintensität an der Oberfläche

Die lokale Änderungsrate der Funktion I ist proportional zu I.

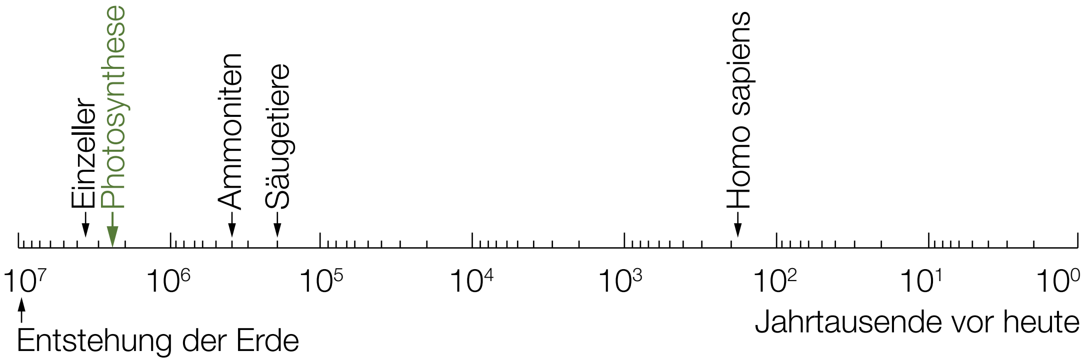
1) Stellen Sie die Differenzialgleichung für I auf. Bezeichnen Sie den Proportionalitätsfaktor mit k.
2) Lösen Sie diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

An einer bestimmten Stelle im Meer ist die Lichtintensität in 1 m Wassertiefe um 7 % geringer als an der Oberfläche.

3) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion I auf, die die Abhängigkeit der Lichtintensität von der Wassertiefe an dieser Stelle des Meeres beschreibt.
4) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Lichtintensität an der Oberfläche in 300 m Tiefe nach diesem Modell noch vorhanden sind.

Möglicher Lösungsweg

a1)



b1) $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -k \cdot I$

Auch $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = +k \cdot I$ ist als richtig zu werten.

b2) $\int \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\int k \,\mathrm{d}x$

$\ln(I) = -k \cdot x + C_1$
$I(x) = C \cdot e^{-k \cdot x}$

b3) $93 = 100 \cdot e^{-k}$
$k = 0{,}072\ldots$
$I(x) = 100 \cdot e^{-0{,}072\ldots \cdot x}$

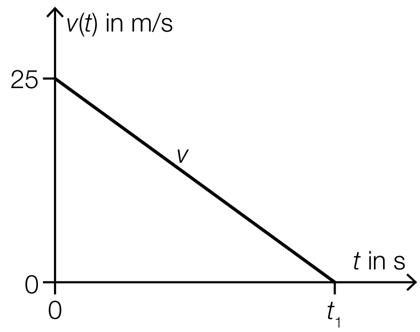
b4) $I(300) = 100 \cdot e^{-0{,}072\ldots \cdot 300}$
$I(300) = 3{,}506\ldots \cdot 10^{-8}$

Die Lichtintensität beträgt noch etwa $3{,}51 \cdot 10^{-8}$ % der Lichtintensität an der Oberfläche.

Bremsvorgänge

Der Bremsweg ist die Länge des zurückgelegten Weges vom Beginn des Bremsvorgangs bis zum Stillstand.

a) Die lineare Funktion v beschreibt für einen PKW die Geschwindigkeit bei einem Bremsvorgang in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



Der PKW kommt zur Zeit t_1 zum Stillstand.
Der Bremsweg beträgt 35 m.

1) Ermitteln Sie t_1. *[0/1 P.]*

b) Für die Berechnung des Bremswegs eines Fahrzeugs gilt modellhaft die nachstehende Formel.

$s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot a}$

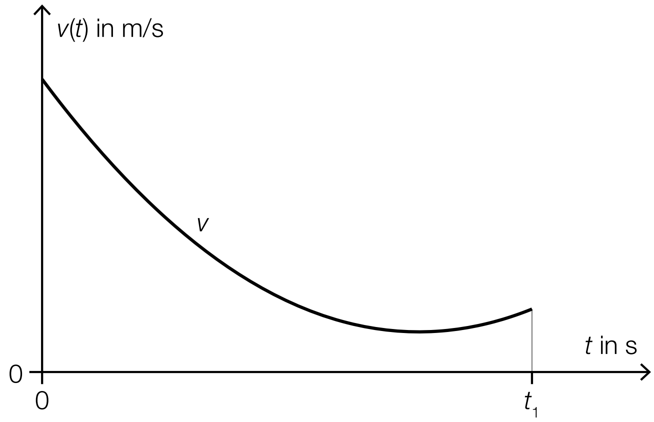
s_B ... Bremsweg bis zum Stillstand in m
v_0 ... Geschwindigkeit zu Beginn des Bremsvorgangs in m/s
a ... Bremsverzögerung in m/s^2

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils die richtige Fortsetzung aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Eine Verdoppelung von v_0 bewirkt	
Eine Halbierung von a bewirkt	

A	eine Zunahme von s_B auf mehr als das Doppelte.
B	eine Zunahme von s_B auf genau das Doppelte.
C	eine Abnahme von s_B auf genau die Hälfte.
D	eine Abnahme von s_B auf weniger als die Hälfte.

c) Die Funktion v beschreibt die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



Für den Zeitpunkt t_2 im Intervall $[0; t_1]$ gilt: $\frac{v(t_1) - v(0)}{t_1} = v'(t_2)$

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung, wie man t_2 näherungsweise grafisch ermitteln kann. *[0/1 P.]*

d) Ein Fahrzeug wird bis zum Stillstand abgebremst. Die Geschwindigkeit dieses Fahrzeugs während dieses Bremsvorgangs kann durch die Funktion v beschrieben werden.

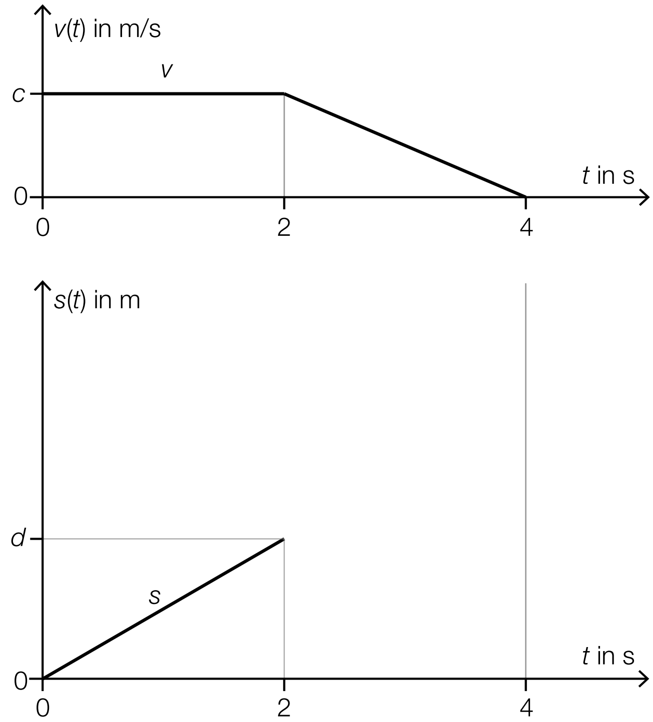
$v(t) = 30 \cdot e^{-0{,}28 \cdot t} - 2 \quad \text{mit} \quad t \geq 0$

t ... Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Bremsvorgangs
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Berechnen Sie den Bremsweg. *[0/1 P.]*

e) In der nachstehenden Abbildung sind das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm für einen bestimmten Bewegungsvorgang sowie das zugehörige Weg-Zeit-Diagramm für das Zeitintervall [0; 2] dargestellt.

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m



1) Stellen Sie mithilfe von d eine Formel zur Berechnung von c auf.

c = ____ *[0/1 P.]*

2) Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen von s im Zeitintervall [2; 4]. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{t_1 \cdot 25}{2} = 35$

$t_1 = 2{,}8$ s

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.

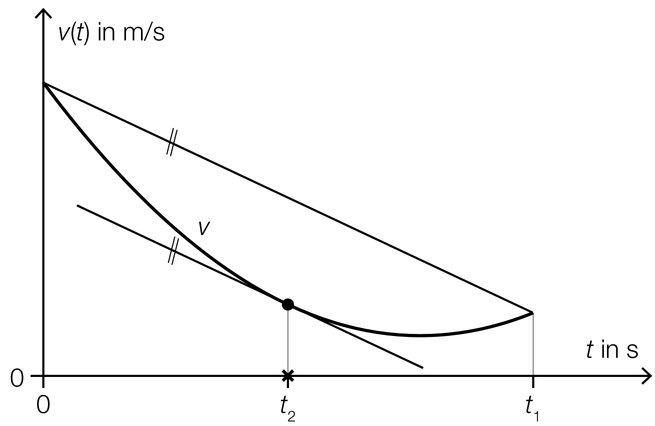
b1)

Eine Verdoppelung von v_0 bewirkt	A
Eine Halbierung von a bewirkt	B

A	eine Zunahme von s_B auf mehr als das Doppelte.
B	eine Zunahme von s_B auf genau das Doppelte.
C	eine Abnahme von s_B auf genau die Hälfte.
D	eine Abnahme von s_B auf weniger als die Hälfte.

b1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1)



c1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen.

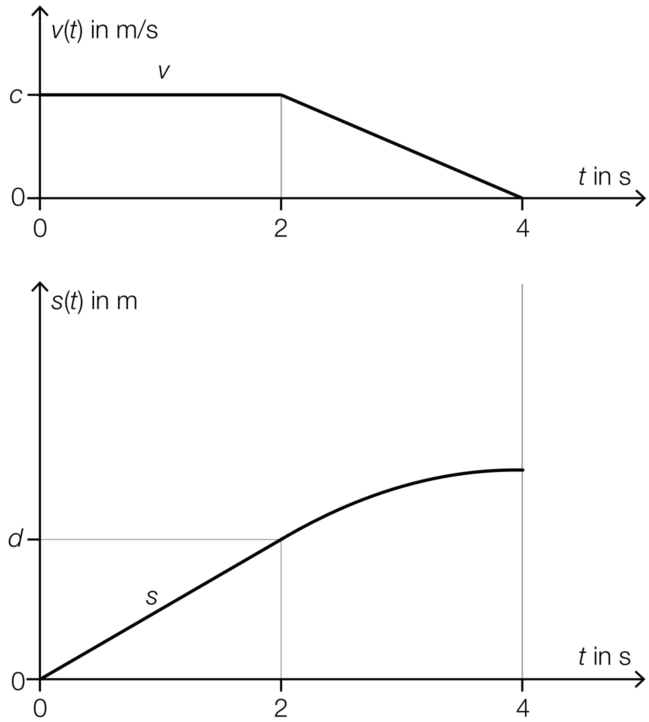
d1) $v(t) = 0$ *oder* $30 \cdot e^{-0{,}28 \cdot t} - 2 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 9{,}67...$
$\int_0^{9{,}67...} v(t)\,\mathrm{d}t = 80{,}65...$
Der Bremsweg beträgt rund 80,7 m.

d1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Bremswegs.

e1) $c = \frac{d}{2}$

e2)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es erforderlich, dass der Graph der quadratischen Funktion mit dem richtigen Krümmungsverhalten dargestellt ist und der Scheitelpunkt an der Stelle $t = 4$ ist.

e1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
e2) Ein Punkt für das richtige Skizzieren des Graphen.

Spirometrie

Die sogenannte *Spirometrie* ist ein Verfahren zur Beurteilung der Lungenfunktion anhand des ein- bzw. ausgeatmeten Luftvolumens.

Dabei wird das Luftvolumen in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion V beschrieben.

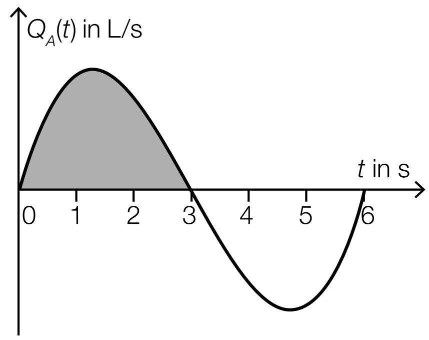
Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens wird als Durchflussrate $Q(t)$ bezeichnet, also $Q(t) = V'(t)$.

a) Im Modell A wird die Durchflussrate durch die Funktion Q_A beschrieben:

$Q_A(t) = a \cdot t \cdot (t - 3) \cdot (t - 6)$

t ... Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Einatmens
$Q_A(t)$ ... Durchflussrate zur Zeit t in L/s
a ... Parameter

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion Q_A bei einmaligem Ein- und Ausatmen dargestellt.

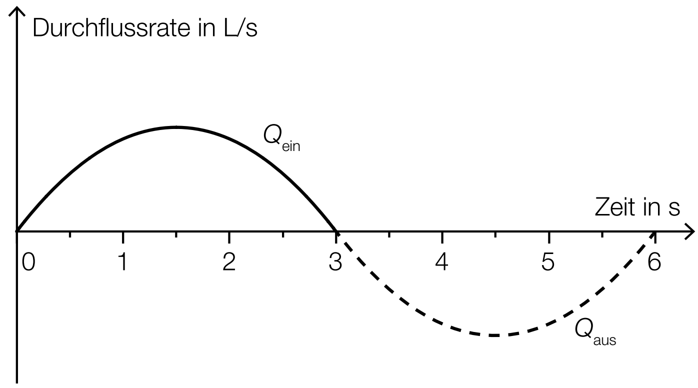


1) Interpretieren Sie den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

Es gilt: $\int_0^3 Q_A(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}5$

2) Ermitteln Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

b) Im Modell *B* wird die Durchflussrate beim Einatmen durch die quadratische Funktion Q_{ein} beschrieben. Die Durchflussrate beim Ausatmen wird durch die quadratische Funktion Q_{aus} beschrieben.



$Q_{ein}(t) = -\frac{1}{9} \cdot \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

t ... Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Einatmens
$Q_{ein}(t)$ ... Durchflussrate zur Zeit t in L/s

Der Graph der Funktion Q_{aus} entsteht dabei aus dem Graphen der Funktion Q_{ein} durch Verschiebung nach rechts und Spiegelung an der horizontalen Achse.
Dabei gilt: $Q_{ein}(3) = Q_{aus}(3)$

1) Tragen Sie die fehlenden Rechenzeichen und Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$Q_{aus}(t) = \boxed{} \cdot \left(t \boxed{} \boxed{}\right)^2 - \frac{1}{4}$ *[0/1 P.]*

c) Bei einer Spirometrie atmet man durch ein Rohr, in dem sich viele kleine Lamellen befinden. Dabei wird die Durchflussrate mit folgender Formel berechnet:

$Q = \frac{r^4}{k \cdot \ell} \cdot \Delta p$

Q ... Durchflussrate in L/s
r ... Innenradius des Rohres in dm
ℓ ... Länge des Rohres in dm
k ... Konstante
Δp ... Druckabfall zwischen Anfang und Ende des Rohres in Pascal (Pa)

1) Zeigen Sie, dass die Konstante k die Einheit Pascalsekunden (Pa · s) hat. *[0/1 P.]*

Es wird behauptet: Bei einem Rohr mit einem um 12 % kleineren Radius ist bei gleicher Durchflussrate und gleichbleibenden anderen Größen der Druckabfall um mehr als 65 % größer.

2) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung richtig ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Flächeninhalt entspricht dem (in den ersten 3 Sekunden) eingeatmeten Luftvolumen in Litern.

a2) $\int_0^3 a \cdot t \cdot (t - 3) \cdot (t - 6)\,dt = 0{,}5$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = \frac{2}{81} = 0{,}0246...$

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe der zugehörigen Einheit.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters a.

b1) $Q_{\text{aus}}(t) = \frac{1}{9} \cdot \left(t - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

b1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen und Rechenzeichen.

c1) $k = \frac{r^4}{Q \cdot \ell} \cdot \Delta p$

Einheit der Konstanten k:
$$\frac{\text{dm}^4}{\frac{\text{L}}{\text{s}} \cdot \text{dm}} \cdot \text{Pa} = \frac{\text{dm}^4}{\frac{\text{dm}^3}{\text{s}} \cdot \text{dm}} \cdot \text{Pa} = \frac{\text{dm}^4 \cdot \text{s}}{\text{dm}^4} \cdot \text{Pa} = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

c2) $\frac{(0{,}88 \cdot r)^4}{k \cdot \ell} \cdot \Delta p_{\text{neu}} = \frac{r^4}{k \cdot \ell} \cdot \Delta p$

$0{,}88^4 \cdot \Delta p_{\text{neu}} = \Delta p$

$\Delta p_{\text{neu}} = \frac{\Delta p}{0{,}88^4} = \Delta p \cdot 1{,}667...$

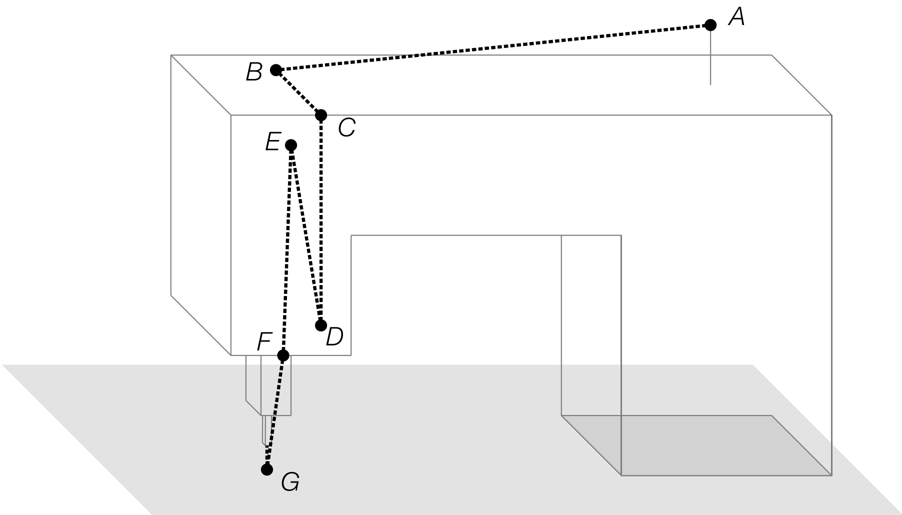
Der Druckabfall wird um rund 67 % größer, also ist die Behauptung richtig.

Der geforderte Nachweis kann auch mit konkreten Zahlen erfolgen.

c1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
c2) Ein Punkt für das richtige Nachweisen.

Nähmaschine

a) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft eine Nähmaschine. Die gepunktete Linie stellt den Verlauf des Fadens von der Spule im Punkt A bis zur Nadel im Punkt G dar.



Es gilt:
$A = (-4|35|25)$, $B = (x_B|y_B|20)$, $D = (1|3|10)$, $E = (2|1|18)$, $F = (1|0|8)$
(Alle Koordinaten sind in Zentimetern angegeben.)

Der Faden läuft vom Punkt A entlang der Geraden g mit $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \\ 5 \end{pmatrix}$ zum Punkt B.

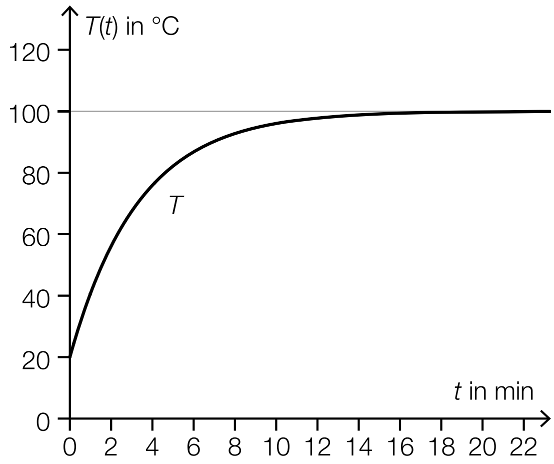
1) Ermitteln Sie die fehlenden Koordinaten des Punktes B. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung geometrisch.
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ *[0/1 P.]*

Der Faden läuft geradlinig vom Punkt D zum Punkt E und geradlinig weiter zum Punkt F.

3) Berechnen Sie die Länge des Fadens vom Punkt D bis zum Punkt F. *[0/1 P.]*

b) Während des Nähens erwärmt sich die Nadel. Die zeitliche Entwicklung der Temperatur der Nadel kann durch die Funktion T modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).



$T(t) = a - b \cdot e^{-k \cdot t}$

t ... Zeit in min
$T(t)$ ... Temperatur der Nadel zur Zeit t in °C
a, b, k ... positive Parameter

1) Geben Sie die Parameter a und b an.

a = ____________________

b = ____________________ *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie diejenige Differenzialgleichung an, deren Lösung die oben angegebene Funktion T ist. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

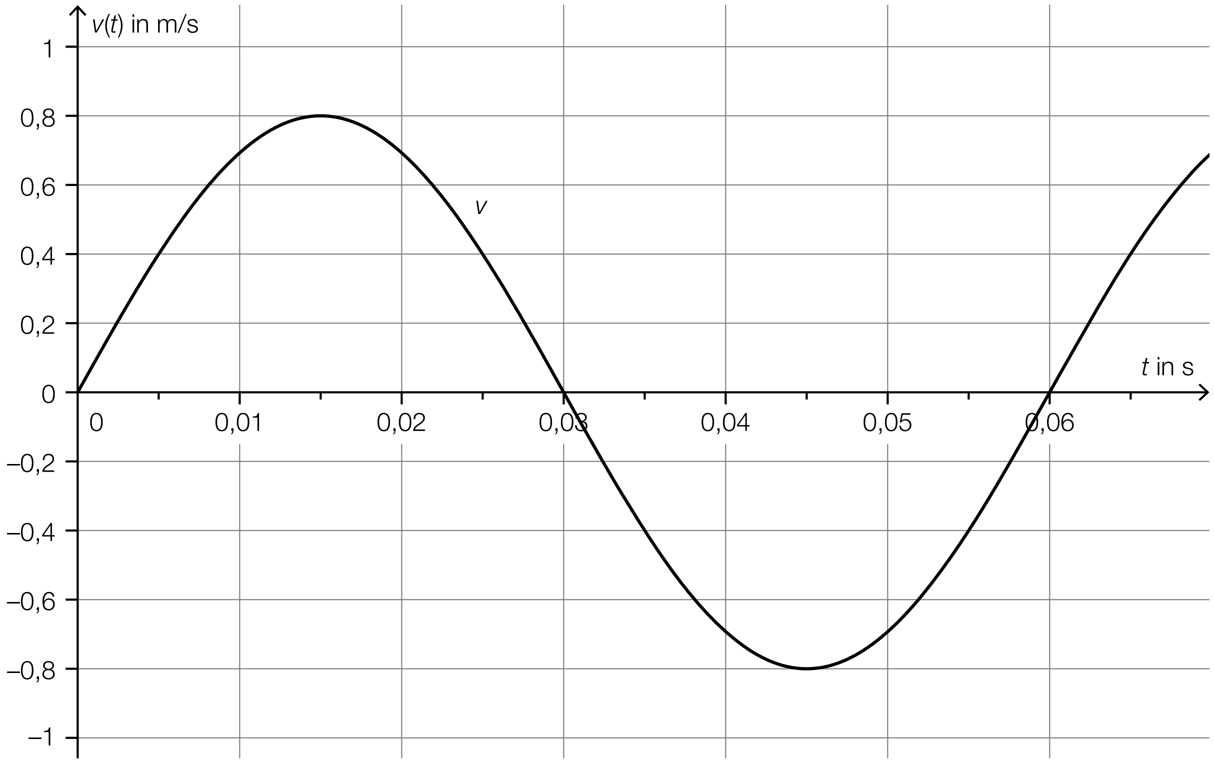
$\frac{dT}{dt} = k$	☐
$\frac{dT}{dt} = k \cdot T$	☐
$\frac{dT}{dt} = k \cdot T - 100$	☐
$\frac{dT}{dt} = k \cdot (100 - T)$	☐
$\frac{dT}{dt} = k \cdot 100$	☐

c) Die Geschwindigkeit der Nadelspitze bei einem bestimmten Nähvorgang kann in Abhängigkeit von der Zeit t modellhaft durch die Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s
A, ω ... positive Parameter

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion v dargestellt.



1) Geben Sie die Parameter A und ω an.

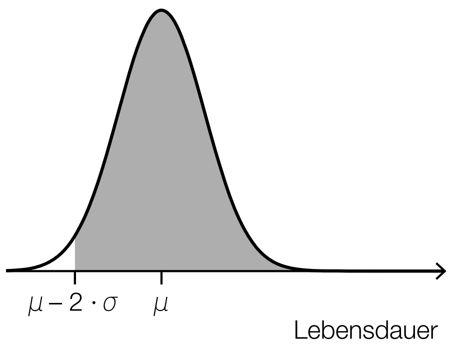
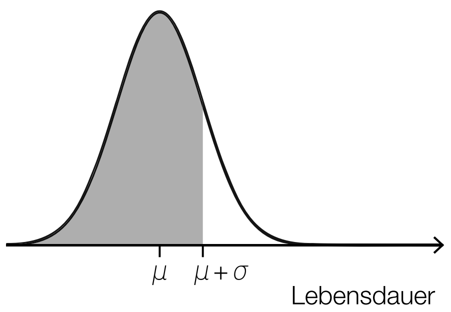
A = ______________________

ω = ______________________ [0/1 P.]

d) Die Lebensdauer eines bestimmten Nähnadeltyps ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ.

In den unten stehenden Abbildungen ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.

1) Ordnen Sie den grau markierten Flächen jeweils die entsprechende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

A	0,68...
B	0,84...
C	0,95...
D	0,97...

Möglicher Lösungsweg

a1) Gleichung der z-Koordinate: $20 = 25 + \lambda \cdot 5$
$\lambda = -1$

$x_B = -4 - 2 = -6$; $y_B = 35 - 32 = 3$
$B = (-6|3|20)$

a2) Die beiden Vektoren stehen normal aufeinander.

a3) $\left|\overrightarrow{DE}\right| + \left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix}\right| = 18{,}40...$

Die Länge des Fadens vom Punkt D bis zum Punkt F beträgt rund 18,4 cm.

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der fehlenden Koordinaten des Punktes B.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge.

b1) $a = 100$
$b = 80$

b2)

$\frac{dT}{dt} = k \cdot (100 - T)$	☒

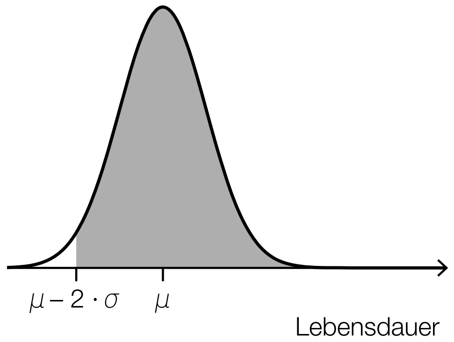
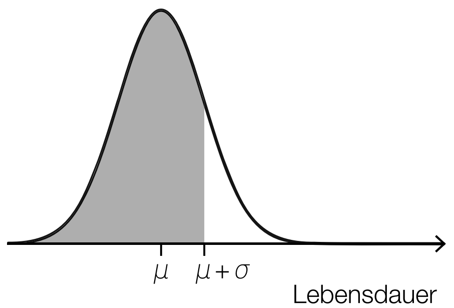
b1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Parameter a und b.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) $A = 0{,}8$

$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{0{,}06} = 104{,}7...$

c1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Parameter A und ω.

d1)

	D
	B

A	0,68...
B	0,84...
C	0,95...
D	0,97...

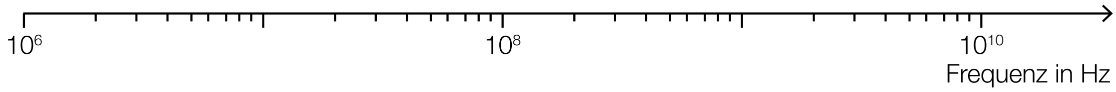
d1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Smartphones und Mobilfunk

a) UMTS-Mobilfunk basiert auf elektromagnetischen Wellen mit Frequenzen von etwa 2 000 Megahertz (MHz).

1) Markieren Sie in der nachstehenden logarithmischen Skala die Frequenz 2 000 MHz.

[0/1 P.]



b) Absorbiert ein Körper elektromagnetische Strahlung, so führt dies durch Energieaufnahme zur Erwärmung des Körpers.

Dabei ist der SAR-Wert (spezifische Absorptionsrate) in Watt pro Kilogramm (W/kg) eine wichtige Kenngröße.

Der SAR-Wert eines bestimmten Smartphone-Modells kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Eine Stichprobe ergab die folgenden Messwerte:

SAR-Wert in W/kg	0,970	0,971	0,968	0,970	0,965	0,973	0,971	0,966

1) Ermitteln Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} dieser Messwerte.

[0/1 P.]

2) Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert der SAR-Werte.

[0/1 P.]

c) Smartphones geben elektromagnetische Strahlung ab. Die elektrische Feldstärke F ist Maß für die Stärke dieser Strahlung. Es gilt:

$F(r) = \frac{k}{r^2}$

r ... Entfernung vom Smartphone in m
$F(r)$ ... Feldstärke in der Entfernung r in Volt pro Meter (V/m)
k ... positive Konstante

Stellt man den Graphen der Funktion F in einem Koordinatensystem dar, so sieht er je nach Skalierung der Achsen unterschiedlich aus.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

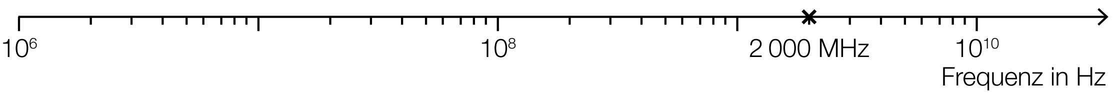
Der Graph der Funktion F erscheint in einem ___①___ Koordinatensystem als ___②___ Gerade.

①	
abszissenlogarithmischen	☐
ordinatenlogarithmischen	☐
doppeltlogarithmischen	☐

②	
fallende	☐
steigende	☐
waagrechte	☐

Möglicher Lösungsweg

a1)



a1) Ein Punkt für das richtige Markieren der Frequenz 2 000 MHz.

b1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 0{,}969...$
$s_{n-1} = 0{,}00271...$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$\mu_{\text{unten}} = \bar{x} - t_{7;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{8}} = 0{,}9669...$$

$$\mu_{\text{oben}} = \bar{x} + t_{7;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{8}} = 0{,}9715...$$

$t_{7;0{,}975} = 2{,}3646...$

zweiseitiger 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert: [0,9669...; 0,9715...]

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von $\bar{x}$ und s_{n-1}.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Vertrauensbereichs.

c1)

①	
doppeltlogarithmischen	☒

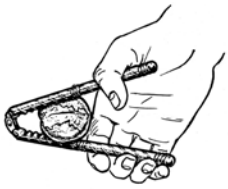
②	
fallende	☒

c1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Walnüsse

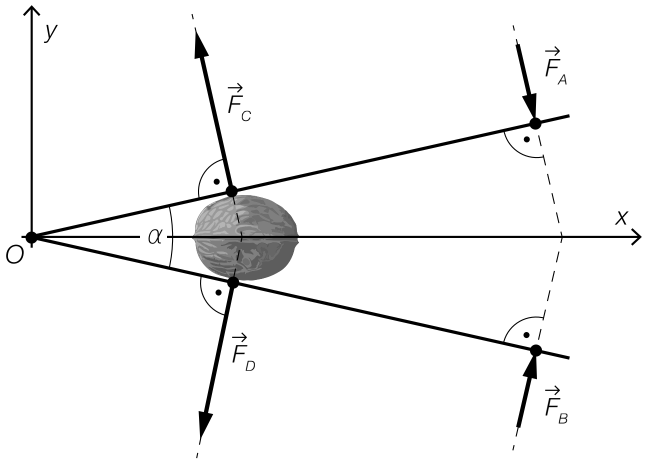
a) Nussknacker sind Werkzeuge zum Öffnen von Nüssen (siehe Abbildung 1). Ein Nussknacker ist in Abbildung 2 modellhaft dargestellt.

Abbildung 1



Bildquelle: Pearson Scott Foresman, public domain, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=80563725 [18.10.2021].

Abbildung 2



1) Stellen Sie mithilfe der Vektoren $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf.

$\alpha =$ ____________________________________ *[0/1 P.]*

Für die Kraft $\vec{F}_A$ (in Newton) gilt: $\vec{F}_A = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \end{pmatrix}$

Der Einheitsvektor von $\vec{F}_A$ wird mit $\vec{e}_A$ bezeichnet.

2) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

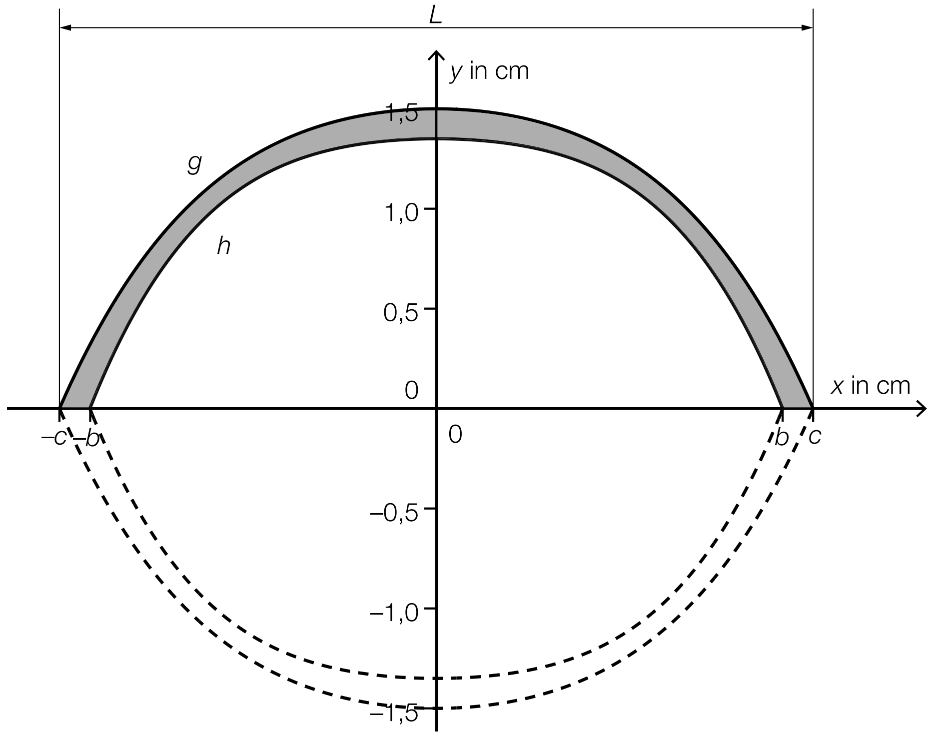
$\vec{e}_A = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

Für die Kraft $\vec{F}_C$ gilt: $|\vec{F}_C| = 65$ N

3) Tragen Sie die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$ *[0/1 P.]*

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer Walnuss modellhaft dargestellt. Die Schale der Walnuss entsteht durch Rotation der grau markierten Fläche um die x-Achse.



$g(x) = -0{,}034 \cdot x^4 - 0{,}19 \cdot x^2 + 1{,}5$
$h(x) = -0{,}057 \cdot x^4 - 0{,}14 \cdot x^2 + a$

x, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in cm
a ... Parameter

1) Zeigen Sie, dass die Länge L dieser Walnuss mehr als 4 cm beträgt. *[0/1 P.]*

An der Stelle $x = 0$ beträgt die Dicke der Walnussschale 1,7 mm.

2) Geben Sie den Parameter a der Funktion h an.

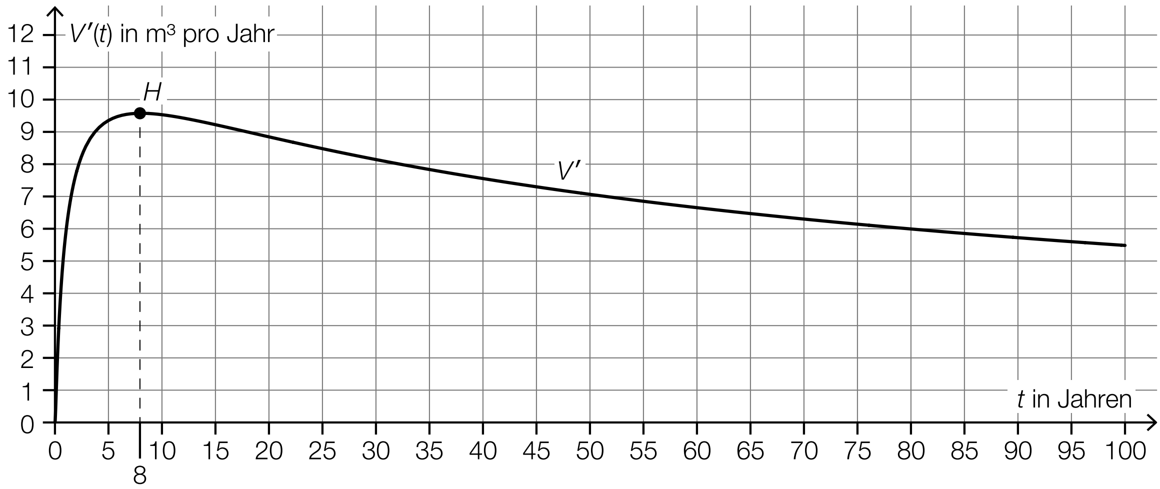
a = ____________________ cm *[0/1 P.]*

3) Ordnen Sie den beiden Volumen jeweils die zutreffende Formel aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Innenvolumen der Walnuss (ohne Schale)	
Volumen der Walnuss-schale	

A	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} g(x)^2\,dx - \pi \cdot \int_{-b}^{b} h(x)^2\,dx$
B	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} (g(x) - h(x))^2\,dx$
C	$2 \cdot \pi \cdot \int_{0}^{b} h(x)^2\,dx$
D	$\pi \cdot \int_{-b}^{b} (g(x)^2 - h(x)^2)\,dx$

c) In einer Studie wurde die zeitliche Entwicklung des Holzvolumens einer bestimmten Walnussplantage ermittelt.
In der nachstehenden Abbildung ist die momentane Änderungsrate des Holzvolumens als Graph der Funktion V' mit dem Hochpunkt H dargestellt.



t ... Zeit ab Beginn der Studie in Jahren
$V'(t)$ ... momentane Änderungsrate des Holzvolumens zur Zeit t in m^3 pro Jahr

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage über die zugehörige Stammfunktion V für das Zeitintervall [0; 100] an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

V hat bei $t = 8$ einen Hochpunkt.	☐
V ist monoton fallend.	☐
V hat an der Stelle $t = 8$ die kleinste Steigung.	☐
V ist monoton steigend.	☐
V ist an der Stelle $t = 8$ negativ gekrümmt.	☐

2) Ermitteln Sie näherungsweise den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von V' und der Zeitachse im Zeitintervall [50; 80].

Flächeninhalt: ____________________ *[0/1 P.]*

3) Interpretieren Sie diesen Flächeninhalt im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = 180° - \arccos\left(\frac{\vec{F}_A \cdot \vec{F}_B}{|\vec{F}_A| \cdot |\vec{F}_B|}\right)$

oder:

$\alpha = \arccos\left(\frac{-\vec{F}_A \cdot \vec{F}_B}{|\vec{F}_A| \cdot |\vec{F}_B|}\right)$

a2) $\vec{e}_A = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{-12}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}384... \\ -0{,}923... \end{pmatrix}$

a3) $\vec{F}_C = -\vec{e}_A \cdot |\vec{F}_C| = \begin{pmatrix} -25 \\ 60 \end{pmatrix}$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.
a3) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.

b1) $g(x) = 0$ *oder* $-0{,}034 \cdot x^4 - 0{,}19 \cdot x^2 + 1{,}5 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = -2{,}1...$ $x_2 = 2{,}1...$
$L = 4{,}2...$ cm

Die Länge der Walnuss ist größer als 4 cm.

b2) $a = 1{,}33$ cm

b3)

Innenvolumen der Walnuss (ohne Schale)	C
Volumen der Walnussschale	A

A	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} g(x)^2\,dx - \pi \cdot \int_{-b}^{b} h(x)^2\,dx$
B	$\pi \cdot \int_{-c}^{c} (g(x) - h(x))^2\,dx$
C	$2 \cdot \pi \cdot \int_{0}^{b} h(x)^2\,dx$
D	$\pi \cdot \int_{-b}^{b} (g(x)^2 - h(x)^2)\,dx$

b1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
b2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes des Parameters *a*.
b3) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1)

V ist monoton steigend.	☒

c2) Flächeninhalt: 195

Toleranzbereich: [185; 205]

c3) Im Zeitintervall [50; 80] hat das Holzvolumen um 195 m^3 zugenommen.

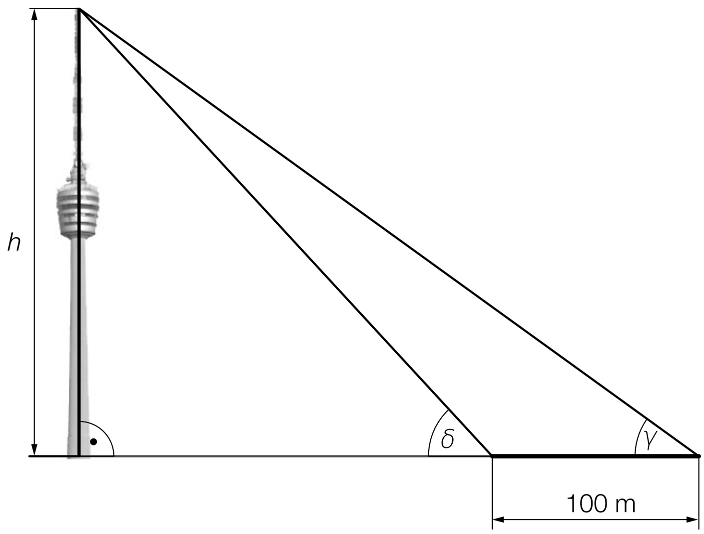
c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Flächeninhalts.
c3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Stuttgarter Fernsehturm

Der Stuttgarter Fernsehturm ist ein Wahrzeichen der Stadt Stuttgart.
Er ist einer der ersten Türme mit Turmkorb.

Bildquelle: Taxiarchos228 – own work, FAL, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/dd/Stuttgarter_Fernsehturm1.jpg [12.05.2021] (adaptiert).

a) Zur Bestimmung der Höhe h des Stuttgarter Fernsehturms wurde die nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze erstellt.



Bildquelle: Hansj?Lipp, CC BY-SA 2.0, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d0/Der_Stuttgarter_Fernsehturm_vom_Marienplatz_aus_gesehen_-_geo.hlipp.de_-_10720.jpg [12.05.2021] (adaptiert).

Es gilt: $\gamma = 36{,}1°$ und $\delta = 47{,}7°$

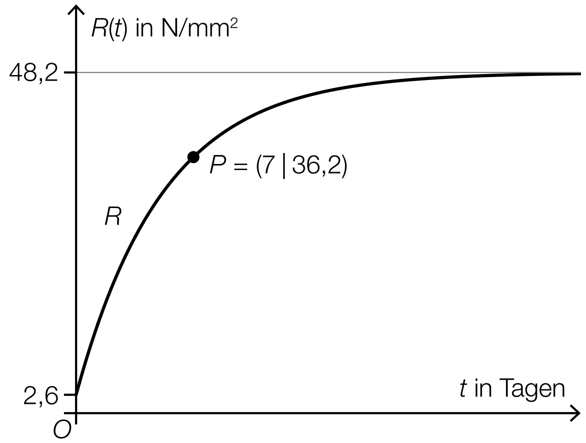
1) Berechnen Sie die Höhe h. *[0/1 P.]*

b) Beim Bau des Stuttgarter Fernsehturms wurde Beton verwendet. Die mittlere Druckfestigkeit des Betons in Abhängigkeit von der Trocknungszeit kann durch die Funktion R beschrieben werden.

$R(t) = a - b \cdot c^t$

t ... Trocknungszeit in Tagen
$R(t)$ ... mittlere Druckfestigkeit bei der Trocknungszeit t in N/mm²
a, b, c ... Parameter

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph von R dargestellt.



1) Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a und b an.

a = ____________________

b = ____________________ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter c. *[0/1 P.]*

3) Begründen Sie anhand der Gleichung von R, warum die mittlere Druckfestigkeit für $t \to \infty$ asymptotisch gegen den Wert 48,2 geht. *[0/1 P.]*

c) Für bestimmte Jahre ist die jährliche Besucherzahl des Stuttgarter Fernsehturms in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Jahr	2007	2009	2011	2016	2017
Besucherzahl (gerundet)	329000	284000	307000	530000	460000

Die zeitliche Entwicklung der jährlichen Besucherzahl des Stuttgarter Fernsehturms soll durch die lineare Funktion f modelliert werden.

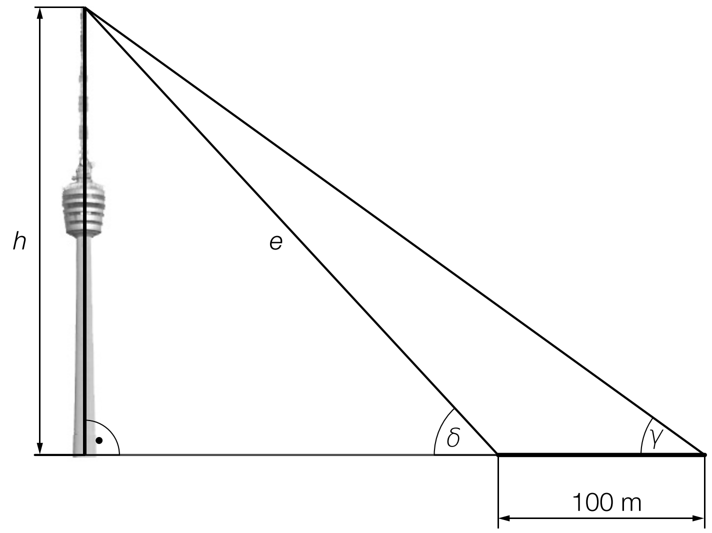
t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2007
$f(t)$ ... jährliche Besucherzahl des Stuttgarter Fernsehturms zur Zeit t

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion f auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Jahr 2007. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie mithilfe von f den prognostizierten Wert für die Besucherzahl des Stuttgarter Fernsehturms im Jahr 2025. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



$$\frac{e}{\sin(\gamma)} = \frac{100}{\sin(\delta - \gamma)}$$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$e = 293{,}01\ldots$

$h = e \cdot \sin(\delta) = 216{,}72\ldots$

Der Stuttgarter Fernsehturm hat eine Höhe von rund 216,7 m.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe h.

b1) $a = 48{,}2$
$b = 48{,}2 - 2{,}6 = 45{,}6$

b2) $36{,}2 = 48{,}2 - 45{,}6 \cdot c^7$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$c = 0{,}8263\ldots$

b3) Weil $c < 1$, strebt der Term $b \cdot c^t$ für $t \to \infty$ gegen 0, und damit strebt $R(t)$ gegen 48,2.

b1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Werte der Parameter a und b.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Parameters c.
b3) Ein Punkt für das richtige Begründen.

c1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 21\,263 \cdot t + 275\,684$ *(Koeffizienten gerundet)*

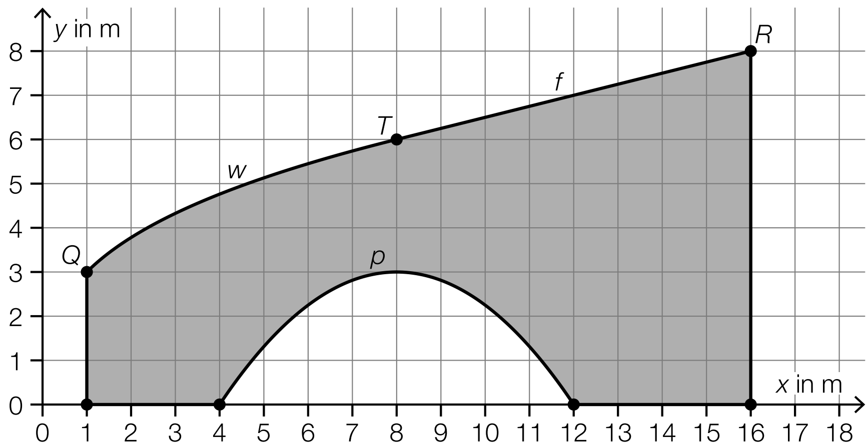
c2) $f(18) = 658\,421{,}0\ldots$

Der prognostizierte Wert für die Besucherzahl des Stuttgarter Fernsehturms im Jahr 2025 beträgt gemäß diesem Modell rund 658 000.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von *f*.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des prognostizierten Wertes der Besucherzahl im Jahr 2025.

Schwimmbad (2)

a) In der nachstehenden Abbildung ist die Grundfläche eines Pools als grau markierte Fläche dargestellt (Ansicht von oben).



Der Graph der Funktion w verläuft vom Punkt Q zum Punkt T.
Der Graph der Funktion f verläuft vom Punkt T zum Punkt R.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf. Verwenden Sie dabei die Funktionen w, f und p.

A = ____________________ *[0/1 P.]*

Die Funktion f ist eine lineare Funktion.
Für die Funktion w gilt:

$w(x) = 3 \cdot \sqrt[3]{x}$
x, $w(x)$ … Koordinaten in m

2) Zeigen Sie, dass die Funktionen w und f im Punkt T die gleiche Steigung haben. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die Länge desjenigen Teiles der Umrandung, der sich aus den Graphen der Funktionen w und f zusammensetzt. *[0/1 P.]*

Die Fläche zwischen dem Graphen der quadratischen Funktion p und der x-Achse stellt die Poolbar dar. Bei einem Umbau wird die Poolbar neu gestaltet. Nun stellt die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion q und der x-Achse die neue Poolbar dar.

$q(x) = p(x - 2)$
x, $p(x)$, $q(x)$ … Koordinaten in m

4) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Funktion q ein. *[0/1 P.]*

b) Gemäß einer Bäderhygieneverordnung muss die Konzentration an freiem Chlor im Beckenwasser zwischen 500 μg/L und 1200 μg/L betragen.

Ein quaderförmiges Becken mit den Abmessungen 25 m × 10 m × 1,8 m ist bis zum Rand mit Wasser gefüllt. In diesem Wasser befinden sich 0,5 kg freies Chlor.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob die obige Verordnung eingehalten wird. *[0/1 P.]*

In dieser Verordnung wird die Menge an Wasser, die pro Stunde ausgetauscht werden muss, als sogenannter *Förderstrom Q* bezeichnet.

Für eine bestimmte Bauart von Schwimmbecken gilt:

$$Q = \frac{A}{f \cdot b} + 3 \cdot n$$

A … Wasserfläche
n … Anzahl der Benutzerplätze ($n \geq 1$)
Q … Förderstrom
f, b ... positive Parameter

2) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Der Förderstrom Q ist direkt proportional zu n.	☐
Der Förderstrom Q verdoppelt sich, wenn A verdoppelt wird.	☐
Der Förderstrom Q wird kleiner, wenn b größer wird.	☐
Der Förderstrom Q ist indirekt proportional zu f.	☐
Der Förderstrom Q verdoppelt sich, wenn b halbiert wird.	☐

c) Die Aufenthaltsdauer der Gäste im Saunabereich eines Thermalbads kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. In der nachstehenden Abbildung 1 ist die zugehörige Verteilungsfunktion *F* dargestellt.

1) Zeichnen Sie in Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion *f* ein. *[0/1 P.]*

Abbildung 1:

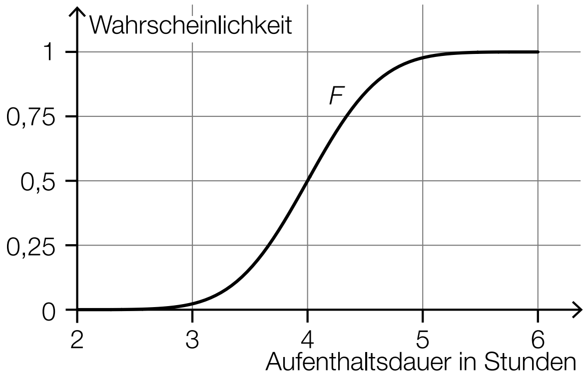
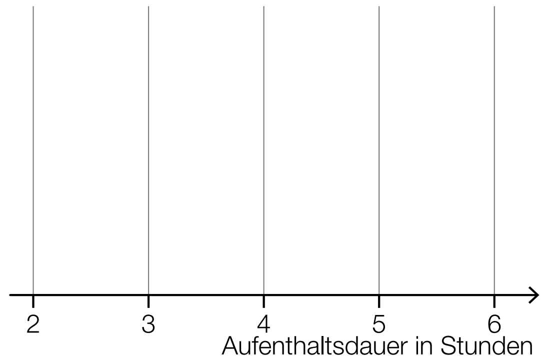


Abbildung 2:



Die Aufenthaltsdauer der Gäste in einem Erlebnisbad ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5{,}8$ h und der Standardabweichung $\sigma = 1{,}2$ h.
Für eine Stichprobe von 9 Gästen wird der Stichprobenmittelwert der Aufenthaltsdauer untersucht.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Stichprobenmittelwert im Zeitintervall [5; 6] liegt. *[0/1 P.]*

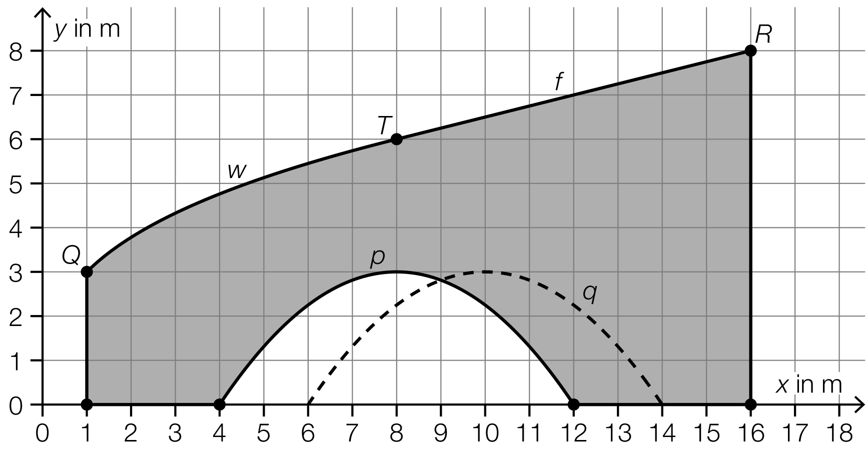
Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \int_1^8 w(x)\,\mathrm{d}x + \int_8^{16} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_4^{12} p(x)\,\mathrm{d}x$

a2) Steigung der Funktion w im Punkt T: $w'(8) = 0{,}25$
Steigung der Funktion f: $\frac{8-6}{16-8} = 0{,}25$
Die beiden Steigungen sind gleich.

a3) $\int_1^8 \sqrt{(1 + (w'(x))^2)}\,\mathrm{d}x + \sqrt{8^2 + 2^2} = 15{,}938...$
Die Länge beträgt rund 15,94 m.

a4)



a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge.
a4) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Funktion q.

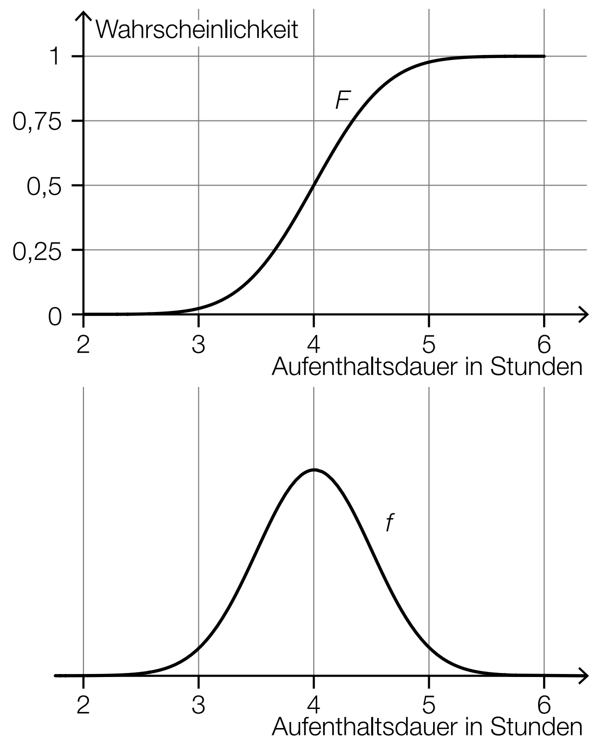
b1) $\frac{5 \cdot 10^8}{25 \cdot 10 \cdot 1{,}8 \cdot 1\,000}$ µg/L = 1 111,1... µg/L
Die Verordnung wird eingehalten.

b2)

Der Förderstrom Q wird kleiner, wenn b größer wird.	$\boxtimes$

b1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es erforderlich, dass das Maximum an der Stelle 4 liegt und die Kurve die Form einer Gauß'schen Glockenkurve hat.

c2) $\overline{X}$ ... Aufenthaltsdauer in Stunden
Normalverteilung mit $\mu = 5{,}8$ und $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}2}{\sqrt{9}} = 0{,}4$
$P(5 \leq \overline{X} \leq 6) = 0{,}6687...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 66,9 %.

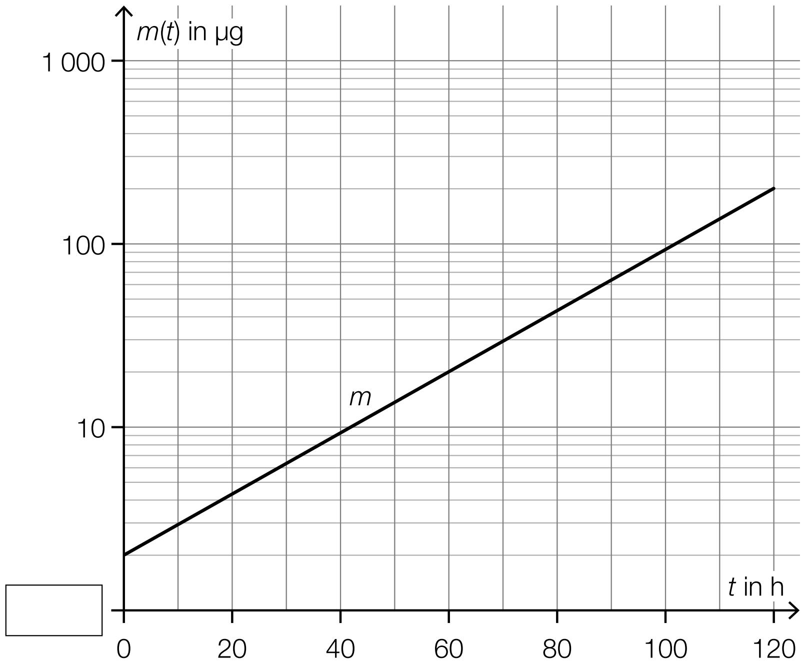
c1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Dichtefunktion f.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Pilzkultur

a) Die Masse einer bestimmten Pilzkultur kann während der ersten 120 Stunden nach Beobachtungsbeginn näherungsweise durch die Funktion m in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

t ... Zeit nach Beobachtungsbeginn in h
$m(t)$ ... Masse der Pilzkultur zur Zeit t in µg

Der Graph der Funktion m ist in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem eine Gerade (siehe nachstehende Abbildung).



1) Tragen Sie die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie die Gleichung der Funktion m an, deren Graph in der obigen Abbildung dargestellt ist. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$m(t) = a \cdot t^2 + b$	☐
$m(t) = a \cdot b^t$	☐
$m(t) = a \cdot t^b$	☐
$m(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$	☐
$m(t) = a \cdot \lg(t) + b$	☐

3) Berechnen Sie die Parameter a und b der Funktion m. *[0/1 P.]*

b) Die momentane Änderungsrate der Masse einer bestimmten Pilzkultur kann für einen bestimmten Zeitraum durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$\frac{dm}{dt} = a - \lambda \cdot m$
t ... Zeit nach Beobachtungsbeginn in h
$m(t)$ ... Masse der Pilzkultur zur Zeit t in µg
a, λ ... positive Konstanten

1) Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an. *[0/1 P.]*

Jemand behauptet, dass $m(t) = a \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ eine Lösung der Differenzialgleichung $\frac{dm}{dt} = a - \lambda \cdot m$ ist.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist. *[0/1 P.]*

Eine Lösung dieser Differenzialgleichung für eine bestimmte Anfangsbedingung bei $t = 0$ lautet:

$m(t) = 1\,000 - 998 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

3) Geben Sie diese Anfangsbedingung an. *[0/1 P.]*

Jemand berechnet: $\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} m(t)\,dt = 400$ µg

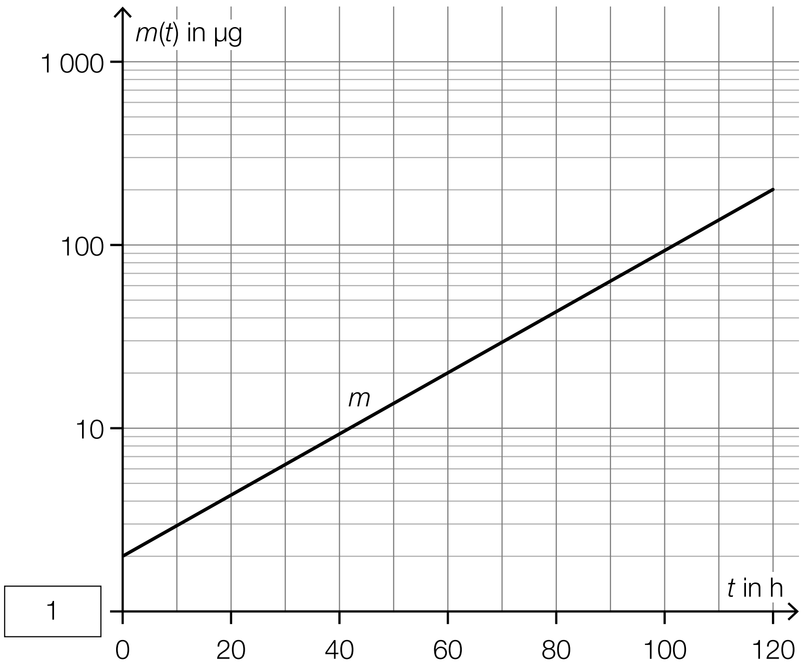
4) Interpretieren Sie das Ergebnis der obigen Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

c) Zu Beginn der Beobachtung beträgt die Masse einer bestimmten Pilzkultur 1,4 g. Jeden Tag verdoppelt sich die Masse dieser Pilzkultur.

1) Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen nach Beginn der Beobachtung die Masse dieser Pilzkultur erstmals mehr als 7 kg beträgt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2)

$m(t) = a \cdot b^t$	☒

a3) Einsetzen von (0|2) und (120|200):

$2 = a \cdot b^0$

$200 = a \cdot b^{120}$

$a = 2$

$b = 1{,}0391...$

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
a2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Parameter *a* und *b*.

b1) $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot m$

b2) $m'(t) = -\lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
$-\lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda \cdot t} = a - \lambda \cdot a \cdot e^{-\lambda \cdot t}$
$0 = a$

Die Behauptung ist falsch.

b3) $m(0) = 2$

b4) Die durchschnittliche Masse der Pilzkultur im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ beträgt 400 µg.

b1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen homogenen Differenzialgleichung.
b2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
b3) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Anfangsbedingung.
b4) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

c1) $7\,000 = 1{,}4 \cdot 2^t$
$t = 12{,}28...$

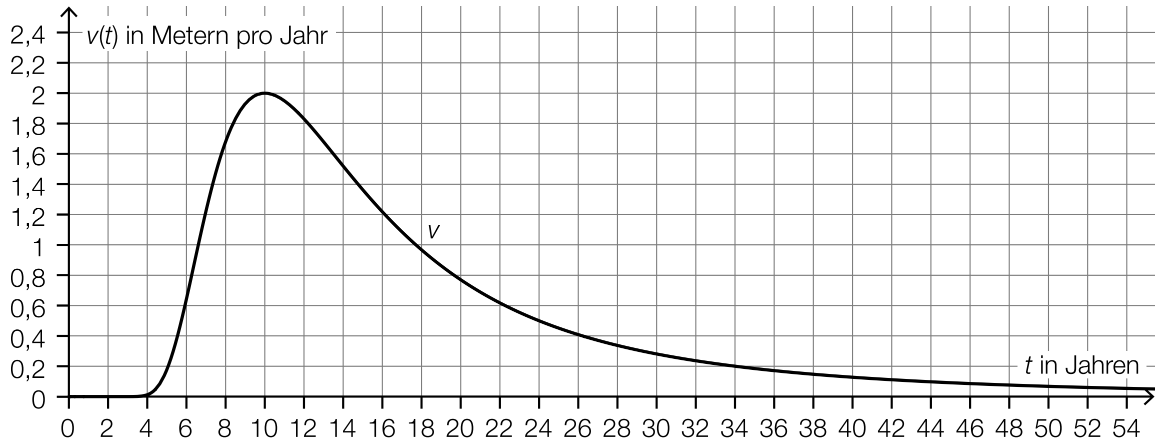
Nach rund 12,3 Tagen beträgt die Masse der Pilzkultur erstmals mehr als 7 kg.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

Nussbaum und Nüsse*

Nussbäume wachsen langsam. Die momentane Änderungsrate der Höhe einer Pflanze in Abhängigkeit von der Zeit wird als *Wachstumsgeschwindigkeit* bezeichnet.

a) Die Wachstumsgeschwindigkeit eines bestimmten Nussbaums in Abhängigkeit von der Zeit t kann modellhaft durch die Funktion v beschrieben werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Höhe des Nussbaums 0 m. (Siehe nachstehende Abbildung.)



1) Schätzen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Höhe H dieses Nussbaums zur Zeit $t = 10$ Jahre ab.

$H \approx$ ____________________ m *[0/1 P.]*

Der Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit am stärksten abnimmt, wird mit t_1 bezeichnet.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Zeitpunkt t_1 ab.

$t_1 \approx$ ____________________ Jahre *[0/1 P.]*

b) Nüsse werden in Packungen abgefüllt. Die Masse einer Packung in g wird durch die normalverteilte Zufallsvariable X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ modelliert.

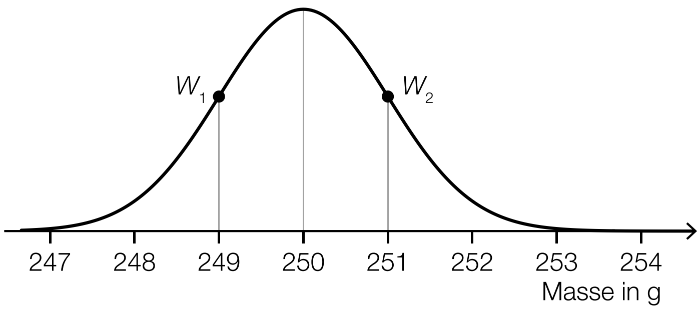
1) Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils die gleich große Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

$P(X \geq \mu - \sigma)$	
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$	

A	$1 - P(X \leq \mu + \sigma)$
B	$1 - 2 \cdot P(X \geq \mu + \sigma)$
C	$P(X \leq \mu + \sigma)$
D	$2 \cdot P(X \geq \mu + \sigma)$

Die Standardabweichung von X beträgt $\sigma = 5$ g.

Im Rahmen der Qualitätskontrolle werden Stichproben vom Umfang n entnommen.
Die Stichprobenmittelwerte der Massen der Packungen werden ermittelt. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion für die Verteilung der Stichprobenmittelwerte mit den Wendepunkten W_1 und W_2 dargestellt.



2) Geben Sie den Stichprobenumfang n an.

n = ____________________ Packungen *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $H \approx 6$ m
Toleranzbereich: [5,5 m; 7,2 m]

a2) $t_1 \approx 14$ Jahre
Toleranzbereich: [12 Jahre; 16,5 Jahre]

a1) Ein Punkt für das richtige Abschätzen von H.
a2) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Zeitpunkts t_1.

b1)

$P(X \geq \mu - \sigma)$	C
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$	B

A	$1 - P(X \leq \mu + \sigma)$
B	$1 - 2 \cdot P(X \geq \mu + \sigma)$
C	$P(X \leq \mu + \sigma)$
D	$2 \cdot P(X \geq \mu + \sigma)$

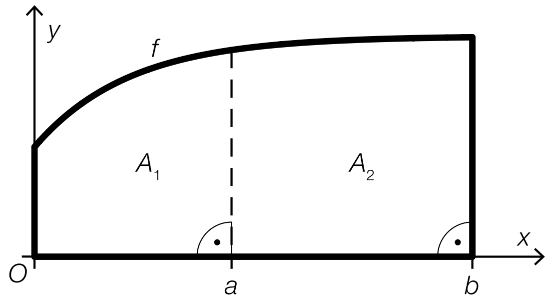
b2) $n = 25$ Packungen

b1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
b2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Stichprobenumfangs n.

Spargel*

Spargel ist in Österreich ein beliebtes Gemüse.

a) Ein Bauer baut Spargel auf einem Feld an. In der nachstehenden Abbildung ist dieses Feld schematisch in einem Koordinatensystem dargestellt. Das Feld ist durch den Graphen der Funktion f und die 3 fett gedruckten Strecken begrenzt.



Das Feld soll durch die Gerade mit der Gleichung $x = a$ in die zwei Teilflächen A_1 und A_2 geteilt werden.
Das Verhältnis der Flächeninhalte von A_1 zu A_2 soll dabei 2 : 3 sein.

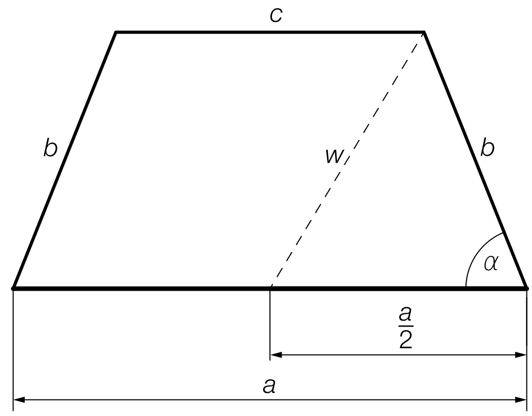
1) Tragen Sie in der nachstehenden Gleichung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{} \cdot \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet werden kann.

$f(a) + \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x + f(b) + (b - a)$ *[0/1 P.]*

b) Sogenannte *Spargeldämme*, die im Querschnitt modellhaft die Form eines gleichschenkeligen Trapezes haben, sind für das Wachstum des Spargels ideal (siehe nachstehende Abbildung).



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von w auf. Verwenden Sie dabei a, b und α.

$w =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Größe ein, die mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$\arcsin\left(\frac{b \cdot \sin(\alpha)}{w}\right)$ *[0/1 P.]*

3) Interpretieren Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$\frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot b \cdot \sin(\alpha)$ *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Tabelle sind die durchschnittlichen Nettopreise für 100 kg Spargel in Österreich für einige ausgewählte Jahre angegeben.

Jahr	2014	2015	2017	2018
durchschnittlicher Nettopreis für 100 kg Spargel in €	547	596	591	635

Die zeitliche Entwicklung des durchschnittlichen Nettopreises ab 2014 soll näherungsweise durch die lineare Funktion p beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion p auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Jahr 2014. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit t der durchschnittliche Nettopreis gemäß diesem Modell € 695 beträgt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

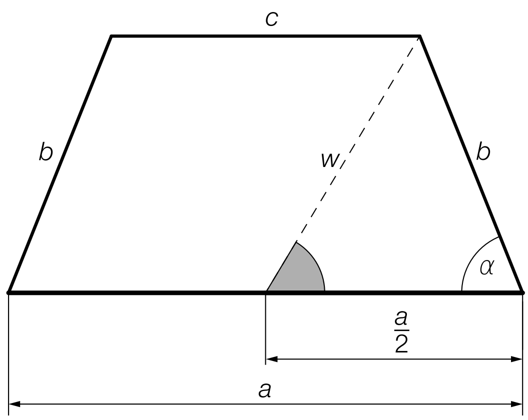
a1) $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{2}{5}} \cdot \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$

a2) Mit diesem Ausdruck kann der Umfang der Teilfläche A_2 berechnet werden.

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) $w = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - a \cdot b \cdot \cos(\alpha)}$

b2)



b3) Mit diesem Ausdruck kann der Flächeninhalt der Querschnittsfläche eines Spargeldamms berechnet werden.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das Einzeichnen des richtigen Winkels.
b3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

c1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$p(t) = 17{,}1 \cdot t + 558{,}05$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2014
$p(t)$ ... durchschnittlicher Nettopreis zur Zeit t in Euro

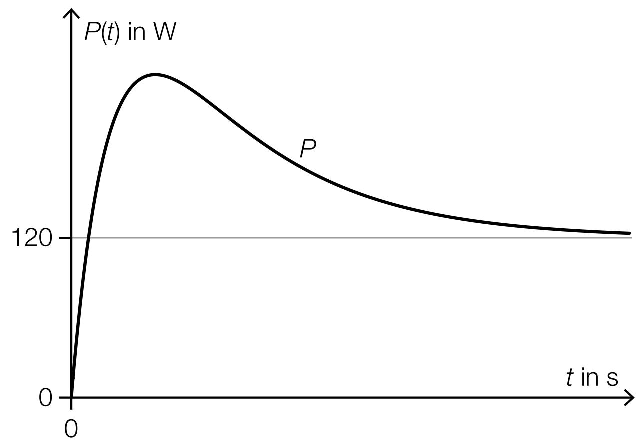
c2) $p(t) = 695$ *oder* $17{,}1 \cdot t + 558{,}05 = 695$
$t = 8{,}0...$

Nach rund 8 Jahren beträgt der durchschnittliche Nettopreis gemäß diesem Modell € 695.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion p.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeit, nach der der durchschnittliche Nettopreis € 695 beträgt.

Elektrofahrrad*

a) Bei einem bestimmten Elektrofahrrad wird der Anfahrvorgang durch einen Elektromotor unterstützt.
Die Leistung des Elektromotors in Abhängigkeit von der Zeit ist in der nachstehenden Abbildung modellhaft dargestellt.



Für die Funktion P gilt:

$P(t) = 380 \cdot e^{-a \cdot t} - 500 \cdot e^{-0{,}682 \cdot t} + 120$

t ... Zeit in s
$P(t)$ ... Leistung des Elektromotors zur Zeit t in Watt (W)
a ... positiver Parameter

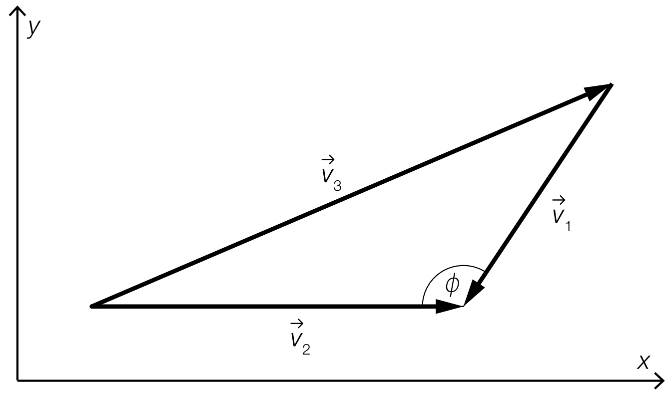
1) Argumentieren Sie mithilfe der Funktionsgleichung von P, dass sich $P(t)$ für $t \to \infty$ asymptotisch dem Wert 120 nähert. *[0/1 P.]*

Die Leistung nach 4 s beträgt 235 W.

2) Berechnen Sie a. *[0/1 P.]*

3) Berechnen Sie die maximale Leistung. *[0/1 P.]*

b) Jemand fährt an einem windigen Tag mit dem Elektrofahrrad. In der nachstehenden Abbildung sind die zu einem bestimmten Zeitpunkt auftretenden Geschwindigkeitsvektoren dargestellt.



$\vec{v}_1$ ... Geschwindigkeitsvektor des Windes
$\vec{v}_2$ ... Geschwindigkeitsvektor des Elektrofahrrads
$\vec{v}_3$ ... Vektor der relativen Geschwindigkeit des Elektrofahrrads

1) Stellen Sie mithilfe von $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ eine Formel zur Berechnung von $\vec{v}_1$ auf.

$\vec{v}_1 =$ ____ *[0/1 P.]*

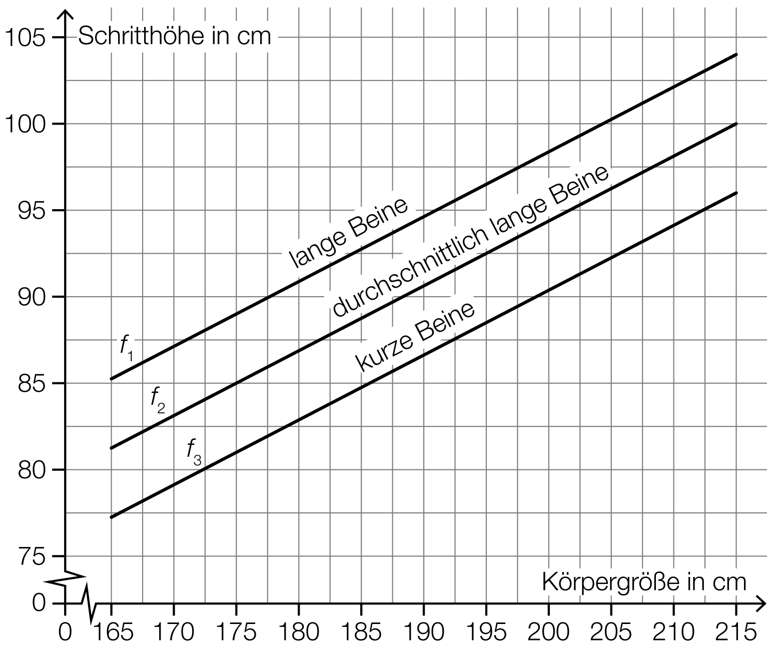
Es gilt:

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$

2) Berechnen Sie den Winkel ϕ. *[0/1 P.]*

c) Für die Wahl der passenden Rahmenhöhe eines Elektrofahrrads ist die Schritthöhe von Bedeutung.

Die Schritthöhe hängt nicht nur von der Körpergröße, sondern auch vom jeweiligen Figurtyp ab (siehe nebenstehende Abbildung).



Der jeweilige Zusammenhang zwischen der Schritthöhe und der Körpergröße kann modellhaft durch die Funktionen f_1, f_2 und f_3 beschrieben werden.

Es gilt:

$f_1(x) = k_1 \cdot x + d_1$
$f_2(x) = k_2 \cdot x + d_2$
$f_3(x) = k_3 \cdot x + d_3$

x ... Körpergröße in cm
$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ ... Schritthöhe bei der Körpergröße x in cm
k_1, k_2, k_3, d_1, d_2, d_3 ... Parameter

1) Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Funktion f_2 auf. *[0/1 P.]*

Die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und f_3 sind zueinander parallel. Die Graphen von f_1 und f_2 haben den gleichen senkrechten Abstand zueinander wie die Graphen von f_2 und f_3.

2) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$d_1 > d_3$	☐
$k_1 - k_2 = 0$	☐
$\lvert d_1 - d_2\rvert = \lvert d_3 - d_2\rvert$	☐
$\frac{d_1}{k_1} = \frac{d_2}{k_2}$	☐
$\frac{k_1}{k_3} = 1$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) Für $t \to \infty$ gehen $e^{-a \cdot t}$ und $e^{-0{,}682 \cdot t}$ gegen null und damit auch $380 \cdot e^{-a \cdot t}$ und $500 \cdot e^{-0{,}682 \cdot t}$.
Somit nähern sich die Funktionswerte für $t \to \infty$ dem Wert 120.

a2) $P(4) = 235$ *oder* $380 \cdot e^{-a \cdot 4} - 500 \cdot e^{-0{,}682 \cdot 4} + 120 = 235$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 0{,}2362...$

a3) $P'(t) = 0$ *oder* $-89{,}78... \cdot e^{-0{,}2362... \cdot t} + 341 \cdot e^{-0{,}682 \cdot t} = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 2{,}99...$

$P(2{,}99...) = 242{,}41...$

Die maximale Leistung beträgt rund 242,4 W.

a1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren mithilfe der Funktionsgleichung.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Parameters a.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen der maximalen Leistung.

b1) $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$

b2) $\phi = \arccos\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}\right) = 129{,}80...°$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Winkels ϕ.

c1) $f_2(x) = k_2 \cdot x + d_2$

$$k_2 = \frac{100 - 85}{215 - 175} = \frac{3}{8}$$

$$d_2 = 85 - \frac{3}{8} \cdot 175 = \frac{155}{8}$$

$$f_2(x) = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{155}{8}$$

c2)

$\frac{d_1}{k_1} = \frac{d_2}{k_2}$	☒

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der linearen Funktion f_2.
c2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

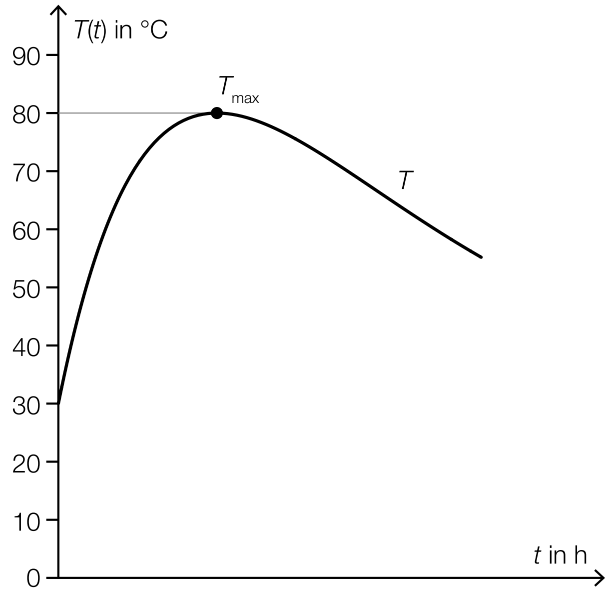
Backofen*

a) Die Temperatur im Inneren eines Bratens nennt man Kerntemperatur. Sie wird mithilfe eines Bratenthermometers gemessen.

Der zeitliche Verlauf der Kerntemperatur lässt sich für einen bestimmten Braten modellhaft durch die Funktion T beschreiben (siehe unten stehende Abbildung).

$T(t) = a + \frac{100}{3} \cdot t \cdot e^{1-c \cdot t}$

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn des Bratvorgangs
$T(t)$ ... Kerntemperatur des Bratens zur Zeit t in °C
a, c ... positive Parameter



1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung das größtmögliche Zeitintervall, in dem die Kerntemperatur mindestens 70 °C beträgt. *[0/1 P.]*

2) Begründen Sie, warum die Stelle des Maximums von T nicht vom Parameter a abhängt. *[0/1 P.]*

3) Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter a an.

$a =$ __________ °C *[0/1 P.]*

Die Koordinaten von T_{max} können durch die Parameter a und c beschrieben werden.

Es gilt: $T_{max} = \left(\frac{1}{c} \middle| a + \frac{100}{3 \cdot c}\right)$

4) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter c. *[0/1 P.]*

b) Eine Pizza wird aus dem Backofen genommen und kühlt ab.

Der zeitliche Verlauf der Temperatur dieser Pizza kann näherungsweise durch die Funktion T beschrieben werden. Die momentane Änderungsrate von T ist jeweils proportional zur Differenz zwischen T und der Umgebungstemperatur T_U. Der Proportionalitätsfaktor wird mit k bezeichnet.

t ... Zeit in min
$T(t)$ ... Temperatur zur Zeit t in °C
T_U ... Umgebungstemperatur in °C
$k > 0$ ... Proportionalitätsfaktor in min^{-1}

1) Stellen Sie eine Differenzialgleichung für T auf. *[0/1 P.]*

2) Zeigen Sie, dass eine allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet:

   $T(t) = T_U + C \cdot e^{-k \cdot t}$ *[0/1 P.]*

3) Geben Sie die allgemeine Lösung T_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung an.

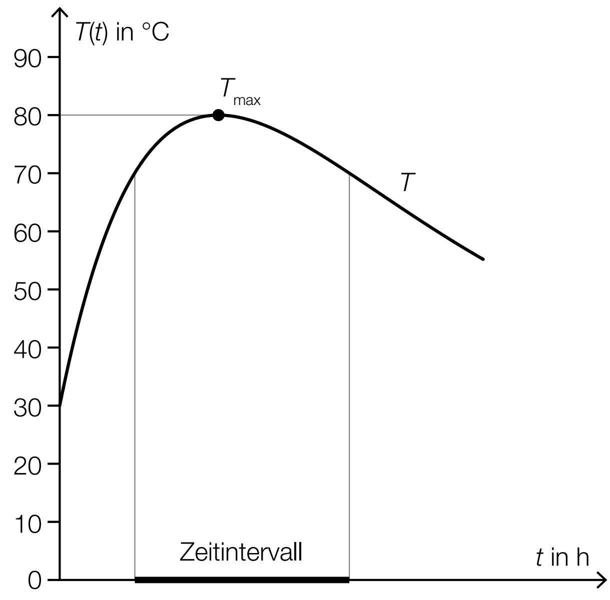
   $T_h(t) =$ ____ *[0/1 P.]*

Für einen bestimmten Abkühlvorgang gilt: $k = 0{,}026\ \text{min}^{-1}$, $T_U = 20$ °C und $T(0) = 200$ °C.

4) Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung für T für diesen Abkühlvorgang. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) Der Parameter *a* bewirkt nur eine Verschiebung entlang der senkrechten Achse und beeinflusst die Maximumstelle nicht.

oder:

Die Maximumstelle wird mithilfe der 1. Ableitung berechnet. Beim Ableiten fällt der Parameter *a* weg.

a3) $a = 30\ °C$
Toleranzbereich: [29; 33]

a4) $80 = 30 + \frac{100}{3 \cdot c}$

$c = \frac{2}{3}$

a1) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Zeitintervalls.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.
a3) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes von *a*.
a4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters *c*.

b1) $\frac{dT}{dt} = -k \cdot (T - T_U)$ *oder* $\frac{dT}{dt} = k \cdot (T_U - T)$

b2) $\int \frac{dT}{(T - T_U)} = \int -k\,dt$ *oder* $\int \frac{T'}{(T - T_U)}\,dt = \int -k\,dt$

$\ln|T - T_U| = -k \cdot t + C_1$

$T(t) = T_U + C \cdot e^{-k \cdot t}$

Auch ein Nachweis durch Einsetzen der angegebenen allgemeinen Lösung in die Differenzialgleichung ist als richtig zu werten.

b3) $T_h(t) = C \cdot e^{-k \cdot t}$

b4) $T(0) = 200$ *oder* $200 = 20 + C \cdot e^{-0{,}026 \cdot 0}$

$C = 180$

$T(t) = 20 + 180 \cdot e^{-0{,}026 \cdot t}$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung.
b2) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
b3) Ein Punkt für das Angeben der richtigen allgemeinen Lösung der homogenen Differenzialgleichung.
b4) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der speziellen Lösung der Differenzialgleichung.