Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Alkoholspiegel

Aufgabennummer: A_093

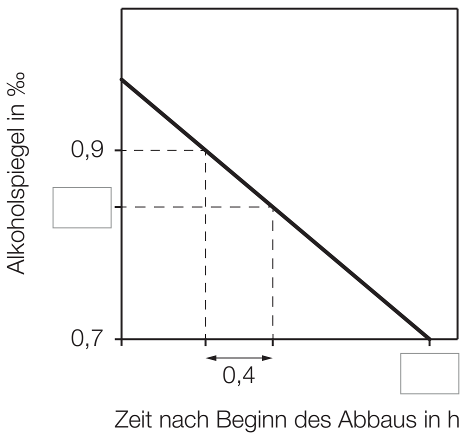
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Alkoholspiegel ist ein Maß für die Menge von Alkohol im Blut. Er wird üblicherweise in Promille (‰) angegeben.
Oberhalb eines Alkoholspiegels von 0,1 ‰ erfolgt der Abbau von Alkohol im Körper annähernd linear mit einer Abbaurate von 0,15 ‰ pro Stunde.

a) Wolfgang trinkt auf einer Party Alkohol. Am Ende der Party hat er einen Alkoholspiegel von 1,5 ‰.

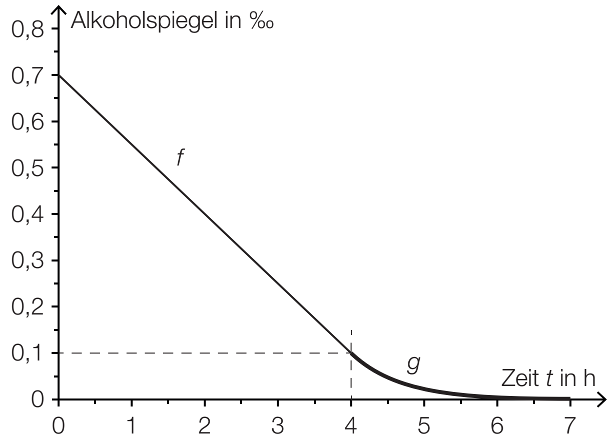
– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion auf, die den Alkoholabbau in Wolfgangs Körper (bis zu einem Alkoholspiegel von 0,1 ‰) in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Alkoholabbau in Wolfgangs Körper ausschnittsweise dargestellt.



– Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

b) Unterhalb eines Alkoholspiegels von 0,1 ‰ lässt sich der Abbau von Alkohol im Körper näherungsweise durch die Funktion g mit $g(t) = c \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ beschreiben.
In der nachstehenden Abbildung ist sowohl der lineare Teil (Funktion f) als auch der exponentielle Teil (Funktion g) eines Alkoholabbauprozesses dargestellt. Die beiden Funktionsgraphen schließen „knickfrei" aneinander an, das heißt, sie haben an der Stelle $t = 4$ denselben Funktionswert und dieselbe Steigung.



Die Parameter c und λ der Funktion g können mithilfe des folgenden Gleichungssystems berechnet werden.

I: $c \cdot e^{-\lambda \cdot 4} = \boxed{}$

II: $\boxed{} \cdot e^{-\lambda \cdot 4} = -0{,}15$

– Ergänzen Sie die fehlenden Teile des obigen Gleichungssystems.

c) Eine Barkeeperin mischt für einen „Sommerspritzer" $\frac{1}{8}$ L Weißwein (Alkoholgehalt 12,5 %) und 0,2 L Soda.

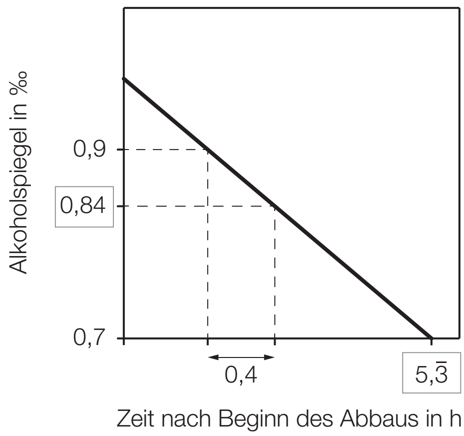
– Berechnen Sie den Alkoholgehalt dieses Sommerspritzers.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) t ... Zeit in h
$A(t)$ ... Alkoholspiegel zur Zeit t in ‰

$A(t) = -0{,}15 \cdot t + 1{,}5$ (mit $0 \leq t \leq 9{,}\overline{3}$)



b) I: $c \cdot e^{-\lambda \cdot 4} = \boxed{0{,}1}$
II: $\boxed{-\lambda \cdot c} \cdot e^{-\lambda \cdot 4} = -0{,}15$

c) $\frac{1}{8} \cdot 0{,}125 = \left(\frac{1}{8} + 0{,}2\right) \cdot x$

$x = 0{,}0480...$

Der Sommerspritzer hat einen Alkoholgehalt von rund 4,8 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 1

Thema: Alltag

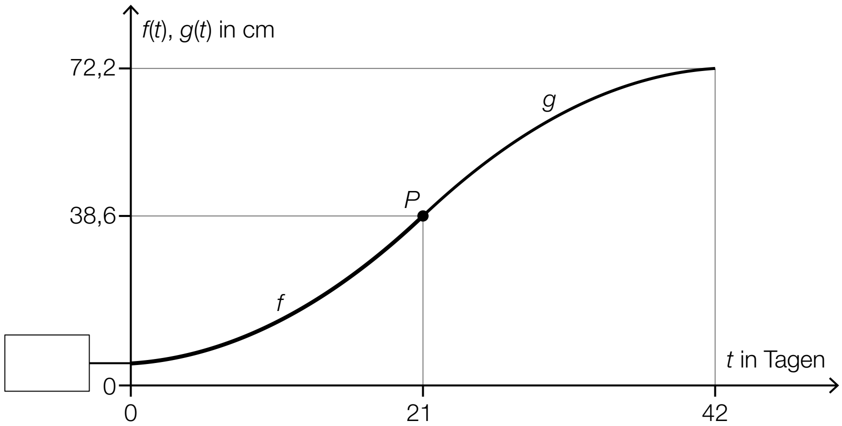
Quellen: —

Sonnenblumen

a) Die Höhe einer bestimmten Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch die zwei quadratischen Funktionen f und g beschreiben. Die Graphen dieser beiden Funktionen gehen im Punkt P mit gleicher Steigung ineinander über. (Siehe unten stehende Abbildung.)

$f(t) = \frac{1}{15} \cdot t^2 + 0{,}2 \cdot t + 5 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 21$
$g(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \quad \text{mit} \quad 21 \leq t \leq 42$

$t \in [0; 42]$ ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$f(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zur Zeit t in cm
$g(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zur Zeit t in cm



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung den fehlenden Wert der Achsenbeschriftung in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c der Funktion g. *[0/1/2 P.]*

b) Die Höhe einer anderen Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t in einem bestimmten Zeitintervall näherungsweise durch die Funktion h beschreiben.

$h(t) = 6{,}2 \cdot a^t$

t ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$h(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zur Zeit t in cm

Zur Zeit $t = 17$ beträgt die Höhe der Sonnenblume 38,6 cm.

1) Berechnen Sie a. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Anzahl der Tage, in denen sich die Höhe dieser Sonnenblume jeweils vervierfacht. *[0/1 P.]*

c) In einer Gärtnerei werden Kerne von Sonnenblumen in mit Erde befüllte Kisten eingesetzt. In jede Kiste werden 10 Kerne eingesetzt. Aus Erfahrung weiß man, dass jeder Kern unabhängig von den anderen Kernen mit einer Wahrscheinlichkeit p keimt.

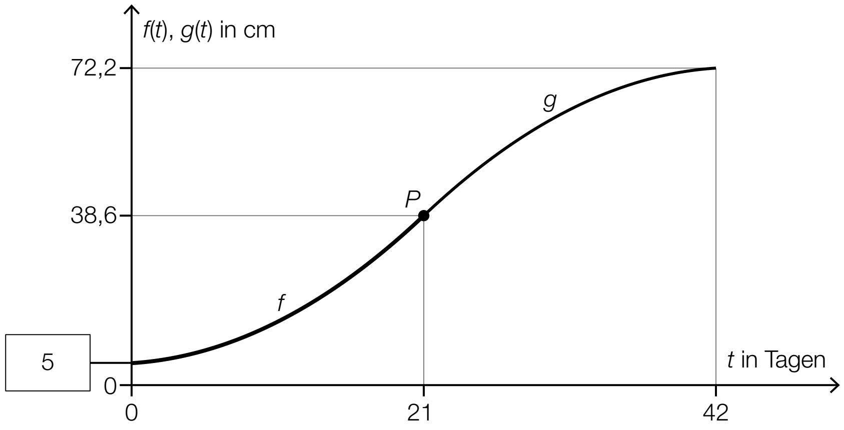
1) Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils den zutreffenden Ausdruck aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig ausgewählten Kiste höchstens 1 Kern keimt	
Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig ausgewählten Kiste genau 9 Kerne keimen	

A	$1 - \binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^1$
B	$\binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^1$
C	$\binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^9 + (1-p)^{10}$
D	$\binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^9$

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f'(t) = \frac{2}{15} \cdot t + 0{,}2$

$g'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$

I: $g(21) = 38{,}6$

II: $g(42) = 72{,}2$

III: $g'(21) = f'(21)$

oder:

I: $21^2 \cdot a + 21 \cdot b + c = 38{,}6$

II: $42^2 \cdot a + 42 \cdot b + c = 72{,}2$

III: $42 \cdot a + b = 3$

a1) Ein Punkt für das Eintragen des richtigen Wertes.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung.

b1) $38{,}6 = 6{,}2 \cdot a^{17}$

$a = \sqrt[17]{\frac{38{,}6}{6{,}2}} = 1{,}1135...$

b2) $4 = 1{,}1135...^t$

$t = \frac{\ln(4)}{\ln(1{,}1135...)}$

$t = 12{,}88...$

Die Höhe der Sonnenblume vervierfacht sich jeweils in rund 12,9 Tagen.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *a*.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der Tage.

c1)

Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig ausgewählten Kiste höchstens 1 Kern keimt	C
Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig ausgewählten Kiste genau 9 Kerne keimen	B

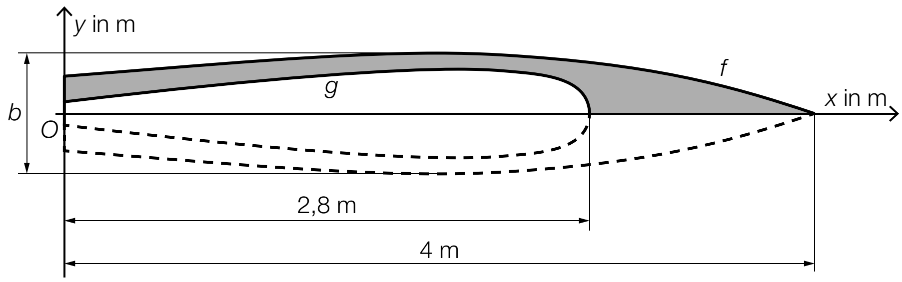
A	$1 - \binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^1$
B	$\binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1-p)^1$
C	$\binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^9 + (1-p)^{10}$
D	$\binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^9$

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Stand-up-Paddling (1)

Stand-up-Paddling ist eine Wassersportart, bei der man aufrecht auf einem Board steht und paddelt.

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Entwurf für ein zweifärbiges Board in der Ansicht von oben dargestellt.



1) Stellen Sie mithilfe der Funktionen f und g eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

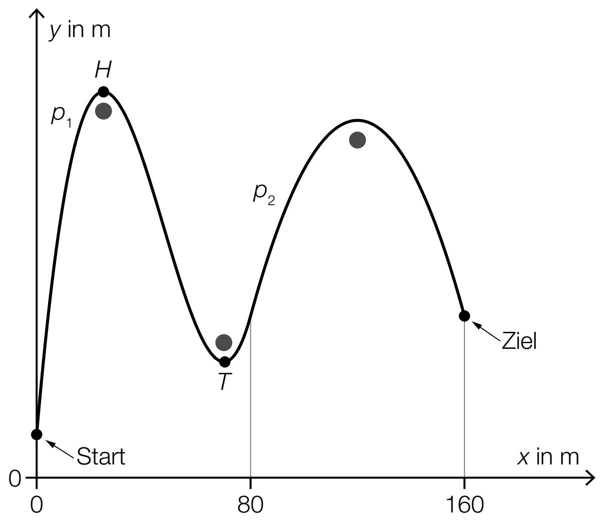
$A =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Der Entwurf ist symmetrisch bezüglich der x-Achse.
Für die Funktion f gilt:

$f(x) = -0{,}0125 \cdot x^3 + 0{,}02 \cdot x^2 + 0{,}07 \cdot x + 0{,}2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 4$

2) Berechnen Sie die maximale Breite b des Boards. *[0/1 P.]*

b) Barbaras Stand-up-Paddling-Trainingsstrecke verläuft um 3 Bojen herum (siehe nachstehende Abbildung).



In einem Modell kann der Verlauf von Barbaras Trainingsstrecke durch die Graphen der Funktionen p_1 und p_2 beschrieben werden.

Es gilt:

$p_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \quad$ mit $\quad 0 \leq x < 80$

Die Punkte $H = (25|200)$ und $T = (70|60)$ sind Extrempunkte des Graphen der Funktion p_1.

1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu H und T ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d. *[0/1/2 P.]*

Der Graph der quadratischen Funktion p_2 beschreibt den Verlauf von Barbaras Trainingsstrecke für $80 \leq x \leq 160$ (siehe obige Abbildung).

2) Kreuzen Sie diejenige Ungleichung an, die auf die Funktion p_2 <u>nicht</u> zutrifft. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$p_2'(150) < 0$	☐
$p_2'(90) > 0$	☐
$p_2''(90) > 0$	☐
$p_2(150) > 0$	☐
$p_2''(150) < 0$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{2{,}8} g(x)\,\mathrm{d}x$

a2) Berechnung der Extremstellen von f mittels Technologieeinsatz:

$f'(x) = 0$ *oder* $-0{,}0375 \cdot x^2 + 0{,}04 \cdot x + 0{,}07 = 0$
$x_1 = 2$ $(x_2 = -0{,}933...)$
$f(2) = 0{,}32$
$b = 2 \cdot f(2)$
$b = 0{,}64$ m

In der Abbildung ist erkennbar, dass der Hochpunkt von f *an der Stelle* x_1 *ist. Ein (rechnerischer) Nachweis, dass* x_1 *eine Maximumstelle ist, und eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.*

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der maximalen Breite b.

b1) $p_1'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

I: $p_1(25) = 200$
II: $p_1(70) = 60$
III: $p_1'(25) = 0$
IV: $p_1'(70) = 0$

oder:

I: $15\,625 \cdot a + 625 \cdot b + 25 \cdot c + d = 200$
II: $343\,000 \cdot a + 4\,900 \cdot b + 70 \cdot c + d = 60$
III: $1\,875 \cdot a + 50 \cdot b + c = 0$
IV: $14\,700 \cdot a + 140 \cdot b + c = 0$

b2)

$p_2''(90) > 0$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte H und T.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Holzbestand und Waldfläche

a) Der Holzbestand eines bestimmten Waldgebietes beträgt zu Beginn der Beobachtung B_0 Festmeter (fm) und nimmt pro Jahr um D fm ab.

1) Erklären Sie, warum der Holzbestand dieses Waldgebietes in Abhängigkeit von der Zeit durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.
2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion B auf, die den Holzbestand (in fm) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) beschreibt.

b) Der Holzbestand eines anderen Waldgebietes nimmt jährlich um 4 % bezogen auf den Wert des jeweiligen Vorjahres zu. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Holzbestand N_0.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion H auf, die den Holzbestand dieses Waldgebietes in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren beschreibt.
2) Berechnen Sie, wie lange es gemäß diesem Modell dauert, bis sich der Holzbestand dieses Waldgebietes verdoppelt.

c) Die Zerstörung von Waldfläche zum Zwecke anderer Landnutzungsformen kann für ein bestimmtes Gebiet näherungsweise durch die Funktion A beschrieben werden.

$A(t) = 2\,160 \cdot t$

t … Zeit in Monaten
$A(t)$ … zerstörte Waldfläche zum Zeitpunkt t in km^2

1) Berechnen Sie, wie viel Hektar (ha) Waldfläche in diesem Gebiet pro Minute zerstört werden. (Jeder Monat wird mit 30 Tagen gerechnet.)

Es gilt:
1 ha = 10 000 m^2

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Abnahme um einen gleichbleibenden Betrag D pro Jahr bedeutet, dass eine lineare Funktion vorliegt.

a2) $B(t) = B_0 - t \cdot D$

b1) $H(t) = N_0 \cdot 1{,}04^t$
t ... Zeit in Jahren
$H(t)$ ... Holzbestand zur Zeit t

b2) $2 \cdot N_0 = N_0 \cdot 1{,}04^t$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 17{,}67...$

Nach rund 17,7 Jahren ist der Holzbestand doppelt so groß.

c1) $\frac{216\,000}{30 \cdot 24 \cdot 60} = 5$

Pro Minute werden in diesem Gebiet 5 ha Wald zerstört.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Leuchtmittel*

Aufgabennummer: A_109

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Betrieb werden Leuchtmittel erzeugt. Untersuchungen haben ergeben, dass 5 % der erzeugten Leuchtmittel fehlerhaft sind. Die übrigen Leuchtmittel funktionieren einwandfrei. Nun wird eine Stichprobe vom Umfang n = 100 untersucht.

a) – Erklären Sie, warum die Binomialverteilung hier als Modell zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten verwendet werden kann.

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass 6 oder 7 fehlerhafte Leuchtmittel in der Stichprobe zu finden sind.

c) – Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit durch den Ausdruck

$$0{,}05^4 \cdot 0{,}95^{96} \cdot \binom{100}{4}$$

berechnet wird.

d) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe 5 fehlerhafte Leuchtmittel gefunden werden, beträgt 18 %.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 2 unabhängigen Stichproben gleichen Umfangs jeweils 5 fehlerhafte Leuchtmittel gefunden werden.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Es gibt genau 2 Möglichkeiten des Ausgangs: „fehlerhaft“ oder „nicht fehlerhaft“.
Die Versuche sind voneinander unabhängig.
Die Wahrscheinlichkeiten bleiben konstant.

b) $P(X = 6) + P(X = 7) = 0{,}1500 + 0{,}1060 = 0{,}2560$
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt 25,60 %.

c) Durch diesen Ausdruck kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass in der Stichprobe genau 4 fehlerhafte Leuchtmittel gefunden werden.

d) Nach dem Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $0{,}18 \cdot 0{,}18 = 0{,}0324 \approx 3{,}24\ \%$.

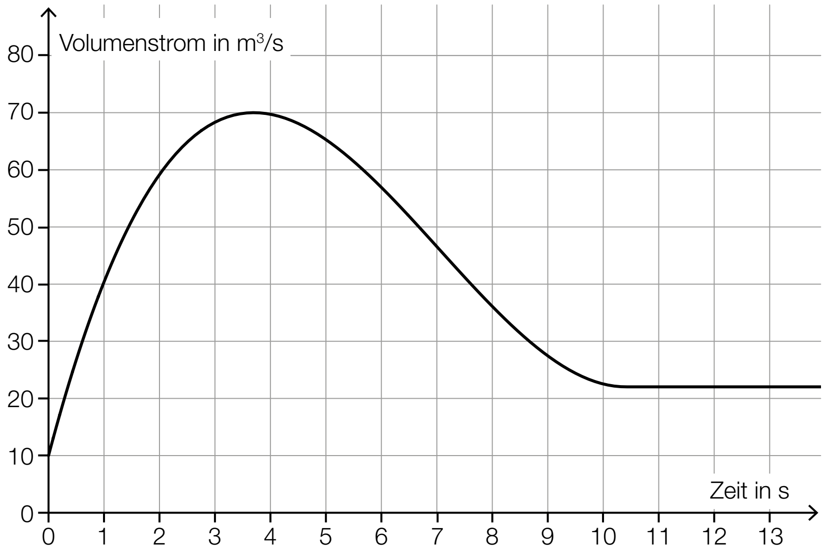
Lösungsschlüssel

a) 1 × D für die richtigen Erklärungen zur Verwendung der Binomialverteilung
b) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c) 1 × C für die richtige Beschreibung zur berechneten Wahrscheinlichkeit
d) 1 × B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Volumenstrom (1)

Wasser einer Staustufe wird über Kanäle in einen Fluss abgelassen.
Das Wasservolumen, das pro Zeiteinheit an einer Messstelle vorbeifließt, bezeichnet man als Volumenstrom.
Nach dem Öffnen des Tores gibt es einen Schwall, der allmählich in einen konstanten Volumenstrom übergeht.

a) Der nachstehende Graph stellt den Volumenstrom im 1. Kanal in den ersten 13 Sekunden nach Öffnen des Tores dar.



1) Lesen Sie ab, wann der Volumenstrom am stärksten ist.
2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die momentane Änderungsrate des Volumenstroms zum Zeitpunkt $t = 1$ s.

b) Der Volumenstrom im 2. Kanal kann durch die Funktion *f* modelliert werden.

$$f(t) = \begin{cases} 0{,}32 \cdot t^3 - 6{,}76 \cdot t^2 + 36{,}85 \cdot t + 10 & \text{für} \quad 0\text{ s} \leq t \leq 10{,}4\text{ s} \\ 22{,}03 \quad \text{für} \quad t > 10{,}4\text{ s} \end{cases}$$

t … Zeit in Sekunden (s)
$f(t)$ … Volumenstrom in m³/s nach t Sekunden

Das gesamte Wasservolumen, das im Zeitintervall $[a, b]$ durch den 2. Kanal fließt, kann durch $V = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.

1) Berechnen Sie das Wasservolumen V, das in den ersten 13 Sekunden durch diesen Kanal geflossen ist.

c) Der Volumenstrom im 3. Kanal kann durch die Funktion g beschrieben werden.
$g(t) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

t ... Zeit in s
$g(x)$ ... Volumenstrom zur Zeit t in m³/s

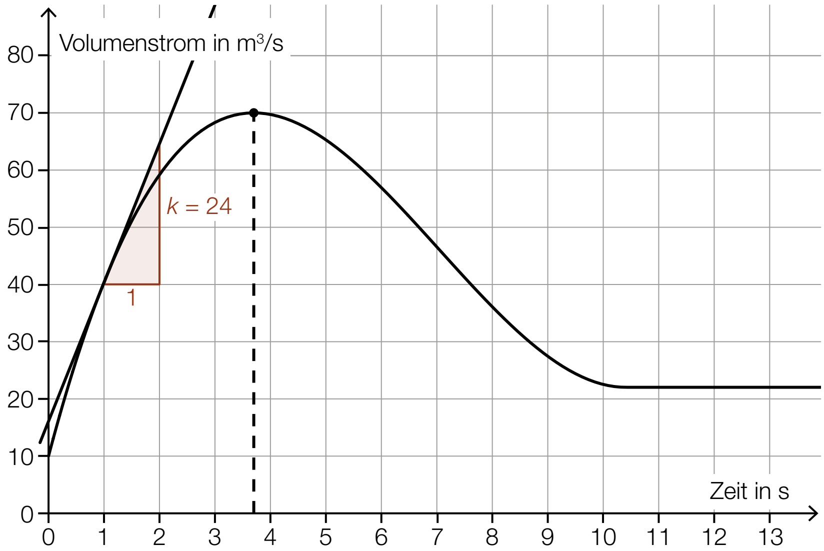
Zu Beginn beträgt der Volumenstrom 12 m³/s, nach 4 s wird das Maximum von 80 m³/s erreicht und nach 11 s beträgt der Volumenstrom 30 m³/s.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von g.

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Volumenstrom im 1. Kanal erreicht nach ungefähr 3,7 s den höchsten Wert.
Toleranzintervall: [3,5 s; 3,9 s]

a2) Einzeichnen der Tangente bei $t = 1$ und Ablesen von $k = 24$
Toleranzintervall: [22; 26]



b1) $V(13) = \int_0^{10,4} (0,32 \cdot t^3 - 6,76 \cdot t^2 + 36,85 \cdot t + 10)\,dt + 22,03 \cdot (13 - 10,4)$

$V(13) = 498,041... + 57,278 \approx 555,32$

In 13 Sekunden fließen insgesamt rund 555,32 m³ Wasser durch den Kanal.

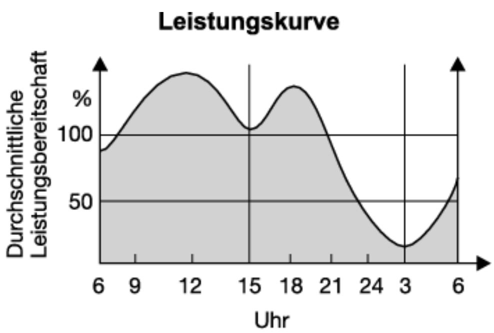
c1) $t = 0$; $g(0) = 12 \rightarrow d = 12$
$t = 4$; $g(4) = 80 \rightarrow 64 \cdot a + 16 \cdot b + 4 \cdot c + d = 80$
$t = 4$; $g'(4) = 0 \rightarrow 48 \cdot a + 8 \cdot b + c = 0$ ... Maximum $\qquad (g'(t) = 3 \cdot a \cdot t^2 + 2 \cdot b \cdot t + c)$
$t = 11$; $g(11) = 30 \rightarrow 30 = 1331 \cdot a + 121 \cdot b + 11 \cdot c + d$

Leistungskurve*

Aufgabennummer: A_108

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die *Leistungskurve*, auch *Arbeitskurve* genannt, ist die Darstellung der Arbeitsleistung einer Arbeitnehmerin/eines Arbeitnehmers in Abhängigkeit von der Tageszeit unter Berücksichtigung seiner Durchschnittsleistung (100 Prozent). Auf einer Webseite findet man folgende Grafik:



Quelle: http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/85252/leistungskurve-v9.html [30.05.2014]

a) – Lesen Sie ab, in welchen Zeitintervallen die Leistungsbereitschaft abnimmt.

b) – Skizzieren Sie den Graphen der 1. Ableitungsfunktion der Leistungsbereitschaft im Zeitintervall von 15 Uhr bis 3 Uhr. Achten Sie dabei auf ein korrektes Einzeichnen der Extremstellen und des Monotonieverhaltens.

c) Um 9 Uhr beträgt die Leistungsbereitschaft einer Arbeitnehmerin 110 %. Um 12 Uhr beträgt sie 140 %. Im Zeitintervall von 12 Uhr bis 14 Uhr beträgt die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft –12 % pro Stunde.

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft im Zeitintervall von 9 Uhr bis 12 Uhr.
– Berechnen Sie die Leistungsbereitschaft um 14 Uhr.

d) Die Leistungsbereitschaft eines Arbeitnehmers kann im Zeitintervall von 0 Uhr bis 6 Uhr durch die Funktion f beschrieben werden. Dabei gilt:

$$f(t) = \frac{10}{3} \cdot t^2 - 20 \cdot t + 40$$

t ... Zeit in Stunden, $0 \leq t \leq 6$
$f(t)$ ... Leistungsbereitschaft zur Zeit t in Prozent

– Berechnen Sie die 1. Ableitung der Leistungsbereitschaft um 2:30 Uhr.
– Erklären Sie die Bedeutung der 1. Ableitung im Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

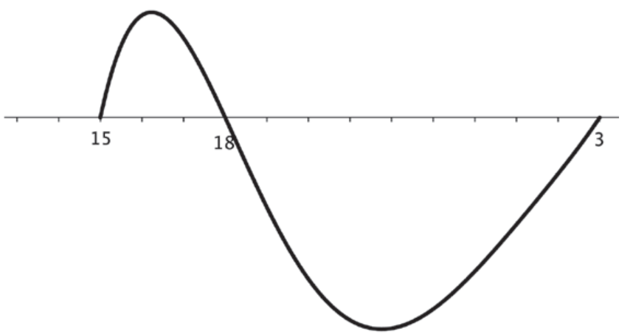
Möglicher Lösungsweg

a) Eine Abnahme der Leistungsbereitschaft liegt im Zeitintervall von ca. 12 Uhr bis ca. 15 Uhr sowie im Zeitintervall von ca. 18 Uhr bis ca. 3 Uhr vor.

Toleranzintervall: ± 0,5 h

b) Jede Skizze, die für die Ableitungsfunktion die richtigen Nullstellen (bei 15 Uhr, bei ca. 18 bis 19 Uhr und bei 3 Uhr) und das richtige Vorzeichen zeigt, gilt als richtige Lösung.
Auf das Einzeichnen von Einheiten auf der *y*-Achse darf verzichtet werden.

Zum Beispiel:



c) mittlere Änderungsrate: $\frac{140 - 110}{12 - 9} = 10 \rightarrow + 10$ % pro Stunde

Leistungsbereitschaft um 14 Uhr: $140 - 2 \cdot 12 = 116 \rightarrow 116$ %

d) $f'(t) = \frac{20}{3} \cdot t - 20$

$f'(2{,}5) = -\frac{10}{3} \approx -3{,}33$

Die 1. Ableitung der Funktion zeigt die momentane Änderungsrate der Leistungsbereitschaft in Prozent pro Stunde an.
Diese momentane Änderungsrate um 2:30 Uhr beträgt –3,33 % (der Durchschnittsleistung) pro Stunde.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C für das richtige Ablesen der Zeitintervalle
b) 1 × A für die richtige Darstellung der Nullstellen der Ableitungsfunktion
1 × A für die richtige Darstellung des Monotonieverhaltens
c) 1 × B für die richtige Berechnung der mittleren Änderungsrate
1 × B für die richtige Berechnung der Leistungsbereitschaft um 14 Uhr
d) 1 × B für die richtige Berechnung der 1. Ableitung zur angegebenen Uhrzeit
1 × D für die richtige Erklärung der Bedeutung der 1. Ableitung im Sachzusammenhang

Laptops

a) Vor 2 Jahren kaufte eine Unternehmerin n gleiche Laptops um einen Gesamtpreis von € 9.600. Heute würde sie um den gleichen Gesamtpreis 2 Laptops mehr bekommen, weil der Preis um € 400 pro Laptop gefallen ist.

Zur Verdeutlichung sind die Angaben in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Gesamtpreis	Preis pro Laptop	Anzahl Laptops
9600	$\left(\frac{9600}{n} - 400\right)$	$(n + 2)$

1) Berechnen Sie n.

b) Ein Computerhersteller hat für den Verkauf von Laptops folgende Gewinnfunktion G ermittelt:

$G(x) = -0{,}2 \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$

x … verkaufte Menge in ME
$G(x)$ … Gewinn bei der Absatzmenge x in GE

Zur Berechnung der Gewinngrenzen benötigt man die Nullstellen der Gewinnfunktion G.

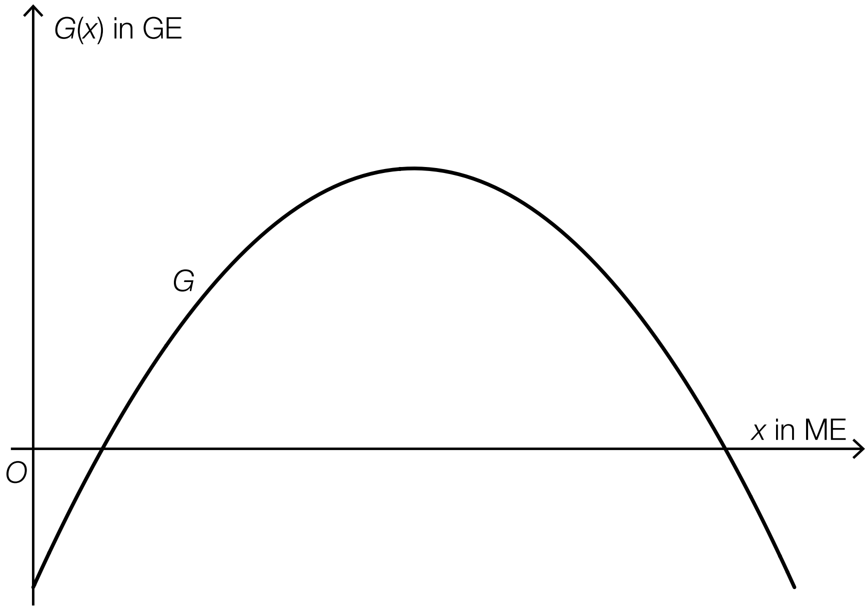
1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Gewinnfunktion G hat genau ___①___, wenn ___②___ gilt.

①	
1 Nullstelle	☐
2 Nullstellen	☐
3 Nullstellen	☐

②	
$5 \cdot b^2 > -4 \cdot c$	☐
$c < -1{,}25 \cdot b^2$	☐
$b^2 + 0{,}8 \cdot c = -1$	☐

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Gewinnfunktion G für Touchscreen-Laptops eines bestimmten Herstellers dargestellt.



1) Kreuzen Sie die für G zutreffende Funktionsgleichung an. Dabei gilt: $a, b, c > 0$ *[1 aus 5]*

$G(x) = -a \cdot x^2 - c$	☐
$G(x) = -a \cdot x^2 + c$	☐
$G(x) = -a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	☐
$G(x) = -a \cdot x^2 + b \cdot x - c$	☐
$G(x) = -a \cdot x^2 + b \cdot x$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) x … Anzahl der Laptops, die man vor 2 Jahren für € 9.600 bekommen hat
p … Preis für einen Laptop vor 2 Jahren in €

I: $p \cdot x = 9600 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{9600}{x}$
II: $(p - 400) \cdot (x + 2) = 9600$

Einsetzen von $p = \frac{9600}{x}$ in II:
$\left(\frac{9600}{x} - 400\right) \cdot (x + 2) = 9600$
$400 \cdot x^2 + 800 \cdot x - 19200 = 0$
$x_1 = 6 \quad (x_2 = -8)$

Die Unternehmerin würde heute 8 Laptops für € 9.600 bekommen.

b1)

①	
2 Nullstellen	☒

②	
$5 \cdot b^2 > -4 \cdot c$	☒

c1)

$G(x) = -a \cdot x^2 + b \cdot x - c$	☒

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Netzwerkadministration

Aufgabennummer: A_130

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

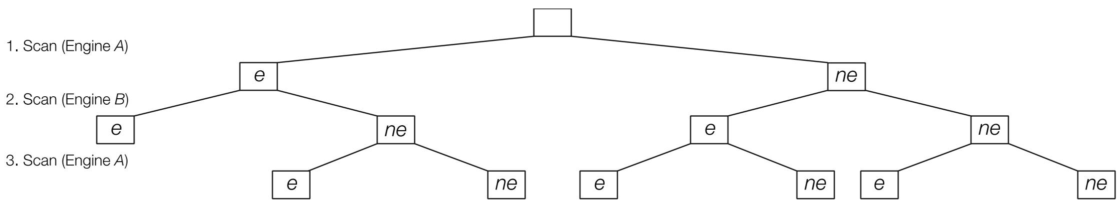
Ein Netzwerkadministrator stellt folgende Überlegungen an.

a) Die Scan-Methodik eines Virenscanners arbeitet mit 2 Scanner-Komponenten, den Engines *A* und *B*. Die Engines überprüfen Dateien in mehreren Scans immer abwechselnd. Der Prozess des abwechselnden Scannens kann beliebig lang fortgesetzt werden. Sobald in einer Datei ein Virus von beiden Engines erkannt wurde, wird die Datei gelöscht.

Die Engine *A* arbeitet mit der Erkennungswahrscheinlichkeit $p_A = \frac{2}{3}$ und die Engine *B* mit der Erkennungswahrscheinlichkeit $p_B = \frac{5}{8}$.

Das nachstehende Baumdiagramm zeigt die Scan-Methodik beginnend mit der Engine *A* bei 3 aufeinanderfolgenden Scans.

e … Virus wird erkannt, *ne* … Virus wird nicht erkannt



– Übertragen Sie die passenden Wahrscheinlichkeiten in das Baumdiagramm.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es nach höchstens 3 Scans zum Löschen der Datei kommt.

b) Ein Image (Abbildung eines Datenträgers) mit 72 Gigabyte (GByte) wird installiert. Die Übertragungsrate beträgt 64 Megabit pro Sekunde (Mbit/s) (1 Byte = 8 Bit).

– Berechnen Sie die Übertragungsrate in MByte/s.
– Berechnen Sie die Zeit in Minuten (min), die benötigt wird, um das Image zu installieren.

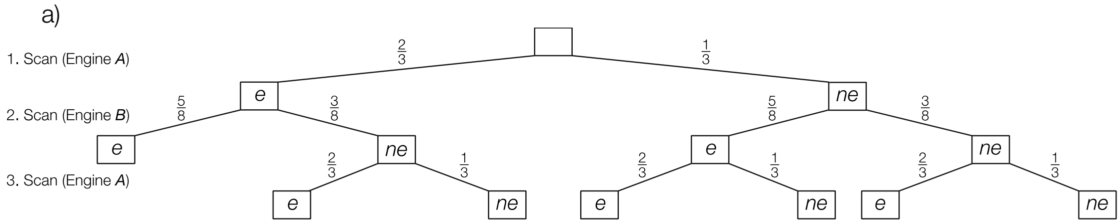
c) Ein Image wird in einem Netzwerk auf 40 nach dem Zufallsprinzip ausgewählten Rechnern installiert. Aus Erfahrung weiß man, dass bei jeder Netzwerkinstallation 4 % der Rechner nicht korrekt funktionieren.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1: „Das Image wird auf 38 Rechnern korrekt installiert."
– Stellen Sie eine Formel auf, die die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2: „Das Image wird auf mindestens 36 Rechnern korrekt installiert" berechnet.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



E … „Löschen der Datei nach höchstens 3 Scans“

$P(E) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{40}{72}$

b) Übertragungsrate: $64 \, \frac{\text{MBit}}{\text{s}} = 8 \, \frac{\text{MByte}}{\text{s}}$

$\frac{72 \cdot 1\,000}{8} = 9\,000 \text{ s} = 150 \text{ min}$

Um das Image zu installieren, werden 150 min benötigt.

c) $P(E_1) = P(X = 38) = \binom{40}{38} \cdot 0{,}96^{38} \cdot 0{,}04^{2} = 0{,}2645\ldots$

$P(E_1) \approx 26{,}5\ \%$

$P(E_2) = P(X \geq 36) = \sum_{k=36}^{40} \binom{40}{k} \cdot 0{,}96^{k} \cdot 0{,}04^{40-k}$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 1 Zahlen und Maße
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Informatik

Quellen: —

Papier

a) Normales Schreibpapier hat pro Quadratmeter eine Masse von 80 g.
Ein Blatt im Format A4 misst 210 mm × 297 mm.
Eva möchte einen Brief versenden, der aus 3 Blättern normalem Schreibpapier im Format A4 und einem Briefumschlag besteht. Der Briefumschlag wiegt 4 g.
Ein Standardbrief darf inklusive Briefumschlag höchstens 20 g wiegen.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob Eva diesen Brief als Standardbrief versenden kann. *[0/1 P.]*

b) Im Jahr 2019 betrug die weltweite Gesamtproduktion von Papier 412 Millionen Tonnen.
Im Folgenden sind die Produktionsmengen der vier Staaten mit der größten Papierproduktion im Jahr 2019 angegeben.

China: 109 Millionen Tonnen
USA: 69 Millionen Tonnen
Japan: 25 Millionen Tonnen
Deutschland: 22 Millionen Tonnen
Datenquelle: DIE PAPIERINDUSTRIE – Leistungsbericht PAPIER 2021

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent der weltweiten Gesamtproduktion von Papier im Jahr 2019 von diesen vier Staaten insgesamt hergestellt wurden. *[0/1 P.]*

Der mittlere Energieverbrauch für die Herstellung von 1 kg Papier in Deutschland wird mit 2,5 Kilowattstunden (kWh) angegeben.

2) Berechnen Sie den Gesamtenergieverbrauch für die Papierherstellung in Deutschland im Jahr 2019 in Gigawattstunden (GWh). *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Tabelle ist die Gesamtproduktion von Papier in Österreich für die Jahre 1990, 2000 und 2012 angegeben.

Jahr	1990	2000	2012
Gesamtproduktion von Papier in Millionen Tonnen	2,93	4,39	5,00

Datenquelle: Austropapier

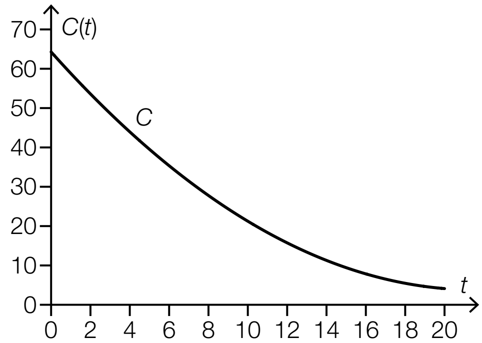
1) Zeigen Sie mithilfe des Differenzenquotienten, dass sich die Entwicklung der Gesamtproduktion von Papier in Österreich im Zeitraum von 1990 bis 2012 <u>nicht</u> durch ein lineares Modell beschreiben lässt. *[0/1 P.]*

d) Zur Papierherstellung wird gebleichter Zellstoff benötigt. Dieser wurde lange Zeit hauptsächlich mit Chlor gebleicht.

Die weltweite Produktionsmenge von Zellstoff, der mit Chlor gebleicht wurde, kann in den Jahren ab 1990 durch die Funktion C modelliert werden.

t … Zeit ab 1990 in Jahren
$C(t)$ … weltweite Produktionsmenge zur Zeit t in Millionen Tonnen pro Jahr

Der Graph der Funktion C ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

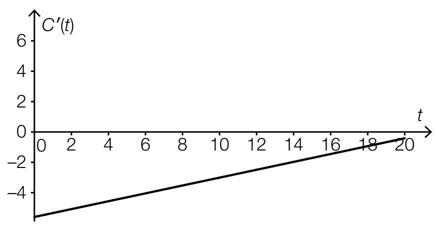
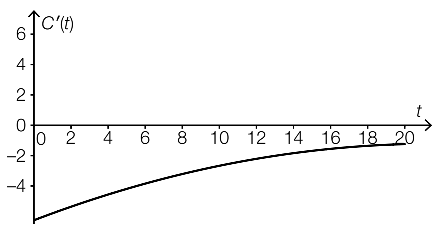
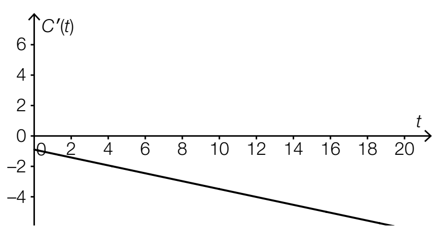
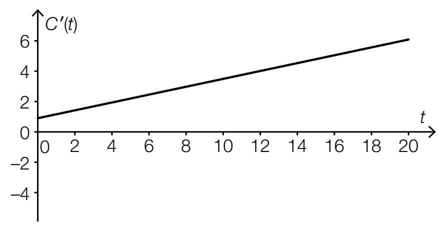
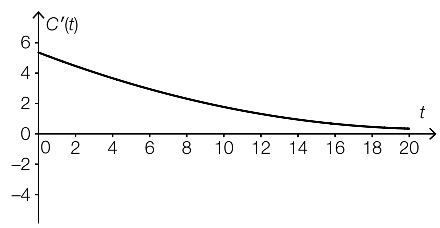


1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung den Wert des nachstehenden Ausdrucks.

$|C(10) - C(0)| \approx$ ____________________ Millionen Tonnen pro Jahr *[0/1 P.]*

Die Funktion C ist eine quadratische Funktion. Eine der unten stehenden Abbildungen zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion C'.

2) Kreuzen Sie die zutreffende Abbildung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) Gesamtflächeninhalt der 3 Blätter in mm²: $3 \cdot 210 \cdot 297 = 187\,110$
$187\,110 \text{ mm}^2 = 0{,}18711 \text{ m}^2$

Masse der 3 Blätter inklusive Briefumschlag in g: $0{,}18711 \cdot 80 + 4 = 18{,}9688$

Eva kann den Brief als Standardbrief versenden, da er nur rund 19 g wiegt.

a1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

b1) $\frac{109 + 69 + 25 + 22}{412} = \frac{225}{412} = 0{,}54611...$
Von diesen vier Staaten wurden im Jahr 2019 insgesamt rund 54,61 % der weltweiten Gesamtproduktion von Papier hergestellt.

b2) $22 \cdot 10^6 \text{ t} = 2{,}2 \cdot 10^{10} \text{ kg}$

Gesamtenergieverbrauch in kWh: $2{,}5 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{10} = 5{,}5 \cdot 10^{10}$
$5{,}5 \cdot 10^{10} \text{ kWh} = 55\,000 \text{ GWh}$

Der Gesamtenergieverbrauch für die Papierherstellung in Deutschland im Jahr 2019 betrug 55 000 GWh.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Gesamtenergieverbrauchs in GWh.

c1) Für die jeweiligen Differenzenquotienten gilt:
$\frac{4{,}39 - 2{,}93}{10} = 0{,}146$ bzw. $\frac{5{,}00 - 4{,}39}{12} = 0{,}050...$ bzw. $\frac{5{,}00 - 2{,}93}{22} = 0{,}094...$
Es liegt kein lineares Modell vor, weil die Differenzenquotienten nicht gleich sind.

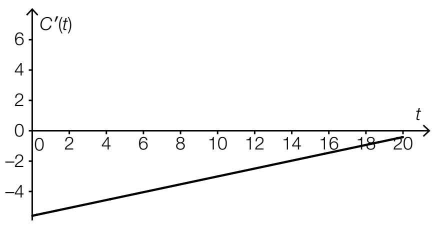
Für die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, alle 3 angegebenen Differenzenquotienten zu ermitteln. Auch ein Nachweis mit den Kehrwerten der angegebenen Differenzenquotienten ist als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für das richtige Zeigen mithilfe des Differenzenquotienten.

d1) $|C(10) - C(0)| \approx 43$ Millionen Tonnen pro Jahr

Toleranzbereich: [40; 46]

d2)

<table>
<tr><td>
</td><td>☒</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

d1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Wertes.
d2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ernteertrag

Aufgabennummer: A_128

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Landwirt will den Ertrag pro Quadratmeter für eine bestimmte Gemüsesorte steigern.
Dazu prüft er den Einsatz eines Düngemittels.

a) Die Ableitungsfunktion E' der Ertragsfunktion E lautet:

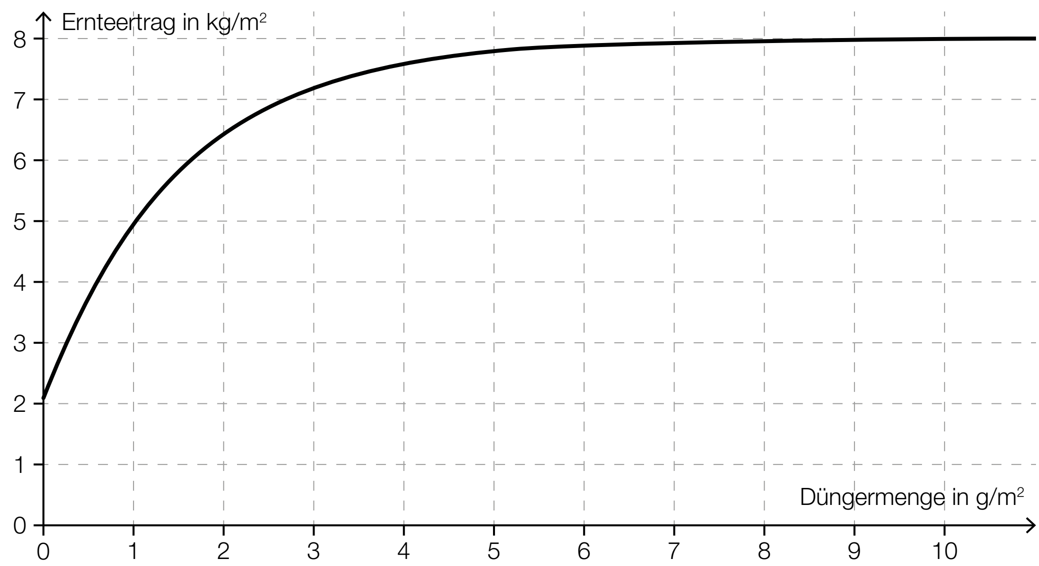
$E'(x) = -891 \cdot x^2 + 297 \cdot x$ mit $0 \leq x \leq 0{,}53$

x … Düngermenge in kg/m²
$E'(x)$ … lokale Ertragsänderungsrate des Ertrags bei der Düngermenge x

Ohne Düngemittel erntet der Landwirt durchschnittlich 2,5 kg Gemüse pro Quadratmeter.

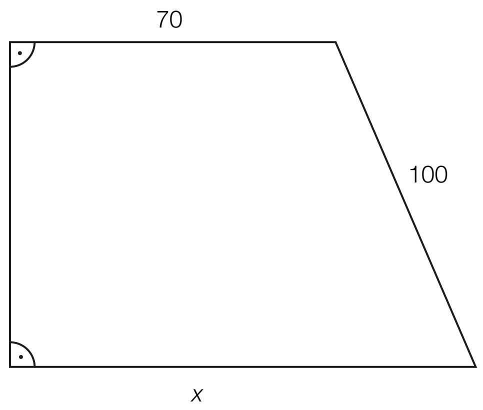
– Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Ertragsfunktion E.

b) Die nachstehende Grafik zeigt den Verlauf des Ernteertrags bei Anwendung eines speziellen Düngemittels, von dem maximal 11 g/m² ausgebracht werden dürfen.
Unter dem Begriff Grenzertrag bei einer bestimmten Düngermenge versteht man den Funktionswert der 1. Ableitung der Ertragsfunktion bei dieser Düngermenge.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik den Grenzertrag bei Verwendung einer Düngermenge von 1 g/m² ab.
– Interpretieren Sie den Verlauf der Kurve ab einer Düngermenge von 8 g/m² im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Die nachstehende Grafik zeigt ein zu düngendes Feld. Die Angabe der Seitenlängen erfolgt in Metern.



– Erstellen Sie aus x eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des Feldes.

$A =$ ____

Die Kosten für das Düngemittel betragen 50 Cent pro Kilogramm. Der Landwirt bringt 250 g Dünger pro Quadratmeter aus.

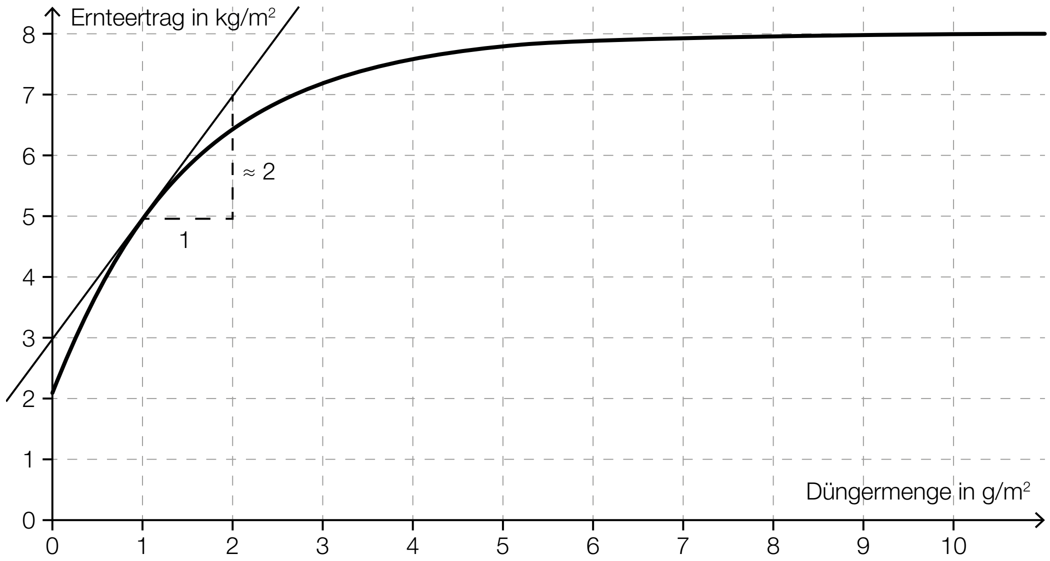
– Berechnen Sie die Kosten in Euro für die Düngung des Feldes für $x = 100$ m.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $E(x) = -297 \cdot x^3 + 148{,}5 \cdot x^2 + 2{,}5$

b)



Der Grenzertrag bei einer Düngermenge von 1 g/m² beträgt rund 2 kg Gemüse pro Gramm Düngemittel.

Ab einer Düngermenge von 8 g/m² erhöht sich der Ertrag bei höherem Düngereinsatz praktisch nicht mehr.

c) $A = \frac{(x + 70) \cdot \sqrt{100^2 - (x - 70)^2}}{2}$

$A = 8\,108{,}48...$

Kosten: $8\,108{,}48... \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}5 = 1\,013{,}56...$

Die Kosten der Düngung dieses Feldes betragen € 1.013,56.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) schwer	a) 1
b) schwer	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

Wählerverhalten

Aufgabennummer: A_044		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

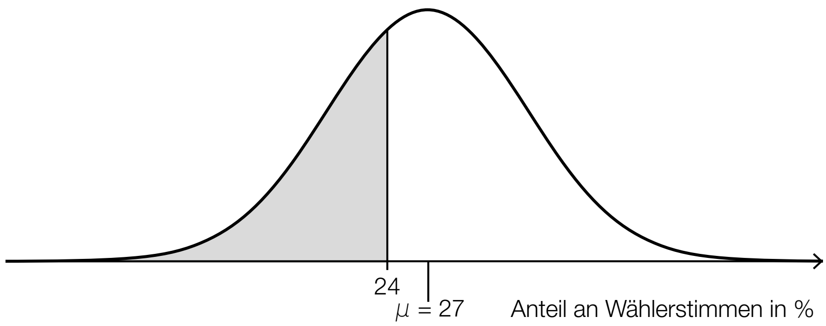
Der Anteil an Wählerstimmen für eine bestimmte Partei *A* aus den verschiedenen Wahlsprengeln war bei einer Nationalratswahl in Österreich normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 27 % und der Standardabweichung σ = 4,48 %.

a) – Erklären Sie ohne Berechnung, warum die folgenden beiden Aussagen gleich wahrscheinlich sind:

Aussage 1: „Die Partei *A* erhielt mindestens 31,5 % der Stimmen in einem zufällig ausgewählten Wahlsprengel."
Aussage 2: „Die Partei *A* erhielt höchstens 22,5 % der Stimmen in einem zufällig ausgewählten Wahlsprengel."

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Partei A mindestens 29,2 % der Stimmen in einem zufällig ausgewählten Wahlsprengel erhielt.

c) In der nachstehenden Abbildung ist die Dichtefunktion dieser Normalverteilung dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der grauen Fläche in der obigen Abbildung im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Geben Sie die Lösungen in ganzen Sätzen und mit den entsprechenden Maßeinheiten an.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Normalverteilung ist symmetrisch um den Erwartungswert $\mu = 27$ %.
$31{,}5\ \% = \mu + 4{,}5\ \%$
$22{,}5\ \% = \mu - 4{,}5\ \%$
Die entsprechenden Flächen $P(X \geq 31{,}5)$ und $P(X \leq 22{,}5)$ sind gleich groß und damit auch die Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
X ... Anteil erhaltener Stimmen in %
$P(X \geq 29{,}2) = 0{,}3116...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass Partei A mindestens 29,2 % der Stimmen in einem zufällig ausgewählten Wahlsprengel erhielt, beträgt rund 31,2 %.

c) Die graue Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass Partei A höchstens 24 % der Stimmen in einem zufällig ausgewählten Wahlsprengel erhielt.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) –
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 1
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 1

Thema: Alltag

Quellen: –

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

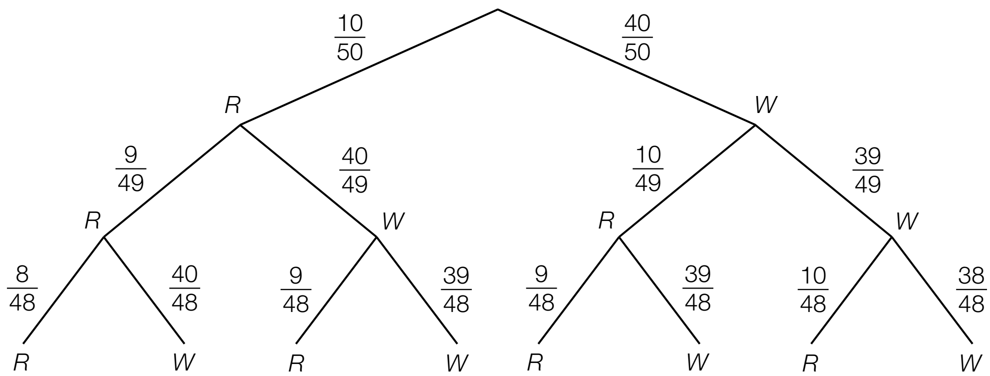
Spielefest (2)

Aufgabennummer: A_137

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Spielefest können die teilnehmenden Kinder verschiedene Spielstationen besuchen.

a) In einer Kiste befinden sich 10 rote und 40 weiße Kugeln. Jedes Kind darf 3-mal blind hineingreifen und jeweils 1 Kugel herausholen. Dann werden die Kugeln für das nächste Kind wieder hineingelegt.
Das nachstehende Baumdiagramm stellt diesen Sachverhalt für ein Kind dar.



– Kennzeichnen Sie im Baumdiagramm alle Möglichkeiten, 2 rote Kugeln (*R*) und 1 weiße Kugel (*W*) zu ziehen.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind 3 rote Kugeln zieht.

b) Bei einer Station werfen die Kinder aus einer bestimmten Entfernung 5 Tennisbälle in einen Kübel. Peter hat bei jedem Wurf eine Trefferwahrscheinlichkeit von 80 %.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Peter höchstens 4-mal trifft.

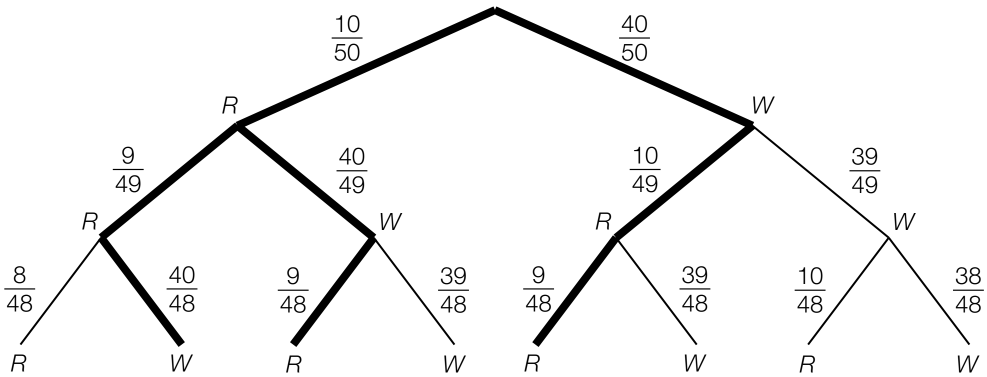
c) Beim Kirschkernweitspucken bekommt jedes Kind 2 Kirschen, deren Kerne es möglichst weit spucken soll. Die Flugbahn eines Kirschkerns kann modellhaft mit einer Polynomfunktion 2. Grades *h* beschrieben werden.
Thomas spuckt einen Kern aus einer Höhe von 1 m in einem Winkel von 45° nach oben weg. Der Kern fällt nach 8 m zu Boden.

– Stellen Sie mithilfe der gegebenen Bedingungen ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von *h* auf.
– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



X … Anzahl der roten Kugeln

$P(X = 3) = \frac{10}{50} \cdot \frac{9}{49} \cdot \frac{8}{48} = 0{,}0061\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, 3 rote Kugeln zu ziehen, liegt bei rund 0,6 %.

b) X … Treffer
$p = 0{,}8$; $n = 5$

$P(X \leq 4) = 1 - P(X = 5) = 1 - \binom{5}{5} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0 = 1 - 0{,}32768 = 0{,}67232$

Peter trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 67,2 % höchstens 4-mal.

Auch eine Berechnung ohne Gegenwahrscheinlichkeit ist zulässig.

c) x ... horizontale Entfernung in m
$h(x)$ ... Höhe bei der Entfernung x in m

$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$h'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$h(0) = 1$	*oder*	$c = 1$
$h(8) = 0$		$64 \cdot a + 8 \cdot b + c = 0$
$h'(0) = \tan(45°)$		$b = \tan(45°)$

$\Rightarrow \quad a = -\frac{9}{64}, \; b = 1, \; c = 1$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Wasserquelle

Aufgabennummer: A_129

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Unter dem *Volumenstrom* einer Wasserquelle versteht man dasjenige Wasservolumen, das pro Zeiteinheit durch die Öffnung der Quelle fließt. Man führt 3 unabhängige Messungen an einer Quelle durch, bei der im Laufe der Zeit der Volumenstrom abnimmt. Der Volumenstrom wird in der Einheit Liter pro Stunde (L/h) angegeben.

a) Zu Beginn der 1. Messung hat man einen Volumenstrom von 20 000 L/h.
Nach 150 h misst man 17 800 L/h.

– Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion f auf, die den Volumenstrom in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Beginn der 1. Messung.

b) Während einer 2. Messung kann der Volumenstrom mit der Funktion g beschrieben werden:

$g(t) = 17\,000 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}$

t … Zeit in h
$g(t)$ … Volumenstrom zur Zeit t in L/h

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate des Volumenstroms in den ersten 12 Stunden dieser Messung.
– Interpretieren Sie die Bedeutung der 1. Ableitung von g zur Zeit $t = 5$ h im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Während einer 3. Messung lässt sich der Volumenstrom mit der Funktion u beschreiben:

$u(t) = 15\,000 \cdot 0{,}998^t$

t … Zeit in h
$u(t)$ … Volumenstrom zur Zeit t in L/h

– Kreuzen Sie an, mit welchem Ausdruck das ausgetretene Wasservolumen in den ersten 9 Tagen berechnet werden kann. *[1 aus 5]*

$\int_0^{216} (15\,000 \cdot 0{,}998 \cdot t)\,\mathrm{d}t$	☐
$15\,000 + \int_0^{216} 0{,}998^t\,\mathrm{d}t$	☐
$\int_0^{9} (15\,000 + 0{,}998 \cdot t)\,\mathrm{d}t$	☐
$\int_0^{9} (15\,000 + 0{,}998^t)\,\mathrm{d}t$	☐
$15\,000 \cdot \int_0^{216} 0{,}998^t\,\mathrm{d}t$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(t) = 20\,000 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Zeit in h
$f(t)$ ... Volumenstrom zur Zeit t in L/h

$17\,800 = 20\,000 \cdot e^{-\lambda \cdot 150}$
$\Rightarrow \quad \lambda = 0{,}0007768...$
$f(t) = 20\,000 \cdot e^{-0{,}0007768... \cdot t}$

oder:

$f(t) = 20\,000 \cdot 0{,}9992...^{t}$

b) $\frac{g(12) - g(0)}{12 - 0} = \frac{15\,077{,}647... - 17\,000}{12} = -160{,}196...$

Die mittlere Änderungsrate in den ersten 12 Stunden entspricht einer stündlichen Abnahme des Volumenstroms von rund 160,20 L/h.

$g'(5)$ ist die momentane Änderungsrate des Volumenstroms nach 5 Stunden.
Das heißt, 5 Stunden nach Beobachtungsbeginn nimmt der Volumenstrom pro Stunde ungefähr um den Wert $|g'(5)|$ ab.

c)

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$15\,000 \cdot \int_0^{216} 0{,}998^t \, dt$	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 1
b) leicht	b) 2
c) mittel	c) 1

Thema: Physik

Quellen: —

Nennfüllmenge

Eine Verordnung stellt sicher, dass die Nennfüllmenge eines Produkts innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbereichs eingehalten wird.

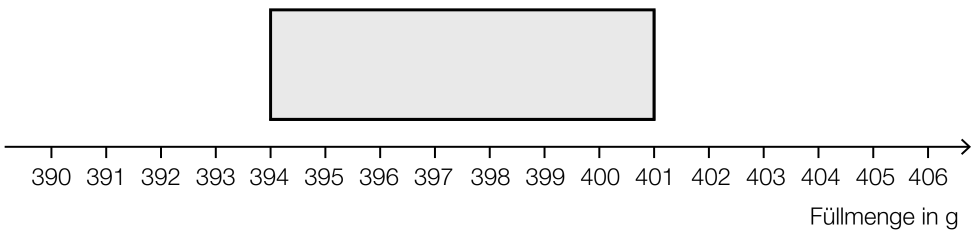
a) Die Füllmenge bestimmter Packungen von Tiefkühlerbsen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 400 g und der Standardabweichung σ = 3,5 g.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Packung die Nennfüllmenge (Erwartungswert) um mehr als 3 % unterschreitet.

b) Eine Kontrolle von 12 Packungen Tiefkühlgemüse mit einer Nennfüllmenge von je 400 g ergab folgende Ergebnisse:

Füllmenge in g	391	392	394	395	399	400	401	402	405
Anzahl der Packungen	1	1	2	2	1	1	2	1	1

1) Vervollständigen Sie den nachstehenden Boxplot.



c) Ein Betrieb füllt Tee ab. Man weiß, dass durchschnittlich 2,5 % der Packungen aus diesem Betrieb weniger als die angeführte Nennmenge enthalten. Aus einer Lieferung werden 40 Packungen nach dem Zufallsprinzip entnommen und überprüft.

1) Berechnen Sie die Anzahl derjenigen Packungen, bei denen ein geringerer Inhalt als die angegebene Nennfüllmenge zu erwarten ist.
2) Geben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$$P(E) = 0{,}975^{40} + \binom{40}{1} \cdot 0{,}025^1 \cdot 0{,}975^{39} + \binom{40}{2} \cdot 0{,}025^2 \cdot 0{,}975^{38}$$

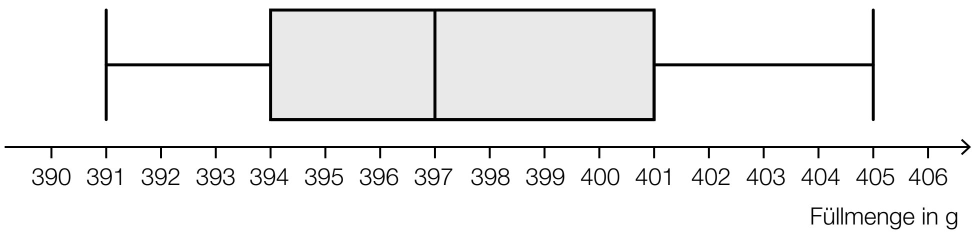
Möglicher Lösungsweg

a1) 3 % von 400 g sind 12 g.
X ... Füllmenge in g

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 388) = 0{,}00030\ldots$

Rund 0,03 % der Packungen unterschreiten die Nennfüllmenge um mehr als 3 %.

b1)



c1) p … Wahrscheinlichkeit, dass die Nennfüllmenge nicht erreicht wird
n … Anzahl der überprüften Packungen

$p = 0{,}025$
$n = 40$

Der Erwartungswert $\mu = 40 \cdot 0{,}025 = 1$, also kann man bei 40 Packungen durchschnittlich mit 1 Packung rechnen, die die Nennfüllmenge unterschreitet.

c2) E … „höchstens 2 Packungen weisen eine zu geringe Füllmenge auf“

Angry Birds (2)*

Aufgabennummer: A_242

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Computerspiel *Angry Birds* muss man mithilfe einer Schleuder Schweine treffen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Vögel zur Verfügung. Einige dieser Vögel haben besondere Funktionen, die durch einen Mausklick ausgelöst werden können. Koordinaten bzw. Abstände sind im Folgenden in Längeneinheiten (LE) angegeben.

a) Die Flugparabel des Vogels *Red* bei einem Wurf kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in Längeneinheiten (LE)
$f(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Red trifft kein Schwein und prallt auf den Boden auf.

– Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt der Vogel auf dem Boden aufprallt.

b) Die Flugbahn des Vogels *Chuck* kann zu Beginn durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$g(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$g(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Der Spieler löst in 3 LE horizontaler Entfernung vom Abschusspunkt durch einen Mausklick eine Spezialfunktion aus. Der Vogel bewegt sich ab diesem Punkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt entlang der Tangente an den gegebenen Funktionsgraphen.

– Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $P = (3|g(3))$.
– Veranschaulichen Sie die Flugbahn von Chuck vom Abschusspunkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt mithilfe einer geeigneten Grafik.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Flugbahn des Vogels *Matilda* kann durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades beschrieben werden.
Der Funktionsgraph schneidet die vertikale Achse bei 12. Er verläuft durch die Punkte $A = (1|16)$ und $B = (5|32)$. A ist ein Hochpunkt des Funktionsgraphen.

– Stellen Sie mithilfe der angegebenen Informationen ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

d) Bei einem anderen Angriff durch den Vogel Matilda kann die Flugbahn durch den Graphen der Funktion h beschrieben werden.

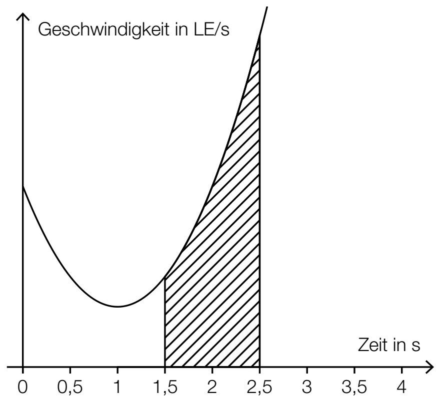
$h(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 8$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$h(x)$ ... Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Ein Schwein befindet sich im Punkt $P = (5|20)$.

– Berechnen Sie den Abstand des Schweins vom Abschusspunkt.
– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt.

e) Die nachstehende Grafik stellt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Vogels bei einem Wurf dar.



– Beschreiben Sie die Bedeutung der in der Grafik eingezeichneten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.

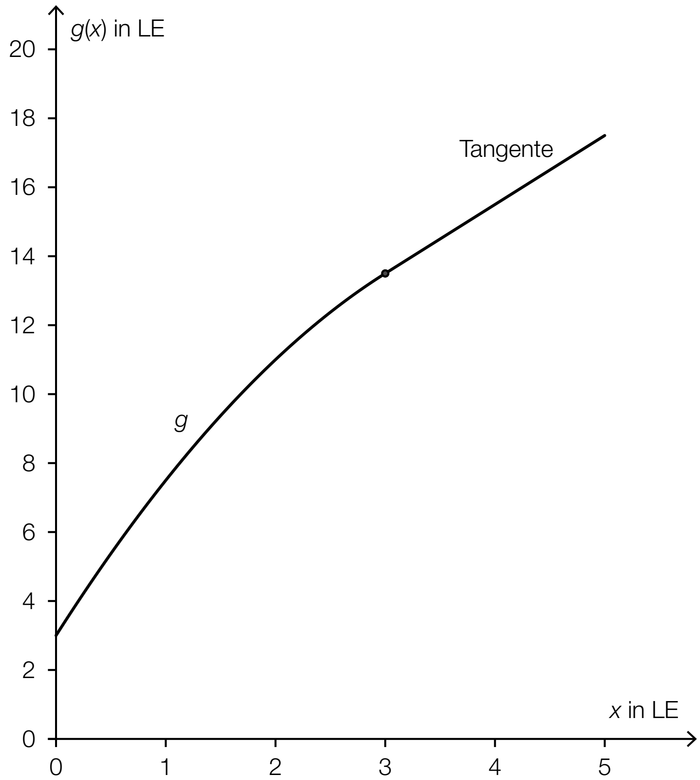
Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1 = 0$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -1)$
$x_2 = 10$

Der Vogel prallt in einer horizontalen Entfernung von 10 LE auf den Boden auf.

b) $g(3) = 13{,}5$
$g'(x) = -x + 5 \;\Rightarrow\; g'(3) = 2$
$13{,}5 = 2 \cdot 3 + d \;\Rightarrow\; d = 7{,}5$
Tangentengleichung: $y = 2 \cdot x + 7{,}5$



c) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

I: $f(0) = 12$
II: $f(1) = 16$
III: $f(5) = 32$
IV: $f'(1) = 0$

d) Koordinaten des Abschusspunkts: $A = (0|8)$
Position des Schweins: $P = (5|20)$

$\sqrt{5^2 + (20 - 8)^2} = 13$

Der Abstand des Schweins vom Abschusspunkt beträgt 13 LE.

$h(5) = 18$

Der Punkt P liegt nicht auf Matildas Flugbahn.

e) Die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion beschreibt den vom Vogel zurückgelegten Weg im Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s] nach dem Abschuss.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der horizontalen Entfernung

b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Tangentengleichung
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Flugbahn
(für $0 \leq x \leq 3$ Graph von g, für $3 \leq x \leq 5$ Tangente)

c) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung

d) 1 × B: für die richtige Berechnung des Abstands
1 × D: für die richtige Überprüfung, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt

e) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Fläche im gegebenen Sachzusammenhang unter Bezugnahme auf das Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s]

Regenrinne

a) Der Querschnitt einer Regenrinne hat die Form eines Kreisabschnitts mit den Maßen wie in Abb. 1.

R ... Radius des Kreises
h ... Höhe der Rinne
M ... Mittelpunkt des Kreises

1) Berechnen Sie y.
2) Berechnen Sie die Bogenlänge b.

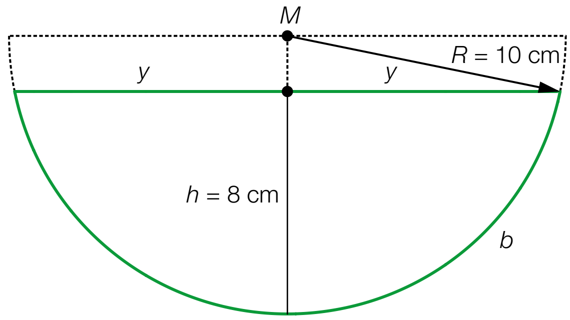


Abb. 1

b) Es gibt Regenrinnen mit halbkreisförmigem Querschnitt (Radius R) und solche mit rechteckigem Querschnitt (Breite x, Höhe = Radius R). Die Inhalte der beiden grau markierten Querschnittsflächen sollen gleich groß sein (siehe Abbildung 2).

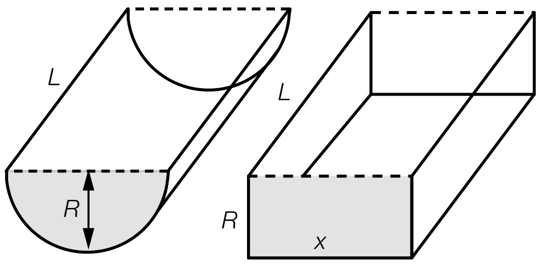


Abb. 2

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von x auf.
2) Zeigen Sie für $R = 7{,}5$ cm und $L = 1$ m, dass die Mantelfläche der halbkreisförmigen Regenrinne kleiner als die Mantelfläche der rechteckigen Regenrinne ist.

c) Eine bestimmte Regenrinne hat eine rechteckige Querschnittsfläche mit der Breite x und der Höhe y. In Abbildung 3 ist der Materialverbrauch für die Herstellung dieser Regenrinne mit der Länge 1 m in Abhängigkeit von der Breite x dargestellt.

1) Lesen Sie aus der nachstehenden Abbildung den Wert von derjenigen Breite ab, bei der der Materialverbrauch am geringsten ist.

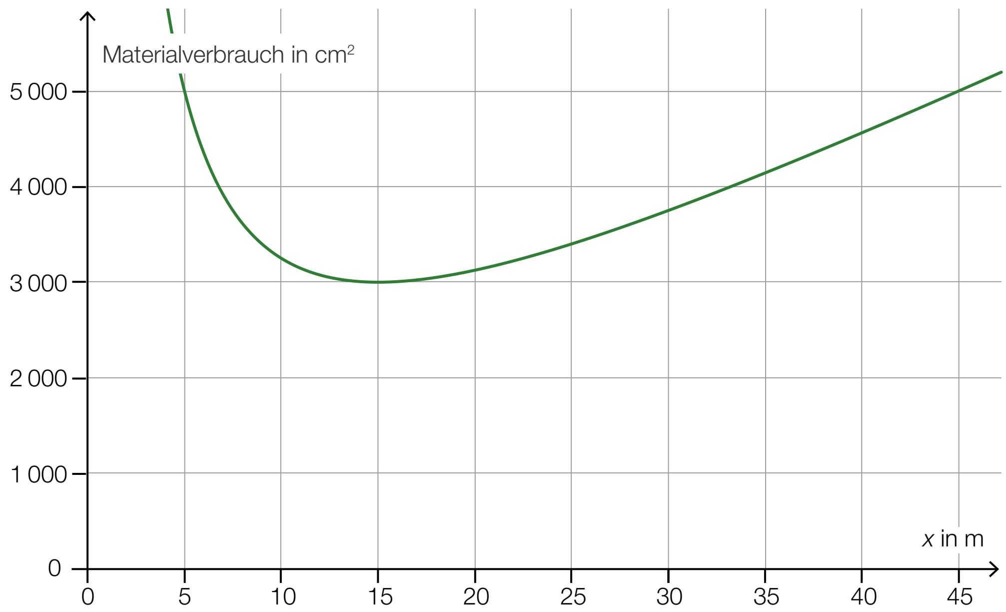


Abb. 3

2) Berechnen Sie die zugehörige Höhe h dieser Regenrinne.

Möglicher Lösungsweg

a1) $y = \sqrt{100 - 4} = 9{,}797$ cm

a2) $b = \frac{R \cdot \pi \cdot \alpha}{180°}$

$\cos(\alpha) = 0{,}2$

$b = \frac{10 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \arccos(0{,}2)}{180°} = 27{,}388... \approx 27{,}4$

Die Bogenlänge b beträgt rund 27,4 cm.

b1) Kastenquerschnitt = $R \cdot x$
Er entspricht der Halbkreisfläche.

$\frac{R^2 \cdot \pi}{2} = R \cdot x$
$x = 0{,}5 \cdot \pi \cdot R$

b2) Mantelfläche der kastenförmigen Rinne:
$M = (2 \cdot R + x) \cdot L = 2678{,}0...$ cm²

Mantelfläche der halbkreisförmigen Rinne:
$M_2 = R \cdot \pi \cdot L = 2356{,}1...$ cm²

$M > M_2$

c1) Die Regenrinne hat bei der Breite $x \approx 15$ cm den geringsten Materialverbrauch.

c2) $(2 \cdot h + 15) \cdot 100 = 3000$
$h = 7{,}5$

Die Höhe h der Regenrinne beträgt 7,5 cm.

Tagestemperaturverlauf

Aufgabennummer: A_057

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Tagestemperaturverlauf von Innsbruck für einen Sommertag lässt sich annähernd durch folgende Funktion beschreiben:

$$T(t) = \frac{37}{172\,740} \cdot t^4 - \frac{2\,277}{131\,404} \cdot t^3 + \frac{4\,953}{13\,406} \cdot t^2 - \frac{7\,804}{4\,101} \cdot t + \frac{70\,604}{4\,029}$$

t … Zeit in Stunden (h) $\quad 0\text{ h} \leq t \leq 24\text{ h}$
$T(t)$ … Temperatur in Grad Celsius (°C) zum Zeitpunkt t

a) – Stellen Sie die Funktion im angegebenen Definitionsbereich grafisch dar.
– Lesen Sie aus dieser Grafik den Unterschied zwischen maximaler und minimaler Temperatur an diesem Tag ab.

b) – Berechnen Sie mithilfe der Differenzialrechnung denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Tagestemperatur am höchsten ist.

c) – Begründen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, warum eine Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendepunkt hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

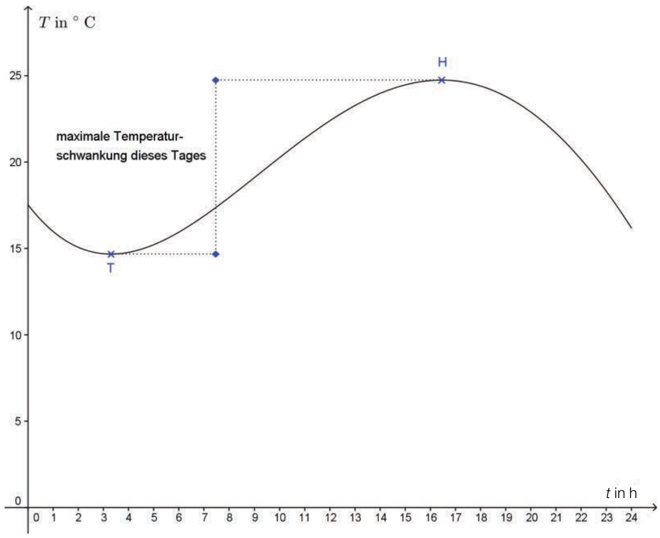
Möglicher Lösungsweg

a) minimale Temperatur:
$T_{min} = 14{,}7$ °C

maximale Temperatur:
$T_{max} = 24{,}7$ °C

Unterschied zwischen maximaler und minimaler Temperatur (= maximale Temperaturschwankung) an diesem Tag:
$\Delta T = 10$ °C

(Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.)



b) Ermittlung des Maximums

$$T'(t) = \frac{37}{43\,185} \cdot t^3 - \frac{6\,831}{131\,404} \cdot t^2 + \frac{4\,953}{6\,703} \cdot t - \frac{7\,804}{4\,101}$$

$$T''(t) = \frac{37}{14\,395} \cdot t^2 - \frac{6\,831}{65\,702} \cdot t + \frac{4\,953}{6\,703}$$

$T'(t) = 0 \;\Rightarrow\; t_1 \approx 3{,}3;\ t_2 \approx 16{,}4;\ t_3 \approx 40{,}9$ (liegt nicht im Definitionsbereich)

(Randstellen-Überprüfung: $T(0) \approx 17{,}52$ °C; $T(24) \approx 16{,}18$ °C)

$T''(3{,}3) \approx 0{,}42 \;\Rightarrow\;$ Minimum bei $t \approx 3{,}3$ h
$T''(16{,}5) \approx -0{,}28 \;\Rightarrow\;$ Maximum bei $t \approx 16{,}5$ h
(Auch andere gleichwertige Argumentationen sind zulässig.)

Um 16:30 Uhr ist es in Innsbruck am wärmsten.

c) Die allgemeine Gleichung einer Polynomfunktion 3. Grades lautet:
$f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ mit $a \neq 0$.
Die 2. Ableitung f'' ist eine lineare Funktion. Die Gleichung $f''(t) = 0$ hat genau 1 Lösung, deshalb 1 Wendepunkt.
(Auch andere gleichwertige Argumentationen sind zulässig.)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1

Thema: Geografie

Quelle: http://wetter.vienna.at/?region=tirol

Kleingartensiedlung

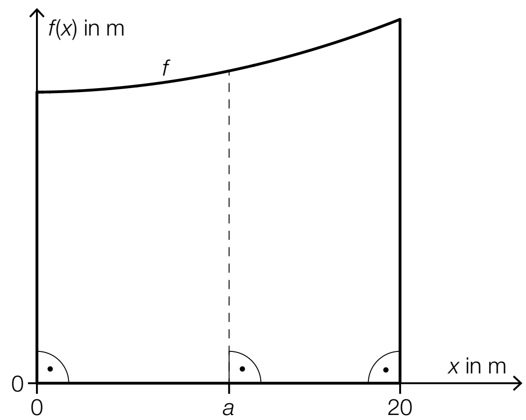
a) In einem Plan ist ein Grundstück durch 3 gerade Seiten und durch den Graphen der Funktion f begrenzt (siehe unten stehende Abbildung).

$f(x) = 0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}01 \cdot x + 16 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 20$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

Das Grundstück soll so halbiert werden, dass 2 Kleingärten mit gleich großem Flächeninhalt entstehen.

Die Halbierung soll – wie in der nachstehenden Abbildung dargestellt – an der Stelle a erfolgen.



1) Berechnen Sie die Stelle a. *[0/1/2 P.]*

b) Ein Gartenhaus mit einem Pultdach hat eine rechteckige Grundfläche mit den Seiten a und b (siehe nachstehende Abbildungen).

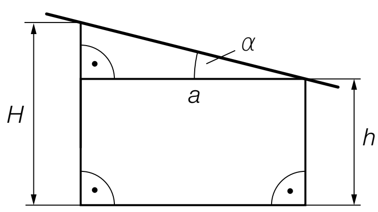


Abbildung 1

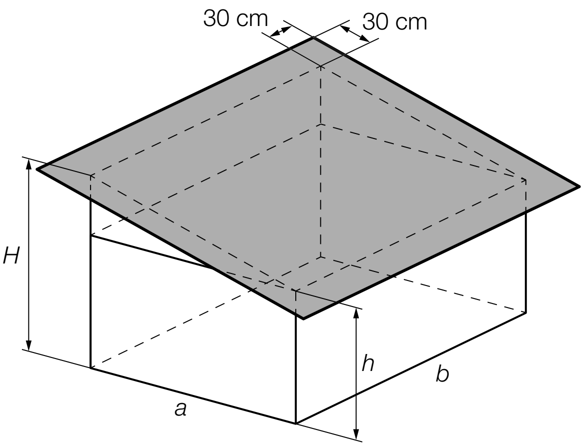


Abbildung 2

a, b, h, H ... Längen in cm

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe H auf. Verwenden Sie dabei a und h sowie den Winkel α.

$H =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

In der obigen Abbildung 2 ist das Pultdach als graues Rechteck dargestellt, das auf allen 4 Seiten jeweils gleich weit über den Rand reicht.

2) Kreuzen Sie den richtigen Ausdruck für den Inhalt der Fläche des grauen Rechtecks in cm^2 an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$b \cdot \sqrt{(H-h)^2 - a^2} + 60 \cdot 60$	☐
$\sqrt{(H-h+a)^2} \cdot (b + 60)$	☐
$\left(\sqrt{(H-h)^2 + a^2} + 60\right) \cdot (b + 60)$	☐
$60 \cdot b + \sqrt{H^2 - h^2 + a^2} \cdot b$	☐
$(60 + (H^2 - h^2 + a^2)) \cdot b$	☐

Möglicher Lösungsweg

Kleingartensiedlung

a1) $\frac{1}{2} \cdot \int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x = 174{,}3...$

$\int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 174{,}3...$

oder:

$\int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 10{,}61...$

a1) Ein Punkt für den richtigen Ansatz.
Ein Punkt für das richtige Berechnen von a.

b1) $H = h + a \cdot \tan(\alpha)$

b2)

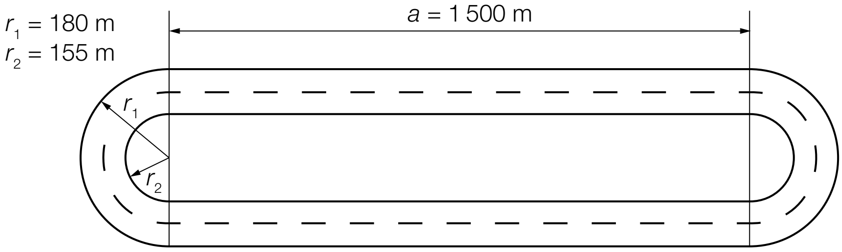
$\left(\sqrt{(H-h)^2 + a^2} + 60\right) \cdot (b + 60)$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Autorennspiel

Susanne und René spielen ein Autorennspiel auf einer Spielkonsole. Dabei fahren sie mit je einem Auto einige Runden auf einem Rundkurs.

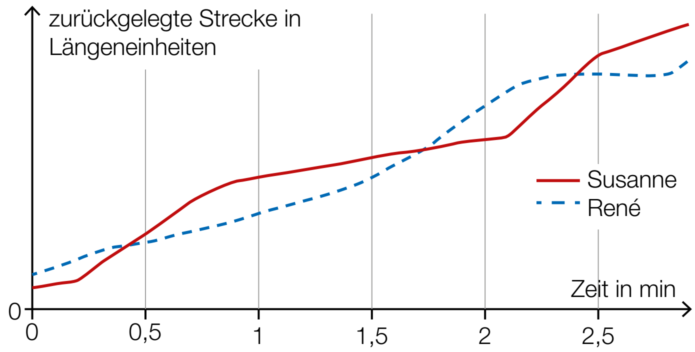
a) Der Kurs hat die in der nachstehenden Abbildung dargestellte Form.



Die Mitte der Fahrbahn ist in der obigen Abbildung strichliert dargestellt.

1) Berechnen Sie die Länge dieser strichliert dargestellten Linie.

b) Das nachstehende Diagramm gibt einen Abschnitt des Spielverlaufs wieder.



1) Kreuzen Sie die auf den im obigen Diagramm dargestellten Streckenabschnitt zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach 2 Minuten liegt Susannes Auto in Führung.	☐
Susanne überholt René genau 3-mal.	☐
Susannes Auto liegt im Zeitintervall [1; 2] immer vor Renés Auto.	☐
René fährt zur Zeit t = 2 Minuten schneller als Susanne.	☐
Susanne bleibt genau 1-mal stehen.	☐

c) Bei dem Spiel kann man das Auto des Gegners mit Magneten „bewerfen“ und dadurch Bonuspunkte erhalten. In einem Spiel hat man maximal 2 Würfe zur Verfügung. Ein zweiter Wurf ist nur möglich, wenn beim ersten Wurf kein Treffer erzielt wurde.

1. Wurf: 70 % Trefferwahrscheinlichkeit
2. Wurf: 40 % Trefferwahrscheinlichkeit

1) Veranschaulichen Sie die möglichen Ausgänge dieses Zufallsexperiments in einem mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, in einem Spiel das Auto des Gegners zu treffen.

Möglicher Lösungsweg

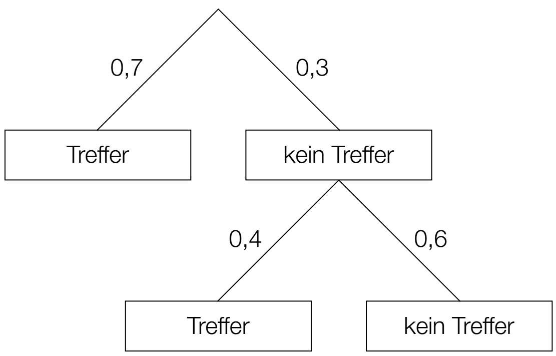
a1) Radius der halbkreisförmigen Teile der Strecke: $r = \frac{r_1 + r_2}{2} = 167{,}5$

Länge der Strecke: $l = 2 \cdot a + 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 1\,500 + 2 \cdot 167{,}5 \cdot \pi = 4\,052{,}4...$

b1)

René fährt zur Zeit t = 2 Minuten schneller als Susanne.	☒

c1)



c2) $P(\text{„Treffer“}) = 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}82$

Die Wahrscheinlichkeit, in einem Spiel das Auto des Gegners zu treffen, beträgt 82 %.

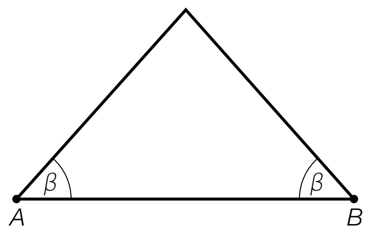
Zimmerei

Aufgabennummer: A_099

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Zimmereibetrieb ergeben sich die folgenden Aufgabenstellungen:

a) Der Querschnitt eines Dachstuhls hat die Form eines gleichschenkeligen Dreiecks (siehe nachstehende Skizze). Eine Dachneigung von $\beta = 30°$ ist vorgesehen. Die Breite des Hauses ($\overline{AB}$) beträgt 10 m.



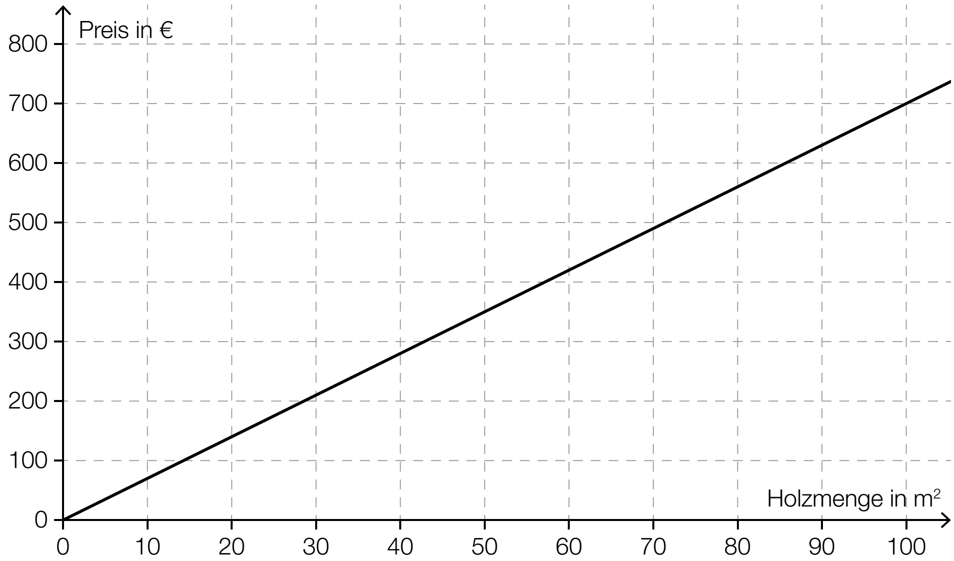
– Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der die Höhe dieses Dachstuhls berechnet werden kann.
– Berechnen Sie diese Höhe.

b) Der Zimmereibetrieb überprüft eine Lieferung von Konstruktionsholz aus Fichte. Erfahrungsgemäß ist ein bestimmter Prozentsatz der Fichtenstämme von minderer Qualität und daher nicht verwendbar. Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Fichten von minderer Qualität in einer Lieferung.

– Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet wird:
$P(E) = 1 - P(X \leq 2)$

c) Ein Kunde des Zimmereibetriebs plant den Bau eines Holzdachs. Er benötigt Fichtenbretter einer bestimmten Stärke. Er holt zwei Angebote ein:

Angebot 1: in der nachstehenden Grafik als Graph einer linearen Funktion abgebildet



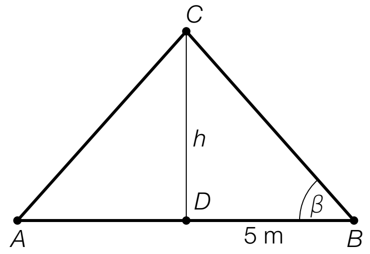
Angebot 2: € 6 je Quadratmeter Fichtenbretter, dazu mengenunabhängige Transportkosten von € 50

– Veranschaulichen Sie das Angebot 2 in der obigen Grafik.
– Lesen Sie ab, ab welcher Holzmenge in m^2 das Angebot 2 billiger ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



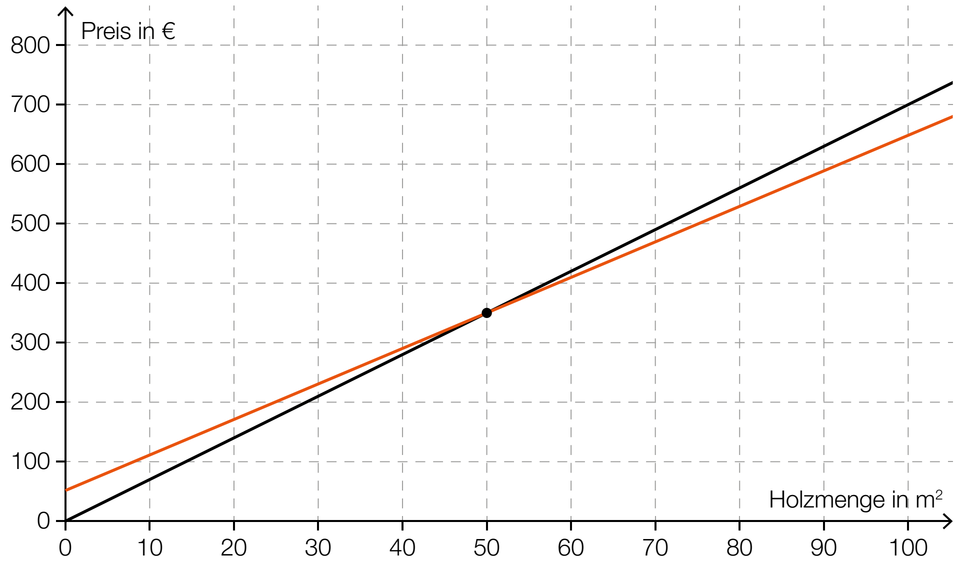
$\tan(30°) = \frac{h}{5}$

$h = 5 \cdot \tan(30°) = 2{,}88\ldots$

$h \approx 2{,}9$ m

b) E ... in einer Lieferung sind mehr als 2 Fichten von minderer Qualität

c)



Ab einer Holzmenge von mehr als 50 m² ist das Angebot 2 günstiger.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Bauwesen

Quellen: —

Feinstaub

Feinstaub in der Atemluft stellt ein Gesundheitsrisiko dar.

a) An einer Messstelle in Graz wurde an einem bestimmten Tag von 5:00 Uhr bis 13:00 Uhr die Feinstaubbelastung gemessen. Die Funktion f beschreibt näherungsweise die Feinstaubbelastung in Abhängigkeit von der Zeit.

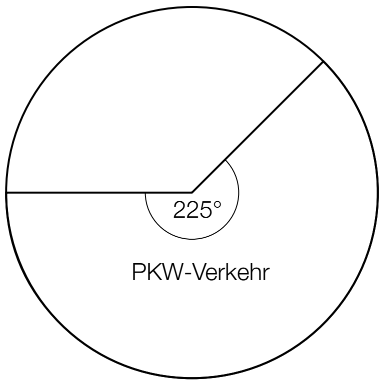
$f(t) = -1{,}4 \cdot t^2 + 11 \cdot t + 47 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 8$

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für 5:00 Uhr
$f(t)$ ... Feinstaubbelastung zur Zeit t in μg/m^3

1) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.
Es gilt: $t_1 = 0$ h, $t_2 = 4$ h
$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = 5{,}4$ *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie diejenige Uhrzeit, zu der $f'(t) = -10$ gilt. *[0/1 P.]*

b) Die Feinstaubbelastung durch den Straßenverkehr wird in 3 Kategorien von Verursachern unterteilt: PKW-Verkehr, LKW-Transitverkehr und sonstiger LKW-Verkehr. Das nachstehende Kreisdiagramm soll die Feinstaubbelastung durch den Straßenverkehr darstellen.

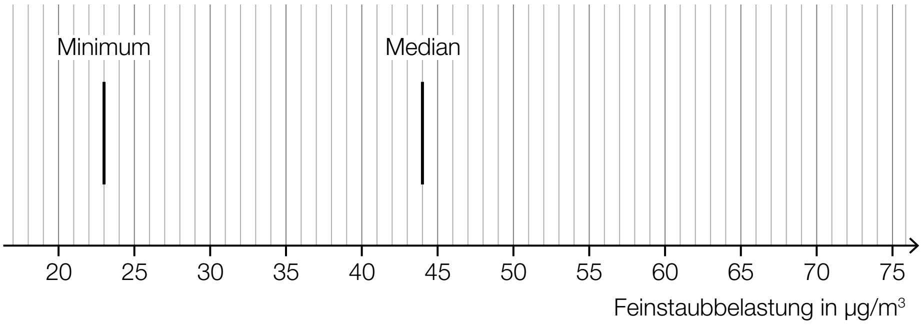


Die Feinstaubbelastung durch den LKW-Transitverkehr ist doppelt so hoch wie die Feinstaubbelastung durch den sonstigen LKW-Verkehr.

1) Vervollständigen Sie das obige Kreisdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[0/1 P.]*

c) Es wurden Messwerte der Feinstaubbelastung für einige Messstationen ausgewertet.
Diese Messwerte sollen im unten stehenden Diagramm als Boxplot veranschaulicht werden.
Das Minimum und der Median der Messwerte sind bereits eingezeichnet.
Weiters gilt:

- 3. Quartil (q_3): 59 μg/m³
- Spannweite: 49 μg/m³
- Interquartilsabstand: 26 μg/m³



1) Vervollständigen Sie den Boxplot im obigen Diagramm. *[0/1 P.]*

Der Messwert einer bestimmten Messstation mit einer besonders hohen Feinstaubbelastung wurde bei der Erstellung des Boxplots nicht berücksichtigt. Dieser Messwert ist um 134 % größer als der im obigen Diagramm eingezeichnete Median.

2) Ermitteln Sie diesen Messwert. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Im Zeitintervall [0; 4] steigt die Feinstaubbelastung um durchschnittlich 5,4 μg/m³ pro Stunde an.

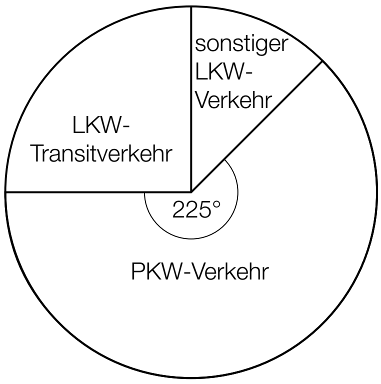
oder:

Das Ergebnis gibt die mittlere Änderungsrate der Feinstaubbelastung im Zeitintervall [0; 4] an.

a2) $f'(t) = -10$ *oder* $-2{,}8 \cdot t + 11 = -10$
$t = 7{,}5$
Uhrzeit: 12:30 Uhr

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Uhrzeit.

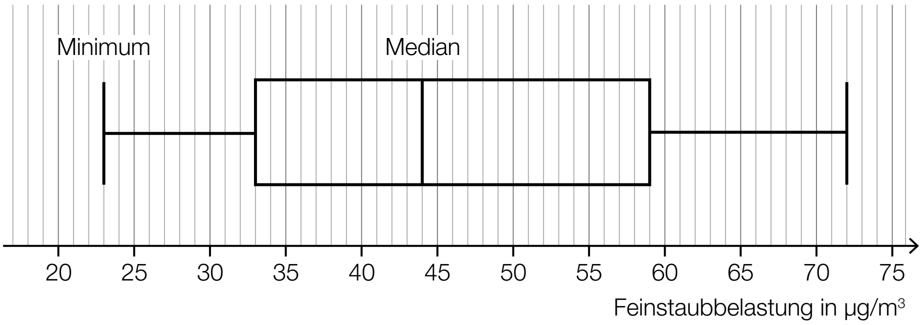
b1)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es nicht notwendig, die Winkel der beiden ergänzten Sektoren (90° bzw. 45°) anzugeben.

b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Kreisdiagramms.

c1)



c2) $44 \cdot 2{,}34 = 102{,}96$

Der Messwert beträgt rund 103 µg/m^3.

c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Boxplots.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Messwerts.

Straßenbahn (1)

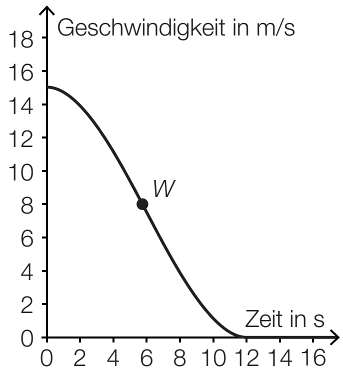
Aufgabennummer: A_028		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Beim Bremsen tritt eine negative Beschleunigung auf. Den Betrag dieser negativen Beschleunigung bezeichnet man als Bremsverzögerung.

a) Eine Straßenbahn beginnt vor der Haltestelle zu bremsen. Vom Bremsbeginn bis zum Stillstand lässt sich der Geschwindigkeitsverlauf näherungsweise durch die folgende Funktion v beschreiben:

$$v(t) = \frac{5}{288} \cdot t^3 - \frac{5}{16} \cdot t^2 + 15 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 12$$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s



– Interpretieren Sie die beiden Koordinaten des Wendepunkts W der Funktion v im gegebenen Sachzusammenhang.

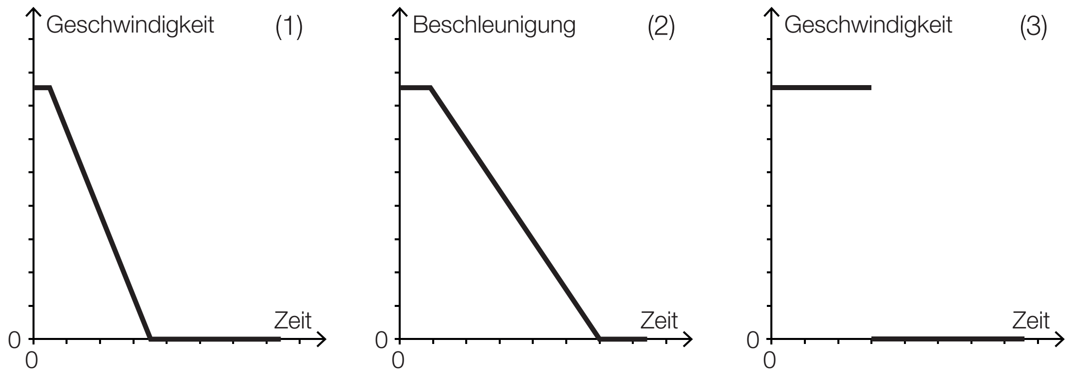
– Berechnen Sie die maximale Bremsverzögerung.

b) Eine Notbremsung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ s bei einer Geschwindigkeit der Straßenbahn von 15 m/s eingeleitet wird, erfolgt mit einer konstanten Bremsverzögerung von 2,5 m/s².

– Erstellen Sie ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm, das diesen Sachverhalt darstellt.

c) Bei einer Notbremsung mit konstanter Bremsverzögerung benötigt ein Straßenbahnfahrer eine gewisse Zeitspanne, um den Bremsvorgang einzuleiten (Reaktionszeit).

– Geben Sie an, welcher der unten dargestellten Graphen diesen Sachzusammenhang zutreffend beschreibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die 1. Koordinate von W ist diejenige Zeit, zu der die Bremsverzögerung maximal ist.
Die 2. Koordinate von W ist die Geschwindigkeit zu dieser Zeit.

$$v'(t) = \frac{5}{96} \cdot t^2 - \frac{5}{8} \cdot t$$

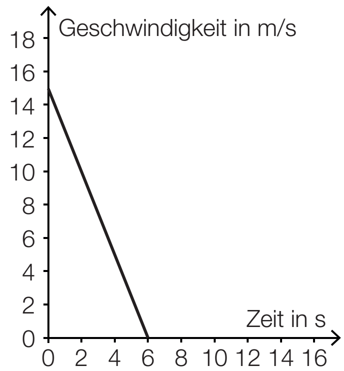
$$v''(t) = \frac{5}{48} \cdot t - \frac{5}{8}$$

$$v''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 6$$

$$v'(6) = -1{,}875$$

Die maximale Bremsverzögerung beträgt 1,875 m/s².

b)



c) Nur der Graph (1) berücksichtigt in korrekter Weise die angeführte Reaktionszeit und die konstante Bremsverzögerung.
Die Geschwindigkeit bleibt während der Reaktionszeit konstant – danach verringert sich die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand.
Der Verlauf des Graphen (2) würde eine positive Beschleunigung bedeuten.
Der Verlauf des Graphen (3) würde einen plötzlichen Stillstand (ohne Bremszeit) bedeuten.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Physik

Quellen: —

Bäume*

Aufgabennummer: A_299

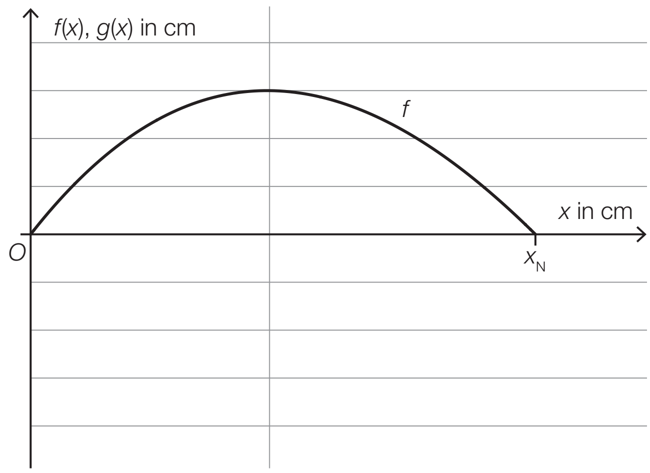
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Form des Blattes einer Buche lässt sich in einem Koordinatensystem näherungsweise durch die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und dem Graphen der Funktion g beschreiben.

$f(x) = 0{,}0047 \cdot x^3 - 0{,}2 \cdot x^2 + 1{,}28 \cdot x$ mit $0 \leq x \leq x_N$
$g(x) = -f(x)$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion f dargestellt.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Funktion g im Intervall $[0; x_N]$ ein.

2) Berechnen Sie die Nullstelle x_N.

3) Berechnen Sie gemäß diesem Modell den Flächeninhalt dieses Blattes.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für eine Modellrechnung werden folgende Annahmen getroffen:
An einem bestimmten Sommertag scheint die Sonne 14,5 Stunden lang.
Ein Blatt eines Laubbaums produziert bei Sonnenschein pro Stunde 2,14 mg Sauerstoff.
Ein Laubbaum hat 30 000 Blätter.

1) Berechnen Sie die Sauerstoffmenge, die solch ein Laubbaum an diesem Sommertag produziert. Geben Sie das Ergebnis in Kilogramm an.

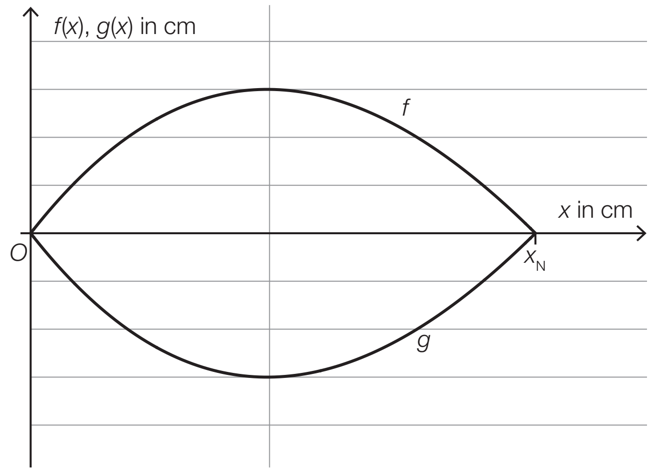
Eine Person benötigt 0,816 kg Sauerstoff pro Tag.
Man möchte wissen, wie viele solcher Laubbäume erforderlich sind, um den täglichen Sauerstoffbedarf von x Personen zu decken. Diese Anzahl an Laubbäumen wird mit n bezeichnet.

2) Stellen Sie mithilfe von x eine Formel zur Berechnung von n auf.

n = ____

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f(x) = 0$ *oder* $0{,}0047 \cdot x^3 - 0{,}2 \cdot x^2 + 1{,}28 \cdot x = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 0$, $x_2 = 7{,}84...$, $x_3 = 34{,}70...$
$x_N = 7{,}84...$

a3) $2 \cdot \int_0^{7{,}84...} f(x)\,\mathrm{d}x = 23{,}30...$
Der Flächeninhalt dieses Blattes beträgt rund 23,3 cm².

b1) $\frac{30\,000 \cdot 2{,}14 \cdot 14{,}5}{1\,000 \cdot 1\,000} = 0{,}9309$

Ein solcher Laubbaum produziert an diesem Sommertag rund 0,93 kg Sauerstoff.

b2) $n = \frac{0{,}816}{0{,}9309} \cdot x$ *oder* $n = 0{,}8765... \cdot x$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Funktion g.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Nullstelle x_N.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Flächeninhalts.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der produzierten Sauerstoffmenge in kg.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bungeejumping

Aufgabennummer: A_088

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Beim Bungeejumping befindet man sich so lange im freien Fall, bis sich das Seil zu dehnen beginnt. Der während des freien Falles zurückgelegte Weg wird annähernd durch die Weg-Zeit-Funktion s beschrieben:

$$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

t … Zeit in s
$s(t)$ … zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in m
g … Erdbeschleunigung (≈ 10 m/s²)

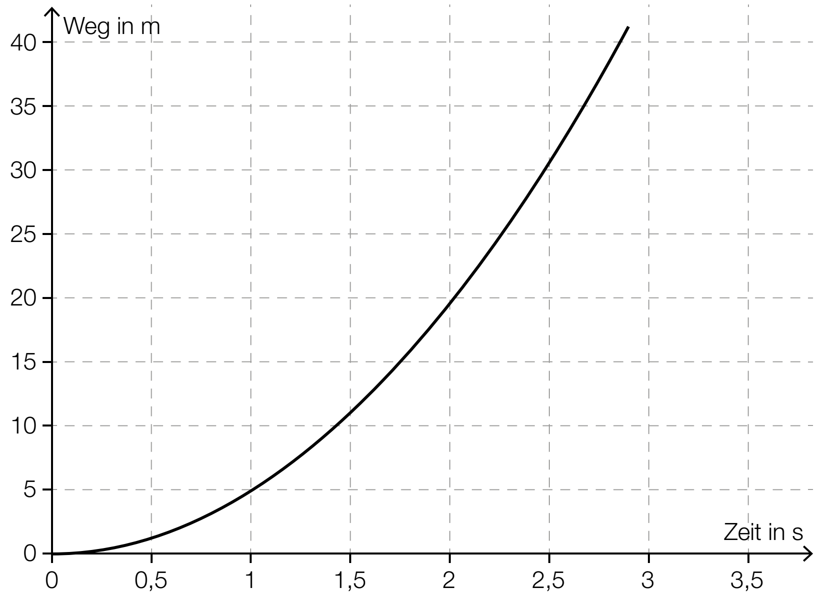
a) Für einen Bungeejump von der Jauntalbrücke in Kärnten wird ein 23 m langes Seil verwendet.

– Berechnen Sie, wie lang der freie Fall dauert.

b) Beim Sprung vom Wiener Donauturm wird ein längeres Seil verwendet. Der freie Fall dauert 2,8 Sekunden.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t.
– Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit nach 2,8 Sekunden.

c) Das nachstehende Weg-Zeit-Diagramm zeigt den freien Fall eines Bungeejumpers.



– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Für 30 m im freien Fall braucht der Bungeejumper etwa 2 Sekunden.	☐
Die Geschwindigkeit erhöht sich, je länger der freie Fall dauert.	☐
Nach 1,5 Sekunden im freien Fall hat der Bungeejumper rund 16 m zurückgelegt.	☐
In der 2. und der 3. Sekunde legt der Bungeejumper die gleiche Strecke zurück.	☐
Die Geschwindigkeit während der ersten 2 Sekunden ist konstant.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $s(t) = 23$

$\frac{10}{2} \cdot t^2 = 23$

$t = 2{,}14...$

Der freie Fall dauert rund 2,1 Sekunden.

b) $v(t)$... Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s

$v(t) = s'(t) = g \cdot t$

$v(2{,}8) = 10 \cdot 2{,}8 = 28$

Die Momentangeschwindigkeit nach 2,8 Sekunden beträgt 28 m/s.

c)

Die Geschwindigkeit erhöht sich, je länger der freie Fall dauert.	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) leicht

Punkteanzahl:

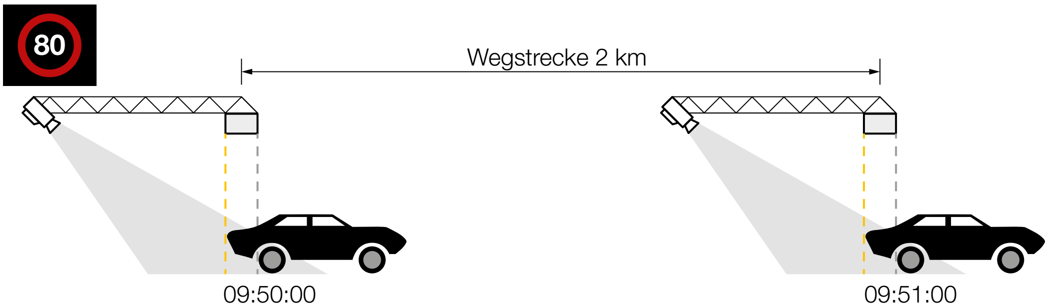
a) 1
b) 2
c) 1

Thema: Physik

Quellen: —

Geschwindigkeitskontrolle

a) Mithilfe der *Section Control* kann die Einhaltung von Geschwindigkeitsbeschränkungen kontrolliert werden.



1) Überprüfen Sie anhand der Informationen aus der obigen Grafik nachweislich, ob der Autofahrer die Geschwindigkeitsbeschränkung von 80 km/h eingehalten hat.

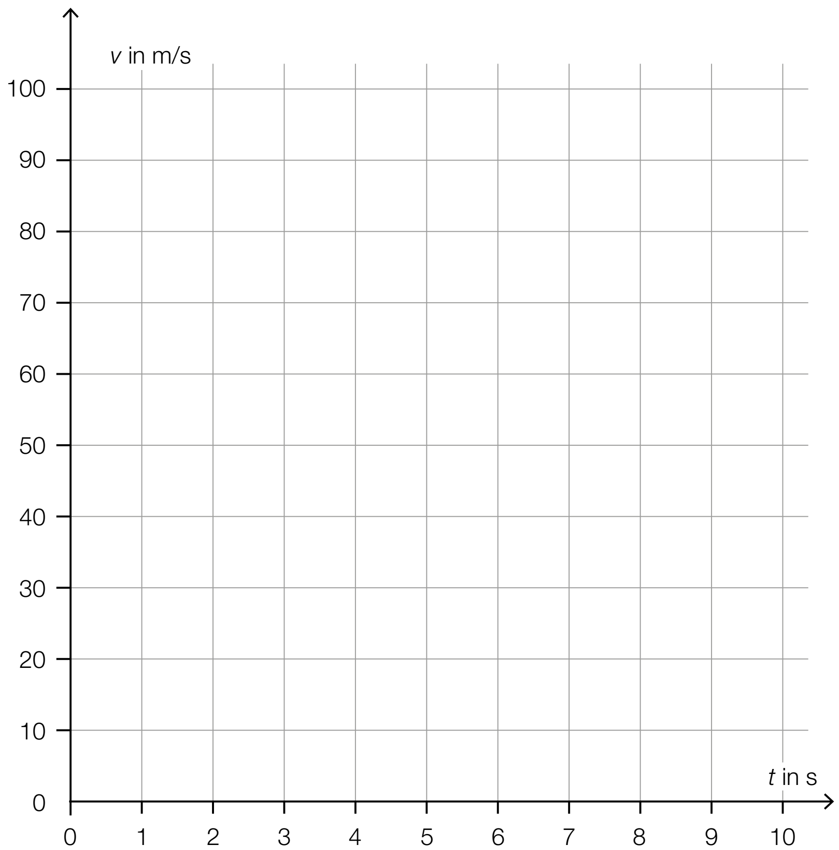
b) Die Polizei führt eine Geschwindigkeitskontrolle durch. Auf einer Messstrecke von 200 m werden die Durchfahrtszeiten gemessen.

Die mittlere Geschwindigkeit auf dieser Messstrecke kann durch die Funktion v beschrieben werden.

$$v(t) = \frac{200}{t}$$

t … Durchfahrtszeit in s
$v(t)$ … mittlere Geschwindigkeit bei der Durchfahrtszeit t in m/s

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion v ein.



2) Ermitteln Sie die Durchfahrtszeit bei einer mittleren Geschwindigkeit von 90 km/h.

c) Bei der Geschwindigkeitsmessung mit einer Laserpistole tritt bedingt durch den Standort der Laserpistole ein Winkel α zwischen der Mess- und der Fahrtrichtung des Autos auf. Dieser Winkel bewirkt, dass die gemessene Geschwindigkeit nicht exakt der tatsächlichen Fahrgeschwindigkeit entspricht.

Es gilt:

$v_g = v_t \cdot \cos(\alpha)$

v_g … gemessene Geschwindigkeit in km/h
v_t … tatsächliche Geschwindigkeit in km/h
α … Winkel zwischen Fahrt- und Messrichtung mit $0° < \alpha < 90°$

1) Berechnen Sie die Abweichung in km/h für eine tatsächliche Geschwindigkeit von 90 km/h bei einem Winkel von 15°.

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ ist im Intervall [0°; 90°] ___①___ und die gemessene Geschwindigkeit v_g ___②___.

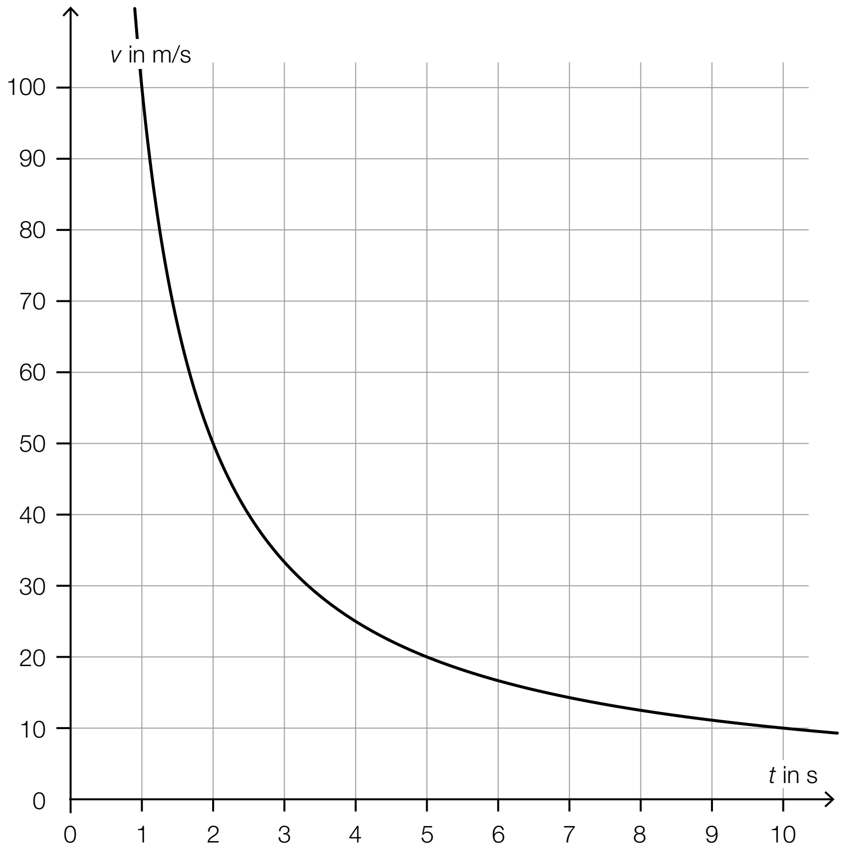
①	
streng monoton fallend	☐
unstetig	☐
positiv gekrümmt	☐

②	
ist immer größer als die tatsächliche Geschwindigkeit v_t	☐
unterscheidet sich von der tatsächlichen Geschwindigkeit v_t umso mehr, je kleiner α ist	☐
unterscheidet sich von der tatsächlichen Geschwindigkeit v_t umso mehr, je größer α ist	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Autofahrer fährt in 1 min 2 km
in 1 h = 60 min 120 km
Der Autofahrer hat die Geschwindigkeitsbeschränkung nicht eingehalten.

b1)



b2) 90 km/h = 25 m/s

$\frac{100}{25} = 4$

Die Durchfahrtszeit beträgt 4 s.

c1) $90 - 90 \cdot \cos(15°) = 3{,}066...$
Die Abweichung beträgt rund 3,07 km/s.

c2)

①	
streng monoton fallend	☒

②	
unterscheidet sich von der tatsächlichen Geschwindigkeit v_t umso mehr, je größer α ist	☒

Energieverbrauch und Joggen

Der Energieverbrauch beim Joggen ist unter anderem abhängig von der Körpermasse.

a) Der Energieverbrauch beim Joggen in ebenem Gelände bei einer bestimmten Geschwindigkeit wird durch die nachstehende Tabelle beschrieben.

Körpermasse in kg	50	60	70	80	90	100
Energieverbrauch in kJ/min	58	66	73	82	90	98

1) Berechnen Sie ausgehend von den Werten der obigen Tabelle die mittlere Änderungsrate des Energieverbrauchs zwischen 50 kg und 100 kg.

b) Sabine beginnt mit einer bestimmten Geschwindigkeit zu joggen und wird immer langsamer. Damit sinkt ihr Energieverbrauch von anfänglich 73 kJ/min pro Minute um 0,5 % bezogen auf den Wert der jeweils vorherigen Minute. Ihr Energieverbrauch in Abhängigkeit von der Zeit kann durch die Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f auf.

c) Martin läuft bergauf. Dabei kann sein Energieverbrauch näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = -0{,}05 \cdot t^2 + 3 \cdot t + 66 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 30$
t … Zeit in min
$f(t)$ … Energieverbrauch zur Zeit t in kJ/min

Der Gesamtenergieverbrauch (in kJ) im Zeitintervall $[0; t]$ entspricht dem Inhalt derjenigen Fläche, die der Graph der Funktion f mit der Zeitachse in diesem Intervall einschließt.

Beim Joggen in ebenem Gelände hat Martin erfahrungsgemäß einen konstanten Energieverbrauch von 66 kJ/min.

1) Ermitteln Sie die Zeit t_1, die Martin bergauf laufen muss, um den gleichen Gesamtenergieverbrauch zu haben wie bei 30 min Joggen in ebenem Gelände.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{98\text{ kJ/min} - 58\text{ kJ/min}}{100\text{ kg} - 50\text{ kg}} = \frac{40\text{ kJ/min}}{50\text{ kg}} = 0{,}8\ \frac{\text{kJ/min}}{\text{kg}}$

b1) $f(t) = 73 \cdot 0{,}995^t$
t … Zeit in min
$f(t)$ ... Energieverbrauch zur Zeit t in kJ/min

c1) Gesamtenergieverbrauch bei 30 min Joggen in ebenem Gelände in kJ/min:
66 kJ/min · 30 min = 1 980 kJ

$\int_0^{t_1} (-0{,}05 \cdot t^2 + 3 \cdot t + 66)\,dt = 1980$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t_1 = 21{,}809...$ (oder $t_1 = -47{,}204...$ oder $t_1 = 115{,}395...$)

Elektrischer Widerstand eines Drahtes

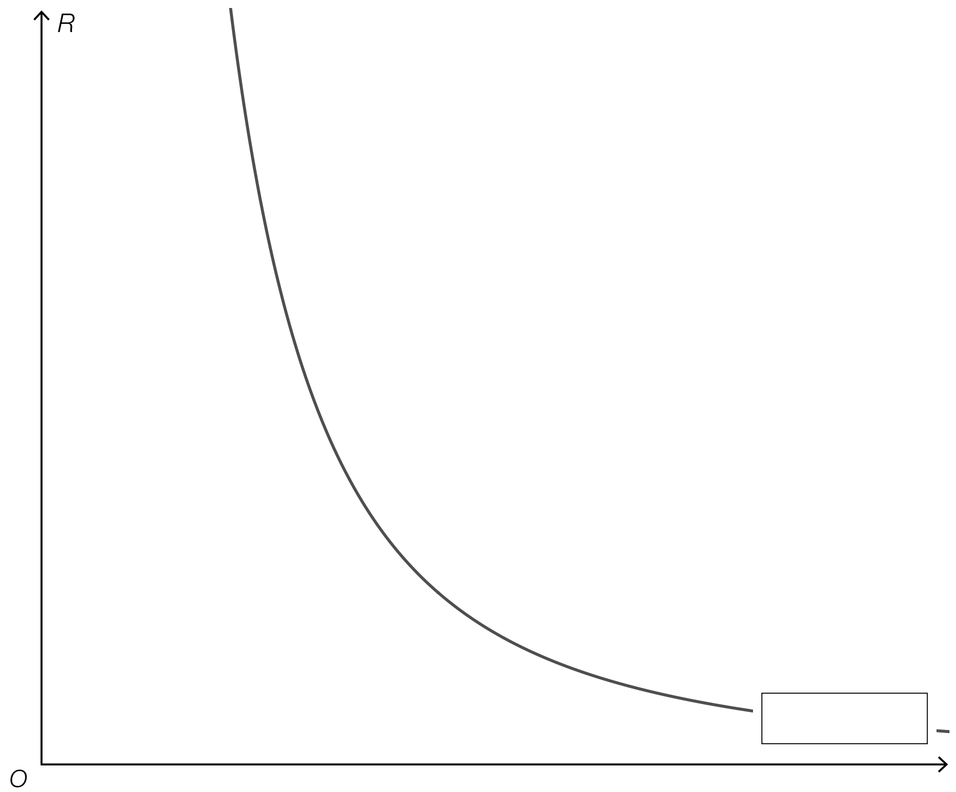
Der elektrische Widerstand R eines Drahtes mit kreisförmigem Querschnitt wird mithilfe folgender Formel beschrieben:

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$$

R … Widerstand in Ohm (Ω)
l … Drahtlänge in m
r … Radius des Drahtquerschnitts in mm
ϱ … spezifischer Widerstand (Materialkonstante) in $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

a) In der unten stehenden Abbildung ist der Widerstand R in Abhängigkeit von einer anderen Größe als Funktionsgraph dargestellt.

1) Tragen Sie die fehlende Achsenbeschriftung in das dafür vorgesehene Kästchen ein.



b) Vielfach wird bei Drähten der Durchmesser *d* anstelle des Radius *r* angegeben (jeweils in mm). Die Formel für den Widerstand *R* soll mithilfe von *d* statt *r* geschrieben werden.

1) Tragen Sie die den fehlenden Ausdruck in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

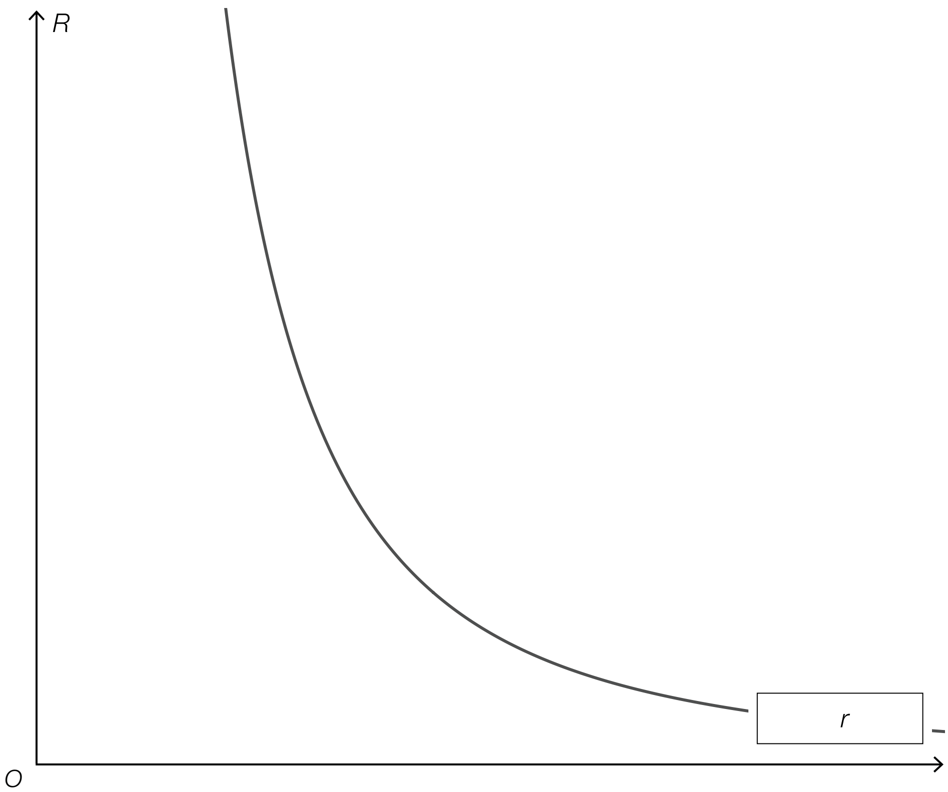
$$R = \varrho \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \boxed{}$$

c) In einem Labor wurde bei einem 1 m langen Kupferdraht mit einem spezifischen Widerstand von $\varrho = 0{,}017\,\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ ein Widerstand von 20 Milliohm (mΩ) gemessen.

1) Berechnen Sie den Radius *r* des Kupferdrahtes.

Möglicher Lösungsweg

a1)



b1) $R = \varrho \cdot \frac{l}{\pi} \cdot \boxed{\frac{4}{d^2}}$

c1) 20 mΩ = 0,02 Ω

$0{,}02 = 0{,}017 \cdot \frac{1}{r^2 \cdot \pi}$

$r = \sqrt{\frac{0{,}85}{\pi}} = 0{,}520...$

Der Kupferdraht hat einen Radius von rund 0,52 mm.

Joghurtbecher*

Aufgabennummer: A_105

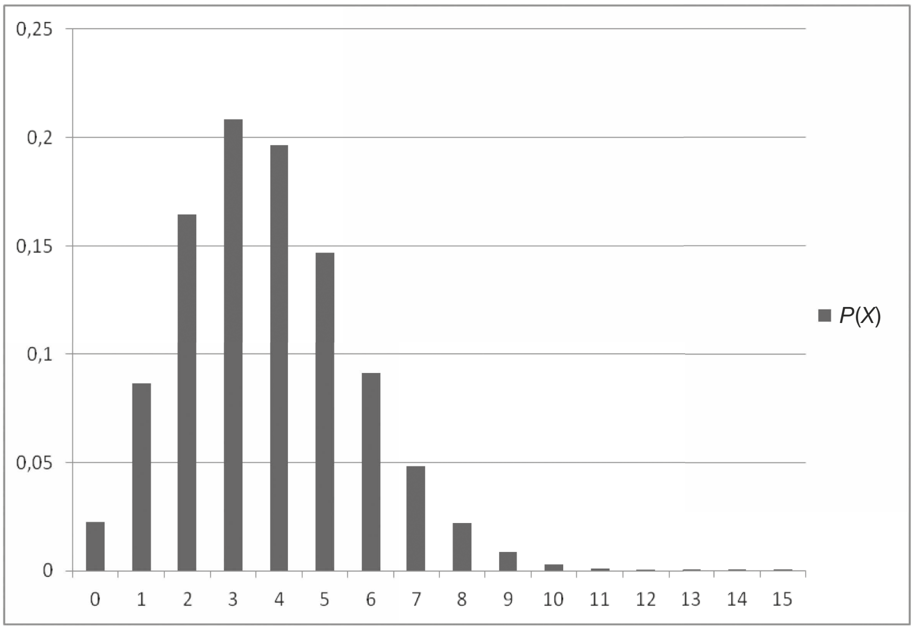
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Erfahrungsgemäß enthalten 4 % aller Joghurtbecher eine Woche nach dem Ablaufdatum bereits verdorbene Ware. Im Lager einer Lebensmittelkette befinden sich noch 200 solcher Becher.

a) – Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Becher mit verdorbenem Joghurt.

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in höchstens 5 der 200 Joghurtbecher verdorbene Ware enthalten ist.

c) In der folgenden Grafik ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Zufallsvariable X dargestellt:



X ... Anzahl der Joghurtbecher mit Verpackungsfehler
$P(X)$ ... Wahrscheinlichkeit für X Joghurtbecher mit Verpackungsfehler

– Erklären Sie, wie Sie aus der Grafik die Wahrscheinlichkeit ablesen können, dass mindestens 4 Joghurtbecher einen Verpackungsfehler aufweisen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung des Erwartungswertes: 200 · 4 % = 8

b) Mit Technologie wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass höchstens 5 Becherinhalte verdorben sind, also die Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass 0,1, 2, 3, 4 oder 5 Becherinhalte verdorben sind.

$P(X \leq 5)) = 18{,}56\ \%$

c) Die Wahrscheinlichkeit kann mittels der Gegenwahrscheinlichkeit ermittelt werden. Dazu wird die kumulierte Wahrscheinlichkeit für X = 0, 1, 2 oder 3 Becher mit Verpackungsfehler abgelesen.

P(„mindestens 4“) = 1 – P(„höchstens 3“)

Eine Lösungsvariante ohne Gegenwahrscheinlichkeit (die nicht sichtbaren Wahrscheinlichkeiten werden vernachlässigt) ist auch zulässig.

Lösungsschlüssel

a) 1 x B für die richtige Berechnung des Erwartungswertes
b) 1 x B für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c) 1 x D für die richtige Erklärung

Impfstoff*

Aufgabennummer: A_107

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Verschiedene Pharmaunternehmen produzieren Impfstoffe, die in Packungen verkauft werden.

a) Unternehmen *A* hat einen neuen Impfstoff entwickelt. Unternehmen *B* möchte diesen Impfstoff auch vertreiben.
Es stehen 2 Möglichkeiten für diesen Vertrieb zur Auswahl:

1. Unternehmen *B* kauft die Rechte von Unternehmen *A* um € 10 Millionen. Außerdem fallen laufende Produktionskosten in Höhe von € 25 pro Packung an.
2. Unternehmen *B* kauft das Produkt direkt von Unternehmen *A* um € 50 pro Packung.

– Stellen Sie die beiden Funktionsgleichungen auf, die den Zusammenhang zwischen der Anzahl der erzeugten Packungen x und den entstehenden Gesamtkosten K (in Euro) für Unternehmen *B* beschreiben.

b) Ein weiteres Pharmaunternehmen untersucht ebenfalls 2 Möglichkeiten des Vertriebs eines Impfstoffes. Dabei liegen die folgenden Gewinnfunktionen vor:

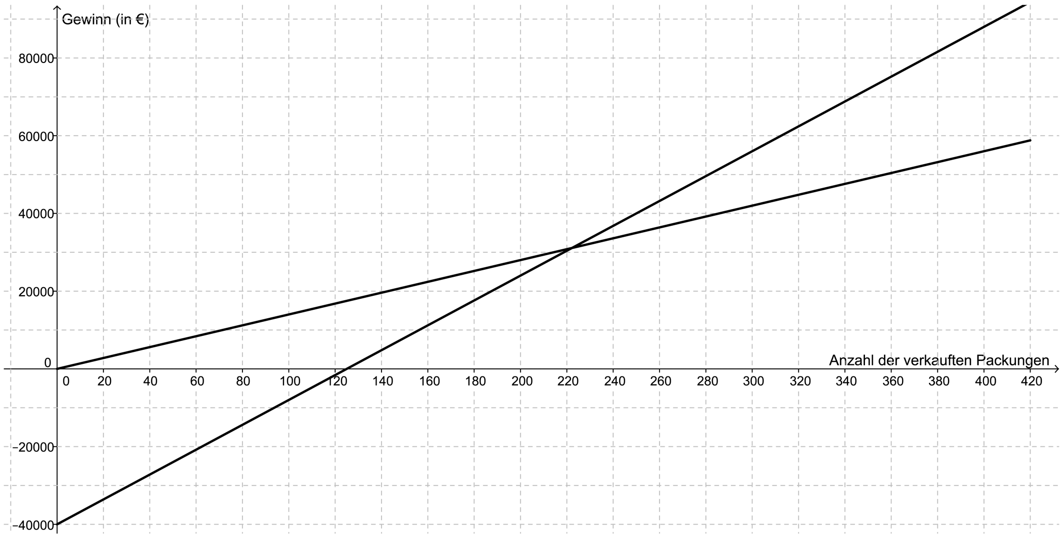
$G_1(x) = 120x$
$G_2(x) = 250x - 750\,000$

x ... Anzahl der verkauften Packungen
$G_1(x)$, $G_2(x)$ ... Gewinn bei x verkauften Packungen in Euro

– Stellen Sie diejenige Gleichung auf, mit der berechnet werden kann, bei welcher Anzahl an verkauften Packungen des Impfstoffes die Gewinne gleich sind.
– Berechnen Sie, ab welcher Anzahl an verkauften Packungen die Gewinnfunktion G_2 für das Unternehmen besser ist als die Gewinnfunktion G_1.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der untenstehenden Abbildung sind die Graphen von 2 Gewinnfunktionen dargestellt.



– Lesen Sie ab, für welche Anzahl von verkauften Packungen der Unterschied der Gewinnwerte € 10.000 beträgt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) 1. Möglichkeit: $K_1(x) = 25x + 10\,000\,000$
   2. Möglichkeit: $K_2(x) = 50x$

b) Ansatz: $120x = 250x - 750\,000$
   $x = 5\,769{,}23$
   Ab 5 770 verkauften Packungen ist die Gewinnfunktion G_2 für das Unternehmen besser.

   Lösungen wie „5 769,23" oder „5 769" sind als falsch zu werten.

c) Bei ca. 165 und ca. 280 verkauften Packungen beträgt der Unterschied der Gewinnwerte € 10.000.

   Toleranzintervall: [160; 170] bzw. [275; 285]

Lösungsschlüssel

a) 1 × A für das richtige Modellieren von Möglichkeit 1
   1 × A für das richtige Modellieren von Möglichkeit 2

b) 1 × A für das richtige Aufstellen der Gleichung
   1 × B für die richtige Berechnung der Packungsanzahl und die exakte Angabe der verkauften Packungen

c) 1 × C für das richtige Ablesen der beiden Werte mit Gewinnunterschied € 10.000

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

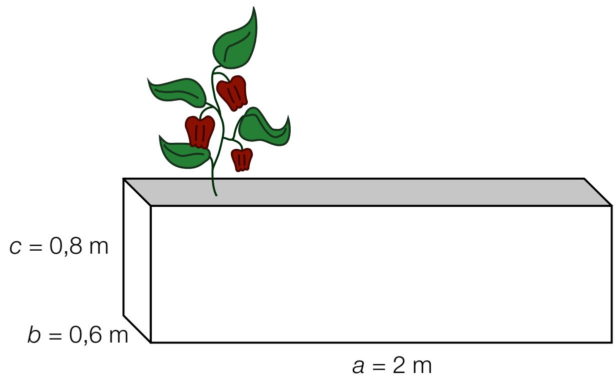
Hochbeet

Aufgabennummer: A_035

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Gärtner möchte ein Hochbeet bauen. Dieses wird bis zu einer Höhe von 40 cm mit Zweigen und Laub gefüllt. Darauf kommt eine 20 cm hohe Schicht aus Gras und Kompost. Der Rest wird mit Gartenerde aufgefüllt.

a) Der Gärtner legt das Beet in Form eines Quaders mit den Maßen laut der nachstehenden Skizze an.



– Berechnen Sie die Menge an Gartenerde in Litern, die benötigt wird, um das quaderförmige Beet bis zum Rand aufzufüllen.

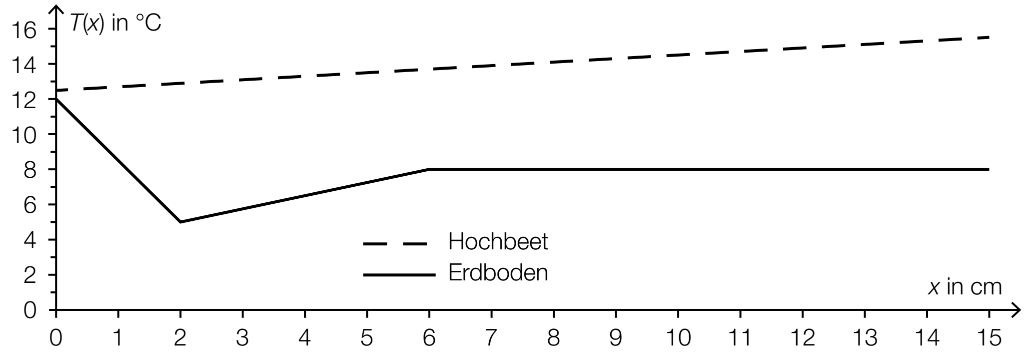
b) Der Gärtner plant, 2 gleich hohe Beete zu errichten. Ein Beet soll die Form eines Würfels haben, das andere Beet soll die Form eines Drehzylinders haben. Die Bepflanzungsfläche und die Höhe der Schichten sollen bei beiden Beeten gleich groß sein.

– Argumentieren Sie, warum der Verbrauch an Gartenerde beim zylinderförmigen Beet genau der gleiche wie beim würfelförmigen Beet ist.

– Erstellen Sie eine Formel, mit der der Radius r des Drehzylinders aus der Kantenlänge a des Würfels berechnet werden kann.

$r =$ ____________________________________

c) Die nachstehende Abbildung zeigt den unterschiedlichen Temperaturverlauf im Hochbeet und im Erdboden in Abhängigkeit von der Messtiefe.



x ... Messtiefe in cm
$T(x)$ ... Temperatur in der Messtiefe x in °C

– Interpretieren Sie den Temperaturverlauf im Erdboden, indem Sie aus der obigen Abbildung diejenigen Bereiche ablesen, in denen die Temperatur steigt, fällt bzw. gleich bleibt.

– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für den Temperaturverlauf im Hochbeet.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Das Beet ist 80 cm hoch, davon werden 60 cm mit anderem Füllmaterial aufgefüllt, es bleibt also eine Höhe c_1 = 20 cm = 0,2 m für die Gartenerde übrig.

$V = a \cdot b \cdot c_1$
$V = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \text{ m}^3$
$V = 0{,}24 \text{ m}^3 = 240 \text{ L}$

Man benötigt 240 L Gartenerde.

b) Sowohl das Volumen eines Würfels als auch das Volumen eines Drehzylinders berechnet man mit der Formel $V = G \cdot h$. Da die Grundfläche und die Höhe beim Würfel und beim Zylinder laut Angabe konstant bleiben, benötigt man das gleiche Volumen an Erde.

Die Formeln für die Bepflanzungsflächen der beiden Beete lauten:

$A_{\text{Würfel}} = a^2$ $\qquad$ $A_{\text{Drehzylinder}} = r^2 \cdot \pi$

Durch Gleichsetzen der beiden Flächen und Umformen erhält man:

$a^2 = r^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$

c) Beim Graph *Erdboden* ist die Temperatur an der Oberfläche mit 12 °C am größten und sinkt innerhalb der ersten 2 cm auf 5 °C ab. Zwischen 2 cm und 6 cm Messtiefe steigt die Temperatur auf 8 °C an und bleibt dann bis 15 cm Messtiefe konstant.

Funktionsgleichung: $T(x) = 0{,}2 \cdot x + 12{,}5$

Eine angemessene Ungenauigkeit beim Ablesen der Werte wird toleriert.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 1
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 2

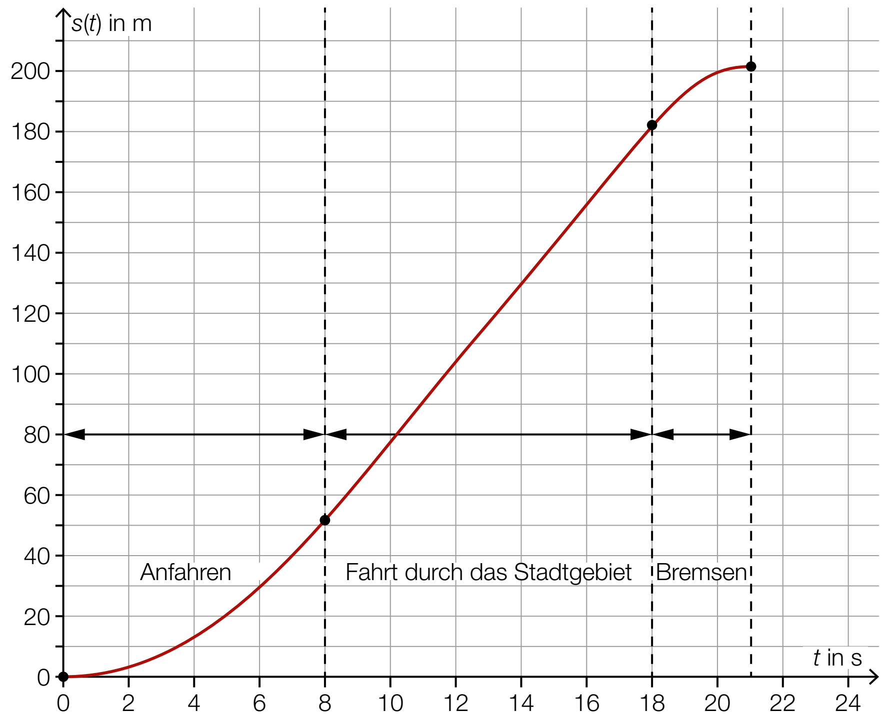
Thema: Biologie

Quelle: http://www.forschung-geotechnik.org/Forschung/Geothermik/temperaturmodell.htm

Stadtverkehr

Ein Auto im Stadtverkehr steht bei einer roten Ampel, fährt bei Grün an und muss bei der darauffolgenden Ampel wieder abbremsen.

a) Die nachstehende Grafik stellt einen solchen Vorgang dar.



t … Zeit in s
$s(t)$ … zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

1) Lesen Sie aus der Grafik für das 3. dargestellte Zeitintervall die Länge des Bremswegs ab.
2) Bestimmen Sie aus dem Graphen die durchschnittliche Geschwindigkeit des Autos im 2. Zeitintervall.

b) Die nächsten beiden Ampeln sind 203 m voneinander entfernt. Die Fahrt des Autos zwischen diesen beiden Ampeln dauert 19 s und kann durch die nachstehende stetige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v beschrieben werden.

$$v(t) = \begin{cases} 2{,}8 \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq 5 \\ 14 & \text{für } 5 < t < 15 \\ a \cdot t + b & \text{für } 15 \leq t \leq 19 \end{cases}$$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Die Parameter a und b können mithilfe des nachstehenden Gleichungssystems berechnet werden.

I: $a \cdot 15 + b = \boxed{}$

II: $\int_0^5 2{,}8 \cdot t \,\mathrm{d}t + 14 \cdot 10 + \int_{15}^{19} (a \cdot t + b)\,\mathrm{d}t = \boxed{}$

1) Ergänzen Sie im obigen Gleichungssystem die fehlenden Zahlen in den dafür vorgesehenen Kästchen.
2) Berechnen Sie die Länge des in den ersten 10 Sekunden zurückgelegten Weges.

Möglicher Lösungsweg

a1) Weg nach 18 s: rund 180 m
Weg nach 21 s: rund 200 m
Die Länge des Bremswegs beträgt rund 20 m.

Ableseungenauigkeiten sind zu tolerieren.

a2) $\frac{180 - 50}{18 - 8} = 13$

Die durchschnittliche Geschwindigkeit des Autos beträgt im 2. Zeitintervall rund 13 m/s.

b1) I: $a \cdot 15 + b = \boxed{14}$

II: $\int_0^5 2{,}8 \cdot t \,\mathrm{d}t + 14 \cdot 10 + \int_{15}^{19} (a \cdot t + b)\,\mathrm{d}t = \boxed{203}$

b2) $s = \int_0^5 2{,}8 \cdot t \,\mathrm{d}t + 14 \cdot 5 = 105$

Die Länge des Weges beträgt 105 m.

Torten

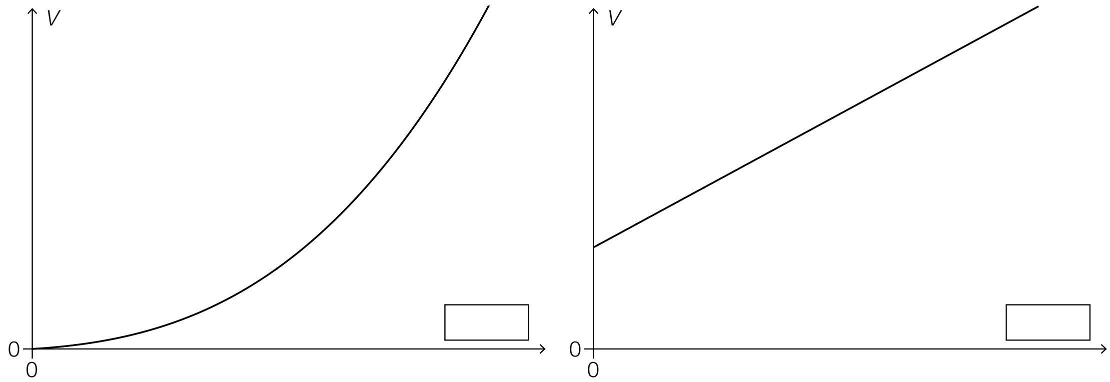
In einer Konditorei werden Torten mit einer Schicht aus Creme oder Gelee versehen.

a) Das Volumen der Cremeschicht einer zylinderförmigen Torte kann mit der nachstehenden Formel berechnet werden.

$V = [(r + d)^2 \cdot \pi + (2 \cdot r + d) \cdot \pi \cdot h] \cdot d$

V … Volumen der Creme
r … Radius der Torte
h … Höhe der Torte
d … Dicke der Cremeschicht oder Geleeschicht

In einer der nachstehenden Abbildungen wird die Abhängigkeit des Cremevolumens V vom Radius r der Torte, in der anderen Abbildung jene von der Tortenhöhe h dargestellt.



1) Beschriften Sie in beiden Abbildungen die waagrechte Achse mit der jeweils richtigen Größe.

b) Eine zylinderförmige Torte hat einen Durchmesser von 28 cm. Die kreisförmige Oberseite wird mit einer 5 mm dicken Geleeschicht überzogen.

1) Berechnen Sie, wie viele Liter Gelee für 15 dieser Torten benötigt werden.

c) Für eine Tortencreme benötigt man halb so viel Schlagobers wie Joghurt. Insgesamt machen Schlagobers und Joghurt gemeinsam $\frac{3}{4}$ des Gesamtvolumens der Tortencreme aus.

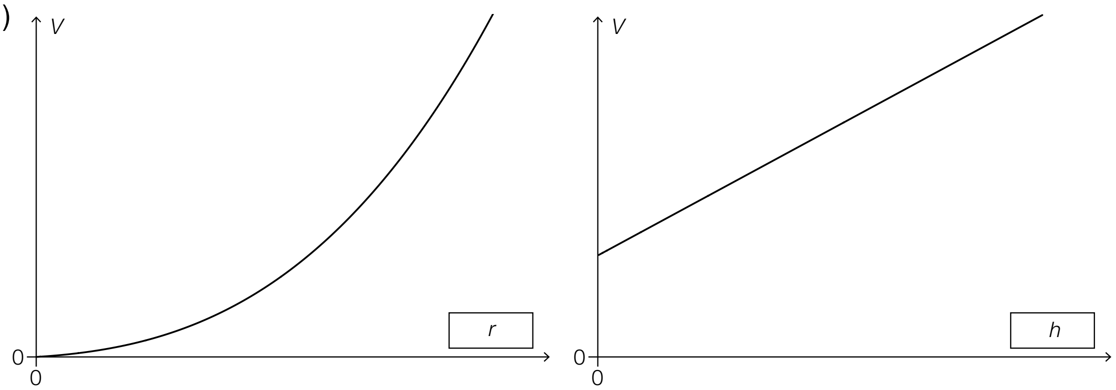
1) Erstellen Sie ein passendes Gleichungssystem für die Berechnung, wie viele Liter Schlagobers und wie viele Liter Joghurt zur Herstellung von V Litern Tortencreme benötigt werden.

d) Das zur Verzierung von Torten benötigte Schlagobers wird häufig mit einem Schlagobers-Bereiter aufgeschäumt. Dazu werden mit Lachgas gefüllte Kapseln verwendet. Aufgrund eines Abfüllfehlers sind 0,1 % der in Schachteln zu 8 Stück verpackten Kapseln leer.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer zufällig ausgewählten Schachtel genau 1 Kapsel leer ist.

Möglicher Lösungsweg

a1)



b1) Die benötigte Geleemasse für eine Torte entspricht dem Volumen eines Zylinders mit dem Durchmesser d = 28 cm = 2,8 dm und der Höhe h = 5 mm = 0,05 dm.

$V = \left(\frac{2{,}8}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 0{,}05 = 0{,}307...$

$15 \cdot 0{,}307... = 4{,}618...$

Für 15 Torten benötigt man rund 4,62 L Gelee.

c1) x … Menge des benötigten Schlagobers in L
y … Menge des benötigten Joghurts in L

Gleichungssystem:
$y = 2 \cdot x$
$x + y = \frac{3}{4} \cdot V$

d1) X ... Anzahl der leeren Kapseln
Binomialverteilung mit n = 8 und p = 0,001
$P(X = 1) = 8 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}999^7 = 0{,}0079...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 1 Kapsel leer ist, beträgt rund 0,8 %.

Wanderweg

Aufgabennummer: A_005

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Wanderweg führt von Klessheim zum 10 km entfernten Ort Siezenheim.

a) Renate geht auf diesem Weg mit gleichbleibender Geschwindigkeit von Klessheim in Richtung Siezenheim. Nach 1 Stunde und 6 Minuten ist sie 4,4 km von Klessheim entfernt. Jim startet zum gleichen Zeitpunkt wie Renate. In 1 Stunde läuft er von Siezenheim nach Klessheim.

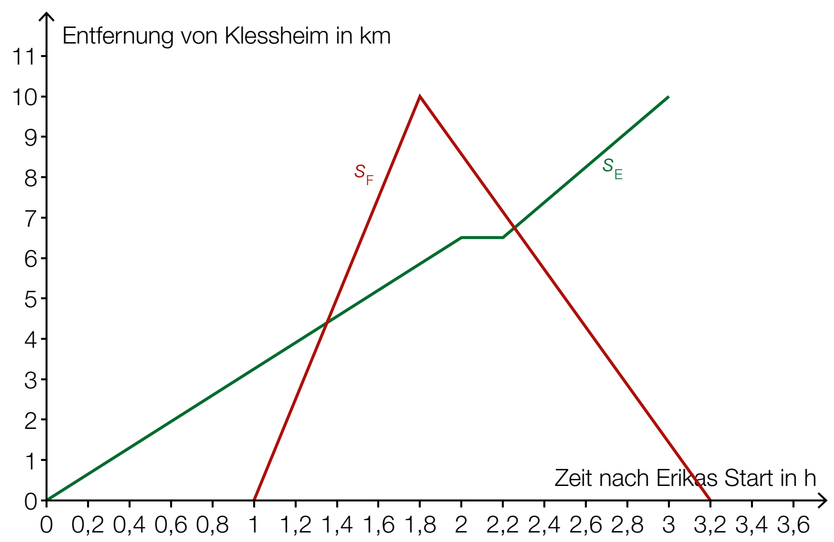
Die Bewegungen von Renate und Jim können durch die Weg-Zeit-Funktionen s_R und s_J beschrieben werden.

t … Zeit in h
$s_R(t)$, $s_J(t)$ … Renates bzw. Jims Entfernung von Klessheim zur Zeit t in km

– Stellen Sie jeweils eine Gleichung der Funktion s_R und der Funktion s_J auf.

b) In der unten stehenden Abbildung sind die Weg-Zeit-Diagramme von Erika (s_E) und Fritz (s_F) dargestellt, die diesen Wanderweg benützen.

– Interpretieren Sie die Abbildung hinsichtlich Richtung und Geschwindigkeit von Erika und Fritz.



c) Lore und Nena sind in entgegengesetzten Richtungen auf diesem Weg unterwegs. Lore bricht von Siezenheim auf. Nena geht eine Stunde später als Lore von Klessheim weg. Lores Entfernung von Klessheim kann durch die Funktion s_L und jene von Nena durch die Funktion s_N beschrieben werden.

$$s_L(t) = 10 - \frac{68}{11} \cdot t$$
$$s_N(t) = 12{,}5 \cdot (t - 1)$$

t … Lores Gehzeit in h
$s_L(t)$, $s_N(t)$ … Entfernungen von Klessheim zur Zeit t in km

– Berechnen Sie, wie lange Lore bis zum Treffpunkt unterwegs ist. Geben Sie diesen Zeitpunkt in Stunden und Minuten genau an.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Renate geht 4,4 km in 1,1 h.

Geschwindigkeit: $\frac{4{,}4 \text{ km}}{1{,}1 \text{ h}} = 4$ km/h

$s_R(t) = 4 \cdot t$
$s_J(t) = -10 \cdot t + 10$

b) Erika geht mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von Klessheim weg.
Nach 2 Stunden Gehzeit erreicht sie einen 6,5 km von Klessheim entfernten Rastplatz. Ihre durchschnittliche Wandergeschwindigkeit war daher 3,25 km/h. Nach einer Pause von 12 Minuten geht sie etwas rascher weiter und erreicht nach 0,8 Stunden Siezenheim. Die Geschwindigkeit auf dem letzten Wegabschnitt beträgt ca. 4,4 km/h.

Fritz läuft 1 Stunde später als Erika von Klessheim mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 12,5 km/h weg. Er erreicht Siezenheim nach 48 Minuten, kehrt dort um und läuft den Weg nach Klessheim langsamer zurück. Er benötigt für die Strecke zurück 1,4 Stunden, hat daher eine Geschwindigkeit von rund 7,14 km/h.

Die Ablesung ist nicht ganz genau möglich, Toleranz bei ungenauer Ablesung ist notwendig. Das Interpretieren ist eine offene Aufgabe und nur sinngemäß in obiger Weise möglich. Es geht um folgende Stichworte: Länge und Richtung der zurückgelegten Strecken, markante Zeitpunkte und die Geschwindigkeiten.

c) $s_L(t) = s_N(t)$

$10 - \frac{68}{11} \cdot t = 12{,}5 \cdot (t - 1)$

$t = 1{,}204...$

0,204... h = 12,262... min

Lore trifft nach insgesamt 1 Stunde und 12 Minuten Gehzeit auf Nena.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) leicht	b) 2
c) leicht	c) 2

Thema: Physik

Quellen: —

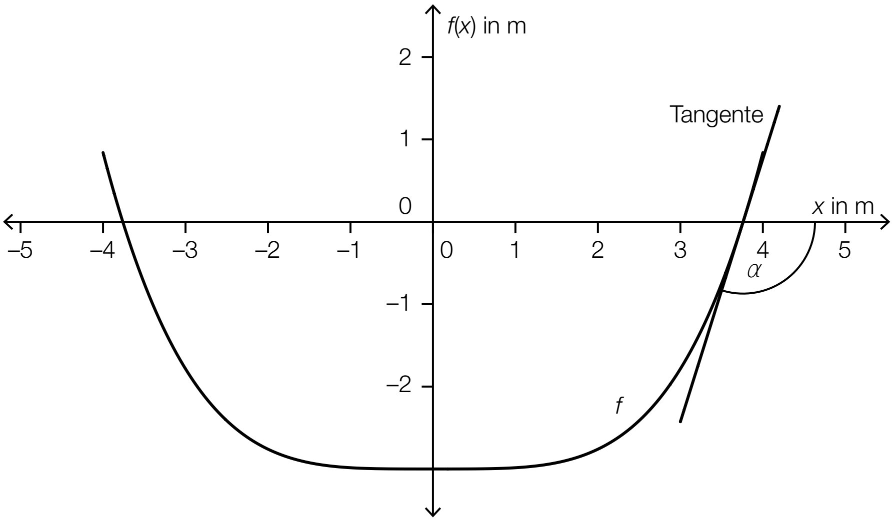
Wasserkanal

Die Querschnittsfläche eines bestimmten Kanals ist unten von einer Randkurve begrenzt, die mit der Funktion f beschrieben werden kann, wobei der Wasserspiegel genau entlang der x-Achse verläuft (siehe nachstehende Abbildung).

Für die Funktion f gilt:

$f(x) = 0{,}015 \cdot x^4 - 3$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

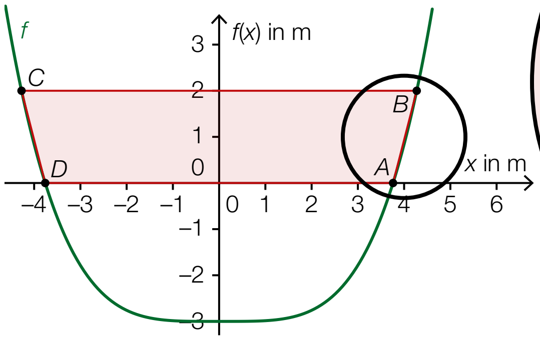


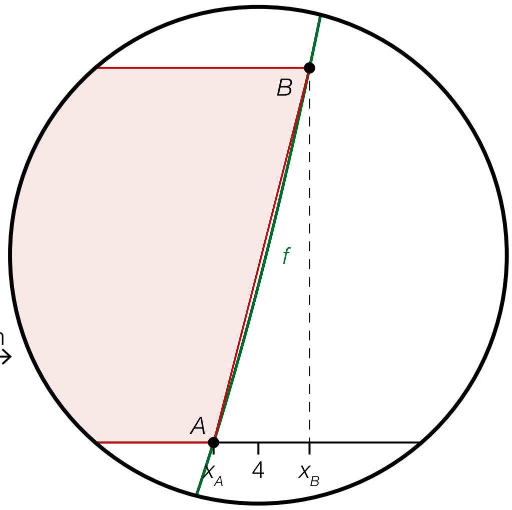
a) 1) Berechnen Sie mithilfe der Differenzialrechnung den Winkel α.

b) Das Wasser fließt mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m/s durch den Kanal.

1) Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Wasser pro Sekunde durch den Kanalquerschnitt fließen.

c) Die Kanalhöhe wird durch Verlängerung der Randkurve bis zu einer Höhe von 2 m über dem Wasserspiegel vergrößert.
Der Flächeninhalt der zusätzlichen Querschnittsfläche kann näherungsweise als Flächeninhalt des Vierecks *ABCD* bestimmt werden. Der Flächeninhalt dieses Vierecks ist um ΔF m² kleiner als der tatsächliche Flächeninhalt der zusätzlichen Querschnittsfläche (siehe nachstehende Abbildung).





vergrößertes Detail aus der Abbildung

1) Ergänzen Sie die nachstehende Formel für ΔF.

$$\Delta F = 2 \cdot \left(\frac{(x_B - x_A) \cdot f(\square)}{2} - \int_{\square}^{\square} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

Möglicher Lösungsweg

a1) Nullstelle: $f(x) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -3{,}76...)$ $x_2 = 3{,}76...$

$f'(3{,}76...) = 3{,}19...$
$\alpha = 180° - \arctan(3{,}19...)$
$\alpha = 107{,}40...°$

b1) Berechnung der Nullstellen von f mittels Technologieeinsatz: $x_1 \approx -3{,}76$ m, $x_2 \approx 3{,}76$ m
$\int_{-3{,}76}^{3{,}76} (0{,}015 \cdot x^4 - 3)\,\mathrm{d}x = 18{,}05$
$A = 18{,}05$ m²
$V = 18{,}05 \cdot 1{,}2 \approx 21{,}66$

Es fließen rund 21,66 m³/s durch den Kanal.

c1) $\Delta F = 2 \cdot \left(\frac{(x_B - x_A) \cdot f(x_B)}{2} - \int_{x_A}^{x_B} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$

Weitsprung (1)*

Aufgabennummer: A_111

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Weitsprungwettbewerb einer Schulklasse werden die Sprungweiten (in Metern) von 12 Mädchen aufgezeichnet:

4,40	4,15	3,73	3,72	3,63	3,52	3,29	3,00	2,28	2,50	4,30	4,80

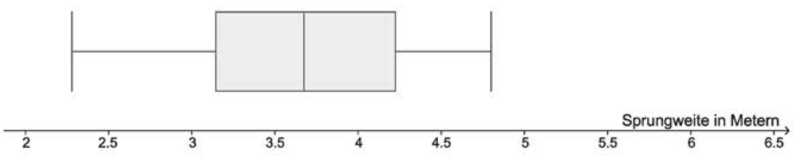
a) – Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der Sprungweiten.

b) Die Sprungweiten werden in die Noten im Gegenstand *Bewegung und Sport* eingearbeitet. Es gilt die folgende Notenskala:

Sehr gut	ab 4 m
Gut	3,5 m – 3,99 m
Befriedigend	3,0 m – 3,49 m
Genügend	2,5 m – 2,99 m
Nicht genügend	unter 2,5 m

– Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm, in welchem die Häufigkeiten der jeweiligen Noten dargestellt werden.

c) In der untenstehenden Abbildung ist der Boxplot der Sprungweiten dargestellt.



– Lesen Sie aus dem Boxplot den Median und das 1. Quartil ab.
– Erklären Sie deren Bedeutung.

d) In dieser Schulklasse beträgt die Standardabweichung der Sprungweiten bei den Mädchen an einem anderen Wettbewerbstag 0,70 Meter und bei den Burschen 0,49 Meter.

– Erklären Sie, was die beiden Werte im Vergleich über die Leistungen der beiden Gruppen aussagen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

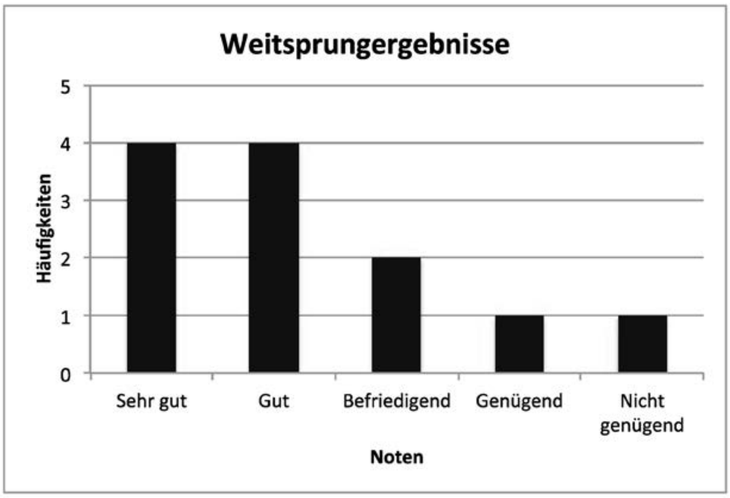
* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Lösung mithilfe von Technologie:
arithmetischer Mittelwert: 3,61 Meter
Standardabweichung: 0,73 Meter

Gemäß Kompetenzkatalog Teil A, Kommentar 5.2 gilt auch die Berechnung der empirischen Standardabweichung (hier: s = 0,76 m) als richtige Lösung.

b)



c) Median: 3,7 m *Toleranzbereich: [3,6; 3,8]*
1. Quartil: 3,15 m *Toleranzbereich: [3,1; 3,3]*

Median: 50 % aller Werte liegen rechts bzw. links vom Median.
1. Quartil: 25 % aller Werte liegen links vom 1. Quartil.

d) Die Streuung der Sprungweiten innerhalb der Gruppe der Mädchen ist größer als die Streuung innerhalb der Gruppe der Burschen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittelwertes und der Standardabweichung
b) 1 × A für die richtige Erstellung des Säulen- oder Balkendiagramms
c) 1 × C für das richtige Ablesen von Median und 1. Quartil
1 × D für die richtige Erklärung zur Bedeutung von Median und 1. Quartil
d) 1 × D für die richtige Erklärung zum Vergleich der Standardabweichungen

Tauchen (1)*

Aufgabennummer: A_104

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Das Organ, das beim Tauchen am meisten gefährdet ist, ist die Lunge: Die menschliche Lunge hat ein durchschnittliches Fassungsvermögen von 6 Litern. Wenn die aufgenommene Luftmenge das Fassungsvermögen übersteigt, besteht die Gefahr eines Lungenrisses.

a) Je tiefer man taucht, desto höher wird der Druck auf die Lunge. Alle 10 Meter nimmt der Druck um 1 Bar zu. In 30 Metern Tiefe beträgt er bereits 4 Bar.

– Modellieren Sie diesen Zusammenhang durch eine Funktion P.

n ... Tauchtiefe in Metern
$P(n)$ ... Druck in Bar in n Metern Tiefe

– Ermitteln Sie, welcher Druck auf die Lunge in einer Tiefe von 32,5 Metern herrscht.

b) Das Volumen der in der Lunge befindlichen Luft ändert sich beim Tauchen nach folgender Formel:

$$V_n = \frac{10 \cdot V_0}{10 + n}$$

n ... Tauchtiefe in Metern
V_0 ... Volumen in Litern gemessen an der Wasseroberfläche ($n = 0$)
V_n ... Volumen in Litern gemessen in n Metern Tiefe

– Erklären sie mithilfe der Formel, was mit der Lunge passieren würde, wenn man von 10 Metern Tiefe mit 4 Litern Luft in der Lunge zur Oberfläche auftaucht und dabei die Luft anhält.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Unter Wasser erscheint alles um ein Drittel länger und um ein Viertel näher als in Wirklichkeit. Ein Taucher beobachtet einen Hecht. Für ihn scheint der Hecht die Länge L zu haben und in der Entfernung d vorbeizuschwimmen.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der tatsächlichen Länge x des Hechts auf.

$x =$ ____

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der tatsächlichen Entfernung y des Hechts vom Taucher auf.

$y =$ ____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Da es sich um eine konstante Zunahme handelt, kann man diesen Zusammenhang mit einer linearen Funktion darstellen: $P(n) = k \cdot n + d$.

Pro Meter nimmt der Druck um $\frac{1}{10}$ Bar zu, das heißt: $k = \frac{1}{10}$.

Man setzt den Punkt $P(30) = 4$ ein:

$$4 = \frac{1}{10} \cdot 30 + d$$
$$d = 1$$

Die Funktion lautet daher: $P(n) = \frac{1}{10} \cdot n + 1$.

Somit hat man in einer Tiefe von 32,5 Metern den Druck $P(32{,}5) = 4{,}25$ Bar.

b) $V_{10} = 4$
Man muss die oben gegebene Formel nach V_0 umformen und erhält dann die Formel

$$V_0 = \frac{V_n \cdot (10 + n)}{10}.$$

Setzt man in diese Formel $n = 10$ und $V_{10} = 4$ ein, so erhält man ein Lungenvolumen an der Wasseroberfläche von $V_0 = \frac{4 \cdot 20}{10} = 8$ Litern.

Laut der obigen Angabe hat die Lunge aber nur eine Kapazität von 6 Litern. Es besteht also die Gefahr eines Lungenrisses.

c) $x = \frac{3}{4} \cdot L$

$y = \frac{4}{3} \cdot d$

Lösungsschlüssel

a) 1 x A für das richtige Modell mit den richtigen Parameterwerten
1 x B für die richtige Berechnung des Drucks
b) 1 x D für die logisch richtige Argumentation mithilfe der Formel
c) 1 x A für die richtige Formel für die Länge
1 x A für die richtige Formel für die Entfernung

Stadtlauf (2)

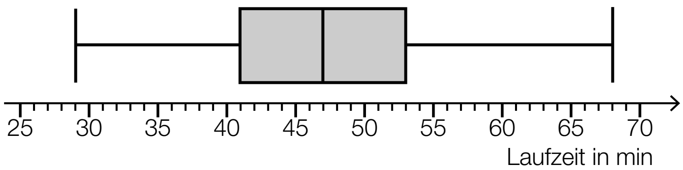
In einer bestimmten Stadt findet jährlich ein Laufwettbewerb statt.

a) Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern einer Maturaklasse hat beim Stadtlauf teilgenommen. Nachstehend sind ihre Laufzeiten in Minuten aufgelistet:

46, 50, 43, 49, 59, 61, 53, 54, 53, 56, 67, 39

1) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel und den Median der Laufzeiten.
2) Begründen Sie, warum der Median gegenüber extremen Einzelwerten („Ausreißern“) stabiler als das arithmetische Mittel ist.

b) Die nachstehende Grafik zeigt einen Boxplot, der die Laufzeiten aller Teilnehmer/innen des Stadtlaufs darstellt.



1) Lesen Sie die Werte der 5 Kenngrößen des Boxplots ab.
2) Interpretieren Sie das obere Quartil q_3 in Bezug auf die erreichten Laufzeiten.

c) Erfahrungsgemäß verwenden etwa 6,3 % der Hobbyläufer/innen Dopingmittel. Es werden n zufällig ausgewählte Personen auf die Verwendung von Dopingmitteln getestet.

1) Erstellen Sie mithilfe von n eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 dieser n Personen Dopingmittel verwendet hat.

Möglicher Lösungsweg

a1) arithmetisches Mittel: 52,5 min
Median: 53 min

a2) Das arithmetische Mittel wird aus allen vorkommenden Einzelwerten berechnet, daher wirken sich extreme Einzelwerte relativ stark aus.
Der Median ist „die Mitte" der geordneten Datenliste. Extreme Einzelwerte am oberen oder unteren Ende wirken sich auf den Median nicht aus. Daher ist der Median stabiler gegenüber Ausreißern.

b1) Minimum: 29 min, Maximum: 68 min, Median: 47 min, 1. Quartil: 41 min, 3. Quartil: 53 min

b2) Mindestens 25 % der Läufer/innen haben eine Laufzeit von mindestens 53 min. Zugleich haben mindestens 75 % der Läufer/innen eine Laufzeit von höchstens 53 min.

c1) X … Anzahl der Personen, die Dopingmittel verwendet haben

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0{,}063)^n$

U-Bahn*

Aufgabennummer: A_103

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für die Strecke zwischen der Haltestelle *Rathaus* und der Haltestelle *Volkstheater* benötigt ein Zug der U-Bahn-Linie U2 in Wien durchschnittlich 60 Sekunden. Der zurückgelegte Weg des Zugs zwischen diesen beiden Haltestellen lässt sich annähernd durch die Zeit-Weg-Funktion s wie folgt beschreiben:

$s(t) = -\frac{1}{180} \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot t^2$

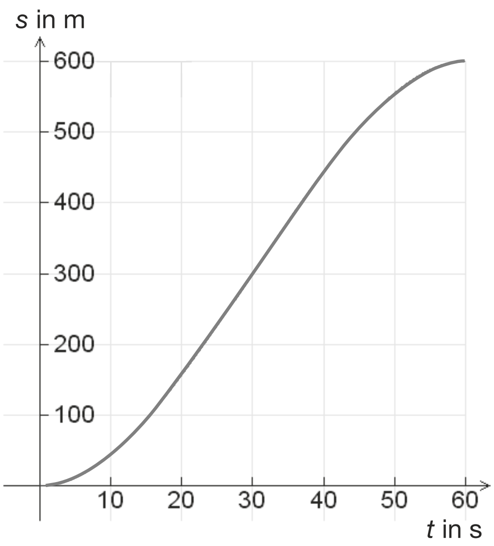
t … Zeit nach der Abfahrt in Sekunden (s), $0 \leq t \leq 60$
$s(t)$ … zurückgelegter Weg in Metern zum Zeitpunkt t

a) – Berechnen Sie die Strecke s in Metern, die der U-Bahn-Zug zwischen den beiden Haltestellen zurücklegt.

b) – Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des U-Bahn-Zugs in m/s für das Zeitintervall [30; 45].

c) – Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit des U-Bahn-Zugs in m/s für $t = 45$ s.

d) – Erklären Sie, wie am unten abgebildeten Zeit-Weg-Diagramm die Momentangeschwindigkeit abgelesen werden kann.
– Lesen Sie näherungsweise den Zeitpunkt ab, zu dem die Momentangeschwindigkeit maximal ist.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $s(60) = 600$

Die Strecke zwischen den beiden Haltestellen beträgt 600 m.

b) mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2]$: $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$

für $[30; 45]$: $\overline{v} = \frac{506{,}25 - 300}{45 - 30} = 13{,}75$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt 13,75 m/s.

c) Momentangeschwindigkeit $v(t) = s'(t) = -\frac{1}{60} \cdot t^2 + t$
$v(45) = 11{,}25$

Die Momentangeschwindigkeit für $t = 45$ beträgt 11,25 m/s.

d) Die Momentangeschwindigkeit ist die (momentane) Änderungsrate der Weg-Zeit-Funktion und entspricht geometrisch der Steigung des Graphen der Weg-Zeit-Funktion.
Der Graph der Weg-Zeit-Funktion hat die größte Steigung und damit die maximale Momentangeschwindigkeit im Wendepunkt bei 30 Sekunden.

Lösungsschlüssel

a) 1 x B für die richtige Berechnung
b) 1 x A für den richtigen Ansatz (Verwendung des Differenzenquotienten)
1 x B für die richtige Berechnung
c) 1 x A für den richtigen Ansatz (Verwendung der 1. Ableitung)
1 x B für die richtige Berechnung
d) 1 x D für die richtige Erklärung
1 x C für das richtige Ablesen des Zeitpunkts mit maximaler Momentangeschwindigkeit

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Windkraftanlage

Aufgabennummer: A_020		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

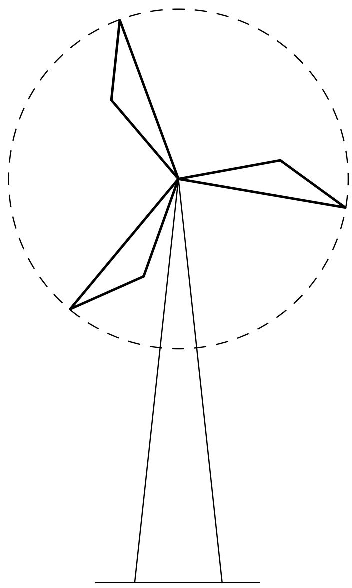
Eine Windkraftanlage setzt Bewegungsenergie in elektrische Energie um. Ihre Nennleistung (= maximal mögliche Leistung) wird in Megawatt (MW) angegeben. Die tatsächlich erreichte Leistung hängt von den Windverhältnissen vor Ort ab und liegt im Jahresdurchschnitt zwischen 20 % und 40 % der Nennleistung.

a) Eine Windkraftanlage mit einer Nennleistung von 1,5 MW erreicht an einem bestimmten Standort im Jahresdurchschnitt 28 % der Nennleistung.
Die Energie E ist das Produkt aus Leistung P und der Zeit t, also $E = P \cdot t$.

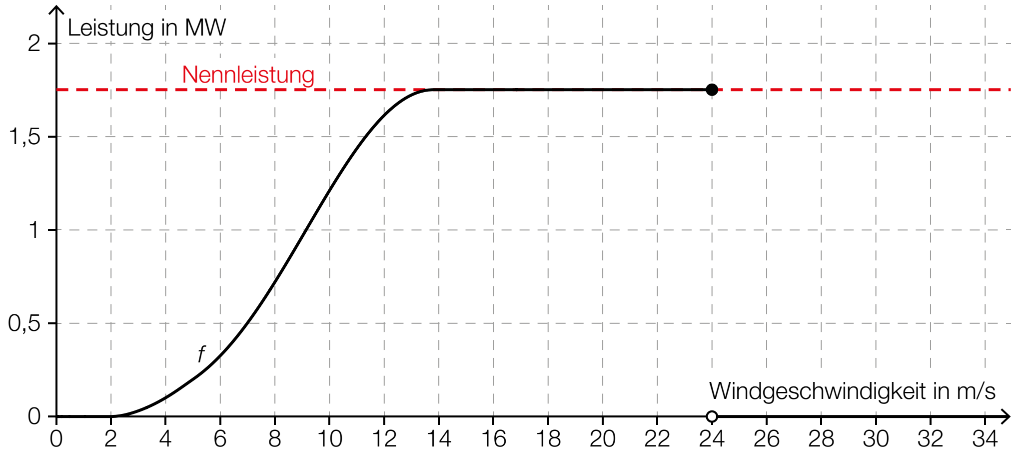
– Berechnen Sie, wie viel Energie in Megawattstunden (MWh) diese Anlage durchschnittlich pro Jahr (365 Tage) liefert.

b) Bei voller Leistung schafft der Rotor 17 Umdrehungen pro Minute.

– Berechnen Sie für diesen Fall die Geschwindigkeit, mit der sich ein Punkt am äußeren Ende eines 32 m langen Rotorblatts bewegt. Geben Sie das Ergebnis in der Einheit „km/h" an.



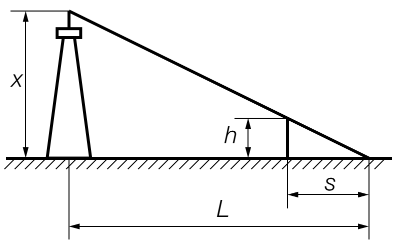
c) In der nachstehenden Abbildung ist die Leistung einer bestimmten Windkraftanlage in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit durch den Graphen einer Funktion *f* dargestellt.



– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Funktion *f* ist im gesamten Definitionsbereich [0; 30] stetig.	☐
Die Funktion *f* hat im Definitionsbereich [0; 30] eine Polstelle.	☐
Es gibt im Intervall [8; 10] eine Windgeschwindigkeit v_1, für die gilt: $f''(v_1) = 0$	☐
Die mittlere Änderungsrate der Leistung ist im Intervall [0; 14] größer als im Intervall [2; 14].	☐
Die Ableitungsfunktion f' hat im Intervall [4; 12] mindestens eine Nullstelle.	☐

d) Der Turm einer Windkraftanlage wirft einen Schatten der Länge *L*. Zur selben Zeit wirft eine Person mit der Körpergröße *h* einen Schatten der Länge *s*. (Siehe nebenstehende Abbildung.)



– Erstellen Sie aus *L*, *h* und *s* eine Formel zur Berechnung der Turmhöhe *x*.

x = ____________________________________

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\underbrace{1{,}5 \cdot 0{,}28}_{\substack{\text{erreichte}\\\text{Leistung}\\\text{in MW}}} \cdot \underbrace{365 \cdot 24}_{\text{Zeit in h}} = \underbrace{3679{,}2}_{\substack{\text{Energie}\\\text{in MWh}}}$

Die Anlage liefert pro Jahr durchschnittlich 3 679,2 MWh.

b) Kreisumfang außen: $u = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 32 \cdot \pi = 201{,}06...$
17 Umdrehungen: $17 \cdot 201{,}06... = 3418{,}05...$
3418,05... m/min = 3,41805... km/min = 205,08... km/h

Ein Punkt am äußeren Ende eines Rotorblatts bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von rund 205 km/h.

c)

[...]	
[...]	
Es gibt im Intervall [8; 10] eine Windgeschwindigkeit v_1, für die gilt: $f''(v_1) = 0$	☒
[...]	
[...]	

d) $x : L = h : s \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h \cdot L}{s}$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 4 Analysis
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) mittel
d) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Umwelt

Quellen: —

Wirksamkeit von Medikamenten

Aufgabennummer: A_048

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Um die Wirksamkeit von 3 verschiedenen Schmerztabletten *A*, *B* und *C* zu überprüfen, wurden diese an einer Versuchsgruppe von 2000 Frauen getestet.

Medikament	Anzahl der Studienteil-nehmerinnen	Anzahl der Frauen mit positiver Wirkung nach Einnahme
A	500	255
B	500	197
C	1000	298

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Frau eine positive Wirkung durch eines der Medikamente eintritt.

b) Das Schmerzmittel *D* wirkt erfahrungsgemäß in 60 % aller Fälle positiv. In den anderen Fällen zeigt es keine positive Wirkung. *n* Frauen nehmen das Medikament ein.

– Interpretieren Sie, was durch den Term $0{,}4^n$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.
– Interpretieren Sie, was durch den Term $(1 - 0{,}4^n)$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

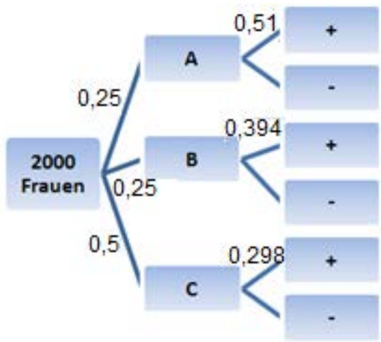
c) Die Körpermasse in der Versuchsgruppe ist normalverteilt.
Der Erwartungswert beträgt 65 Kilogramm (kg) und die Standardabweichung 5,4 kg.
6 % der Versuchsgruppe, symmetrisch verteilt, sind stark über- bzw. untergewichtig.
Bei der Auswertung der Studie hat sich herausgestellt, dass diese 6 % als Testpersonen nicht geeignet sind.

– Berechnen Sie, in welchem Bereich die Körpermassen der Teilnehmerinnen liegen müssten, um ungeeignete Testpersonen auszuschließen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) *Ein Diagramm ist nicht erforderlich.*



P(„Eintritt einer positiven Wirkung") = 0,25 · 0,51 + 0,25 · 0,394 + 0,5 · 0,298 = 0,375 = 37,5 %

oder:

P(„Eintritt einer positiven Wirkung") = $\frac{255 + 197 + 298}{2\,000}$ = 0,375

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufällig ausgewählten Frau eine positive Wirkung durch eines der Medikamente eingetreten ist, beträgt 37,5 %.

b) $0{,}4^n$ drückt mithilfe des Modells der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit aus, dass bei n Frauen keine positive Wirkung auftritt.

$1 - 0{,}4^n$ ist die Gegenwahrscheinlichkeit dazu und berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass von n Frauen mindestens 1 Frau eine positive Wirkung des Medikaments verspürt.

c) X … Körpermassen in kg

Bezeichnet man mit a die untere Grenze des gesuchten Intervalls, so gilt:
$P(X \leq a) = 0{,}03$

Berechnung von a mittels Technologieeinsatz:
$a = 54{,}84$

Testpersonen der Versuchsgruppe mit einer Körpermasse zwischen rund 54,8 kg und rund 75,2 kg sind für das Experiment ideal.

Es sind vor allem mit Technologieeinsatz auch andere Lösungswege möglich.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) schwer	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Medizin

Quellen: —

Wirkstoff eines Medikaments

Einem Patienten werden Medikamente mit einem bestimmten Wirkstoff verabreicht.

a) Einem Patienten wird ein Medikament verabreicht. In jedem Zeitintervall der Länge 6 Stunden halbiert sich die Menge des Wirkstoffs dieses Medikaments im Körper. Nach 18 Stunden befinden sich im Blut des Patienten noch 10 mg des Wirkstoffs.

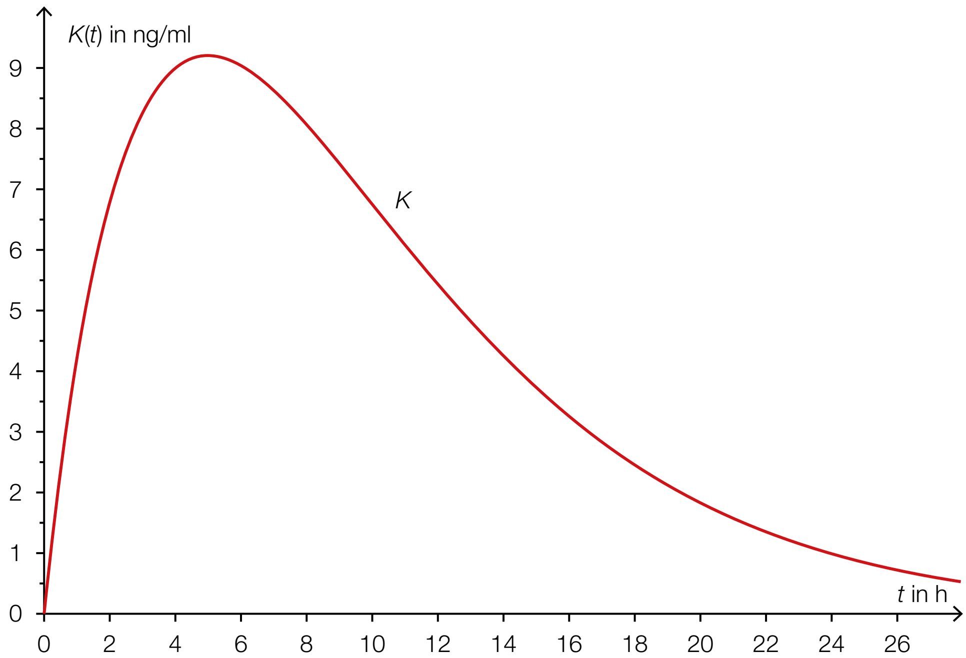
1) Erklären Sie, mit welchem Funktionstyp der zeitliche Verlauf der Menge des Wirkstoffs beschrieben werden kann.
2) Berechnen Sie die Menge des Wirkstoffs, der zu Beginn in diesem Medikament enthalten war.

b) Die Abnahme der Konzentration des Wirkstoffs eines anderen Medikaments im Blut kann mit der Funktion W beschrieben werden:

$W(t) = 45 \cdot e^{-0{,}223 \cdot t}$
t … Zeit nach Einnahme des Medikaments in h
$W(t)$ … Konzentration des Wirkstoffs zur Zeit t in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) Blut

1) Formen Sie die Gleichung $W = 45 \cdot e^{-0{,}223 \cdot t}$ nach t um.
2) Berechnen Sie diejenige Zeit, nach der noch 20 % der ursprünglichen Konzentration vorhanden sind.

c) Der nachstehende Graph der Funktion K zeigt modellhaft die Konzentration eines Wirkstoffs im Blut in Abhängigkeit von der Zeit t.



1) Kreuzen Sie die nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$\frac{K(20) - K(8)}{20 - 8} < 0$	☐
$K'(20) > K'(8)$	☐
$K'(8) < 0$	☐
$K''(6) < 0$	☐
$K''(20) < 0$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) Der zeitliche Verlauf der Menge des Wirkstoffs kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden, da bei diesem Funktionstyp die Funktionswerte in gleich langen Zeitintervallen immer um denselben Faktor zu- oder abnehmen.

a2) 18 Stunden entsprechen 3-mal der Halbwertszeit. Der Wert 10 mg ist somit der 8. Teil der Anfangsmenge. Diese beträgt daher 80 mg.

b1) $\frac{W}{45} = e^{-0{,}223 \cdot t}$

$\ln\left(\frac{W}{45}\right) = -0{,}223 \cdot t$

$t = -\frac{1}{0{,}223} \cdot \ln\left(\frac{W}{45}\right)$

b2) $0{,}2 \cdot 45 = 45 \cdot e^{-0{,}223 \cdot t}$

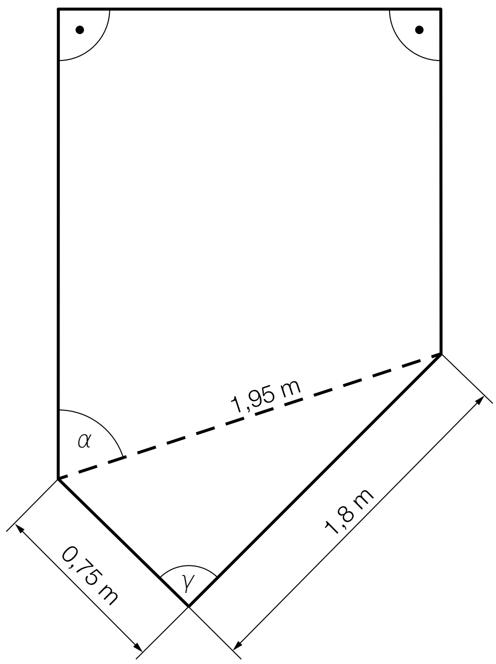
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 7{,}217\ldots \text{ h} \approx 7 \text{ h } 13 \text{ min}$

c1)

$K''(20) < 0$	☒

Gartensauna

a) In der nachstehenden Abbildung ist die Grundfläche einer Gartensauna in der Ansicht von oben modellhaft dargestellt.



1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Winkel γ ein rechter Winkel ist. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Strecke a ein, deren Länge mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

   $a = 1{,}95 \cdot \sin(\alpha)$ *[0/1 P.]*

b) Die zeitliche Entwicklung der Lufttemperatur beim Aufheizen einer bestimmten Gartensauna kann modellhaft durch die Funktion T beschrieben werden.

$T(t) = 85 - 75 \cdot 0{,}95^t$

t ... Zeit ab dem Beginn des Aufheizens in min
$T(t)$ ... Lufttemperatur in der Gartensauna zur Zeit t in °C

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Die Lufttemperatur in der Gartensauna beträgt zu Beginn des Aufheizens ___①___ und nähert sich einer maximalen Lufttemperatur von ___②___ an.

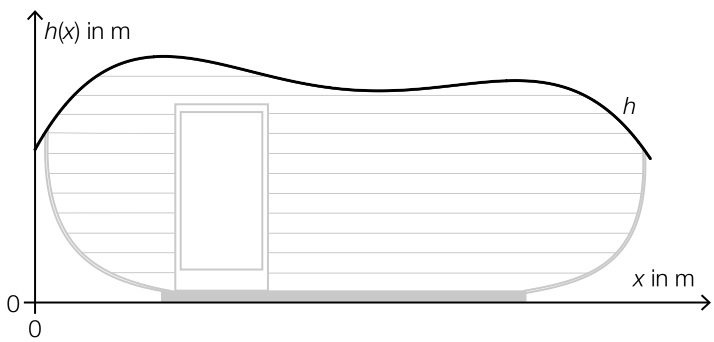
①	
0 °C	☐
1 °C	☐
10 °C	☐

②	
75 °C	☐
85 °C	☐
95 °C	☐

c) In der unten stehenden Abbildung ist der Querschnitt einer Gartensauna dargestellt. Die obere Begrenzungslinie des Daches wird durch den Graphen der Funktion h beschrieben.

$h(x) = -0{,}0207 \cdot x^4 + 0{,}265 \cdot x^3 - 1{,}14 \cdot x^2 + 1{,}8 \cdot x + 1{,}54 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 6{,}2$

x ... horizontale Entfernung vom linken Dachrand in m
$h(x)$ ... Höhe über dem waagrechten Boden an der Stelle x in m



An der Stelle x_P gilt: $h'(x_P) = 0$ und $h''(x_P) > 0$

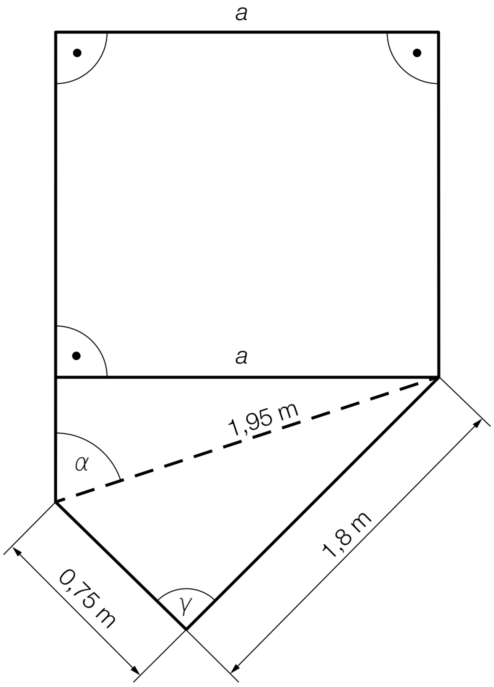
1) Berechnen Sie die Stelle x_P. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Da der Lehrsatz des Pythagoras für dieses Dreieck gilt, ist es rechtwinkelig:
$\sqrt{1{,}8^2 + 0{,}75^2} = 1{,}95 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 90°$

Auch ein richtiger Nachweis mithilfe von trigonometrischen Beziehungen ist als richtig zu werten.

a2)



Für die Punktevergabe ist ein Kennzeichnen des rechten Winkels beim Einzeichnen von a nicht relevant.

a1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen von *a*.

b1)

①	
10 °C	☒

②	
85 °C	☒

b1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

c1) $h'(x) = 0$ *oder* $-0{,}0828 \cdot x^3 + 0{,}795 \cdot x^2 - 2{,}28 \cdot x + 1{,}8 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x_1 = 1{,}29...$ $x_2 = 3{,}46...$ $x_3 = 4{,}84...$

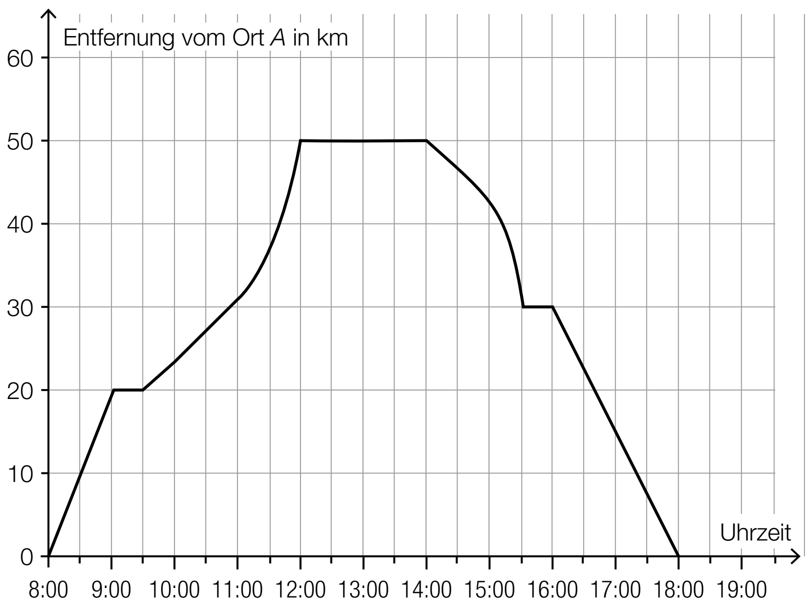
Wegen $h''(x_P) > 0$ handelt es sich bei x_P um eine lokale Minimumstelle.
Aus der Abbildung ist daher ersichtlich: $x_P = x_2 = 3{,}46...$

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Stelle x_P.

Radausflug

Der Ort A ist mit dem 50 km entfernten Ort B durch einen Radweg verbunden. Der Radweg führt an einem See vorbei.

a) Im nachstehenden Diagramm ist die Entfernung eines Radfahrers vom Ort A in Abhängigkeit von der Uhrzeit während einer Tages-Fahrrad-Tour von A nach B und wieder zurück dargestellt.



1) Lesen Sie aus dem Diagramm ab, wann der Radfahrer den Rückweg antritt.
2) Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Radfahrers im Zeitintervall von 14:00 Uhr bis 15:30 Uhr.
3) Interpretieren Sie das Diagramm im Zeitintervall von 15:30 Uhr bis 16:00 Uhr im gegebenen Sachzusammenhang.

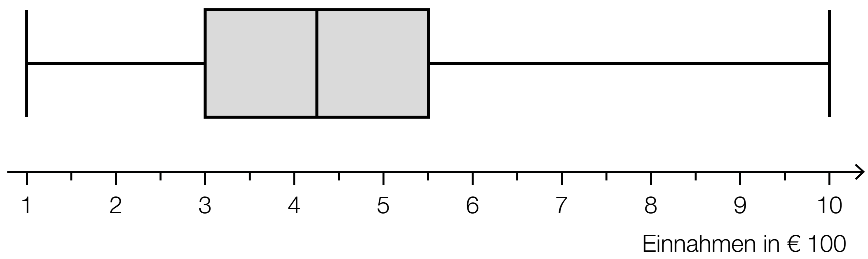
b) Die Radtour führt an einem See vorbei. Von einem 15 m hohen Aussichtsturm am Seeufer erblickt man durch Senken eines Fernrohrs aus der Horizontalen um $\alpha = 26°$ die Mastspitze eines Segelboots. Die Mastspitze liegt 2,9 m über dem Wasserspiegel des Sees.

1) Erstellen Sie eine Skizze, die diesen Sachverhalt beschreibt.
2) Berechnen Sie die horizontale Entfernung des Mastes vom Turm.

c) Der See ist an der tiefsten Stelle 15 m tief. Die Lichtintensität I nimmt mit der Wassertiefe ab. Misst man diese in lotrechter Richtung in einmetrigen Abständen, so ergibt sich pro Meter eine Abnahme von 12 % in Bezug auf den jeweils vorherigen Messwert.

1) Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion auf, die die Lichtintensität in Abhängigkeit von der Wassertiefe beschreibt.
2) Ermitteln Sie, auf wie viel Prozent des Ausgangswerts die Lichtintensität in 15 m Tiefe gesunken ist.

d) Im Ort *B* befindet sich ein kleiner Kiosk. Für eine Saison sind die Einnahmen jedes Tages im nachstehenden Boxplot veranschaulicht.



1) Lesen Sie den Median und die beiden Quartile sowie die minimalen und die maximalen Einnahmen ab.

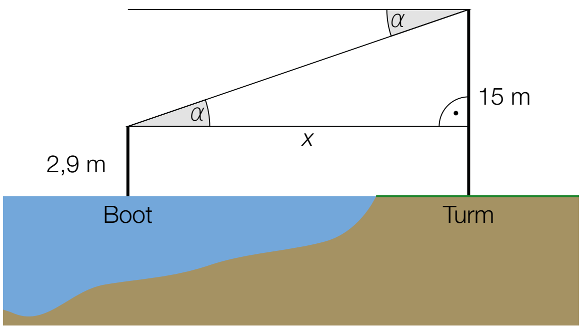
Möglicher Lösungsweg

a1) Um 14:00 Uhr wird der Rückweg nach *A* angetreten.

a2) Zwischen 14:00 Uhr und 15:30 Uhr wird eine Strecke von 20 km mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $13,\overline{3}$ km/h zurückgelegt.

a3) Von 15:30 Uhr bis 16:00 Uhr legt der Radfahrer eine Pause ein.

b1)



b2) $\tan(\alpha) = \frac{12,1}{x}$

$x \cdot \tan(\alpha) = 12,1$

$x = \frac{12,1}{\tan(\alpha)}$

$x = 24,80\ldots$

Das Boot ist rund 24,8 m vom Fußpunkt des Turmes entfernt.

c1) $I(t) = I_0 \cdot 0,88^t$

t … Wassertiefe in m
$I(t)$ … Lichtintensität in der Tiefe t
I_0 … Lichtintensität an der Wasseroberfläche

c2) $I(15) = I_0 \cdot 0,88^{15} = I_0 \cdot 0,1469\ldots$
Die Lichtintensität ist in 15 m Tiefe auf rund 14,7 % des Ausgangswerts gesunken.

d1) Der Median beträgt rund € 425. Die beiden Quartile betragen q_1 = € 300 und q_3 = € 550.
Die minimalen Einnahmen betragen € 100 und die maximalen € 1.000.

PKW-Bestand

Der PKW-Bestand ist in Österreich von 2 991 284 Fahrzeugen im Jahr 1990 auf 4 359 944 Fahrzeuge im Jahr 2009 gestiegen (Quelle: Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2011).

a) Der PKW-Bestand in Österreich soll in Abhängigkeit von der Zeit durch eine lineare Funktion modelliert werden.

1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate des PKW-Bestands pro Jahr für den Zeitraum von 1990 bis 2009.
2) Berechnen Sie den PKW-Bestand, der im Jahr 2020 gemäß diesem Modell zu erwarten wäre.

b) Der PKW-Bestand in Österreich soll in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung dieser Exponentialfunktion auf. Wählen Sie dabei $t = 0$ für das Jahr 1990.
2) Berechnen Sie den PKW-Bestand, der im Jahr 2020 gemäß diesem Modell zu erwarten wäre.

Möglicher Lösungsweg

a1) mittlere Änderungsrate: $\frac{4\,359\,944 - 2\,991\,284}{2009 - 1990} = 72\,034{,}7...$

Der PKW-Bestand hat in Österreich durchschnittlich um 72035 PKWs pro Jahr zugenommen.

a2) Prognose für 2020: $4\,359\,944 + 72\,035 \cdot 11 \approx 5\,152\,329$
Der PKW-Bestand würde im Jahr 2020 rund 5,15 Mio. PKWs betragen.

b1) $4\,359\,944 = 2\,991\,284 \cdot a^{19}$
$a = 1{,}02002...$

$P(t) = 2\,991\,284 \cdot 1{,}02002...^t$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1990
$P(t)$ ... PKW-Bestand zur Zeit t

b2) Prognose für 2020: $P(30) = 2\,991\,284 \cdot a^{30} = 5\,422\,632{,}4...$
Der PKW-Bestand würde im Jahr 2020 rund 5,42 Mio. PKWs betragen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

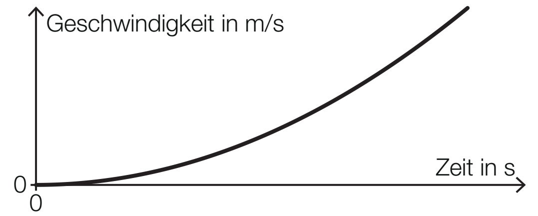
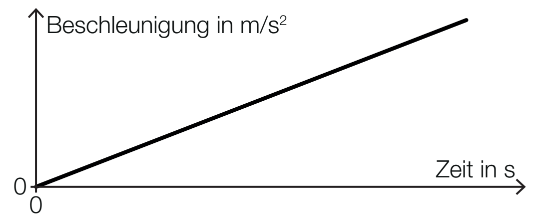
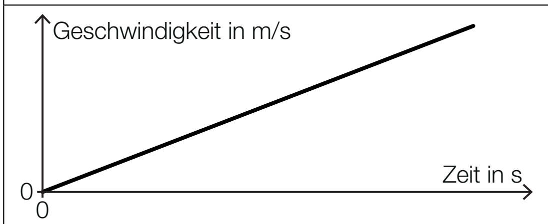
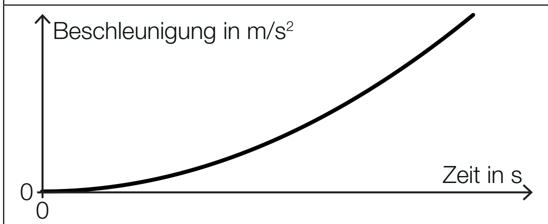
Mopedfahrt

Aufgabennummer: A_120		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Kurt und sein Freund Bernd fahren mit ihren Mopeds zu einem Badesee.

a) Kurt beschleunigt gleichmäßig und hat 6 s nach dem Wegfahren eine Geschwindigkeit von 12,5 m/s.

– Kreuzen Sie diejenige Grafik an, die diesen Sachverhalt richtig beschreibt. *[1 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

b) Auf einem Teilstück kann Bernds Geschwindigkeit näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$v(t) = 0{,}3 \cdot t + 0{,}8$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

– Berechnen Sie den Weg, den Bernd innerhalb der ersten Minute zurücklegt.

c) Bernd wohnt im Ort A, Kurt im 10 km entfernten Ort B, der Badesee liegt im Ort C. Die Straße führt von A über B nach C. Kurt fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 45 km/h. Bernd fährt 6 Minuten früher mit einer konstanten Geschwindigkeit von 50 km/h in Richtung C.

– Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, mit der die Fahrzeit t ermittelt werden kann, die Bernd benötigt, um Kurt einzuholen. *[1 aus 5]*

$45 \cdot t - 50 \cdot (t - 0{,}1) = 0$	☐
$50 \cdot (t - 6) = 10 - 45 \cdot t$	☐
$50 \cdot t - 45 \cdot (t - 0{,}1) = 10$	☐
$5 \cdot t = 4{,}5$	☐
$50 \cdot t = 45 \cdot t - 10$	☐

d) Auf einem Teilstück erhöht Kurt – ausgehend von einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 – seine Geschwindigkeit pro Sekunde näherungsweise um 1 % bezogen auf die Geschwindigkeit in der jeweils vorhergehenden Sekunde.

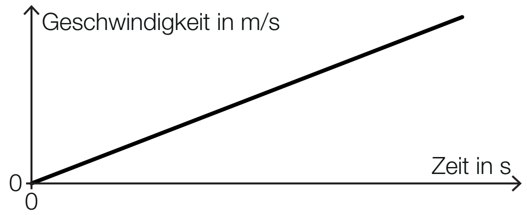
– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit.

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent ausgehend von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 die Geschwindigkeit nach 10 Sekunden zugenommen hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

[...]	
[...]	
[...]	
	☒
[...]	

b) $s = \int_0^{60} (0{,}3 \cdot t + 0{,}8)\,\mathrm{d}t = 588$

Bernd legt innerhalb der ersten Minute 588 m zurück.

c)

[...]	
[...]	
$50 \cdot t - 45 \cdot (t - 0{,}1) = 10$	☒
[...]	
[...]	

d) $v(t) = v_0 \cdot 1{,}01^t$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t

$v(10) = v_0 \cdot 1{,}01^{10} = v_0 \cdot 1{,}1046...$

Die Geschwindigkeit hat um rund 10,5 % zugenommen.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 1
b) mittel	b) 1
c) mittel	c) 1
d) leicht	d) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

Minirampe

Ein Unternehmen, das Skate-Parks errichtet, plant eine neue Minirampe.

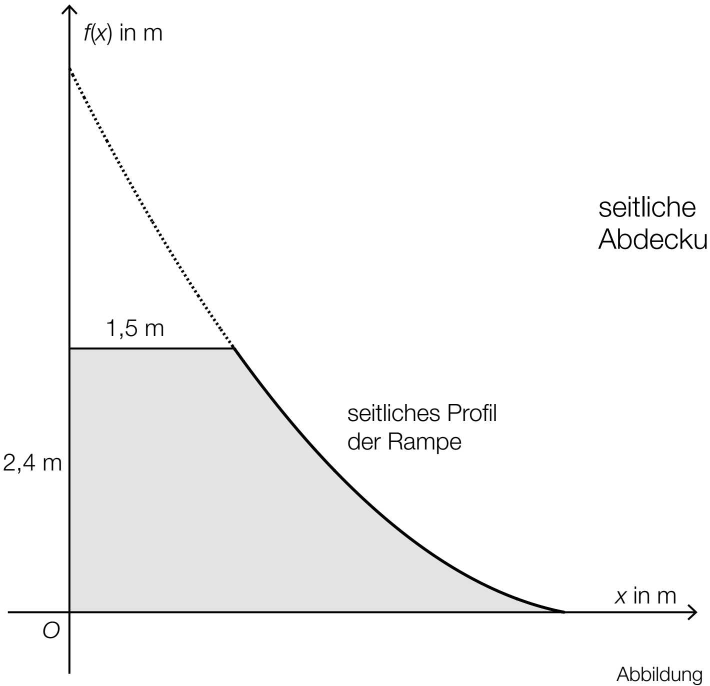


Abbildung 1

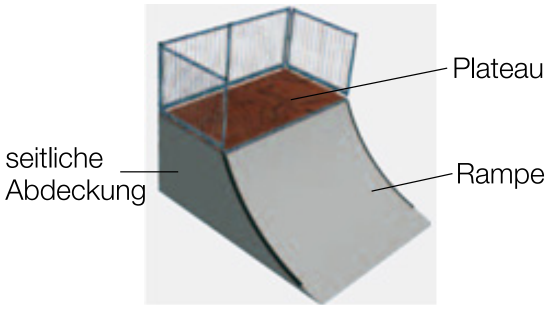


Abbildung 2

a) Das seitliche Profil der Rampe kann durch eine Parabel 2. Ordnung modelliert werden:

$f(x) = 0{,}2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4{,}95$ mit $1{,}5 \leq x \leq 4{,}5$

x … waagrechte Entfernung in Metern (m)
$f(x)$ … Höhe der Rampe in der Entfernung x in m

1) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche einer seitlichen Abdeckung. Entnehmen Sie die dazu notwendigen Werte der Abbildung 1.

2) Zeigen Sie, dass die gegebene Parabel 2. Ordnung beim Übergang zum Boden keine waagrechte Tangente aufweist.

b) Auf Kundenwunsch wird eine höhere Rampe errichtet, deren seitliches Profil wieder durch eine quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden kann.

Höhe der Rampe: 3 m
Tiefe des Plateaus: 1,5 m
Gefälle an der Rampenkante: 100 %
Bodenlänge der Rampe: 6,5 m

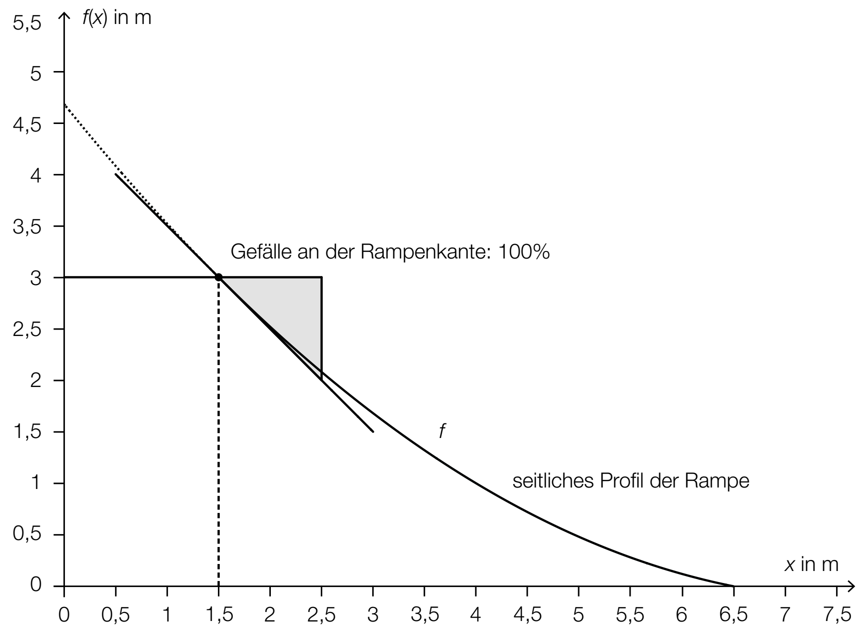


Abbildung 3

1) Erstellen Sie mit den gegebenen Angaben ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten dieser quadratischen Funktion.

Möglicher Lösungsweg

a1) Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse: $N = (4{,}5\,|\,0)$

$A_1 = a \cdot b = 2{,}4 \cdot 1{,}5 = 3{,}6$
$A_2 = \int_{1{,}5}^{4{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x = 2{,}7$
$A = A_1 + A_2 = 3{,}6 + 2{,}7 = 6{,}3$

Die Querschnittsfläche einer seitlichen Abdeckung beträgt rund 6,3 m².

a2) Eine Parabel 2. Ordnung hat nur ein lokales Extremum.
Berechnung des Tiefpunkts: $T = (5\,|\,–0{,}05)$
Nur im Tiefpunkt ist die Tangente waagrecht.

weitere Varianten: grafische Lösung oder Steigung in der Nullstelle berechnen

b1)

I: $f(1{,}5) = 3$		I:	$2{,}25 \cdot a + 1{,}5 \cdot b + c = 3$
II: $f(6{,}5) = 0$	bzw.	II:	$42{,}25 \cdot a + 6{,}5 \cdot b + c = 0$
III: $f'(1{,}5) = –1$		III:	$3 \cdot a + b = –1$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Planetenbahnen

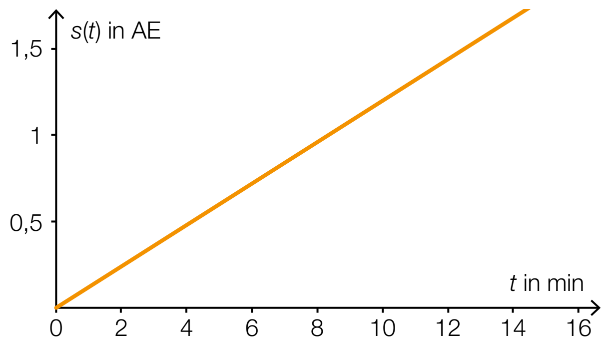
Aufgabennummer: A_017

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Der mittlere Abstand der Erde von der Sonne beträgt rund 150 Millionen km = 1 astronomische Einheit (AE). Das Licht der Sonne breitet sich mit einer Geschwindigkeit von rund 300 000 km/s aus.

– Berechnen Sie, welchen Weg das Licht in einem Jahr (= 365 Tage) zurücklegt.
– Geben Sie das Ergebnis in Gleitkommadarstellung in km an.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt ein Weg-Zeit-Diagramm für die Ausbreitung von Licht. Der Weg $s(t)$ ist in astronomischen Einheiten (AE) und die Zeit t in Minuten angegeben.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Lichtgeschwindigkeit in AE pro Minute.

c) Die Planeten unseres Sonnensystems bewegen sich auf elliptischen Bahnen um die Sonne. Johannes Kepler formulierte das Gesetz, welches einen Zusammenhang zwischen den Umlaufzeiten und den großen Bahnachsen von 2 Planeten herstellt:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

a_1, a_2 … große Bahnachsen in km
T_1, T_2 … Umlaufzeiten in Jahren

Für die Planeten Uranus und Erde gilt:

	große Bahnachse in km	Umlaufzeit in Jahren
Uranus	a_1	84
Erde	$1{,}496 \cdot 10^8$	1

– Berechnen Sie die große Bahnachse a_1 des Uranus.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

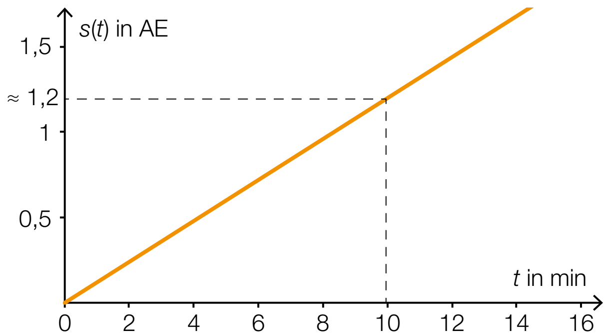
a) 1 Jahr hat $365 \cdot 24 \cdot 3\,600$ Sekunden

Weg in einer Sekunde: $300\,000$ km $= 3 \cdot 10^5$ km

Weg in einem Jahr: $365 \cdot 24 \cdot 3\,600 \cdot 3 \cdot 10^5 = 9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km

Das Licht legt in einem Jahr einen Weg von $9{,}4608 \cdot 10^{12}$ km zurück.

b)



Die Lichtgeschwindigkeit beträgt rund $\frac{1{,}2}{10}$ AE/min $= 0{,}12$ AE/min.

c) $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$

$\frac{84^2}{1^2} = \frac{a_1^3}{(1{,}496 \cdot 10^8)^3}$

$a_1 = \sqrt[3]{84^2 \cdot 1{,}496^3 \cdot 10^{24}} \approx 2{,}869 \cdot 10^9$

Die große Bahnachse des Uranus beträgt rund $2{,}869 \cdot 10^9$ km.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 1

Thema: Astronomie

Quellen: —

Neuronen der Großhirnrinde

Die Anzahl der Neuronen in der Großhirnrinde bei Frauen kann näherungsweise durch die nachstehende Funktion N beschrieben werden.

$N(t) = e^{3{,}05 - 0{,}00145 \cdot t}$

t ... Lebensalter in Jahren
$N(t)$ ... Anzahl der Neuronen im Lebensalter t in Milliarden

a) In einem Zeitschriftenartikel wird behauptet: „Innerhalb von 50 Jahren nimmt die Anzahl der Neuronen in der Großhirnrinde bei Frauen um 10 % ab."

1) Überprüfen Sie mithilfe des gegebenen Modells, ob diese Behauptung auf die ersten 50 Lebensjahre zutrifft.

b) Die Funktion N kann auch in der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ geschrieben werden.

1) Geben Sie N_0 und a an.

N_0 = ____

a = ____

c) Die Anzahl der Neuronen in der Großhirnrinde bei Frauen kann näherungsweise durch eine lineare Funktion M beschrieben werden. Für die Lebensalter 0 Jahre und 80 Jahre stimmen die Funktionswerte von N und M überein.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion M auf.

Die Funktionen N und M sind von folgender Form:

$N(t) = e^{a-b \cdot t}$
$M(t) = N_0 - k \cdot t$
a, b, k, N_0 ... positive Parameter

Es soll untersucht werden, für welches Lebensalter (zwischen 0 und 80 Jahren) die Differenz $N(t) - M(t)$ maximal ist. Dieses Lebensalter erhält man als Lösung von einer der unten stehenden Gleichungen.

2) Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an. *[1 aus 5]*

$-k + b \cdot e^{a-b \cdot t} = 0$	☐
$-k - b \cdot e^{a-b \cdot t} = 0$	☐
$-k - e^{a-b \cdot t} = 0$	☐
$N_0 - k \cdot t + e^{a-b \cdot t} = 0$	☐
$N_0 - k \cdot t - b \cdot e^{a-b \cdot t} = 0$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{N(50) - N(0)}{N(0)} = \frac{19{,}638... - 21{,}115...}{21{,}115...} = -0{,}069... \approx -7\ \%$

Die Aussage ist falsch. Die Abnahme der Neuronenanzahl innerhalb von 50 Jahren beträgt rund 7 %.

b1) unter Anwendung von Potenzregeln:

$$N(t) = e^{3{,}05} \cdot e^{-0{,}00145 \cdot t} = e^{3{,}05} \cdot (e^{-0{,}00145})^t \approx \underbrace{21{,}115}_{N_0} \cdot \underbrace{0{,}99855^t}_{a}$$

$N_0 = 21{,}115$

$a = 0{,}99855$

c1) $M(t)$ … Anzahl der Neuronen im Lebensalter t in Milliarden

Steigung der linearen Funktion M: $\frac{N(80) - N(0)}{80 - 0} = -0{,}0289...$

$M(0) = N(0) = 21{,}1153...$

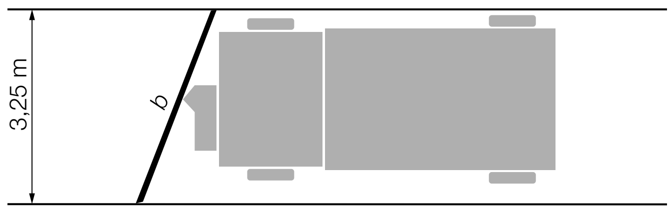
$M(t) = 21{,}1153... - 0{,}0289... \cdot t$

c2)

$-k + b \cdot e^{a - b \cdot t} = 0$	☒

Winterdienst

a) In der nachstehenden Abbildung ist ein Schneepflug mit einem Räumschild mit der Breite b auf einer 3,25 m breiten Straße in der Ansicht von oben modellhaft dargestellt.



Der Winkel α kann mit der nachstehenden Formel berechnet werden.

$\alpha = \arcsin\left(\frac{3{,}25}{b}\right)$

1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel α. *[0/1 P.]*

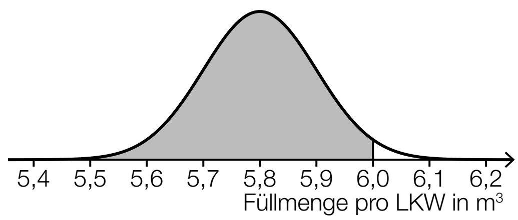
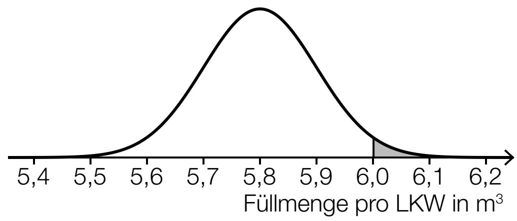
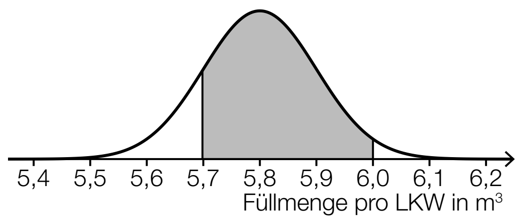
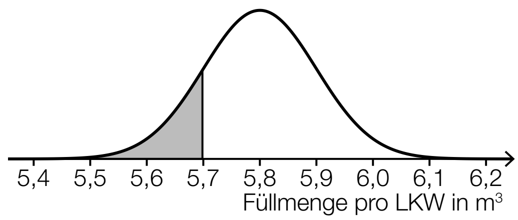
b) Beim Winterdienst werden LKWs mit Auftausalz befüllt. Die Füllmenge pro LKW in m^3 ist annähernd normalverteilt.

In den unten stehenden Abbildungen ist jeweils der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt. Die in den Abbildungen grau markierten Flächen entsprechen jeweils der Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis.

1) Ordnen Sie den beiden Ereignissen jeweils die passende Abbildung aus A bis D zu.

[0/1 P.]

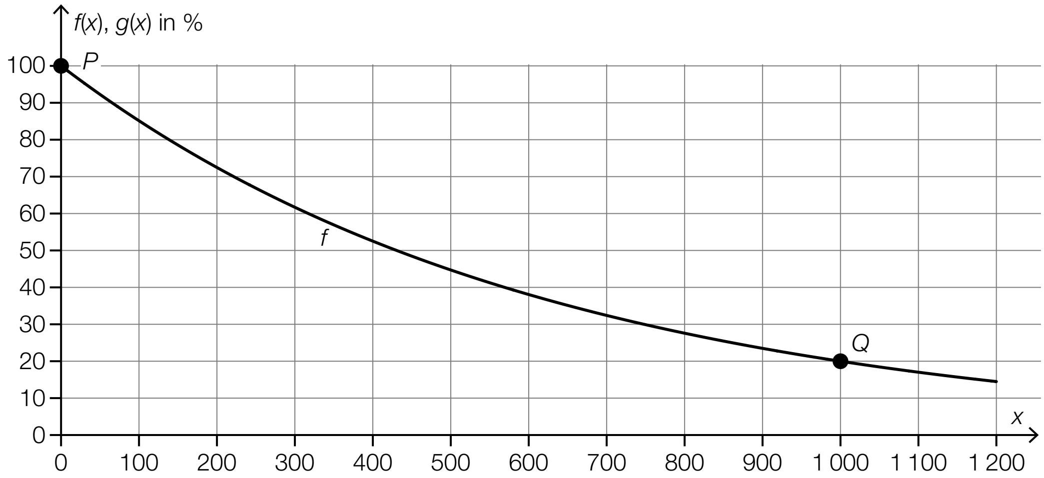
Ein zufällig ausgewählter LKW wird mit mehr als 6,0 m^3 befüllt.	
Ein zufällig ausgewählter LKW wird mit höchstens 5,7 m^3 befüllt.	

A	
B	
C	
D	

c) Auf einer Straße wird Auftausalz gestreut. Durch den nachfolgenden Verkehr nimmt die Salzmenge auf der Straße allerdings wieder ab.

Die Salzmenge auf der Straße in Prozent der gestreuten Salzmenge hängt von der Anzahl der Fahrzeuge, die die Straße befahren, ab. Sie kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

x ... Anzahl der Fahrzeuge
$f(x)$ ... Salzmenge auf der Straße nach x Fahrzeugen in %



1) Stellen Sie mithilfe der Punkte P und Q eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf. *[0/1 P.]*

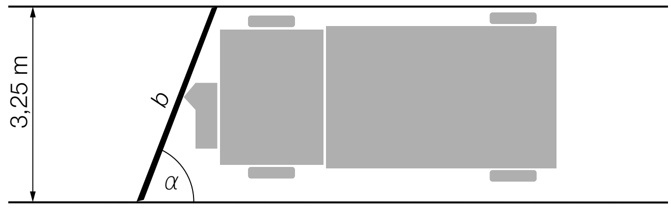
2) Berechnen Sie, nach wie vielen Fahrzeugen die Salzmenge auf der Straße auf 10 % der gestreuten Salzmenge gesunken ist. *[0/1 P.]*

Bei einem anderen Auftausalz sinkt die Salzmenge auf der Straße nach 600 Fahrzeugen auf die Hälfte der gestreuten Salzmenge. Dieser Zusammenhang kann durch die Exponentialfunktion g beschrieben werden.

3) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Funktion g im Intervall [0; 1 200] ein. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

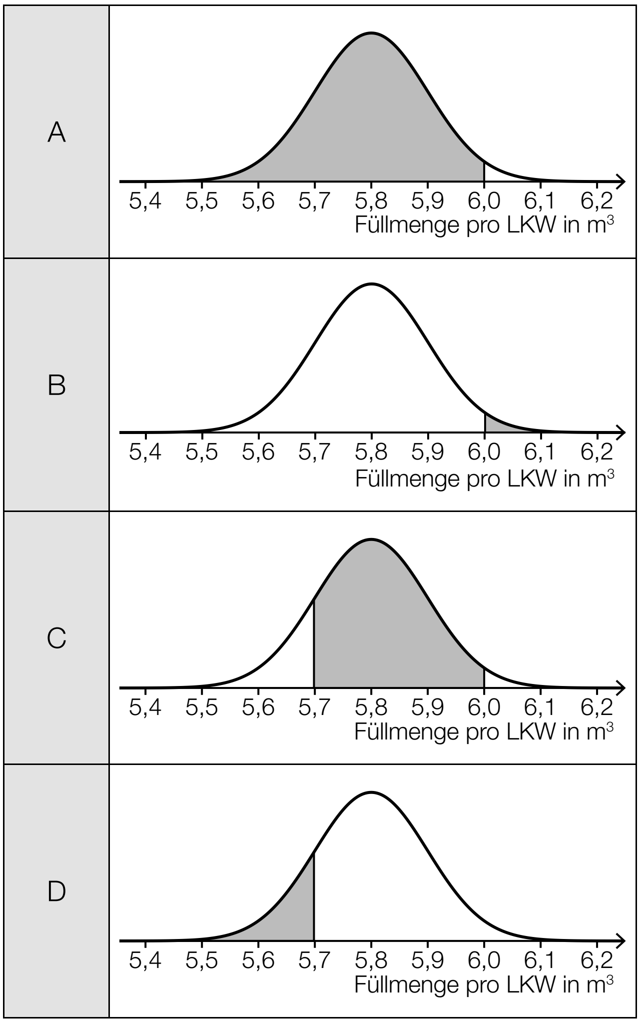


Auch ein Kennzeichnen des Winkels α an einer anderen Stelle in der Abbildung ist als richtig zu werten.

a1) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Winkels α.

b1)

Ein zufällig ausgewählter LKW wird mit mehr als 6,0 m^3 befüllt.	B
Ein zufällig ausgewählter LKW wird mit höchstens 5,7 m^3 befüllt.	D



b1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1) $f(x) = a \cdot b^x$
$a = 100$
$20 = 100 \cdot b^{1000}$
$b = 0{,}99839...$
$f(x) = 100 \cdot 0{,}99839...^x$

oder:

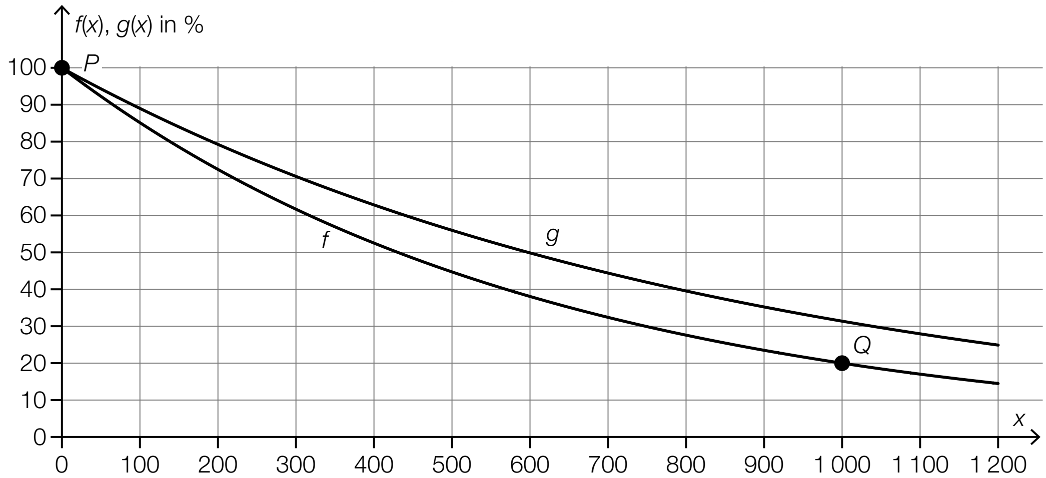
$f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$
$a = 100$
$20 = 100 \cdot e^{\lambda \cdot 1000}$
$\lambda = -0{,}001609...$
$f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}001609... \cdot x}$

c2) $f(x) = 10$ *oder* $100 \cdot 0{,}99839...^x = 10$
$x = 1\,430{,}6...$

Nach rund 1 431 Fahrzeugen befinden sich nur mehr 10 % der gestreuten Salzmenge auf der Straße.

Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, das Ergebnis auf eine ganze Zahl gerundet anzugeben.

c3)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es erforderlich, dass der Graph der Exponentialfunktion g durch die Punkte (0|100) und (600|50) geht.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von f.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der Fahrzeuge.
c3) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen von g im Intervall [0; 1 200].

Joghurt

Aufgabennummer: A_138

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Für die Herstellung von Joghurt werden Milchsäurebakterien verwendet. Das Wachstum der Milchsäurebakterien kann durch die folgende Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = 20 \cdot 1{,}02337^t$

t ... Zeit in min
$N(t)$ ... Bakterienmasse zur Zeit t in Mikrogramm (µg)

– Geben Sie das prozentuelle Wachstum pro Minute an.
– Berechnen Sie die Masse der Bakterien nach 1 Stunde. Geben Sie das Ergebnis in Gramm in der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ an.
– Begründen Sie, warum der nachstehend dargestellte Rechenschritt falsch ist.

$$\frac{a}{20} = 1{,}02337^t$$
$$\frac{\log(a)}{\log(20)} = t \cdot \log(1{,}02337)$$

b) Die Gesamtkosten für die Produktion von 2 verschiedenen Joghurtsorten werden durch die Funktionen K_1 und K_2 beschrieben.

$K_1(x) = 0{,}4 \cdot x + 270$
$K_2(x) = 0{,}001125 \cdot x^2 + 0{,}125 \cdot x + 200$

x ... produzierte Menge in ME, $x \geq 0$
$K_1(x)$ ... Gesamtkosten bei Sorte 1 bei der Produktionsmenge x in GE
$K_2(x)$ ... Gesamtkosten bei Sorte 2 bei der Produktionsmenge x in GE

– Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Graphen von K_1 und K_2.
– Interpretieren Sie die Koordinaten des Schnittpunkts im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Masse der Bakterien wächst um 2,337 % pro Minute.

$N(60) = 20 \cdot 1{,}02337^{60} = 79{,}9... \approx 80$
$80\ \mu g = 0{,}000080\ g = 8 \cdot 10^{-5}\ g$

Nach 1 h sind rund $8 \cdot 10^{-5}$ g vorhanden.

Bei $\frac{\log(a)}{\log(20)} = t \cdot \log(1{,}02337)$ wurden die logarithmischen Rechenregeln falsch angewendet.
Die linke Seite der Gleichung muss lauten: $\log\left(\frac{a}{20}\right)$ bzw. $\log(a) - \log(20)$

b) $0{,}4 \cdot x + 270 = 0{,}001125 \cdot x^2 + 0{,}125 \cdot x + 200$
Lösung mittels Technologieeinsatz: $(x_1 = -155{,}56)$
$x_2 = 400$

$K_1(400) = 430 \quad \Rightarrow \quad$ Schnittpunkt: $S = (400|430)$

Die 1. Koordinate des Schnittpunkts gibt diejenige Produktionsmenge (400 ME) an, bei der die Gesamtkosten bei beiden Sorten gleich hoch sind. Die 2. Koordinate des Schnittpunkts gibt diese Gesamtkosten (430 GE) an.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren, D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 3
b) leicht	b) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Thermometergrille*

Aufgabennummer: A_206

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In den USA gibt es eine Grillenart, die ihre Zirp-Rate abhängig von der Temperatur verändert: Je wärmer es ist, desto öfter zirpt die Grille. Daher wird sie als *Thermometergrille* bezeichnet.

a) Bei 75 °F zirpt eine Thermometergrille 140-mal pro Minute und bei 65 °F 100-mal pro Minute.

– Stellen Sie die Gleichung derjenigen linearen Funktion auf, die die Temperatur in °F in Abhängigkeit von der Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute beschreibt.

b) Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute und der Temperatur wird durch die Modellfunktion T beschrieben:

$$T(N) = 60 + \frac{N - 92}{4{,}7}$$

N ... Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute
$T(N)$ ... Temperatur in °F bei N Zirpgeräuschen pro Minute

– Bestimmen Sie, wie oft die Thermometergrille durchschnittlich in 15 Sekunden bei einer Temperatur von 70 °F zirpt.

c) Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute und der Temperatur wird durch die Modellfunktion T beschrieben:

$$T(N) = 60 + \frac{N - 92}{4{,}7}$$

N ... Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute
$T(N)$ ... Temperatur in °F bei N Zirpgeräuschen pro Minute

– Bestimmen Sie den Wert der Steigung.
– Beschreiben Sie, welche Bedeutung der Wert der Steigung in diesem Sachzusammenhang hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Informationen aus dem Text: (140|75) und (100|65)

Berechnung von k und d:

$k = \frac{75 - 65}{140 - 100} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$d = y - k \cdot x = 75 - 0{,}25 \cdot 140 = 40$

Angabe der Funktion:
$y = 0{,}25 \cdot x + 40$

x ... Anzahl der Zirpgeräusche in 1 Minute
y ... Temperatur in °F

b) $70 = 60 + \frac{N - 92}{4{,}7}$

N = 139 Zirpgeräusche in 1 Minute
ca. 35 Zirpgeräusche in 15 Sekunden

c) Steigung: $k = \frac{1}{4{,}7} = 0{,}21$

Wenn die Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute um 1 zunimmt, beschreibt das Modell eine Temperaturzunahme um 0,21 °F.

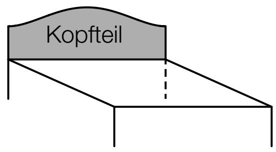
Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Anzahl der Zirpgeräusche in 1 Minute
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der Zirpgeräusche während 15 Sekunden

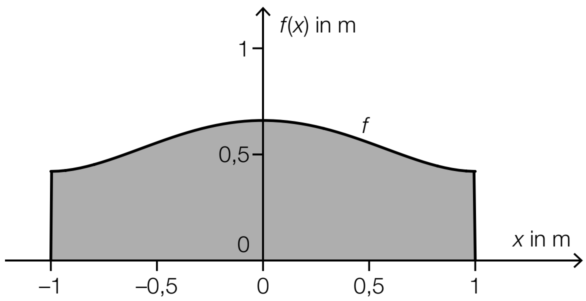
c) 1 × C1: für die richtige Bestimmung der Steigung
1 × C2: für die richtige Beschreibung des Wertes der Steigung

Zirbenholzbetten



Ein Unternehmen stellt Betten aus Zirbenholz mit einem Kopfteil her.

a) Die nachstehende Abbildung zeigt ein Modell des Kopfteils eines Bettes. Die obere Begrenzungslinie kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden.



$f(x) = 0{,}24 \cdot x^4 - 0{,}48 \cdot x^2 + 0{,}66$ mit $-1 \leq x \leq 1$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m

1) Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche. *[0/1 P.]*

Das Kopfteil wird aus einer 50 mm dicken Platte aus Zirbenholz angefertigt. Die Dichte des verwendeten Holzes beträgt $\varrho = 400$ kg/m³.
Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V, also $m = \varrho \cdot V$.

2) Berechnen Sie die Masse m des Kopfteils. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an. *[0/1 P.]*

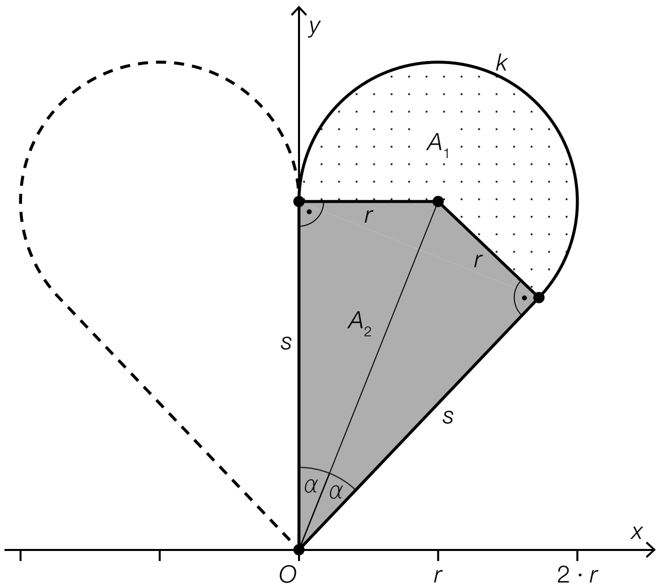
b) Zur Modellierung der oberen Begrenzungslinie eines anderen Kopfteils wird eine Funktion g verwendet.

$g(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$

x, $g(x)$ ... Koordinaten in m

1) Argumentieren Sie anhand der Funktionsgleichung, dass gilt: $g(x) = g(-x)$. *[0/1 P.]*

c) In der Mitte des Kopfteils wird ein Stück in Form eines Herzens ausgefräst. Eine Hälfte der Begrenzungslinie des Herzens wird durch eine Kurve beschrieben, die aus dem Kreisbogen *k* und der daran anschließenden Strecke *s* besteht (siehe nachstehende Abbildung).



1) Begründen Sie, warum *k* nicht als Graph einer Funktion mit dem Definitionsbereich $[0; 2 \cdot r]$ aufgefasst werden kann. *[0/1 P.]*

Die Fläche der halben Herzform kann in einen Kreissektor und ein Viereck unterteilt werden.

Für den Flächeninhalt dieses Kreissektors gilt:

$A_1 = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\beta}{360°}$

2) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung den Winkel β. *[0/1 P.]*

3) Kreuzen Sie diejenige Formel an, mit der man den Flächeninhalt A_2 des grau markierten Vierecks berechnen kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$A_2 = r^2 \cdot \cos(\alpha)$	☐
$A_2 = r^2 \cdot \tan(\alpha)$	☐
$A_2 = \frac{r^2}{\tan(\alpha)}$	☐
$A_2 = r^2 \cdot \sin(\alpha)$	☐
$A_2 = \frac{r^2}{\sin(\alpha)}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$A = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1{,}096$

Der Inhalt der grau markierten Fläche beträgt 1,096 m^2.

a2) $m = 400 \cdot 1{,}096 \cdot 0{,}05 = 21{,}92$

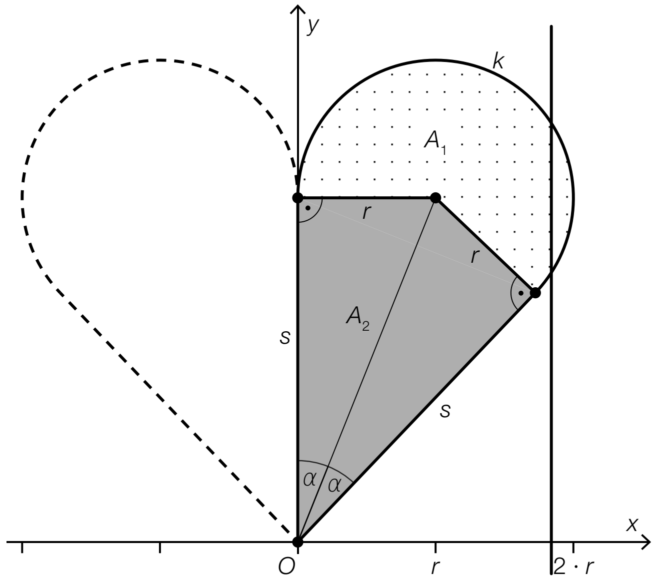
Die Masse des Kopfteils beträgt 21,92 kg.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Inhalts der grau markierten Fläche.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Masse unter Angabe der zugehörigen Einheit.

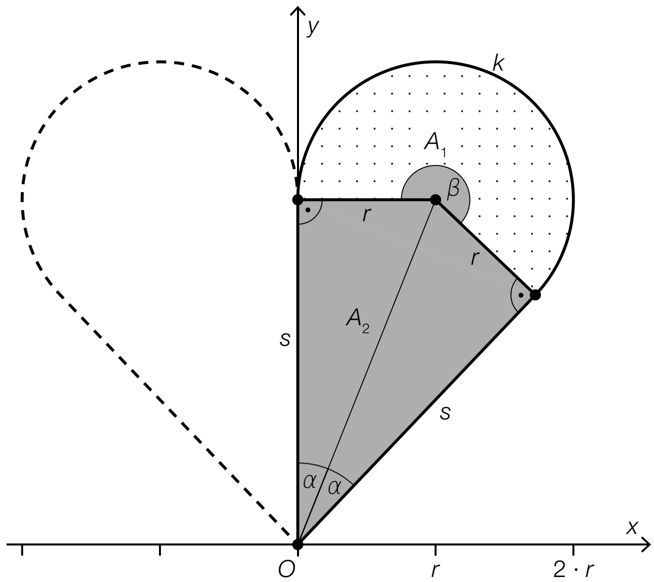
b1) Die Funktion g ist eine Polynomfunktion, in der nur Potenzen von x mit geradzahligen Exponenten auftreten.

b1) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.

c1) Die Kurve *k* stellt keine eindeutige Zuordnung dar; beispielsweise gibt es an der eingezeichneten Stelle zwei Kurvenpunkte.



c2)



c3)

$A_2 = \frac{r^2}{\tan(\alpha)}$	☒

c1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
c2) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Winkels β.
c3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Obst

a) Apfelsaft ist mit einem Jahresverbrauch von durchschnittlich 7,6 Litern pro Person der beliebteste Fruchtsaft in Deutschland.
Aus 100 kg Äpfeln kann man 65 L Apfelsaft herstellen.
Derzeit leben in Deutschland 83 Millionen Menschen.

1) Berechnen Sie die Menge an Äpfeln in Tonnen, die man benötigt, um den Jahresverbrauch an Apfelsaft in Deutschland zu decken. Geben Sie das Ergebnis in Gleitkommadarstellung der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10, k \in \mathbb{Z}$ an. *[0/1 P.]*

b) Unverdünnter Apfelsaft ist wegen des hohen Zuckergehalts als Erfrischungsgetränk ungeeignet. Es wird empfohlen, unverdünnten Apfelsaft mit der doppelten Menge an Leitungswasser zu mischen.

1) Kreuzen Sie die auf diese Empfehlung zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Das Verhältnis von unverdünntem Apfelsaft zu Leitungswasser beträgt 1 : 3.	☐
Das Verhältnis von unverdünntem Apfelsaft zu Leitungswasser beträgt 3 : 1.	☐
Das Verhältnis von unverdünntem Apfelsaft zu Leitungswasser beträgt 2 : 1.	☐
Die Mischung besteht zu $\frac{2}{3}$ aus unverdünntem Apfelsaft.	☐
Die Mischung besteht zu $\frac{2}{3}$ aus Leitungswasser.	☐

c) Die Obstanbaufläche in Österreich ist in den letzten Jahrzehnten zurückgegangen. Im Jahr 1960 betrug die Obstanbaufläche rund 28 000 Hektar (ha). Im Jahr 2005 betrug die Obstanbaufläche rund 15 000 ha.
Die Entwicklung der Obstanbaufläche lässt sich für diesen Zeitraum näherungsweise durch die Exponentialfunktion A beschreiben.

$A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1960
$A(t)$ ... Obstanbaufläche zur Zeit t in ha
A_0, k ... Parameter

1) Ermitteln Sie die Parameter A_0 und k. *[0 / 1 P.]*

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$1 - \frac{15\,000}{28\,000} \approx 0{,}46$ *[0 / 1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{100}{65} \cdot 7{,}6 \cdot 83 \cdot 10^6 = 9{,}70... \cdot 10^8$

$9{,}70... \cdot 10^8$ kg $= 9{,}70... \cdot 10^5$ t

Es werden rund $9{,}7 \cdot 10^5$ t Äpfel benötigt, um den Jahresverbrauch an Apfelsaft in Deutschland zu decken.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Menge in Tonnen in Gleitkommadarstellung.

b1)

Die Mischung besteht zu $\frac{2}{3}$ aus Leitungswasser.	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) $A_0 = A(0) = 28\,000$

$15\,000 = 28\,000 \cdot e^{-k \cdot 45}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$k = 0{,}01387...$

c2) Die Obstanbaufläche im Jahr 2005 ist um rund 46 % kleiner als jene im Jahr 1960.

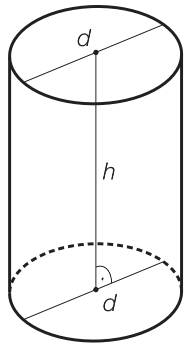
c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von A_0 und k.
c2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Flüssigkeitsbehälter*

Aufgabennummer: A_063

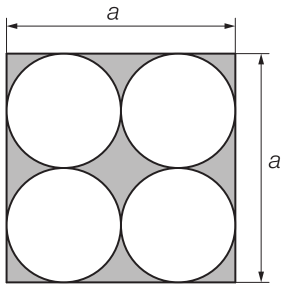
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Das nachstehend abgebildete zylindrische Gefäß mit der Höhe $h = 16$ dm fasst bei Befüllung bis 10 cm unter den oberen Rand 1 200 L.



1) Berechnen Sie den Durchmesser d des Gefäßes.

b) Ein Raum hat eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge a. Es werden darin 4 zylindrische Gefäße mit gleichem Außendurchmesser gelagert (siehe nachstehende Abbildung, Ansicht von oben).



1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche aus der Seitenlänge a.

$A =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Flüssigkeitsbehälter wird befüllt. Dabei kann die Flüssigkeitsmenge im Flüssigkeitsbehälter in Abhängigkeit von der Füllzeit näherungsweise durch die Funktion F beschrieben werden.

$F(t) = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$

t ... Füllzeit in min
$F(t)$ ... Flüssigkeitsmenge im Flüssigkeitsbehälter zur Füllzeit t in L

Die Gleichung $900 = 1\,100 - 800 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}$ wird nach t gelöst.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung der Lösung im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1) $1\,200 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 15$

$d = \sqrt{\frac{1\,200 \cdot 4}{15 \cdot \pi}} = 10{,}09...$

Der Durchmesser beträgt rund 10,1 dm.

b1) $A = a^2 - 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot \pi$

c1) Es wird diejenige Füllzeit berechnet, zu der sich 900 L Flüssigkeit im Flüssigkeitsbehälter befinden.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers d

b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel für A aus der Seitenlänge a

c1) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Lösung im gegebenen Sachzusammenhang

Lieblingsfarbe*

Aufgabennummer: A_082

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Rosa als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 13 %.
25 zufällig ausgewählte Personen werden nach ihrer Lieblingsfarbe gefragt.

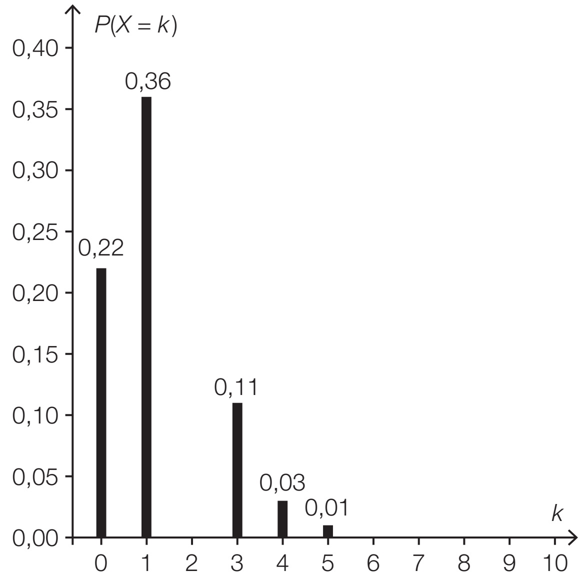
1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 der 25 Personen Rosa als Lieblingsfarbe nennen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Orange als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 7 %.
Unter *n* befragten Personen soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 1 Person sein, die Orange als Lieblingsfarbe nennt.

1) Berechnen Sie die Anzahl *n* derjenigen Personen, die dafür mindestens befragt werden müssen.

* ehemalige Klausuraufgabe

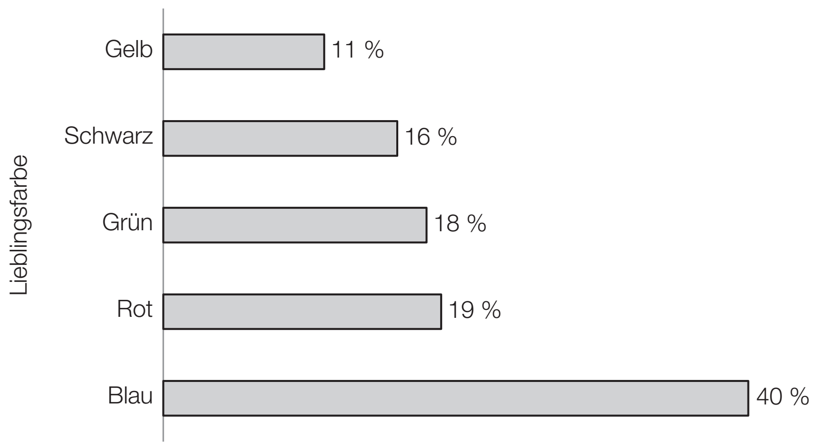
c) Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Personen unter 10 Befragten, die Lila als Lieblingsfarbe nennen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsvariablen ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 Befragten maximal 3 Befragte Lila als Lieblingsfarbe nennen, beträgt 96 %.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Säule für $P(X = 2)$ ein.

d) Die Schüler/innen einer Schule wurden nach ihren Lieblingsfarben gefragt. In der nachstehenden Abbildung ist dargestellt, wie viel Prozent der Befragten die jeweilige Farbe als Lieblingsfarbe genannt haben.



1) Beschreiben Sie, woran man erkennen kann, dass man auch mehr als eine Lieblingsfarbe nennen durfte.

Möglicher Lösungsweg

a1) X … Anzahl derjenigen Personen, die Rosa als Lieblingsfarbe nennen

Binomialverteilung mit $n = 25$ und $p = 0{,}13$:
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X = 3) = 0{,}2360\ldots$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 23,6 % nennen genau 3 der 25 befragten Personen Rosa als Lieblingsfarbe.

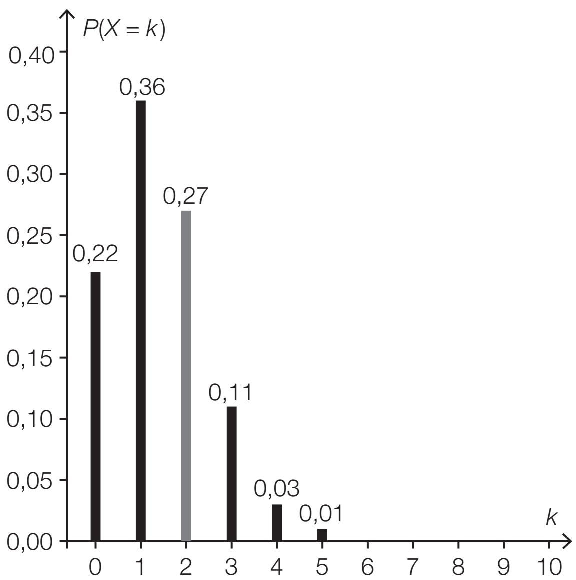
b1) X … Anzahl derjenigen Personen, die Orange als Lieblingsfarbe nennen

Binomialverteilung mit $p = 0{,}07$:
$P(X \geq 1) = 0{,}9$
$1 - P(X = 0) = 0{,}9$
$1 - 0{,}93^n = 0{,}9$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$n = 31{,}7\ldots$

Es müssen mindestens 32 Personen befragt werden.

c1) $P(X = 2) = 0{,}96 - (0{,}22 + 0{,}36 + 0{,}11) = 0{,}27$



Toleranzbereich für die Höhe der Säule: [0,25; 0,30]

Für die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, den Wert von P(X = 2) *anzugeben.*

d1) Addiert man die Prozentsätze für alle Lieblingsfarben, so erhält man ein Ergebnis, das größer als 100 % ist.

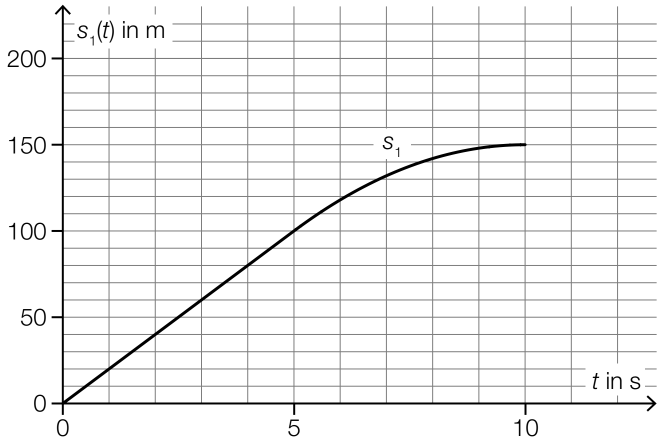
Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Mindestanzahl
c1) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der fehlenden Säule im Toleranzbereich [0,25; 0,30]
d1) 1 × C: für die richtige Beschreibung

Testfahrten

Auf drei Teststrecken werden Testfahrten mit Autos durchgeführt.

a) Eine bestimmte Testfahrt auf der ersten Teststrecke kann modellhaft durch die nachstehend dargestellte Weg-Zeit-Funktion s_1 beschrieben werden.

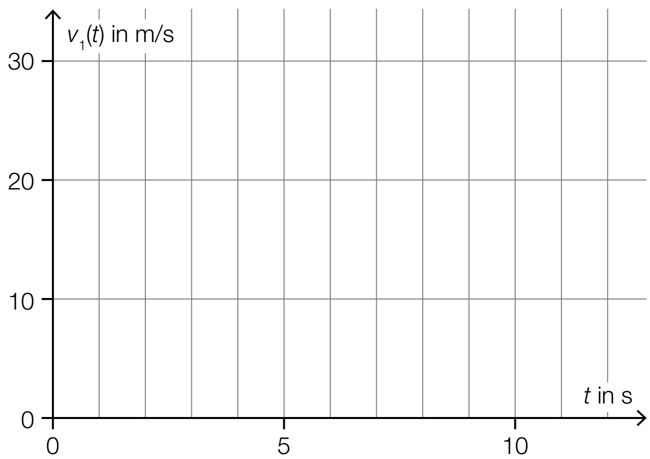


t ... Zeit in s
$s_1(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Autos auf den letzten 70 m der Testfahrt.
[0/1 P.]

Die Weg-Zeit-Funktion s_1 setzt sich aus einer linearen Funktion (im Zeitintervall [0; 5]) und einer quadratischen Funktion (im Zeitintervall [5; 10]) zusammen (siehe obige Abbildung).
An der Stelle $t = 5$ haben die lineare Funktion und die quadratische Funktion die gleiche Steigung.
An der Stelle $t = 10$ hat die quadratische Funktion die Steigung 0.

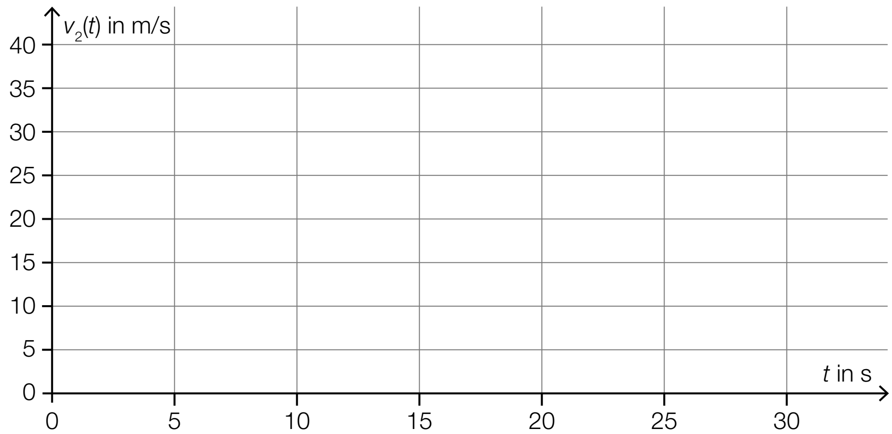
2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v_1 ein. *[0/1 P.]*



b) Für eine bestimmte 30 s lange Testfahrt auf der zweiten Teststrecke gilt:

Zu Beginn ($t = 0$) steht das Auto still.
Im Zeitintervall [0; 10] nimmt die Geschwindigkeit bis 25 m/s mit konstanter Beschleunigung zu.
Im Zeitintervall [10; 30] nimmt die Geschwindigkeit mit konstanter Beschleunigung ab.
Am Ende ($t = 30$) steht das Auto wieder still.

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v_2 im Zeitintervall [0; 30] ein. *[0/1 P.]*



c) Auf der dritten Teststrecke wurden unter anderem folgende Geschwindigkeiten in m/s gemessen:

18 22 24 30

1) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die zutreffende Auswirkung auf diese Datenliste aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Zu dieser Datenliste wird der Wert 32 hinzugefügt.	
Zu dieser Datenliste wird der Wert 23 hinzugefügt.	

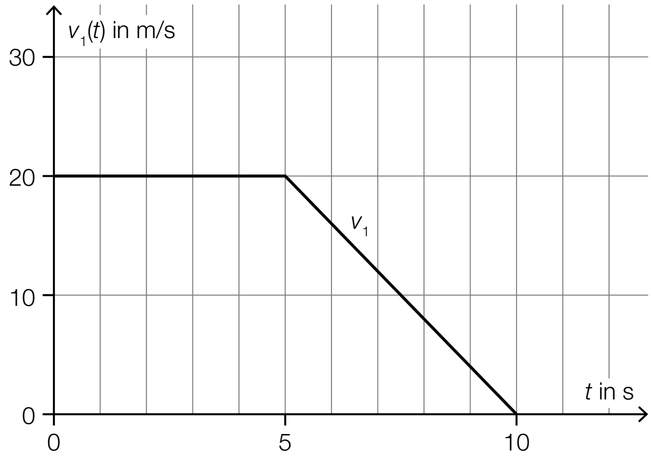
A	Das arithmetische Mittel wird größer.
B	Der Median wird kleiner.
C	Der Median bleibt unverändert.
D	Die Spannweite wird kleiner.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{150 - 80}{10 - 4} = \frac{70}{6} = 11{,}66...$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 11,7 m/s.

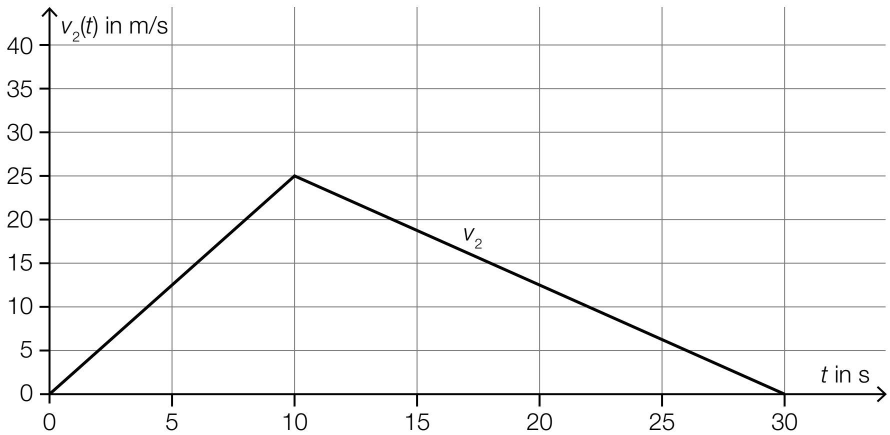
a2)



Der Punkt ist nur dann zu vergeben, wenn beide Graphen als Strecken, die jeweils durch die richtigen Endpunkte verlaufen, zu erkennen sind.

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v_1.

b1)



Der Punkt ist nur dann zu vergeben, wenn zu erkennen ist, dass die beiden Strecken jeweils durch die richtigen Endpunkte verlaufen.

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v_2.

c1)

Zu dieser Datenliste wird der Wert 32 hinzugefügt.	A
Zu dieser Datenliste wird der Wert 23 hinzugefügt.	C

A	Das arithmetische Mittel wird größer.
B	Der Median wird kleiner.
C	Der Median bleibt unverändert.
D	Die Spannweite wird kleiner.

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

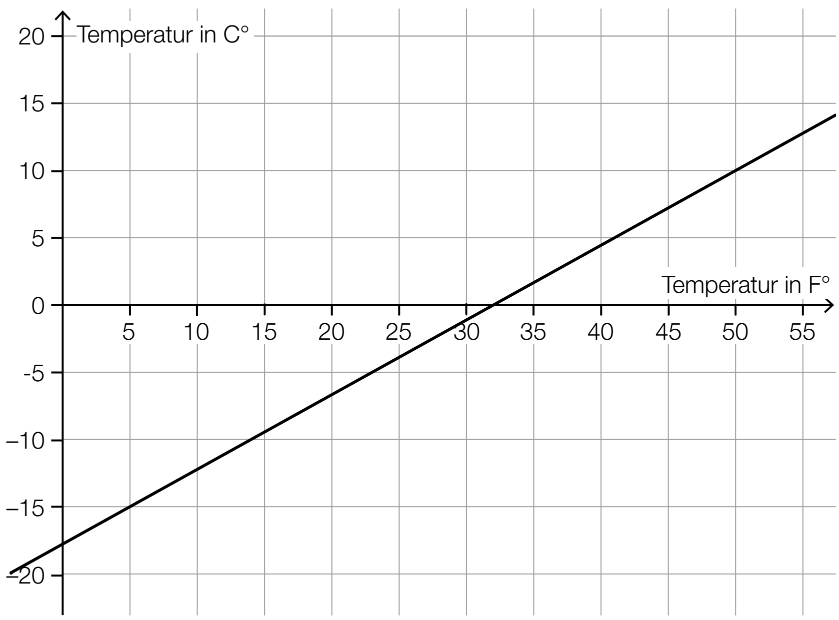
Temperaturumrechnung

Zur Temperaturmessung werden verschiedene Temperaturskalen verwendet. Zwei gängige Temperaturskalen sind die Celsius-Skala und die Fahrenheit-Skala.

a) Eine Rechenvorschrift für die Umrechnung einer Temperaturangabe in °C (Celsius) in eine Temperaturangabe in °F (Fahrenheit) lässt sich so formulieren:
„Erhöhen Sie die Temperaturangabe um 40, multiplizieren Sie das erhaltene Ergebnis mit 1,8 und vermindern Sie das Ergebnis um 40."

1) Stellen Sie eine Formel auf, die dieser beschriebenen Umrechnung der Temperaturangabe von °C in °F entspricht.

b) Folgender Funktionsgraph zeigt den Zusammenhang zwischen der Temperaturangabe in °F und der Temperaturangabe in °C:



Eine Formel für diese Temperaturangabenumrechnung lautet $C = \frac{F - 32}{1{,}8}$.

C ... Temperatur in °C
F ... Temperatur in °F

1) Weisen Sie nach, dass die obige Abbildung eine grafische Darstellung der angegebenen Formel ist.

c) Für Ihre weiteren Berechnungen verwenden Sie die Formel $F = \frac{9}{5} \cdot C + 32$.

C ... Temperatur in °C
F ... Temperatur in °F

1) Berechnen Sie denjenigen Zahlenwert, für den die Temperaturangabe in °C (C) und die Temperaturangabe in °F (F) den gleichen Wert haben.

Möglicher Lösungsweg

a1) Variablenbenennungen: C ... Temperatur in °C, F ... Temperatur in °F

$F = (C + 40) \cdot 1{,}8 - 40$

Andere Bezeichungen für die Variablen sind zulässig.

b1) Aus der Formel werden zwei Wertepaare für $(C|F)$ berechnet und es wird gezeigt, dass diese zwei Punkte auf der Geraden liegen.

oder

Auf der Geraden werden zwei Punkte ausgewählt und die Wertepaare $(C|F)$ werden in die Gleichung eingesetzt und die Gleichheit wird verifiziert.

c1) Gesucht ist die Temperatur, für die $F = C$ gilt, also die Lösung der Gleichung $F = \frac{9}{5} \cdot F + 32$: $F = -40$.

Die gleiche Temperaturangabe gilt für $F = -40$ °F und $C = -40$ °C.

Koffein

Aufgabennummer: A_199

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Abbaurate von Koffein kann von Person zu Person stark variieren.

a) Für Lena liegt die Halbwertszeit bei 1,5 Stunden.

– Modellieren Sie den Abbau von 80 mg Koffein in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) mithilfe einer Exponentialfunktion.

b) Klara hat eine große Prüfung vor sich und muss dafür lernen. Um beim Lernen „fit" zu sein, trinkt sie um 16 Uhr einen Energydrink, der 80 mg Koffein enthält. Um 17:30 Uhr isst sie eine Tafel Bitterschokolade, die 90 mg Koffein enthält.

Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben:

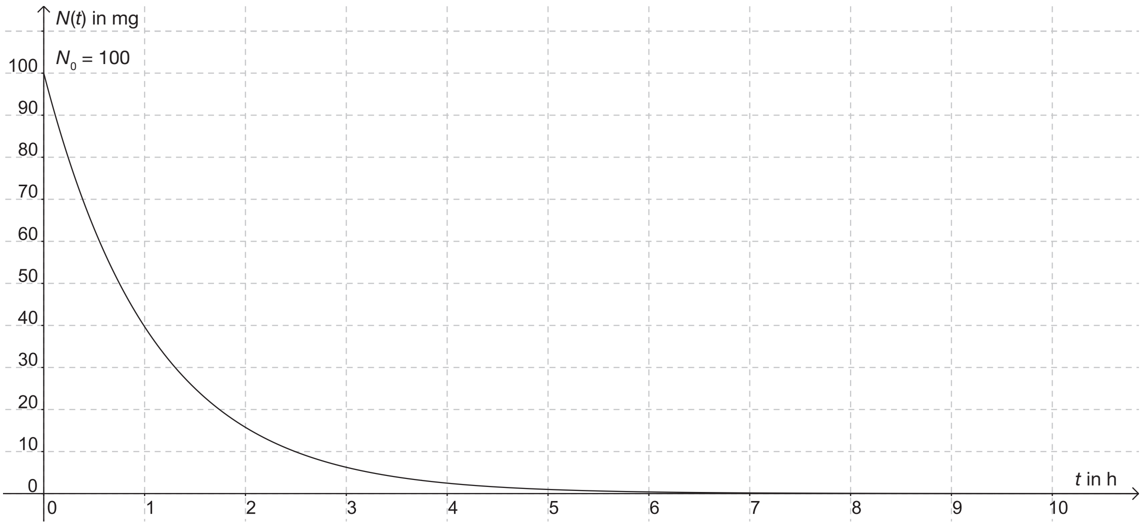
$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}39685^t$$

$N(t)$ ... Koffeinmenge in Milligramm (mg) zur Zeit t
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$
t ... Zeit in Stunden (h)

– Berechnen Sie, wie viel Koffein Klara um 20 Uhr in ihrem Körper hat.

c) Die unten stehende Grafik zeigt den exponentiellen Abbau von Koffein im Körper einer Person.

– Skizzieren Sie in die Grafik den Verlauf der Exponentialfunktion für Sabine, die 100 mg Koffein zu sich nimmt und mit einer Halbwertszeit von 6 Stunden abbaut.



d) Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}39685^t$$

$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$
t ... Zeit in Stunden

Eine Menge von 500 mg Koffein kann z. B. Schlafstörungen, Unruhe und Nervosität hervorrufen.

– Berechnen Sie, wie viele ganze Dosen Energydrink (zu 200 ml mit 80 mg Koffein) Klara eine halbe Stunde vor dem Zubettgehen mindestens trinken müsste, sodass sie Schlafstörungen wegen des Koffeins hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Halbwertszeit: 1,5 h

Exponentialfunktion mit Basis e:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Umformung liefert $\lambda = 0{,}4621$

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}4621 \cdot t} = 80 \cdot e^{-0{,}4621 \cdot t}$
$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
t ... Zeit in Stunden

Exponentialfunktion mit Basis a:
$0{,}5 = a^{1{,}5}$
$a = 0{,}62996$

$N(t) = 80 \cdot 0{,}62996^t$
$N(t)$ ... Koffeinmenge in mg zur Zeit t
t ... Zeit in Stunden

b) 80 mg Koffein im Energydrink um 16 Uhr:
$t = 4$ h
$N_0 = 80$ mg
$N(4) = 80 \cdot 0{,}39685^4 = 1{,}98424$

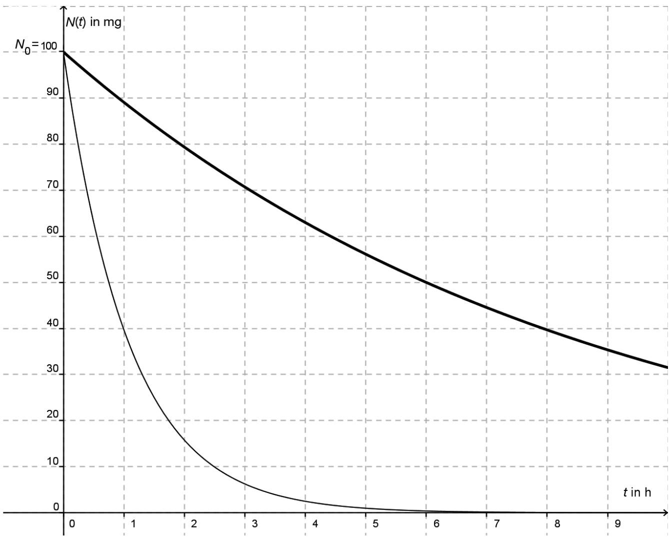
90 mg Koffein in der Bitterschokolade um 17:30 Uhr:
$t = 2{,}5$ h
$N_0 = 90$ mg
$N(2{,}5) = 90 \cdot 0{,}39685^{2{,}5} = 8{,}92911$

Gesamtkoffein im Körper um 20 Uhr: 1,98424 + 8,92911= 10,91335

Um 20 Uhr hat Klara 10,9 mg Koffein in ihrem Körper.

Andere korrekte Lösungswege sind ebenfalls zulässig.

c) Die Kurve muss VIEL flacher verlaufen – korrekt, wenn die Kurve im Punkt (0|100) beginnt und z. B. durch den Punkt (6|50) geht.



d) $500 = N_0 \cdot 0{,}39685^{0{,}5}$

$$N_0 = \frac{500}{0{,}39685^{0{,}5}} = 793{,}7$$

$$\frac{793{,}7}{80} = 9{,}921$$

Sie müsste ca. 10 Dosen Energydrink trinken.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das Auffinden des korrekten Modells (Funktionsgleichung)
1 × B: für die korrekte Berechnung des Parameters und die korrekte und vollständige Angabe der Funktionsgleichung

b) 1 × A: für die Berücksichtigung der unterschiedlichen Bezugszeitpunkte
1 × B: für die korrekte Berechnung

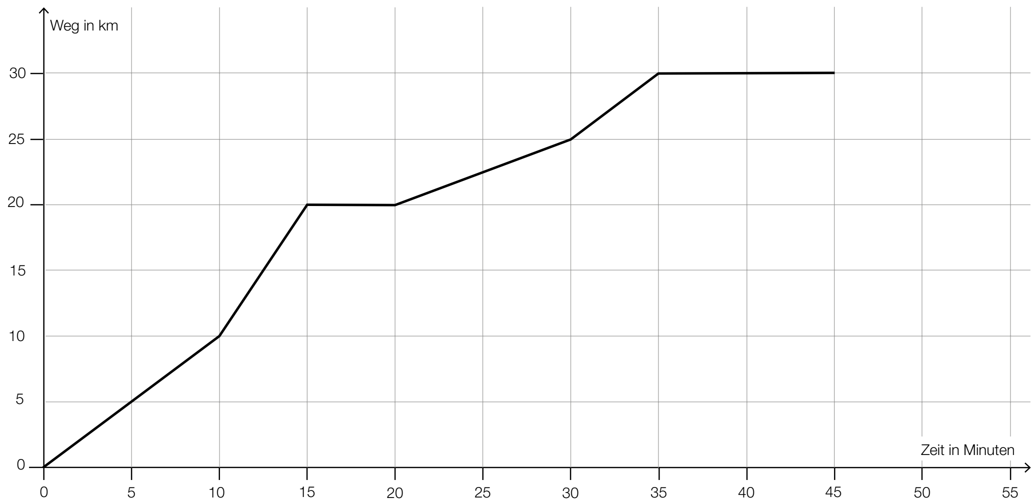
c) 1 × A: wenn aus dem Graphen klar ersichtlich ist, dass die Abnahme pro Zeiteinheit geringer wird; der Graph muss durch den Punkt (6|50) gehen

d) 1 × B: für die korrekte Berechnung von N_0
1 × B: für die korrekte Berechnung und das korrekte Runden der Dosenzahl

Autofahrt (2)

Frau Maier ist beruflich sehr viel mit dem Auto unterwegs.

a) In der nachstehenden Abbildung ist das Weg-Zeit-Diagramm einer bestimmten Fahrt von Frau Maier dargestellt.



1) Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem Frau Maier mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h unterwegs war.

b) Für eine bestimmte Fahrt von Frau Maier kann die verbrauchte Benzinmenge durch die Funktion f modelliert werden.

$$f(x) = 0{,}0000006 \cdot x^3 + 0{,}0002 \cdot x^2 + 0{,}08 \cdot x$$

x ... zurückgelegte Strecke seit Fahrtbeginn in km
$f(x)$ ... verbrauchte Benzinmenge nach der zurückgelegten Strecke x in L

1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Benzinverbrauch pro Kilometer im Wegintervall [50 km; 100 km].

Möglicher Lösungsweg

a1) Für das Intervall von 20 min bis 30 min ergibt dies $\frac{5}{10}$ km/min = 30 km/h.

b1) durchschnittlicher Benzinverbrauch $= \frac{f(100) - f(50)}{100 - 50} = \frac{10{,}6 - 4{,}575}{100 - 50} = 0{,}1205$

Frau Maier hat im angegebenen Wegintervall durchschnittlich 0,1205 L Benzin pro Kilometer gebraucht.

Baikalsee

Der Baikalsee stellte bis 1996 (Ernennung zum Weltnaturerbe) mit 20 % der gesamten Süßwasservorräte der Erde unser größtes Süßwasserreservoir dar. Durch Kraftwerke und die Entnahme von Wasser aus manchen Zuflüssen verringerte sich seither der Inhalt des Baikalsees um 25 %, der nunmehrige Inhalt V beträgt ca. 18 400 km³.

a) 1) Berechnen Sie die gesamten Süßwasservorräte V_g der Erde im Jahr 1996.

2) Stellen Sie das Ergebnis in km³ in der Gleitkommadarstellung der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ und $k \in \mathbb{Z}$ dar.

b) Die Fläche des Baikalsees betrug 1996 ca. das 44-Fache der Fläche des Bodensees.

1) Stellen Sie eine Formel auf, mit der man die Fläche F_{Bodensee} im Jahr 1996 mithilfe der damaligen Fläche $F_{\text{Baikalsee}}$ berechnen kann.

$F_{\text{Bodensee}} =$ ____________________________________

c) Man geht davon aus, dass jeder Mensch täglich 150 Liter (L) Wasser benötigt.

In einer Zeitung wird behauptet:
Mit dem Süßwasser des Baikalsees (V = 18 400 km³) können 7 Milliarden Menschen 50 Jahre lang mit Wasser versorgt werden.

1) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{18\,400}{0{,}75} \cdot 5 = 122\,666{,}6...$

Die Süßwasservorräte der Erde im Jahr 1996 betrugen rund 122 667 km^3.

a2) $122\,666{,}6...\text{ km}^3 = 1{,}22... \cdot 10^5\text{ km}^3$

b1) $F_{\text{Bodensee}} = \frac{1}{44} \cdot F_{\text{Baikalsee}}$

c1) $7 \cdot 10^9 \cdot 150 \cdot 365 \cdot 50\text{ L} = 1{,}91625 \cdot 10^{16}\text{ L}$
$1\text{ km}^3 = 1 \cdot 10^{12}\text{ L}$
$1{,}91625 \cdot 10^{16} : 10^{12} = 19\,162{,}5$

7 Milliarden Menschen würden laut dieser Behauptung 19 162,5 km^3 und nicht 18 400 km^3 verbrauchen.

Studentenfutter*

Aufgabennummer: A_203

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Übungsfirma einer Tourismusschule möchte selbstgemischtes Studentenfutter an Schüler/innen derselben Schule verkaufen.

a) Die Mitarbeiter/innen der Übungsfirma stellen eine Studentenfutter-Mischung aus Rosinen, Mandeln und Walnüssen her. Insgesamt werden 80 kg dieser Mischung hergestellt. Der Einkaufspreis für 1 kg Rosinen beträgt € 6, für 1 kg Mandeln € 12 und für 1 kg Walnüsse € 14. Das Mischungsverhältnis soll so sein, dass der Massenanteil von Rosinen und Mandeln gleich ist.

– Berechnen Sie, wie viele Kilogramm Rosinen, Mandeln und Walnüsse gekauft werden müssen, wenn 1 Kilogramm der Mischung in der Herstellung € 10 kosten soll.

b) Die Übungsfirma führt eine Umfrage in der Schule durch, um festzustellen, welchen Preis die Schüler/innen für eine Packung der Studentenfutter-Mischung zu bezahlen bereit sind. Das Ergebnis der Umfrage ist in der nachstehenden Tabelle dargestellt.

Preis	Anzahl der Schüler/innen
€ 1,20	356
€ 1,50	123
€ 2	41

– Erklären Sie in Worten, wie Sie aus dieser Tabelle das arithmetische Mittel der Preise, die die Schüler/innen zu bezahlen bereit sind, bestimmen können.

c) Die Füllmenge in den Packungen kann näherungsweise als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ g und der Standardabweichung $\sigma = 5$ g angenommen werden.

– Skizzieren Sie den Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichte. Achten Sie dabei auf ein korrektes Einzeichnen des Erwartungswertes μ.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge einer Packung weniger als 96 g beträgt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) x … Masse der Rosinen oder Mandeln in Kilogramm (kg)
y … Masse der Walnüsse in Kilogramm (kg)

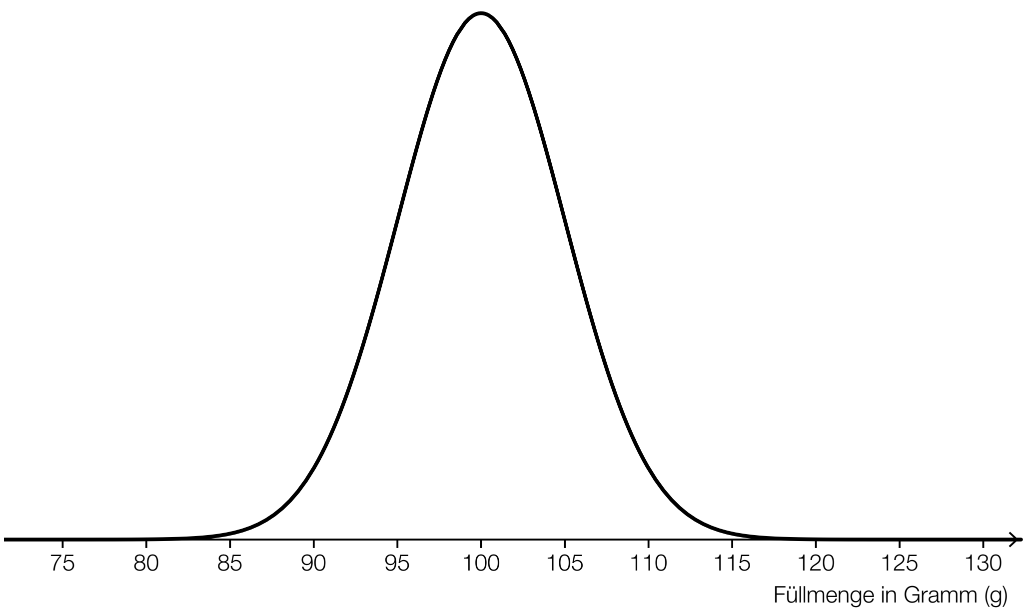
$2 \cdot x + y = 80$
$6 \cdot x + 12 \cdot x + 14 \cdot y = 800$

Das Lösen des Gleichungssystems ergibt:
$x = 32$
$y = 16$

Es müssen je 32 kg Rosinen und Mandeln sowie 16 kg Walnüsse gekauft werden.

b) Das gewichtete arithmetische Mittel aus den Werten in der Tabelle ergibt den Durchschnittspreis; d. h., es müssen die absoluten Häufigkeiten mit den jeweiligen Preisangaben multipliziert und es muss die Summe der Produkte durch die Anzahl der befragten Schüler/innen dividiert werden.

c)



In der Skizze des Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichte muss klar ersichtlich sein, dass der Erwartungswert μ bei 100 g liegt.

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$P(X < 96) = 21{,}19\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für einen richtigen Lösungsansatz
   1 × B: für die richtige Berechnung

b) 1 × D: für die richtige Erklärung

c) 1 × A: für das Erstellen einer qualitativ richtigen Skizze
   1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Produktion von Rucksäcken*

Aufgabennummer: A_210

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei der Produktion von Rucksäcken treten erfahrungsgemäß 3 verschiedene Fehlerarten unabhängig voneinander auf.

P(„Nahtfehler") = 2 %

P(„Reißverschlussdefekt") = 3 %

P(„Farbfehler") = 1 %

a) Ein Rucksack wird zufällig ausgewählt und überprüft. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird mit $P(E) = 0{,}02 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99$ berechnet.

– Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird.

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehlerarten aufweist.
– Erklären Sie, warum die Berechnung mittels Gegenwahrscheinlichkeit hier weniger aufwendig ist.

c) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 100 Stück weniger als 3 Rucksäcke mit Reißverschlussdefekt vorhanden sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnet, dass ein zufällig kontrollierter Rucksack Nahtfehler, aber keine der beiden anderen Fehlerarten aufweist.

b) P(„mindestens 1 Fehler“) = 1 – P(„kein Fehler“) = $1 - 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 = 0{,}0589... \approx 5{,}9\,\%$

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehler aufweist, muss bei der Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit nur 1 Ereignis, nämlich das Ereignis, dass kein Fehler auftritt, betrachtet werden. Bei einer direkten Berechnung müssten die Wahrscheinlichkeiten für eine Vielzahl von Ereignissen berechnet und addiert werden.

c) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 100$ und $p = 0{,}03$
$P(X < 3) = 0{,}41977\ldots \approx 41{,}98\,\%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Angabe des Ereignisses (es muss auch klar erkennbar sein, dass die beiden anderen Fehlerarten nicht auftreten)

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × D: für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit

c) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

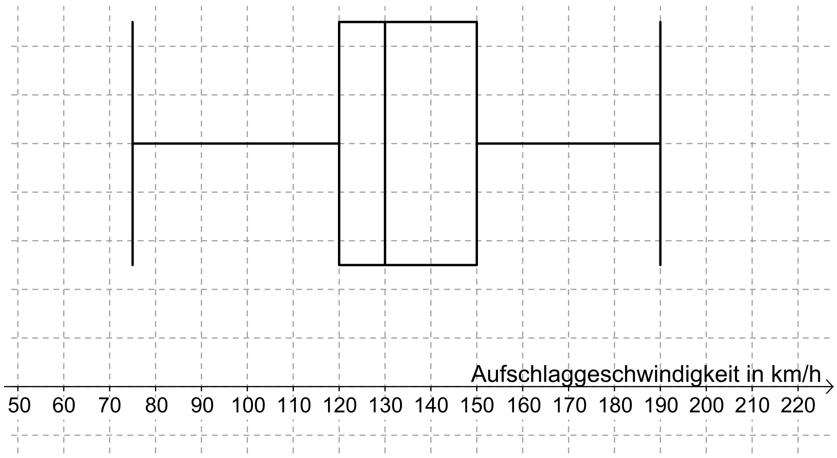
Tennis (2)*

Aufgabennummer: A_211

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Im Rahmen der Nachwuchsförderung wurden die Leistungen der Teilnehmer eines Knaben-Tennisturniers genauer beobachtet.

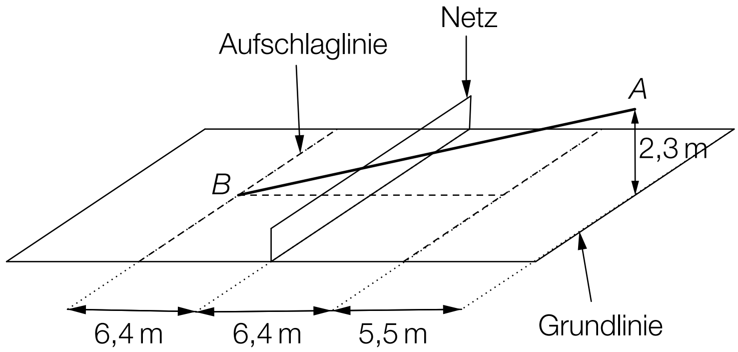
a) Für die Auswertung der Daten der Aufschlaggeschwindigkeit der Teilnehmer wurde der nachstehende Boxplot erstellt.



– Lesen Sie diejenige Aufschlaggeschwindigkeit ab, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde.
– Lesen Sie den Quartilsabstand ab.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Spieler trifft beim Aufschlag den Ball in einer Höhe von 2,3 m im Punkt *A* genau über der Mitte der Grundlinie. Er visiert den Punkt *B* (Mitte der Aufschlaglinie) an. Um nicht ins Netz zu gehen, muss der Ball das Netz in einer Höhe von mindestens 1 Meter (über dem Boden) überqueren.
Die Flugbahn des Tennisballes beim Aufschlag kann modellhaft mittels einer Gerade beschrieben werden.



– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Aufschlag über das Netz geht.

c) Mithilfe einer Videoanalyse wird ein Grundlinienschlag modelliert.
Die Flugbahn zwischen dem Abschlagpunkt und dem Punkt, in dem der Ball auf dem Boden aufkommt, kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x + \frac{21}{50} \quad \text{mit} \quad x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung zum Abschlagpunkt in Metern (m)
$f(x)$ ... Höhe des Balles an der Stelle x über dem Boden in m

– Berechnen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn im Abschlagpunkt.

– Interpretieren Sie die Bedeutung der obigen Zahl $\frac{21}{50}$ für die Flugbahn.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde: 120 km/h

Quartilsabstand: 30 km/h

b) ähnliche Dreiecke:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots \text{ m} \approx 0{,}8 \text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

c) $f'(0) = \frac{2}{5}$

$\arctan\left(\frac{2}{5}\right) = 21{,}801\ldots° \approx 21{,}80°$

Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Aufschlaggeschwindigkeit
1 × C2: für das richtige Ablesen des Quartilsabstands

b) 1 × D: für die richtige Überprüfung

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl $\frac{21}{50}$

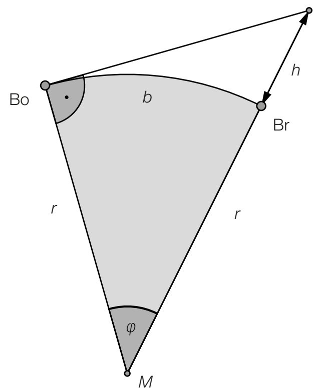
Der Bodensee*

Aufgabennummer: A_253

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Bodensee misst in seiner längsten Ausdehnung von Bregenz (Br) bis Bodman (Bo) 66 Kilometer (km). Aufgrund der Erdkrümmung ist von Bregenz aus das Seeufer bei Bodman nicht zu sehen (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze):

r … Erdradius (6 371 km)
b … Bogenlänge, entspricht der Entfernung zwischen Bregenz und Bodman
M … Erdmittelpunkt



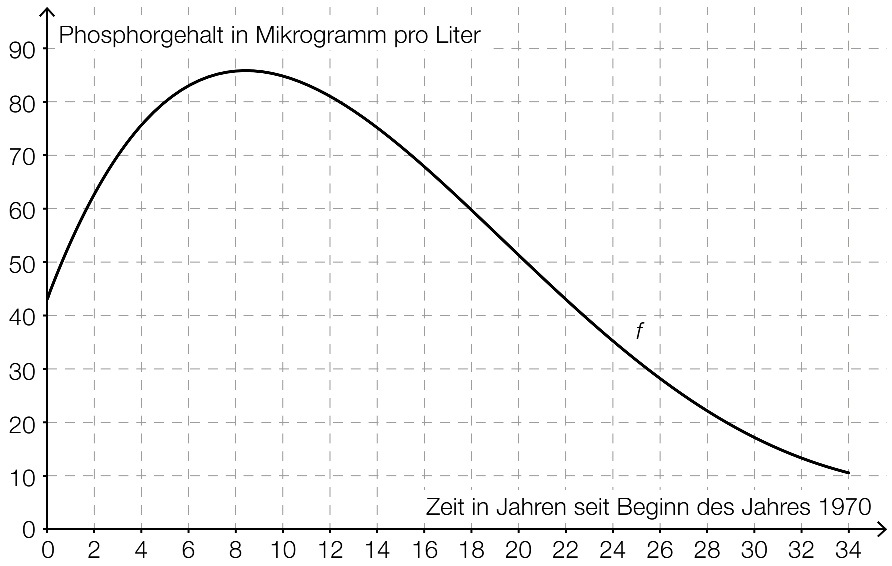
– Berechnen Sie den Winkel φ.

Um bei sehr guten Sichtverhältnissen von Bregenz aus das Seeufer bei Bodman sehen zu können, muss sich ein Beobachter in Bregenz mindestens auf einer Höhe h über dem Seeniveau befinden (siehe obige nicht maßstabgetreue Skizze).

– Berechnen Sie die Höhe h.

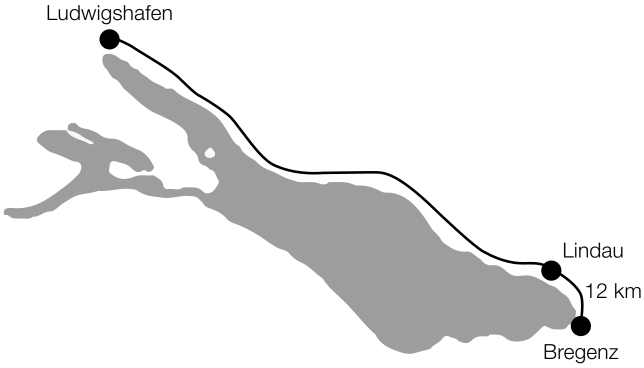
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Phosphorgehalt im Bodensee kann im Zeitraum von 1970 bis 2004 näherungsweise durch eine Polynomfunktion *f* beschrieben werden.

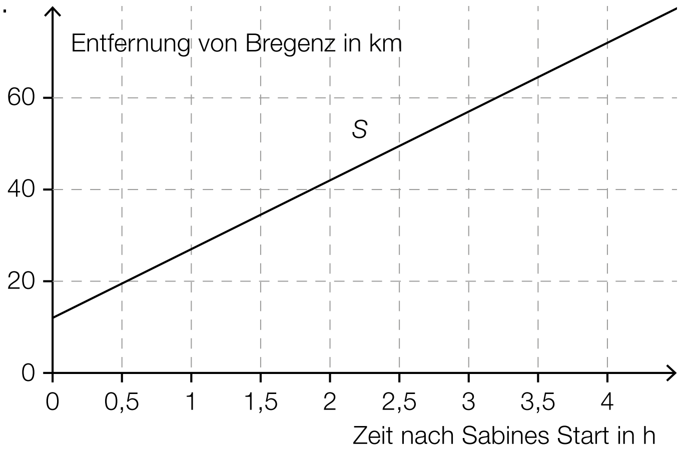


– Ermitteln Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen von *f* die mittlere Änderungsrate des Phosphorgehalts im Zeitintervall [12; 18].
– Dokumentieren Sie in Worten, wie man mittels Differenzialrechnung berechnen kann, wann der Phosphorgehalt am stärksten gesunken ist.

c) Sabine und Johanna fahren mit ihren Fahrrädern auf einem Radweg in Richtung Ludwigshafen (siehe nachstehende Skizze). Sabine startet im 12 Kilometer von Bregenz entfernten Lindau und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 15 km/h. Johanna startet mit einem E-Bike eine Stunde später in Bregenz und fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h.



Sabines Entfernung von Bregenz kann näherungsweise durch die lineare Funktion S beschrieben werden.



– Zeichnen Sie im obigen Diagramm den Graphen der linearen Funktion J ein, der Johannas Entfernung von Bregenz darstellt.
– Lesen Sie ab, wie lange Johanna unterwegs ist, bis sie Sabine einholt.

Auch Otto fährt auf diesem Radweg von Bregenz in Richtung Ludwigshafen. Seine Geschwindigkeit kann durch eine Funktion v beschrieben werden.

t ... Zeit in h
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in km/h

– Beschreiben Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit $\int_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $b = \pi \cdot r \cdot \frac{\varphi}{180°}$

$\varphi = \frac{66 \cdot 180°}{6371 \cdot \pi} = 0{,}593...° \approx 0{,}59°$

Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

$\cos(\varphi) = \frac{6371}{6371 + h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{6371}{\cos(\varphi)} - 6371 = 0{,}3418... \approx 0{,}342$

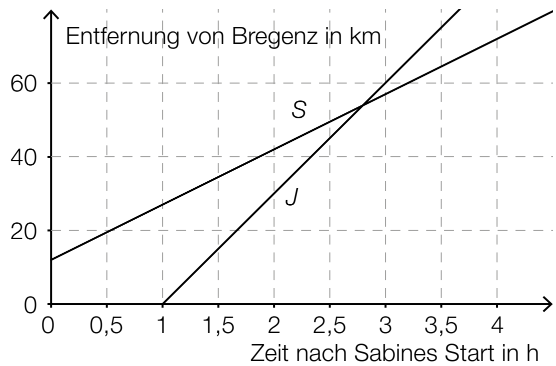
Die Höhe, auf der sich ein Beobachter befinden müsste, beträgt rund 342 Meter.

b) $\frac{60 - 81}{18 - 12} = -3{,}5$

Die mittlere Änderungsrate im gegebenen Intervall beträgt rund –3,5 µg pro Liter pro Jahr.
Toleranzintervall: [–4; –3,3]

Dazu ermittelt man die Nullstelle der 2. Ableitung der Funktion *f* im dargestellten Intervall.
In der Grafik ist klar zu erkennen, dass f *im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Abnahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.*

c)



Johanna ist 1,8 h unterwegs, bis sie Sabine einholt.
Toleranzintervall: [1,6; 2,1]

Es wird die Länge desjenigen Weges (Entfernung von Bregenz) in Kilometern berechnet, den Otto in den ersten 2 Stunden zurückgelegt hat.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Winkels φ
Auch eine Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.
1 × B2: für die richtige Berechnung der Höhe h

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Änderungsrate im Toleranzbereich [–4; –3,3]
1 × C: für die richtige Dokumentation in Worten (In der Grafik ist klar zu erkennen, dass f im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Abnahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)

c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen
1 × C1: für das richtige Ablesen der Fahrtdauer im Toleranzbereich [1,6; 2,1]
1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der entsprechenden Einheit

Blitze

Aufgabennummer: A_174

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in Österreich innerhalb eines Jahres vom Blitz getroffen wird, wird mit p bezeichnet.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine vom Blitz getroffene Person stirbt, beträgt 25 %.

– Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in einem mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschrifteten Baumdiagramm.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in Österreich innerhalb eines Jahres vom Blitz getroffen wird und dabei stirbt, liegt bei 1 : 1 000 000.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p. Geben Sie das Ergebnis als ganzzahliges Verhältnis an.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person in Österreich innerhalb eines Jahres vom Blitz getroffen wird und dabei stirbt, liegt bei 1 : 1 000 000.
Die durchschnittliche Lebenserwartung in Österreich liegt bei ungefähr 80 Jahren.

– Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit durch $P(E) = \left(\frac{999\,999}{1\,000\,000}\right)^{80}$ berechnet wird.

c) Die Ergebnisse früherer Forschungen ließen vermuten, dass die globale Erwärmung zu einer Zunahme der Blitzaktivität führen wird.
Im Jahr 2014 gab es in den USA rund 25 Millionen Blitze. In diesem Jahr wurde folgende Vermutung veröffentlicht:
„Mit jedem Grad der globalen Erwärmung steigt die Anzahl der jährlichen Blitze um 12 %."
Auf Basis dieser Vermutung soll die Anzahl der jährlichen Blitze in den USA in Abhängigkeit von der globalen Erwärmung durch eine Funktion B beschrieben werden.

T … globale Erwärmung bezogen auf die Temperatur im Jahr 2014 in °C
$B(T)$ … Anzahl der jährlichen Blitze in den USA bei der globalen Erwärmung T in Millionen

– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung von B.

Inzwischen gehen Forscher/innen davon aus, dass die Anzahl der jährlichen Blitze im Zeitraum von 2020 bis 2100 weltweit um insgesamt 15 % zurückgehen wird. Für das Jahr 2020 wird weltweit mit etwa 1,4 Milliarden Blitzen gerechnet.
Auf Basis dieser Vermutung soll die Anzahl der jährlichen Blitze weltweit in Abhängigkeit von der Zeit durch eine lineare Funktion N beschrieben werden.

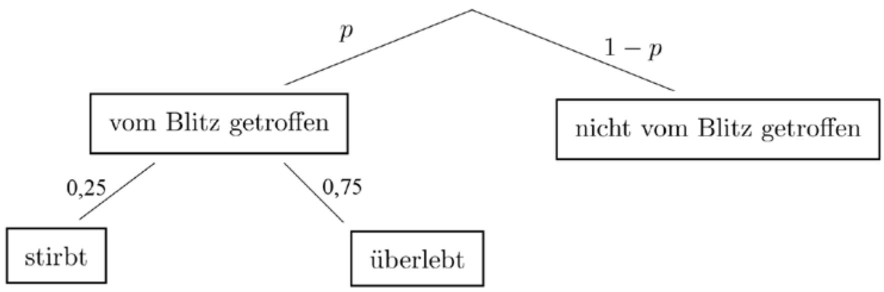
t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2020
$N(t)$ … Anzahl der jährlichen weltweiten Blitze zur Zeit t in Milliarden

– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung von N.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein.

Möglicher Lösungsweg

a)



P(„vom Blitz getroffen und stirbt") $= p \cdot 0{,}25 = 0{,}000001$
$p = 0{,}000001 : 0{,}25$
$p = 1 : 250\,000$

b) E steht in diesem Sachzusammenhang für das Ereignis, dass eine Person innerhalb von 80 Jahren nie tödlich vom Blitz getroffen wird.

c) $B(T) = 25 \cdot 1{,}12^T$

Steigung der Funktion N: $\dfrac{-1{,}4 \cdot 0{,}15}{2100 - 2020} = \dfrac{-0{,}21}{80} = -0{,}002625$

$N(t) = 1{,}4 - 0{,}002625 \cdot t$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) –
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 1
c) 2

Thema: Umwelt

Quellen: http://www.fosar-bludorf.com/schumann_gruppen/index.htm
http://www.gubi.li/wahrscheinlichkeit/index.html
https://www.vde.com/de/blitzschutz/arbeitsgebiete/faq/klimawandel
https://www.wetter-center.de/blog/weniger-gewitter-durch-globale-erwaermung/

Kaffeekapseln

a) Der Kaffeevollautomat *Divo* kostet € 800. Die verwendeten Kaffeebohnen kosten 18 €/kg. Für eine Tasse Kaffee werden 10 g Kaffeebohnen benötigt.

Die Kosten für x Tassen Kaffee setzen sich aus den Kosten für den Kaffeevollautomaten und den Kosten für die Kaffeebohnen zusammen und können durch die Funktion K_1 beschrieben werden.

x ... Anzahl der Tassen Kaffee
$K_1(x)$ ... Kosten für x Tassen Kaffee in Euro

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion K_1 auf. *[0/1 P.]*

In einem kleinen Büro wird die Kaffeemaschine *Kapsello* verwendet. Die Kosten für x Tassen Kaffee können durch die Funktion K_2 beschrieben werden.

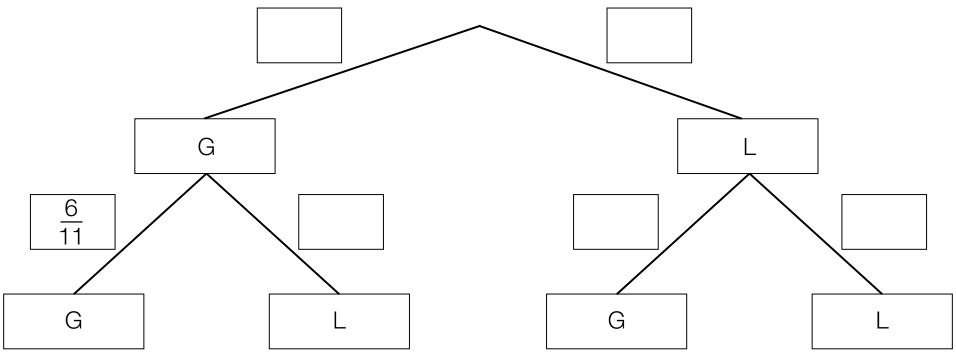
$K_2(x) = 0{,}38 \cdot x + 160$

x ... Anzahl der Tassen Kaffee
$K_2(x)$ ... Kosten für x Tassen Kaffee in Euro

2) Berechnen Sie diejenige Anzahl an Tassen Kaffee, ab der die Verwendung des Kaffeevollautomaten *Divo* günstiger als die Verwendung der Kaffeemaschine *Kapsello* wäre. *[0/1 P.]*

b) In einer Dose liegen insgesamt 12 Kaffeekapseln. Es gibt nur grüne Kaffeekapseln (G) und lilafarbene Kaffeekapseln (L). Peter nimmt zufällig und ohne Zurücklegen 2 Kaffeekapseln aus dieser Dose.

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[0/1 P.]*



2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Peter mindestens 1 grüne Kaffeekapsel aus der Dose nimmt. *[0/1 P.]*

c) Ein großer Betrieb produziert jährlich 2 Milliarden Kaffeekapseln. Für die Produktion einer Kaffeekapsel wird 1 g Aluminium benötigt.

Die Dichte von Aluminium beträgt 2,7 g/cm^3. Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V, also $m = \varrho \cdot V$.

Stellen Sie sich vor, dass die jährlich benötigte Menge Aluminium in einen Würfel gegossen wird.

1) Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels in Zentimetern. *[0/1/2 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{18}{1\,000} \cdot 10 = 0{,}18$

$K_1(x) = 0{,}18 \cdot x + 800$

a2) $K_1(x) = K_2(x)$ *oder* $0{,}18 \cdot x + 800 = 0{,}38 \cdot x + 160$

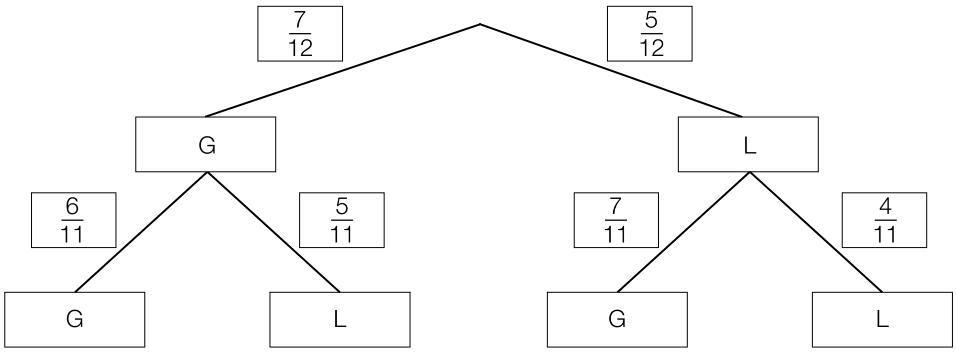
$x = 3\,200$

Die Verwendung des Kaffeevollautomaten *Divo* ist ab einer Anzahl von 3201 Tassen günstiger.

Die Antwort „Die Verwendung des Kaffeevollautomaten Divo *ist ab einer Anzahl von 3200 Tassen günstiger“ ist ebenfalls als richtig zu werten.*

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion K_1.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl.

b1)



b2) $1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{28}{33} = 0{,}8484...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Peter mindestens 1 grüne Kaffeekapsel aus der Dose nimmt, beträgt rund 84,8 %.

b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c1) Volumen in cm^3:

$V = \frac{2 \cdot 10^9}{2{,}7} = 7{,}4... \cdot 10^8$

Kantenlänge a des Würfels in cm:

$a = \sqrt[3]{V} = 904{,}8...$

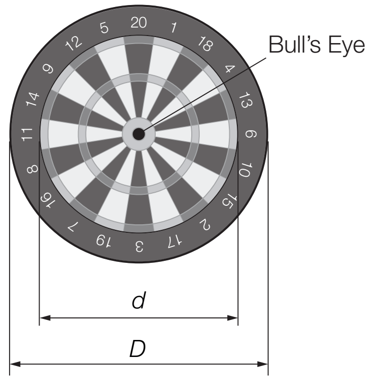
c1) Ein Punkt für den richtigen Ansatz.
Ein Punkt für das richtige Berechnen der Kantenlänge in cm.

Darts*

Aufgabennummer: A_302

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

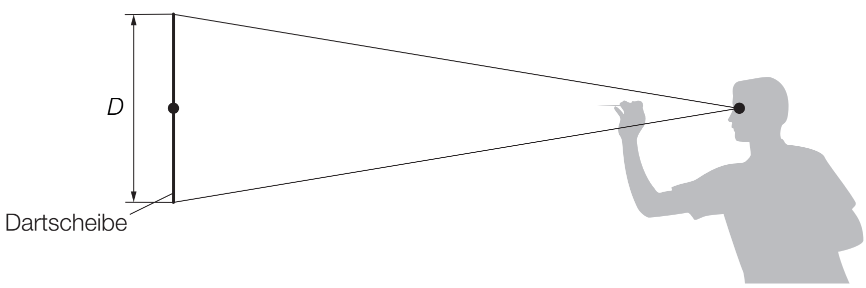
Darts ist ein Spiel, bei dem Pfeile auf eine kreisförmige Dartscheibe geworfen werden (siehe nebenstehende Abbildung).



a) In der obigen Abbildung sind die Durchmesser zweier Kreise gekennzeichnet, die einen gemeinsamen Mittelpunkt haben. Der innere Kreis hat den Durchmesser d = 34 cm und der äußere Kreis den Durchmesser D = 45 cm.

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent die Fläche des inneren Kreises bezogen auf jene des äußeren Kreises ausmacht.

b) Eine Dartscheibe mit dem Durchmesser D hängt senkrecht an einer Wand (siehe unten stehende nicht maßstabgetreue Abbildung in der Ansicht von der Seite).
Der Mittelpunkt der Dartscheibe und das Auge eines Spielers befinden sich in der gleichen Höhe über dem Boden.
L ist der Abstand des Auges vom Mittelpunkt der Dartscheibe. α ist der Sehwinkel, unter dem der Spieler die Dartscheibe sieht.



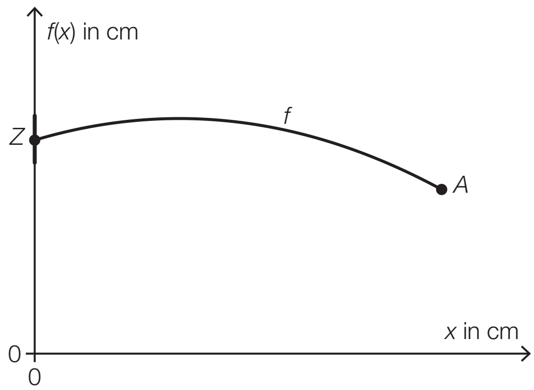
1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Größen L und α ein.

2) Stellen Sie mithilfe von D und L eine Formel zur Berechnung von α auf.

α = ____.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Flugbahn eines Dartpfeils zwischen dem Abwurfpunkt A und dem Zielpunkt Z.



Die Flugbahn kann in diesem Modell durch den Graphen der quadratischen Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... horizontaler Abstand zur Dartscheibe in cm
$f(x)$ ... Höhe über dem Boden im Abstand x in cm

Der Zielpunkt Z befindet sich in einer Höhe von 173 cm über dem Boden.
Die größte Höhe von 182 cm über dem Boden erreicht der Pfeil an derjenigen Stelle, an der er vom Zielpunkt Z einen horizontalen Abstand von 75 cm hat.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

d) Ein Spieler wirft 5-mal hintereinander auf eine Dartscheibe. Die Wahrscheinlichkeit, das sogenannte *Bull's Eye* in der Mitte der Dartscheibe zu treffen, beträgt bei jedem Wurf p.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D zu, sodass zutreffende Aussagen entstehen.

Mit dem Ausdruck $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p) + p^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Spieler bei 5 Würfen ...	
Mit dem Ausdruck $1 - \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p) - p^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Spieler bei 5 Würfen ...	

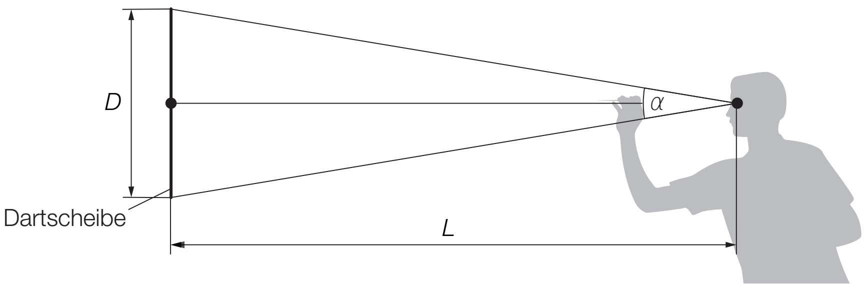
A	... höchstens 3-mal das Bull's Eye trifft.
B	... mindestens 3-mal das Bull's Eye trifft.
C	... höchstens 4-mal das Bull's Eye trifft.
D	... mindestens 4-mal das Bull's Eye trifft.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{d^2}{D^2} = 0{,}570...$

Die Fläche des inneren Kreises macht rund 57 % der Fläche des äußeren Kreises aus.

b1)



b2) $\alpha = 2 \cdot \arctan\left(\frac{D}{2 \cdot L}\right)$

c1) $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

I: $f(0) = 173$
II: $f(75) = 182$
III: $f'(75) = 0$

oder:

I: $c = 173$
II: $5625 \cdot a + 75 \cdot b + c = 182$
III: $150 \cdot a + b = 0$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{625} = -0{,}0016$
$b = \frac{6}{25} = 0{,}24$
$c = 173$

d1)

Mit dem Ausdruck $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p) + p^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Spieler bei 5 Würfen ...	D		A	... höchstens 3-mal das Bull's Eye trifft.
			B	... mindestens 3-mal das Bull's Eye trifft.
Mit dem Ausdruck $1 - \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p) - p^5$ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass der Spieler bei 5 Würfen ...	A		C	... höchstens 4-mal das Bull's Eye trifft.
			D	... mindestens 4-mal das Bull's Eye trifft.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Größen L und α.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten a, b und c.
d1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Gold*

Aufgabennummer: A_160

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Das Edelmetall Gold gilt als besonders wertvoll, weil es selten vorkommt, leicht zu Schmuck verarbeitet werden kann und sehr beständig ist.

a) Der *World Gold Council*, eine globale Lobby-Organisation der Goldminenindustrie, schätzt die bis zum Jahr 2012 weltweit geförderte Goldmenge auf rund $1{,}713 \cdot 10^8$ Kilogramm (kg). Gold hat eine Dichte von 19,3 Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm³). Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

Stellen Sie sich vor, dass die gesamte weltweit geförderte Goldmenge in einen Würfel gegossen wird.

– Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels in Metern.

b) Gold kommt in der Natur auch in der Form von Nuggets (Goldklumpen) vor. Es wird in der Einheit *Feinunze* (oz) gehandelt, die einer Masse von 31,1035 Gramm (g) reinen Goldes entspricht.

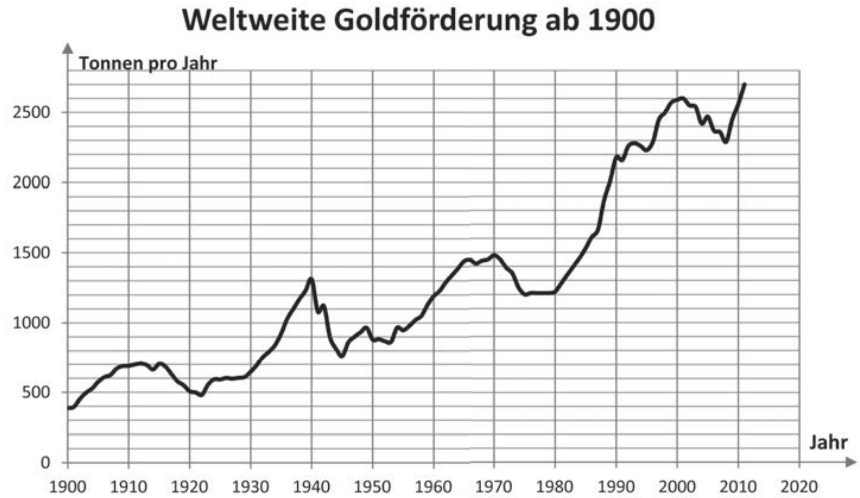
Gesucht ist der Wert W eines Nuggets in Euro, wenn folgende Größen bekannt sind:

m ... Masse des Nuggets in Gramm (g)
p ... Preis in Euro für eine Feinunze Gold

– Erstellen Sie eine Formel für W.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die nachstehende Grafik zeigt die weltweite jährliche Förderung von Gold ab dem Jahr 1900 in Tonnen.



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldfoerderung.png [29.08.2013] (adaptiert)

– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, in welchem Jahrzehnt die weltweite Förderung absolut am stärksten gestiegen ist.

d) In einer Zeitung wird folgende Analyse veröffentlicht: „Der Wert der Ein-Unzen-Krugerrand-Goldmünze ist im Jahr 2010 um 20 % gestiegen. Im Jahr 2011 stieg der Wert nochmals um 10 %. Also ist der Wert der Münze in diesen beiden Jahren insgesamt um 30 % gestiegen.“

– Begründen Sie, warum diese Aussage über die Wertentwicklung nicht richtig ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Kantenlänge des Würfels: $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{1{,}713 \cdot 10^{11}\text{ g}}{19{,}3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 2\,070{,}4\ldots\text{ cm}$

Der Würfel hat eine Kantenlänge von rund 20,7 Metern.

b) $W = \frac{m \cdot p}{31{,}1035}$

c) Die weltweite jährliche Förderung ist zwischen 1980 und 1990 absolut am stärksten gestiegen.

d) Die angegebenen Prozentsätze dürfen nicht addiert werden, weil sie sich nicht auf denselben Grundwert beziehen.
Der Wert der Goldmünze ist um den Faktor $1{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}32$ gestiegen, also um 32 %.

Lösungsschüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kantenlänge in Metern
b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
c) 1 × C: für das richtige Ablesen des Jahrzehnts mit dem stärksten Anstieg
d) 1 × D: für die richtige Begründung, warum die angegebene Wertsteigerung nicht richtig ist, oder die Angabe des richtigen Prozentsatzes

Luftdruck – Höhenformel*

Aufgabennummer: A_209

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel (Seehöhe) ab. Der Zusammenhang kann durch Exponentialfunktionen oder näherungsweise durch lineare Funktionen beschrieben werden.

a) Ein Modell zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck ist die *barometrische Höhenformel*:

$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in Metern (m)
$p(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in Hektopascal (hPa)

– Zeigen Sie, dass p_0 der Luftdruck auf der Höhe des Meeresspiegels ist.
– Berechnen Sie diejenige Seehöhe, bei der der Luftdruck genau die Hälfte von p_0 beträgt.

b) Ein vereinfachtes Modell des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck nimmt eine konstante Abnahme des Luftdrucks um 10 hPa pro 100 Höhenmeter an. Der Luftdruck auf Höhe des Meeresspiegels beträgt rund 1013 hPa.

Verwenden Sie die folgenden Bezeichnungen:

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in m
$f(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in hPa

– Stellen Sie die Gleichung der Funktion f auf, die diesen Zusammenhang im vereinfachten Modell beschreibt.

c) Zu Beginn des Jahres 2013 wurden im Schigebiet Kaprun-Kitzsteinhorn folgende Werte für den Luftdruck gemessen:

Seehöhe	Luftdruck
990 m	1040 hPa
1980 m	930 hPa

– Bestimmen Sie mithilfe eines linearen Modells aus diesen Daten den Luftdruck in einer Höhe von 1300 m über dem Meeresspiegel.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $p(0) = p_0 \cdot e^{-\frac{0}{7991}} = p_0 \cdot 1 = p_0$

$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$

$h = 7991 \cdot \ln(2) = 5538{,}9...$

Bei einer Seehöhe von rund 5 539 m beträgt der Luftdruck genau die Hälfte von p_0.

b) $f(h) = 1013 - \frac{1}{10} \cdot h$

c) Modellierung durch eine lineare Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + b$:
$1040 = a \cdot 990 + b$
$930 = a \cdot 1980 + b$

$g(x) = -\frac{1}{9} \cdot x + 1150$

$g(1300) = \frac{9050}{9} \approx 1006$

Der Luftdruck in einer Höhe von 1 300 m über dem Meeresspiegel beträgt rund 1 006 hPa.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis
1 × A: für den richtigen Lösungsansatz zur Berechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der Seehöhe

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktion

c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Luftdrucks

Sonnenlicht unter Wasser

Das Licht der Sonne wird beim Durchdringen durch klares Wasser schwächer. Dabei nimmt die Intensität der einzelnen Farben unter Wasser unterschiedlich schnell ab. So wird z. B. der rote Lichtanteil stärker abgeschwächt als der Lichtanteil der Farben Orange, Gelb, Grün oder Blau. Dies wird durch den „Absorptionskoeffizienten" k beschrieben, der für das blaue Licht am kleinsten ist.

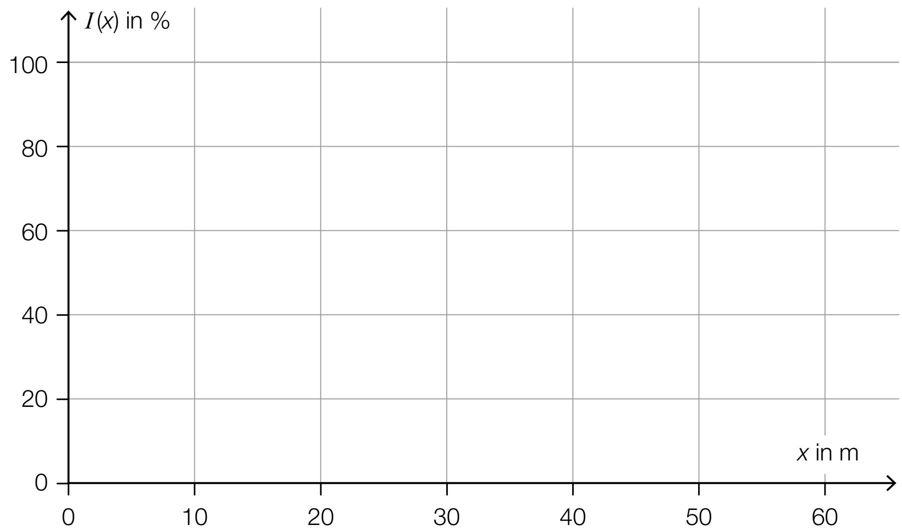
Farbe	Absorptionskoeffizient
Rot	$k_R = 0{,}65\ m^{-1}$
Orange	$k_O = 0{,}32\ m^{-1}$
Gelb	$k_{Ge} = 0{,}2\ m^{-1}$
Grün	$k_{Gr} = 0{,}025\ m^{-1}$
Blau	$k_B = 0{,}02\ m^{-1}$

Die Lichtintensität kann in Abhängigkeit von der Wassertiefe durch die Funktion I beschrieben werden.

$I(x) = I_0 \cdot e^{-k \cdot x}$ oder $I(x) = I_0 \cdot a^x$

x … Wassertiefe in klarem Wasser in m bezogen auf die Wasseroberfläche
$I(x)$ … Lichtintensität in der Tiefe x in %
I_0 … Lichtintensität an der Wasseroberfläche ($I_0 = 100\ \%$)
k … Absorptionskoeffizient in m^{-1}

a) 1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Verlauf der Lichtintensität für die Farbe Blau ein.



b) 1) Ermitteln Sie den Parameter a für den grünen Lichtanteil der oben angegebenen Funktion $I(x) = I_0 \cdot a^x$.

2) Berechnen Sie für den grünen Lichtanteil, wie viel Prozent der Lichtintensität innerhalb von 10 m Wassertiefe verloren gehen.

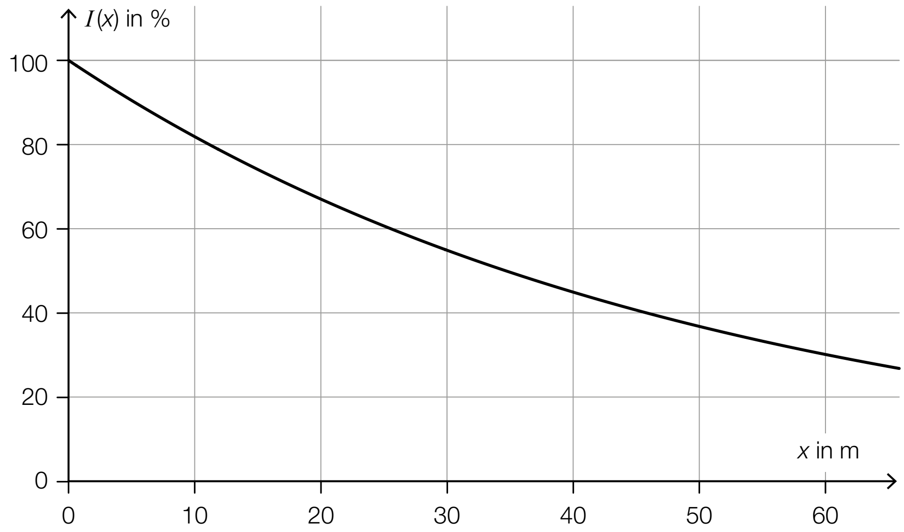
c) In Tauchkursen lernt man gelegentlich die Regel, dass die gesamte Lichtintensität des Sonnenlichts alle 6 m um die Hälfte des vorherigen Wertes abnimmt.

1) Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die auf diese Regel zutrifft. *[1 aus 5]*

In einer Tiefe von 12 m beträgt die Lichtintensität $\frac{1}{6}$ der ursprünglichen Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe von 12 m beträgt die Lichtintensität 75 % der ursprünglichen Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe von 12 m beträgt die Lichtintensität $\frac{1}{4}$ der ursprünglichen Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe von 18 m beträgt die Lichtintensität $\frac{1}{6}$ der ursprünglichen Lichtintensität.	☐
In einer Tiefe von 18 m beträgt die Lichtintensität 20 % der ursprünglichen Lichtintensität.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1)



b1) $a = e^{-0{,}025} = 0{,}975...$

b2) $I(10) = 100 \cdot e^{-0{,}025} = 77{,}88...$
$100 - 77{,}88... = 22{,}11...$
Bei grünem Licht beträgt die Abnahme der Lichtintensität nach 10 m rund 22,1 %.

c1)

In einer Tiefe von 18 m beträgt die Lichtintensität $\frac{1}{6}$ der ursprünglichen Lichtintensität.	☒

Kfz-Kennzeichen

a) Laut einer Umfrage in Deutschland hätten 73,5 % der Autobesitzer/innen auf ihrem Auto gerne ein Wunschkennzeichen.
Es werden 8 zufällig ausgewählte Autobesitzer/innen befragt, ob sie ein Wunschkennzeichen wollen.

1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens die Hälfte der Befragten ein Wunschkennzeichen will.

b) Die Masse bestimmter Kfz-Kennzeichen-Tafeln ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 249 g und der Standardabweichung σ = 2,4 g.

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Kfz-Kennzeichen-Tafeln eine Masse von höchstens 243 g aufweisen.

c) Am Beginn des Jahres 2012 waren in Deutschland rund 43 Millionen PKWs zugelassen.
Seitdem ist die Anzahl der zugelassenen PKWs jährlich um rund 1,2 % bezogen auf den Wert des jeweiligen Vorjahres angestiegen.
Die Anzahl der zugelassenen PKWs soll für den Zeitraum seit Beginn des Jahres 2012 durch die Funktion Z beschrieben werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion Z auf.

2) Berechnen Sie mithilfe der Funktion Z die mittlere Änderungsrate der Anzahl der zugelassenen PKWs zwischen dem Beginn des Jahres 2015 und dem Beginn des Jahres 2018.

Möglicher Lösungsweg

a1) Binomialverteilung mit $n = 8$, $p = 0{,}735$

X ... Anzahl der Autobesitzer/innen, die ein Wunschkennzeichen wollen

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \geq 4) = 0{,}96513...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens die Hälfte der Befragten ein Wunschkennzeichen will, beträgt rund 96,51 %.

b1) X ... Masse der Kfz-Kennzeichen-Tafeln in g

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 243) = 0{,}00620...$

Rund 0,62 % der Kfz-Kennzeichen-Tafeln haben eine Masse von höchstens 243 g.

c1) $Z(t) = 43 \cdot 10^6 \cdot 1{,}012^t$

c2) t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für den Beginn des Jahres 2012
$Z(t)$ … Anzahl zugelassener PKWs zur Zeit t

$$\frac{Z(6) - Z(3)}{3} = 541\,243{,}0...$$

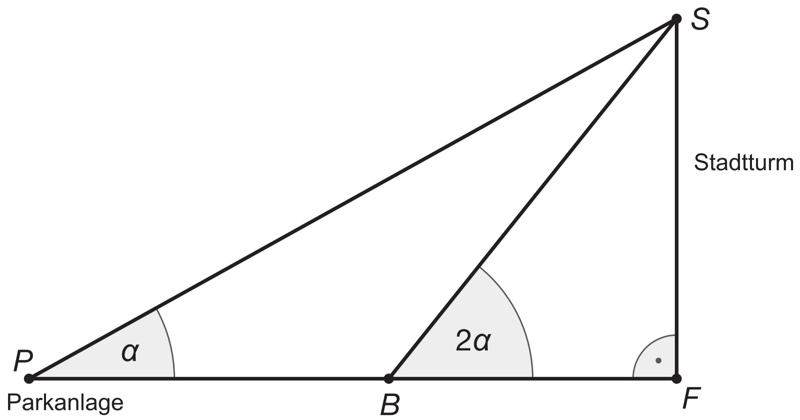
Die mittlere Änderungsrate im angegebenen Zeitintervall beträgt rund 541 243 PKWs pro Jahr.

Stadtturm*

Aufgabennummer: A_161

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Von einer neuen Parkanlage sieht man die Spitze des 51 m hohen Stadtturms unter dem Höhenwinkel $\alpha = 38{,}2°$.



– Berechnen Sie, um wie viel Meter man sich dem Stadtturm entlang der Strecke *PF* nähern muss, damit dieser unter dem doppelten Höhenwinkel zu sehen ist (siehe oben stehende Skizze).

b) Der Stadtturm mit einer Höhe *h* wirft zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Schatten der Länge *b*, wobei *b* und *h* normal aufeinander stehen.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Höhenwinkels α, unter dem die Sonne zu diesem Zeitpunkt in dieser Stadt erscheint, auf.

$\alpha =$ ____________________________

c) Der 51 m hohe Stadtturm hat die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche; die Seitenlänge dieses Quadrats beträgt 4 m. Zwei gegenüberliegende Seitenwände des Stadtturms sollen mit Glasplatten verkleidet werden. Pro Quadratmeter beträgt die Masse der verwendeten Glasplatten 30 Kilogramm.

– Dokumentieren Sie, wie Sie die Gesamtmasse der Glasverkleidung in Tonnen berechnen können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{51}{\tan(\alpha)} - \frac{51}{\tan(2\alpha)} = 52{,}471... \approx 52{,}47$

Man muss sich um rund 52,47 m annähern.

b) Der Höhenwinkel α ($0° < \alpha < 90°$) kann bestimmt werden durch:

$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{b}\right)$

c) Die einzukleidende Fläche setzt sich aus 2 Rechtecken (Seitenlängen 51 m und 4 m) zusammen. Um die Gesamtmasse der Glasverkleidung in Tonnen zu erhalten, muss der Gesamt-Flächeninhalt dieser beiden Rechtecke in Quadratmetern mit der Masse von 30 Kilogramm pro Quadratmeter multipliziert und anschließend durch 1 000 dividiert werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die Verwendung eines richtigen Modells zur Berechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{PB}$

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel zur Berechnung des Höhenwinkels

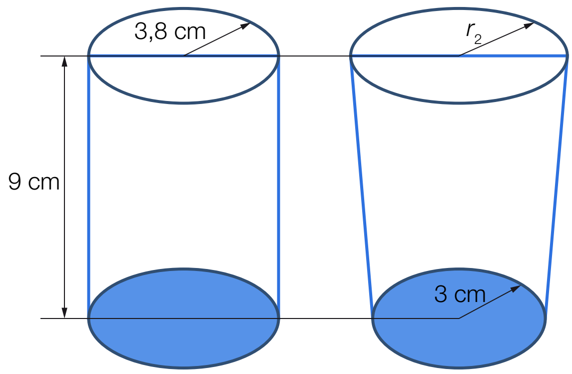
c) 1 × C: für die richtige Dokumentation zur Berechnung der Gesamtmasse in Tonnen

Wassergläser

Aufgabennummer: A_084

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In der nachstehenden Skizze sind die inneren Formen von zwei verschiedenen Wassergläsern mit gleicher Höhe und gleichem Volumen abgebildet.



$V_1 = 3{,}8^2 \cdot 9 \cdot \pi$ $\qquad V_2 = 3 \cdot \pi \cdot (r_2^2 + 3 \cdot r_2 + 9)$

V_1, V_2 … Volumen des Wasserglases 1 bzw. 2 in cm³

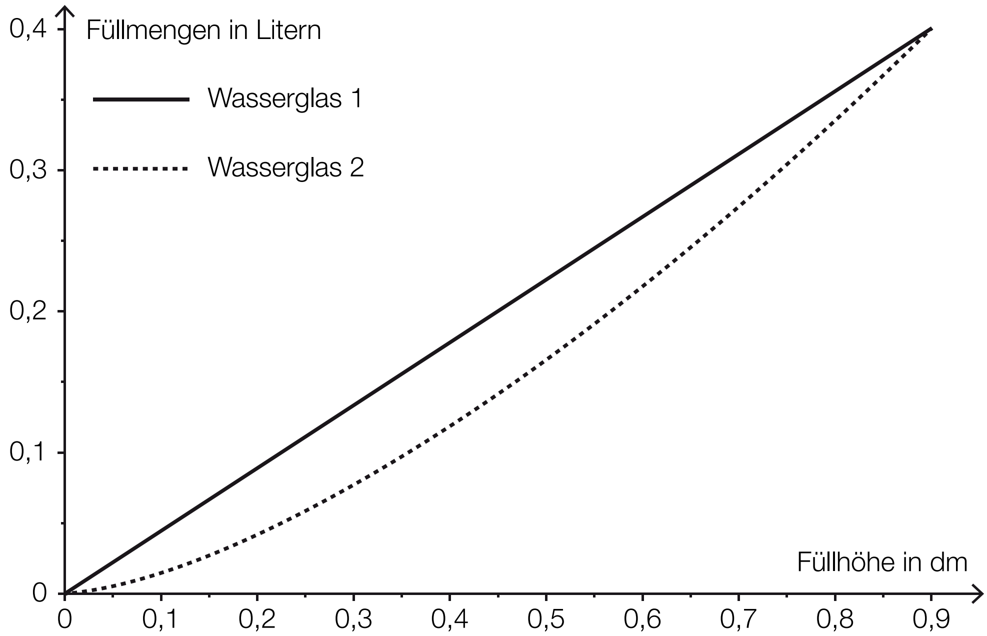
a) Das Wasserglas 1 wird durch einen konstanten Zufluss von 40 Millilitern pro Sekunde (ml/s) gefüllt.

Die Funktion *h* beschreibt die Flüssigkeitshöhe (in cm) in Abhängigkeit von der Füllzeit (in s).

– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion *h* auf.
– Bestimmen Sie die in diesem Sachzusammenhang größtmögliche Definitionsmenge dieser Funktion.

b) – Berechnen Sie den Radius r_2 von Wasserglas 2.

c) In der nachstehenden Grafik ist für jedes der beiden Wassergläser die Füllmenge in Abhängigkeit von der Füllhöhe dargestellt.



– Begründen Sie, warum der durchgezogene Funktionsgraph dem Wasserglas 1 zugeordnet werden kann.
– Bestimmen Sie die Füllmengendifferenz von Wasserglas 1 und Wasserglas 2 bei einer Füllhöhe von 0,3 dm.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Füllmenge pro Sekunde: 40 ml = 40 cm³

$\pi \cdot 3{,}8^2 \cdot h = 40 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{40}{\pi \cdot 3{,}8^2}$

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... Füllhöhe zur Zeit t in cm

$h(t) = \frac{40}{\pi \cdot 3{,}8^2} \cdot t$
$h(t) = 0{,}8817... \cdot t$

maximale Höhe = 9 cm
maximale Füllzeit:
$9 = 0{,}8817 \cdot t$
$t = 10{,}2...$
Definitionsbereich: $0 \leq t \leq 10{,}2...$

b) Wasserglas 1 und Wasserglas 2 haben gleiche Volumina:
$V_{\text{Wasserglas 1}} = V_{\text{Wasserglas 2}}$
$3{,}8^2 \cdot 9 \cdot \pi = 3 \cdot \pi \cdot (r_2^2 + 3 \cdot r_2 + 9) \quad \Rightarrow \quad r_2 = 4{,}547...$ (oder $r_2 = -7{,}547...$)
$r_2 \approx 4{,}55$ cm

c) Das Wasserglas 1 hat die Form eines Drehzylinders.
Volumen eines Drehzylinders in Abhängigkeit von der Höhe: $V(h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$
Der funktionale Zusammenhang zwischen der Füllmenge und der Füllhöhe ist linear mit dem Ordinatenabschnitt 0 und der Steigung $r^2 \cdot \pi$. Der durchgezogene Funktionsgraph hat genau diese Eigenschaften.

Füllmengendifferenz:
Füllmenge Wasserglas 1: 0,13 L
Füllmenge Wasserglas 2: 0,075 L
Toleranzbereich beim Ablesen: ±0,02 L
$0{,}13 - 0{,}075 = 0{,}055$
Füllmengendifferenz: 0,055 L

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) schwer
b) mittel
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 2

Thema: Alltag

Quellen: –

Strauchwachstum

Die Höhe eines Strauches nach dem Auspflanzen wird durch die Funktion h_1 beschrieben.

$h_1(t) = 0{,}08 \cdot e^{0{,}03 \cdot t}$ mit $0 \leq t < 55$

t … Zeit in Tagen
$h_1(t)$ … Höhe des Strauches zur Zeit t in m

a) 1) Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen der Strauch eine Höhe von 40 cm aufweist.

b) Die Funktionsgleichung der Funktion h_1 wurde fehlerhaft logarithmiert:

$\lg(h_1(t)) = \lg(0{,}08) + 0{,}03 \cdot \lg(e) + t \cdot \lg(e)$

1) Stellen Sie die logarithmierte Gleichung richtig.

c) Vom Beginn des 56. Tages an ($t = 55$) verringert sich die Wachstumsgeschwindigkeit des Strauches (Geschwindigkeit, mit der die Höhe des Strauches zunimmt). Ab diesem Zeitpunkt wird die Höhe des Strauches durch die Funktion h_2 beschrieben.

$h_2(t) = 1{,}2 - 1{,}8836 \cdot e^{-0{,}01595 \cdot t}$ für $t \geq 55$

t … Zeit in Tagen
$h_2(t)$ … Höhe des Strauches zur Zeit t in m

1) Ermitteln Sie die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Intervall $55 \leq t \leq 85$.

Möglicher Lösungsweg

a1) $h_1(t) = 0{,}4$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 53{,}6\ldots$

Nach rund 54 Tagen hat der Strauch eine Höhe von 40 cm.

b1) richtige Gleichung:
$\lg(h_1(t)) = \lg(0{,}08) + 0{,}03 \cdot t \cdot \lg(e)$

c1) $\frac{h_2(85) - h_2(55)}{85 - 55} = 0{,}0099\ldots$

Die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Intervall $55 \leq t \leq 85$ ist rund 0,01 m/Tag.

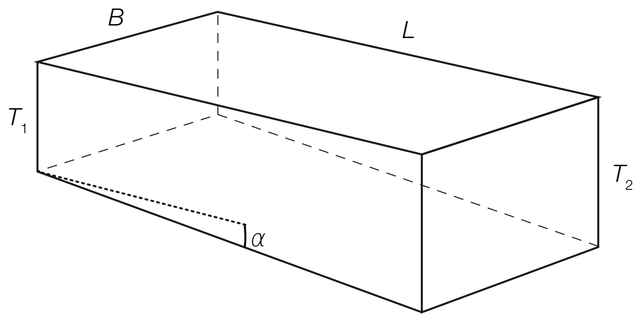
Swimmingpool

Aufgabennummer: A_175

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Petra plant einen Swimmingpool für ihren Garten.

a) Der rechteckige Pool soll die Länge L und die Breite B haben.
Außerdem soll der Boden im Winkel α abfallen, sodass der Pool immer tiefer wird (vgl. nachstehende Skizze).



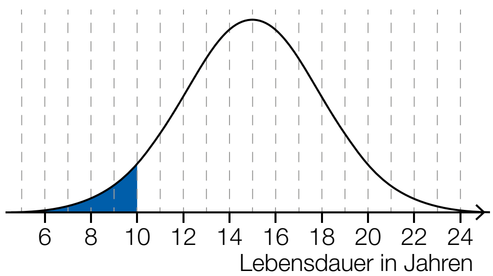
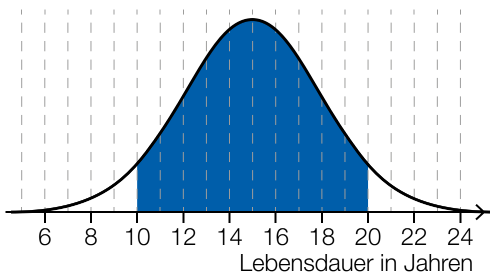
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V aus L, B, T_1 und α auf.

V = ____

– Berechnen Sie das Volumen des Swimmingpools in Hektolitern für folgende Maße:
$L = 10$ m, $B = 3$ m, $T_1 = 1{,}5$ m und $\alpha = 2{,}9°$.

b) Die Lebensdauer der Innenbeschichtung eines Swimmingpools kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ angenommen werden. Die gekennzeichneten Flächen in den nachstehenden Grafiken stellen Wahrscheinlichkeiten dar.

– Ordnen Sie den beiden Grafiken jeweils die richtige Beschreibung der dargestellten Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

A	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung $\mu \pm 5$ Jahre hält.
B	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung mindestens 10 Jahre hält.
C	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung nicht länger als 10 Jahre hält.
D	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung nicht länger als 20 Jahre hält.

c) Der Hersteller verkauft in einem bestimmten Jahr 40 Swimmingpools.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung eines Swimmingpools eine größere als die vom Hersteller garantierte Lebensdauer hat, beträgt bei einem zufällig ausgewählten Swimmingpool ungefähr 97 %.

– Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang, welche Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Ausdruck berechnet werden kann:

$$1 - \sum_{k=5}^{40} \binom{40}{k} \cdot 0{,}03^k \cdot 0{,}97^{40-k}$$

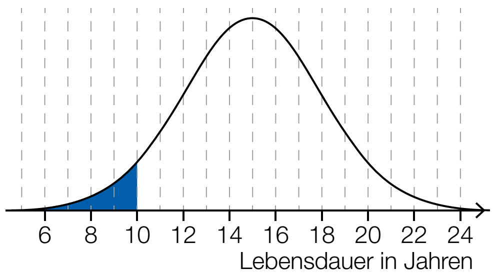
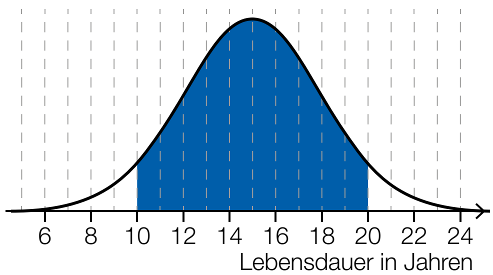
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\tan(\alpha) = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = \tan(\alpha) \cdot L \quad \Rightarrow \quad V = T_1 \cdot L \cdot B + \frac{\tan(\alpha) \cdot L^2}{2} \cdot B$

$V = 52{,}59\ldots \text{ m}^3 \approx 526 \text{ hl}$

b)

	C
	A

A	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung $\mu \pm 5$ Jahre hält.
B	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung mindestens 10 Jahre hält.
C	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung nicht länger als 10 Jahre hält.
D	Die gekennzeichnete Fläche beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Innenbeschichtung nicht länger als 20 Jahre hält.

c) Mit dem Ausdruck wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei weniger als 5 der 40 verkauften Swimmingpools die Beschichtung keine längere Lebensdauer als die vom Hersteller garantierte hat.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) –
b) –
c) –

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) –
c) –

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) leicht	b) 1
c) schwer	c) 1

Thema: Sonstiges

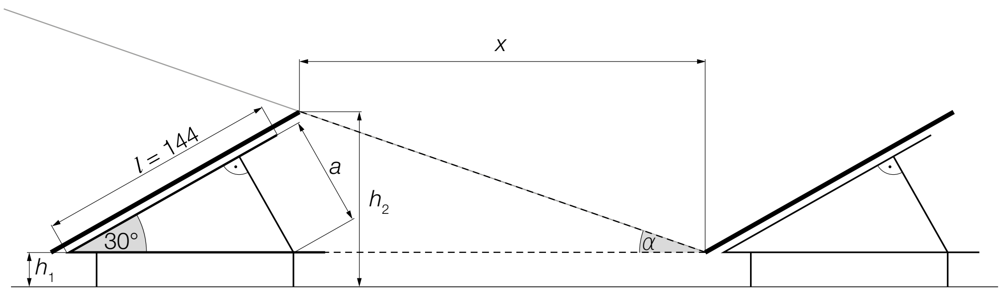
Quellen: –

Montagekonstruktion

Aufgabennummer: A_176

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Auf einem Flachdach soll eine Montagekonstruktion für die Module einer Photovoltaikanlage angebracht werden (siehe nachstehende schematische Abbildung).



a) Die Module sollen dabei jeweils so angebracht werden, dass sie keinen Schatten auf das dahinter angebrachte Modul werfen, wenn die Sonne unter einem Höhenwinkel α einfällt.

– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des dafür erforderlichen Abstands x aus h_1, h_2 und α auf.

$x =$ ______________________________

b) Bei der Montagekonstruktion wird das Tragprofil mit der Länge a normal auf das Tragprofil mit der Länge $l = 144$ cm angebracht (siehe obige Abbildung). Die Länge l wird dadurch im Verhältnis 5 : 1 geteilt.

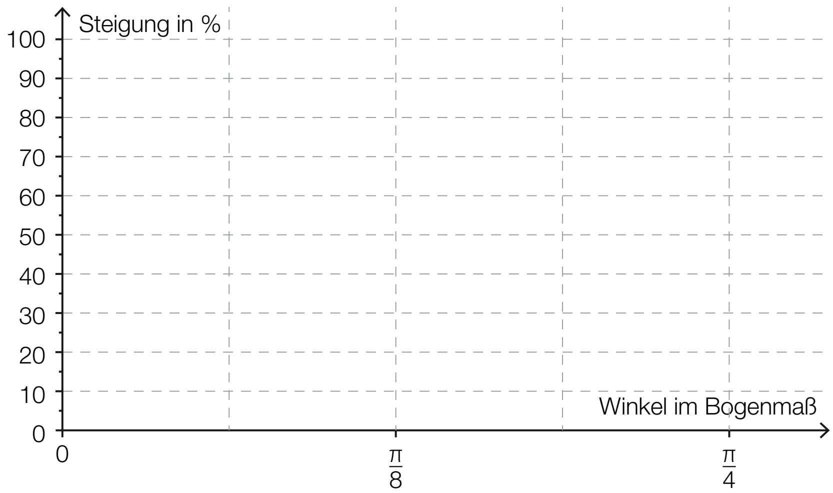
– Berechnen Sie die Länge a in mm.

c) Der Zusammenhang zwischen dem Neigungswinkel α und der zugehörigen Steigung in Prozent wird durch die Funktion g beschrieben:

$g(\alpha) = \tan(\alpha) \cdot 100$

α … Winkel im Bogenmaß
$g(\alpha)$ … Steigung beim Winkel α in %

– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g im Intervall $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ in das gegebene Koordinatensystem ein.



d) Für die Montage eines bestimmten Moduls wird ein Listenpreis von € 208,50 angegeben. Unternehmen A bietet einen Rabatt von 10 % auf den Listenpreis an. Ein Kunde kauft n dieser Module bei Unternehmen A.

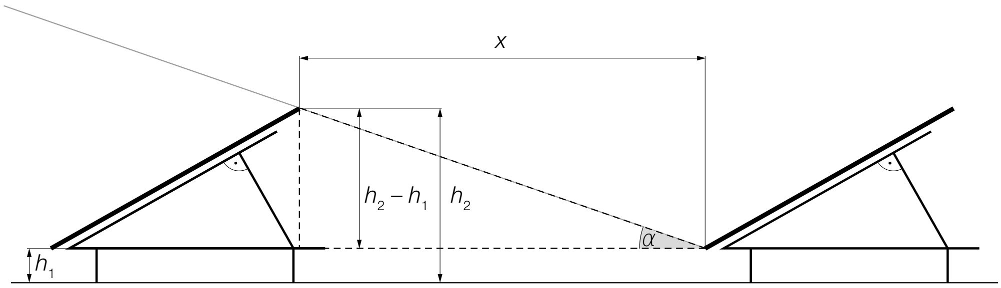
– Erstellen Sie mithilfe von n eine Formel für den Gesamtbetrag B, den der Kunde zahlen muss.

B = ____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $x = \frac{h_2 - h_1}{\tan(\alpha)}$



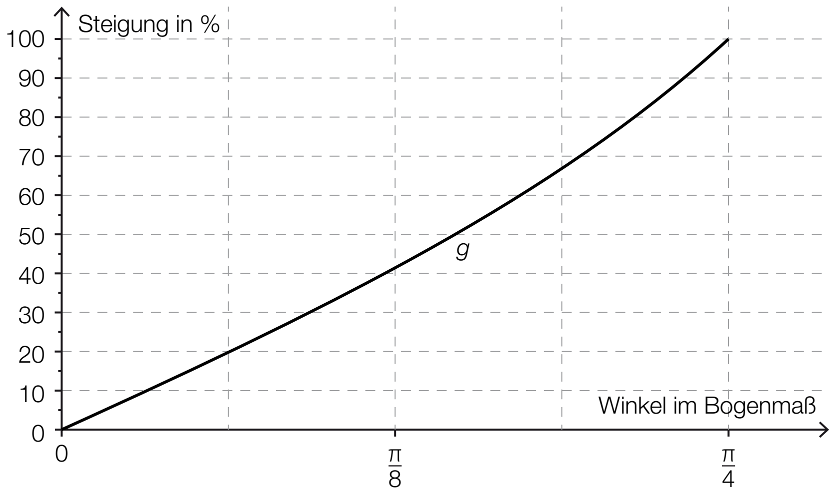
b) $\frac{5}{6} \cdot 144 = 120$

$\tan(30°) = \frac{a}{120}$

$a = \tan(30°) \cdot 120 = 69{,}28...$

Die Länge a beträgt rund 693 mm.

c)



d) $B = 208{,}5 \cdot 0{,}9 \cdot n$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) A Modellieren und Transferieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) mittel
c) leicht
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 1
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Tauchen (2)*

Aufgabennummer: A_193

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Nitrox ist ein beim Tauchen eingesetztes Atemgasgemisch mit erhöhtem Sauerstoffanteil.

Verwendet man Nitrox statt normaler Atemluft, kann man länger unter Wasser bleiben, darf aber nur bis zu einer maximalen Tiefe tauchen. Die maximale Tauchtiefe T hängt vom Sauerstoffanteil im Atemgas ab. Man kann sie mit folgender vereinfachter Formel berechnen:

$$T = \frac{14}{O_2} - 10$$

O_2 ... Sauerstoffanteil (z. B.: bei 32 % Sauerstoffanteil setzt man $O_2 = 0{,}32$ in die Formel ein)
T ... maximale Tauchtiefe in Metern (m)

Ein Taucher möchte mit einem Sauerstoffanteil von 30 % bis zu einer Tiefe von 30 m tauchen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob er das darf.

b) Eine Taucherin benötigt für einen Notaufstieg 40 Sekunden.

Der zurückgelegte Weg s in Abhängigkeit von der Zeit t lässt sich näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben:

$$s(t) = 0{,}02 \cdot t^2$$

t ... Zeit seit Beginn des Notaufstiegs in Sekunden (s)
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in Metern (m)

– Berechnen Sie die momentane Geschwindigkeit der Taucherin 3 Sekunden, bevor sie die Oberfläche erreicht.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Auftriebskraft F_A eines Körpers in Flüssigkeit ist gleich der Gewichtskraft G der verdrängten Flüssigkeit.

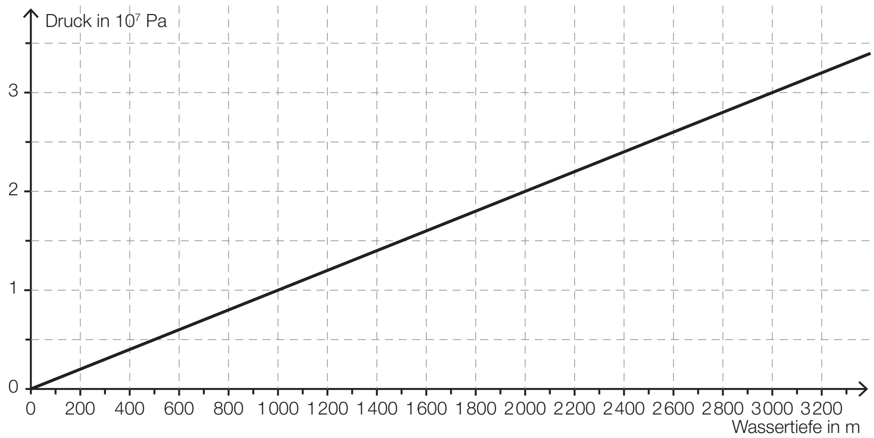
Aus der Physik sind folgende Formeln bekannt:

$\rho = \frac{m}{V}$
$G = m \cdot g$

Die verwendeten Variablen stehen für:
ρ ... Dichte der Flüssigkeit
m ... Masse der verdrängten Flüssigkeit
V ... Volumen der verdrängten Flüssigkeit
G ... Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit
g ... Erdbeschleunigung

– Erstellen Sie aus den angegebenen Beziehungen eine Formel für die Auftriebskraft F_A in Abhängigkeit von Dichte, Volumen und Erdbeschleunigung.

d) Mit zunehmender Wassertiefe steigt der Druck. Dieser kann in Bar (bar) oder Pascal (Pa) angegeben werden. 1 bar = 10^5 Pa.
Die nachstehende Grafik zeigt den Druck (in 10^7 Pascal) in Abhängigkeit von der Wassertiefe (in Metern).



Robben erreichen beim Tauchen aufgrund des Drucks eine maximale Tiefe von 700 m. Pottwale können einem um 230 bar größeren maximalen Druck als Robben ausgesetzt sein.

– Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, welchem Druck Robben in 700 m Tiefe ausgesetzt sind.
– Ermitteln Sie, welche maximale Tiefe Pottwale erreichen können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{14}{0,3} - 10 = 36,66\ldots \approx 36,7$

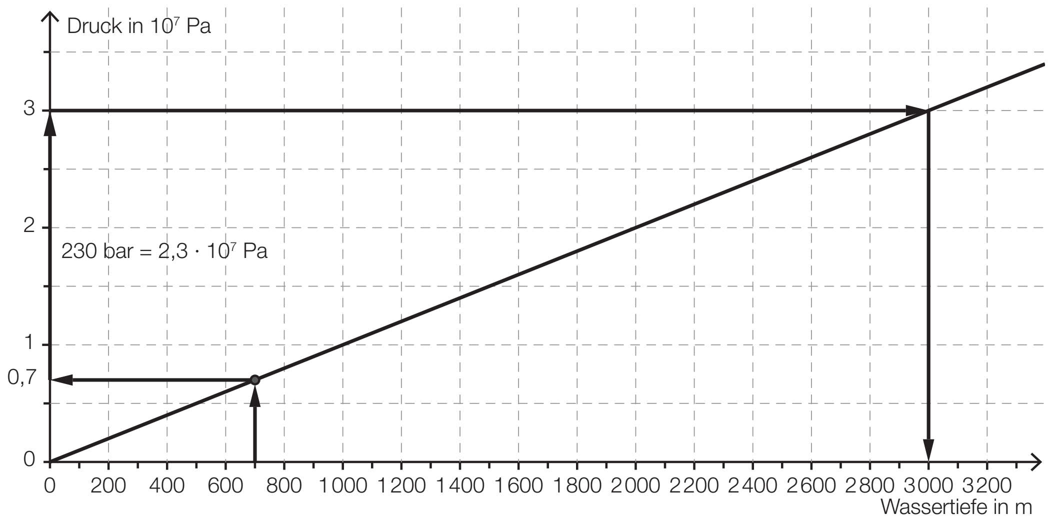
Man darf mit einem Sauerstoffanteil von 30 % bis zu einer Tiefe von mehr als 30 Metern tauchen.

b) $v(t) = s'(t) = 0,04 \cdot t$
$s'(37) = 0,04 \cdot 37 = 1,48$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 37$ s beträgt 1,48 m/s.

c) $F_A = V \cdot \rho \cdot g$

d) Druck in 700 m Tiefe: $0,7 \cdot 10^7$ Pa
Toleranzbereich: $[0,6 \cdot 10^7; 0,8 \cdot 10^7]$



Pottwale können eine maximale Tiefe von 3000 m erreichen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für eine richtige Überprüfung

b) 1 × A: für die richtige Verwendung des Modells der Differenzialrechnung
1 × B: für die richtige Berechnung der momentanen Geschwindigkeit bei $t = 37$ s

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

d) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Drucks in 700 m Tiefe im Toleranzbereich $[0{,}6 \cdot 10^7; 0{,}8 \cdot 10^7]$
1 × C2: für das richtige Angeben der maximalen Tiefe, die Pottwale erreichen können

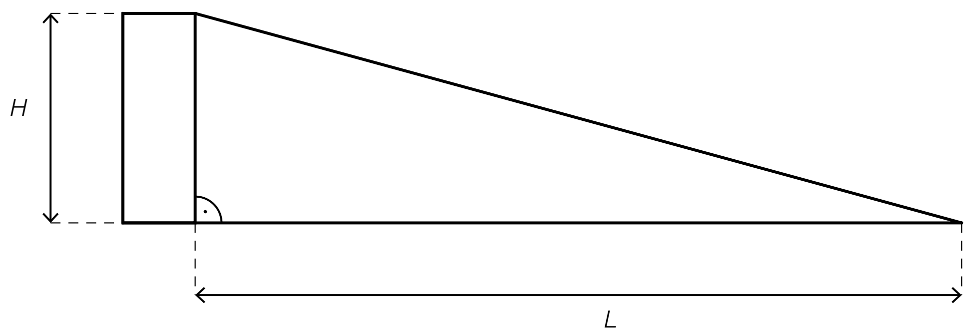
Skatepark (1)*

Aufgabennummer: A_194

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein *Skatepark* ist ein speziell für Skater/innen eingerichteter Bereich mit Startrampen und verschiedenen Hindernissen, die befahren werden können.

a) Im einfachsten Fall ist eine Startrampe eine geneigte ebene Fläche.
In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer Startrampe dargestellt.



Ein Hersteller von Startrampen gibt folgende Maße an:

Höhe H: 1,45 m
Länge L: 5,3 m

Eine Norm schreibt vor, dass die Steigung maximal 20 % betragen darf.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Norm eingehalten wird.

b) Der Verlauf einer anderen Rampe im Querschnitt kann näherungsweise durch folgende quadratische Funktion f modelliert werden:

$f(x) = \frac{1}{320} \cdot x^2$ mit $0 \leq x \leq 160$

x ... horizontale Koordinate in Zentimetern (cm)
$f(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

– Berechnen Sie, in welcher Höhe diese Rampe einen Steigungswinkel von 30° hat.

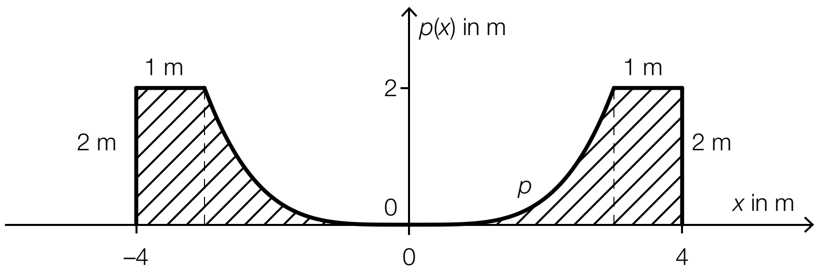
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Für eine *Halfpipe* soll in einem Skatepark Material aufgeschüttet werden. Ein Teil des Verlaufs der Halfpipe im Querschnitt lässt sich annähernd durch die Funktion p beschreiben:

$p(x) = \frac{2}{81} \cdot x^4$ mit $-3 \leq x \leq 3$

x ... horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x)$ ... Höhe an der Stelle x in m

Die nachstehende Abbildung zeigt die Querschnittsfläche der Halfpipe.



– Ermitteln Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche.

d) Eine *Quarterpipe* ist so konstruiert, dass die Skater/innen an der Kante senkrecht nach oben springen können. Die Höhe über der Absprungkante, die sie dabei erreichen, lässt sich durch die Weg-Zeit-Funktion h beschreiben:

$h(t) = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach dem Absprung in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe über der Absprungkante zur Zeit t in m
v_0 ... Geschwindigkeit der Skaterin/des Skaters an der Absprungkante in m/s
g ... Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s²)

In einem Lehrbuch findet man folgende Rechnung ausgeführt:

$h'(t) = v_0 - g \cdot t$

$0 = v_0 - g \cdot T$

$T = \frac{v_0}{g}$

$H = h(T) = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$

– Interpretieren Sie, was mit T und H in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Steigung: $k = \frac{1{,}45}{5{,}3} \approx 0{,}273...$

Die Rampe hat eine Steigung von über 27 %. Die Norm wird nicht eingehalten.

b) Ansatz zur Berechnung der Stelle, an der die Rampe einen Steigungswinkel von 30° hat:
$\tan(30°) = f'(x)$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{160} \cdot x \;\Rightarrow\; x = 160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f\left(160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{80}{3} \approx 26{,}7$

Die Rampe hat in einer Höhe von rund 26,7 cm einen Steigungswinkel von 30°.

c) Inhalt der Querschnittsfläche zwischen $x = 0$ und $x = 3$:

$\int_0^3 \frac{2}{81} \cdot x^4 \, dx = \frac{2}{81} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^3 = 1{,}2$

Inhalt der gesamten Querschnittsfläche: $A = 2 \cdot (2 + 1{,}2) = 6{,}4$

Der Inhalt der Querschnittsfläche beträgt 6,4 m².

d) T ist der Zeitpunkt, an dem die Skaterin/der Skater die maximale Höhe erreicht.
H ist die Höhe zum Zeitpunkt T, also die maximale Höhe.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für eine richtige Überprüfung

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung der Stelle, an der die Funktion einen Steigungswinkel von 30° hat
1 × B: für die richtige Berechnung der Höhe, an der die Funktion einen Steigungswinkel von 30° hat

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des bestimmten Integrals
1 × B: für die richtige Berechnung des Inhalts der schraffierten Querschnittsfläche

d) 1 × C: für die richtige Interpretation von T und H im Sachzusammenhang

Wachstum von Holzbeständen*

Aufgabennummer: A_192

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Bauer Waldner weiß, dass sich der Holzbestand seines Waldes um ca. 2,7 % pro Jahr bezogen auf das jeweilige Vorjahr vermehrt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Holzbestand 36 000 m³.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung für diejenige Funktion f auf, die den Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren angibt.
– Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Zeitintervall [0; 50].

b) Der Holzbestand eines anderen Waldes kann näherungsweise mithilfe der Funktion g beschrieben werden:

$g(t) = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

t ... Zeit in Jahren
$g(t)$ ... Holzbestand zum Zeitpunkt t in Kubikmetern (m³)

Wenn der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist, wird so viel geschlägert, dass wieder der Holzbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegt.

Für den Verkauf dieses geschlägerten Holzes betragen die Einnahmen € 96.000.

– Berechnen Sie den durchschnittlichen Verkaufspreis für 1 m³ Holz.
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist.

c) Ein Student behauptet: „Um die relative Änderung r des Holzbestandes von einem Zeitpunkt t_1 bis zu einem späteren Zeitpunkt t_2 zu berechnen, subtrahiere ich vom Holzbestand zum Zeitpunkt t_2 den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 und dividiere die Differenz durch den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1."

– Übersetzen Sie die Rechenanleitung des Studenten in eine Formel.

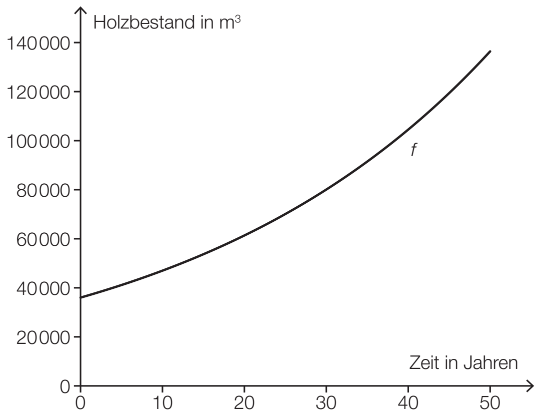
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $f(t) = 36\,000 \cdot 1{,}027^t$

t … Zeit in Jahren
$f(t)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t in m³



b) Verkauft wurden 1 200 m³, daher betrug der durchschnittliche Preis pro Kubikmeter € 80.

$33\,000 = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

$t = \frac{\ln(33\,000) - \ln(31\,800)}{\ln(1{,}025)} = 1{,}50\ldots$

Nach etwa 1,5 Jahren beträgt der Holzbestand 33 000 m³.

c) $r = \frac{h(t_2) - h(t_1)}{h(t_1)}$

r … relative Änderung
t_1, t_2 … Zeitpunkte
$h(t_1)$, $h(t_2)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 bzw. t_2

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des durchschnittlichen Preises pro Kubikmeter
1 × B2: für die richtige Berechnung der Zeit, nach der der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist

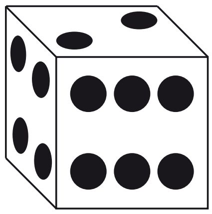
c) 1 × A: für die richtige Übersetzung der Rechenanleitung in eine Formel

Würfelspiele*

Aufgabennummer: A_191

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Würfelspiele sind seit Jahrtausenden auf der ganzen Welt bekannt und beliebt.
Die im Folgenden beschriebenen Spiele werden mit herkömmlichen fairen Spielwürfeln gespielt, bei denen die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Würfelergebnis auftreten.



a) Eines der beliebtesten Gesellschaftsspiele ist *Mensch ärgere Dich nicht*. Um eine Figur ins Spiel zu bringen, muss ein Sechser gewürfelt werden. In der 1. Runde darf jede Spielerin/jeder Spieler mit einem Würfel 3-mal würfeln.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 3-maligem Würfeln mindestens 1 Sechser auftritt.

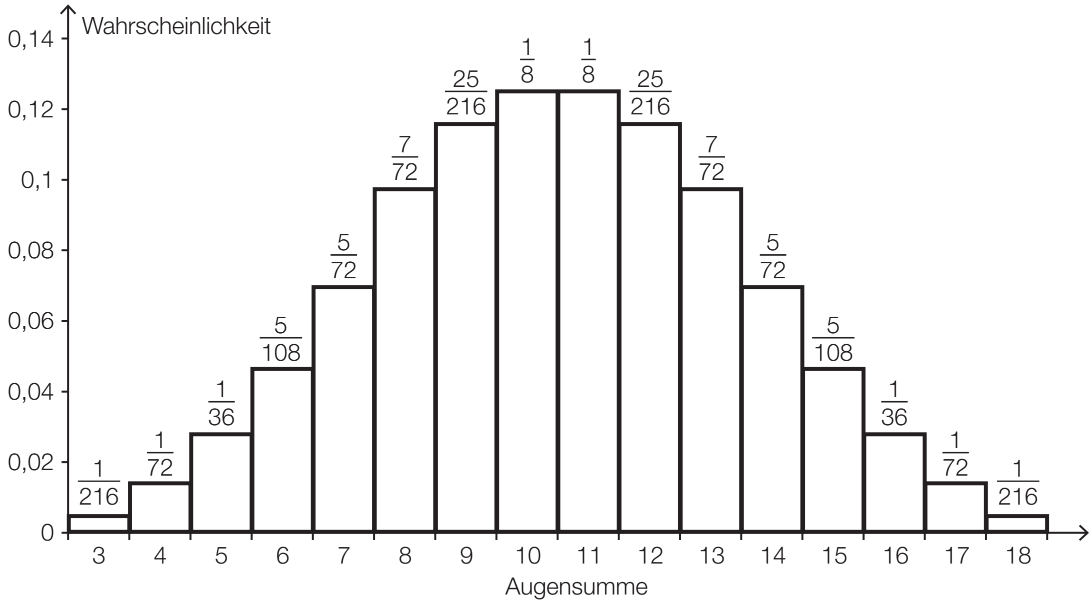
b) Beim Spiel *Siedler von Catan* wird mit 2 Würfeln gespielt. Wird die Augensumme 7 gewürfelt, tritt die Figur des Räubers in Aktion.

– Zeigen Sie, dass beim Werfen mit 2 Würfeln die Augensumme 7 häufiger auftritt als jede andere Augensumme.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Beim *Paschen* werden 3 Würfel geworfen und es wird die Augensumme ermittelt.

Im folgenden Diagramm ist zu jeder beim Werfen mit 3 Würfeln möglichen Augensumme die entsprechende Wahrscheinlichkeit dargestellt:



– Ermitteln Sie aus dem Diagramm, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Augensumme größer als 10 auftritt.

d) Das chinesische Spiel *Pat Cha* („Griff nach acht") wird mit 8 Würfeln gespielt. Jede Spielerin/jeder Spieler setzt auf eine der 6 Augenzahlen. Eine Spielerin/ein Spieler gewinnt, wenn mindestens 3 der 8 Würfel die gesetzte Zahl zeigen.

Martin setzt auf die Augenzahl 6.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Martin gewinnt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mithilfe der Gegenwahrscheinlichkeit: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \approx 0{,}4213$

b) Tabelle:

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) ...
...
(6, 1) (6, 2) ... (6, 6)

Die Augensumme 7 ergibt sich aus den 6 günstigen Ausgängen (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) und (6, 1).
Für alle anderen Augensummen gibt es weniger günstige Ausgänge.

c) Aufgrund der Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsfunktion beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit genau 50 %.

oder:

Addition der Wahrscheinlichkeiten: $P(X = 11) + \ldots + P(X = 18) = 0{,}5$

d) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 8$; $p = \frac{1}{6}$
$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 0{,}1348\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Martin gewinnt, beträgt rund 13,5 %.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die Verwendung eines richtigen Modells (Gegenwahrscheinlichkeit oder Additionssatz)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit

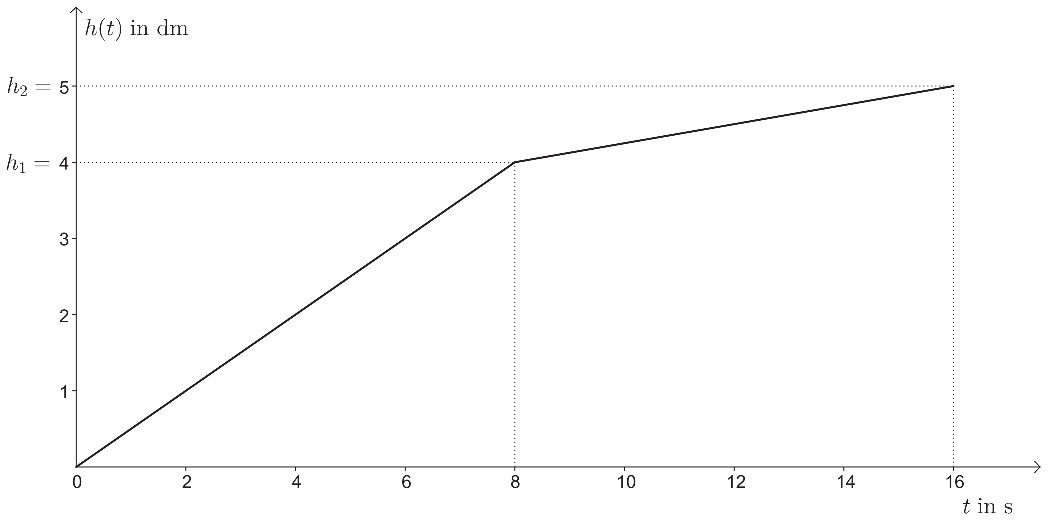
d) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Füllstandmessung*

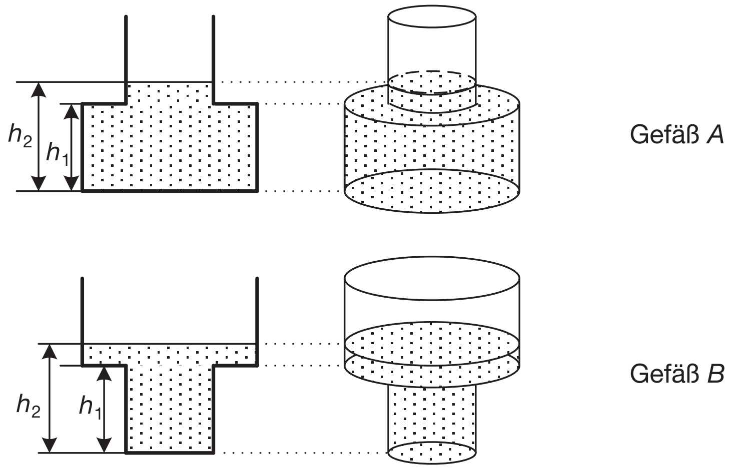
Aufgabennummer: B_258

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Wasserauffanggefäß hat die Form zweier übereinandergestellter gleich hoher Zylinder.
Es wird durch einen konstanten Zufluss von 1 Liter pro Sekunde befüllt.
Der nachstehende Graph der Funktion *h* beschreibt die Füllhöhe des Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit.



Es stehen 2 Gefäße entsprechend der folgenden Abbildung zur Auswahl (Gefäß *B* entspricht dem „umgedrehten“ Gefäß *A*):



* ehemalige Klausuraufgabe

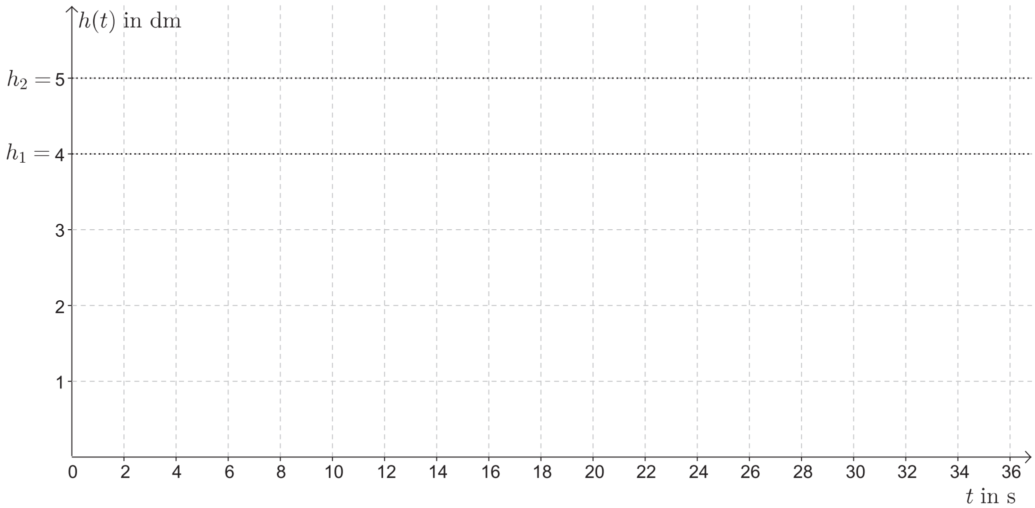
a) Der oben stehende Graph gibt die Füllhöhe *h* eines der beiden Gefäße richtig wieder.

– Begründen Sie, warum das Gefäß *B* zum angegebenen Graphen passt.

b) Das Gefäß *A* wird mit demselben konstanten Zufluss bis zu einer Höhe von 5 dm befüllt.
Die Funktion *h* beschreibt die Füllhöhe des Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit.

t ... Zeit in Sekunden (s)
h(*t*) ... Füllhöhe zur Zeit *t* in Dezimetern (dm)

– Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion in das unten stehende Koordinatensystem ein.



c) Bei der Befüllung mit einem konstanten Zufluss von 1 Liter pro Sekunde wird der untere Zylinder des Gefäßes *B* innerhalb von 8 Sekunden bis zur Höhe h_1 = 4 dm befüllt.

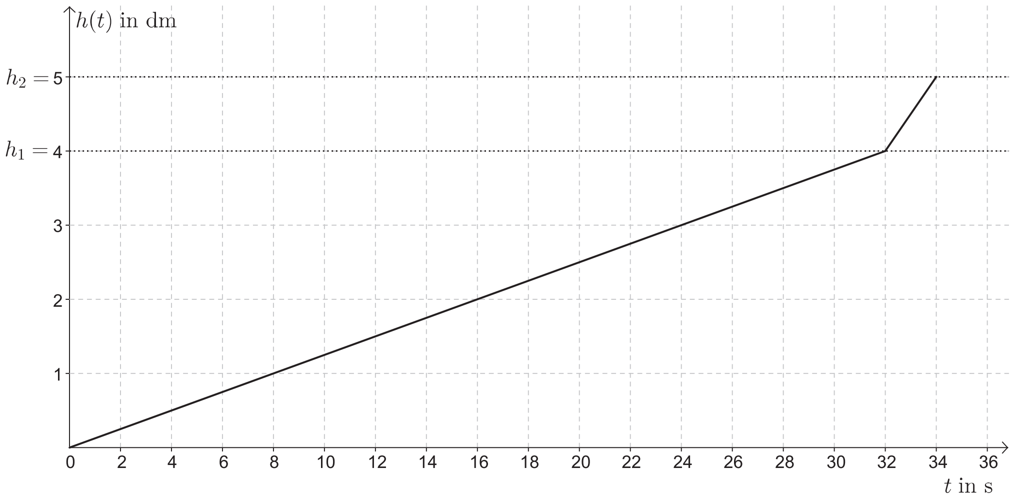
– Berechnen Sie den Radius dieses Zylinders.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Intervall [0; 8] steigt der Füllstand schneller als im Intervall [8; 16]. Bei einer kleinen Querschnittsfläche steigt der Füllstand schneller. Folglich wird bei dem dargestellten Füllprozess zuerst der Zylinder mit der kleineren Querschnittsfläche befüllt, also Gefäß *B*.

b)



c) Bei einem konstanten Zufluss von 1 Liter pro Sekunde sind nach 8 Sekunden insgesamt 8 Liter zugeflossen.

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$
$8 = r^2 \cdot \pi \cdot 4$

$r = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}79\ldots \quad \Rightarrow \quad r \approx 0{,}8$ dm

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung, warum das Gefäß *B* zum angegebenen Graphen passt
b) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen für den ersten Abschnitt (bis 32 s)
1 × A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen für den zweiten Abschnitt (ab 32 s)
c) 1 × A: für den richtigen Ansatz (Volumen als Produkt von Zeit und Zufluss)
1 × B: für die richtige Berechnung des Radius

Body-Mass-Index*

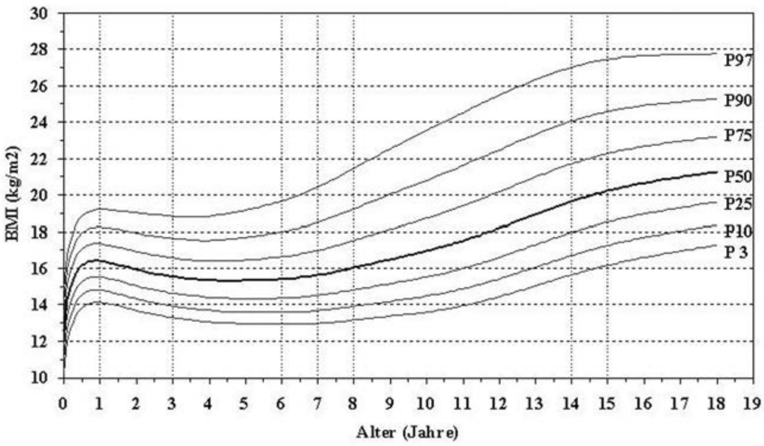
Aufgabennummer: A_205

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Body-Mass-Index (BMI) ist eine Maßzahl für die Bewertung der Masse eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße.
Die Formel für die Berechnung des BMI lautet: $BMI = \frac{m}{l^2}$

m ... Masse in Kilogramm (kg)
l ... Körpergröße in Metern (m)

a) Zur Klassifikation der Masse eines Kindes wird von österreichischen Kinderärzten oft folgendes Diagramm verwendet:



Perzentile für den Body-Mass-Index von Mädchen im Alter von 0 bis 18 Jahren
Quelle: http://www.familienhandbuch.de/ernaehrung/von-kindern-und-jugendlichen/mein-kind-ist-zu-dick

Bezeichnungen:

P50 ... Median
P25 ... unteres Quartil
P75 ... oberes Quartil

Die restlichen Bezeichnungen (P3, P10, P90, P97) können Sie unberücksichtigt lassen.

– Lesen Sie aus der oben stehenden Grafik ab, wie viel Prozent der 15-jährigen Mädchen einen höheren BMI als 18,5 $\frac{kg}{m^2}$ haben.

Ein Mädchen ist 3 Jahre alt, 16 kg schwer und 97 cm groß.

– Überprüfen Sie, ob der BMI des Mädchens im oberen Viertel seiner Altersgruppe liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

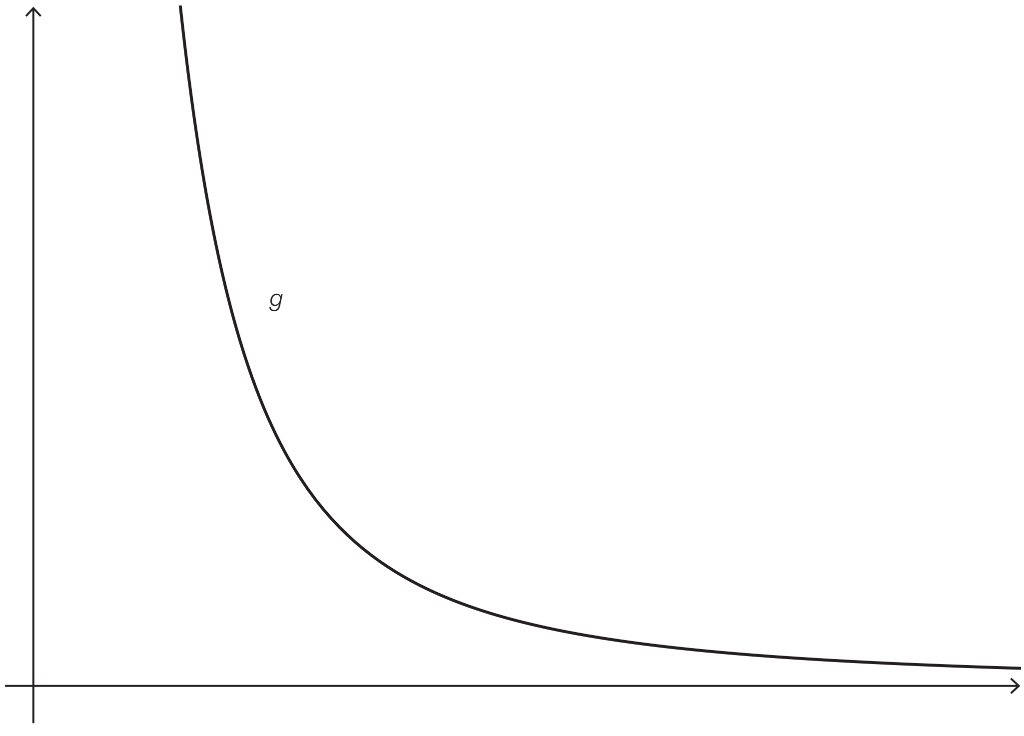
b) Georg ist um 10 % größer als Fritz, sie wiegen aber gleich viel.

– Stellen Sie eine Formel für den BMI von Georg auf, wenn die Masse und die Körpergröße von Fritz bekannt sind.
– Berechnen Sie, um wie viel Prozent Georgs BMI kleiner ist als jener von Fritz.

c) Die Abhängigkeit des BMI von der Körpergröße l wird durch die Funktion g beschrieben:

$$g(l) = \frac{m}{l^2}$$

– Beschriften Sie in der unten dargestellten Abbildung des Funktionsgraphen von g die Koordinatenachsen.
– Erklären Sie, warum der unten dargestellte Funktionsgraph den oben genannten Zusammenhang richtig beschreibt.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Ungefähr 75 % aller 15-jährigen Mädchen haben einen BMI, der größer ist als 18,5 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ (P25 – unteres Quartil).
Toleranzbereich: [70 %; 80 %]

Berechnung des BMI des 3-jährigen Mädchens: $BMI = \frac{16}{0{,}97^2} = 17\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$
Der Wert liegt in der Grafik oberhalb der P75-Kurve. Daher ist der BMI des Mädchens im oberen Viertel ihrer Altersklasse.

b) F … Körpergröße von Fritz in Metern (m)
G … Körpergröße von Georg in Metern (m)
m … Masse von Georg, Masse von Fritz in Kilogramm (kg)

BMI von Fritz: $BMI_{\text{Fritz}} = \frac{m}{F^2}$

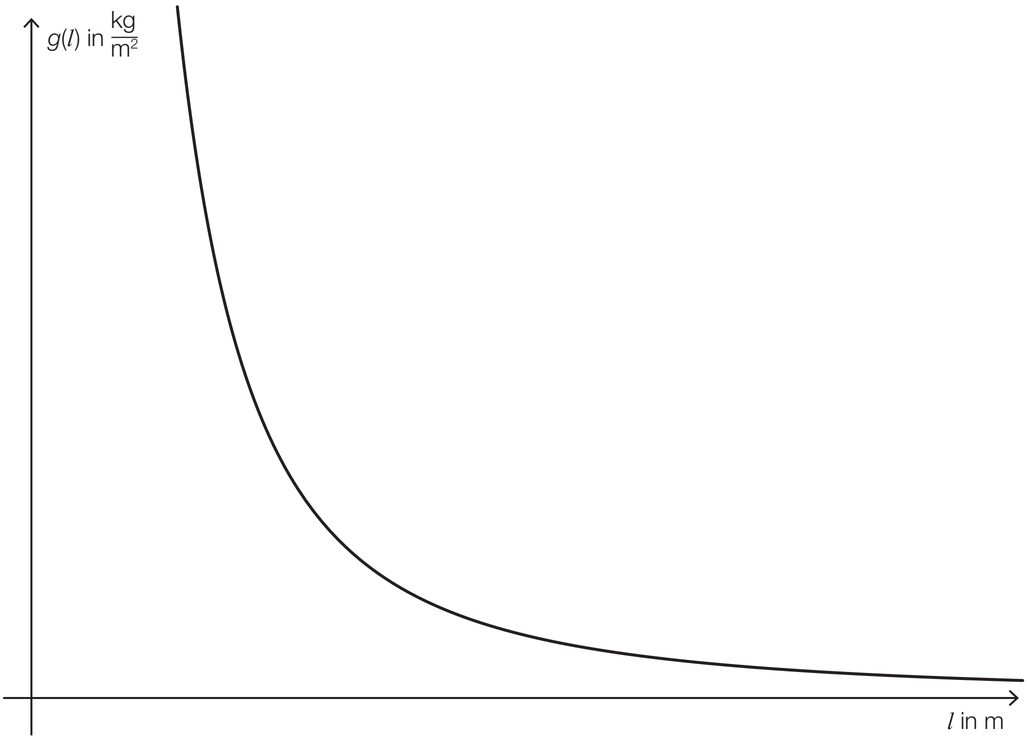
gesuchte Formel: $BMI_{\text{Georg}} = \frac{m}{G^2} = \frac{m}{(1{,}1 \cdot F)^2} = \frac{m}{1{,}1^2 \cdot F^2}$

Vergleicht man diese zwei Werte, so sieht man:

$BMI_{\text{Georg}} = \frac{1}{1{,}1^2} \cdot BMI_{\text{Fritz}} = 0{,}826 \cdot BMI_{\text{Fritz}}$

Das bedeutet, dass Georgs BMI um 17,4 % kleiner als jener von Fritz ist.

c) Beschriftung der Koordinatenachsen:



Die Einheiten müssen bei der Beschriftung nicht unbedingt angegeben werden.
Bei der Beschriftung der vertikalen Achse ist auch die Beschriftung „BMI in $\frac{kg}{m^2}$“ *oder eine inhaltlich gleichwertige Form als richtig zu werten.*

Die Körpergröße l ist in der Funktion g die unabhängige Variable.
Die Masse m bleibt konstant.
Es liegt also der allgemeine Funktionstyp $y = \frac{a}{x^2}$ vor.
Dieser typische Funktionsverlauf ist in der Grafik dargestellt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Prozentwertes aus der Grafik
1 × D: für die richtige Überprüfung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

c) 1 × C: für die richtige Beschriftung der Koordinatenachsen in der Grafik
1 × D: für die richtige Begründung

Rampe für Rollstühle*

Aufgabennummer: A_204

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Hotel muss zusätzlich zur „normalen" Treppe eine Rampe für Rollstühle einbauen.

a) Die Rampe soll nicht steiler als 6,5 % sein.

- Ermitteln Sie den maximal erlaubten Steigungswinkel.
- Berechnen Sie, welche Strecke man mit einem Rollstuhl mindestens zurücklegen muss, wenn ein Höhenunterschied von 45 cm überwunden werden muss.

b) – Erklären Sie, warum sich der Steigungswinkel einer Rampe nicht verändert, wenn sowohl der horizontale als auch der vertikale Abstand verdoppelt werden.

c) Beobachtungen zufolge sind 2 % aller Gäste mit einem Rollstuhl unterwegs.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Zufallsstichprobe von 50 Gästen mehr als 2 Rollstuhlfahrer/innen befinden.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $\tan(\alpha) = 0{,}065$ $\qquad$ $\alpha \approx 3{,}72°$
$\sin(3{,}72°) = \frac{45}{x}$ $\qquad$ $x \approx 694$ cm

b) Der Steigungswinkel bleibt gleich, da das Verhältnis der beiden Katheten nicht verändert wird (ähnliche Dreiecke).

c) Ansatz zur Berechnung mithilfe der Binomialverteilung: $n = 50$, $p = 0{,}02$
$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 7{,}84\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × B2: für die richtige Berechnung der Länge der Rampe

b) 1 × D: für die richtige Argumentation

c) 1 × A: für den richtigen Ansatz mit der Binomialverteilung
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Strahlenbelastung*

Aufgabennummer: A_207

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Zwischenfall in einem Kernkraftwerk wurden in der näheren Umgebung Messungen der Dosisleistung durchgeführt. (Die Dosisleistung ist ein Maß für die Wirkung von Strahlung auf lebendes Gewebe pro Zeiteinheit.)

a) An einem bestimmten Tag wurden folgende Messwerte aufgezeichnet:

Uhrzeit in Stunden (h)	Dosisleistung in Millisievert pro Stunde (mSv/h)
0	0,0092
12	350
24	1050

Der zeitliche Verlauf der Dosisleistung wird durch die Funktion f beschrieben:

$f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

t ... Uhrzeit in Stunden (h)
$f(t)$ ... Dosisleistung zum Zeitpunkt t in Millisievert pro Stunde (mSv/h)

– Stellen Sie dasjenige Gleichungssystem auf, mit dem Sie die Koeffizienten a, b und c berechnen können.

b) An einer anderen Messstelle wurden ebenfalls Daten für die Dosisleistung in mSv/h erhoben. Dieser zeitliche Verlauf der Dosisleistung kann durch die Funktion g beschrieben werden:

$g(t) = 1{,}36 \cdot t^2 + 20{,}7 \cdot t + 0{,}003$

t ... Zeit in Stunden (h)
$g(t)$ ... Dosisleistung zum Zeitpunkt t in Millisievert pro Stunde (mSv/h)

Die Gesamtdosis in einem Zeitintervall in Millisievert wird mithilfe des Integrals der Dosisleistung in diesem Zeitintervall berechnet.

– Berechnen Sie die Gesamtdosis an diesem Tag, beginnend bei $t = 0$ h.
– Bestimmen Sie das ganzzahlig gerundete Ergebnis in Sievert (Sv).

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In einer Zeitungsmeldung wird behauptet: „Nach dem Unfall im japanischen Kraftwerk Fukushima war die Dosisleistung in Fukushima 10 000-mal höher als in Österreich."

Es liegen folgende Vergleichsdaten vor:

- Österreich / Sonnblick: 150 Nanosievert pro Stunde (nSv/h)
- nach dem Zwischenfall im Kernkraftwerk Fukushima: 1 500 Millisievert pro Stunde (mSv/h)

– Überprüfen Sie anhand der Vergleichsdaten die Zeitungsmeldung auf ihre Richtigkeit.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $0{,}0092 = c$
$350 = a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c$
$1\,050 = a \cdot 24^2 + b \cdot 24 + c$

b) $\int_0^{24} g(t)\mathrm{d}t = 12\,229$ mSv

Das sind ganzzahlig gerundet 12 Sv.

c) Die Behauptung in der Zeitung ist falsch.
$1\,500$ mSv/h $= 150 \cdot 10^7$ nSv/h
In Fukushima war die Dosisleistung 10 000 000-mal höher als am Sonnblick.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Gesamtdosis mithilfe des Integrals
1 × B2: für das richtige Umrechnen und Runden

c) 1 × D: für die schlüssige Überprüfung

Vergnügungspark (1)*

Aufgabennummer: A_208

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region.

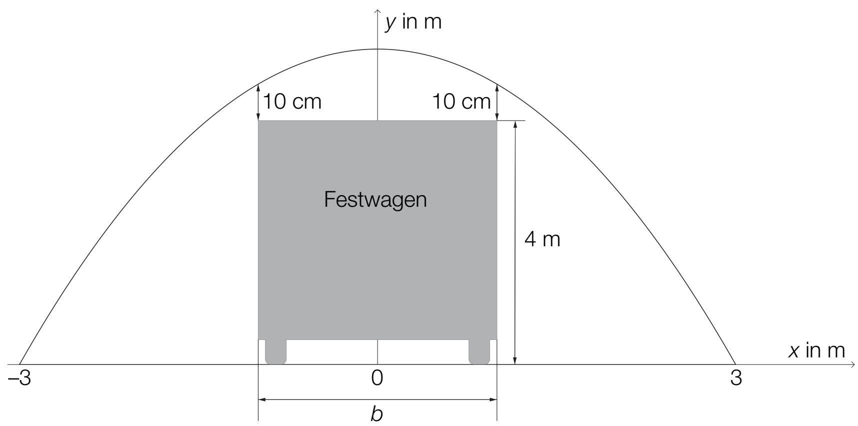
a) Beim Eingang zum Vergnügnungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$

x, y ... Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.

Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden. Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).



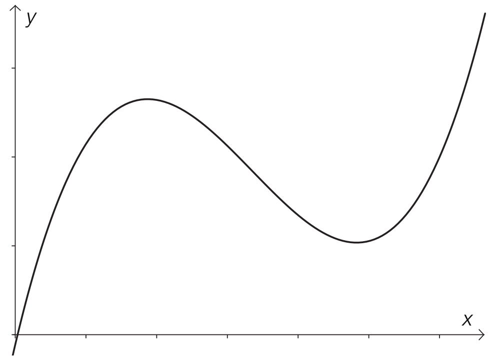
– Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf.

Vor der Parade wird das Tor mit einer Folie verschlossen.

– Berechnen Sie den Flächeninhalt der dazu benötigten Folie.

* ehemalige Klausuraufgabe

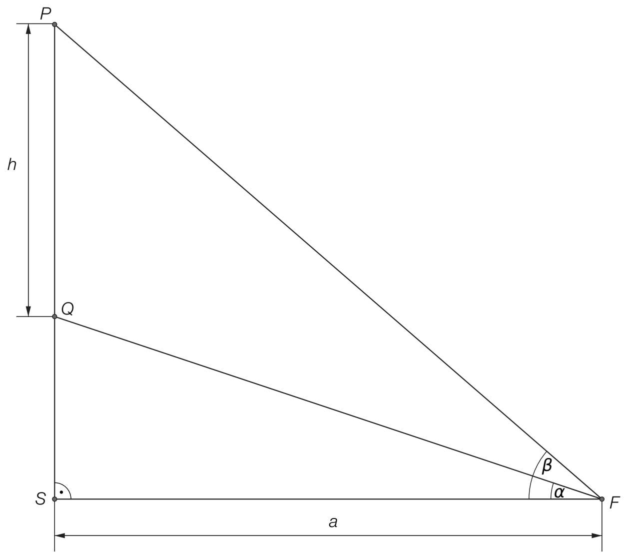
b) Eine der Hauptattraktionen ist die Hochschaubahn. Ein Teilstück kann durch die Polynomfunktion modelliert werden, deren Graph in der folgenden Abbildung zu sehen ist:



– Erklären Sie, welchen Grad diese Polynomfunktion mindestens haben muss.

c) Im Vergnügungspark gibt es ein Kino.

Fiona sitzt a Meter von der Leinwand entfernt (Punkt F). Der Höhenwinkel zum unteren Ende der Leinwand (Punkt Q) wird mit α bezeichnet, der Höhenwinkel zum oberen Ende der Leinwand (Punkt P) wird mit β bezeichnet.



– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Höhe h der Leinwand aus a, α und β.

$h =$ ____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

$\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m².

b) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c) rechtwinkeliges Dreieck FPS: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck FQS: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite b
1 × B2: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts

b) 1 × D: für eine richtige Erklärung

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Schmuckstücke

Ein Goldschmied fertigt kreisförmige Schmuckstücke an.

a) 1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils das richtige Satzende aus A bis D zu.

Wird der Radius eines Kreises um 50 % vergrößert, ...	
Wird der Radius eines Kreises verdoppelt, ...	

A	… so verdoppelt sich der Flächeninhalt.
B	… so steigt der Flächeninhalt auf das 1,5-Fache an.
C	… so vervierfacht sich der Flächeninhalt.
D	… so steigt der Flächeninhalt auf das 2,25-Fache an.

b) Die kreisrunde Designvorlage für einen Ohrring wird durch eine Trennlinie geteilt, die durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades f beschrieben werden kann (siehe Abbildung 1).

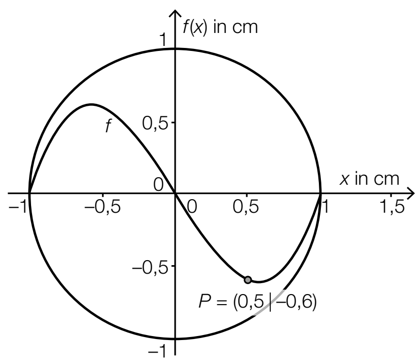


Abb. 1

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f.
2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

c) Die kreisrunde Designvorlage für einen Armbandanhänger wird durch die in Abbildung 2 veranschaulichte Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen von g und h geteilt.

$h(x) = \frac{8}{9} \cdot x^3 - \frac{8}{9} \cdot x$

$g(x) = a \cdot h(x)$ mit $a > 0$

x, $g(x)$, $h(x)$ … Koordinaten in cm

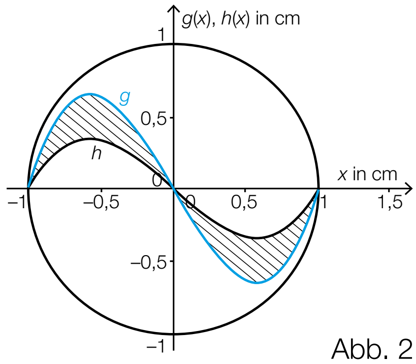
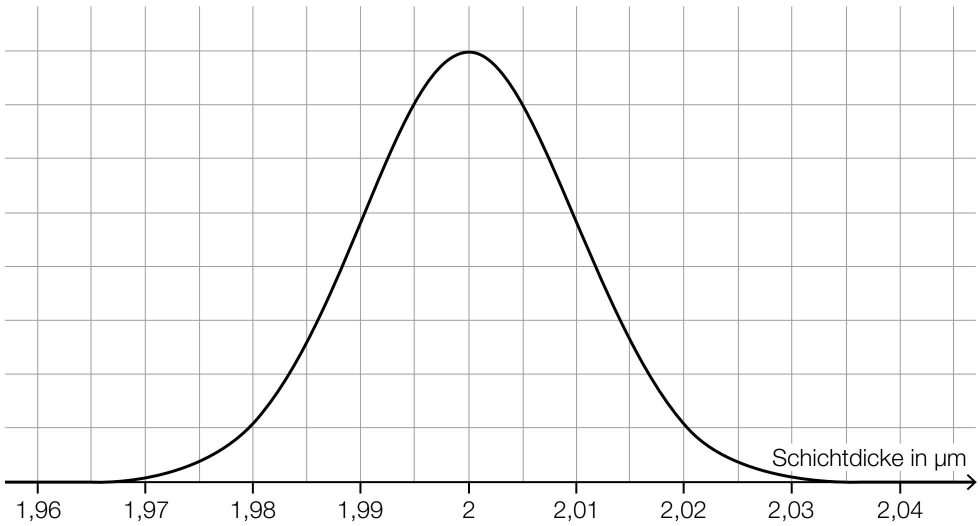


Abb. 2

1) Begründen Sie, warum gilt: $\int_{-1}^{1} (g(x) - h(x))\,\mathrm{d}x = 0$
2) Bestimmen Sie den Faktor a so, dass der schraffierte Flächeninhalt 0,4 cm² beträgt.

d) Die Schmuckstücke werden mit einer Goldschicht überzogen. Die Schichtdicke in Mikrometern (μm) aller produzierten Schmuckstücke ist annähernd normalverteilt. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Lesen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ ab.
2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass die Schichtdicke eines zufällig ausgewählten Schmuckstücks maximal 1,995 μm beträgt.

Möglicher Lösungsweg

a1)

Wird der Radius eines Kreises um 50 % vergrößert, ...	D
Wird der Radius eines Kreises verdoppelt, ...	C

A	… so verdoppelt sich der Flächeninhalt.
B	… so steigt der Flächeninhalt auf das 1,5-Fache an.
C	… so vervierfacht sich der Flächeninhalt.
D	… so steigt der Flächeninhalt auf das 2,25-Fache an.

b1) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

I: $f(-1) = 0$
II: $f(0) = 0$
III: $f(1) = 0$
IV: $f(0{,}5) = -0{,}6$

oder

$-a + b - c + d = 0$
$d = 0$
$a + b + c + d = 0$
$0{,}125 \cdot a + 0{,}25 \cdot b + 0{,}5 \cdot c + d = -0{,}6$

b2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 1{,}6, \ \ b = 0, \ \ c = -1{,}6, \ \ d = 0$

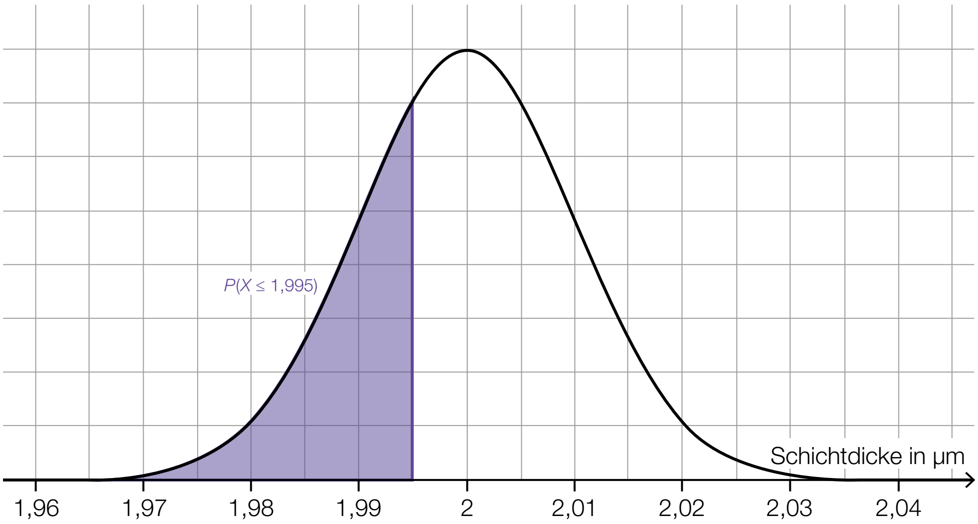
c1) $\int_{-1}^{1} (g(x) - h(x))\,\mathrm{d}x = 0$, da die Fläche rechts von der y-Achse genau der Fläche links von der y-Achse, jedoch mit negativem Vorzeichen entspricht.

c2) $\int_{-1}^{0} \left(\frac{8 \cdot a \cdot x^3}{9} - \frac{8 \cdot a \cdot x}{9} - \frac{8 \cdot x^3}{9} + \frac{8}{9} \cdot x\right) \mathrm{d}x = 0{,}2$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 1{,}9$

d1) $\mu = 2$ µm (Extremstelle) und $\sigma = 0{,}01$ µm (Entfernung Extremstelle – Wendestelle)
Toleranzbereich für σ: [0,005 µm; 0,015 µm]

d2)



Leistung einer Solaranlage*

Aufgabennummer: A_212

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Leistung einer Solaranlage lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion P beschreiben:

$$P(t) = \frac{7}{648} \cdot t^4 - \frac{7}{27} \cdot t^3 + a \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 12$$

t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht
$P(t)$ ... Leistung zur Zeit t in Kilowatt (kW)

Die Leistung ist um 13 Uhr am höchsten.

– Berechnen Sie den Koeffizienten a.

b) Eine andere Solaranlage wird an einem bestimmten Tag von 7 Uhr bis 19 Uhr betrieben und ihre Leistung durch die Funktion P beschrieben, wobei gilt:

$$P(t) = 0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 12$$

t ... Zeit in Stunden (h), wobei $t = 0$ der Uhrzeit 7 Uhr entspricht
$P(t)$ ... Leistung der Solaranlage zur Zeit t in kW

Die in einem Zeitintervall von der Solaranlage gelieferte Energie wird mithilfe des Integrals der Leistung in diesem Zeitintervall berechnet.

– Berechnen Sie die an diesem Tag von der Solaranlage gelieferte Energie.

c) – Begründen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, warum eine Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle hat.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $P'(6) = 0$

$$0 = \frac{7}{162} \cdot 6^3 - \frac{7}{9} \cdot 6^2 + 2 \cdot a \cdot 6$$

$$a = \frac{14}{9}$$

b) $\int_0^{12} (0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221)\,\mathrm{d}t = 67{,}5288$

Die Solaranlage liefert an diesem Tag rund 67,53 kWh Energie.

c) An der Wendestelle x_0 einer Funktion f gilt stets: $f''(x_0) = 0$.
Die 2. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine lineare Funktion, die genau 1 Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Daher hat die Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Koeffizienten *a*
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten *a*

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Integrals

c) 1 × D: für eine richtige Begründung

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Heimkino*

Aufgabennummer: A_147

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Peter richtet in seinem Zimmer ein Heimkino ein.

a) Der Bildschirm seines Fernsehers hat ein Seitenverhältnis (Breite : Höhe) von 16 : 9 und eine Bildschirmhöhe von 57,28 cm.

– Berechnen Sie die Bildschirmbreite in Zentimetern.
– Berechnen Sie die Länge der Diagonale des Bildschirms in Zoll (1 Zoll = 2,54 cm).

b) Der quadratische Boden von Peters Zimmer wird für das Heimkino mit einem schalldämmenden Teppich ausgelegt. Er misst die Diagonale d des Zimmerbodens.
Beim Verlegen des Teppichs ist ein Verschnitt von 15 % einzurechnen.

– Stellen Sie die Funktionsgleichung für die Fläche A des zu kaufenden Teppichs in Abhängigkeit von der Diagonale d auf.

c) Peter überlegt, wo er den Fernsehsessel positionieren soll, sodass die horizontale Entfernung x zum Fernseher optimal ist. Ideal ist es, in einem Winkel $\alpha = 5°$ auf die Bildschirmmitte hinaufzuschauen. Die Höhe vom Boden zur Bildschirmmitte ist h_1 und die Höhe vom Boden zu Peters Augen ist h_2.

– Erstellen Sie eine beschriftete Skizze, die diesen Sachverhalt darstellt.
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der idealen Entfernung x auf.
– Beschreiben Sie, wie sich der Winkel α verändert, wenn man die Entfernung x zum Fernseher vergrößert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

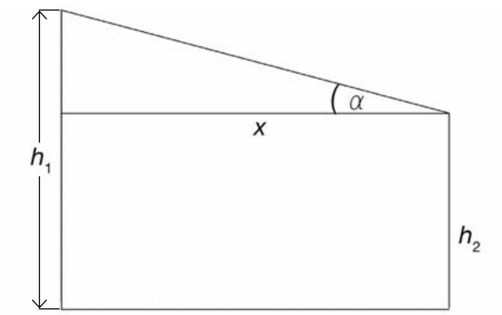
a) $\frac{16}{9} = \frac{l}{57{,}28}$

$l = 101{,}83$ cm

$d = \sqrt{57{,}28^2 + 101{,}83^2} = 116{,}83 \text{ cm} \approx 46$ Zoll

b) $A(d) = 1{,}15 \cdot \frac{d^2}{2}$

c)



$x = \frac{h_1 - h_2}{\tan(5°)}$

Wenn sich die Entfernung x zum Fernseher vergrößert, wird der Winkel α kleiner.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1 für die richtige Berechnung der Bildschirmbreite
1 × B2 für die richtige Berechnung der Länge der Diagonale in Zoll

b) 1 × A für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

c) 1 × A1 für das richtige Erstellen der Skizze mit korrekter Beschriftung
1 × A2 für das richtige Aufstellen der Formel; Formel muss nicht nach x aufgelöst sein
1 × C für das richtige Beschreiben der Veränderung des Winkels

Mathematikwettbewerb*

Aufgabennummer: A_148

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Schülergruppe hat an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen.

a) Die 12 Burschen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

32; 38; 40; 52; 53; 54; 56; 60; 61; 64; 66; 84

Nun sollen die Ergebnisse übersichtlich dargestellt werden. Dazu wird die folgende Klasseneinteilung verwendet:

A	30 bis 39
B	40 bis 49
C	50 bis 59
D	60 bis 69
E	70 bis 79
F	80 bis 89

– Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm, in welchem die Häufigkeiten der jeweiligen Klassen *A* bis *F* dargestellt sind.

b) Das arithmetische Mittel und der Median für die Punktezahlen der Burschen betragen 55 Punkte.
Die 12 Mädchen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

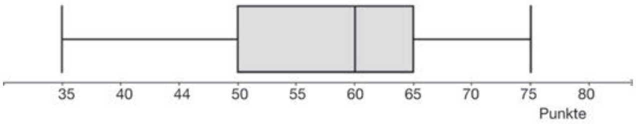
37; 38; 44; 53; 54; 57; 59; 60; 61; 62; 63; 65

Die Mädchen behaupten, dass sie sowohl beim arithmetischen Mittel als auch beim Median eine größere Punktezahl als die Burschen erreicht haben.

– Überprüfen Sie nachvollziehbar, ob diese Behauptung richtig ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Punkteverteilung einer anderen Schülergruppe ist in dem nachstehenden Boxplot dargestellt.

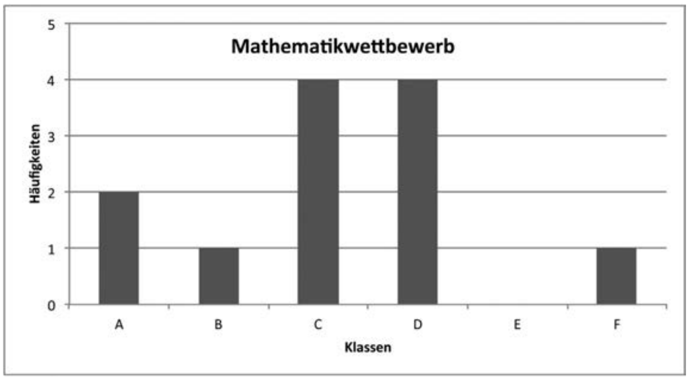


– Lesen Sie ab, wie viel Prozent der Schüler/innen mindestens 50 Punkte erreicht haben.
– Ermitteln Sie die Spannweite der Punktezahlen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Punktezahlen der Mädchen:
   – arithmetisches Mittel: 54,4 Punkte
   – Median: 58 Punkte

   Die Behauptung ist also falsch.

c) Die Punktezahl 50 ist das 1. Quartil. Das heißt: 75 % der Schüler/innen haben mindestens 50 Punkte erreicht.

   Spannweite: 75 – 35 = 40.
   Die Spannweite beträgt 40 Punkte.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A für das richtige Erstellen des Säulen- oder Balkendiagramms mit korrekter Beschriftung
b) 1 × D für die richtige Überprüfung der Behauptung
c) 1 × C für das richtige Ablesen des Prozentsatzes
   1 × B für das richtige Ermitteln der Spannweite

Zugfahrt*

Aufgabennummer: A_149

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

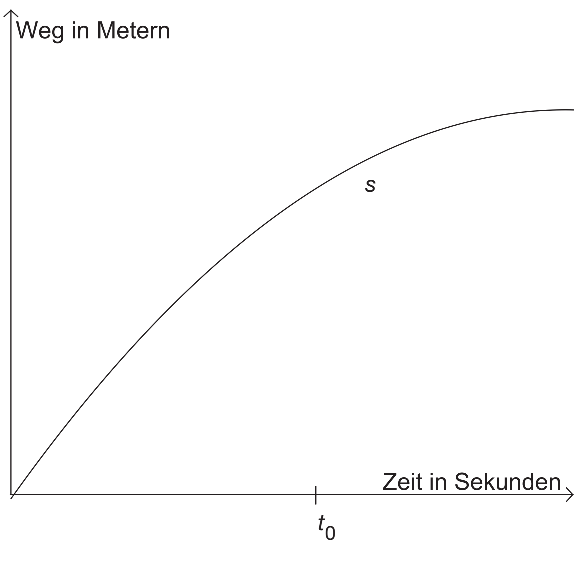
a) Ein Zug fährt ohne Zwischenstopps von der Station *Liesing* zur Station *Mödling*. Die Geschwindigkeit des Zuges auf dieser Strecke kann durch die Funktion v beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}16 \cdot t^2 + 0{,}75 \cdot t$

t ... Zeit in Minuten (min), seitdem der Zug die Station *Liesing* verlassen hat
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Kilometern pro Minute (km/min)

– Berechnen Sie die Fahrtdauer in Minuten.

b) Der zwischen zwei anderen Stationen zurückgelegte Weg eines Zuges kann durch den Funktionsgraphen im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm beschrieben werden.



– Zeichnen Sie die Tangente im Punkt $P = (t_0 | s(t_0))$ im obenstehenden Diagramm ein.
– Erklären Sie die Bedeutung der Steigung dieser Tangente im Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im Folgenden wird modellhaft von einer konstanten Geschwindigkeit (gemessen in km/h) eines Zuges und einer Schnellbahn ausgegangen.
Die Entfernung von Ort A nach Ort B auf einer geradlinigen Streckenführung beträgt 20 km. Der Zug fährt mit der Geschwindigkeit v_1 von Ort A nach Ort B. Die Schnellbahn, deren Geschwindigkeit um ein Drittel geringer ist, fährt in die entgegengesetzte Richtung. Der Zug passiert Ort A zum selben Zeitpunkt wie die Schnellbahn Ort B. Sie begegnen einander nach 10 Minuten.

– Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 des Zuges.

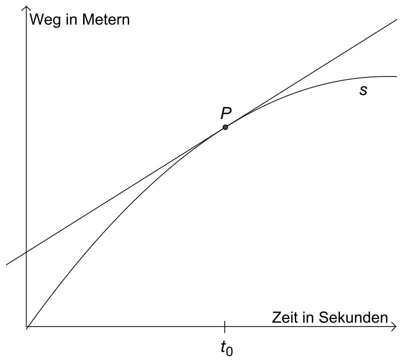
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}16 \cdot t^2 + 0{,}75 \cdot t = 0$

$t_1 = 0$ Abfahrt
$t_2 = 4{,}69$ Ankunft in Mödling nach 4,69 min

b)



Der Anstieg der Tangente ist die Momentangeschwindigkeit des Zuges zum Zeitpunkt t_0.

Als richtig zu werten ist auch der Begriff „Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0“, aber nicht „Durchschnittsgeschwindigkeit“.

c) Ansatz (z. B.: Gleichungssystem):

v_2 ... Geschwindigkeit der Schnellbahn

$$\text{I: } v_2 = \frac{2}{3} \cdot v_1$$

$$\text{II: } \frac{v_1}{6} + \frac{v_2}{6} = 20$$

$$\frac{v_1}{6} + \frac{v_1}{9} = 20$$

$v_1 = 72$ km/h

Die Geschwindigkeit des Zuges beträgt 72 km/h.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A für das Erkennen des richtigen Modells (Berechnen der Nullstellen)
1 × B für die richtige Berechnung der Fahrzeit

b) 1 × B für das richtige Einzeichnen der Tangente
1 × D für die richtige Erklärung im Sachzusammenhang

c) 1 × A für einen richtigen Lösungsansatz
1 × B für die richtige Berechnung von v_1

Infusion*

Aufgabennummer: A_150

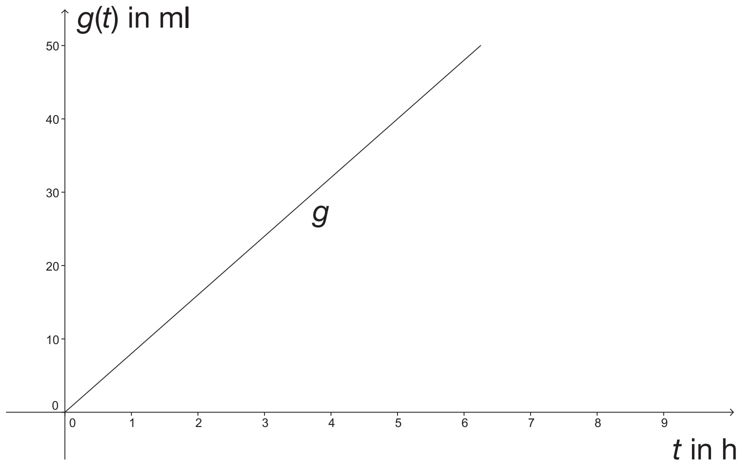
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Eine Patientin soll 50 ml Infusionslösung erhalten. Die Tropfgeschwindigkeit des Infusionsgeräts wird zu Beginn auf 8 Milliliter pro Stunde (ml/h) eingestellt.
Nach 3 Stunden verändert der Arzt die Tropfgeschwindigkeit, damit die Infusionsflasche nach weiteren 5 Stunden leer ist.

– Berechnen Sie, auf welche neue Tropfgeschwindigkeit in ml/h der Arzt das Gerät einstellen muss.
– Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die den Inhalt in der Infusionsflasche in Abhängigkeit von der Zeit nach Veränderung der Tropfgeschwindigkeit beschreibt.

b) Ein Patient soll 50 ml Infusionslösung erhalten. Die Tropfgeschwindigkeit des Infusionsgeräts wird auf 8 ml/h eingestellt.

– Beschreiben Sie die Bedeutung des nachstehenden Funktionsgraphen g in diesem Sachzusammenhang.



* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die verbleibende Infusionslösung in einer anderen Flasche wird durch die Funktion f beschrieben:

$f(t) = 24 - 3{,}3 \cdot t$

t ... Zeit in Stunden (h) seit 16 Uhr
$f(t)$ ... verbleibende Infusionslösung zum Zeitpunkt t in Millilitern (ml)

– Berechnen Sie, wie viel Infusionslösung in ml die Flasche um 18:20 Uhr enthält.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Nach 3 Stunden wurden bereits 24 ml verabreicht, d. h., es sind noch 26 ml in der Flasche.

$\frac{26}{5} = 5{,}2$

Die neue Tropfgeschwindigkeit beträgt 5,2 ml/h.

Aufstellen der Funktionsgleichung:

t ... Zeit in Stunden nach Neueinstellung durch den Arzt
$f(t)$ ... verbleibende Menge in der Infusionsflasche in ml zur Zeit t
$f(t) = 26 - 5{,}2 \cdot t$

b) Der Funktionsgraph beschreibt die Menge in ml, die der Patient nach t Stunden erhalten hat.

c) vergangene Zeit: 2 h 20 min, also $\frac{7}{3}$ h

$f\left(\frac{7}{3}\right) = 24 - 3{,}3 \cdot \frac{7}{3} = 16{,}3$

Um 18:20 Uhr sind noch 16,3 ml in der Flasche.

Lösungsschlüssel

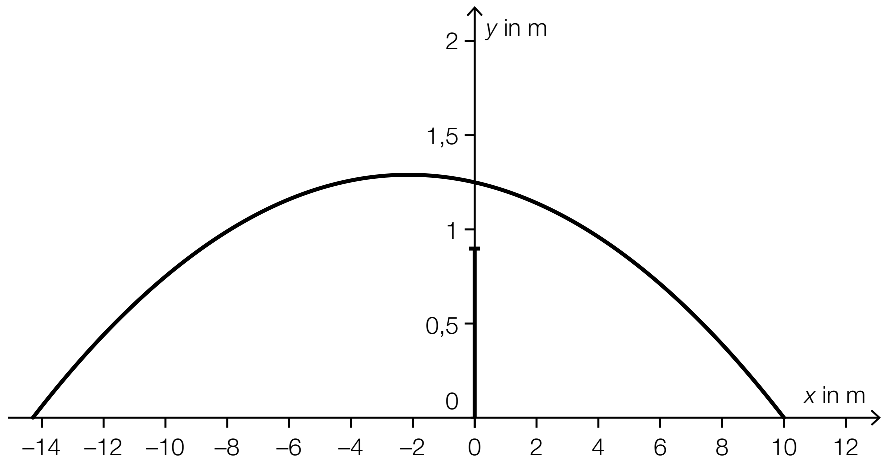
a) 1 × B für die richtige Berechnung der neuen Tropfgeschwindigkeit
1 × A für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
b) 1 × C für die richtige Beschreibung der Bedeutung des Funktionsgraphen
c) 1 × B für die richtige Berechnung der verbleibenden Infusionslösung

Tennis (1)*

Aufgabennummer: A_151

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Flugbahn eines Tennisballs ist ein Teil des unten dargestellten parabelförmigen Funktionsgraphen. Der Abschusspunkt *A* liegt 10 m vom Netz entfernt in einer Höhe von 0,75 m. Das Netz (0,9 m hoch) wird auf der *y*-Achse dargestellt. Der Ball überfliegt das Netz in einer Höhe von 35 cm und trifft 10 m hinter dem Netz im Aufprallpunkt *P* den Boden.



a) – Kennzeichnen Sie in der oben stehenden Grafik den Abschusspunkt *A* und den Aufprallpunkt *P*.
– Bestimmen Sie dasjenige Intervall, in dem der Funktionsgraph ein Modell für die Flugbahn darstellt.

b) – Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für die Flugbahn des Balles.

c) Die Flugbahn eines anderen Tennisballs kann näherungsweise durch eine quadratische Funktion $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

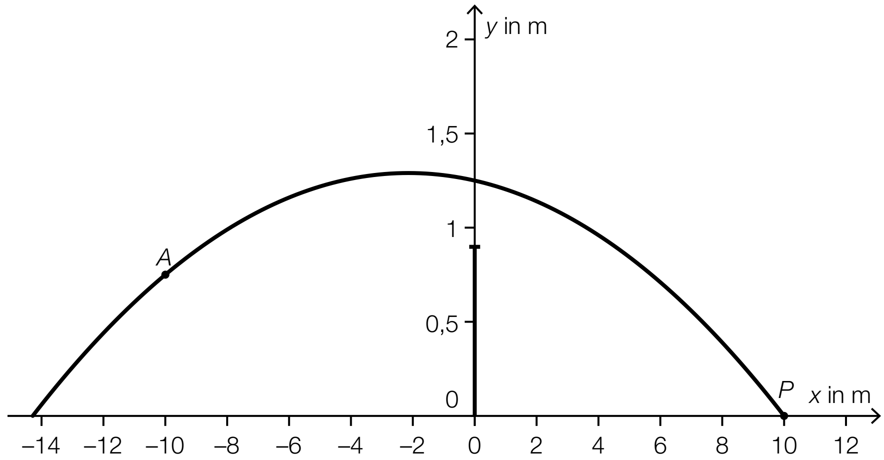
– Beschreiben Sie, welche Stelle der Flugbahn berechnet werden kann, wenn die Gleichung $2 \cdot a \cdot x + b = 0$ nach x gelöst wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



sinnvolles Intervall für die Beschreibung der Flugbahn: [–10; 10]

b) I. $f(-10) = 0{,}75$
II. $f(0) = 1{,}25$
III. $f(10) = 0$
$f(x) = -0{,}00875 \cdot x^2 - 0{,}0375 \cdot x + 1{,}25$

c) Durch das Lösen der Gleichung $2 \cdot a \cdot x + b = 0$ wird die x-Koordinate des Extrempunkts (Maximum) berechnet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Einzeichnen von Abschusspunkt *A* und Aufprallpunkt *P*
1 × C2: für die Beschreibung oder Angabe des richtigen Bereichs mit den korrekten Intervallgrenzen

b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Ermittlung der Funktionsgleichung

c) 1 × C: für die richtige Beschreibung

Bevölkerungswachstum und -abnahme*

Aufgabennummer: A_152

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Entwicklung der Einwohnerzahl eines Landes kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

a) Für Deutschland wird die Anzahl der Einwohner/innen näherungsweise durch die Funktion N modelliert:

$N(t) = 82{,}5 \cdot e^{-0{,}00043347 \cdot t}$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit 2005
$N(t)$ ... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

– Interpretieren Sie die Bedeutung des negativen Vorzeichens der Hochzahl in diesem Sachzusammenhang.

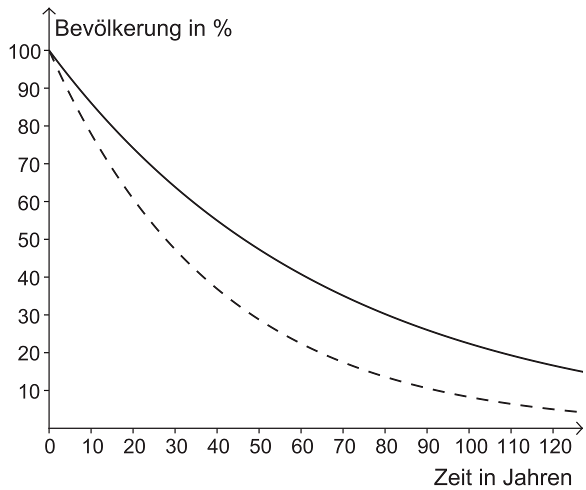
b) Mit Stand 1. Jänner 2011 lebten in Österreich 8,402 Millionen Menschen. Die Bevölkerung wächst jedes Jahr um jeweils 0,3 % des Vorjahreswertes.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Bevölkerung in Österreich ab 1. Jänner 2011 modelliert.
– Berechnen Sie, für welches Kalenderjahr das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen vorhersagt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Zwei verschiedene Modelle für die Bevölkerungsentwicklung einer Region sind im unten stehenden Diagramm dargestellt. Diese beiden Modelle prognostizieren unterschiedliche Zeitpunkte, zu denen die Bevölkerung auf 50 % des Ausgangswertes gesunken ist.

– Kennzeichnen Sie im nachstehenden Diagramm die Zeitdifferenz zwischen diesen beiden Zeitpunkten.



d) Beim Logarithmieren von Gleichung (1) ist ein Fehler passiert:

(1) $N = 8 \cdot 1{,}02^t$
(2) $\ln(N) = \ln(8) \cdot t \cdot \ln(1{,}02)$

– Stellen Sie die logarithmierte Gleichung (2) richtig.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Das negative Vorzeichen der Hochzahl hat zur Folge, dass das Modell eine Abnahme der Einwohnerzahl beschreibt.

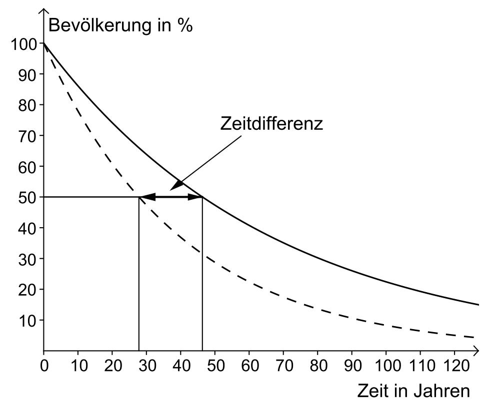
b) $A(t) = 8{,}402 \cdot 1{,}003^t$

t ... Anzahl der vergangenen Jahre seit dem 1. Jänner 2011
$A(t)$ ... Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

$8{,}402 \cdot 1{,}003^t = 10$
$t \approx 58{,}13$

Für das Jahr 2069 prognostiziert das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen.

c)



d) $\ln(N) = \ln(8) + t \cdot \ln(1{,}02)$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung des Kalenderjahrs
c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Zeitdifferenz
d) 1 × B: für das Richtigstellen der logarithmierten Gleichung (2)

Die Streif*

Aufgabennummer: A_153

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Jedes Jahr findet auf der Kitzbüheler *Streif* das weltberühmte *Hahnenkammrennen* statt. Die Veranstalter dieses Rennens veröffentlichten folgende Daten über eine Trainingsfahrt für den Abfahrtslauf:

Zeit in Sekunden	Name des Streckenpunkts	Meereshöhe in Metern	zurückgelegter Weg in Metern
0,0	Start	1665	0
8,5	Mausefalle	1605	160
39,3	Gschöss	1386	853
49,2	Alte Schneise	1331	1292
63,2	Seidlalm	1244	1609
118,1	Zielschuss	922	2906
131,6	Ziel	805	3312

a) – Beschreiben Sie, was mit dem Quotienten $\frac{1292\text{ m} - 853\text{ m}}{49{,}2\text{ s} - 39{,}3\text{ s}}$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

b) – Berechnen Sie für diese Trainingsfahrt den Neigungswinkel, der der mittleren Steigung entspricht.

c) Die Geschwindigkeit einer anderen Trainingsfahrt in Abhängigkeit von der Zeit kann für einen Abschnitt durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}045 \cdot t^2 + 6{,}594 \cdot t - 204{,}571$ mit $60 \leq t \leq 90$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)

– Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit in diesem Abschnitt maximal ist.
– Stellen Sie eine Formel auf, mit der der Weg, der in diesem Abschnitt zurückgelegt wird, berechnet werden kann.

d) Der in einem Abschnitt zurückgelegte Weg s ist eine Funktion der Zeit t.

– Beschreiben Sie, wie man – ausgehend von dieser Weg-Zeit-Funktion – die Momentangeschwindigkeit zu jedem beliebigen Zeitpunkt dieses Abschnitts ermitteln kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) Mit diesem Quotienten wird die mittlere Geschwindigkeit im Abschnitt von *Gschöss* bis *Alte Schneise* berechnet.

b) Zwischen der Gesamtstrecke $\Delta s = 3312$ m, dem dabei überwundenen Höhenunterschied $\Delta h = 860$ m und dem Neigungswinkel α besteht folgender Zusammenhang:

$\sin(\alpha) = \frac{860}{3312}$

Daraus wird der Neigungswinkel $\alpha \approx 15°$ berechnet.

c) $v'(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$

$-0{,}09 \cdot t + 6{,}594 = 0$

$t \approx 73{,}27$

Nach 73,27 Sekunden ist die Geschwindigkeit maximal.

Formel für den zurückgelegten Weg: $s = \int_{60}^{90} v(t)\,\mathrm{d}t$

d) Die Weg-Zeit-Funktion muss nach der Zeit differenziert werden, um die Funktion der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit zu erhalten. Durch Einsetzen eines bestimmten Zeitpunktes t erhält man die Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Neigungswinkels
c) 1 × B: für das richtige Bestimmen des Zeitpunktes mit maximaler Geschwindigkeit
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
d) 1 × C: für die richtige Beschreibung zur Ermittlung der Momentangeschwindigkeit

Bundes institut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Planeten (2)*

Aufgabennummer: A_154

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die folgenden Daten zu den Planeten unseres Sonnensystems sind gegeben:

	Merkur	Venus	Erde	Mars
große Bahnhalbachse in km	57 909 175	108 208 930	149 597 890	227 936 640
mittlerer Äquatorradius in km	2 440	6 050	6 380	3 400
	Jupiter	**Saturn**	**Uranus**	**Neptun**
große Bahnhalbachse in km	778 412 020	1 426 725 400	2 870 972 200	4 498 252 900
mittlerer Äquatorradius in km	71 490	60 270	25 560	24 760

a) Für eine Astronomie-Ausstellung sollen die Planeten maßstabgetreu verkleinert als Kugelmodelle aufgestellt werden. Die größte vorhandene Kugel hat einen Radius von 42 cm und ist für den Planeten Jupiter reserviert.

– Erklären Sie, warum eine Kugel mit einem Radius von ca. 2 cm für den Planeten Mars passt.

b) Das 3. Kepler'sche Gesetz lautet: „Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Bahnhalbachsen." Daher gilt:

$a_1^3 : a_2^3 = u_1^2 : u_2^2$

a_1 ... große Bahnhalbachse des Planeten 1
a_2 ... große Bahnhalbachse des Planeten 2
u_1 ... Umlaufzeit des Planeten 1
u_2 ... Umlaufzeit des Planeten 2

– Berechnen Sie die Umlaufzeit des Planeten Neptun. (Hinweis: Die Umlaufzeit der Erde beträgt 1 Jahr.)

c) Die großen Bahnhalbachsen zweier Planeten sollen auf einem Zahlenstrahl veranschaulicht werden. Dabei soll 1 cm auf dem Zahlenstrahl einer tatsächlichen Streckenlänge von 10^8 km entsprechen.

– Veranschaulichen Sie auf einem solchen Zahlenstrahl jeweils ausgehend vom Nullpunkt die großen Bahnhalbachsen der Planeten Erde und Saturn.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

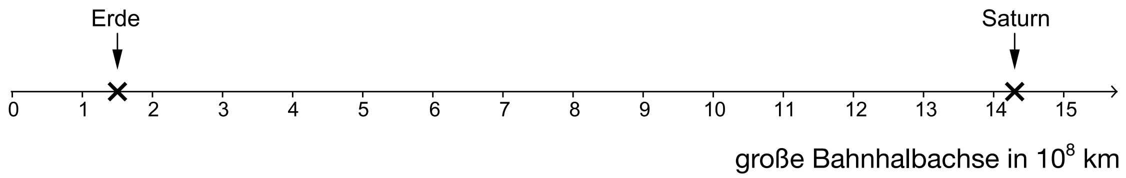
Möglicher Lösungsweg

a) Das Verhältnis der mittleren Äquatorradien von Jupiter und Mars (71 490 : 3 400) entspricht etwa dem Verhältnis der Kugelradien der Modelle (42 : 2).

b) $149\,597\,890^3 : 4\,498\,252\,900^3 = 1 : u_2^{\,2}$
$u_2 \approx 165$

Die Umlaufzeit des Planeten Neptun beträgt ca. 165 Jahre.

c) Erde: 149 597 890 km ≙ 1,49597890 cm ≈ 1,5 cm
Saturn: 1 426 725 400 km ≙ 14,26725400 cm ≈ 14,3 cm



Hinweis: Die Skalierung des Zahlenstrahls kann im vorliegenden Ausdruck durch eine unpassende Druckeinstellung gering abweichen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Umlaufzeit
c) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen beider Planeten auf dem Zahlenstrahl im korrekten Maßstab inklusive richtiger Beschriftung

Diabetes*

Aufgabennummer: A_155

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In Österreich leiden 4,6 % der Bevölkerung an Diabetes („Zuckerkrankheit").

a) Im Jahr 2014 hatte Österreich 8,5 Millionen Einwohner/innen.

– Berechnen Sie, wie viele Personen in Österreich im Jahr 2014 an Diabetes leiden.

b) – Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 30 nach dem Zufallsprinzip ausgewählten Österreicherinnen/Österreichern mindestens 2 an Diabetes leiden.

c) Die Wirksamkeit eines neuen Medikaments soll an 120 Personen getestet werden. 70 Personen erhalten das Medikament, der Rest erhält ein Placebo (Medikament ohne Wirkstoff).

Von den 120 Personen werden 2 nach dem Zufallsprinzip ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine von ihnen ein Placebo erhält, kann man folgendermaßen berechnen:

$$\frac{70}{120} \cdot \frac{50}{119} \cdot 2$$

– Erklären Sie die Bedeutung der beiden Brüche in diesem Sachzusammenhang.
– Erklären Sie die Bedeutung des Faktors 2 in diesem Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $8{,}5 \cdot 0{,}046 = 0{,}391$

In Österreich gab es im Jahr 2014 in etwa 391 000 Personen mit Diabetes.

b) Ansatz zur Berechnung mithilfe der Binomialverteilung: $n = 30$, $p = 0{,}046$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0{,}40433... \approx 40{,}43\ \%$

c) $\frac{70}{120}$: Wahrscheinlichkeit, eine Person, die das Medikament bekommen hat, aus der Gesamtheit von 120 Personen zu wählen

$\frac{50}{119}$: Wahrscheinlichkeit, eine Person, die das Placebo bekommen hat, aus der restlichen Gesamtheit von 119 Personen zu wählen

Der Faktor 2 rührt daher, dass es egal ist, ob die erste oder die zweite ausgewählte Person das Placebo bekommen hat.

Lösungsschlüssel

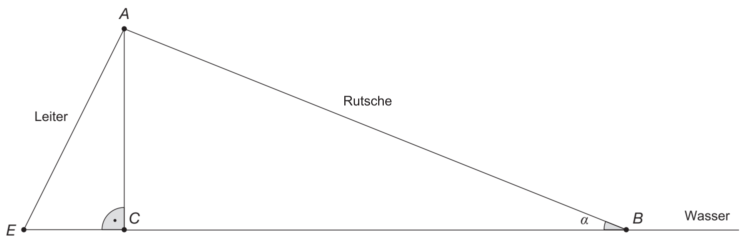
a) 1 × B: für die richtige Berechnung
b) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c) 1 × D: für die richtige Erklärung der Bedeutung der beiden Brüche
1 × D: für die richtige Erklärung des Faktors 2

Schwimmbad*

Aufgabennummer: A_156

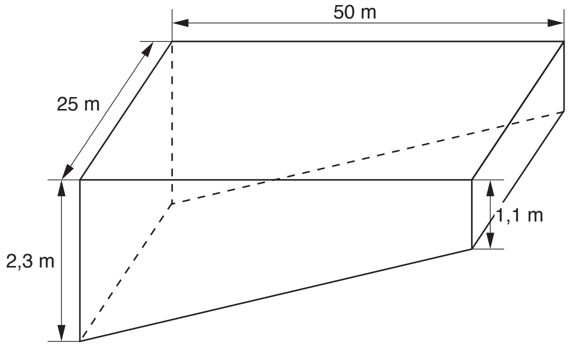
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Im Kinderbereich eines Schwimmbads soll eine Kinderrutsche errichtet werden.
Die unten stehende, stark vereinfachte Abbildung veranschaulicht den Aufbau dieser Kinderrutsche (nicht maßstabgetreu).
Die Rutsche taucht unter einem Winkel von $\alpha = 20°$ bei Punkt B ins Wasser ein und ist 3 Meter lang ($\overline{AB}$). Der Abstand zwischen den Punkten E und C beträgt 0,5 Meter.



– Berechnen Sie die Länge der Leiter $\overline{AE}$, die für diese Kinderrutsche benötigt wird.

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Abmessungen eines Schwimmbeckens eingezeichnet (nicht maßstabgetreu):



Dieses Schwimmbecken soll vollständig befüllt werden. Die Hygienevorschriften sehen vor, dass pro Liter Wasser 0,3 Milligramm eines bestimmten Desinfektionsmittels zugefügt werden müssen.

– Berechnen Sie, wie viel Kilogramm dieses Desinfektionsmittels zugefügt werden müssen.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Zur Reinigung eines Schwimmbeckens muss das Wasser abgelassen werden. Zu Beginn sind 2 Millionen Liter Wasser im Becken. Mithilfe von Pumpen werden gleichmäßig 5000 Liter pro Minute abgesaugt.

- Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die noch im Becken vorhandene Wassermenge in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
- Berechnen Sie, wie lange das Abpumpen der gesamten Wassermenge dauert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Ansatz zur Berechnung der Länge $\overline{AC}$:

$\sin(20°) = \frac{\overline{AC}}{3}$

$\overline{AC} \approx 1{,}03$ m

Berechnung der Länge der Leiter mithilfe des Lehrsatzes von Pythagoras:

$\overline{AE} = \sqrt{(0{,}5^2 + \overline{AC}^2)} = 1{,}141... \approx 1{,}14$

Die Leiter ist 1,14 m lang.

b) Volumen des Prismas: $V = \frac{(2{,}3 + 1{,}1) \cdot 50}{2} \cdot 25 = 2\,125$

Das vollständig befüllte Schwimmbecken fasst 2 125 m³.

$2\,125$ m³ = $2\,125\,000$ L

Masse des Desinfektionsmittels:

$0{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 2\,125\,000 = 0{,}6375$

Es müssen 0,6375 kg Desinfektionsmittel zugefügt werden.

c) $f(t) = 2\,000\,000 - 5\,000 \cdot t$

t ... Zeit in Minuten (min)

$f(t)$ ... vorhandene Wassermenge zum Zeitpunkt t in Litern (L)

Berechnung der Nullstelle dieser Funktion:

$2\,000\,000 - 5\,000 \cdot t = 0$

$t = 400$

Es dauert 400 Minuten, bis die gesamte Wassermenge abgepumpt ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen trigonometrischen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Länge der Leiter

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz (Modell für die Berechnung des Volumens)
1 × B: für die richtige Berechnung der Masse des Desinfektionsmittels

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung
des österreichischen Schulwesens

Farbenfrohe Gummibären*

Aufgabennummer: A_157

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

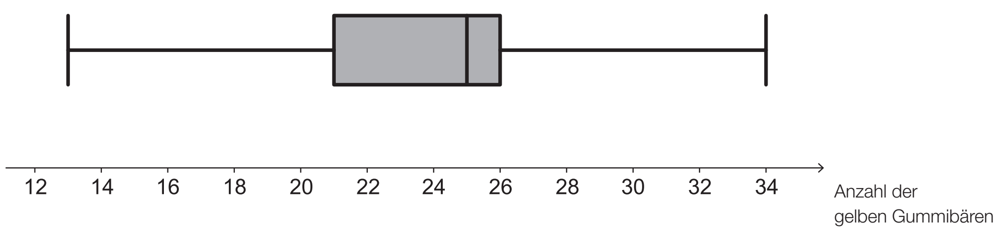
Gummibären werden in 5 unterschiedlichen Farben bzw. 6 unterschiedlichen Geschmacksrichtungen hergestellt: rot (Himbeere und Erdbeere), gelb (Zitrone), grün (Apfel), orange (Orange) und weiß (Ananas).

a) Die nachstehende Tabelle enthält eine Auflistung, wie viele weiße Gummibären in den untersuchten Packungen waren.

Anzahl weißer Gummibären pro Packung	17	20	21	22	24
Anzahl der Packungen	2	3	3	1	4

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Anzahlen weißer Gummibären pro Packung.

b) Mehrere Packungen wurden hinsichtlich der Anzahl der gelben Gummibären pro Packung untersucht. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist im nachstehenden Boxplot dargestellt.



Eine der untersuchten Packungen wird zufällig ausgewählt. Sie gehört zu jenem Viertel aller untersuchten Packungen, in dem die meisten gelben Gummibären zu finden waren.

– Lesen Sie aus dem Boxplot ab, in welchem Bereich die Anzahl der gelben Gummibären in der ausgewählten Packung liegen muss.

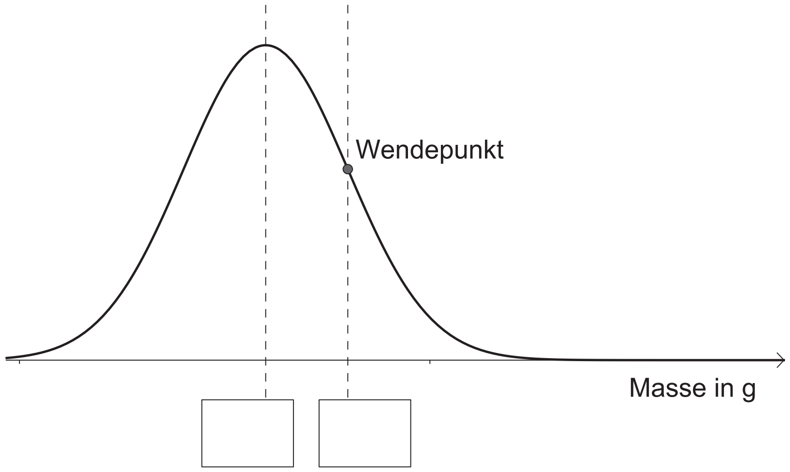
c) In einer Packung sind alle Geschmacksrichtungen in gleichen Anteilen zu finden.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Gummibären in dieser Packung die Farbe Rot haben.

* ehemalige Klausuraufgabe

d) Die Masse von Gummibären ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 2{,}3$ g und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}1$ g. Der Graph der Wahrscheinlichkeitsdichte ist in der unten stehenden Abbildung dargestellt.

– Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



Gummibären, die zu leicht oder zu schwer sind, werden aussortiert. Abweichungen von bis zu ± 0,25 g vom Erwartungswert werden toleriert.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein zufällig ausgewählter Gummibär aussortiert wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

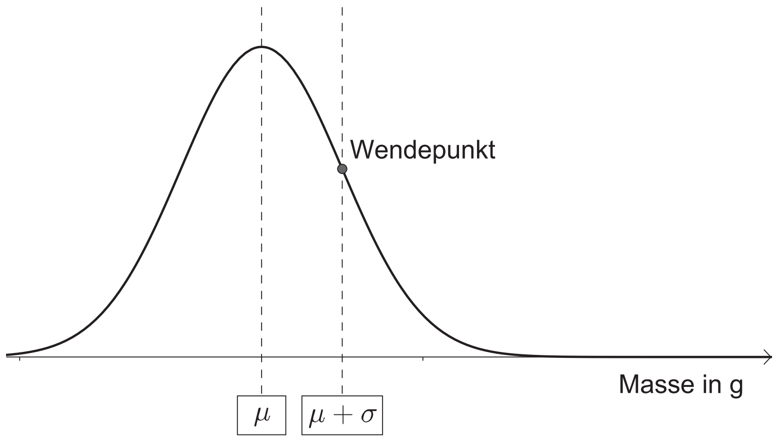
a) $\bar{x} = \frac{17 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 21 \cdot 3 + 22 \cdot 1 + 24 \cdot 4}{2 + 3 + 3 + 1 + 4} = 21{,}153... \approx 21{,}15$

b) Diese Packung enthält mindestens 26 und höchstens 34 gelbe Gummibären.

c) Anteil einer Geschmacksrichtung: $\frac{1}{6}$

Da die Farbe Rot 2-mal vorkommt: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\ \%$.

d)



P(„Gummibär wird aussortiert") = $1 - P(2{,}05 \leq X \leq 2{,}55) = 0{,}01241... \approx 0{,}0124$

Ein zufällig ausgewählter Gummibär wird mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 1,24 % aussortiert.

Lösungsschlüssel

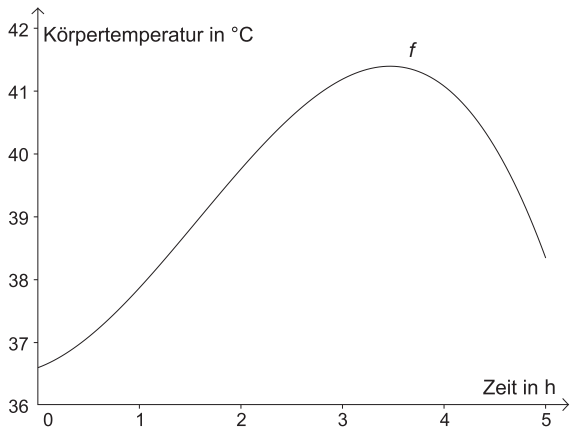
a) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittels
b) 1 × C: für das richtige Ablesen des Bereichs
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
d) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Beschriftungen (μ und $\mu + \sigma$ bzw. die entsprechenden Werte 2,3 und 2,4)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Ganzkörperhyperthermie*

Aufgabennummer: A_158

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.



Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C

a) – Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur 37 °C beträgt.

b) – Dokumentieren Sie, wie die maximale Körpertemperatur im angegebenen Zeitintervall mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann.
– Begründen Sie, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

c) – Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen Temperaturzunahme.

d) Die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ während der 5 Stunden andauernden Behandlung soll ermittelt werden.

Die mittlere Körpertemperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist:

$$\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

– Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ im Intervall [0; 5].

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6 = 37$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 0{,}429... \Rightarrow t \approx 0{,}43$ h

b) Dazu muss das Maximum der Funktion f ermittelt werden: Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung f'. Dann berechnet man die Funktionswerte an diesen Stellen und den Randstellen. Die größte dieser Zahlen ist der maximale Funktionswert.

Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann der Graph der Polynomfunktion 3. Grades nur höchstens 2 Extrempunkte haben.

c) Die stärkste Temperaturzunahme erfolgt an der Maximumstelle von f':
$f''(t) = -1{,}08t + 1{,}7$
$-1{,}08t + 1{,}7 = 0 \Rightarrow t = 1{,}57... \approx 1{,}6$

Rund 1,6 Stunden nach Beginn der Therapie ist die Temperaturzunahme am größten.

d) $\overline{f} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 39{,}55... \approx 39{,}6$

Die mittlere Körpertemperatur beträgt rund 39,6 °C.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunktes
b) 1 × C: für die richtige Dokumentation zur Berechnung der maximalen Körpertemperatur
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass der Extremwert der maximalen Körpertemperatur entspricht. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 2. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)
1 × D: für die richtige Begründung
c) 1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermittlung der Wendestelle)
1 × B: für die korrekte Berechnung des Zeitpunktes der maximalen Temperaturzunahme
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Stelle der maximalen Temperaturänderung eine Temperaturzunahme vorliegt. Daher ist eine rechnerische Überprüfung, ob an der berechneten Stelle eine Zu- oder Abnahme erfolgt, nicht erforderlich.)
d) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren Körpertemperatur

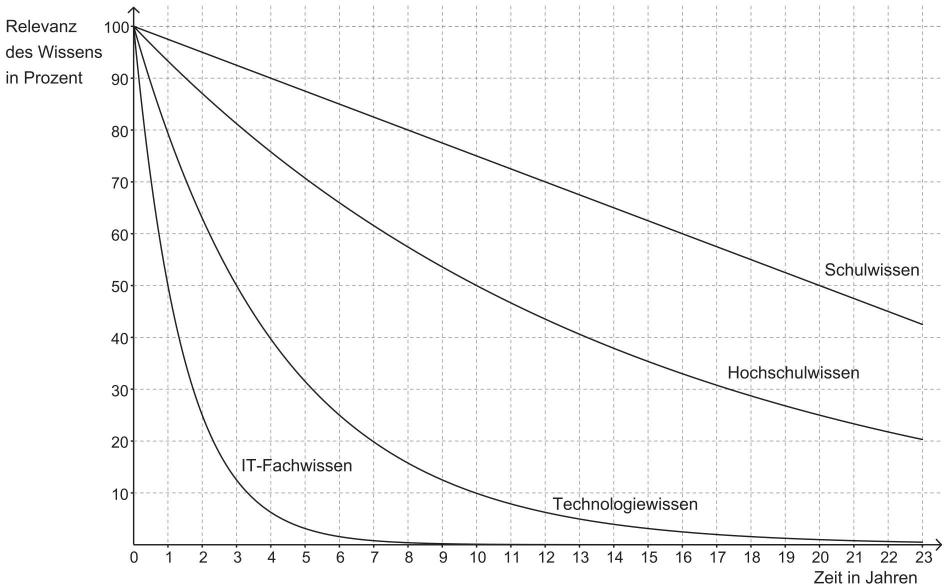
Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Halbwertszeit des Wissens*

Aufgabennummer: A_159

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz"). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



a) Man geht davon aus, dass die Relevanz des beruflichen Fachwissens exponentiell abfällt und eine Halbwertszeit von 5 Jahren hat.

– Zeichnen Sie in die Abbildung der Angabe den Verlauf der Relevanz des beruflichen Fachwissens im Intervall [0; 15] ein.

b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.

– Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz abgesunken ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat.

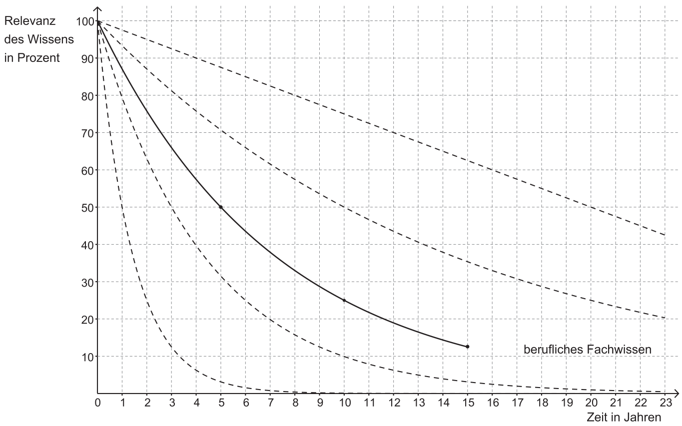
d) Die Relevanz des Schulwissens kann in den ersten Jahrzehnten durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

– Lesen Sie aus der Abbildung in der Angabe die Steigung dieser linearen Funktion ab.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Aufstellen der Exponentialfunktion:

$T(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$

t ... Zeit in Jahren
$T(t)$ ... Relevanz des Technologiewissens zur Zeit t in Prozent der anfänglichen Relevanz des Wissens

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$1 = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} \quad \Rightarrow \quad t = 19{,}9... \approx 20$

Nach rund 20 Jahren ist die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz gesunken.

c) $100 - N(7) = 100 - 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 7} = 38{,}4... \approx 38$

Die Relevanz des Hochschulwissens hat um rund 38 % abgenommen.

d) $k = -\frac{5}{2}$

Lösungsschlüssel

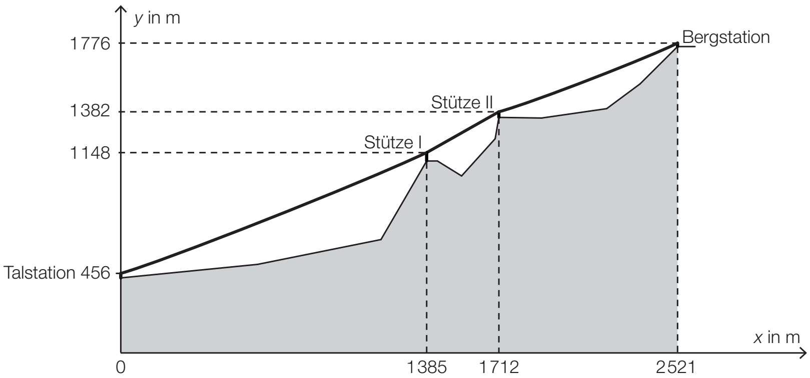
a) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen im Intervall [0; 15] (dabei müssen die Werte nach 5, 10 bzw. 15 Jahren als 50 %, 25 % bzw. 12,5 % erkennbar sein)
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Exponentialfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
d) 1 × C: für das richtige Ablesen der Steigung

Gondelbahn auf den Untersberg*

Aufgabennummer: A_224

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In nachstehender Abbildung ist der Verlauf des Tragseils der Gondelbahn von St. Leonhard auf den Untersberg vereinfacht dargestellt.



x ... horizontaler Abstand von der Talstation in Metern (m)
y ... Höhe über Meeresniveau in m

a) Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1\,776 - 456}{2\,521 - 0} \approx 0{,}52$$

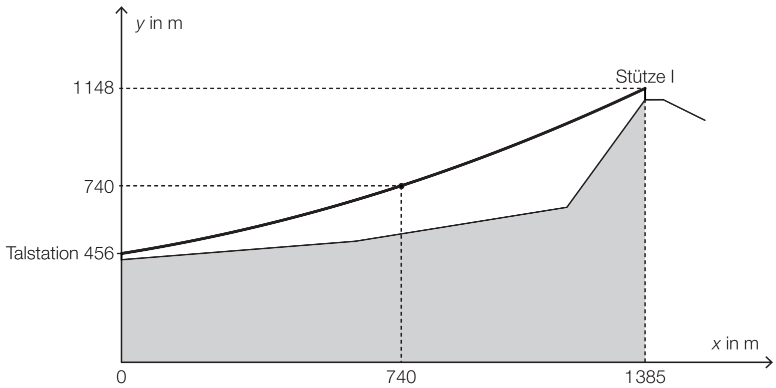
– Beschreiben Sie, was das Ergebnis im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet.

b) Der Seilverlauf zwischen Stütze I und Stütze II wird vereinfacht als linear angenommen.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Steigungswinkel des Seilverlaufs in diesem Abschnitt kleiner als 40° ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Aufgrund des Eigengewichts hängt das Tragseil zwischen der Talstation und der Stütze I durch. Sein Verlauf kann näherungsweise als Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a, b und c ermittelt werden können.
– Ermitteln Sie a, b und c.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Die mittlere Steigung des Tragseils der Gondelbahn auf den Untersberg beträgt rund 0,52.

b) Steigung: $k = \frac{1382 - 1148}{1712 - 1385} = 0{,}7155\ldots$
Steigungswinkel: $\alpha = \arctan(k) = 35{,}58\ldots° \approx 35{,}6°$
Der Steigungswinkel des Seilverlaufs in diesem Abschnitt ist kleiner als 40°.

c) Gleichungssystem:
I. $456 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
II. $740 = a \cdot 740^2 + b \cdot 740 + c$
III. $1148 = a \cdot 1385^2 + b \cdot 1385 + c$

Lösen dieses Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}0001796\ldots \approx 0{,}000180$
$b = 0{,}2508\ldots \approx 0{,}251$
$c = 456$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × D: für die richtige Überprüfung

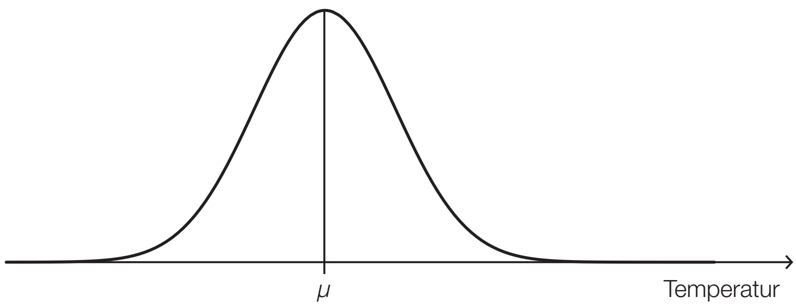
c) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
1 × B: für das richtige Ermitteln der Koeffizienten

Klimawandel und Ozon*

Aufgabennummer: A_225

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Man geht davon aus, dass durch den Klimawandel die Temperaturen steigen. Die mittleren Sommertemperaturen in Wien sind annähernd normalverteilt.*
Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Skizzieren Sie im obigen Diagramm den Graphen der Dichtefunktion einer Normalverteilung, bei der sowohl der Erwartungswert als auch die Standardabweichung größer als in der gegebenen Darstellung sind.

* Vgl. Kromp-Kolb/Formayer (2005). *Schwarzbuch Klimawandel: Wie viel Zeit bleibt uns noch?* Salzburg: Ecowin. S. 53–55.

b) Bei einer Messstation im Bereich des südlichen Polarkreises kann die Ozonmenge pro Quadratmeter in Abhängigkeit von der Zeit für einen bestimmten Zeitraum näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}9917^t$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Ozonmenge pro Quadratmeter zur Zeit t
N_0 ... Ozonmenge pro Quadratmeter zur Zeit $t = 0$

– Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die Ozonmenge pro Quadratmeter jährlich abnimmt.

Die Gleichung $0{,}5 = 0{,}9917^t$ wird gelöst.

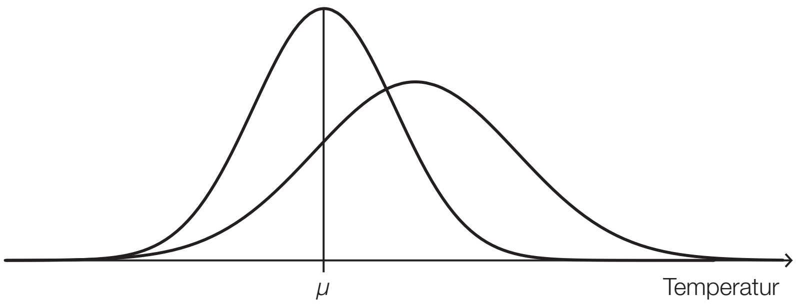
– Beschreiben Sie die Bedeutung der Lösung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



b) $1 - 0{,}9917 = 0{,}0083$
Die Ozonmenge pro Quadratmeter nimmt jährlich um 0,83 % ab.

Zur berechneten Zeit t hat sich die Ozonmenge pro Quadratmeter halbiert (Halbwertszeit).

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für die richtige Darstellung der Erhöhung des Erwartungswertes (Maximumstelle weiter rechts)
1 × A2: für die richtige Darstellung der Erhöhung der Standardabweichung (Maximalwert niedriger und Kurve breiter)

b) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der jährlichen Abnahme in Prozent
1 × C2: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

Section-Control*

Aufgabennummer: A_226

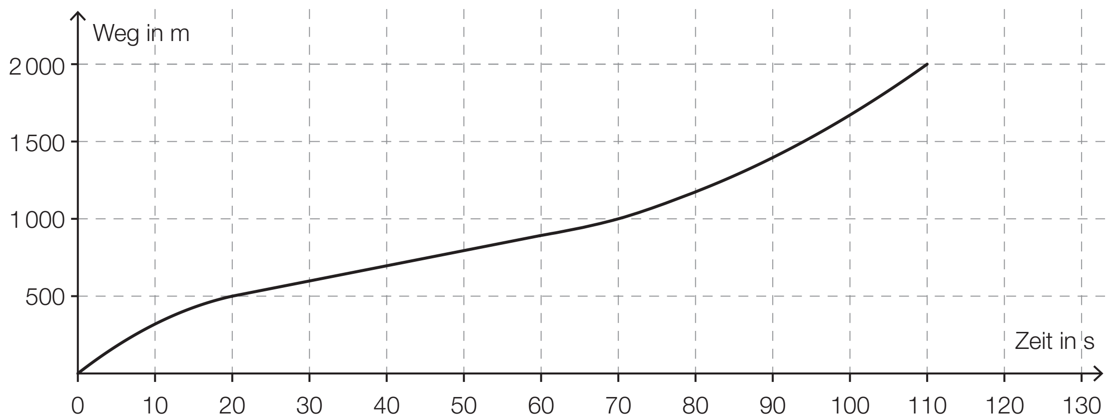
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Section-Control bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.

a) In einem 6 km langen Baustellenbereich wird eine Section-Control errichtet.
Es gilt eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 60 km/h.
Jemand behauptet: „Wenn ich die zulässige Höchstgeschwindigkeit im gesamten Baustellenbereich um 10 % überschreite, dann verkürzt sich meine Fahrzeit im Baustellenbereich um 10 %."

– Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

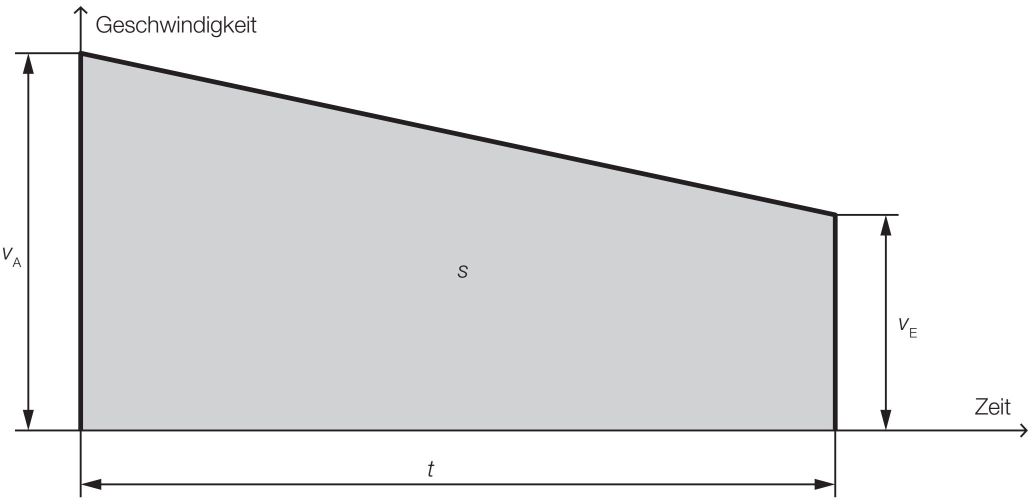
b) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeuges in einem überprüften Bereich dargestellt.



– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte.
– Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Fahrzeug fährt durch einen Bereich, der durch eine Section-Control überwacht wird. Seine Geschwindigkeit nimmt auf diesem Streckenabschnitt linear ab.



Die Endgeschwindigkeit v_E, die Fahrzeit t und der zurückgelegte Weg s sind bekannt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit v_A des Fahrzeugs:

v_A = ____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $s = 6$ km

$v_1 = 60$ km/h: $t_1 = \frac{s}{v_1} = 0{,}1$ h

$v_2 = 66$ km/h: $t_2 = \frac{s}{v_2} = 0{,}\overline{09}$ h

90 % von 0,1 h sind exakt 0,09 h. Das ist weniger als t_2.

b) $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1\,000 \text{ m}}{70 \text{ s}} = 14{,}285\ldots \text{ m/s} \approx 14{,}29 \text{ m/s}$

Die Fahrzeit für die erste Weghälfte beträgt 70 Sekunden. Die Fahrzeit für die zweite Weghälfte beträgt nur 40 Sekunden. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte geringer.

c) Der Flächeninhalt des Trapezes entspricht dem zurückgelegten Weg: $s = \frac{v_A + v_E}{2} \cdot t$.

$v_A = 2 \cdot \frac{s}{t} - v_E$

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte
1 × D: für eine richtige Argumentation

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Blutkreislauf*

Aufgabennummer: A_227

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Blut versorgt die Organe des menschlichen Körpers mit Sauerstoff. Das Herz pumpt das Blut in einem Kreislaufsystem durch den Körper.

a) Im Blut gibt es 3 verschiedene Arten von Blutzellen. Ein erwachsener Mensch hat ca. 5 Liter Blut im Körper. Diese 5 Liter enthalten ca. $25 \cdot 10^{12}$ rote Blutkörperchen, ca. $15 \cdot 10^{11}$ Blutplättchen und ca. $3 \cdot 10^{10}$ weiße Blutkörperchen.

– Berechnen Sie, wie viele Blutzellen (rote Blutkörperchen, Blutplättchen und weiße Blutkörperchen zusammen) sich in 1 Kubikmillimeter Blut befinden.

b) Die Pumpleistung des Herzens (in Litern pro Minute) kann in Abhängigkeit vom Alter (in Jahren) annähernd durch eine lineare Funktion P beschrieben werden. Sie beträgt bei 20-jährigen Personen 5 Liter pro Minute und bei 70-jährigen Personen 2,5 Liter pro Minute.

– Stellen Sie eine Funktionsgleichung von P auf.
– Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

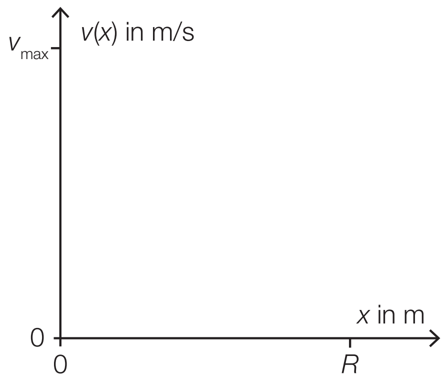
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Betrachtet man den Querschnitt eines Blutgefäßes vereinfacht als Kreis, so lässt sich die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in Blutgefäßen näherungsweise durch die Funktion v beschreiben:

$v(x) = v_{max} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)$ mit $0 \leq x \leq R$

x ... Abstand von der Mitte des Blutgefäßes in Metern (m)
$v(x)$ ... Strömungsgeschwindigkeit des Blutes im Abstand x in m/s
v_{max} ... maximale Geschwindigkeit des Blutes in Metern pro Sekunde (m/s) mit $v_{max} > 0$
R ... Radius des Blutgefäßes in m

– Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion v in der nachstehenden Abbildung.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Umwandlung: 5 L = $5 \cdot 10^6$ mm^3
Blutzellen in $5 \cdot 10^6$ mm^3: $25 \cdot 10^{12} + 15 \cdot 10^{11} + 3 \cdot 10^{10} = 2{,}653 \cdot 10^{13}$
Anzahl der Blutzellen pro mm^3: $\frac{2{,}653 \cdot 10^{13}}{5 \cdot 10^6} = 5{,}306 \cdot 10^6$

In 1 Kubikmillimeter Blut befinden sich rund 5,3 Millionen Blutzellen.

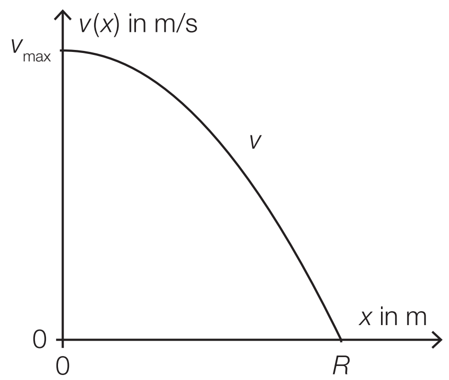
b) $P(t) = k \cdot t + d$

t … Alter in Jahren
$P(t)$ … Pumpleistung des Herzens im Alter t in Litern pro Minute

$k = -\frac{2{,}5}{50} = -0{,}05$
$d = 5 - (-0{,}05) \cdot 20 = 6$
$P(t) = -0{,}05 \cdot t + 6$

Pro Lebensjahr nimmt die Pumpleistung des Herzens um 0,05 Liter pro Minute ab.

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Umwandlung von 5 Litern in mm^3
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der Blutzellen pro mm^3

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
1 × C: für die richtige Interpretation des Wertes der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × A: für das richtige Skizzieren des Funktionsgraphen (Graph einer nach unten offenen quadratischen Funktion mit den richtigen Funktionswerten an den Stellen 0 und R)

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Batterien*

Aufgabennummer: A_228

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Unternehmen produziert Batterien.

a) Ein Händler kauft Batterien bei diesem Unternehmen und erhält die Information, dass erfahrungsgemäß 2 % der gelieferten Batterien defekt sind.

Der Händler entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 40 Batterien.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 der entnommenen Batterien defekt sind.

b) Für den Versand der Batterien an Einzelhändler werden diese jeweils in 4er-Packungen verpackt. Ein Einzelhändler erhält eine Lieferung von a 4er-Packungen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie defekt ist, beträgt p.

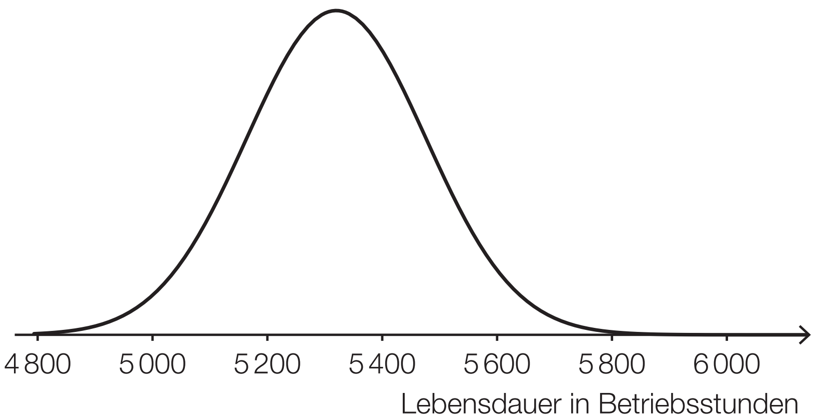
– Beschreiben Sie, was mit dem Ausdruck $4 \cdot a \cdot p$ in diesem Sachzusammenhang berechnet wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Das Unternehmen gibt an, dass die Lebensdauer der Batterien annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5\,320$ Betriebsstunden und der Standardabweichung $\sigma = 156$ Betriebsstunden ist.

– Berechnen Sie dasjenige symmetrische Intervall um μ, in dem die Lebensdauer einer zufällig ausgewählten Batterie mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion dieser Normalverteilung dargestellt.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Batterie eine Lebensdauer von maximal 5200 Betriebsstunden hat.

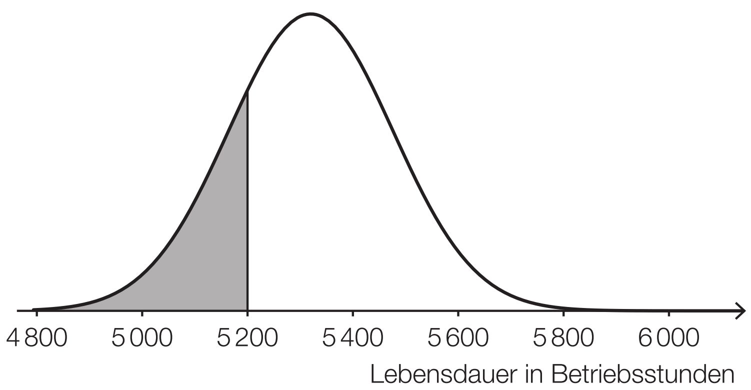
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Binomialverteilung: $n = 40$, $p = 0{,}02$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \leq 2) = 0{,}95432... \approx 95{,}43\ \%$

b) Der angegebene Ausdruck gibt den Erwartungswert für die Anzahl der defekten Batterien in dieser Lieferung an.

c) Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad [5\,063{,}4;\ 5\,576{,}6]$



Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung in diesem Sachzusammenhang

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Intervalls
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Am Fluss*

Aufgabennummer: A_229

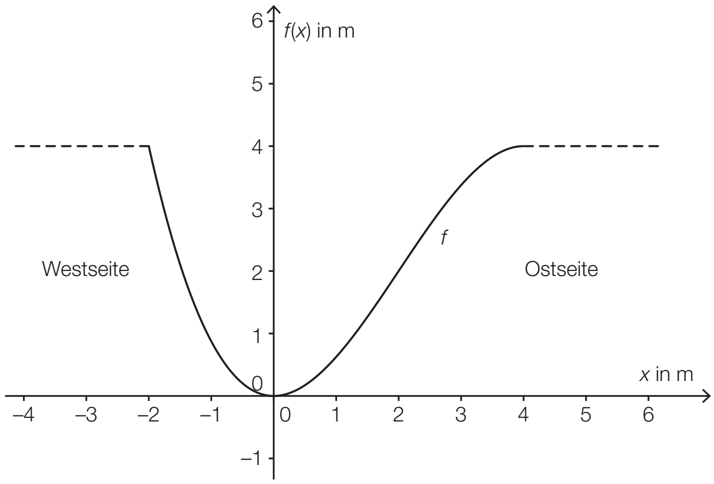
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Das Querschnittsprofil eines künstlichen Flusslaufes kann annähernd durch den Graphen der Polynomfunktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \quad \text{mit} \quad -2 \leq x \leq 4$$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in Metern (m)

Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Berechnen Sie diejenige Stelle, an der das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten ansteigt.

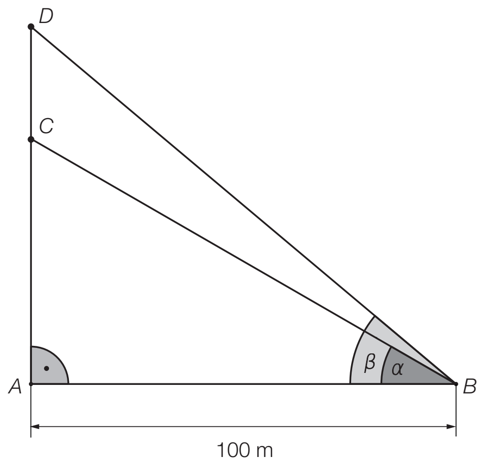
Gegeben ist das folgende Integral:

$$\int_{-2}^{4} (4 - f(x))\,\mathrm{d}x$$

– Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mithilfe dieses Integrals berechnet werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein von einem Punkt *A* senkrecht aufsteigender Ballon wird von einem Punkt *B* am Flussufer unter dem Höhenwinkel $\alpha = 30°$ gesehen. Etwas später erscheint der Ballon unter dem Höhenwinkel $\beta = 40°$ (siehe nachstehende Skizze).



– Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{CD}$.

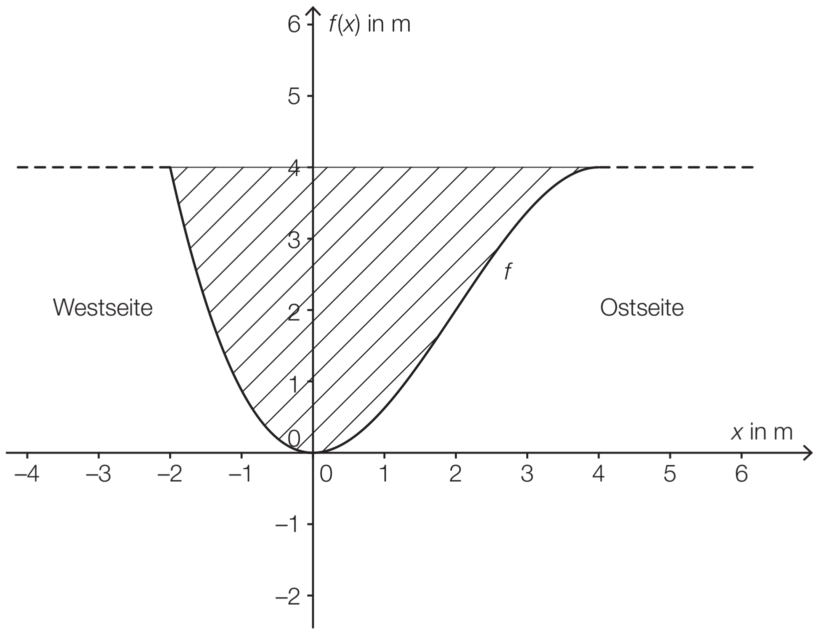
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $f''(x) = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2}$

$0 = -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2$

An der Stelle $x = 2$ steigt das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten an.



b) $\overline{CD} = \overline{AB} \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$
$\overline{CD} = 26{,}1\dots \text{ m} \approx 26 \text{ m}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wendestelle der Funktion f
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass der Anstieg des Querschnittsprofils an der Ostseite an der Wendestelle am stärksten ist. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)
1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Fläche

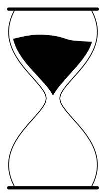
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{CD}$

Wellness*

Aufgabennummer: A_144

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

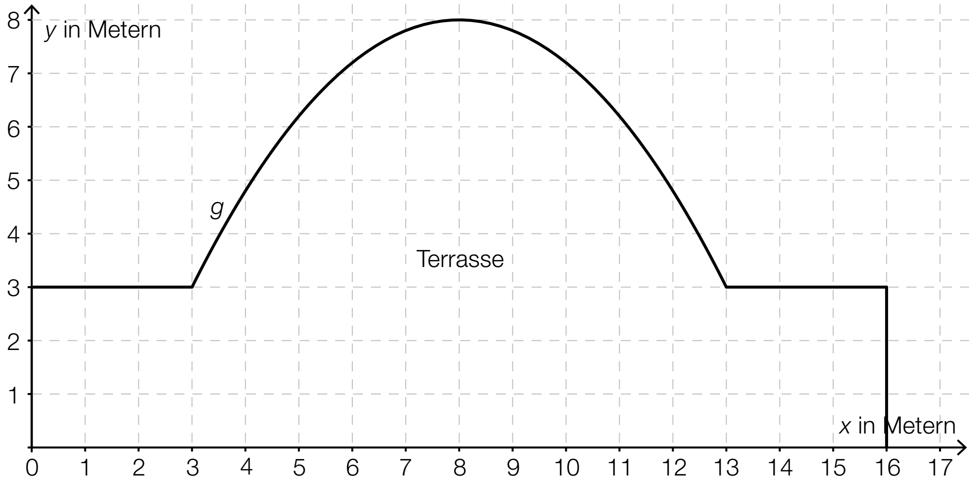
a) In Saunen werden zur Zeitmessung meist Sanduhren verwendet.
Der Sand in einer solchen Sanduhr benötigt 15 Minuten, bis er von oben nach unten vollständig durchgerieselt ist. Pro Minute rieseln 4 Gramm Sand von oben nach unten.
Die gesamte Sandmenge befindet sich zu Beginn (t = 0) im oberen Teil der Sanduhr (siehe nebenstehende Skizze).



– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen linearen Funktion, die der Zeit t in Minuten die Sandmenge im oberen Teil der Sanduhr in Gramm zuordnet.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im Außenbereich einer Sauna wird eine neue Terrasse mit folgender Grundfläche geplant (siehe Grafik):



In dem gegebenen Koordinatensystem wird die Rundung der Terrasse im Intervall [3; 13] durch den Graphen einer Funktion g beschrieben.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts der Grundfläche der Terrasse, wenn die Funktion g bekannt ist.

A = ____

Für die Verlegung von Sandsteinfliesen auf der Terrasse werden 90 m² Fliesen eingekauft. Die Sandsteinfliesen kosten netto (ohne 20 % Umsatzsteuer) pro Quadratmeter € 56.

– Berechnen Sie die Gesamtkosten für die Sandsteinfliesen inklusive Umsatzsteuer, wenn ein Preisnachlass von 3 % gewährt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $s(t) = -4 \cdot t + 60$

t ... Zeit in min
$s(t)$ ... Sandmenge zur Zeit t in g

b) $A = 18 + \int_3^{13} g(x)\,\mathrm{d}x$

$90 \cdot 56 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}97 = 5\,866{,}56$

Die Gesamtkosten betragen € 5.866,56.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × B: für die richtige Berechnung der Gesamtkosten

Wandern*

Aufgabennummer: A_089

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Um die Gehzeit für eine Wanderung zu ermitteln, kann die folgende Faustregel angewendet werden:
„Die Höhendifferenz in Metern dividiert man durch 400, die Horizontalentfernung in Kilometern dividiert man durch 4.
Addiert man diese beiden Ergebnisse, so erhält man die Gehzeit in Stunden."

1) Übertragen Sie diese Faustregel in eine Formel für die Gehzeit t. Verwenden Sie dabei die folgenden Bezeichnungen:

h ... Höhendifferenz in m
x ... Horizontalentfernung in km
t ... Gehzeit in h

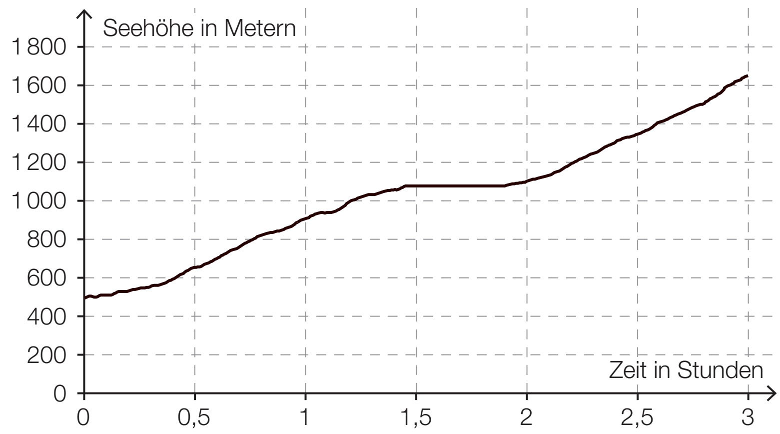
$t =$ ____________________________________

Jemand legt bei einer Wanderung eine Horizontalentfernung von 6,7 km zurück und benötigt dafür eine Gehzeit von 3 h 15 min.

2) Berechnen Sie die dabei überwundene Höhendifferenz mithilfe der angegebenen Faustregel.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung ist der Höhenverlauf während einer 3-stündigen Wanderung dargestellt.

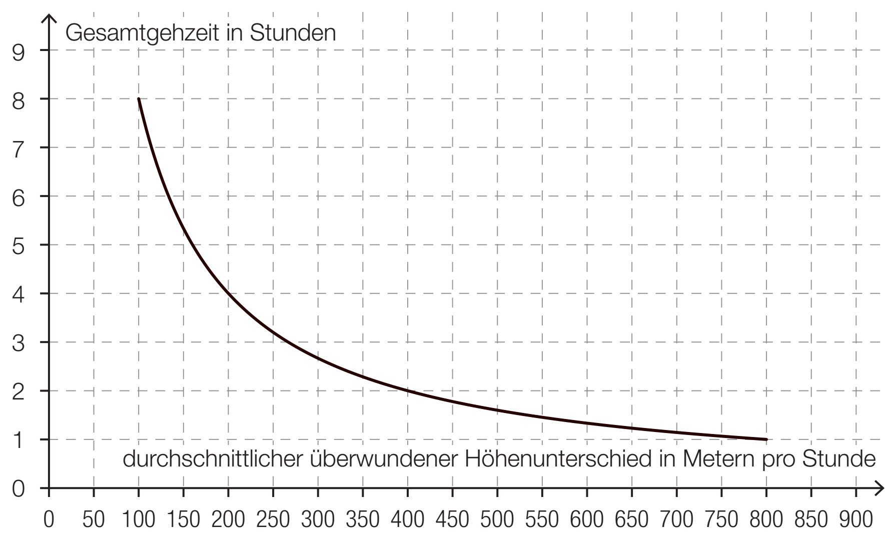


1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Seehöhe in Abhängigkeit von der Zeit für die gesamte Wanderung. Geben Sie das Ergebnis mit der zugehörigen Einheit an.

Jemand behauptet: „Nach etwa 1,5 Stunden wurde eine Pause eingelegt. Das erkennt man daran, dass der Graph während der Pause waagrecht verläuft."

2) Argumentieren Sie, dass diese Behauptung nicht zwingend richtig sein muss.

c) Bei der Besteigung eines bestimmten Berges ist die Gesamtgehzeit indirekt proportional zu dem durchschnittlichen überwundenen Höhenunterschied in Metern pro Stunde (siehe nachstehende Abbildung).



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, welcher Höhenunterschied bei dieser Besteigung insgesamt überwunden werden muss.

Möglicher Lösungsweg

a1) $t = \frac{h}{400} + \frac{x}{4}$

a2) $3{,}25 = \frac{h}{400} + \frac{6{,}7}{4} \quad \Rightarrow \quad h = 630$

Gemäß der Faustregel wird bei dieser Wanderung eine Höhendifferenz von 630 m überwunden.

b1) $\frac{1\,650 - 500}{3} = 383{,}33...$

Die mittlere Änderungsrate beträgt rund 383 m/h.

Toleranzbereich: [360 m/h; 400 m/h]

b2) Es kann auch sein, dass sich der Wanderer / die Wanderin auf konstanter Höhe („eben“) bewegt hat.

c1) Ablesen der Koordinaten eines beliebigen Punktes des Funktionsgraphen, z. B. (800|1): Es werden insgesamt 800 Höhenmeter überwunden.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Übertragen der Faustregel in eine Formel

a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Höhendifferenz

b1) 1 × C: für das richtige Ermitteln der mittleren Änderungsrate unter Angabe der Einheit im Toleranzbereich [360 m/h; 400 m/h]

b2) 1 × D: für die richtige Argumentation

c1) 1 × C: für das richtige Ablesen

Leuchtturm*

Aufgabennummer: A_102

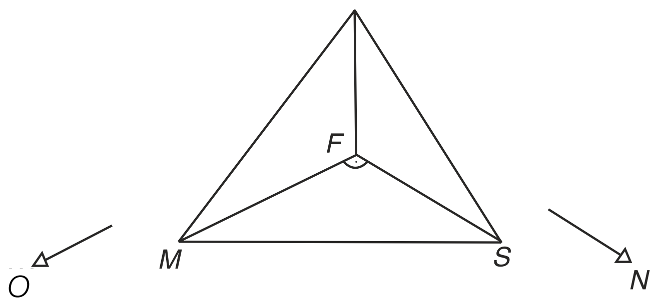
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Schülergruppe besucht einen Leuchtturm.

a) Eine Schülergruppe soll im Rahmen des Projektunterrichts die Höhe der Leuchtturmspitze über dem Meeresspiegel bestimmen. Dabei gehen die Schüler/innen folgendermaßen vor: Mit einem gecharterten Motorboot steuern sie mit 10 km/h geradlinig auf die Insel zu. Die Gruppe sieht die Leuchtturmspitze der Insel unter dem Höhenwinkel α, 1 Minute später unter dem Höhenwinkel β.

– Erstellen Sie eine Skizze des Sachverhalts, der man die gegebenen Größen entnehmen kann.

b) Von der Spitze (*Sp*) des Leuchtturms in 108 Metern Höhe (*h*) über dem Meeresspiegel sieht man eine Motoryacht (*M*) im Osten unter dem Tiefenwinkel von 38,45° und ein Segelboot (*S*) in nördlicher Richtung unter dem Tiefenwinkel von 27,73°.



F ... Fußpunkt des Leuchtturms
O ... Osten
N ... Norden

– Interpretieren Sie die obenstehende Abbildung, indem Sie die gegebenen Größen in die Abbildung eintragen.
– Berechnen Sie die Entfernung der beiden Boote zueinander zum Zeitpunkt der Beobachtung.

c) Der Lehrer will die Schülergruppe testen und behauptet: „Wenn wir unsere Entfernung zum Fußpunkt des Leuchtturms verdoppeln, halbiert sich der Höhenwinkel, unter dem wir die Leuchtturmspitze sehen.“

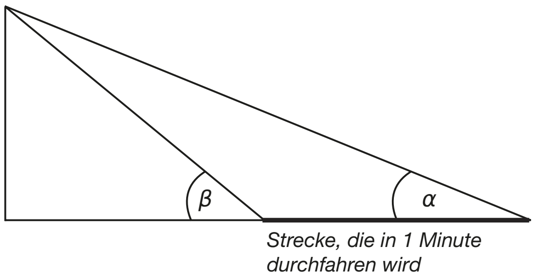
– Erklären Sie, warum die Behauptung des Lehrers richtig bzw. falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

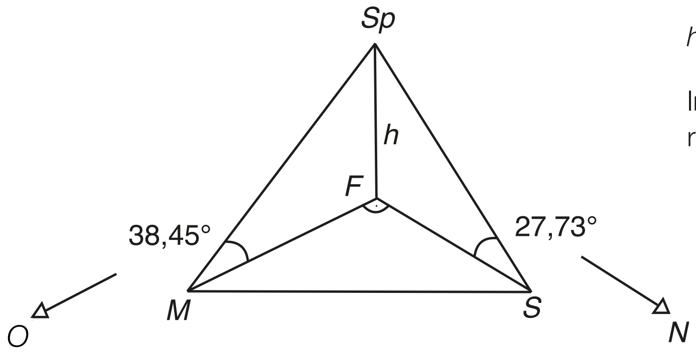
* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a)



b)



h ... Höhe des Leuchtturms

In der hinteren Ecke F sind drei rechte Winkel.

$h = 108$ m

Entfernung $\overline{MF}$: $\tan 38{,}45° = \frac{108}{\overline{MF}}$ $\overline{MF} = 136{,}018$

Entfernung $\overline{SF}$: $\tan 27{,}73° = \frac{108}{\overline{SF}}$ $\overline{SF} = 205{,}448$

$\overline{MS} = \sqrt{(\overline{MF})^2 + (\overline{SF})^2} = 246{,}393$

Entfernung der beiden Boote: 246 m

c) $\tan \alpha = GK/AK$
$GK/(2AK) = (\tan \alpha)/2 \neq \tan (\alpha/2)$

Auch andere logisch richtige Argumentationen sind zulässig.

Lösungsschlüssel

a) 1 x A für die richtige Erstellung und Beschriftung der Skizze
b) 1 x C für die richtige Beschriftung der Skizze
1 x A für den richtigen Ansatz mit Winkelfunktionen und Satz von Pythagoras
1 x B für die korrekte Berechnung
c) 1 x D für die logisch richtige Argumentation

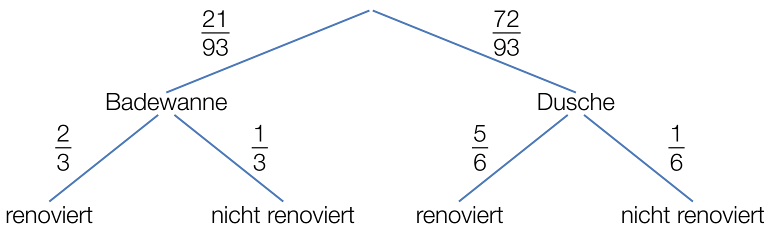
Hotel

Ein bestimmtes Hotel kann 93 Zimmer vermieten.

a) In dem Hotel gibt es 1-Bett-Zimmer und 2-Bett-Zimmer. Insgesamt verfügt das Hotel über 174 Betten.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl der 1-Bett-Zimmer und der Anzahl der 2-Bett-Zimmer.
2) Berechnen Sie die Höhe der Einnahmen bei voller Auslastung pro Nacht für den Fall, dass die Übernachtung inkl. Frühstück im 1-Bett-Zimmer € 90 und im 2-Bett-Zimmer € 75 pro Person kostet.

b) Die Hotelzimmer wurden teilweise renoviert. Bei einer Onlinebuchung wird einem Gast ein Zimmer zufällig zugewiesen. Das nachstehende Baumdiagramm zeigt, mit welcher Wahrscheinlichkeit das zugeteilte Zimmer mit einer Badewanne bzw. mit einer Dusche ausgestattet ist und mit welcher Wahrscheinlichkeit das Zimmer renoviert bzw. nicht renoviert worden ist.



1) Kreuzen Sie die richtige Aussage an. *[1 aus 5]*

$P(\text{„renoviertes Zimmer“}) = \frac{7}{31} \cdot \frac{2}{3} + \frac{24}{31} \cdot \frac{5}{6}$	☐
$P(\text{„nicht renoviertes Zimmer“}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$	☐
$P(\text{„renoviertes Zimmer mit Badewanne“}) = \frac{2}{3}$	☐
$P(\text{„renoviertes Zimmer mit Badewanne oder Dusche“}) = 1$	☐
$P(\text{„nicht renoviertes Zimmer mit Dusche“}) = 1 - \frac{72}{93} \cdot \frac{5}{6}$	☐

2) Berechnen Sie mithilfe des Baumdiagramms die Anzahl der renovierten Zimmer.

c) Erfahrungsgemäß nehmen 55 % der Gäste Vollpension in Anspruch.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 40 zufällig ausgewählten Gästen mehr als 20 und weniger als 25 Personen Vollpension in Anspruch nehmen.

Möglicher Lösungsweg

a1) x … Anzahl der 1-Bett-Zimmer
y … Anzahl der 2-Bett-Zimmer

$$x + y = 93$$
$$x + 2 \cdot y = 174$$

a2) Berechnung der Anzahl der Zimmer: $y = 81$ und $x = 12$
$12 \cdot 90 + 81 \cdot 2 \cdot 75 = 13\,230$
Die Einnahmen bei voller Auslastung pro Nacht betragen € 13.230.

b1)

$P(\text{„renoviertes Zimmer“}) = \frac{7}{31} \cdot \frac{2}{3} + \frac{24}{31} \cdot \frac{5}{6}$	☒

b2) Anzahl der renovierten Zimmer mit Badewanne: $21 \cdot \frac{2}{3} = 14$

Anzahl der renovierten Zimmer mit Dusche: $72 \cdot \frac{5}{6} = 60$

Es wurden 74 Zimmer renoviert.

c1) Binomialverteilung mit $n = 40$, $p = 0{,}55$
X ... Anzahl der Gäste, die Vollpension in Anspruch nehmen

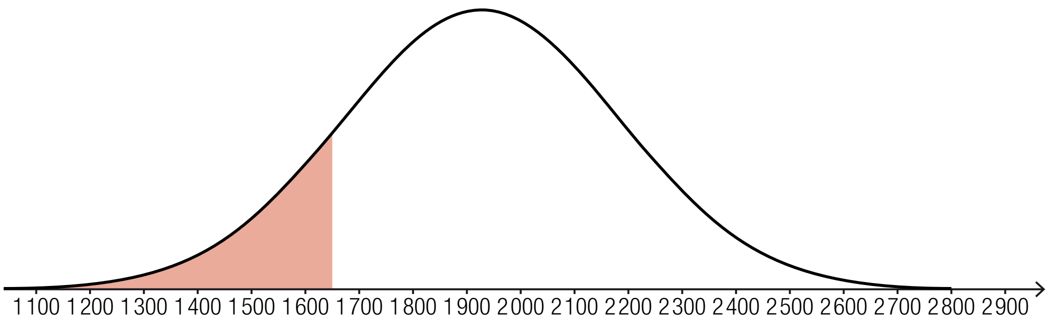
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(20 < X < 25) = 0{,}470... \approx 47\ \%$

Freizeitparadies Schöckl

a) Die jährliche Sonnenscheindauer am Schöckl, dem Hausberg von Graz, ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 1 927 Stunden pro Jahr und der Standardabweichung σ = 258 Stunden pro Jahr.

1) Ermitteln Sie dasjenige um den Erwartungswert symmetrische Intervall, in dem die jährliche Sonnenscheindauer mit 90%iger Wahrscheinlichkeit liegt.

2) Interpretieren Sie die in der nachstehenden Grafik gekennzeichnete Fläche unter dem Graphen der Dichtefunktion im gegebenen Sachzusammenhang.



b) Die Flughöhe eines bestimmten Paragleiters, der vom Schöckl startet, kann näherungsweise durch die Polynomfunktion H modelliert werden.

$H(t) = -0{,}007254 \cdot t^4 + 0{,}5245 \cdot t^3 - 13{,}101 \cdot t^2 + 95{,}3 \cdot t + 1\,440$ mit $2 \leq t \leq 20$

t … Zeit in min mit $t = 0$ für den Zeitpunkt des Starts
$H(t)$ … Flughöhe zur Zeit t in m

1) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Paragleiter am schnellsten an Höhe verliert.

c) An einem bestimmten Sommertag fahren sowohl Erwachsene als auch Kinder mit dem *Hexenexpress*, einer Rodelbahn am Schöckl.

a … Anzahl der verkauften Erwachsenentickets
b … Anzahl der verkauften Kindertickets
u … Preis für ein Erwachsenenticket in Euro
v … Preis für ein Kinderticket in Euro

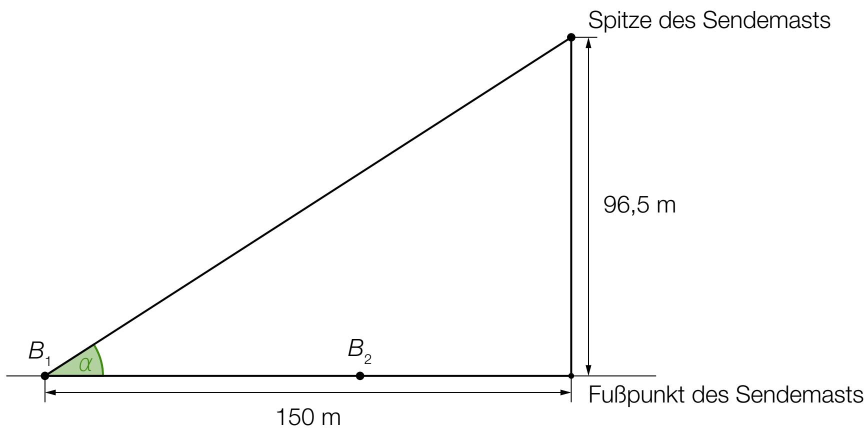
1) Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{b \cdot v}{a \cdot u + b \cdot v}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Am darauffolgenden Tag fahren um 35 % mehr Kinder und um 10 % weniger Erwachsene mit dem Hexenexpress.

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Gesamteinnahmen G dieses Tages auf.

$G =$ ______________________________

d) Auf dem Plateau des Schöckls steht ein 96,5 m hoher Sendemast. Auf derselben Horizontalebene liegen auf einer Linie mit dem Fußpunkt des Sendemasts die zwei Beobachtungspunkte B_1 und B_2. Der Beobachtungspunkt B_1 liegt 150 m vom Fußpunkt des Sendemasts entfernt. Die Spitze des Sendemasts erscheint von B_1 unter dem Höhenwinkel α. B_2 liegt zwischen dem Fußpunkt des Sendemasts und B_1 (siehe nachstehende Abbildung).



1) Berechnen Sie die Entfernung vom Fußpunkt des Sendemasts, in der sich der Beobachtungspunkt B_2 befinden muss, damit die Spitze des Sendemasts von dort unter dem Winkel $2 \cdot \alpha$ erscheint.

Möglicher Lösungsweg

a1) Berechnung des symmetrischen Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad [1\,502{,}63;\ 2\,351{,}37]$
Die Sonnenscheindauer liegt mit 90%iger Wahrscheinlichkeit im Intervall [1 502,63; 2 351,37] Stunden.

a2) Die gekennzeichnete Fläche repräsentiert die Wahrscheinlichkeit, dass die jährliche Sonnenscheindauer höchstens 1 650 Stunden beträgt.

b1) $H''(t) = 0$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 13{,}00...$

Der Paragleiter verliert rund 13 min nach dem Start am schnellsten an Höhe.

c1) Der Ausdruck gibt den relativen Anteil der Einnahmen aus dem Verkauf von Kindertickets an den Tagesgesamteinnahmen aus dem Ticketverkauf an.

c2) $G = a \cdot 0{,}9 \cdot u + b \cdot 1{,}35 \cdot v$

d1) $\alpha = \arctan\left(\frac{96{,}5}{150}\right) = 32{,}75\ldots°$

$$x = \frac{96{,}5}{\tan(2 \cdot 32{,}75...°)} = 43{,}959...$$

Der Beobachtungspunkt B_2 ist rund 43,96 m vom Fußpunkt des Sendemasts entfernt.

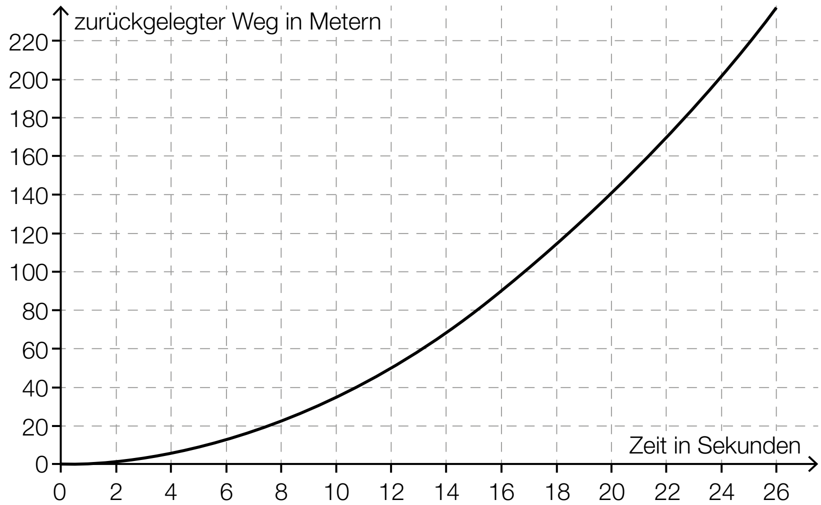
Motorradfahrt

Aufgabennummer: A_163

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Jugendliche fahren mit ihren Motorrädern von Jenbach nach Schwaz.

a) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist der Funktionsgraph für die ersten Sekunden eines Motorradfahrers nach der Abfahrt von Jenbach dargestellt.



– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit in den ersten 20 Sekunden in km/h.

b) Die Geschwindigkeit eines Motorrads kann für eine halbe Stunde Fahrt näherungsweise mit der Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -925 \cdot t^3 + 600 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 15$ mit $0 \leq t \leq 0{,}5$

t ... Zeit in h
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Motorrads zur Zeit t in km/h

– Berechnen Sie den zurückgelegten Weg für diese halbe Stunde.

c) Während der Fahrt muss ein Motorradfahrer eine Vollbremsung durchführen. Der Bremsweg s kann näherungsweise mit folgender Formel berechnet werden:

$s = \frac{v^2}{100}$

s ... Bremsweg in m
v ... Geschwindigkeit zu Beginn der Bremsung in km/h

– Erklären Sie, wie sich der Bremsweg verändert, wenn die Geschwindigkeit zu Beginn der Bremsung verdoppelt wird.

Der Motorradfahrer möchte die Geschwindigkeit v bei einem vorgegebenen Bremsweg s bestimmen.

– Kreuzen Sie die zutreffende Formel an. *[1 aus 5]*

$v = \frac{\sqrt{100}}{s}$	☐
$v = s^2 \cdot 100$	☐
$v = \sqrt{s} \cdot 10$	☐
$v = \frac{s}{\sqrt{100}}$	☐
$v = \sqrt{\frac{s}{100}}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{140 - 0}{20 - 0} = 7$

7 m/s = 7 · 3,6 km/h = 25,2 km/h

Das Motorrad fährt in den ersten 20 Sekunden mit einer mittleren Geschwindigkeit von 25,2 km/h.

b) $\int_0^{0,5} (-925 \cdot t^3 + 600 \cdot t^2 - 32 \cdot t + 15)\,dt = 14{,}0\ldots$

Das Motorrad legt in der halben Stunde rund 14 km zurück.

c) Setzt man in die Formel statt v die doppelt so hohe Geschwindigkeit $2 \cdot v$ ein, ergibt sich:

$s_{neu} = \frac{(2 \cdot v)^2}{100} = \frac{4 \cdot v^2}{100} = 4 \cdot s$

Das bedeutet: Wenn man bei doppelt so hoher Geschwindigkeit bremst, dann vervierfacht sich der Bremsweg.

[...]	
[...]	
$v = \sqrt{s} \cdot 10$	☒
[...]	
[...]	

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 1
b) 1
c) 2

Thema: Physik

Quellen: —

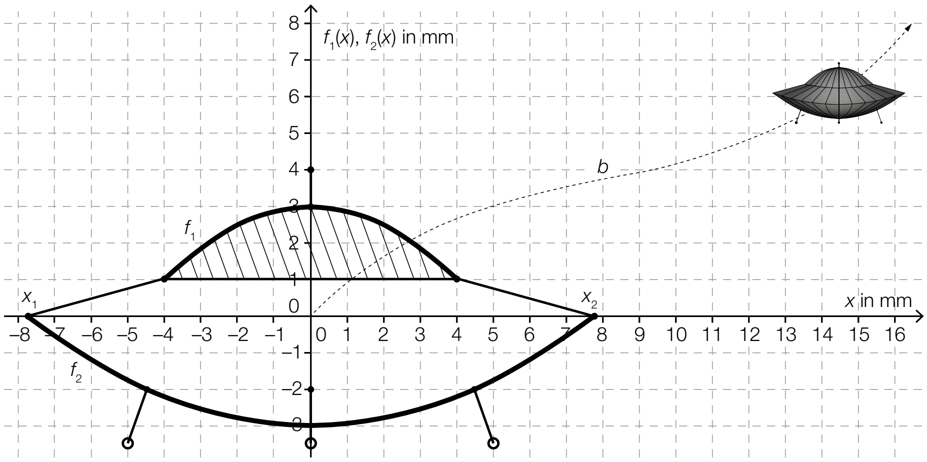
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

UFO

Aufgabennummer: A_188

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für ein Computerspiel wurde ein einfaches UFO gezeichnet. Die Kuppel und der Unterbau werden durch die quadratischen Funktionen f_1 und f_2 modelliert (siehe nachstehende Abbildung).



$f_2(x) = \frac{x^2}{20} - 3$

x, $f_2(x)$ ... Koordinaten in mm

a) – Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Funktionsgleichung von f_1 auf.
– Berechnen Sie den Inhalt der in der obigen Abbildung schraffierten Fläche.

b) – Ermitteln Sie die beiden Nullstellen x_1 und x_2 der Funktion f_2.
– Interpretieren Sie, was durch das Integral $\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet wird.

c) Die Steigung der dargestellten Flugbahn b des UFOs erhält man durch folgende Ableitungsfunktion:

$$b'(x) = \frac{x^2}{80} - \frac{x}{5} + 1$$

– Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der Funktion b.

Folgende Gleichung wurde aufgestellt:

$$\frac{x}{40} - \frac{1}{5} = 0$$

– Interpretieren Sie, was durch die Lösung dieser Gleichung in Bezug auf den Graphen von b bestimmt wird.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f_1(x) = a \cdot x^2 + 3$

$f_1(4) = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 4^2 + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{8}$

$f_1(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^2 + 3$

$2 \cdot \left(\int_0^4 f_1(x)\,\mathrm{d}x - 4\right) = 10{,}66\ldots$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt rund 10,7 mm².

b) $0 = \frac{x^2}{20} - 3 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{60} = \pm 7{,}74\ldots$

Das Integral entspricht dem orientierten Flächeninhalt (in diesem Fall negativ) zwischen x-Achse und dem Funktionsgraphen von f_2.

c) $b(x) = \int\left(\frac{x^2}{80} - \frac{x}{5} + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{240} - \frac{x^2}{10} + x + C$, wobei die Konstante C null ist, da der Graph durch den Koordinatenursprung verläuft.

$b(x) = \frac{x^3}{240} - \frac{x^2}{10} + x$

Die gegebene Gleichung entspricht $b''(x) = 0$. Die Lösung ist die Wendestelle der Funktion b.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Verdoppelungszeit von Bakterien

a) Die Masse eines *Escherichia-coli*-Bakteriums beträgt 10^{-12} g. Die Verdoppelungszeit des Bakteriums beträgt unter bestimmten Voraussetzungen 17 min.

1) Berechnen Sie die Masse in Tonnen, die aus 1 Bakterium dieser Art nach 17 Stunden (theoretisch) entstanden ist.

b) 100 *Lactobacillus-acidophilus*-Bakterien vermehren sich innerhalb von 6 Stunden auf eine Anzahl von 3533 Bakterien.

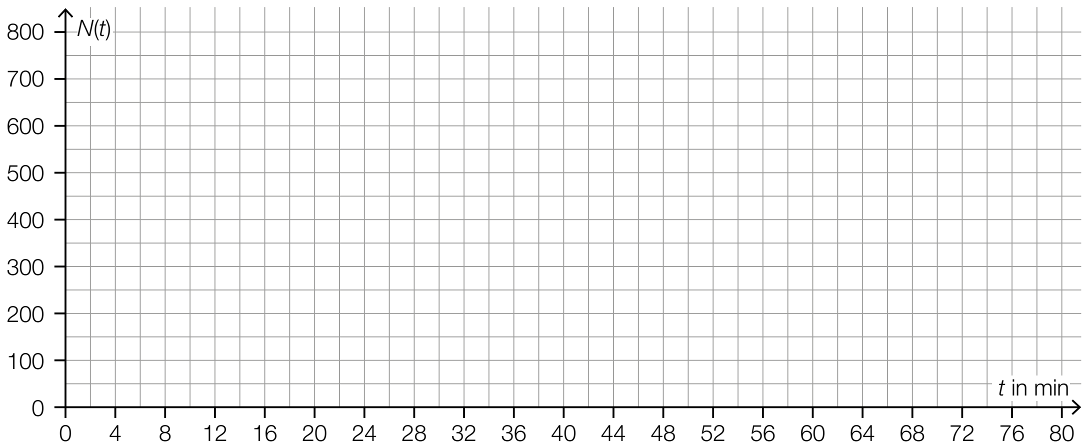
1) Ermitteln Sie unter Annahme eines exponentiellen Wachstums die Verdoppelungszeit in Minuten.

c) Die Verdoppelungszeit des *Streptococcus-lactis*-Bakteriums beträgt 26 min.
Zu Beginn ($t = 0$) sind 100 Bakterien vorhanden.

Die Anzahl der Bakterien soll in Abhängigkeit von der Zeit durch eine Exponentialfunktion N beschrieben werden.

t … Zeit in min
$N(t)$ … Anzahl der Bakterien zur Zeit t

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion N auf.
2) Zeichnen Sie im nachstehenden Diagramm den Graphen von N ein.



Möglicher Lösungsweg

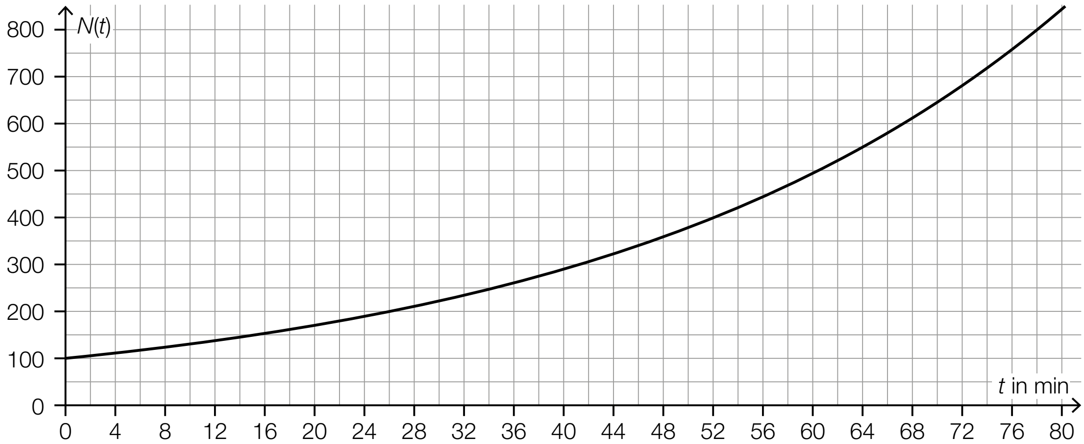
a1) Masse in Gramm: $10^{-12} \cdot 2^{60} \approx 1\,152\,921{,}5$ g
Dies entspricht einer Masse von rund 1,15 t.

b1) $3\,533 = 100 \cdot a^{6 \cdot 60}$
$a = \sqrt[360]{35{,}33} = 1{,}0099...$ (Änderungsfaktor pro min)
$2 = 1{,}0099...^{t_V}$
$t_V = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}0099...)} = 70{,}0...$

Die Verdoppelungszeit beträgt rund 70 min.

c1) $N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{1}{26} \cdot t}$ *oder* $N(t) = 100 \cdot 1{,}0270...^t$

c2)



Brennofen*

Aufgabennummer: A_236

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Keramik-Produzenten werden Krüge hergestellt. Sobald ein Krug aus dem Brennofen genommen wird, beginnt er abzukühlen. Der Temperaturverlauf lässt sich durch die Funktion T beschreiben:

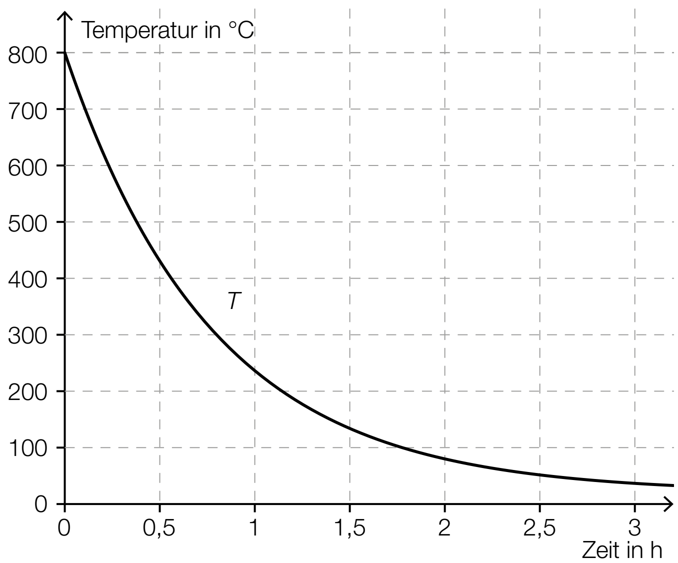
$T(t) = 20 + 780 \cdot e^{-k \cdot t}$

t ... Zeit seit der Entnahme aus dem Brennofen in Stunden (h)
$T(t)$ ... Temperatur des Kruges zur Zeit t in Grad Celsius (°C)
k ... Konstante

a) Ein Krug hat 2 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen eine Temperatur von 80 °C.

– Berechnen Sie die Temperatur des Kruges 5 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen.

b) Der Graph der Funktion T ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Tangente an den Funktionsgraphen, deren Ordinatenabschnitt (Achsenabschnitt auf der vertikalen Achse) 600 beträgt.
– Beschreiben Sie, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird: $\frac{T(3) - T(1)}{2}$

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ihnen wird folgende fehlerhafte Berechnung der Ableitungsfunktion T' vorgelegt:
$T'(t) = 780 \cdot e^{-k \cdot t}$

– Geben Sie an, welche Ableitungsregel hier vermutlich verletzt wurde.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

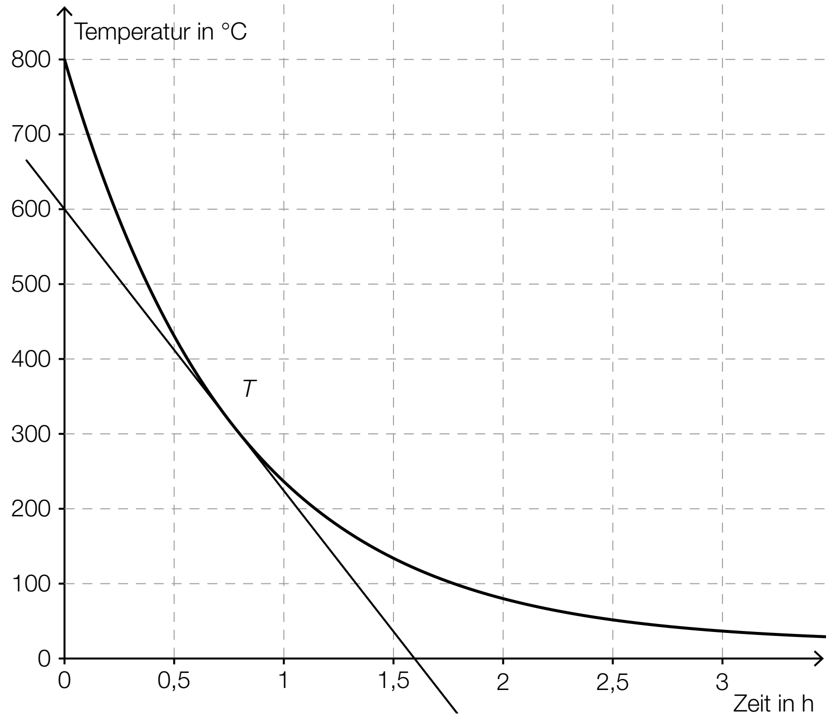
a) $80 = 20 + 780 \cdot e^{-k \cdot 2}$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $k = \frac{1}{2} \cdot \ln(13) = 1{,}2824...$

$T(5) = 21{,}2... \approx 21$

Die Temperatur des Kruges beträgt 5 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen rund 21 °C.

b)



Damit berechnet man die mittlere Änderungsrate der Temperatur im Zeitintervall [1; 3].

c) Die Kettenregel wurde nicht angewendet.

oder:

Die innere Ableitung wurde nicht berücksichtigt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Temperatur

b) 1 × A: für das richtige Skizzieren der Tangente
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

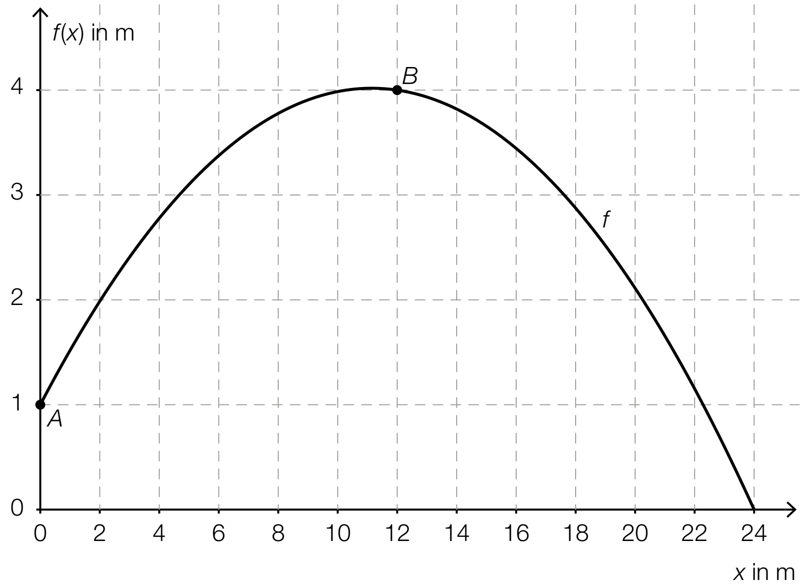
c) 1 × C: für das richtige Angeben der Ableitungsregel oder die richtige Beschreibung

Baseball*

Aufgabennummer: A_237

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Flugbahn eines Baseballs kann näherungsweise durch den Graphen einer Funktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



– Ermitteln Sie den Steigungswinkel der Geraden durch die Punkte A und B.

Es soll diejenige Stelle x_0 ermittelt werden, an der die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Geraden durch die Punkte A und B ist.

– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung, wie man x_0 näherungsweise grafisch ermitteln kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein Baseball-Verein überlegt, Fan-Shirts über eine Online-Plattform zu vertreiben. Die Kosten für die Herstellung eines T-Shirts belaufen sich auf € 6,40. Für Betreuung und Servermiete der Online-Plattform sind monatlich € 570 zu zahlen.

– Stellen Sie die zugehörige lineare Kostenfunktion K auf.

x ... Anzahl der T-Shirts
$K(x)$ ... monatliche Kosten bei x T-Shirts in Euro (€)

Man rechnet damit, dass 75 T-Shirts pro Monat produziert und auch verkauft werden.

– Bestimmen Sie denjenigen Verkaufspreis pro Stück, ab dem die T-Shirts ohne Verlust verkauft werden können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

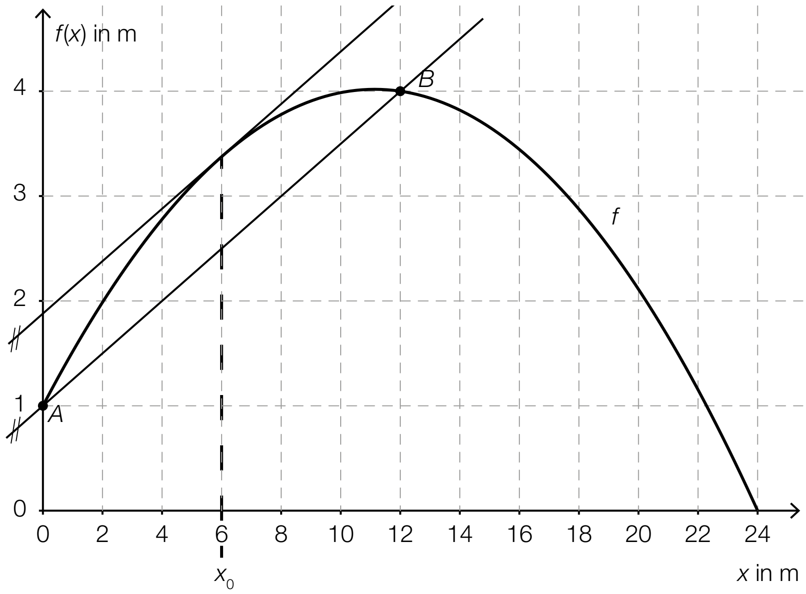
Möglicher Lösungsweg

a) Steigung k der Geraden durch die Punkte A und B:

$k = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Steigungswinkel α:

$\alpha = \arctan(k) = 14{,}036...° \approx 14{,}04°$



b) $K(x) = 6{,}4 \cdot x + 570$

$K(75) = 6{,}4 \cdot 75 + 570 = 1\,050$

$\frac{1\,050}{75} = 14$

Die T-Shirts können ab einem Verkaufspreis von € 14 pro Stück ohne Verlust verkauft werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × A: für das richtige Veranschaulichen

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der linearen Kostenfunktion K
1 × B: für die richtige Berechnung des Verkaufspreises pro Stück

BMB
Bundesministerium
für Bildung

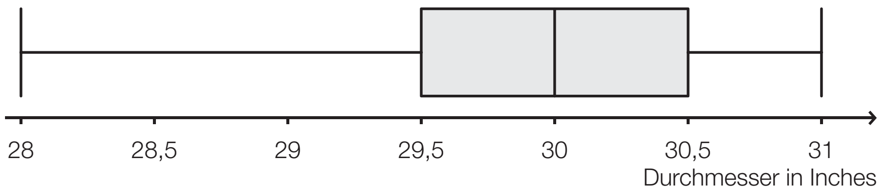
Riesenpizza*

Aufgabennummer: A_238

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In den USA wird die Größe einer Pizza durch ihren Durchmesser (in Inches) angegeben.
Im Folgenden werden Pizzen immer als kreisrund angenommen.

a) Bei 30-Inch-Pizzen verschiedener Lieferanten wurde der tatsächliche Durchmesser bestimmt. Die Messergebnisse sind im folgenden Boxplot zusammengefasst:



– Lesen Sie die Spannweite ab.

b) – Zeigen Sie allgemein, dass der Flächeninhalt einer (kreisrunden) Pizza vervierfacht wird, wenn ihr Durchmesser verdoppelt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

c) Für eine bestimmte Pizzasorte wird der Preis pro Flächeneinheit in Abhängigkeit vom Durchmesser modellhaft durch folgende quadratische Funktion P beschrieben:

$P(d) = 0{,}0003 \cdot d^2 - 0{,}015 \cdot d + 0{,}2619$ mit $8 \leq d \leq 30$

d ... Durchmesser der Pizza in Inches
$P(d)$ ... Preis pro Flächeneinheit einer Pizza mit Durchmesser d in US-Dollar

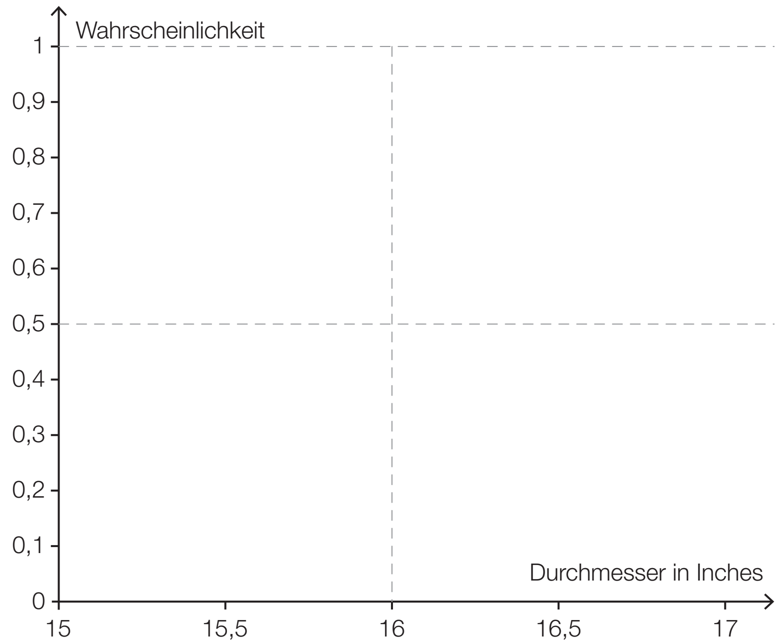
– Ermitteln Sie, für welchen Durchmesser der Preis pro Flächeneinheit am geringsten ist.

– Berechnen Sie, wie viel diese Pizza kostet.

d) Die Durchmesser von 16-Inch-Pizzen eines bestimmten Lieferanten sind annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert $\mu = 16$ Inch und einer Standardabweichung $\sigma = 0{,}3$ Inch.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pizza einen Durchmesser von mindestens 16,2 Inch hat.

– Skizzieren Sie den Graphen der Verteilungsfunktion dieser Normalverteilung in der nachstehenden Abbildung.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Spannweite: 3 Inch

b) Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser d: $A_d = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$

Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser $2d$: $A_{2d} = \frac{4d^2}{4} \cdot \pi = d^2 \cdot \pi = 4 \cdot A_d$

Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.

c) $P'(d) = 0{,}0006 \cdot d - 0{,}015$

$P'(d) = 0 \Rightarrow d = 25$

Die Pizza mit dem geringsten Preis pro Flächeneinheit hat einen Durchmesser von 25 Inch.

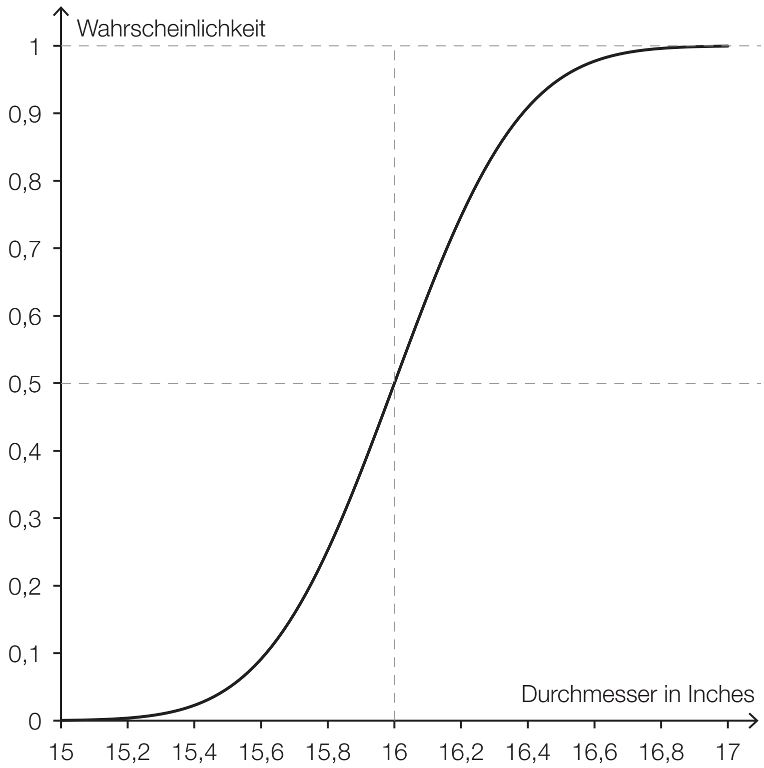
$P(25) = 0{,}0744$

$P(25) \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \pi = 36{,}521\ldots$

Gemäß diesem Modell kostet diese Pizza 36,52 US-Dollar.

d) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \geq 16{,}2) = 0{,}2524\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pizza einen Durchmesser von mindestens 16,2 Inch hat, beträgt rund 25,2 %.



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen der Spannweite

b) 1 × D: für den richtigen allgemeinen Nachweis (Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.)

c) 1 × B1: für die richtige Bestimmung der Extremstelle (Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Minimumstelle handelt, ist nicht erforderlich.)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Preises der Pizza

d) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × A: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet)

Teilchenbeschleuniger*

Aufgabennummer: A_239

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Am Forschungsinstitut CERN wird mithilfe moderner Teilchenbeschleuniger physikalische Grundlagenforschung betrieben. In einem Teilchenbeschleuniger werden elektrisch geladene Teilchen auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt.

a) Die Teilchen bewegen sich in einem ringförmigen Tunnel nahezu mit Lichtgeschwindigkeit. Sie machen dabei in einer Sekunde *a* Umläufe und legen in dieser Zeit rund $3 \cdot 10^8$ m zurück.

– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Länge *u* eines Umlaufs in Kilometern.

$u =$ ____

b) Wenn Teilchen im Teilchenbeschleuniger kollidieren, können neue Teilchen entstehen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kollision ein Teilchen eines bestimmten Typs entsteht, beträgt 3,4 %.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis *E* wird mit $P(E) = \binom{500}{2} \cdot 0{,}034^2 \cdot (1 - 0{,}034)^{498}$ berechnet.

– Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird.
– Berechnen Sie, wie viele dieser Teilchen im Mittel entstehen, wenn 1 000 Kollisionen stattfinden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im Zentrum eines Atoms befindet sich der Atomkern. Vereinfacht können sowohl der Atomkern als auch das gesamte Atom als kugelförmig angenommen werden.
In einer Broschüre wird beschrieben, wie klein ein Atomkern im Vergleich zum gesamten Atom ist: „Hätte ein Atomkern 1 cm Durchmesser, so wäre der Durchmesser des gesamten Atoms 100 m."

– Berechnen Sie den Durchmesser eines Atoms, wenn der Durchmesser des Atomkerns 10^{-14} m beträgt.

Jemand liest die Broschüre und behauptet: „Das Volumen des Atomkerns macht dann 0,01 % des Gesamtvolumens eines Atoms aus."

– Begründen Sie, warum diese Behauptung falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $u = \frac{3 \cdot 10^8}{a \cdot 10^3}$

b) Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei 500 Kollisionen genau 2 Teilchen dieses Typs entstehen.

$1\,000 \cdot 0{,}034 = 34$

Bei 1 000 Kollisionen entstehen im Mittel 34 Teilchen dieses Typs.

c) $\frac{100}{0{,}01} = \frac{d}{10^{-14}} \Rightarrow d = 10^{-10}$
Der Durchmesser des Atoms beträgt 10^{-10} m.

Das Verhältnis der Durchmesser beträgt $1 : 10^4$.
Bei der Berechnung des Volumens tritt die dritte Potenz des Durchmessers auf. Das Verhältnis der Volumina beträgt daher $1 : 10^{12}$. 0,01 % entsprechen dem Verhältnis $1 : 10^4$.

oder:

rechnerisch:
$$\frac{V_{\text{Atomkern}}}{V_{\text{Atom}}} = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot (10^{-14})^3}{\frac{\pi}{6} \cdot (10^{-10})^3} = 10^{-12}$$
Das Verhältnis der Volumina beträgt daher $1 : 10^{12}$. 0,01 % entsprechen dem Verhältnis $1 : 10^4$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

b) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses
1 × B: für die richtige Berechnung des Erwartungswertes

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers
1 × D: für die richtige Begründung (Auch eine Begründung durch Nachrechnen ist als richtig zu werten.)

Marathon*

Aufgabennummer: A_240		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Die Streckenlänge eines Marathons beträgt 42,195 km.

a) Im Laufsport wird als Maß für das Tempo oftmals die *Pace* verwendet. Die für einen Kilometer benötigte Zeit wird dabei in der Schreibweise „Minuten:Sekunden" angegeben. Eine Pace von 5:25 bedeutet beispielsweise, dass eine Strecke von 1 Kilometer Länge in 5 Minuten und 25 Sekunden zurückgelegt wird.

Die Weltrekordhalterin Paula Radcliffe lief ihren schnellsten Marathon in 2 Stunden, 15 Minuten und 25 Sekunden.

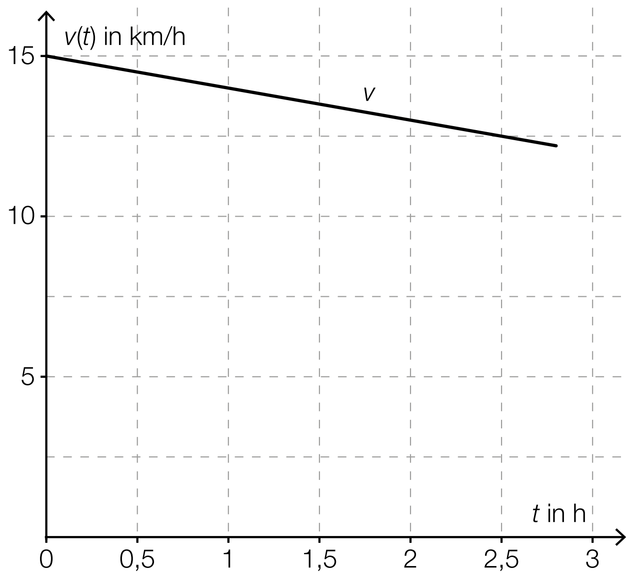
– Berechnen Sie für diesen Lauf ihre mittlere Pace in der beschriebenen Schreibweise.

b) Max und Franz starten gleichzeitig. Max läuft die Marathonstrecke mit einer mittleren Geschwindigkeit von 14 km/h, Franz mit 12 km/h. Max überquert also als Erster der beiden die Ziellinie.

– Berechnen Sie, wie lange Max im Ziel auf Franz warten muss.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der Verlauf der Geschwindigkeit einer Marathonläuferin lässt sich näherungsweise durch eine lineare Funktion v beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Ermitteln Sie aus der obigen Abbildung die Steigung dieser linearen Funktion.
– Interpretieren Sie b in der nachstehenden Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

$$\int_0^b v(t)\,\mathrm{d}t = 42{,}195 \text{ km}$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Gesamtdauer in Sekunden:
$2 \cdot 3600 + 15 \cdot 60 + 25 = 8125$

$\frac{8125\text{ s}}{42{,}195\text{ km}} = 192{,}55\ldots\ \frac{\text{s}}{\text{km}} \Rightarrow$ 3 Minuten 12,55… Sekunden $\approx$ 3:13

Ihre mittlere Pace beträgt 3:13.

b) $\frac{42{,}195\text{ km}}{12\text{ km/h}} - \frac{42{,}195\text{ km}}{14\text{ km/h}} = 0{,}50\ldots\text{ h} \approx 0{,}5\text{ h}$

Max muss im Ziel rund eine halbe Stunde auf Franz warten.

c) $k = \frac{-2{,}5\text{ km/h}}{2{,}5\text{ h}} = -1\text{ km/h}^2$

Das Angeben der Einheit der Steigung ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b ist die Laufzeit für die gesamte Marathonstrecke in Stunden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren Pace in der beschriebenen Schreibweise

b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Wartezeit

c) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der Steigung (Das Angeben der Einheit der Steigung ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.)
1 × C2: für die richtige Interpretation von b im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Blutgruppen*

Aufgabennummer: A_243

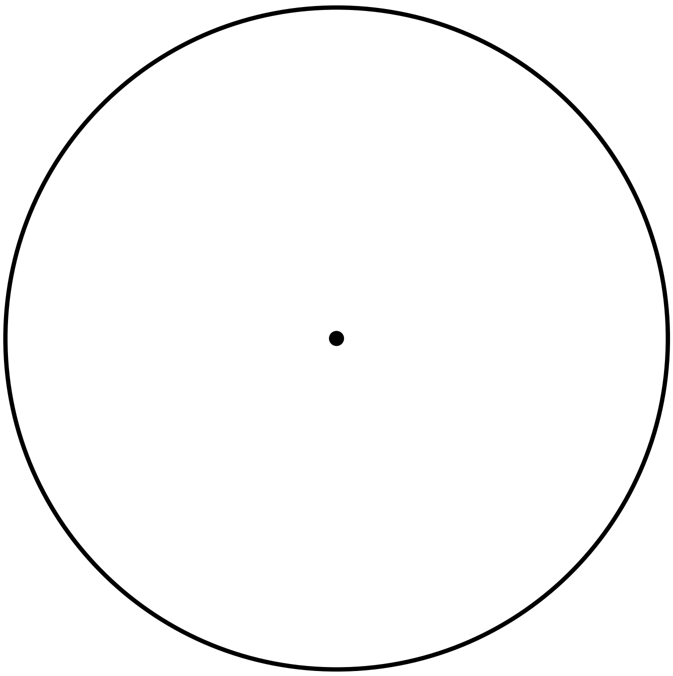
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Nach Karl Landsteiner unterscheidet man vier Blutgruppen: 0, A, B und AB. Diese kommen in Österreich annähernd mit folgender relativer Häufigkeit vor:

Blutgruppe	0	A	B	AB
relative Häufigkeit	37 %	41 %	15 %	7 %

a) Die Verteilung der Blutgruppen in Österreich soll in einem Kreisdiagramm dargestellt werden.

– Berechnen Sie die Winkel der jeweiligen Sektoren.
– Zeichnen Sie die Sektoren in den nachstehenden Kreis ein.

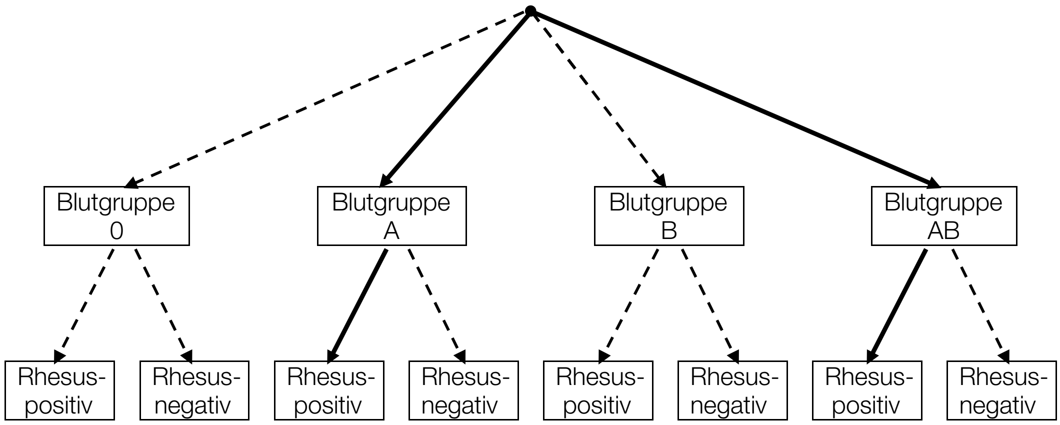


b) – Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer Zufallsstichprobe von 25 Personen in Österreich mindestens 9 Personen die Blutgruppe 0 haben.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Zusätzlich wird je nach Vorliegen eines bestimmten Antigens noch zwischen *Rhesus-positiv* und *Rhesus-negativ* unterschieden. 85 % aller Personen in Österreich sind Rhesus-positiv, alle anderen Rhesus-negativ, wobei die Verteilung bei allen Blutgruppen gleich ist.

Im nachstehenden Baumdiagramm sind alle möglichen Fälle für Blutgruppen mit ihrem Rhesusfaktor aufgelistet.



– Vervollständigen Sie das obige Baumdiagramm, indem Sie die Pfeile mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten beschriften.
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person in Österreich die Blutgruppe B Rhesus-negativ hat.
– Beschreiben Sie, welches Ereignis durch die beiden fett gezeichneten (nicht strichlierten) Pfade angegeben wird.

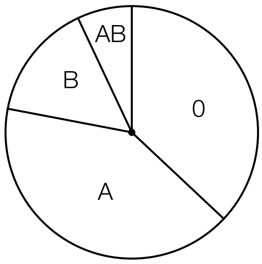
Möglicher Lösungsweg

a) Blutgruppe 0: $\frac{37}{100} \cdot 360° = 133{,}2°$

Blutgruppe A: $\frac{41}{100} \cdot 360° = 147{,}6°$

Blutgruppe B: $\frac{15}{100} \cdot 360° = 54°$

Blutgruppe AB: $360° - 133{,}2° - 147{,}6° - 54° = 25{,}2°$



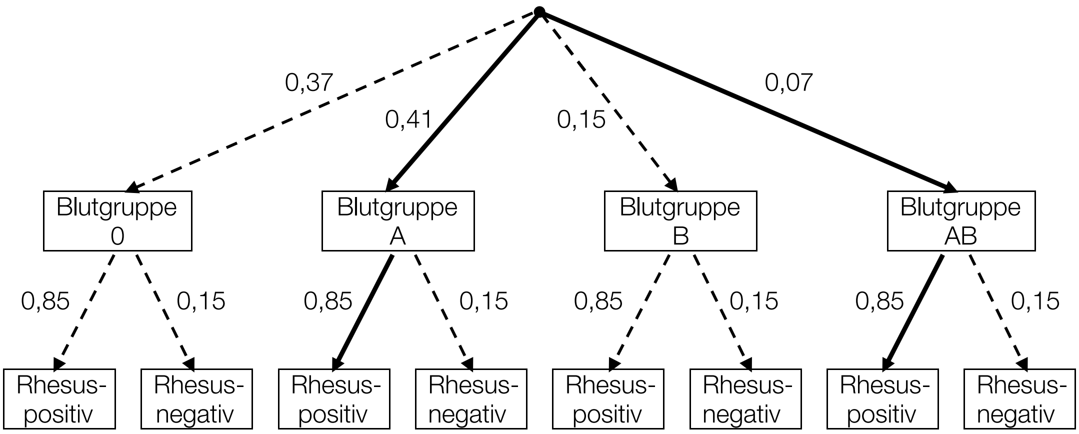
b) X … Anzahl der Personen mit Blutgruppe 0

Binomialverteilung: $n = 25$, $p = 0{,}37$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 0{,}61524\ldots \approx 61{,}52\ \%$

c)



P(„Blutgruppe B Rhesus-negativ“) $= 0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}0225 = 2{,}25\ \%$

Es wird das Ereignis beschrieben, dass eine (zufällig ausgewählte) Person Blutgruppe A oder AB hat und Rhesus-positiv ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Winkel der jeweiligen Sektoren
   1 × A: für das richtige Veranschaulichen im Kreisdiagramm

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

c) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms
   1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
   1 × C: für eine richtige Beschreibung

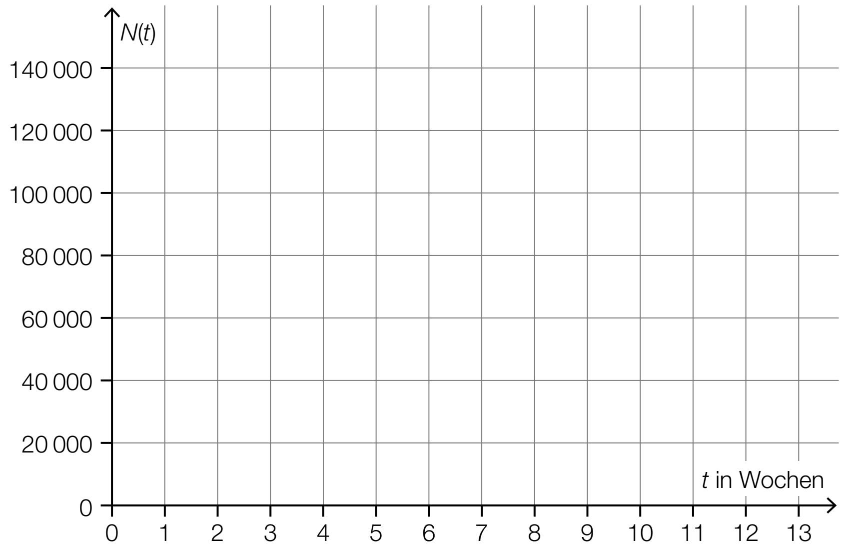
Erkältung

a) Die zeitliche Entwicklung der Gesamtanzahl der Personen in einer Stadt, die sich seit Beginn eines bestimmten Jahres eine Erkältung zugezogen haben, kann näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden.

$N(t) = -72{,}5 \cdot t^3 + 1\,378 \cdot t^2 + 4\,646 \cdot t \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 13$

t … Zeit seit Beginn des Jahres in Wochen
$N(t)$ … Gesamtanzahl der Personen, die sich von Beginn des Jahres bis zur Zeit t eine Erkältung zugezogen haben

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion N im Intervall [0; 13] ein. *[0/1 P.]*



b) 20 % der erkälteten Personen haben während der Erkältung auch Fieber.

1) Ordnen Sie den beiden Ereignissen jeweils die zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

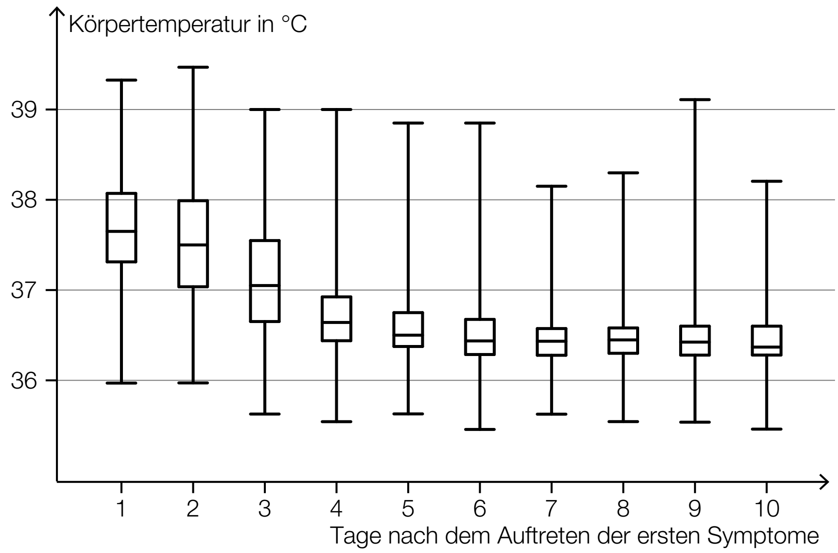
In einer Zufallsstichprobe von 10 erkälteten Personen hat mindestens 1 Person auch Fieber.	
In einer Zufallsstichprobe von 10 erkälteten Personen hat genau 1 Person auch Fieber.	

A	$0{,}2 \cdot 0{,}8^9$
B	$10 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^9$
C	$1 - 0{,}2^{10}$
D	$1 - 0{,}8^{10}$

In einer bestimmten Stadt sind 700 Personen erkältet.

2) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl derjenigen Personen, die während der Erkältung auch Fieber haben. *[0/1 P.]*

c) Im Rahmen einer Studie wurde die Körpertemperatur von erkälteten Personen am Morgen gemessen und dokumentiert. In der nachstehenden Abbildung ist die Verteilung der Körpertemperaturen für jeden der ersten 10 Tage nach dem Auftreten der ersten Symptome als Boxplot dargestellt.

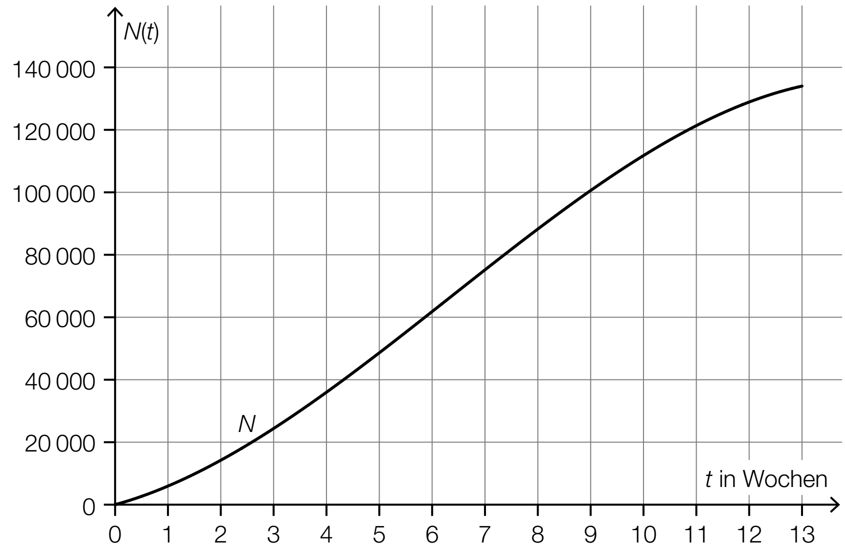


1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, an wie vielen Tagen bei mindestens der Hälfte der erkälteten Personen eine Körpertemperatur von mehr als 37 °C gemessen wurde. *[0/1 P.]*

2) Begründen Sie anhand der obigen Abbildung, warum die folgende Aussage richtig ist:
„Bei zumindest einer erkälteten Person wurde 9 Tage nach dem Auftreten der ersten Symptome eine höhere Körpertemperatur gemessen als 3 Tage nach dem Auftreten der ersten Symptome." *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen im Intervall [0; 13].

b1)

In einer Zufallsstichprobe von 10 erkälteten Personen hat mindestens 1 Person auch Fieber.	D
In einer Zufallsstichprobe von 10 erkälteten Personen hat genau 1 Person auch Fieber.	B

A	$0{,}2 \cdot 0{,}8^9$
B	$10 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^9$
C	$1 - 0{,}2^{10}$
D	$1 - 0{,}8^{10}$

b2) $700 \cdot 0{,}2 = 140$

b1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts.

c1) An 3 Tagen wurde bei mindestens der Hälfte der erkälteten Personen eine Körpertemperatur von mehr als 37 °C gemessen.

c2) Die Aussage ist richtig, da das Maximum der gemessenen Körpertemperaturen am Tag 9 größer als am Tag 3 ist.

c1) Ein Punkt für das richtige Ablesen.
c2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Körpergröße*

Aufgabennummer: A_244

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

An einer Universität werden Daten zur Körpergröße der männlichen Sport-Studenten erhoben.

a) Die Körpergröße von 10 zufällig ausgewählten Studenten wird gemessen.

Körpergröße in cm	168	169	171	174	179	181	182	183	188	191

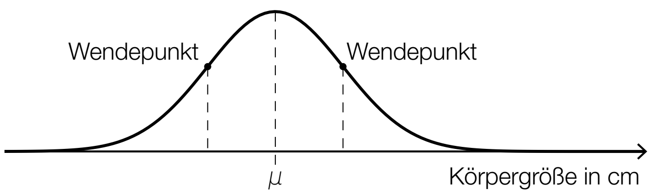
– Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der Körpergrößen.

Bei der Weiterverarbeitung der Daten wurde aufgrund eines Tippfehlers anstelle eines Messwerts aus der obigen Tabelle eine Körpergröße von mehr als 1 000 cm eingegeben. Dadurch ändert sich der Median von 180,0 cm auf 181,5 cm.

– Geben Sie diejenigen Messwerte an, die für diese fehlerhafte Eingabe in Frage kommen.

b) Man nimmt an, dass die Körpergröße der Studenten mit einem Erwartungswert von $\mu = 178{,}0$ cm und einer Standardabweichung von $\sigma = 6{,}5$ cm annähernd normalverteilt ist.

– Berechnen Sie diejenige Körpergröße, die von einem zufällig ausgewählten Studenten mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % überschritten wird.
– Veranschaulichen Sie in der nachstehenden Abbildung der Dichtefunktion dieser Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass die Körpergröße eines zufällig ausgewählten Studenten im Intervall [165; 191] liegt.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

* ehemalige Klausuraufgabe

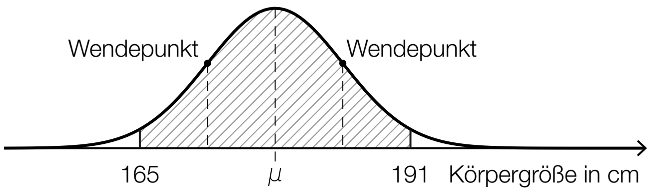
Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x}$ = 178,6 cm
σ = 7,499… cm ≈ 7,5 cm bzw. s = 7,904… cm ≈ 7,9 cm

Messwerte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen: 168, 169, 171, 174, 179

b) X … Körpergröße eines zufällig ausgewählten Studenten in cm
$P(X \geq a) = 0{,}8$
Berechnung von a mittels Technologieeinsatz:
a = 172,52… cm

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % wird eine Körpergröße von rund 172,5 cm überschritten.



Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittelwerts und der Standardabweichung
1 × C: für die richtige Angabe aller Werte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Körpergröße
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der gegebenen Abbildung (Intervall: $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$)

Vernetzte Welt*

Aufgabennummer: A_245

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Zu Beginn des Jahres 2005 gab es weltweit 5,5 Millionen Personen, die im Internet ein bestimmtes soziales Netzwerk verwendeten. Die Anzahl der Nutzer/innen nahm exponentiell zu. Zu Beginn des Jahres 2011 verwendeten bereits 820 Millionen Personen dieses soziale Netzwerk. Die Anzahl der Personen, die dieses soziale Netzwerk verwenden, soll durch eine Funktion F beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung dieser Funktion F.

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 2005
$F(t)$ ... Anzahl der Personen, die das soziale Netzwerk zur Zeit t verwenden, in Millionen

b) Nach einer Faustregel der Technologiebranche verdoppelt sich die Geschwindigkeit von Computerprozessoren alle 18 Monate. In einem Buch wird behauptet, dass demnach die Computerprozessoren im Jahr 2025 etwa 64-mal so schnell sein werden wie im Jahr 2013.*

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung richtig ist.

c) Die Bauteile eines elektronischen Systems haben innerhalb eines Jahres unabhängig voneinander eine konstante Ausfallwahrscheinlichkeit von 2 %.

Das elektronische System fällt aus, wenn mindestens 1 Bauteil ausfällt.

– Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein elektronisches System, in dem 10 Bauteile vernetzt sind, innerhalb eines Jahres ausfällt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* *Vgl. Schmidt, E. & Cohen, J. (2013). Die Vernetzung der Welt. Ein Blick in unsere Zukunft. Hamburg: Rowohlt. S. 15.*

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $F(t) = F_0 \cdot a^t$

$F_0 = 5{,}5$
$820 = 5{,}5 \cdot a^6 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[6]{\frac{820}{5{,}5}} = 2{,}30272\ldots \approx 2{,}3027$
$F(t) = 5{,}5 \cdot 2{,}3027^t$

b) 12 Jahre entsprechen der 8-fachen Verdoppelungszeit $\left(\frac{12}{1{,}5} = 8\right)$.
$2^8 = 256$

Die Behauptung ist daher falsch.

c) Binomialverteilung:
X ... Anzahl der Bauteile, die innerhalb eines Jahres ausfallen
$n = 10$, $p = 0{,}02$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}1829\ldots \approx 18{,}3\,\%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis

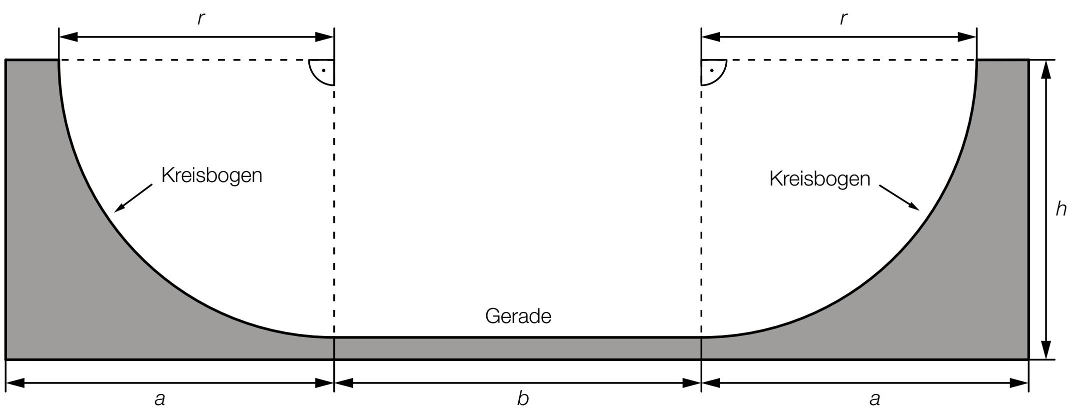
c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Skatepark (2)*

Aufgabennummer: A_246

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Folgende Grafik zeigt den Entwurf einer Halfpipe im Querschnitt:



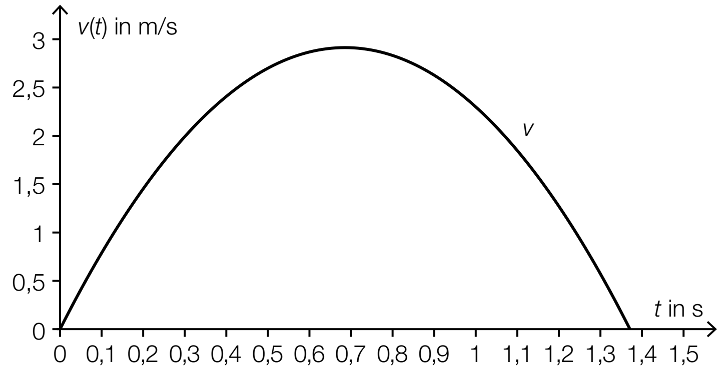
– Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts A der grauen Fläche (Querschnittsfläche) aus a, b, h und r.

A = ____

Die Halfpipe soll aus Beton gefertigt werden. Die Dichte von Beton wird häufig in den Einheiten Tonnen pro Kubikmeter (t/m³) oder Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm³) angegeben.

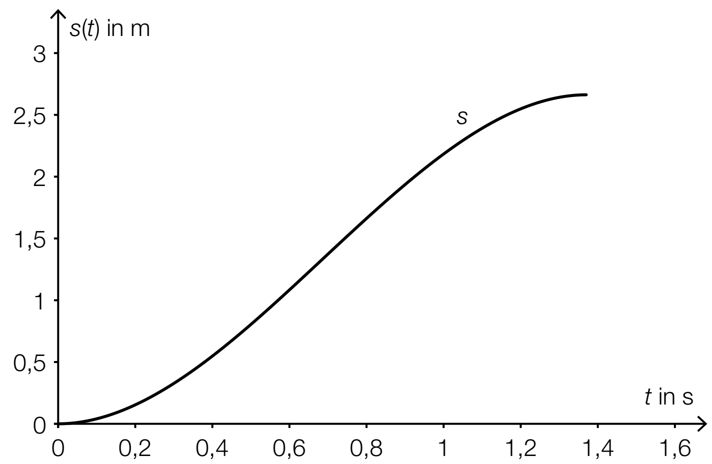
– Zeigen Sie, dass sich bei der Umwandlung von t/m³ in g/cm³ die Maßzahl nicht verändert.

b) Die Geschwindigkeit einer Skaterin in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion v beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Weg, den die Skaterin zwischen $t = 0{,}5$ s und $t = 1$ s zurücklegt.
– Beschreiben Sie die Bedeutung von $v'(0{,}3)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Der zurückgelegte Weg eines Skaters in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion s beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



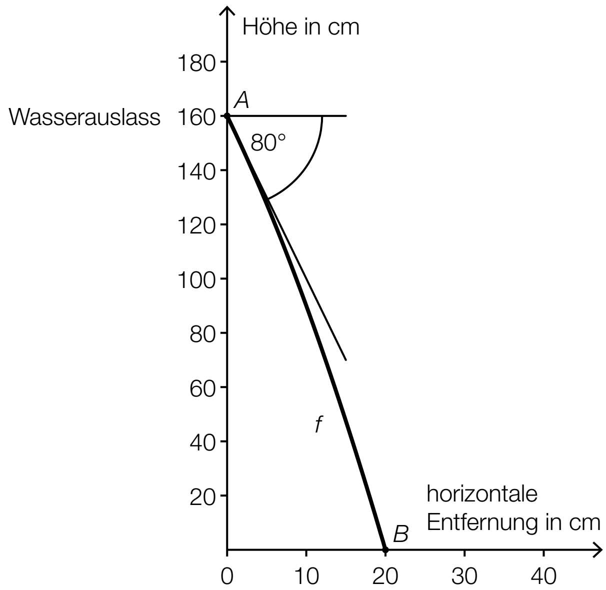
– Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit zwischen $t = 0{,}6$ s und $t = 1{,}2$ s.

d) Im Skatepark steht Trinkwasser zur Verfügung. An einer Wand ist ein Wasserauslass montiert, aus dem unter einem Tiefenwinkel von 80° ein Wasserstrahl austritt. Der Verlauf des Wasserstrahls kann näherungsweise durch den Graphen einer Funktion f dargestellt werden:

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x ... horizontale Entfernung von der Wand in Zentimetern (cm)
$f(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

Der Graph der Funktion f ist im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a, b und c der Funktion f ermittelt werden können. Verwenden Sie dabei die Punkte A und B sowie den angegebenen Winkel.

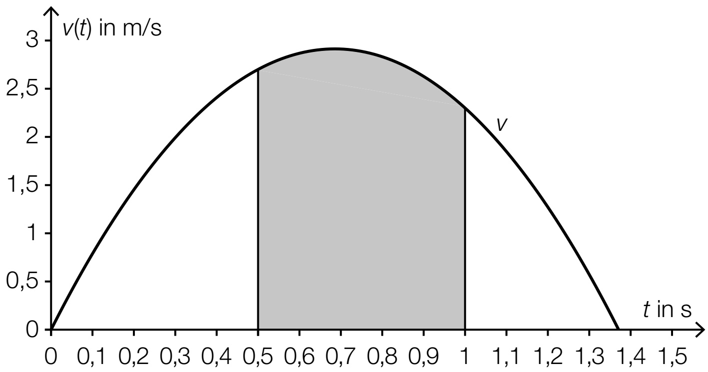
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = (2 \cdot a + b) \cdot h - b \cdot r - \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

$1\,\frac{\text{t}}{\text{m}^3} = \frac{10^6\text{ g}}{10^6\text{ cm}^3} = 1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

b)



$v'(0{,}3)$ ist die Beschleunigung der Skaterin zum Zeitpunkt $t = 0{,}3$ s.

c) $\bar{v} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5$

Toleranzbereich für $\bar{v}$: [2,1; 2,9]
Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 2,5 m/s.

d) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$f(0) = 160$		$c = 160$
$f(20) = 0$	*oder:*	$400 \cdot a + 20 \cdot b + c = 0$
$f'(0) = \tan(-80°)$		$b = \tan(-80°)$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
   1 × D: für den richtigen Nachweis

b) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen des Weges
   1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit im Toleranzbereich [2,1; 2,9]

d) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *A* und *B*
   1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe des gegebenen Winkels

Windräder*

Aufgabennummer: A_247

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die vom Hersteller eines Windrads angegebene Nennleistung kann in einer vereinfachten Form durch folgende Formel berechnet werden:

$P_N = c \cdot A$

P_N ... Nennleistung in Megawatt (MW)
A ... Flächeninhalt der von den Rotoren des Windrads überstrichenen Kreisfläche in Quadratmetern (m^2)
$c = 0{,}169 \cdot 10^{-3}$ MW/m^2

Ein Windrad hat eine Nennleistung von 0,85 MW.

– Berechnen Sie den Durchmesser der von den Rotoren des Windrads überstrichenen Kreisfläche.

b) Die tatsächliche Leistung von Windrädern in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit v kann näherungsweise durch die Funktion P beschrieben werden.

Der Graph dieser Funktion P und ihr Wendepunkt W sind in der unten stehenden Abbildung 1 dargestellt.

– Skizzieren Sie in der Abbildung 2 den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion P'.

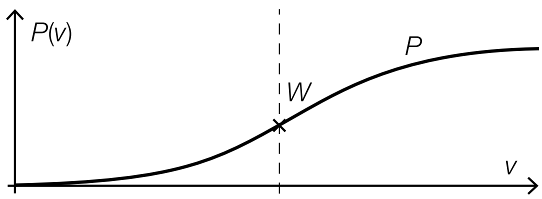


Abbildung 1

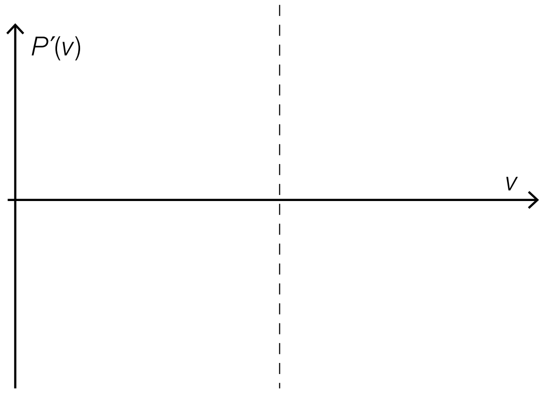


Abbildung 2

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die tatsächliche Leistung eines bestimmten Windrads in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit v kann für Windgeschwindigkeiten von 5 m/s bis 10 m/s näherungsweise durch die Polynomfunktion P beschrieben werden.

$P(v) = 0{,}0175 \cdot v^2 - 0{,}0796 \cdot v + 0{,}0391$ mit $5 \leq v \leq 10$

v ... Windgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
$P(v)$ ... Leistung bei der Windgeschwindigkeit v in Megawatt (MW)

– Berechnen Sie, bei welcher Windgeschwindigkeit eine Leistung von 0,5 MW erzielt wird.
– Beschreiben Sie, was mit der folgenden Rechnung im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt wird:

$$\frac{P(8) - P(7)}{P(7)}$$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

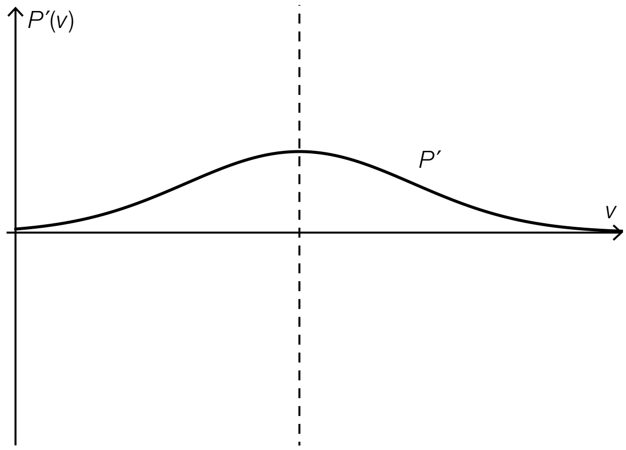
a) $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \quad \Rightarrow \quad P_N = c \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$0{,}85 = 0{,}169 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$d = 80{,}02\ldots$

Der Durchmesser beträgt rund 80,0 m.

b) zum Beispiel:



c) $0{,}5 = 0{,}0175 \cdot v^2 - 0{,}0796 \cdot v + 0{,}0391$

$v_1 = 7{,}887\ldots$
$(v_2 = -3{,}339\ldots)$

Eine Leistung von 0,5 MW wird bei einer Windgeschwindigkeit von rund 7,89 m/s erzielt.

Es wird die relative Änderung der Leistung des Windrads bei einem Anstieg der Windgeschwindigkeit von 7 m/s auf 8 m/s ermittelt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers

b) 1 × A1: für die richtige Darstellung (Wendestelle von P als Maximumstelle von P')
1 × A2: für die richtige Darstellung (Vorzeichen der Ableitungsfunktion P' ($P'(v) > 0$) und Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion P')
Das Krümmungsverhalten von P' ist für die Punktevergabe nicht relevant.

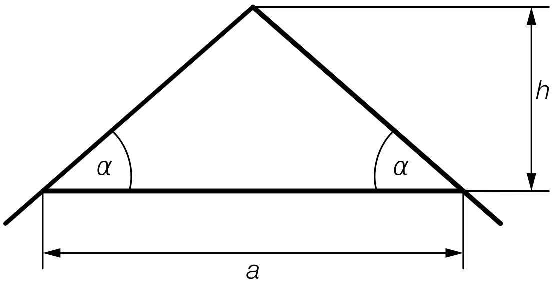
c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Windgeschwindigkeit
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang

Hausbau*

Aufgabennummer: A_248

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Der Querschnitt eines Dachstuhls ist in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt.

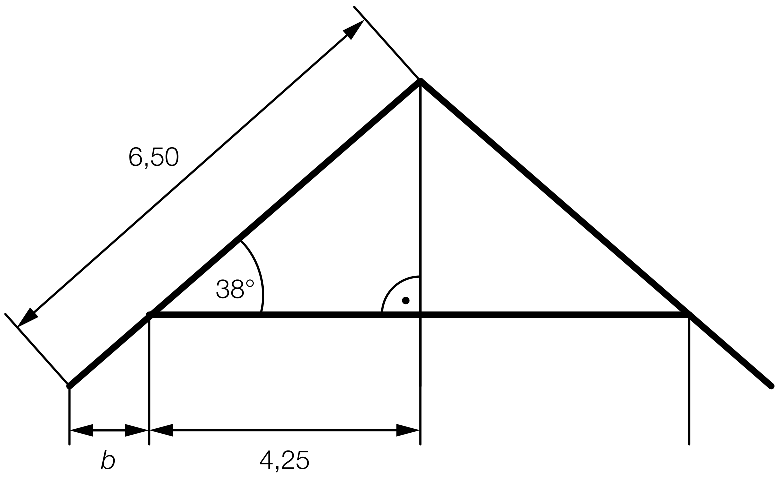


– Erstellen Sie eine Formel, mit der man den Winkel α aus a und h berechnen kann.

$\alpha =$ ______________________________

– Berechnen Sie den Winkel α für $a = 7$ m und $h = 220$ cm.

b) Der Querschnitt eines Dachstuhls ist in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt. Alle Längen sind in Metern angegeben.



– Berechnen Sie b.

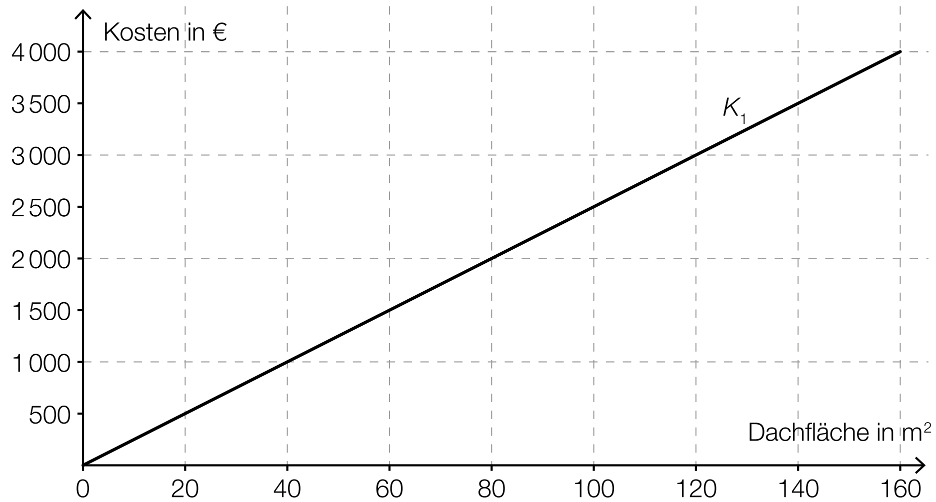
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Zwei Unternehmen legen ihre Angebote für das Eindecken von Einfamilienhäusern vor:

Angebot 1: Das Angebot des ersten Anbieters ist in der unten stehenden Abbildung als Graph der Kostenfunktion K_1 dargestellt.

Angebot 2: Die Kosten betragen € 20 je m² Dachfläche, dazu kommen mengenunabhängige Lieferkosten von € 500.

– Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Kostenfunktion K_2 für das Angebot 2 im Intervall [0; 160] ein.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, welches Angebot bei einer Dachfläche von 120 m² kostengünstiger ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

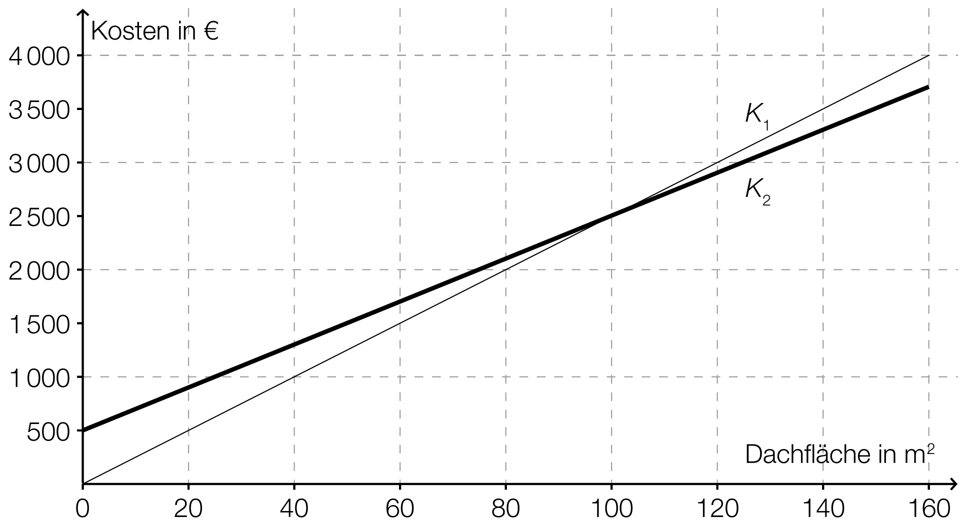
a) $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{\frac{a}{2}}\right)$

$\alpha = \arctan\left(\frac{2,2}{3,5}\right) = 32,15\ldots° \approx 32,2°$

b) $b = 6,5 \cdot \cos(38°) - 4,25$

$b = 0,872\ldots \text{ m} \approx 0,87 \text{ m}$

c)



Aus der Abbildung entnimmt man, dass für 120 m² Dachfläche das Angebot 2 kostengünstiger ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung von *b*
1 × B: für die richtige Berechnung von *b*

c) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Graphen
1 × C: für das richtige Ablesen

Kugelstoßen (2)*

Aufgabennummer: A_268

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen.
Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden.

a) Im Jahr 1948 wurde bei den Männern ein neuer Weltrekord mit der Weite 17,68 m aufgestellt.

Eine Faustregel besagt, dass sich seit 1948 der Weltrekord bei den Männern alle 2,5 Jahre um 34 cm verbessert hat. Die Weltrekordweite (in Metern) soll gemäß dieser Faustregel in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) durch eine lineare Funktion f beschrieben werden.

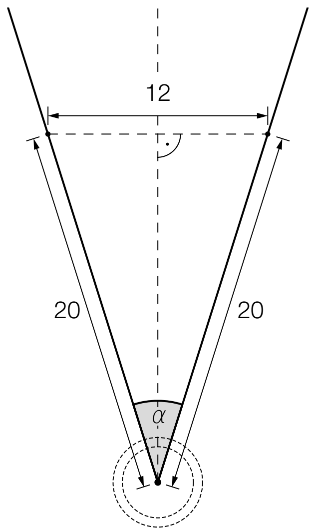
1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1948.

Im Jahr 1988 betrug der Weltrekord bei den Männern 23,06 m.

2) Ermitteln Sie für das Jahr 1988 die Abweichung des Funktionswerts von f von dieser Weltrekordweite.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Aufschlagbereich ist in der nachstehenden Abbildung in der Ansicht von oben dargestellt (alle Angaben in Metern).



1) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung markierten Winkel α.

2) Markieren Sie in der obigen Abbildung diejenige Strecke, deren Länge durch den folgenden Ausdruck berechnet werden kann: $\frac{6}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

c) Die Bahnkurve einer gestoßenen Kugel lässt sich näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion h beschreiben:

$h(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung der Kugel von der Abstoßstelle in m
$h(x)$ ... Höhe der Kugel über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Geben Sie an, in welcher Höhe die Kugel abgestoßen wird.

2) Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung von der Abstoßstelle die Kugel auf dem Boden aufschlägt.

d) Für die bei den Männern verwendeten Kugeln gelten folgende Vorgaben:

- Die Masse beträgt 7 257 g.
- Der Durchmesser der Kugel liegt zwischen 11 cm und 13 cm.

Eine Messing-Eisen-Legierung hat eine Dichte von 8,2 g/cm³.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ϱ, also $m = V \cdot \varrho$.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob man aus dieser Messing-Eisen-Legierung eine Kugel herstellen kann, die diese Vorgaben erfüllt.

Möglicher Lösungsweg

a1) Steigung k der linearen Funktion f: $k = \frac{0{,}34}{2{,}5} = 0{,}136$

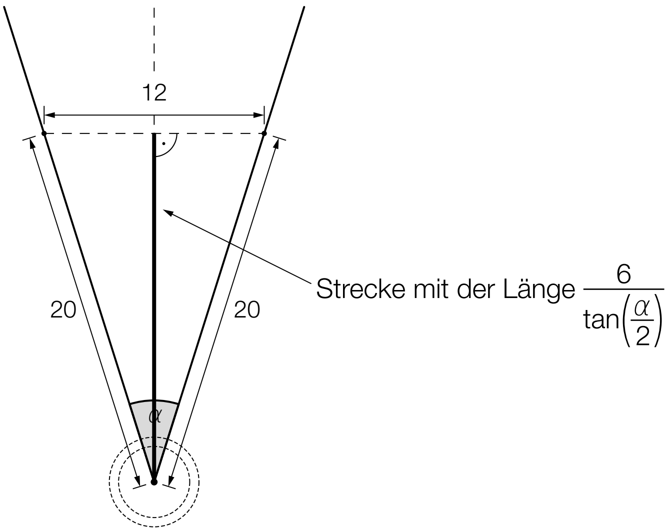
$f(t) = 0{,}136 \cdot t + 17{,}68$

t ... Zeit in Jahren
$f(t)$ ... Weltrekordweite zur Zeit t in m

a2) $f(40) = 23{,}12$
Abweichung: $23{,}12 - 23{,}06 = 0{,}06$
Die Abweichung beträgt 0,06 m.

b1) $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{6}{20}\right) = 34{,}915...° \approx 34{,}92°$

b2)



c1) Die Kugel wird in einer Höhe von 2 m abgestoßen.

c2) $h(x) = 0$

oder:

$-0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x_1 = 17{,}310...$
$(x_2 = -2{,}310...)$
Die Kugel schlägt in einer horizontalen Entfernung von rund 17,31 m auf dem Boden auf.

d1) $7\,257 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot 8{,}2$

$$r = \sqrt[3]{\frac{7\,257 \cdot 3}{8{,}2 \cdot 4 \cdot \pi}} = 5{,}95...$$

$d = 2 \cdot r = 11{,}91...$

Der Durchmesser einer derartigen Kugel beträgt rund 11,9 cm und liegt im angegebenen Bereich.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für das richtige Ermitteln der Abweichung

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels α
1 × C: für das richtige Markieren der Strecke

c) 1 × C: für das richtige Angeben der Abstoßhöhe
1 × B: für das richtige Ermitteln der Stoßweite

d) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Pauschalreisen*

Aufgabennummer: A_267

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Reisebüro vermittelt Plätze für Pauschalreisen nach Kroatien.

a) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Alle 100 zur Verfügung stehenden Plätze werden vermittelt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 4 der vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen werden.

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet werden kann:
$\binom{100}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^{95}$

b) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Es werden 102 Plätze vermittelt, obwohl nur 100 Plätze zur Verfügung stehen.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Plätze unter diesen Voraussetzungen nicht ausreicht.

c) Pro Reisetermin stehen jeweils 100 Plätze zur Verfügung.
Für jeden gebuchten Platz erzielt das Reisebüro einen Gewinn von a Euro.
Für jeden nicht gebuchten Platz macht das Reisebüro einen Verlust von 120 Euro.
Den Gesamtgewinn erhält man, indem man vom Gewinn für alle gebuchten Plätze den Verlust für alle nicht gebuchten Plätze abzieht.

Bei einem bestimmten Reisetermin werden nur x Plätze gebucht. Der Gesamtgewinn für diesen Termin beträgt G Euro.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus a und G.

$x =$ ____________________

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0,05$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 4) = 0,4359...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 43,6 %.

a2) Es werden 5 der 100 vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen.

b1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 102$ und $p = 0,05$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 1) = 0,0340...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 3,4 %.

c1) $G = x \cdot a - (100 - x) \cdot 120 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{G + 12\,000}{a + 120}$

Lösungsschlüssel

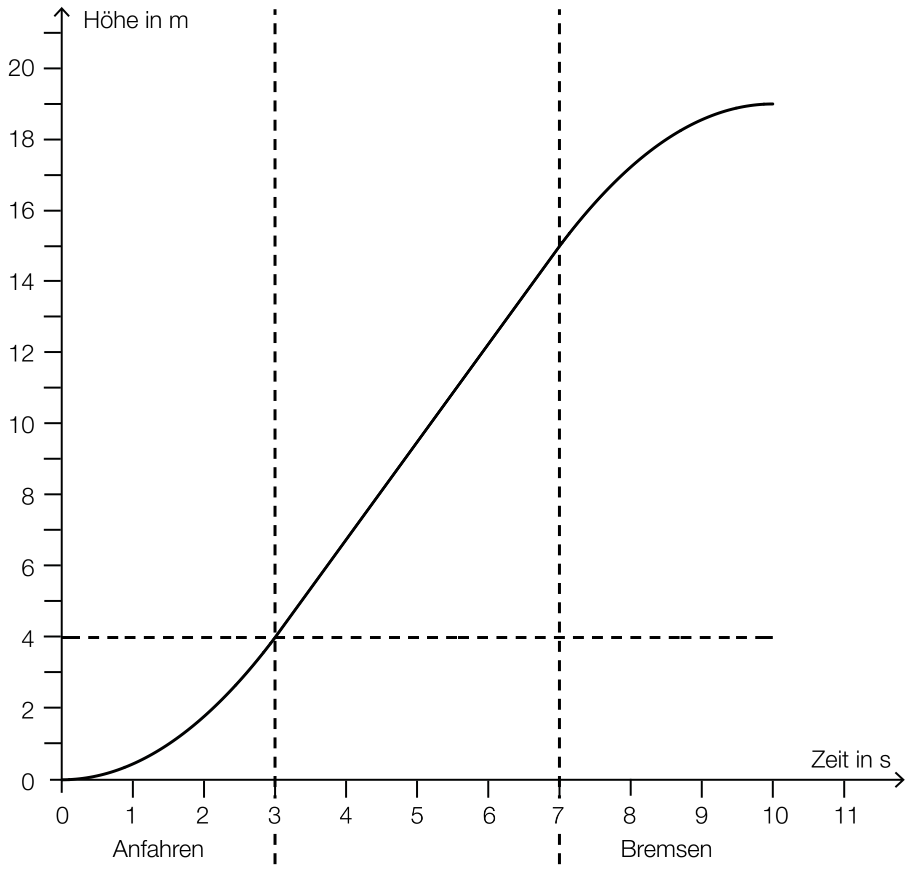
a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von x

Fahrstuhl im Hochhaus

Ein Fahrstuhl fährt in einem Hochhaus nach oben. Die nachstehende Grafik stellt die erreichte Höhe in Metern in Abhängigkeit von der Fahrzeit in Sekunden dar. Die Fahrt besteht aus 3 verschiedenen Abschnitten. Beim Anfahren beschleunigt der Aufzug, dann fährt er mit konstanter Geschwindigkeit und am Ende bremst er ab (siehe nachstehende Abbildung).



a) 1) Ermitteln Sie aus der obigen Grafik die maximale Geschwindigkeit während dieser Fahrt.

b) Der beim Anfahren zurückgelegte Weg kann durch eine quadratische Funktion beschrieben werden. Der Scheitelpunkt des Funktionsgraphen liegt im Ursprung.

1) Stellen Sie eine Gleichung dieser Weg-Zeit-Funktion auf.

c) Während des Bremsens gilt:

$h(t) = -\frac{4}{9} \cdot (t - 10)^2 + 19$ mit $7 \leq t \leq 10$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe zur Zeit t in m

1) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Beschleunigung-Zeit-Funktion a auf.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{15-4}{7-3} = 2{,}75$

Die maximale Geschwindigkeit beträgt 2,75 m/s.

b1) $h(t) = a \cdot t^2$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe (= zurückgelegter Weg) zur Zeit t in m

$h(3) = 4$

$a = \frac{4}{9}$

$h(t) = \frac{4}{9} \cdot t^2$

c1) $v(t) = h'(t) = -\frac{8}{9} \cdot (t - 10)$

$a(t) = h''(t) = -\frac{8}{9}$

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Alles für die Torte*

Aufgabennummer: A_254

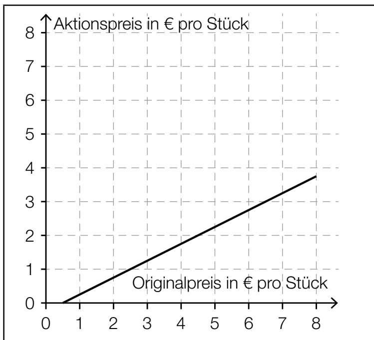
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Wiener Konditormeister bietet unterschiedliche Torten an.

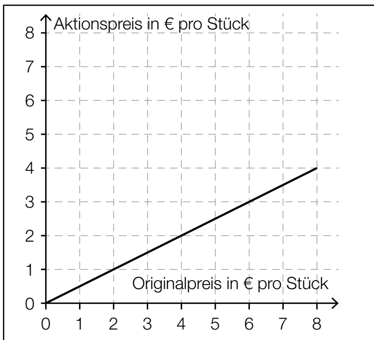
a) Jeden ersten Montag im Monat gibt es eine Aktion: Der Aktionspreis für Tortenstücke ist dann um 50 Cent pro Stück geringer als der Originalpreis.

Eine der nachstehenden Abbildungen stellt den Zusammenhang zwischen dem Originalpreis und dem Aktionspreis korrekt dar.

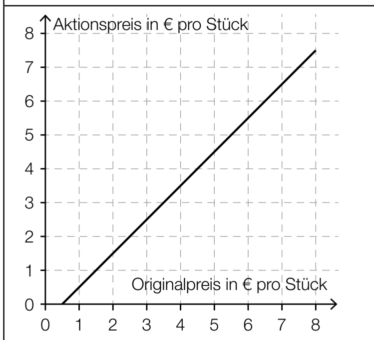
– Kreuzen Sie die entsprechende Abbildung an. *[1 aus 5]*



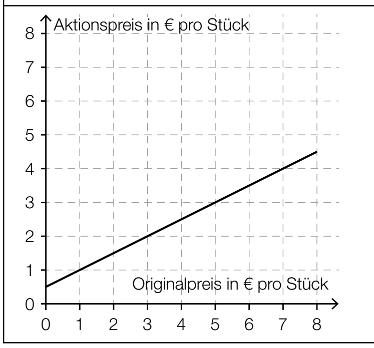
☐



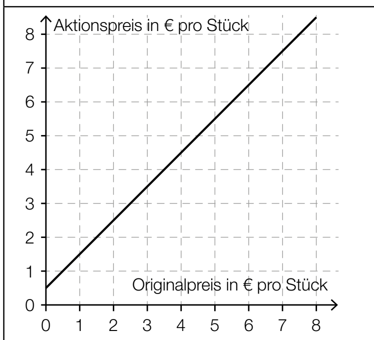
☐



☐



☐



☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Konditormeister stellt betriebswirtschaftliche Überlegungen darüber an, wie sich der Preis der Tortenstücke auf die verkaufte Stückzahl auswirkt.

Der Preis für Topfentortenstücke in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge kann modellhaft durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = -0{,}015 \cdot x + 6{,}45$

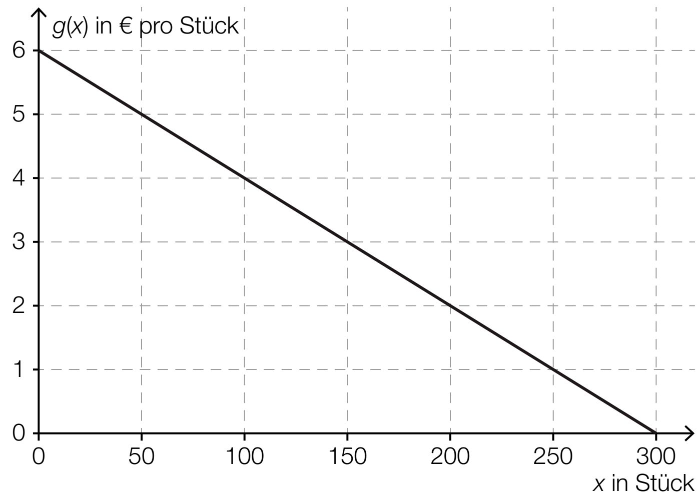
x … Anzahl der nachgefragten Topfentortenstücke
$f(x)$ ... Preis bei x nachgefragten Topfentortenstücken in € pro Stück

Der Konditormeister bietet ein Topfentortenstück um € 4,20 an.

– Berechnen Sie die entsprechende Anzahl der nachgefragten Topfentortenstücke.
– Bestimmen Sie den entsprechenden Erlös.

c) Der Zusammenhang zwischen dem Preis und der nachgefragten Menge (= Anzahl der Tortenstücke, die die Konsumentinnen und Konsumenten kaufen würden) wird durch die sogenannte *Preisfunktion der Nachfrage* festgelegt.

Der Graph der Preisfunktion der Nachfrage g für Nusstortenstücke ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

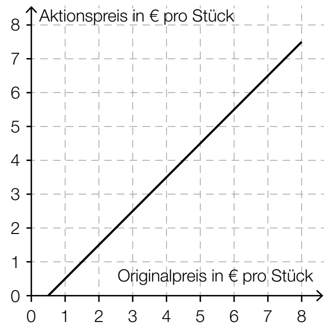


– Ermitteln Sie die Steigung der Funktion g.
– Lesen Sie denjenigen Preis ab, bei dem gemäß diesem Modell niemand mehr bereit ist, ein Nusstortenstück zu kaufen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



☒

b) $4{,}20 = -0{,}015 \cdot x + 6{,}45$
$x = 150$

Gemäß dem Modell werden bei einem Preis von € 4,20 pro Topfentortenstück insgesamt 150 Topfentortenstücke nachgefragt.

$150 \cdot 4{,}20 = 630$

Der Erlös beträgt € 630.

c) Die Steigung beträgt $-\frac{1}{50}$.

Bei einem Preis von € 6 pro Stück ist gemäß dem Modell niemand mehr bereit, ein Nusstortenstück zu kaufen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × B1: für das richtige Berechnen der Anzahl der nachgefragten Topfentortenstücke
1 × B2: für das richtige Ermitteln des Erlöses

c) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der Steigung
1 × C2: für das richtige Ablesen des Höchstpreises

Medikamentenabbau (1)*

Aufgabennummer: A_251

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Abbau von Medikamenten im Körper kann näherungsweise durch exponentielle Modelle beschrieben werden.

a) Die nachstehende Tabelle gibt an, welche Menge $N(t)$ eines bestimmten Medikaments zur Zeit t im Körper vorhanden ist:

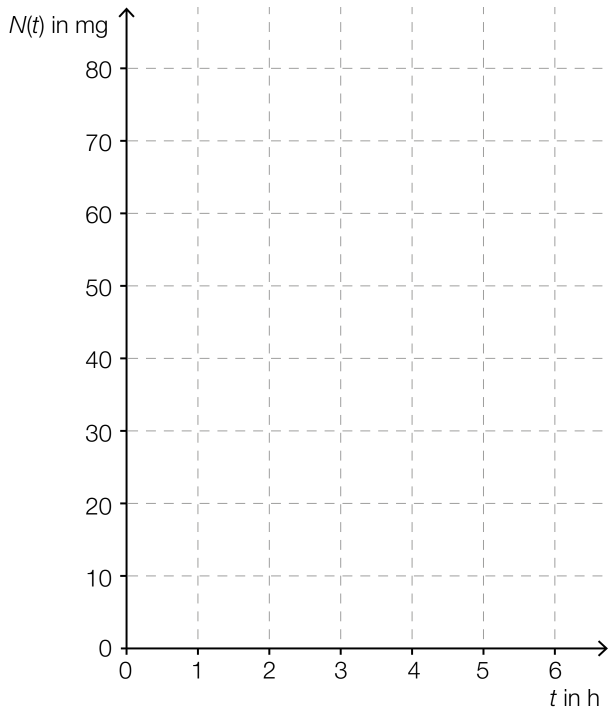
t in h	0	2	4
$N(t)$ in mg	100	60	36

– Erklären Sie, warum die in der Tabelle angegebenen Daten die Beschreibung des Medikamentenabbaus durch ein exponentielles Modell nahelegen.
– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N, die diesen Medikamentenabbau beschreibt.
– Berechnen Sie diejenige Menge des Medikaments, die zur Zeit $t = 3$ h im Körper vorhanden ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein anderes Medikament hat im Körper die Halbwertszeit 1,5 h. Am Anfang (t = 0 h) sind 80 mg des Medikaments im Körper vorhanden.
Der Medikamentenabbau im Körper kann näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N beschrieben werden.

– Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von N im Zeitintervall [0 h; 6 h] ein.



c) Ein Medikament hat im Körper eine Halbwertszeit $T_{1/2}$.

– Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist $\frac{1}{6}$ der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 50 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐
Nach einer Zeitdauer von $3 \cdot T_{1/2}$ ist weniger als $\frac{1}{8}$ der Ausgangsmenge abgebaut.	☐
Nach einer Zeitdauer von $5 \cdot T_{1/2}$ sind 10 % der Ausgangsmenge vorhanden.	☐

d) Der Abbau eines anderen Medikaments im Körper kann näherungsweise durch die Funktion N beschrieben werden:

$N(t) = 200 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

t ... Zeit ab Verabreichung des Medikaments in h
$N(t)$ ... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

Das Medikament muss wieder verabreicht werden, sobald nur noch 15 % der Ausgangsmenge im Körper vorhanden sind.

– Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem das Medikament wieder verabreicht werden muss.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Es liegt nahe, für die Beschreibung des Medikamentenabbaus ein exponentielles Modell zu wählen, weil sich die Menge in gleichen Zeitabständen (von 2 h) jeweils um den gleichen Faktor (0,6) verkleinert.

$N(t) = 100 \cdot e^{k \cdot t}$
$60 = 100 \cdot e^{k \cdot 2}$

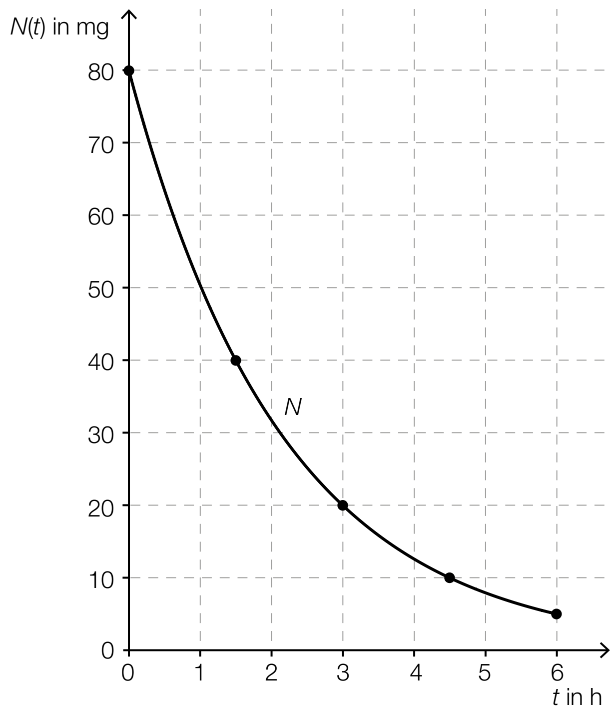
$k = \frac{\ln(0{,}6)}{2} = -0{,}25541... \approx -0{,}2554$

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}2554 \cdot t}$

t ... Zeit in h
$N(t)$ ... vorhandene Menge des Medikaments im Körper zur Zeit t in mg

$N(3) = 46{,}4...$
Zur Zeit $t = 3$ h sind rund 46 mg des Medikaments im Körper vorhanden.

b)



c)

Nach einer Zeitdauer von $2 \cdot T_{1/2}$ sind 75 % der Ausgangsmenge abgebaut.	☒

d) $200 \cdot 0{,}15 = 200 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$

$$t = \frac{\ln(0{,}15)}{-0{,}3} = 6{,}32...$$

Nach rund 6,3 Stunden muss das Medikament wieder verabreicht werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Erklärung
1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Exponentialfunktion
1 × B: für die richtige Berechnung der Menge zur Zeit $t = 3$ h

b) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen im gegebenen Intervall (Dabei müssen die Funktionswerte nach 1, 2, 3 und 4 Halbwertszeiten richtig eingezeichnet sein.)

c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

d) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts

Fußballspielen im Park*

Aufgabennummer: A_250		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balls kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion 3. Grades h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x … horizontale Entfernung des Balls von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balls über dem Boden an der Stelle x in m

a) – Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h.
– Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

b) Julia fängt den Ball aus einer Höhe von 1,80 m.

– Ermitteln Sie die beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle, an denen Julia sich dabei befinden kann.

c) Roland überlegt, ob er bei diesem Schuss den Ball über ein 2,8 m hohes Klettergerüst, das in direkter Schussrichtung 10 m von der Abschussstelle entfernt steht, schießen könnte.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Schuss tatsächlich über das Klettergerüst fliegen kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $0 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$
$0 = x^2 \cdot (-0{,}003 \cdot x + 0{,}057) \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
$-0{,}003 \cdot x + 0{,}057 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 19$

$D = [0; 19]$

$h'(x) = 0$
$x \cdot (-0{,}009 \cdot x + 0{,}114) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
$-0{,}009 \cdot x + 0{,}114 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 12{,}66... \approx 12{,}7$
$h(x_2) = 3{,}04\ldots \approx 3{,}0$

In einer horizontalen Entfernung von rund 12,7 m zur Abschussstelle erreicht der Ball seine größte Höhe von rund 3,0 m.
Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.

b) $1{,}80 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -5)$
$x_2 = 7{,}10\ldots \approx 7{,}1$
$x_3 = 16{,}89\ldots \approx 16{,}9$

Julia kann sich in einer Entfernung von etwa 7,1 m oder von etwa 16,9 m von der Abschussstelle befinden.

c) $h(10) = 2{,}7$

Da $h(10)$ kleiner als 2,8 m ist, kann der Ball nicht über das Klettergerüst fliegen.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Definitionsbereichs (Die untere Grenze des Definitionsbereichs $x_1 = 0$ muss nicht explizit angegeben sein.)
1 × B: für die richtige Berechnung des höchsten Punktes (beide Koordinaten)
(Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.)

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle

c) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung

Spam (2)*

Aufgabennummer: A_257

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Als *Spam* werden unerwünscht zugestellte E-Mails bezeichnet.

a) Der nachstehenden Tabelle kann man die Entwicklung der Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails in Milliarden entnehmen.

Beginn des Jahres ...	Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails in Milliarden
2010	62
2011	42
2012	30

Die Anzahl der Spam-Mails kann näherungsweise durch die Funktion S beschrieben werden:

$S(t) = 50 \cdot 0{,}6^t + 12$

t ... Zeit in Jahren ab 2010, d.h., für den Beginn des Jahres 2010 gilt: $t = 0$
$S(t)$ ... Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails zur Zeit t in Milliarden

– Zeigen Sie, dass die Funktion S die Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails für den Beginn des Jahres 2012 richtig beschreibt.

Die Funktion S kann auch in der Form $S(t) = 50 \cdot e^{k \cdot t} + 12$ angegeben werden.

– Berechnen Sie k.
– Beschreiben Sie das Ergebnis der Berechnung $\frac{S(5) - S(3)}{S(3)} \approx -0{,}30$ im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Mit einem *Aktienspam* wird durch massenhaften Versand von E-Mails eine meist wertlose Aktie beworben, um deren Kurs in die Höhe zu treiben.

Der Versender ist selbst Besitzer der Aktie, die er nach der Kurssteigerung gewinnbringend verkauft, worauf der Kurs wieder fällt.

Ein Händler behauptet: „Wenn der Kurs der Aktie in einem Quartal um 50 % steigt und im nächsten Quartal um 50 % fällt, dann haben Sie weder Gewinn noch Verlust gemacht."

– Zeigen Sie, dass diese Aussage falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Beginn des Jahres 2012: $S(2) = 50 \cdot 0{,}6^2 + 12 = 30$

$k = \ln(0{,}6) = -0{,}510... \approx -0{,}51$

Im Zeitraum vom Beginn des Jahres 2013 bis zum Beginn des Jahres 2015 ist die Anzahl der weltweit täglich versendeten Spam-Mails um rund 30 % gesunken.

b) Der Kurs der Aktie ändert sich insgesamt um den Faktor $1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$, d. h., der Aktienkurs ist um 25 % gefallen. (Man hat also Verlust gemacht.)

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für den richtigen Nachweis
1 × B: für die richtige Berechnung von k
1 × C: für die richtige Interpretation des Ergebnisses der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis

Hefeteig

Aufgabennummer: A_009

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Es wird ein Kuchen aus Hefeteig gebacken. Für den Teig benötigt man ein sogenanntes „Dampfl“ aus Hefe, warmer Milch und Zucker. Diese Zutaten werden verrührt und in ein 12 cm hohes zylindrisches Gefäß gegeben. Man lässt das Gemisch einige Zeit in warmer Umgebung ruhen. Die Höhe des Dampfls im Gefäß beträgt zu Beginn 4 cm. Das Dampfl dehnt sich durch Wärmezufuhr aus.

a) 11 Minuten nach Beginn des Vorgangs erreicht das Dampfl eine Höhe von 7 cm. Dieses „Aufgehen des Dampfls“ kann mit dem Modell des exponentiellen Wachstums beschrieben werden.

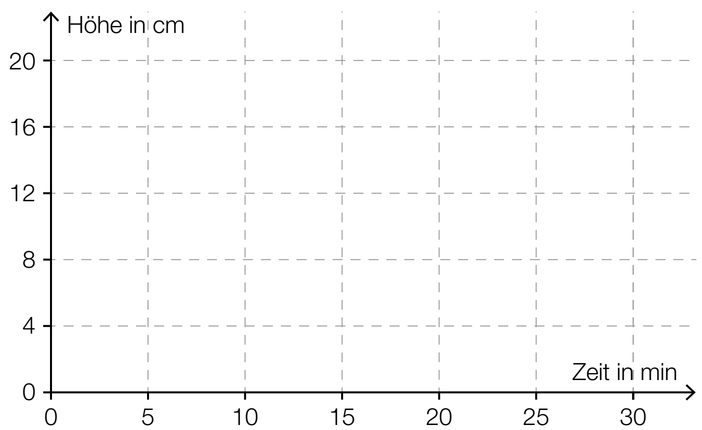
$h(t) = h_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$h(t)$ … Höhe des Dampfls zur Zeit t in cm

– Ermitteln Sie die Parameter h_0 und λ.

b) Man stellt fest, dass sich bei einer bestimmten Umgebungstemperatur die Höhe des Dampfls nach jeweils 15 min verdoppelt.

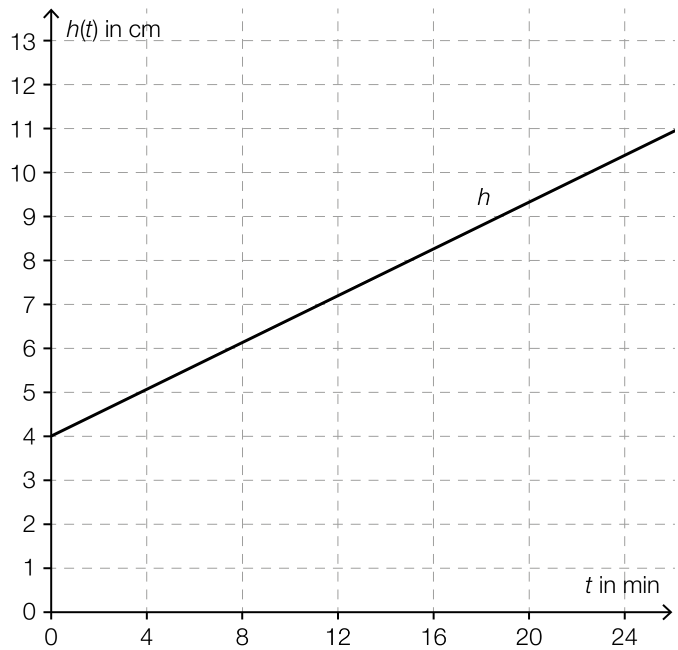
– Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen derjenigen Funktion, die diesem Modell im Intervall [0 min; 30 min] entspricht.



c) Eine näherungsweise passende Beschreibung der Ausdehnung des Dampfls kann durch ein lineares Modell erfolgen, wie es in der unten stehenden Grafik dargestellt ist.

t … Zeit in min

$h(t)$ … Höhe des Dampfls zur Zeit t in cm



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung dieser linearen Funktion.
– Berechnen Sie, wann das Dampfl den Rand des Gefäßes (12 cm) erreicht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

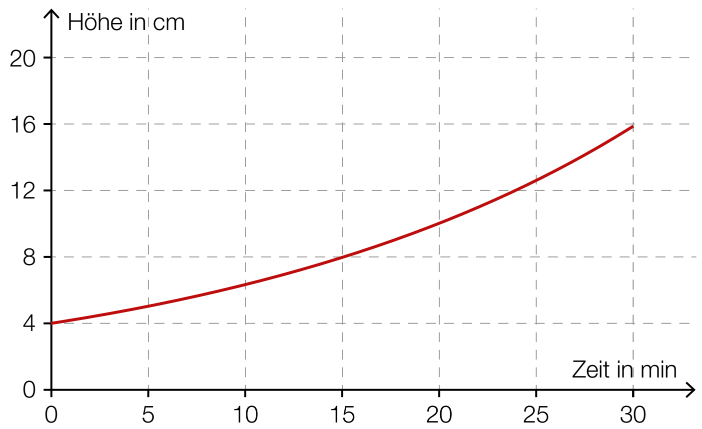
Möglicher Lösungsweg

a) $7 = 4 \cdot e^{\lambda \cdot 11}$

Lösen mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = 0{,}05087...$

$h(t) = 4 \cdot e^{0{,}05087... \cdot t}$

b)



c) $h(t) \approx 0{,}268 \cdot t + 4$

$0{,}268 \cdot t + 4 = 12 \quad \Rightarrow \quad t = 29{,}8...$

Nach dem linearen Modell erreicht das Dampfl den Gefäßrand nach rund 30 min.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 1
b) leicht	b) 1
c) mittel	c) 2

Thema: Alltag

Quellen: —

BMB
Bundesministerium
für Bildung

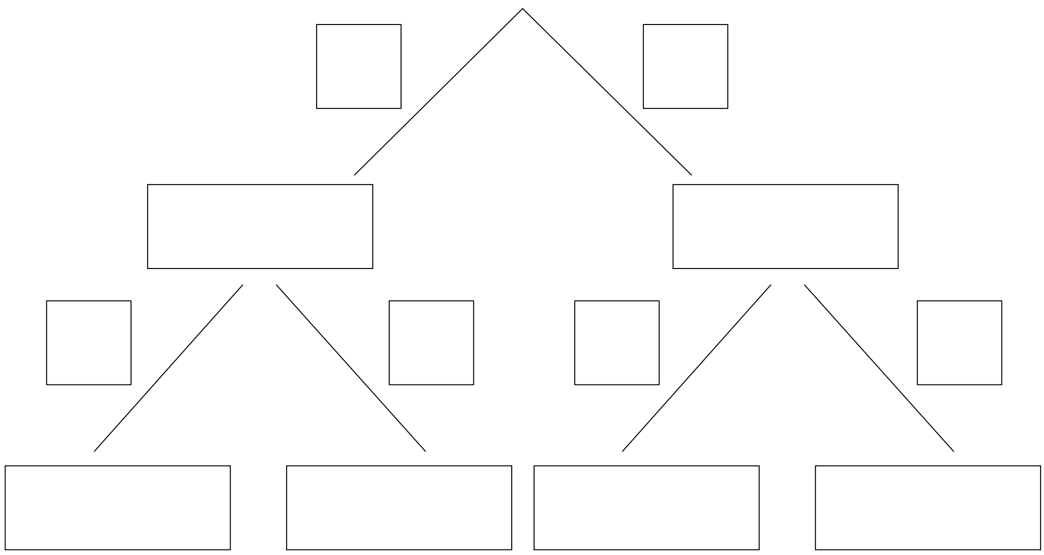
Vergnügungspark (2)*

Aufgabenummer: A_249		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

a) Bei einer Besucherbefragung in einem Vergnügungspark wurden folgende Daten erhoben:

60 % der Besucher sind aus dem Inland. Die Besucher aus dem Inland reisen zu 45 % mit dem PKW an, die restlichen Besucher aus dem Inland mit öffentlichen Verkehrsmitteln. 90 % der Besucher aus dem Ausland reisen mit öffentlichen Verkehrsmitteln an, die restlichen Besucher aus dem Ausland mit dem PKW.

– Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.

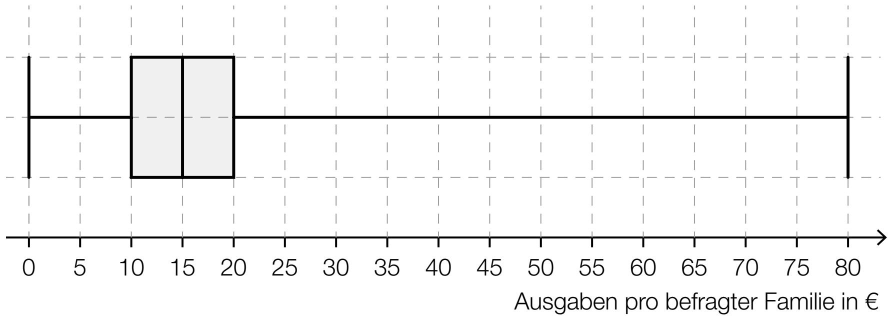


* ehemalige Klausuraufgabe

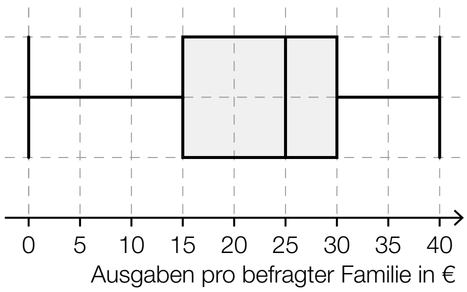
b) In einem Vergnügungspark werden Familien nach ihren Ausgaben befragt.

Die beiden nachstehenden Boxplots veranschaulichen die Ausgaben der befragten Familien für die Attraktionen und jene für Essen und Getränke.

Attraktionen:



Essen und Getränke:



Andreas behauptet, aus den beiden Boxplots Folgendes ablesen zu können: „Es gibt mit Sicherheit mindestens eine Familie, die insgesamt 120 Euro für Attraktionen sowie Essen und Getränke ausgibt.“

– Argumentieren Sie, dass die Behauptung von Andreas falsch ist.

c) Aus Erfahrung weiß man, dass eine bestimmte Attraktion des Vergnügungsparks von jeder Person mit der Wahrscheinlichkeit p genutzt wird.

Es werden 10 Personen zufällig ausgewählt.

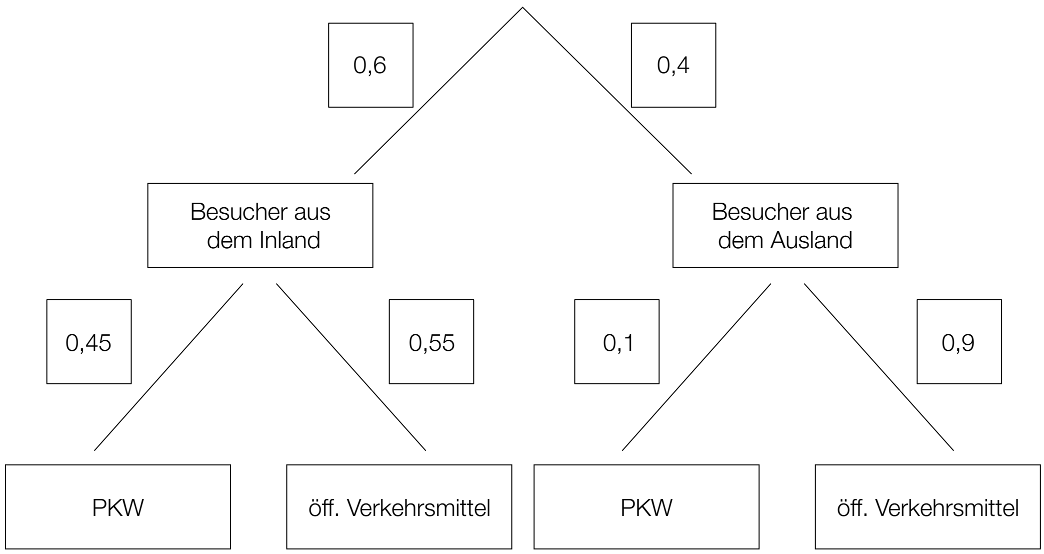
– Kreuzen Sie dasjenige Ereignis E an, für dessen Wahrscheinlichkeit gilt:
$P(E) = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot (1 - p)^7$ *[1 aus 5]*

Genau 3 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Maximal 7 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Mindestens 7 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Genau 7 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐
Höchstens 3 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Die Behauptung von Andreas ist falsch, weil nicht sicher ist, dass dieselbe Familie die maximalen Beträge von 80 Euro für Attraktionen und von 40 Euro für Essen und Getränke ausgibt.

c)

Genau 3 der 10 Personen nutzen die Attraktion.	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms

b) 1 × D: für die richtige Argumentation

c) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Rohmilchproduktion*

Aufgabennummer: A_252		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Im Jahr 1995 betrug die Rohmilchproduktion der Kühe in Österreich insgesamt 2,948 Millionen Tonnen, im Jahr 2013 betrug sie 3,393 Millionen Tonnen. Die jährliche absolute Zunahme der Rohmilchproduktion wird als konstant angenommen.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f, die die Rohmilchproduktion in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1995.
– Berechnen Sie mithilfe der Funktion f die voraussichtliche Rohmilchproduktion im Jahr 2017.

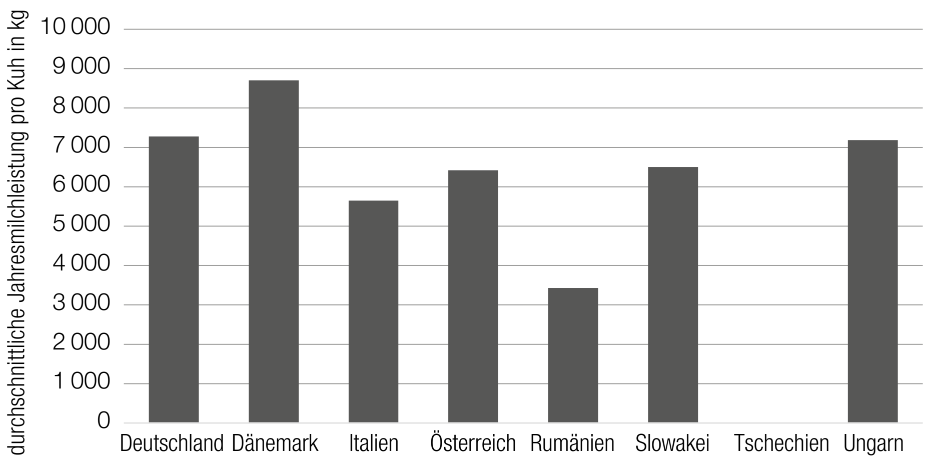
* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Tabelle ist die durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh in Kilogramm (kg) für einige ausgewählte europäische Länder im Jahr 2012 angegeben.

Land	durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh in kg
Deutschland	7280
Dänemark	8701
Italien	5650
Österreich	6418
Rumänien	3429
Slowakei	6501
Tschechien	7705
Ungarn	7184

– Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh in Dänemark höher als jene in Rumänien war.

Diese Daten sind, mit Ausnahme der durchschnittlichen Jahresmilchleistung pro Kuh in Tschechien, im nachstehenden Diagramm dargestellt.



– Zeichnen Sie im obigen Diagramm die fehlende Säule für Tschechien ein.

c) In Österreich produzierte Rohmilch enthält unmittelbar nach dem Melken durchschnittlich 20 000 Keime pro Milliliter (ml). Ein Modell geht davon aus, dass sich die Anzahl der Keime alle 25 Minuten verdoppelt.

– Argumentieren Sie, dass die unten angegebene Funktion N nicht diesem Modell entspricht.

$N(t) = 20\,000 + 800 \cdot t$

t … Zeit nach dem Melken in min
$N(t)$ … Anzahl der Keime pro ml zur Zeit t

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Aufgrund der konstanten absoluten Zunahme handelt es sich um eine lineare Funktion.

$k = \frac{3{,}393 - 2{,}948}{18} = 0{,}02472... \approx 0{,}0247$

$f(t) = 0{,}0247 \cdot t + 2{,}948$

t ... Zeit in Jahren seit 1995

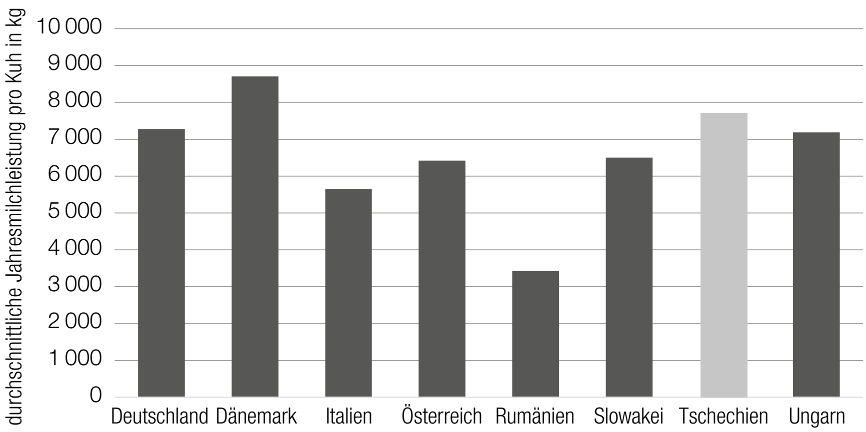
$f(t)$ ... jährliche Rohmilchproduktion zur Zeit t in Millionen Tonnen

$f(22) = 3{,}4918...$

Gemäß diesem Modell beträgt die voraussichtliche jährliche Rohmilchproduktion im Jahr 2017 in Österreich rund 3,492 Millionen Tonnen.

b) $\frac{8\,701 - 3\,429}{3\,429} = 1{,}53747... \approx 153{,}75\ \%$

In Dänemark war die durchschnittliche Jahresmilchleistung pro Kuh im Jahr 2012 um rund 153,75 % höher als in Rumänien.



Toleranzbereich: Höhe der Säule klar erkennbar größer als 7 500 kg und kleiner als 8 000 kg eingezeichnet

c) Aus der Angabe der konstanten Verdoppelungszeit geht hervor, dass es sich um exponentielles Wachstum handelt, nicht um lineares. Deshalb ist N nicht zur Beschreibung geeignet.

oder:

rechnerische Überprüfung: z. B. $N(50) = 60\,000 \neq 20\,000 \cdot 4$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion f
1 × B: für die richtige Berechnung der jährlichen Rohmilchproduktion im Jahr 2017

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes
1 × A: für das richtige Einzeichnen der fehlenden Säule (Höhe der Säule klar erkennbar größer als 7 500 kg und kleiner als 8 000 kg eingezeichnet)

c) 1 × D: für die richtige Argumentation

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Wechselkurse*

Aufgabennummer: A_169

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für einen Urlaub außerhalb der Eurozone muss Geld in die entsprechende Landeswährung gewechselt werden.

a) Ein Wechselvorgang wird folgendermaßen durchgeführt:
Vom zu wechselnden Betrag B in Euro wird eine fixe Gebühr G in Euro abgezogen.
Der verbleibende Betrag wird mit dem Wechselkurs w multipliziert und so erhält man den auszuzahlenden Betrag F in der Fremdwährung.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von F aus B, G und w.

$F =$ ____

b) Für die bargeldlose Bezahlung in einem Urlaubsland außerhalb der Eurozone stehen einer Urlauberin zwei Umrechnungsmöglichkeiten A und B zur Verfügung.
Zur Umrechnung eines Fremdwährungsbetrags in den entsprechenden Eurobetrag werden modellhaft die nachstehenden linearen Funktionen verwendet:

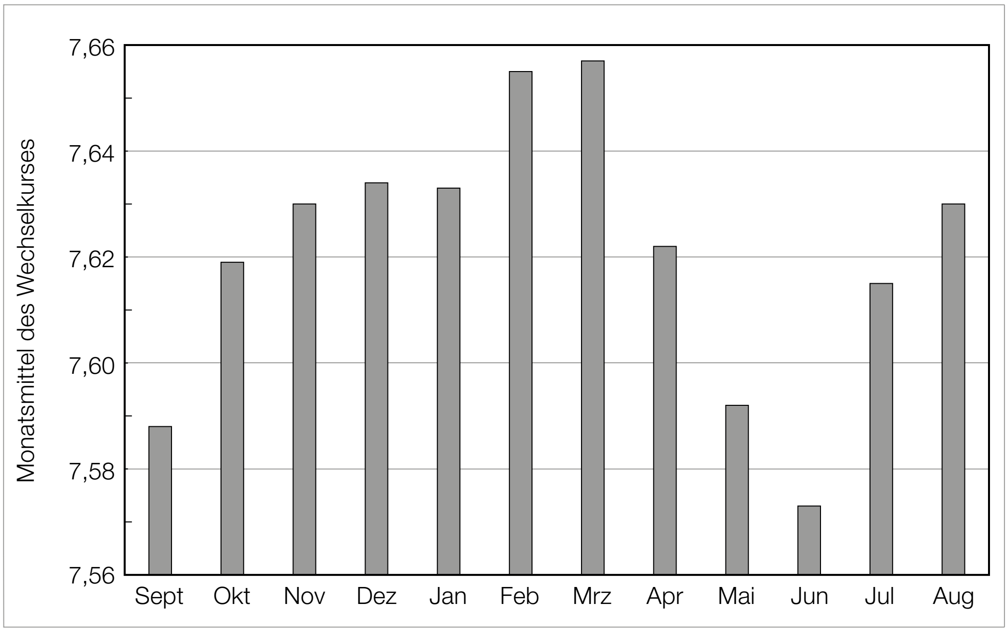
Möglichkeit A: $E_A(F) = 0{,}134 \cdot F + 3{,}83$
Möglichkeit B: $E_B(F) = 0{,}135 \cdot F + 2{,}02$

F ... Betrag in der Fremdwährung
$E_A(F)$, $E_B(F)$ ... dem Fremdwährungsbetrag F entsprechender Eurobetrag

– Ermitteln Sie, für welche Beträge in der Fremdwährung die Bezahlung mit der Möglichkeit A für die Urlauberin günstiger ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Monatsmittel des Wechselkurses einer Fremdwährung gegenüber dem Euro sind für ein Jahr im unten stehenden Diagramm dargestellt.



Jemand behauptet: „Das Monatsmittel des Wechselkurses im Monat Oktober war ungefähr doppelt so groß wie das Monatsmittel des Wechselkurses im Monat September, weil der entsprechende Balken im Diagramm ungefähr doppelt so hoch ist.“

– Erklären Sie, warum diese Argumentation falsch ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $F = (B - G) \cdot w$

b) $0{,}134 \cdot F + 3{,}83 = 0{,}135 \cdot F + 2{,}02$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $F = 1\,810$

Für Beträge in der Fremdwährung, die größer als 1 810 sind, ist die Möglichkeit *A* für die Urlauberin günstiger.

c) Diese Argumentation ist falsch, weil die Skalierung der *y*-Achse nicht bei 0 „beginnt“, sondern bei 7,56.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von *F* aus *B*, *G* und *w*

b) 1 × A: für die richtige Modellierung
1 × B: für das richtige Ermitteln der Beträge in der Fremdwährung, für die die Bezahlung mit der Möglichkeit *A* für die Urlauberin günstiger ist

c) 1 × D: für die richtige Erklärung, warum diese Argumentation falsch ist

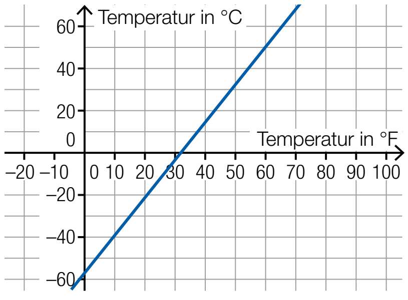
Temperaturmessung

a) Die Umrechnung einer Temperatur T_F in Grad Fahrenheit (°F) auf eine Temperatur T_C in Grad Celsius (°C) erfolgt nach folgender Formel:

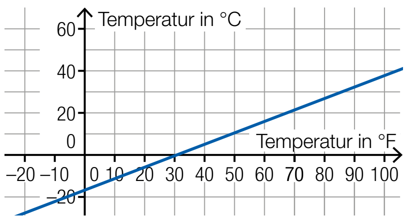
$$T_C = \frac{5}{9} \cdot (T_F - 32)$$

T_F … Temperatur in °F
T_C … Temperatur in °C

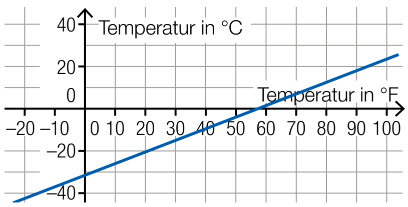
1) Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die dieser Formel entspricht. *[1 aus 5]*



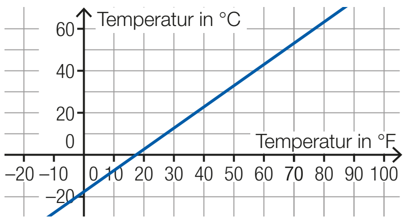
☐



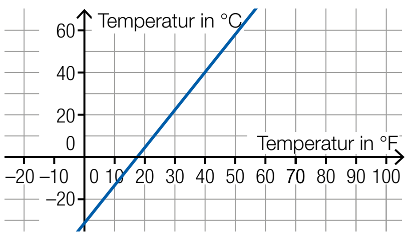
☐



☐



☐



☐

b) Eine alte Temperatureinheit aus dem Jahr 1701 ist Grad Rømer (°Rø). Der Zusammenhang mit der Temperaturskala nach Kelvin ist durch die nachstehende Formel gegeben.

$T_R = (T_K - 273{,}15) \cdot \frac{21}{40} + 7{,}5$

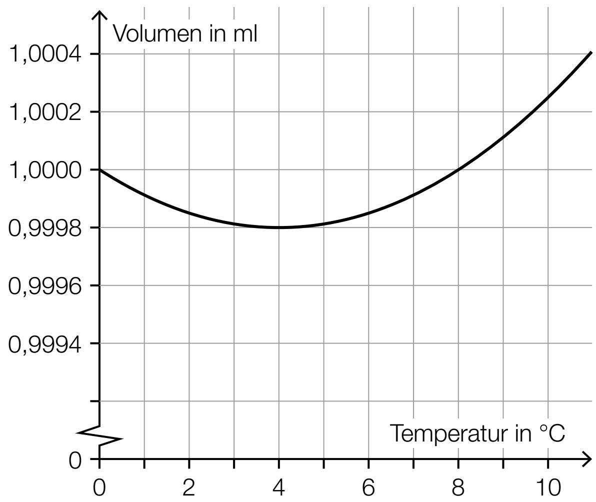
T_K ... Temperatur in Kelvin
T_R ... Temperatur in Grad Rømer

1) Formen Sie diese Formel nach T_K um.

$T_K =$ ____________________________

2) Beschreiben Sie, wie sich die Temperatur in Grad Rømer ändert, wenn die Temperatur um 1 Kelvin zunimmt.

c) In der nachstehenden Grafik ist das Volumen von 1 g Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt.

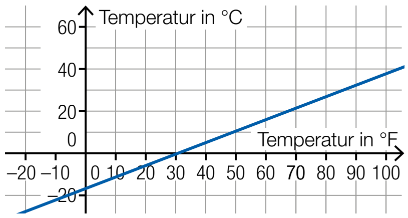


Der dargestellte Verlauf kann durch die quadratische Funktion V beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der obigen Grafik eine Gleichung der Funktion V auf.

Möglicher Lösungsweg

a1)

	☒

b1) $T_K = \frac{40}{21} \cdot (T_R - 7{,}5) + 273{,}15$

b2) Die Temperatur nimmt um $\frac{21}{40}$ °Rø = 0,525 °Rø zu.

c1) T ... Temperatur in °C
$V(T)$ ... Volumen bei der Temperatur T in ml
$V(0) = 1$
$V(4) = 0{,}9998$
$V(8) = 1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$V(T) = 0{,}0000125 \cdot T^2 - 0{,}0001 \cdot T + 1$

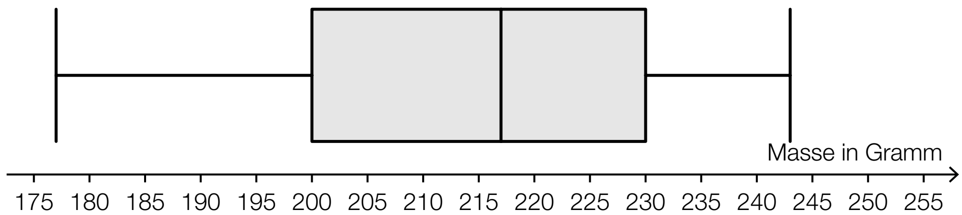
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Äpfel*

Aufgabennummer: A_170

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Äpfel einer Großlieferung wurden einzeln gewogen. Die Daten sind in Form eines Boxplots dargestellt:



In der Fachliteratur wird ein Wert oft als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet, wenn der Wert weiter als das 1,5-Fache des Interquartilsabstands rechts vom 3. Quartil liegt. Solche Ausreißer sind im obigen Boxplot nicht berücksichtigt.

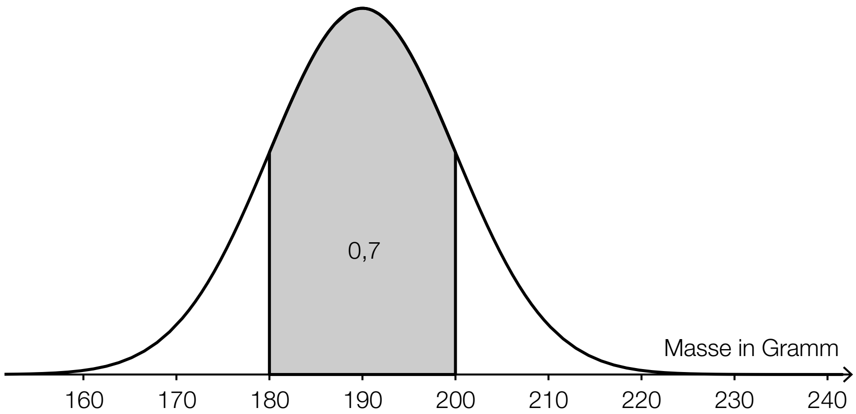
– Geben Sie an, ab welcher Masse ein Apfel als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet wird.

b) Die Masse von Äpfeln einer bestimmten Sorte ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 200 g und einer Standardabweichung von 50 g.

– Berechnen Sie dasjenige um den Erwartungswert symmetrische Intervall, in dem die Masse eines zufällig ausgewählten Apfels mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Masse der Äpfel in einer Lieferung ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 190 g.
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



– Interpretieren Sie die Bedeutung der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang.
– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig ausgewählter Apfel eine Masse von mehr als 200 g hat.

d) Aus Erfahrung ist bekannt, dass $\frac{1}{30}$ aller Äpfel einer Lieferung wurmstichig ist.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zufallsstichprobe von 200 Äpfeln höchstens 5 Äpfel wurmstichig sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Interquartilsabstand: 230 – 200 = 30
3. Quartil: 230
$230 + 1{,}5 \cdot 30 = 275$

Äpfel mit einer Masse von mehr als 275 g werden als „Ausreißer nach oben" bezeichnet.

b) Berechnung des symmetrischen Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a < X < \mu + a) = 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad [117{,}8;\ 282{,}2]$

c) Ein zufällig ausgewählter Apfel hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % eine Masse zwischen 180 g und 200 g.

Aufgrund der Symmetrie der Glockenkurve gilt:
$P(X > 200) = 15\ \%$

d) X ... Anzahl der wurmstichigen Äpfel
Binomialverteilung mit $n = 200$ und $p = \frac{1}{30}$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 5) = 0{,}34133... \approx 34{,}13\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Angeben der Masse, ab der ein Apfel als „Ausreißer nach oben" bezeichnet wird

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des symmetrischen Intervalls

c) 1 × C1: für die richtige Interpretation der Fläche im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit

d) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Unter Wasser*

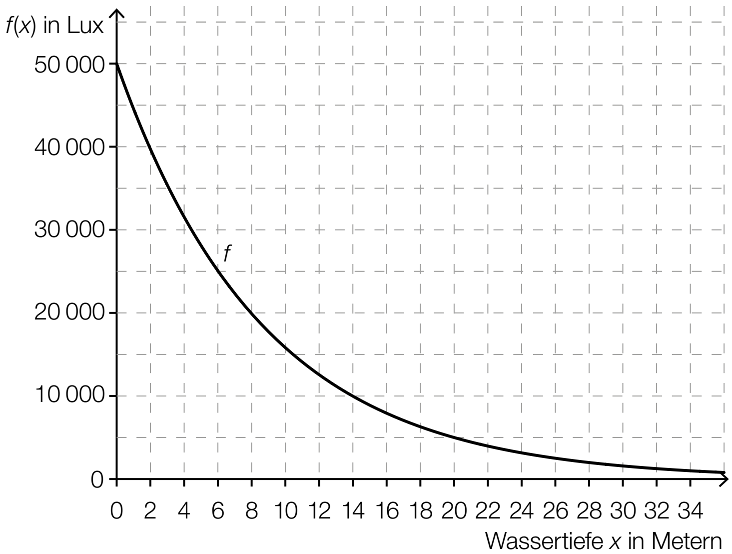
Aufgabennummer: A_178

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Direkt unter der Wasseroberfläche beträgt der Druck 1 Bar. Der Druck nimmt mit zunehmender Wassertiefe gleichmäßig zu, und zwar um 1 Bar je 10 Meter Wassertiefe.

– Berechnen Sie, in welcher Wassertiefe ein Druck von 3,9 Bar herrscht.

b) Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion *f* beschrieben werden. Der Graph von *f* ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.
– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion *f*.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Zur Ermittlung der Schallgeschwindigkeit unter Wasser wurde eine Messung durchgeführt. Der Schall benötigte 0,4 Millisekunden, um eine Strecke der Länge 0,57 Meter zurückzulegen.

– Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde mit den Daten dieses Versuchs.

d) Durch eine bestimmte Tauchermaske werden alle Gegenstände unter Wasser um ein Drittel größer wahrgenommen, als sie tatsächlich sind.

– Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die tatsächliche Größe kleiner als die wahrgenommene Größe ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $3{,}9 = 1 + 0{,}1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 29$
In einer Wassertiefe von 29 Metern herrscht ein Druck von 3,9 Bar.

b) In einer Tiefe von 20 Metern beträgt die Beleuchtungsstärke 5000 Lux.
Toleranzbereich: [19,5; 20,5]
$f(x) = a \cdot b^x$
$a = 50\,000$
$5\,000 = 50\,000 \cdot b^{20} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[20]{0{,}1} = 0{,}8912... \approx 0{,}891$
$f(x) = 50\,000 \cdot 0{,}891^x$
Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

c) $v = \frac{s}{t} = \frac{0{,}57}{0{,}4 \cdot 10^{-3}}$ m/s $= 1\,425$ m/s

d) tatsächliche Größe: x
wahrgenommene Größe: $w = \frac{4}{3} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{4} \cdot w$

Die tatsächliche Größe ist um 25 % kleiner als die wahrgenommene Größe.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wassertiefe mit 3,9 Bar Druck

b) 1 × C: für das richtige Ablesen der Wassertiefe im Toleranzbereich [19,5; 20,5]
1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Schallgeschwindigkeit in m/s

d) 1 × A: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes

Maibaum aufstellen*

Aufgabennummer: A_179

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Ein Maibaum der Höhe H steht senkrecht auf einem horizontalen Gelände.

a) Ein Maibaum der Höhe H wirft zu einem bestimmten Zeitpunkt einen 10,00 m langen Schatten. Die Sonne erscheint dabei unter dem Höhenwinkel α.

Hans stellt sich so hin, dass sein Schatten an derselben Stelle endet wie jener des Maibaums. Hans ist 1,76 m groß und ist 8,50 m vom Maibaum entfernt.

– Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in einer Skizze, in der die gegebenen Größen sowie der Höhenwinkel α und die Höhe H beschriftet sind.
– Berechnen Sie den Höhenwinkel α.

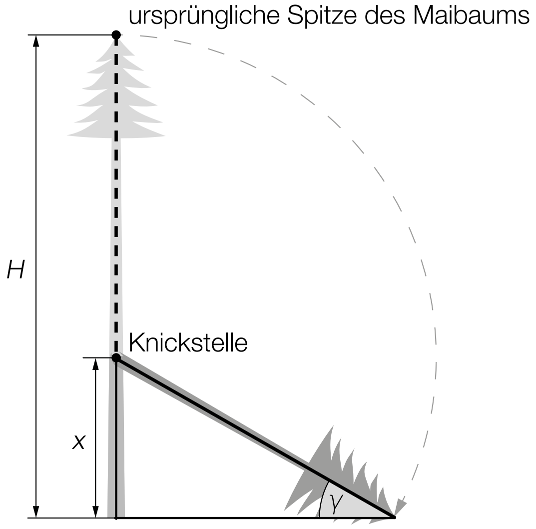
b) Martin misst in einer horizontalen Entfernung von 50 m vom Maibaum den Höhenwinkel $\beta = 26{,}6°$ zur Spitze des Maibaums. Anschließend verkürzt er seine horizontale Entfernung auf die Hälfte.
Er behauptet, dass sich dadurch der Höhenwinkel zur Spitze verdoppelt hat.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob Martins Behauptung richtig ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Bei einem starken Unwetter knickt ein Maibaum der Höhe H um.

Der geknickte Teil schließt mit dem horizontalen Boden einen Winkel γ ein (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).



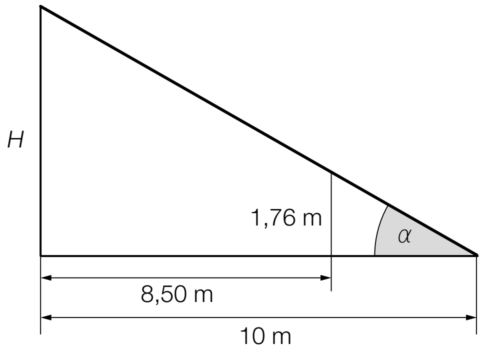
– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus H und γ auf.

$x =$ ____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$\tan(\alpha) = \frac{1{,}76}{1{,}5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 49{,}55...° \approx 49{,}6°$

b) $\tan(26{,}6°) = \frac{H}{50} \quad \Rightarrow \quad H = 25{,}03...$

$\tan(\gamma) = \frac{H}{25} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 45{,}04...° \approx 45{,}0°$

Die Behauptung stimmt also nicht, weil $2 \cdot 26{,}6° \neq 45{,}0°$.

Auch eine richtige Argumentation mithilfe der allgemeinen Eigenschaften der Tangensfunktion ist zulässig.

c) $\sin(\gamma) = \frac{x}{H - x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{H \cdot \sin(\gamma)}{1 + \sin(\gamma)}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen aller Größen in der Skizze
1 × B: für die richtige Berechnung des Höhenwinkels α

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis
Auch eine richtige Argumentation mithilfe der allgemeinen Eigenschaften der Tangensfunktion ist zulässig.

c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Buchsbäume*

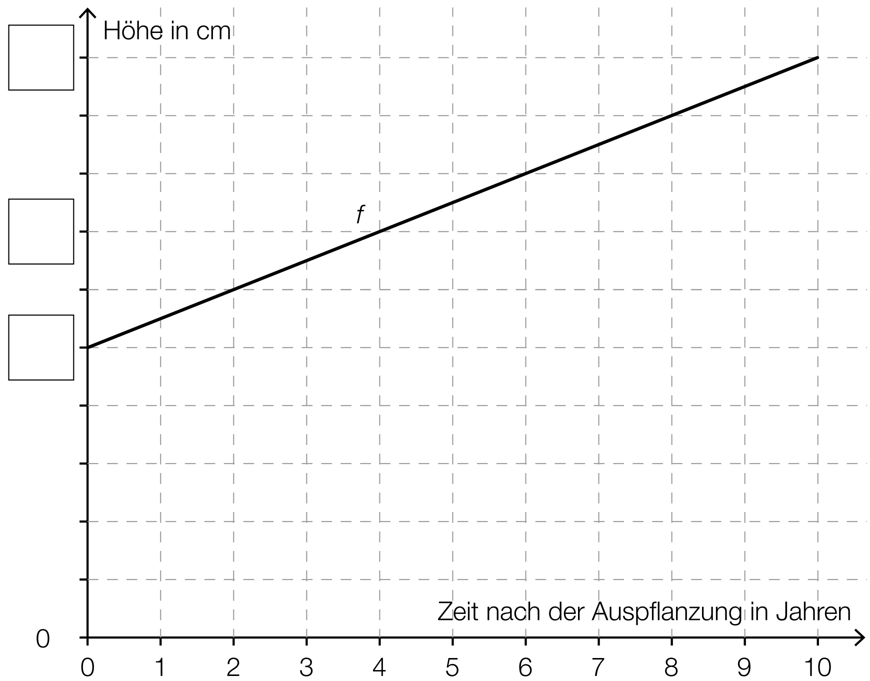
Aufgabennummer: A_186

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Buchsbäume werden in verschiedenen Sorten mit unterschiedlichem Höhenwachstum angeboten.

a) Ein bestimmter Buchsbaum der Sorte *A* wuchs in den ersten 10 Jahren nach der Auspflanzung jeweils 3 cm pro Jahr. 4 Jahre nach der Auspflanzung hatte der Buchsbaum eine Höhe von 42 cm. Die Höhe des Buchsbaums in Abhängigkeit von der Zeit nach der Auspflanzung wird durch eine lineare Funktion *f* beschrieben. Der Graph dieser Funktion ist im nachstehenden Koordinatensystem dargestellt. Dabei fehlt die Skalierung der vertikalen Achse.

– Tragen Sie die fehlenden Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

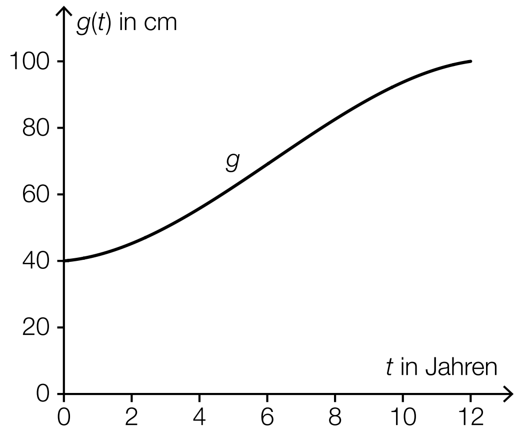


* ehemalige Klausuraufgabe

b) In den ersten 12 Jahren nach der Auspflanzung kann die Höhe eines Buchsbaums der Sorte *B* näherungsweise durch die Funktion *g* beschrieben werden:

$g(t) = -0{,}053 \cdot t^3 + 0{,}98 \cdot t^2 + 0{,}872 \cdot t + 40$ mit $0 \leq t \leq 12$

t ... Zeit nach der Auspflanzung des Buchsbaums in Jahren
$g(t)$ ... Höhe des Buchsbaums zur Zeit t in cm

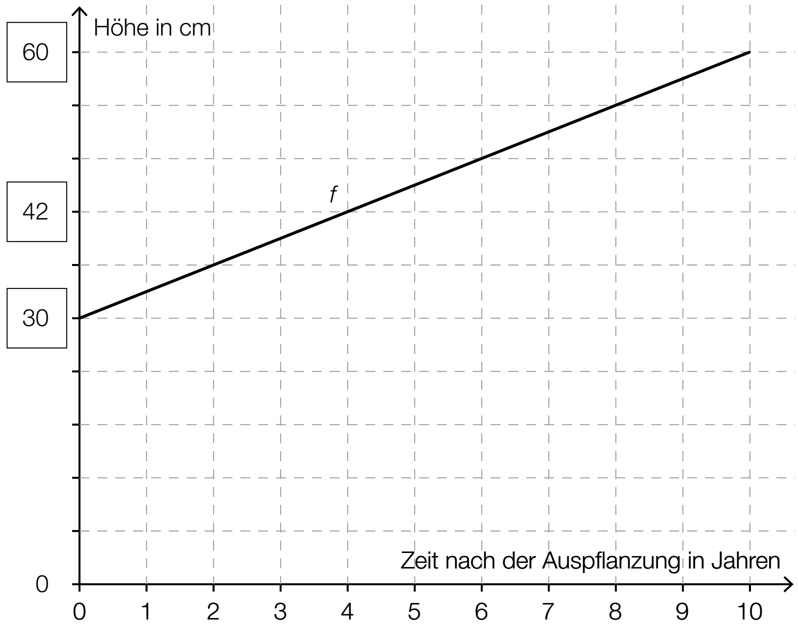


– Berechnen Sie den Zeitpunkt des stärksten Höhenwachstums.
– Beschreiben Sie, was mit folgendem Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$g(5) - g(0)$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Zeitpunkt des stärksten Höhenwachstums: $g''(t) = 0$
Berechnung mittels Technologieeinsatz: $t = 6{,}16... \approx 6{,}2$

Etwa 6,2 Jahre nach der Auspflanzung ist das Höhenwachstum am größten.

Mit dem Ausdruck $g(5) - g(0)$ wird der (absolute) Höhenzuwachs in cm in den ersten 5 Jahren nach der Auspflanzung berechnet.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Werte

b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunkts des stärksten Höhenwachstums
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Wendestelle das stärkste Höhenwachstum vorliegt. Eine rechnerische Überprüfung des Steigungsverhaltens der Funktion an der berechneten Stelle sowie eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.)
1 × C: für die richtige Beschreibung des Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang

Werbedruck

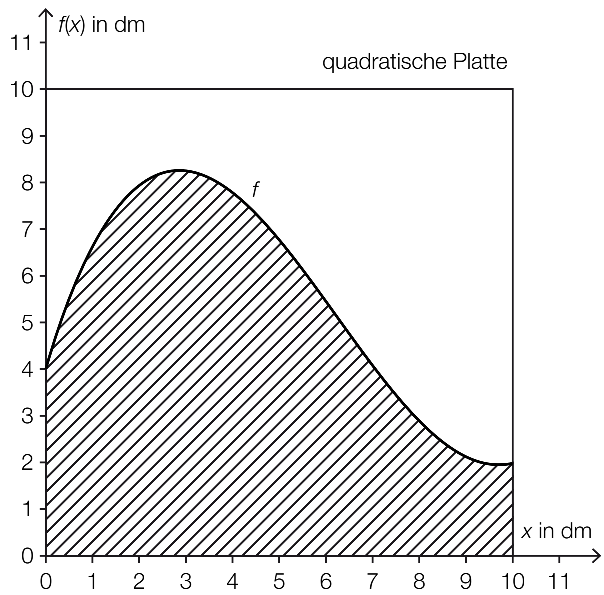
Aufgabennummer: A_173		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Eine Großbank erteilt einer Druckerei den Auftrag, ihre Bankenlogos anzufertigen.

a) Das Logo wird auf quadratische Platten gedruckt. Die Begrenzungslinie des Logos wird durch die Funktion f beschrieben.

$$f(x) = \frac{1}{25} \cdot x^3 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{33}{10} \cdot x + 4$$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in dm



– Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.

b) Für die Druckerei fallen bei der Produktion des Bankenlogos folgende Kosten an:

produzierte Stückzahl x	0	10	20
Gesamtkosten K in Euro	500	600	640

Die Kosten werden mit einer quadratischen Funktion modelliert:

$K(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … produzierte Stückzahl
$K(x)$ … Gesamtkosten für x Stück in Euro

– Stellen Sie mithilfe der Informationen aus der gegebenen Tabelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c auf.

Ersetzen Sie in der Tabelle den Betrag von 600 Euro durch 570 Euro.

– Argumentieren Sie mithilfe des Differenzenquotienten, warum nun ein lineares Modell zur Beschreibung geeignet ist.

c) Für jedes produzierte Stück beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass es unbrauchbar ist, 3 %. Täglich werden 80 Stück unabhängig voneinander hergestellt.

– Beschreiben Sie, welche Wahrscheinlichkeit mit dem Ausdruck $1 - 0{,}97^{80}$ berechnet wird.

d) Die Druckerei bietet zwei qualitativ unterschiedliche Drucktechniken A und B an.
Der Verbrauch an Druckfarbe pro Farbpunkt wird wie folgt angegeben:
Drucktechnik A: $8 \cdot 10^{-9}$ Liter
Drucktechnik B: 0,000000012 Liter

– Geben Sie diese beiden Verbrauchswerte in Nanolitern an.
– Berechnen Sie, wie viel Prozent Druckfarbe durch die sparsamere Drucktechnik gespart werden kann.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = \int_0^{10} \left(\frac{1}{25} \cdot x^3 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{33}{10} \cdot x + 4\right) \mathrm{d}x = 55 \text{ dm}^2$

b) $K(0) = 500 \quad \Rightarrow \quad 500 = c$
$K(10) = 600 \quad \Rightarrow \quad 600 = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$
$K(20) = 640 \quad \Rightarrow \quad 640 = 400 \cdot a + 20 \cdot b + c$

Differenzenquotient im Intervall [0; 10]:
$\frac{570 - 500}{10 - 0} = \frac{70}{10} = 7$

Differenzenquotient im Intervall [10; 20]:
$\frac{640 - 570}{20 - 10} = \frac{70}{10} = 7$

Alternative Argumentation in Worten:
Wenn die Produktion jeweils um 10 Stück steigt, steigen die Kosten jeweils um 70 Euro, bzw. konstanter Differenzenquotient 7.

c) Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass mindestens 1 Stück einer Tagesproduktion unbrauchbar ist.

d) Drucktechnik A: 8 Nanoliter
Drucktechnik B: 12 Nanoliter

$\frac{8 - 12}{12} = -0{,}333...$

Es können rund 33 % Druckerfarbe gespart werden.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 1
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 1
d) leicht	d) 2

Thema: Wirtschaft

Quellen: —

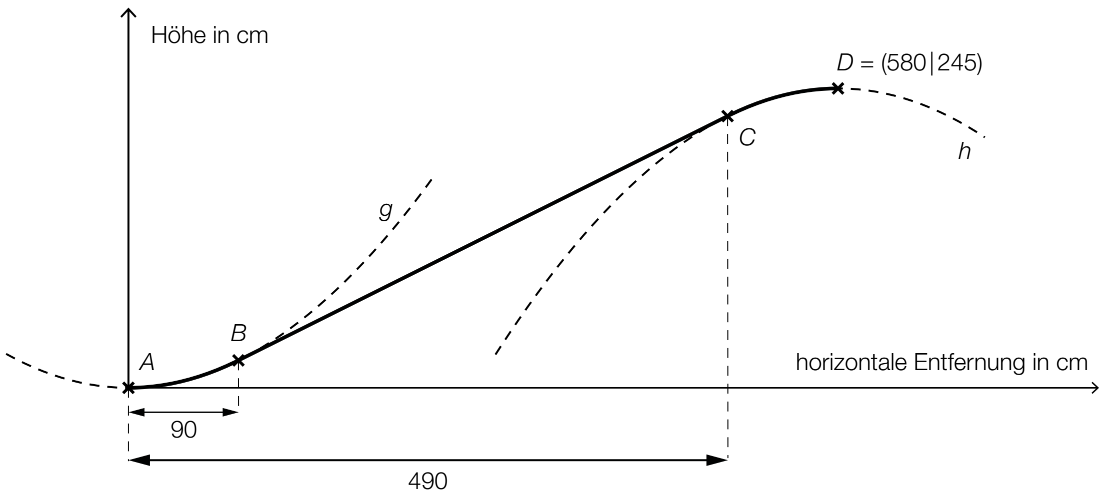
![BMB Bundesministerium für Bildung]

Rolltreppen*

Aufgabennummer: A_259

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die nachstehende Abbildung zeigt den schematischen Verlauf einer Rolltreppe. Dieser Verlauf setzt sich aus 2 Parabelstücken (Graphen der Funktionen g und h) zwischen den Punkten A und B bzw. C und D sowie einem geradlinig verlaufenden Stück zwischen den Punkten B und C zusammen. Die Übergänge in den Punkten B und C erfolgen knickfrei (das bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben).



Für die Funktion g gilt:

$g(x) = \frac{1}{360} \cdot x^2$

x ... horizontale Entfernung von der Einstiegsstelle in cm
$g(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

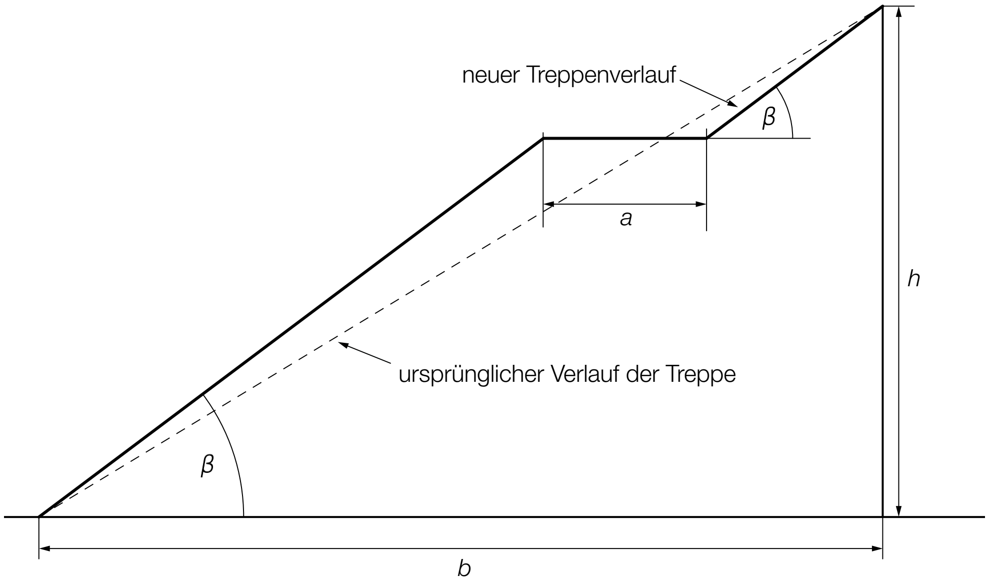
– Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion g im Punkt B eine Steigung von 50 % aufweist.

Bei der Ausstiegsstelle (Punkt D) verläuft die Rolltreppe waagrecht.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ermittelt werden können.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Parallel zu einer Rolltreppe verläuft eine Treppe.
Bei der Erneuerung der Treppe soll ein Treppenabsatz eingebaut werden (siehe nachstehende Abbildung).



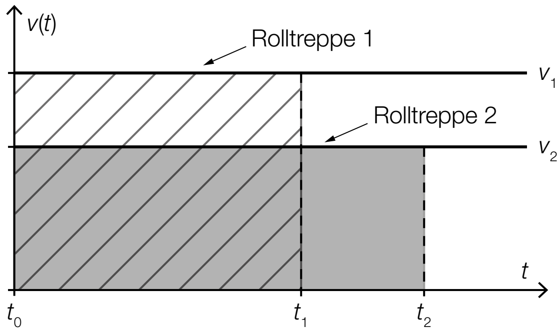
– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Steigungswinkels β aus b, h und a.

$\beta =$ ____

Der Steigungswinkel der ursprünglichen Treppe war kleiner als 45°.

– Erklären Sie, welche Bedingung für a gelten muss, damit auch β kleiner als 45° ist.

c) Im nachstehenden Diagramm sind die Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen v_1 und v_2 der Stufen zweier Rolltreppen dargestellt.



– Interpretieren Sie, was es im gegebenen Sachzusammenhang bedeutet, dass die beiden gekennzeichneten Flächeninhalte gleich groß sind.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $g'(x) = \frac{1}{180} \cdot x$

$g'(90) = 0{,}5$

Die Steigung beträgt also 50 %.

$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$h'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$h(580) = 245$

$h'(580) = 0$

$h'(490) = 0{,}5$

oder:

$a \cdot 580^2 + b \cdot 580 + c = 245$

$2 \cdot a \cdot 580 + b = 0$

$2 \cdot a \cdot 490 + b = 0{,}5$

b) $\beta = \arctan\left(\frac{h}{b-a}\right)$

Ein Steigungswinkel von genau 45° würde bedeuten, dass h und $b - a$ gleich lang sind.

$h = b - a \quad \Rightarrow \quad a = b - h$

Ist $a < b - h$, so ist der Winkel β kleiner als 45°.

c) Die Stufen von Rolltreppe 1 legen im Zeitintervall $[t_0; t_1]$ den gleichen Weg zurück wie die Stufen von Rolltreppe 2 im Zeitintervall $[t_0; t_2]$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für den richtigen rechnerischen Nachweis
1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Koordinaten des Punktes D
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Informationen zur Steigung

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
1 × D: für die richtige Erklärung

c) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

Buntes Spielzeug*

Aufgabennummer: A_260

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Spielzeugteile werden von einer Maschine in den Farben Rot, Gelb und Blau eingefärbt.

a) Die 3 zur Produktion notwendigen Farbdüsen arbeiten (unabhängig voneinander) jeweils mit unterschiedlicher Qualität. Die Farbe Rot wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 96,8 %, die Farbe Gelb mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,3 % und die Farbe Blau mit einer Wahrscheinlichkeit von 97,2 % so auf die Teile aufgetragen, dass diese die Qualitätskontrolle bestehen.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau die Qualitätskontrolle besteht.
– Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang für ein zweifärbiges Spielzeugteil, dessen Wahrscheinlichkeit durch $P(E) = 1 - (0{,}968 \cdot 0{,}983)$ berechnet wird.

b) Die einfärbigen Spielzeugteile einer Produktion werden vermessen und ihre jeweiligen Längen werden tabellarisch erfasst.

rote Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
4,5	20
5,6	10
6,0	20
6,5	15
25,3	5

gelbe Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
5,5	25
10,0	7
14,5	13

blaue Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
7,0	70

– Ermitteln Sie den Median der Längen der gelben Spielzeugteile.
– Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Längen der blauen Spielzeugteile gleich groß ist wie das arithmetische Mittel der Längen der roten Spielzeugteile.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) E ... zweifärbiger Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau besteht die Kontrolle

$P(E) = 0{,}968 \cdot 0{,}972 = 0{,}9408...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 94,1 %.

$\bar{E}$ steht in diesem Sachzusammenhang für das Ereignis, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Gelb die Kontrolle nicht besteht.

b) Median der Längen der gelben Spielzeugteile: $\tilde{x} = 5{,}5$ cm

$$\bar{x}_{\text{rot}} = \frac{20 \cdot 4{,}5\text{ cm} + 10 \cdot 5{,}6\text{ cm} + 20 \cdot 6{,}0\text{ cm} + 15 \cdot 6{,}5\text{ cm} + 5 \cdot 25{,}3\text{ cm}}{70} = 7{,}0\text{ cm}$$

$\bar{x}_{\text{blau}} = 7{,}0$ cm

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C: für das richtige Ermitteln des Medians
1 × D: für den richtigen Nachweis

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Erfassen der Geschwindigkeit*

Aufgabennummer: A_196

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Auf einer Teststrecke werden Messungen durchgeführt.

a) Die Teststrecke beginnt bei einem Stoppschild. Die Messergebnisse für ein Auto auf dieser Strecke sind in folgender Tabelle angegeben:

	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2
Zeit t in min	0	1	2,5
zurückgelegter Weg $s_1(t)$ in km	0	1	3

Der zurückgelegte Weg soll in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall [0; 2,5] durch eine Polynomfunktion s_1 mit $s_1(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion s_1.
– Berechnen Sie diese Koeffizienten.

b) Der zurückgelegte Weg eines anderen Autos kann näherungsweise durch die Funktion s_2 beschrieben werden:

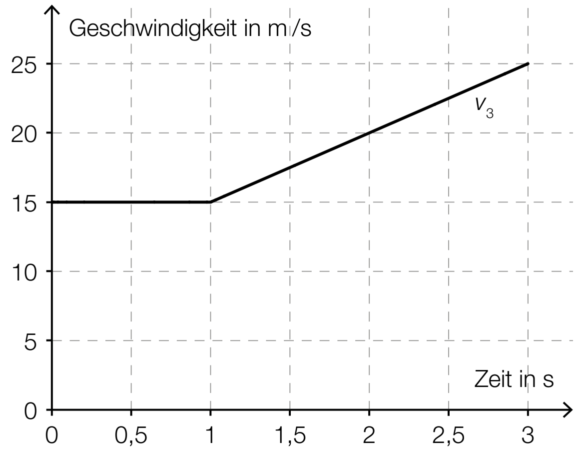
$s_2(t) = -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t$ mit $0 \leq t \leq 3$

t ... Zeit in min
$s_2(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in km

– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Geschwindigkeit dieses Autos zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls null ist.
– Berechnen Sie, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung des Autos im angegebenen Zeitintervall null ist.
– Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit zu dieser Zeit t_0 maximal ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos kann im Zeitintervall [0; 3] näherungsweise durch die Funktion v_3 beschrieben werden. Der Graph dieser Funktion v_3 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s_3 im Zeitintervall [1; 3] mit $s_3(1) = 15$.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $s_1(0) = 0$
$s_1(1) = 1$
$s_1(2{,}5) = 3$

oder:

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$3 = a \cdot 2{,}5^2 + b \cdot 2{,}5 + c$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{15}$
$b = \frac{13}{15}$
$c = 0$

b) $v_2(t) = s_2'(t) = -t^2 + 4 \cdot t + \frac{1}{3}$

$v_2(0) = \frac{1}{3} \neq 0$

Das Auto hatte zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls eine Geschwindigkeit ungleich 0.

$a_2(t) = s_2''(t) = -2 \cdot t + 4$

$a_2(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2$

An der Stelle $t_0 = 2$ gilt:

$v_2'(2) = a_2(2) = 0$

$v_2''(2) = a_2'(2) = -2 < 0$

Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 maximal ist.
Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c) $v_3(t) = 5 \cdot t + 10$ mit $1 \leq t \leq 3$
Integrieren ergibt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + C$
Wegen $s_3(1) = 15$ gilt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + \frac{5}{2}$ mit $1 \leq t \leq 3$
t ... Zeit in s
$s_3(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b) 1 × D1: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit ungleich null ist
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeit t_0
1 × D2: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 maximal ist
Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

Bevölkerungsentwicklung*

Aufgabennummer: A_218

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In manchen Orten Österreichs, z. B. in der steirischen Gemeinde Eisenerz, nimmt die Bevölkerungszahl ab. Zur mathematischen Beschreibung dieser Entwicklung können verschiedene Modelle verwendet werden.

a) Zu Beginn des Jahres 1992 lebten in der steirischen Gemeinde Eisenerz 7 965 Menschen, zu Beginn des Jahres 2014 waren es 4 524.

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl in Eisenerz soll näherungsweise durch eine lineare Funktion N_1 beschrieben werden.

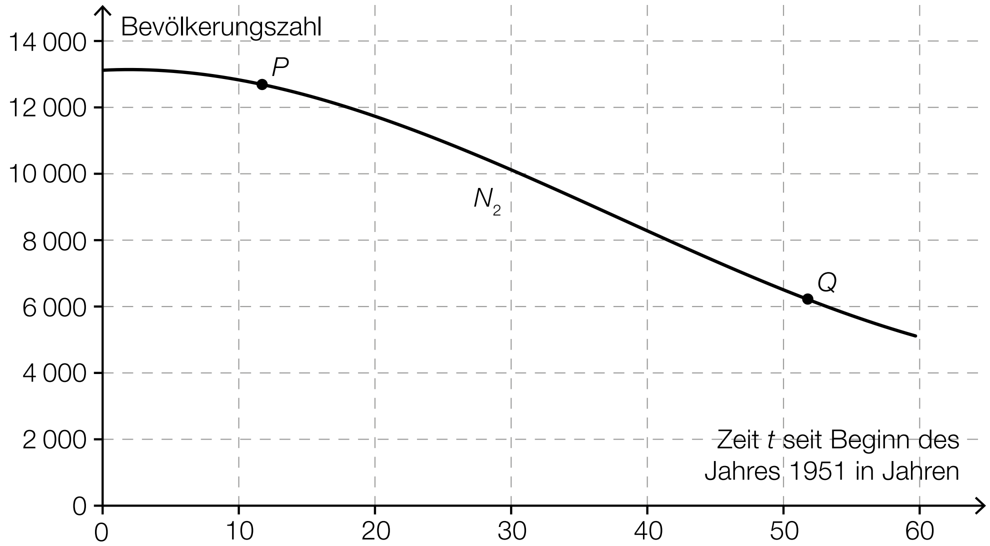
– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion N_1.

t … Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1992
$N_1(t)$ … Bevölkerungszahl zur Zeit t

– Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Funktion N_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im nachstehenden Diagramm wird die Entwicklung der Bevölkerungszahl von Eisenerz im Zeitraum von 1951 bis 2011 näherungsweise durch den Graphen der Polynomfunktion N_2 dargestellt.



– Ordnen Sie den Punkten P und Q jeweils die an der entsprechenden Stelle zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

P	
Q	

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

c) In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

Beginn des Jahres ...	1981	2014
Bevölkerungszahl	10068	4524

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N_3 beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N_3, die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.
– Ermitteln Sie mithilfe der Funktion N_3, welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $N_1(t) = k \cdot t + d$

$d = N_1(0) = 7\,965$

$k = \frac{4\,524 - 7\,965}{22} = -156{,}4...$

$N_1(t) = -156 \cdot t + 7\,965$

Im gegebenen Zeitraum nahm die Bevölkerungszahl im Mittel pro Jahr um etwa 156 Personen ab.

b)

P	C
Q	B

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

c) $N_3(t) = N_3(0) \cdot a^t$

$4\,524 = 10\,068 \cdot a^{33} \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}976...$

$N_3(t) = 10\,068 \cdot 0{,}976...^t$

oder: $N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$4\,524 = 10\,068 \cdot e^{-\lambda \cdot 33} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0{,}024...$

$N_3(t) = 10\,068 \cdot e^{-0{,}024... \cdot t}$

$N_3(49) = 3\,069{,}5...$

Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3 070 Personen zu erwarten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_1
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C: für die richtige Zuordnung

c) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_3
1 × B: für das richtige Ermitteln der Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030

Fußball*

Aufgabennummer: A_219

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Jedes Wochenende fiebern tausende Zuschauer/innen in den Stadien bei den Spielen der Fußball-Bundesliga mit ihren Mannschaften mit.

a) Um nach der Hälfte der Spiele einer Fußballsaison in der österreichischen Bundesliga die voraussichtliche Punktezahl einer Mannschaft am Saisonende schätzen zu können, wurde folgende Formel entwickelt:

$$P = \frac{T^{1,32}}{T^{1,32} + G^{1,32}} \cdot 36 \cdot 2{,}753$$

T ... geschossene Tore in der ersten Saisonhälfte
G ... erhaltene Tore (Gegentore) in der ersten Saisonhälfte
P ... voraussichtliche Punktezahl am Saisonende

Sturm Graz hat in der Saison 2013/14 in der ersten Saisonhälfte 25 Tore geschossen und 30 Tore erhalten.
Ein Fan will mit der angegebenen Formel die Punktezahl von *Sturm Graz* am Saisonende schätzen und tippt das Folgende in den Taschenrechner ein:

$$25^{1,32} : 25^{1,32} + 30^{1,32} \cdot 36 \cdot 2{,}753 = 8\,829{,}9...$$

– Beschreiben Sie, welcher Fehler dabei gemacht wurde.

Sturm Graz erreichte in der Saison 2013/14 in der ersten Saisonhälfte 19 Punkte und bis zum Saisonende insgesamt 48 Punkte.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob die Punktezahl, die man mit der obigen Formel erhält, in diesem Fall den tatsächlichen Punktestand am Saisonende besser annähert als eine Verdoppelung der Punkte in der ersten Saisonhälfte.

In der Formel zur Berechnung der voraussichtlichen Punktezahl einer Mannschaft am Saisonende kommt der Ausdruck $T^{1,32}$ vor.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der zu diesem Ausdruck äquivalent (gleichwertig) ist. *[1 aus 5]*

$T^{\frac{1}{32}}$	☐
$\sqrt[132]{T}$	☐
$\sqrt[100]{T^{132}}$	☐

$\frac{1}{1{,}32^T}$	☐
$\frac{1}{T^{32}}$	☐

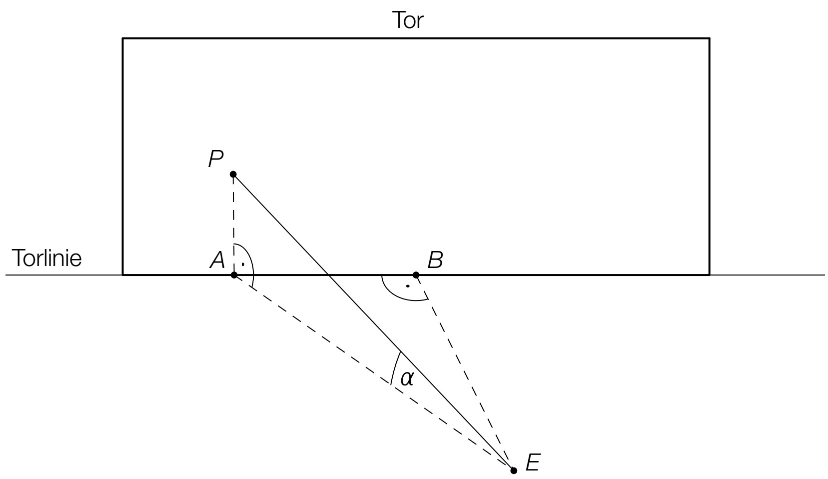
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine bestimmte Mannschaft verwandelt 80 % der Elfmeter (d. h. erzielt dabei ein Tor).

– Berechnen Sie unter der Annahme einer Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft genau 4 von 5 Elfmetern verwandelt.

c) Ein Fußballer steht am Elfmeterpunkt E und schießt den Ball unter einem Höhenwinkel von $\alpha = 5°$ ab. Der Ball (vereinfacht als punktförmig angenommen) überfliegt die Torlinie im Punkt P. Aufgrund der hohen Geschwindigkeit des Balls kann seine Flugbahn bis zum Punkt P näherungsweise als geradlinig angenommen werden.

Folgende Entfernungen sind bekannt: $\overline{AB} = 3$ m und $\overline{BE} = 11$ m.



– Berechnen Sie die Länge $\overline{EP}$.

Der Ball erreicht 0,4 Sekunden nach dem Abschuss im Punkt E den Punkt P.

– Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Balls in km/h.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Der Ausdruck $25^{1,32} + 30^{1,32}$ wurde nicht eingeklammert.

Berechnung mithilfe der Formel:
$25^{1,32} : (25^{1,32} + 30^{1,32}) \cdot 36 \cdot 2{,}753 = 43{,}6... \approx 44$
Verdoppelung der Punkte nach der ersten Saisonhälfte: $19 \cdot 2 = 38$
Die Zahl, die mit der Formel berechnet wurde, ist näher an der tatsächlichen Punkteanzahl als die Verdoppelung der Punkte in der ersten Saisonhälfte.

$\sqrt[100]{T^{132}}$	☒

b) $n = 5$ und $p = 0{,}8$
X ... Anzahl der verwandelten Elfmeter
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X = 4) = 0{,}4096$

c) $\overline{AE}$: $\sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$
$\overline{EP}$: $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{EP}} \quad \Rightarrow \quad \overline{EP} = \frac{\sqrt{130}}{\cos(5°)} = 11{,}445...$
$\overline{EP} \approx 11{,}45$ m

$$\frac{11{,}44...\text{ m}}{0{,}4\text{ s}} = 28{,}61...\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 103\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für die richtige Beschreibung, welcher Fehler gemacht wurde
1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung
1 × C2: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge $\overline{EP}$
1 × B2: für die richtige Berechnung der mittleren Geschwindigkeit in km/h

Der Genfer See*

Aufgabennummer: A_222

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der *Jet d'eau* ist ein Springbrunnen im Genfer See. Die Wasserfontäne des Springbrunnens erreicht eine maximale Höhe von 140 Metern.

In einem vereinfachten Modell kann die Höhe eines Wasserteilchens über der Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit durch die Funktion h beschrieben werden:

$h(t) = -4{,}9 \cdot t^2 + 55{,}6 \cdot t$ mit $t \geq 0$

t … Zeit nach dem Austritt eines Wasserteilchens in s
$h(t)$ … Höhe des Wasserteilchens über der Wasseroberfläche zur Zeit t in m

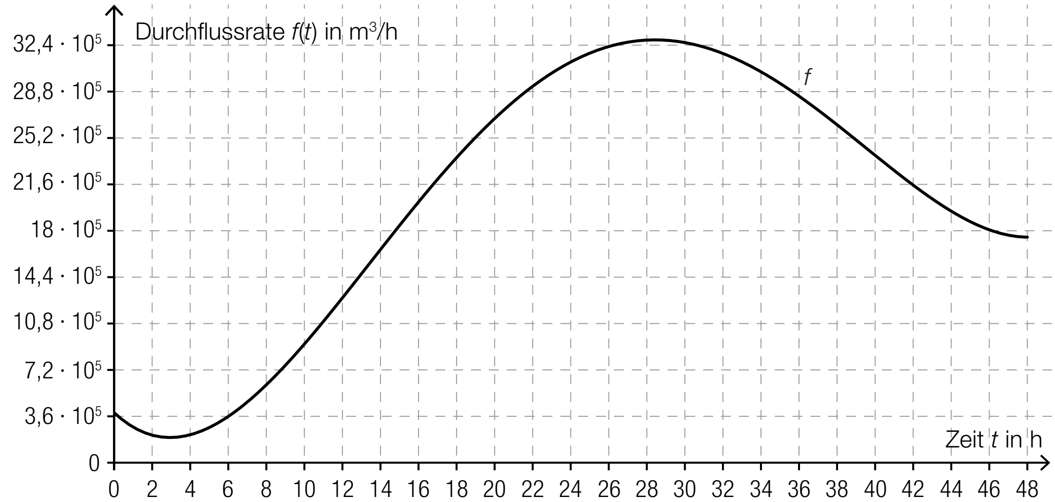
In diesem Modell wird der Luftwiderstand nicht berücksichtigt. Daher weicht die mithilfe der Modellfunktion h ermittelte maximale Höhe deutlich von der angegebenen maximalen Höhe ab.

– Berechnen Sie, um wie viel Prozent die mithilfe der Modellfunktion h ermittelte maximale Höhe über der angegebenen maximalen Höhe von 140 Metern liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der Genfer See wird durch mehrere Flüsse gespeist. Der Wasserstand des Sees wird beim Abfluss reguliert.

Die nachstehende Grafik zeigt den Verlauf der Durchflussrate des Wassers beim Abfluss innerhalb von 48 Stunden.



– Beschreiben Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit dem Ausdruck $\int_0^{48} f(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

Die Funktion F ist eine Stammfunktion der in der obigen Grafik dargestellten Funktion f.

– Kreuzen Sie die für F zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

F hat die Stelle mit dem größten Anstieg im Intervall [14; 18].	☐
F hat eine Maximumstelle im Intervall [26; 30].	☐
F ist monoton fallend im Intervall [32; 44].	☐
F ist monoton steigend im Intervall [4; 26].	☐
F ist im Intervall [0; 16] positiv gekrümmt (linksgekrümmt).	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $h'(t_{max}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t_{max} = 5{,}673...$
$h(t_{max}) = 157{,}72...$

prozentueller Unterschied zur angegebenen maximalen Höhe:
$\frac{157{,}72... - 140}{140} = 0{,}1265... \approx 12{,}7\ \%$

b) Mit dem Ausdruck wird die gesamte Wassermenge in m³ berechnet, die innerhalb dieser 48 Stunden den See durch den Abfluss verlassen hat.

F ist monoton steigend im Intervall [4; 26].	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Unterschieds

b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der entsprechenden Einheit
1 × C2: für das richtige Ankreuzen

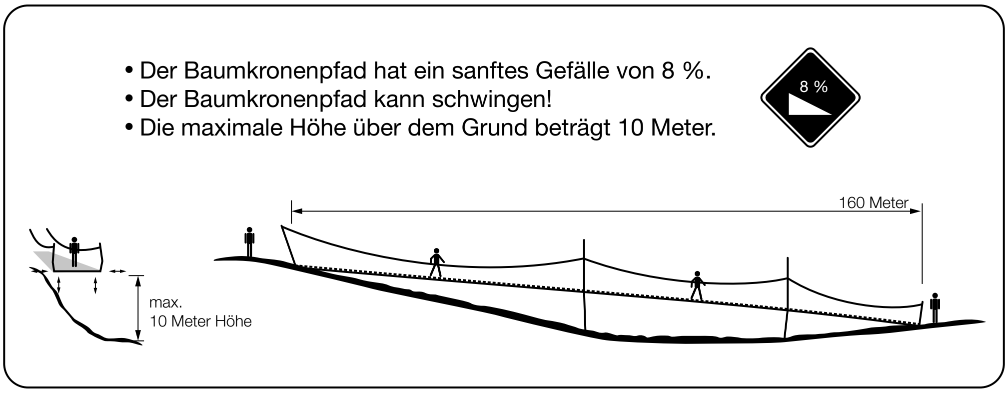
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Baumkronenpfad*

Aufgabennummer: A_230

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Der *Baumkronenpfad* ist eine Brückenstrecke durch einen Teil des Schönbrunner Tiergartens.



a) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen:
„Der Baumkronenpfad hat ein sanftes Gefälle von 8 %."

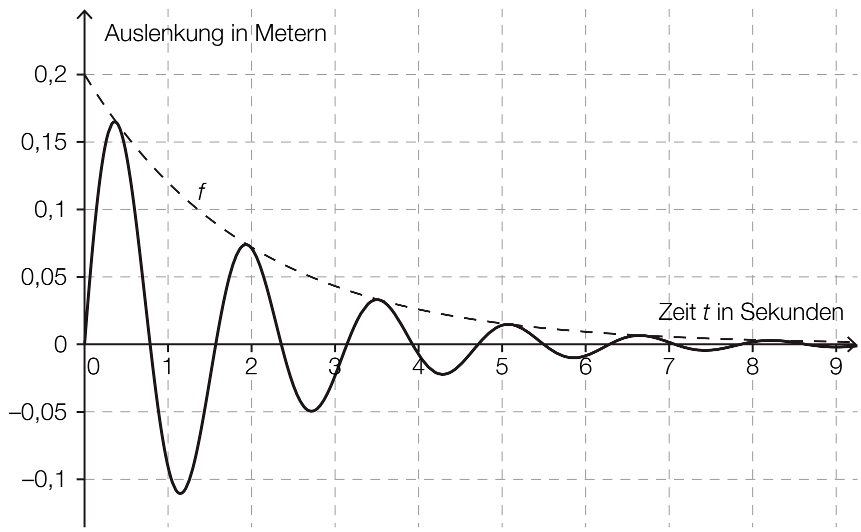
Dabei wird der Baumkronenpfad vereinfacht als geradlinig angenommen. Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.

– Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen Startpunkt und Endpunkt.
– Berechnen Sie den Neigungswinkel des Baumkronenpfads.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!"

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



– Lesen Sie aus der obigen Grafik die maximale Auslenkung ab.

In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende" strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion *f* mit $f(t) = c \cdot a^t$.

– Lesen Sie aus der Grafik den Parameter *c* ab.
– Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter *a* dieser Funktion *f* gilt: $0 < a < 1$.

c) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Die maximale Höhe über dem Grund beträgt 10 Meter." Diese maximale Höhe wird in einer horizontalen Entfernung von 90 m vom Startpunkt erreicht.

In 40 m horizontaler Entfernung vom Startpunkt beträgt die Höhe 8 m.
Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.
Im Anfangspunkt und im Endpunkt ist die Höhe 0 m.

Die Höhe über dem Grund abhängig von der horizontalen Entfernung vom Startpunkt soll näherungsweise mithilfe einer Polynomfunktion 4. Grades h mit
$h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschrieben werden.

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion berechnet werden können.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Höhenunterschied in Metern: $160 \cdot 0{,}08 = 12{,}8$

$\alpha = \arctan(0{,}08) = 4{,}57...°$

Auch $\alpha = -4{,}57...°$ *ist als richtig zu werten.*
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

b) maximale Auslenkung: 0,17 m
Toleranzbereich: [0,16 m; 0,18 m]

$c = f(0) = 0{,}2$

Da die gegebene Exponentialfunktion streng monoton fallend ist, gilt für den Parameter a:
$0 < a < 1$.

c) $h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$h'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$h(0) = 0$
$h(40) = 8$
$h(90) = 10$
$h(160) = 0$
$h'(90) = 0$

oder:

$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$
$8 = a \cdot 40^4 + b \cdot 40^3 + c \cdot 40^2 + d \cdot 40 + e$
$10 = a \cdot 90^4 + b \cdot 90^3 + c \cdot 90^2 + d \cdot 90 + e$
$0 = a \cdot 160^4 + b \cdot 160^3 + c \cdot 160^2 + d \cdot 160 + e$
$0 = 4 \cdot a \cdot 90^3 + 3 \cdot b \cdot 90^2 + 2 \cdot c \cdot 90 + d$

Auch das Erstellen eines Gleichungssystems zur Berechnung der Koeffizienten von –h ist als richtig zu werten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Höhenunterschieds
1 × B2: für die richtige Berechnung des Neigungswinkels
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen der maximalen Auslenkung im Toleranzbereich [0,16 m; 0,18 m]
1 × C2: für das richtige Ablesen des Parameters c
1 × D: für die richtige Begründung zum Parameter a

c) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der gegebenen Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der gegebenen Maximumstelle
Auch das Erstellen eines Gleichungssystems zur Berechnung der Koeffizienten von $-h$ ist als richtig zu werten.

Epidemie*

Aufgabennummer: A_255

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

In einem Land breitet sich eine Epidemie aus.

a) Nach wissenschaftlichen Recherchen vor Ort konnte im Nachhinein der Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls festgestellt werden.
Zu Beginn der Epidemie verdoppelt sich die Anzahl der Neuinfektionen etwa alle 4 Tage.

- Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion N, die die Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t in Tagen beschreibt. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt des ersten Infektionsfalls.
- Argumentieren Sie, dass eine exponentielle Zunahme der Anzahl der Neuinfektionen auf lange Sicht nicht realistisch ist.

b) Der zeitliche Verlauf der Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen kann näherungsweise durch die Funktion I beschrieben werden.

$$I(t) = \frac{30\,000}{1 + b \cdot e^{-0{,}1739 \cdot t}}$$

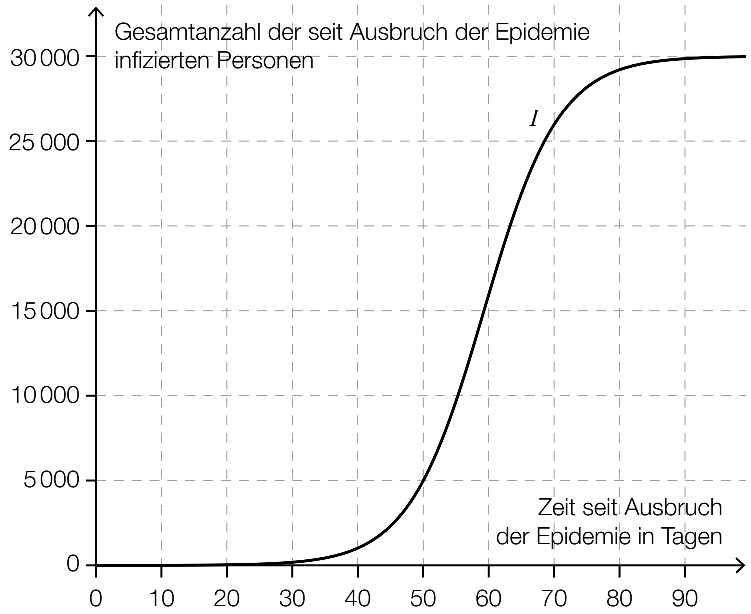
t … Zeit seit Ausbruch der Epidemie in Tagen
$I(t)$ … Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen zur Zeit t

Nach 41 Tagen wurden insgesamt 1 200 infizierte Personen registriert.

- Berechnen Sie den Parameter b.
- Ermitteln Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der zeitliche Verlauf der Gesamtanzahl der seit Ausbruch der Epidemie infizierten Personen kann näherungsweise durch eine Funktion I beschrieben werden. Der Graph der Funktion I ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



– Interpretieren Sie den Ausdruck $I(45)$ im gegebenen Sachzusammenhang.
– Lesen Sie aus der Grafik denjenigen Zeitpunkt ab, bei dem die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten ist.
– Dokumentieren Sie in Worten, wie der Zeitpunkt, zu dem die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten ist, mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann, wenn eine Gleichung von I bekannt ist.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $N(t) = N_0 \cdot a^t$
$N_0 = 1$
$a = \sqrt[4]{2} = 1{,}18920...$
$N(t) = 1 \cdot 1{,}1892...^t$ *oder* $N(t) = 1 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$
t ... Zeit seit dem ersten Infektionsfall in Tagen
$N(t)$ ... Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t

Eine exponentielle Zunahme ist auf lange Sicht nicht möglich, da die Anzahl der Personen, die infiziert werden können, beschränkt ist, die Funktion N aber nicht.

b) $1\,200 = \frac{30\,000}{1 + b \cdot e^{-0{,}1739 \cdot 41}}$
Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $b = 29\,970{,}0...$

$17\,000 = \frac{30\,000}{1 + 29\,970{,}0... \cdot e^{-0{,}1739 \cdot t}}$
Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 60{,}8...$

Nach etwa 61 Tagen werden erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein.

c) $I(45)$ gibt an, wie viele Personen insgesamt in den ersten 45 Tagen infiziert wurden.

Nach 60 Tagen ist die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten (Toleranzbereich: ±5 Tage).

Dazu ermittelt man die Nullstelle der 2. Ableitung der Funktion I im dargestellten Bereich.

In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I *im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.*

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion N
1 × D: für die richtige Argumentation

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b
1 × B2: für das richtige Ermitteln der Zeit, nach der erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden

c) 1 × C1: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
1 × C2: für das richtige Ablesen der Wendestelle im Toleranzbereich [55; 65]
1 × C3: für die richtige Dokumentation in Worten
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)

Verzinsung*

Aufgabennummer: A_256

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Auf einem Konto werden € 3.000 angelegt.

Für eine Zeitspanne von 3 Jahren wird dieser Betrag mit 5 % pro Jahr verzinst, anschließend für 2 Jahre mit 1 % pro Jahr.

– Ermitteln Sie den Kontostand nach 5 Jahren K_5.

Bei einem konstanten Jahreszinssatz i wäre der Kontostand nach 5 Jahren auf denselben Wert K_5 angewachsen.

– Bestimmen Sie diesen Jahreszinssatz i.

b) Die Basisformel für die Zinseszinsrechnung lautet:

$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

K_0 ... Anfangskapital
K_n ... Kapital nach n Jahren
i ... Jahreszinssatz

Nach einer bestimmten Anzahl von Jahren n_2 hat sich das Anfangskapital verdoppelt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von n_2 aus i.

$n_2 =$ ____

Zur näherungsweisen Berechnung von n_2 kann die sogenannte *0,69er-Regel* verwendet werden:

$n_2 \approx \frac{0{,}69}{i} + 0{,}35$

– Überprüfen Sie nachweislich, ob die 0,69er-Regel für $i = 0{,}04$ eine gute Näherung von n_2 ergibt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a) $K_5 = 3000 \cdot 1{,}05^3 \cdot 1{,}01^2 = 3542{,}679...$

Der Kontostand nach 5 Jahren beträgt € 3.542,68.

$1 + i = \sqrt[5]{1{,}05^3 \cdot 1{,}01^2} = 1{,}0338... \approx 1{,}034$ *oder:* $3542{,}679... = 3000 \cdot (1 + i)^5$

$i = \sqrt[5]{\frac{3542{,}679...}{3000}} - 1 = 0{,}0338...$

Der Jahreszinssatz beträgt rund 3,4 %.

b) $2 = (1 + i)^{n_2}$

$n_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1 + i)}$

Auch das Erstellen der Formel mit Logarithmen zu einer anderen Basis ist als richtig zu werten.

i	$n_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1+i)}$	$n_2 \approx \frac{0{,}69}{i} + 0{,}35$
0,04	17,67...	17,6

Die 0,69er-Regel ergibt also für $i = 0{,}04$ eine gute Näherung von n_2.

Lösungsschlüssel

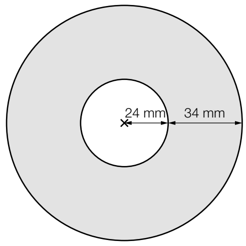
a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln des Kontostands nach 5 Jahren
1 × B2: für das richtige Bestimmen des Jahreszinssatzes

b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel für n_2
Auch das Erstellen der Formel mit Logarithmen zu einer anderen Basis ist als richtig zu werten.
1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung

CD

Eine CD ist ein Datenspeicher.

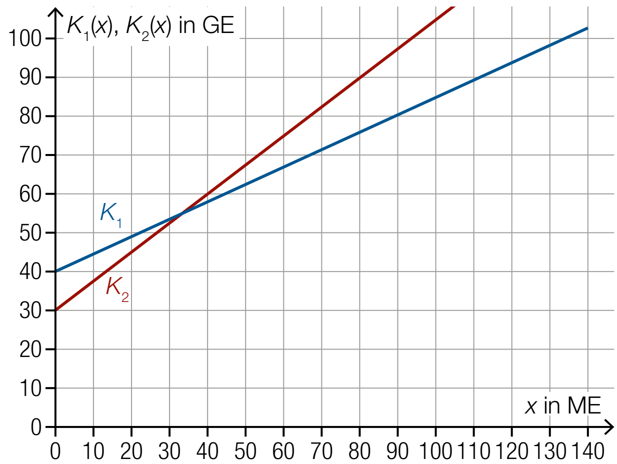
a) Die zum Speichern verwendete Fläche einer CD hat die Form eines Kreisrings (siehe nebenstehende Abbildung).
Die Speicherkapazität einer CD beträgt 700 Megabyte (MB).



Jemand speichert Bilddateien mit einer Größe von je 4 MB.

1) Ermitteln Sie die Anzahl der Bilddateien, die auf 1 cm² gespeichert werden können.

b) In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Kostenfunktionen für die Pressung von CDs bei zwei Unternehmen dargestellt.



x … Menge der gepressten CDs in Mengeneinheiten (ME)
$K_1(x)$, $K_2(x)$ … Kosten bei der Produktionsmenge x in Unternehmen 1 bzw. Unternehmen 2 in Geldeinheiten (GE)

1) Stellen Sie eine Gleichung der Kostenfunktion K_2 auf.

Die Funktion K_1 wird durch die Funktionsgleichung $K_1(x) = 0{,}45 \cdot x + 40$ beschrieben.
Es soll diejenige Produktionsmenge bestimmt werden, bei der die Produktionskosten im Unternehmen 2 um 10 GE höher sind als jene im Unternehmen 1.

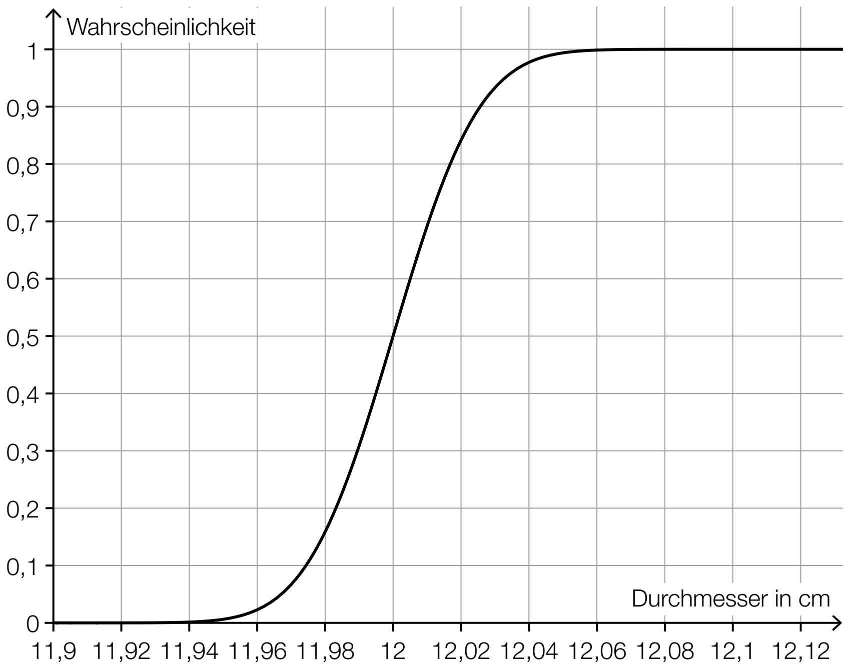
2) Berechnen Sie diese Produktionsmenge.

c) Die Durchmesser von CDs eines bestimmten Herstellers sind annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 12$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}02$ cm.

1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Durchmesser einer zufällig ausgewählten CD dieses Herstellers außerhalb des Intervalls $[\mu - 0{,}04 \text{ cm}; \mu + 0{,}04 \text{ cm}]$ liegt.

In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der Verteilungsfunktion dieser Normalverteilung dargestellt.

2) Kennzeichnen Sie in dieser Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte CD im Intervall $[\mu - 0{,}04 \text{ cm}; \mu + 0{,}04 \text{ cm}]$ liegt.



Möglicher Lösungsweg

a1) Flächeninhalt des Kreisrings:
$A = \pi \cdot (2{,}4 + 3{,}4)^2 - \pi \cdot 2{,}4^2$
$A = 87{,}587...\text{ cm}^2$

$$\frac{\frac{700}{4}}{87{,}587...} = 1{,}997...$$

Auf 1 cm² werden rund 2 Bilddateien gespeichert.

b1) $K_2(x) = 0{,}75 \cdot x + 30$

b2) $K_2(x) - K_1(x) = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x = 66{,}66...$

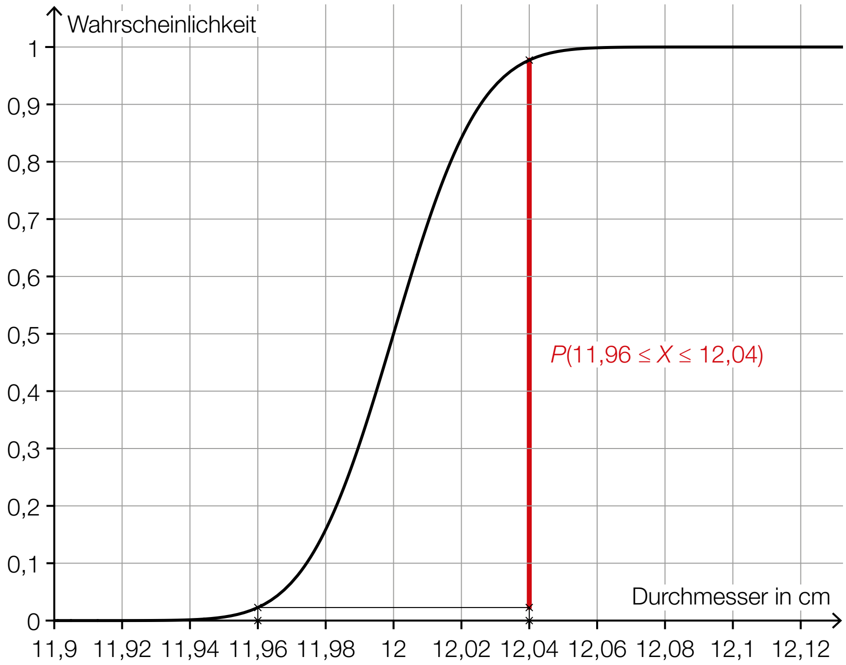
Bei einer Produktion von rund 66,7 ME sind die Kosten um 10 GE höher.

c1) X ... Durchmesser einer CD
$P(11{,}96\text{ cm} \leq X \leq 12{,}04\text{ cm}) = 0{,}95449…$
$1 - 0{,}95449… = 0{,}04550…$

Die Wahrscheinlichkeit liegt bei rund 4,55 %.

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit der σ-Umgebung ist ebenfalls zulässig.

c2)



Stau

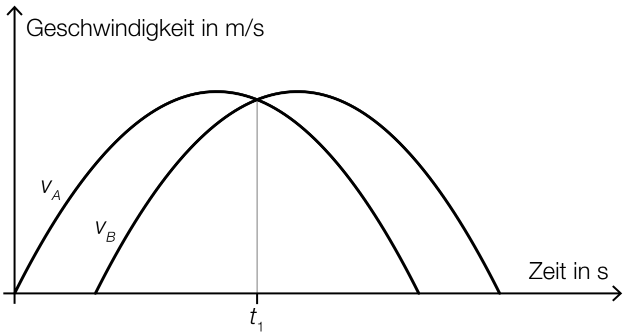
a) Die zwei Autos *A* und *B* stehen im Stau hintereinander. Sie beschleunigen und bremsen wieder ab.
Die Weg-Zeit-Funktion des Autos *A* lautet:

$s_A(t) = -0{,}08 \cdot t^3 + 1{,}2 \cdot t^2$ mit $0 \leq t \leq 10$

t ... Zeit in s
$s_A(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

1) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit des Autos *A*. *[0/1 P.]*

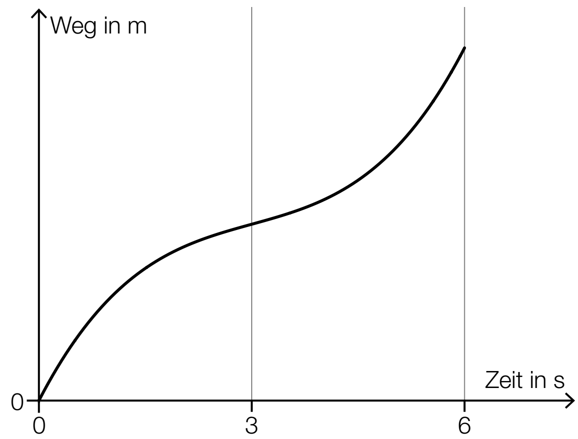
Die Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen v_A und v_B der beiden Autos sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



2) Interpretieren Sie den Schnittpunkt der Graphen im gegebenen Sachzusammenhang.
[0/1 P.]

b) Der Bewegungsvorgang eines bestimmten Autos wird über einen Zeitraum von 6 s betrachtet. In den ersten 3 s nimmt die Geschwindigkeit des Autos zu. In den letzten 3 s nimmt die Geschwindigkeit des Autos ab.

1) Begründen Sie, warum der nachstehend dargestellte Graph den beschriebenen Bewegungsvorgang nicht zutreffend wiedergibt. *[0/1 P.]*



c) Frau Maier fährt mit dem Auto zu ihrem Arbeitsplatz. Für das Jahr 2019 ergaben sich für ihren Arbeitsweg modellhaft folgende Werte:
Bei geringem Verkehrsaufkommen benötigte sie für die gesamte Strecke (hin und retour) 40 min. Bei starkem Verkehrsaufkommen war die Fahrzeit für diese Strecke um 31 % länger.
An 185 Arbeitstagen gab es starkes Verkehrsaufkommen.

1) Berechnen Sie, wie viele Stunden Frau Maier im Jahr 2019 durch das starke Verkehrsaufkommen zusätzlich für ihren Arbeitsweg benötigt hat. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $s_A''(t) = 0$ *oder* $-0{,}48 \cdot t + 2{,}4 = 0$
$t = 5$
$s_A'(5) = 6$
Die maximale Geschwindigkeit des Autos *A* beträgt 6 m/s.

a2) Zur Zeit t_1 haben die beiden Autos die gleiche Geschwindigkeit.

oder:

Zur Zeit t_1 haben die beiden Autos den maximalen Abstand zueinander.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der maximalen Geschwindigkeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) Der dargestellte Graph beschreibt den Bewegungsvorgang nicht zutreffend, weil in der Darstellung die Geschwindigkeit des Autos in den ersten 3 s abnimmt und in den letzten 3 s zunimmt.

oder:

Der dargestellte Graph beschreibt den Bewegungsvorgang nicht zutreffend, weil in der Darstellung die Geschwindigkeit des Autos nach 3 s am geringsten ist.

b1) Ein Punkt für das richtige Begründen.

c1) $\frac{40}{60} \cdot 0{,}31 \cdot 185 = 38{,}2...$
Frau Maier hat im Jahr 2019 rund 38 Stunden zusätzlich für ihren Arbeitsweg benötigt.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der zusätzlich benötigten Zeit in Stunden.

Zirkus*

Aufgabennummer: A_298		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Eine bestimmte Zirkusvorstellung wurde von 65 Erwachsenen und 57 Kindern besucht. Diese bezahlten insgesamt Eintritt in Höhe von 1.179 Euro.
Eine andere Zirkusvorstellung mit den gleichen Eintrittspreisen wurde von 82 Erwachsenen und 74 Kindern besucht. Diese bezahlten insgesamt Eintritt in Höhe von 1.502 Euro.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung des Eintrittspreises x für einen Erwachsenen und des Eintrittspreises y für ein Kind.

2) Berechnen Sie die Eintrittspreise x und y.

b) Eine Gruppe von n Personen bestellt Eintrittskarten für einen anderen Zirkus zu einem Eintrittspreis von p Euro pro Person. Bis zum Tag der Vorstellung hat sich die Gruppengröße jedoch um k Personen erhöht, und der Veranstalter gewährt deshalb allen eine Ermäßigung von 5 % auf den Eintrittspreis.

1) Kreuzen Sie den richtigen Ausdruck zur Berechnung des insgesamt bezahlten Eintritts an. *[1 aus 5]*

$\frac{(n+k) \cdot p}{0{,}95}$	☐
$(n+k) \cdot p \cdot 0{,}95$	☐
$0{,}95 \cdot (n + k \cdot p)$	☐
$0{,}05 \cdot (n+k) \cdot p$	☐
$(n \cdot k + p) \cdot 0{,}95$	☐

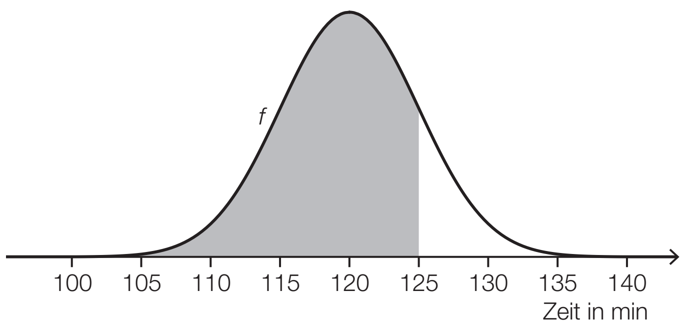
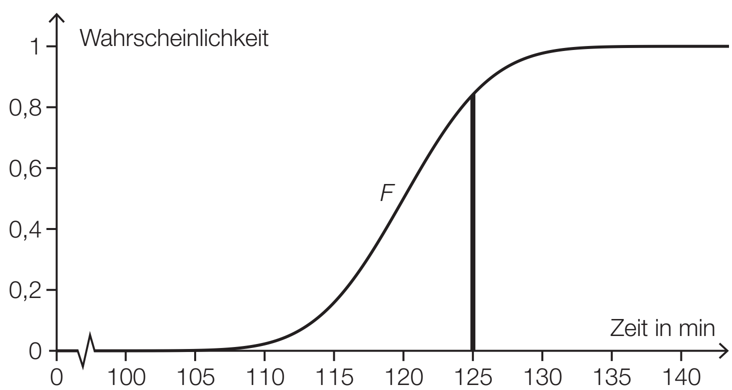
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Dauer der Zirkusvorstellungen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 120$ min und der Standardabweichung $\sigma = 5$ min.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Zirkusvorstellung mindestens 118 min dauert.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Zirkusvorstellung höchstens 125 min dauert, soll mithilfe der zugehörigen Dichtefunktion f bzw. mithilfe der zugehörigen Verteilungsfunktion F dargestellt werden.

2) Kreuzen Sie diejenige Darstellung an, die <u>nicht</u> dieser Wahrscheinlichkeit entspricht. *[1 aus 5]*

$0{,}5 + \int_{120}^{125} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_{-\infty}^{125} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$1 - F(125)$	☐
	☐
	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $65 \cdot x + 57 \cdot y = 1179$
$82 \cdot x + 74 \cdot y = 1502$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 12$
$y = 7$

Der Eintrittspreis für einen Erwachsenen beträgt € 12, der Eintrittspreis für ein Kind beträgt € 7.

b1)

$(n + k) \cdot p \cdot 0{,}95$	☒

c1) X ... Dauer der Zirkusvorstellung in min

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(X \geq 118) = 0{,}6554...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 65,5 %.

c2)

$1 - F(125)$	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Eintrittspreise x und y.
b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
c2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Dorffest

Aufgabennummer: A_135

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Auf einem Dorffest gibt es ein Unterhaltungsprogramm für Kinder.

a) Lea und Ahmad treten im Bogenschießen als Team an. Zuerst schießt Ahmad und dann Lea auf eine Zielscheibe. Aus Erfahrung weiß man, dass Ahmad bei 3 von 4 Versuchen trifft. Lea trifft das Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit p.

– Veranschaulichen Sie diesen Sachverhalt mithilfe eines Baumdiagramms.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl Lea als auch Ahmad das Ziel treffen, beträgt 50 %.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, mit der Lea das Ziel trifft.

b) Unter den Kindern werden einige Preise verlost.

– Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils die dazu äquivalente Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

P(„höchstens 1 Mädchen gewinnt“)	
P(„mindestens 1 Mädchen gewinnt“)	

A	1 – P(„kein Mädchen gewinnt“)
B	1 – P(„höchstens 2 Mädchen gewinnen“)
C	1 – P(„mindestens 2 Mädchen gewinnen“)
D	1 – P(„genau 1 Mädchen gewinnt“)

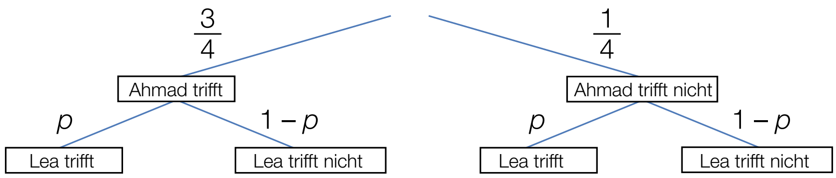
c) Am Festgelände fährt ein Bummelzug. Für Kinder unter 3 Jahren ist die Fahrt kostenlos. Kinder ab 3 Jahren zahlen die Hälfte des Fahrpreises p für Erwachsene.
Insgesamt wurden n Fahrgäste gezählt. Die Tageseinnahmen können mit dem Ausdruck $0{,}5 \cdot n \cdot \frac{p}{2} + 0{,}2 \cdot n \cdot p$ berechnet werden.

– Ermitteln Sie mithilfe des gegebenen Ausdrucks, wie viel Prozent der Fahrgäste unter 3 Jahre alt waren.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)



$P(\text{„beide treffen“}) = \frac{3}{4} \cdot p = 0{,}5$

$p = \frac{2}{3}$

Lea trifft das Ziel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.

b)

P(„höchstens 1 Mädchen gewinnt“)	C
P(„mindestens 1 Mädchen gewinnt“)	A

A	1 – P(„kein Mädchen gewinnt“)
B	1 – P(„höchstens 2 Mädchen gewinnen“)
C	1 – P(„mindestens 2 Mädchen gewinnen“)
D	1 – P(„genau 1 Mädchen gewinnt“)

c) Es waren 30 % der Fahrgäste unter 3 Jahre alt.
Es wurden n Fahrgäste gezählt. 50 % davon fuhren zum Preis $\frac{p}{2}$ und 20 % zum Preis p.
Die verbleibenden 30 % haben für die Fahrt nichts bezahlt.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) leicht	b) 1
c) mittel	c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

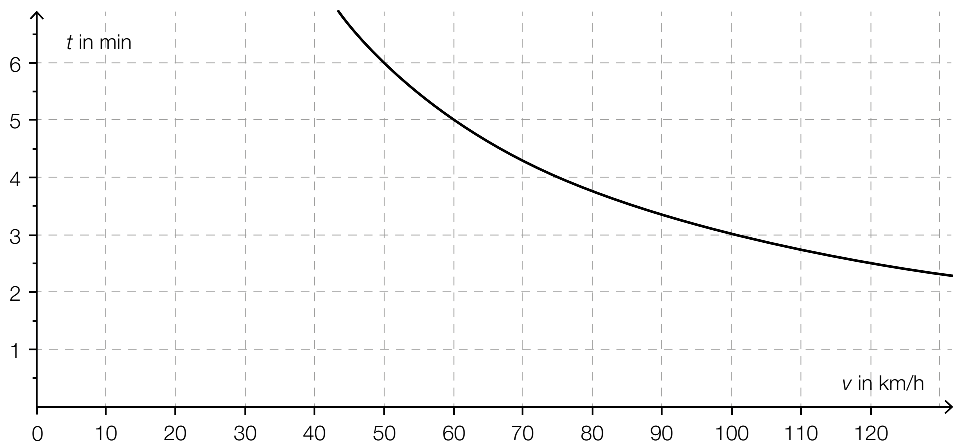
Fahrzeiten

Aufgabennummer: A_165

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Im Folgenden wird das Befahren verschiedener Strecken nach unterschiedlichen Aspekten analysiert.

a) Für eine bestimmte Strecke sind in der nachstehenden Grafik die Fahrzeiten t in min bei unterschiedlichen konstanten Geschwindigkeiten v in km/h dargestellt.



Für die Strecke wird bei einer konstanten Geschwindigkeit von 50 km/h die Zeit t_1 und bei einer konstanten Geschwindigkeit von 100 km/h die Zeit t_2 benötigt.
Es wird behauptet, dass für die gleiche Strecke bei einer konstanten Geschwindigkeit von 75 km/h die Zeit $\frac{t_1 + t_2}{2}$ benötigt wird.

– Zeigen Sie mithilfe der Grafik, dass diese Aussage falsch ist.

b) Eine Person A fährt eine Strecke von 400 km Länge mit durchschnittlich 100 km/h und legt einen Tankstopp von 15 min ein. Eine zweite Person B startet zur gleichen Zeit, fährt auf der gleichen Strecke mit 80 km/h und legt keinen Tankstopp ein.

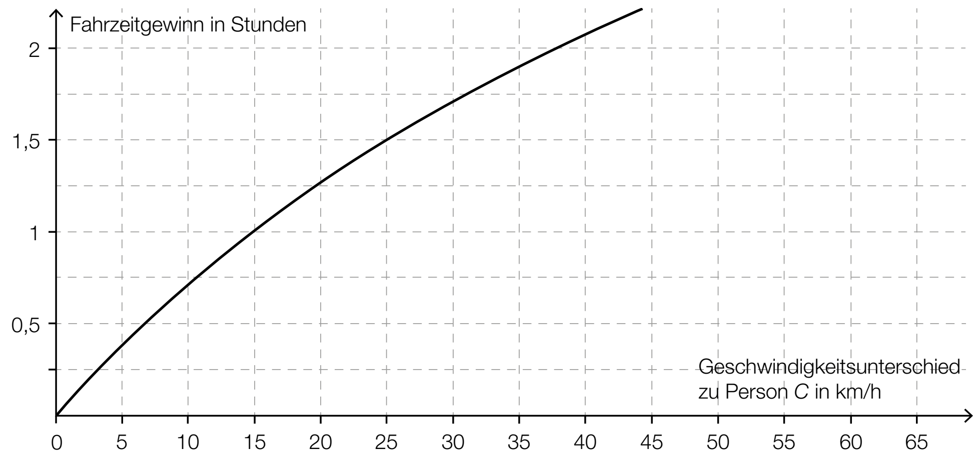
– Berechnen Sie, um wie viele Minuten die Person A trotz des Zwischenstopps früher als die Person B ans Ziel kommt.

c) Eine Person C fährt eine Strecke von 400 km Länge mit einer mittleren Geschwindigkeit von 70 km/h.

– Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion s, die die Entfernung der Person C vom Zielort in Abhängigkeit von der gefahrenen Zeit beschreibt.

Eine weitere Person D fährt die Strecke mit durchschnittlich 100 km/h.

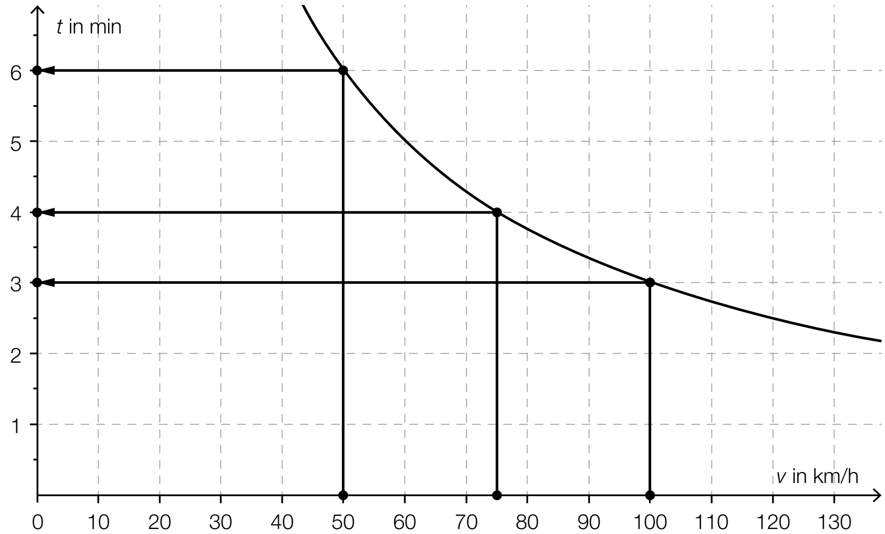
– Lesen aus der nachstehenden Abbildung den Fahrzeitgewinn von Person D ab.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Fährt man die Strecke mit 50 km/h, so braucht man 6 min, bei 100 km/h braucht man 3 min.

$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{6+3}{2} = 4{,}5$

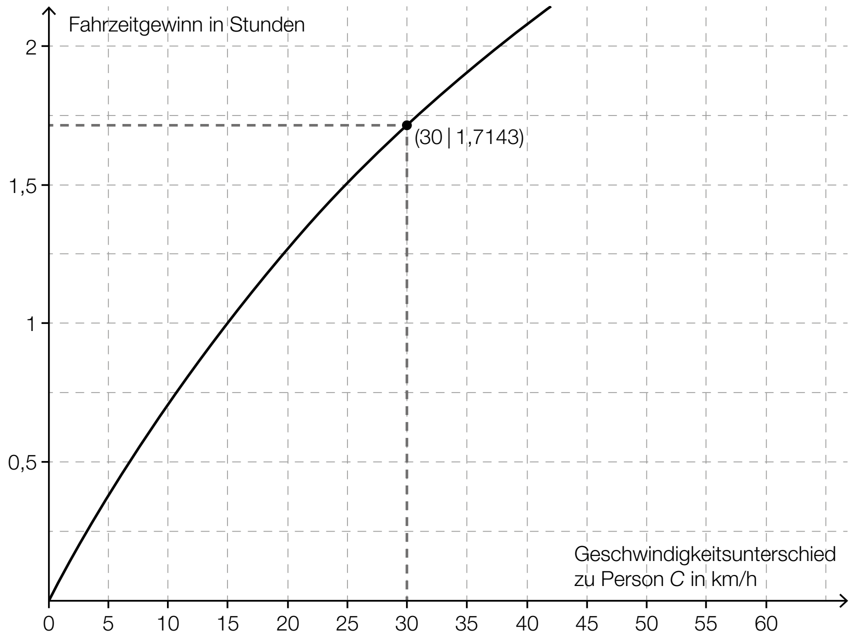
Das arithmetische Mittel der Fahrzeiten beträgt 4,5 min.
Fährt man 75 km/h, so benötigt man für die Strecke 4 min und nicht 4,5 min. Daher ist die Behauptung falsch.

b) Fahrzeit: $t = \frac{400}{v}$
Person A: 4 h + 0,25 h
Person B: 5 h
Differenz: 0,75 h = 45 min

c) $s(t) = 400 - 70 \cdot t$

t ... gefahrene Zeit in h
$s(t)$ ... Entfernung vom Zielort zur Zeit t in km

Ablesen der Werte bei 30 km/h Geschwindigkeitsunterschied:



Person D hat einen Fahrzeitgewinn von rund 1,7 h.
Toleranz: ±0,1 h

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 1
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Abfallwirtschaft

Aufgabennummer: A_184

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die nachstehende Tabelle zeigt die Menge des gesammelten Restmülls in Graz in den Jahren 2001, 2002, 2005 und 2010.

Jahr	2001	2002	2005	2010
Restmüllmenge in t	41 072	41 292	43 312	52 569

Es wird vermutet, dass sich die Entwicklung der Restmüllmenge durch eine quadratische Funktion näherungsweise beschreiben lässt.

– Erstellen Sie mithilfe der Daten der Jahre 2001, 2002 und 2005 eine Gleichung der quadratischen Funktion, die als Modell für die Entwicklung der Restmüllmenge verwendet werden kann. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2001.
– Berechnen Sie für das Jahr 2010 die prozentuelle Abweichung dieses Modells von der tatsächlich gesammelten Restmüllmenge.

b) Die Entwicklung der Restmüllmenge in den Jahren 2001 bis 2010 in Graz kann mithilfe der Funktion R näherungsweise beschrieben werden:

$R(t) = 120 \cdot t^2 + 80 \cdot t + 41\,072$

t … Zeit in Jahren ab 2001, d. h., für das Jahr 2001 gilt: $t = 0$
$R(t)$ … Restmüllmenge zur Zeit t in t

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate für $t = 5$ bis $t = 9$.

c) Aus dem Abfallwirtschaftsplan des Bundes geht hervor, dass im Jahr 2009 in Österreich insgesamt 53 543 000 t Müll angefallen sind.

– Stellen Sie diesen Wert mittels Gleitkommadarstellung in Kilogramm dar.

In Österreich lebten im Jahr 2009 rund 8,375 Millionen Menschen.

– Berechnen Sie für das Jahr 2009 die durchschnittliche Menge des pro Kopf angefallenen Mülls in Tonnen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

t … Zeit in Jahren ab dem Jahr 2001 mit $0 \leq t \leq 9$
$f(t)$ … Restmüllmenge zur Zeit t in t

$41\,072 = c$
$41\,292 = a + b + 41\,072$
$43\,312 = 16 \cdot a + 4 \cdot b + 41\,072$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = \frac{340}{3} = 113{,}\overline{3}$; $b = \frac{320}{3} = 106{,}\overline{6}$; $c = 41\,072$
$f(t) = 113{,}\overline{3} \cdot t^2 + 106{,}\overline{6} \cdot t + 41\,072$

$f(9) = 51\,212$

Die prozentuelle Abweichung vom tatsächlichen Wert beträgt $\frac{52\,569 - f(9)}{52\,569} \approx 2{,}58\,\%$.

b) $\frac{R(9) - R(5)}{9 - 5} = 1\,760$ t pro Jahr

c) $53\,543\,000$ t $= 53\,543\,000\,000$ kg $= 5{,}3543 \cdot 10^{10}$ kg

durchschnittliche Menge pro Kopf: $\frac{53\,543\,000}{8\,375\,000} \approx 6{,}39$ t

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 1 Zahlen und Maße

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

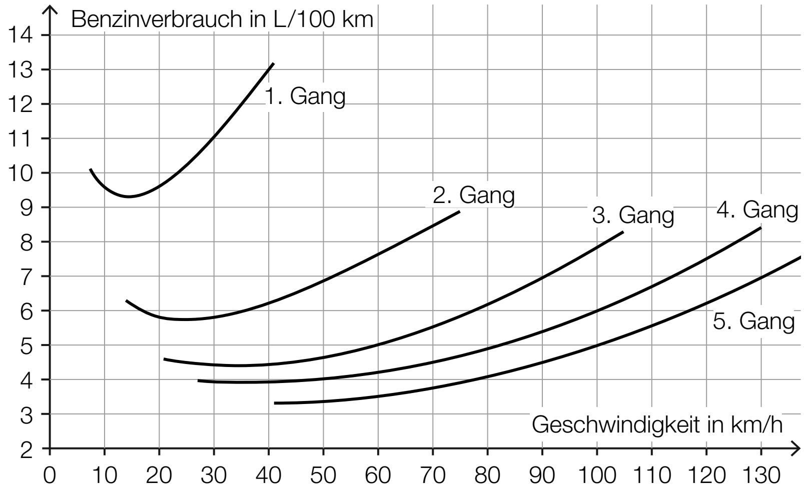
Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: Bundes-Abfallwirtschaftsplan 2011

Benzinverbrauch

In der nachstehenden Grafik wird für die einzelnen Gänge der Benzinverbrauch eines Personenkraftwagens in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dargestellt.



a) 1) Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, wie viele Liter Benzin pro 100 km man sich ersparen kann, wenn bei 35 km/h nicht mit dem 2. Gang, sondern mit dem 3. Gang gefahren wird.

b) Der Benzinverbrauch im 1. Gang im Intervall [7 km/h; 40 km/h] kann näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$b_1(v) = \frac{3 \cdot v^2 + 10 \cdot v + 1500}{10 \cdot (v + 10)}$$

v … Geschwindigkeit in km/h
$b_1(v)$ … Benzinverbrauch bei der Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate des Benzinverbrauchs für das Intervall [10 km/h; 30 km/h].

2) Berechnen Sie die relative Änderung des Benzinverbrauchs in Prozent bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit von 10 km/h auf 30 km/h.

c) Der Benzinverbrauch im 4. Gang kann näherungsweise durch eine quadratische Funktion b_4 mit $b_4(v) = a \cdot v_2 + b \cdot v + c$ beschrieben werden.

Bei 40 km/h ist der Benzinverbrauch minimal und beträgt 3,9 L/100 km. Bei 100 km/h beträgt der Benzinverbrauch 6 L/100 km.

v ... Geschwindigkeit in km/h
$b_4(v)$ ... Benzinverbrauch bei der Geschwindigkeit v in Litern pro 100 Kilometer (L/100 km)

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

Möglicher Lösungsweg

a1) Man kann sich etwa 1,5 L pro 100 km sparen.

b1) $\frac{b_1(30) - b_1(10)}{30 - 10} = 0{,}0875\ \frac{\text{L/100 km}}{\text{km/h}}$

b2) $\frac{b_1(30) - b_1(10)}{b_1(10)} = 0{,}18421\ldots$

Die relative Änderung des Benzinverbrauchs bei einer Erhöhung der Geschwindigkeit von 10 km/h auf 30 km/h beträgt rund 18,42 %.

c1) I: $b_4'(40) = 0$
II: $b_4(40) = 3{,}9$
III: $b_4(100) = 6$

oder

I: $80 \cdot a + b = 0$
II: $1\,600 \cdot a + 40 \cdot b + c = 3{,}9$
III: $10\,000 \cdot a + 100 \cdot b + c = 6$

Grazer Hausberg

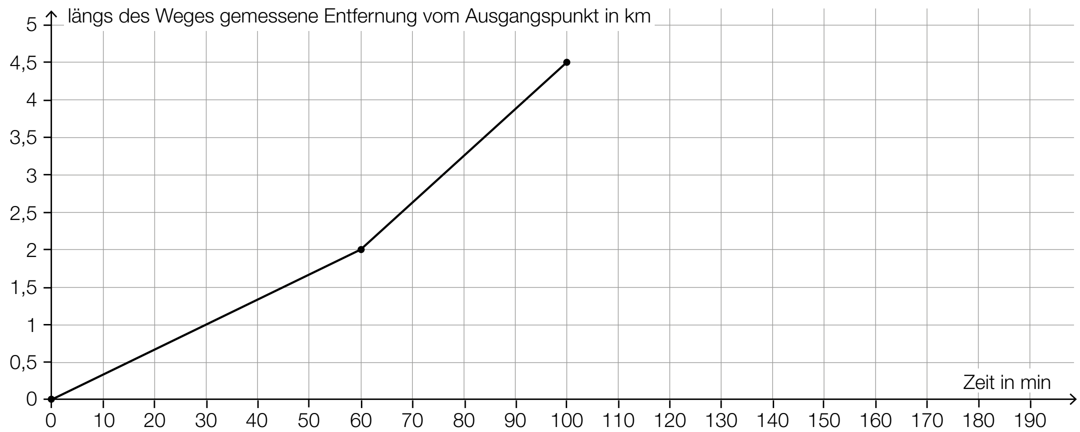
Der Schöckl gilt als Grazer Hausberg. Es führen viele verschiedene Wege und Straßen um ihn herum und auf den Gipfel.

a) Die Talstation der Schöckl-Seilbahn liegt auf 780 m und deren Bergstation auf 1 436 m Höhe über dem Meeresspiegel. Die als geradlinig angenommene Strecke, die die Seilbahn zurücklegt, beträgt 2 087 m. Die Fahrtdauer von der Talstation zur Bergstation beträgt 7 min.

1) Argumentieren Sie, dass man mit dem Ausdruck $\arctan\left(\frac{656}{2\,087}\right)$ den Steigungswinkel der Strecke nicht berechnen kann.

2) Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit der Seilbahn in Metern pro Sekunde (m/s).

b) Das nachstehende Diagramm zeigt näherungsweise den Verlauf einer Wanderung auf den Schöckl.



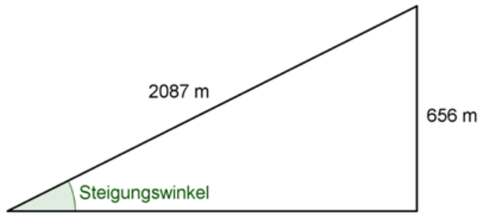
1) Begründen Sie unter Verwendung dieses Diagramms, in welchem der beiden Zeitabschnitte der Wanderer schneller gegangen ist.

Der Wanderer macht nach dem Aufstieg keine Pause und wandert mit einer mittleren Geschwindigkeit von 3,375 km/h den selben Weg bergab.

2) Vervollständigen Sie im obigen Diagramm den Verlauf der Wanderung.

Möglicher Lösungsweg

a1) Der Tangens ist das Verhältnis zwischen der Länge der Gegenkathete und der Länge der Ankathete. 2 087 ist jedoch die Länge der Hypotenuse (siehe Abbildung).

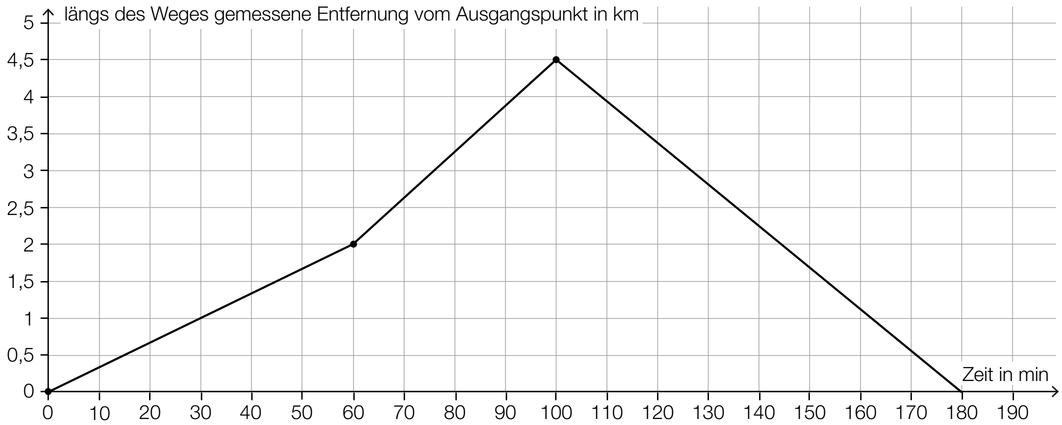


a2) $v = \frac{2\,087}{7 \cdot 60} = 4{,}969\ldots$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt rund 4,97 m/s.

b1) Der Anstieg der Geraden entspricht der Geschwindigkeit, also ist der Wanderer im zweiten Abschnitt schneller gegangen.

b2)



BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Glaubensrichtungen und -symbole

Aufgabennummer: A_187

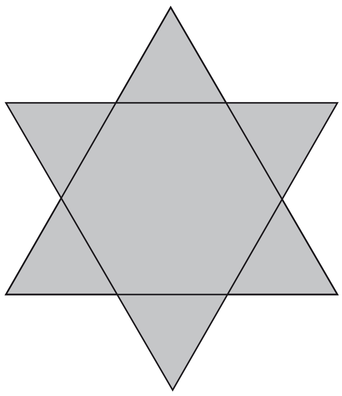
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die nachstehende Tabelle stellt die Anteile zweier Religionsgruppen an der Weltbevölkerung im Jahr 2010 dar. Die Anteile wurden für das Jahr 2050 hochgerechnet.

Religionsgemeinschaft	Anzahl 2010 in Tausend	Anzahl 2050 in Tausend	Anteil 2050 an der Weltbevölkerung
Buddhisten	487 760	486 270	
Hindus	1 032 210	1 384 360	14,9 %

– Ergänzen Sie den fehlenden Wert in der obigen Tabelle.
– Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich die Anzahl der Buddhisten laut der Hochrechnung vom Jahr 2010 auf das Jahr 2050 verändert haben wird.

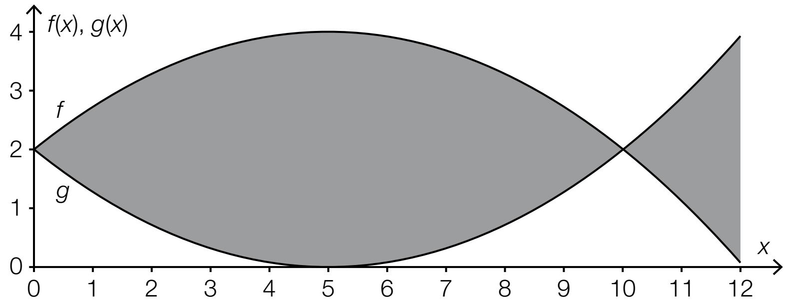
b) Ein bekanntes religiöses Symbol ist der Davidstern. Er besteht aus 2 gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge a. In der Mitte entsteht ein regelmäßiges Sechseck. An dieses grenzen 6 kleinere gleichseitige Dreiecke. Die Seitenlänge der kleinen Dreiecke beträgt jeweils $\frac{a}{3}$.



– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des Davidsterns aus der Seitenlänge a auf.

A = ____________________

c) Ein Fisch-Symbol, dargestellt durch zwei gekrümmte Linien (siehe nachstehende Abbildung), spielte schon im Urchristentum eine wichtige Rolle.



Die beiden im Intervall [0; 12] dargestellten, zur Geraden $y = 2$ symmetrischen Linien wurden durch die quadratischen Funktionen f und g erzeugt.

– Stellen Sie mithilfe der obigen Abbildung die Gleichung der Funktion f auf.
– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem der Inhalt der in der obigen Abbildung eingefärbten Fläche berechnet werden kann. *[1 aus 5]*

$48 - \int_0^{12} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$2 \cdot \left(\int_0^{10} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{10}^{12} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$	☐
$\int_0^{12} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$2 \cdot \int_0^{12} (2 - g(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$2 \cdot \left(24 - \int_0^{10} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{10}^{12} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Weltbevölkerung 2050 in Tausend: $\frac{1\,384\,360}{0{,}149} = 9\,291\,006{,}711$

Anteil der Buddhisten an der Weltbevölkerung 2050: $\frac{486\,270}{9\,291\,006{,}711} = 0{,}0523...$

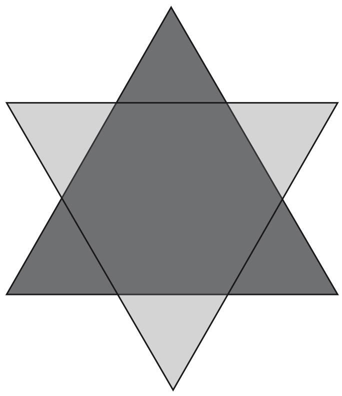
Religions-gemeinschaft	Anzahl 2010 in Tausend	Anzahl 2050 in Tausend	Anteil 2050 an der Weltbevölkerung
Buddhisten	487 760	486 270	rund 5,2 %
Hindus	1 032 210	1 384 360	14,9 %

$\frac{486\,270 - 487\,760}{487\,760} = -0{,}00305\ldots$

Der Anteil der Buddhisten wird sich laut der Hochrechnung von 2010 bis 2050 um rund 0,31 % vermindert haben.

b) Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a ist $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Die Fläche des Davidsterns ergibt sich z. B. durch die Fläche des Ausgangsdreiecks (in der nebenstehenden Abbildung dunkel eingefärbt) plus 3-mal der Fläche des kleinen gleichschenkeligen Dreiecks mit Seitenlänge $\frac{a}{3}$:



$$A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{3^2 \cdot 4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$$

Auch andere Herleitungen sind möglich.

c) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$f(0) = 2$
$f(5) = 4$
$f(10) = 2$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = -0{,}08$, $b = 0{,}8$, $c = 2$

$f(x) = -0{,}08 \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot x + 2$

[...]	
[...]	
[...]	
[...]	
$2 \cdot \left(24 - \int_0^{10} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{10}^{12} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$	☒

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 4 Analysis

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 1
c) mittel	c) 2

Thema: Sonstiges

Quelle: The Future of World Religions: Population Growth Projections, 2010 – 2050; Why Muslims Are Rising Fastest and the Unaffiliated Are Shrinking as a Share of the World's Population. PewResearchCenter, www.pewresearch.org [02.04.2015].

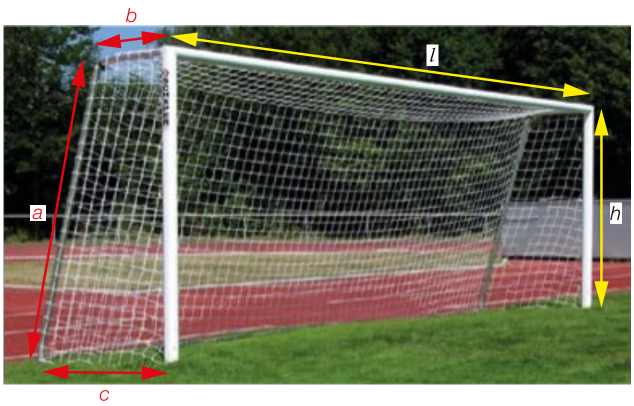
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fußballtor

Aufgabennummer: A_183

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Fußballtor hat folgende Abmessungen:



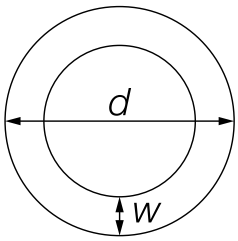
innerer Torrahmen:
h = 2,44 m
l = 7,32 m

Stützstangen:
a = 2,62 m
b = 1,0 m (verläuft parallel zum Boden)

c = 1,95 m

a) – Berechnen Sie, welchen Winkel die hintere Stützstange der Länge a mit dem Boden – also der Strecke mit der Länge c – einschließt.

b) Die zylindrischen Stützstangen des Fußballtors mit der Länge a sind innen hohl. Sie haben einen Außendurchmesser d und eine Wandstärke w. Die Stangen werden aus Aluminium mit einer Dichte von ρ = 2,7 kg/dm³ gefertigt.



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V einer Stützstange der Länge a.

V = ______________________________

– Berechnen Sie die Masse einer Stützstange der Länge a = 2,62 m mit d = 60 mm und w = 1,5 mm.

c) Für ein Fußballtor mit den gegebenen Abmessungen soll ein neues Netz gekauft werden. Wegen des Verlustes beim Zuschneiden wird um 10 % mehr Netzfläche gekauft, als eigentlich benötigt wird.

– Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Netz gekauft werden müssen. Gehen Sie davon aus, dass die Rückfläche und die obere Fläche des Tores rechteckig sind.

d) Ein bestimmter Tormann hält einen Elfmeter mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 %. In einem Fußballmatch werden 3 Elfmeter auf sein Tor geschossen. (Die Schüsse erfolgen unabhängig voneinander und die Wahrscheinlichkeit bleibt konstant.)

– Veranschaulichen Sie die Situation in einem Baumdiagramm.
– Interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeit P, die mit der nachstehenden Formel berechnet wird, im gegebenen Sachzusammenhang.

$P = 1 - 0{,}8^3$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $\alpha = \arccos\left(\frac{c-b}{a}\right)$

$\alpha = \arccos\left(\frac{0{,}95}{2{,}62}\right) = 68{,}7403\ldots°$

$\alpha \approx 68{,}7°$

b) Volumen einer Stange der Länge a:

$$V = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot a - \frac{(d - 2 \cdot w)^2 \cdot \pi}{4} \cdot a = \pi \cdot (d \cdot w - w^2) \cdot a$$

Masse der Stützstange:
$m = V \cdot \rho = \pi \cdot (0{,}6 \cdot 0{,}015 - 0{,}015^2) \cdot 26{,}2 \cdot 2{,}7$ (Längen in dm, Dichte in kg/dm^3)
$m = 1{,}9501\ldots$ kg $\approx 1{,}95$ kg

c) Eine Seitenfläche ist ein Trapez:

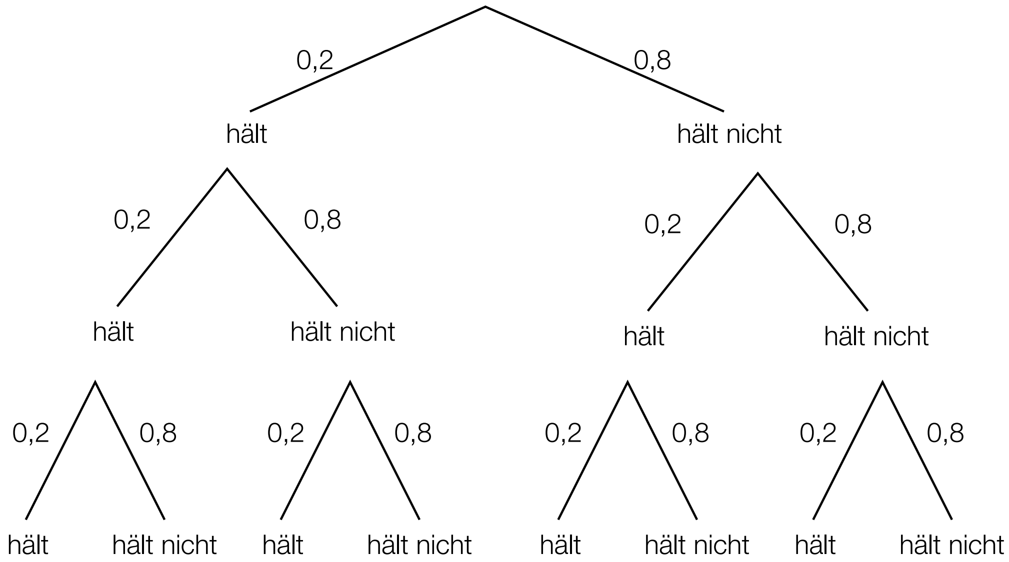
$$A = \frac{(c + b) \cdot h}{2} = \frac{(1{,}95 + 1{,}0) \cdot 2{,}44}{2} = 3{,}599 \text{ m}^2$$

Die Rückfläche und die obere Fläche ergeben zusammen ein Rechteck:
$A = (a + b) \cdot l = (2{,}62 + 1{,}0) \cdot 7{,}32 = 26{,}4984$ m^2

Gesamtfläche + 10 %:
$A = 1{,}1 \cdot (2 \cdot 3{,}599 + 26{,}4984) = 37{,}06604$ m^2

Es müssen rund 37,1 m^2 Netz gekauft werden.

d)



Die Formel gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Tormann von 3 Elfmetern mindestens einen Elfmeter hält.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) 1 Zahlen und Maße
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 1
b) mittel	b) 2
c) leicht	c) 1
d) mittel	d) 2

Thema: Sport

Quellen: http://www.sporthof.eu/cms/front_content.php?idart=106
http://home.arcor.de/fussball-sport/regeln/regel01.html

Mit Pfeil und Bogen

Auf einem horizontalen Gelände finden Bogenschießübungen statt.

a) Für die Beschreibung der Flugbahn eines Pfeiles beim Bogenschießen wird die Bewegung der Pfeilspitze beobachtet. Die Flugbahn kann näherungsweise durch die quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

x ... horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in m
$f(x)$ ... Höhe der Pfeilspitze in der horizontalen Entfernung x in m

Beim ersten Schuss beträgt der Steigungswinkel der Flugbahn im Abschusspunkt 45°.

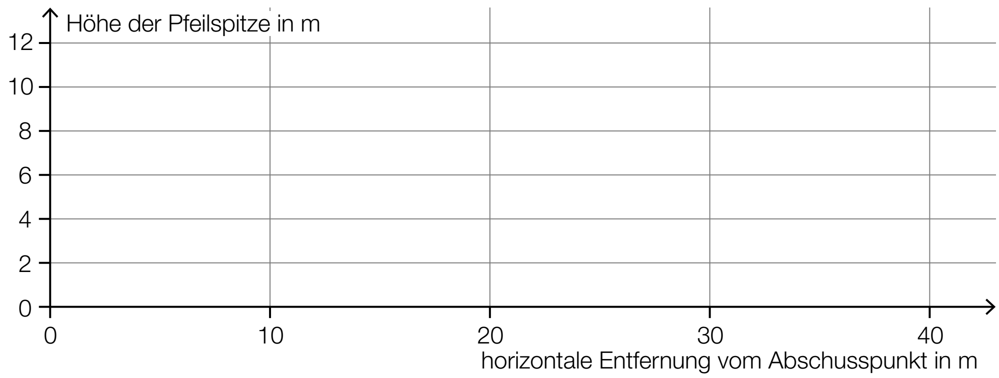
1) Ermitteln Sie den Koeffizienten b. *[0/1 P.]*

Beim zweiten Schuss befindet sich die Pfeilspitze beim Abschuss in einer Höhe von 2 m. Sie erreicht ihre maximale Höhe von 10 m in einer horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt von 20 m. Die Flugbahn beim zweiten Schuss kann ebenfalls durch eine quadratische Funktion beschrieben werden.

2) Geben Sie die Höhe H der Pfeilspitze bei einer horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt von 40 m an.

$H =$ ____________________ m *[0/1 P.]*

3) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem die Flugbahn beim zweiten Schuss im Intervall [0; 40] ein. *[0/1 P.]*



b) Ein Bogenschütze trifft bei jedem Schuss mit der konstanten Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}8$ den schwarzen Bereich der Zielscheibe. Man geht modellhaft davon aus, dass die Schüsse unabhängig voneinander sind.

1) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$P(E) = 1 - 0{,}2^n$ *[0/1 P.]*

Beim Training schießt der Bogenschütze 20-mal auf die Zielscheibe.

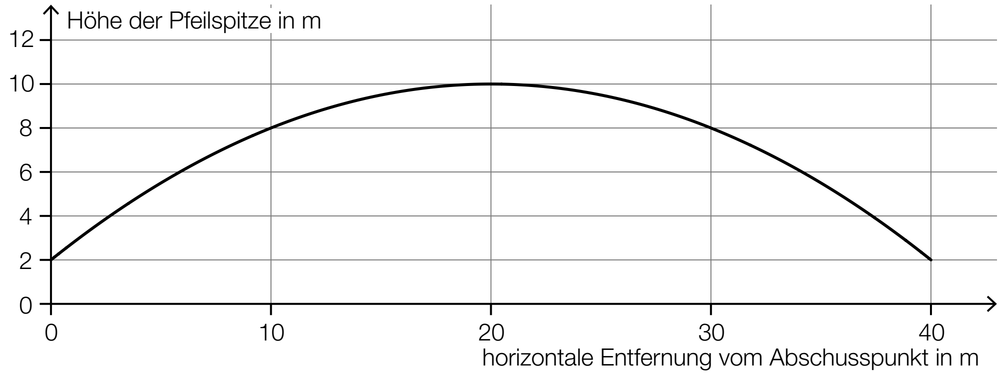
2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei mindestens 17-mal den schwarzen Bereich der Zielscheibe trifft. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$
$f'(0) = \tan(45°)$
$b = 1$

a2) $H = 2$ m

a3)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es erforderlich, dass der Graph der quadratischen Funktion durch die Punkte $(0|2)$, $(20|10)$ *und* $(40|2)$ *verläuft.*

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Koeffizienten b.
a2) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Höhe H.
a3) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Flugbahn im Intervall [0; 40].

b1) Der Bogenschütze trifft bei n Schüssen mindestens 1-mal den schwarzen Bereich der Zielscheibe.

b2) Binomialverteilung mit $n = 20$, $p = 0{,}8$
X ... Anzahl der Treffer

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

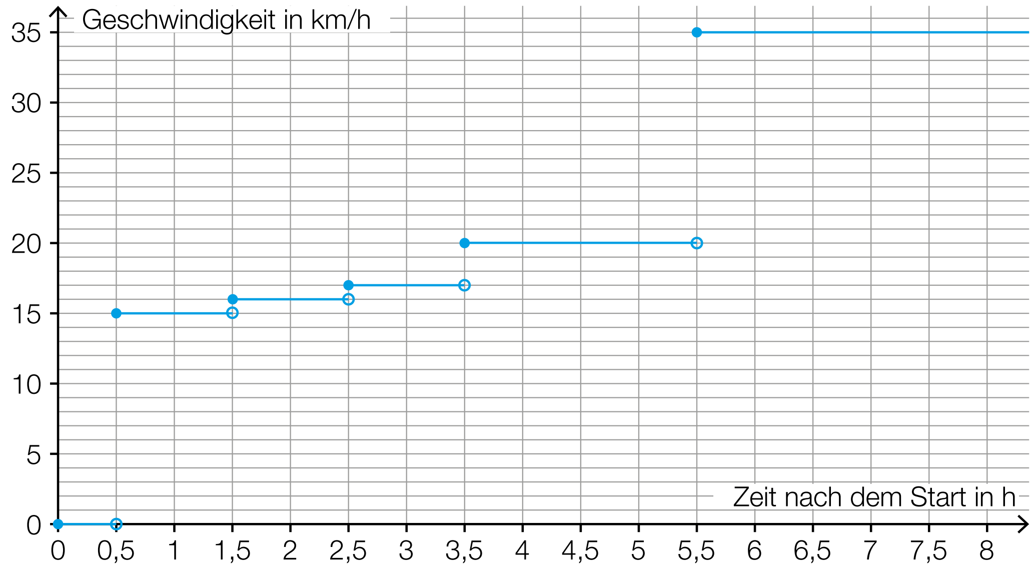
$P(X \geq 17) = 0{,}411...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 41 %.

b1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Wings for Life

Der *Wings for Life World Run* ist ein Lauf, bei dem der Start in vielen Städten auf der ganzen Welt genau zur selben Zeit erfolgt. Die Läufer/innen laufen jeweils solange, bis sie vom sogenannten Catcher-Car überholt werden. Die nachstehende Grafik beschreibt die Fahrt des Catcher-Cars während eines bestimmten Laufes. (Die Zeiten, die das Catcher-Car zur Beschleunigung benötigt, werden vernachlässigt.)



a) 1) Berechnen Sie die Länge des Weges, den das Catcher-Car nach 2 Stunden zurückgelegt hat.

2) Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der ein Teilnehmer laufen muss, damit er nach 15 km vom Catcher-Car eingeholt wird.

b) 1) Zeichnen Sie das Weg-Zeit-Diagramm des Catcher-Cars für die ersten 1,5 Stunden des Laufes in das unten stehende Koordinatensystem.
   2) Ermitteln Sie mithilfe des Weg-Zeit-Diagramms, nach wie vielen Kilometern eine bestimmte Läuferin vom Catcher-Car eingeholt wird, wenn sie mit einer konstanten Geschwindigkeit von 9 km/h läuft.

c) Im Jahr 2015 starteten beim *Wings for Life Run* weltweit 101 280 Personen. Die Ergebnisse der 10 besten Läufer sind in der nachstehenden Tabelle angeführt.

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
gelaufene Kilometer	79,90	78,31	78,20	78,06	74,81	74,56	73,51	73,46	72,15	70,66

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der gelaufenen Kilometer der 10 besten Läufer.
2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Person auf Rang 1 weiter gelaufen ist als die Person auf Rang 10.

d) Im Jahr 2015 starteten in Österreich 6 408 Personen beim *Wings for Life Run*, weltweit waren es 101 280 Personen. Es werden aus dem weltweiten Teilnehmerfeld nacheinander 2 Personen zufällig ausgewählt. P ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur die erste dieser Personen in Österreich gelaufen ist.

1) Kreuzen Sie den richtigen Ausdruck an. *[1 aus 5]*

$P = \frac{101\,280}{6\,408}$	☐
$P = \frac{6\,408}{101\,280}$	☐
$P = \frac{6\,408}{101\,280} \cdot \frac{94\,872}{101\,279}$	☐
$P = \frac{6\,408}{101\,280} \cdot \frac{6\,407}{101\,279}$	☐
$P = \frac{6\,408 \cdot 94\,872}{101\,280}$	☐

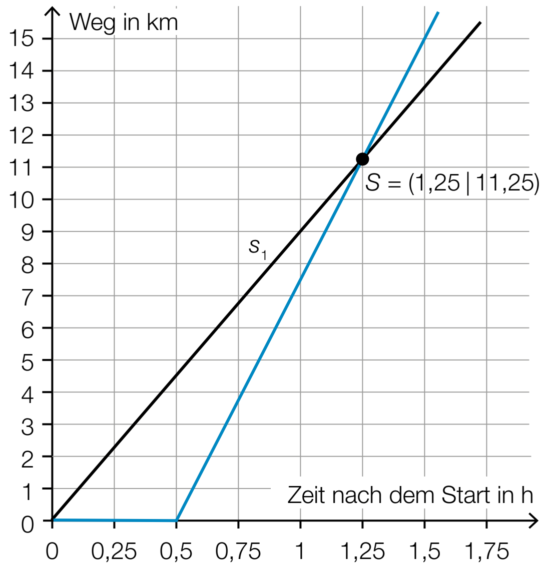
Möglicher Lösungsweg

a1) $s = 1 \cdot 15 + 0{,}5 \cdot 16 = 23$ km
Das Catcher-Car hat nach 2 Stunden 23 km zurückgelegt.

a2) $\frac{15}{1{,}5} = 10$

Man muss mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 10 km/h laufen.

b1)



b2) Die Läuferin wird nach 11,25 km vom Catcher-Car überholt.
Toleranzbereich: [10,5; 12]

c1) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} \approx 75{,}36$ km $\qquad s \approx 3{,}07$ km

c2) $\frac{9{,}24}{70{,}66} = 0{,}130\ldots \approx 13\ \%$

Der Läufer auf Rang 1 ist um rund 13 % weiter gelaufen als der Läufer auf Rang 10.

d1)

$P = \frac{6\,408}{101\,280} \cdot \frac{94\,872}{101\,279}$	☒

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Durchhängende Kette

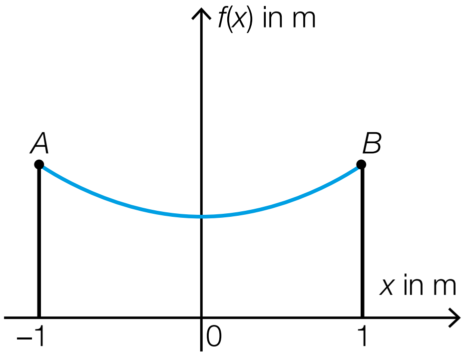
Aufgabennummer: A_214

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine durchhängende Kette zwischen 2 Masten gleicher Höhe, die 2 m voneinander entfernt sind, kann mit der Funktion f beschrieben werden.

$f(x) = e^x + e^{-x}$

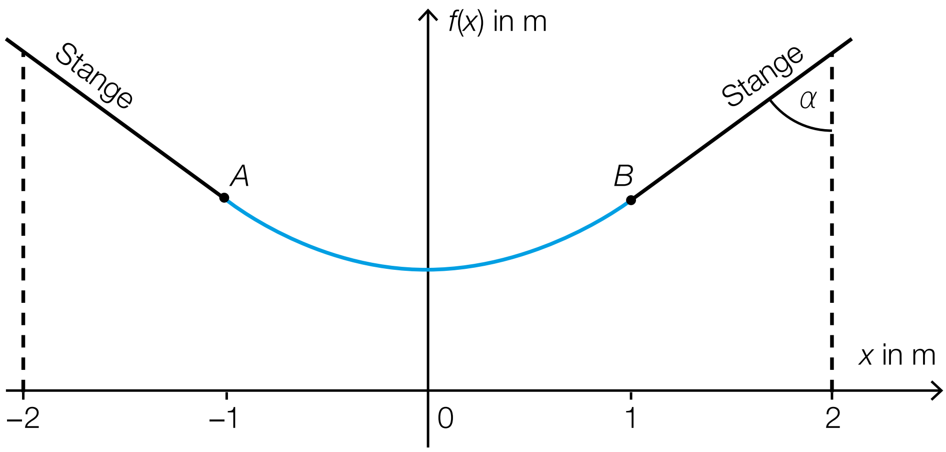
$|x|$ ... Abstand von der vertikalen Achse in m
$f(x)$ ... Höhe der Kette über dem Boden in m



a) Die Funktion f ist symmetrisch bezüglich der vertikalen Achse und kann näherungsweise auch durch eine quadratische Funktion g beschrieben werden. Der Graph der Funktion g enthält ebenfalls die Punkte A und B und hat den gleichen Tiefpunkt wie die Funktion f.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, das zur Ermittlung der Koeffizienten von g benötigt wird.
– Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

b) Die oben beschriebene Kette soll an den Punkten A und B an 2 Stangen befestigt werden, die an den 2 Punkten die gleichen Steigungswinkel wie die Kette haben.



– Berechnen Sie denjenigen Winkel α, den die Stangen mit der Senkrechten einschließen.

c) Für eine Abstandsberechnung wurden ausgehend von der Gleichung $e^x + e^{-x} = 2{,}5$ folgende Umformungsschritte durchgeführt:

(1) $e^x + \frac{1}{e^x} = 2{,}5$

(2) $e^{2 \cdot x} + 1 = 2{,}5 \cdot e^x$

(3) $\ln(e^{2 \cdot x}) + \ln(1) = \ln(2{,}5 \cdot e^x)$

(4) $2 \cdot x + 0 = \ln(2{,}5) + x$

(5) $x = \ln(2{,}5)$

In der Umformung von Zeile 2 auf Zeile 3 wurde ein Fehler gemacht.

– Erklären Sie, worin der Fehler besteht.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Eine quadratische Funktion g, die symmetrisch zur vertikalen Achse ist, hat die allgemeine Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot x^2 + c$.

$B = (1|f(2)) = (1|3{,}086...)$
Tiefpunkt $= (0|f(0)) = (0|2)$

Die Lösung des Gleichungssystems:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{I: } g(1) = 3{,}086\ldots & \Rightarrow & a + c = 3{,}086\ldots \\ \text{II: } g(0) = 2 & \Rightarrow & c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1{,}086\ldots$$

$g(x) = 1{,}086\ldots \cdot x^2 + 2$

Das Einsetzen von 3 Punkten in die Funktionsgleichung der allgemeinen quadratischen Funktion ist ebenfalls richtig.

b) Der Steigungswinkel am Punkt B ist $\arctan(f'(1))$.
$f'(x) = e^x - e^{-x}$
$f'(1) = 2{,}350\ldots$, Steigungswinkel $= \arctan(2{,}350\ldots) = 66{,}952...°$
$\alpha = 180° - 90° - 66{,}952\ldots° = 23{,}047\ldots° \approx 23{,}05°$

c) Es wurde nicht die Summe logarithmiert, sondern die Summanden.
Richtig müsste es heißen: $\ln(e^{2 \cdot x} + 1) = \ln(2{,}5 \cdot e^x)$.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) —

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) schwer
c) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 1
c) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Baumstammwerfen

Baumstammwerfen ist ein traditioneller schottischer Wettkampf.

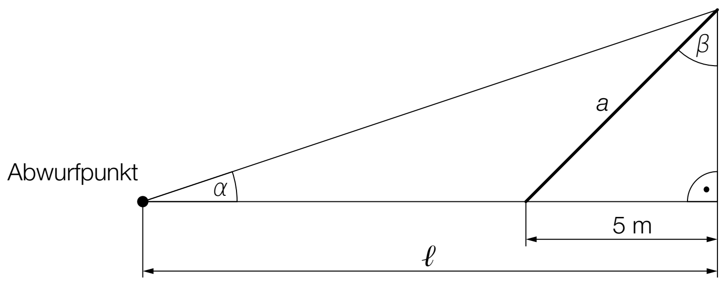
a) Die dafür verwendeten Baumstämme sind annähernd zylinderförmig.
Ein bestimmter Baumstamm aus Lärchenholz hat eine Länge von 19 Fuß 6 Zoll und einen Durchmesser von 6 Zoll.

1 Fuß entspricht 12 Zoll.
1 Zoll entspricht 2,54 cm.

Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V, also $m = \varrho \cdot V$.
Lärchenholz hat eine Dichte von 570 kg/m³.

1) Berechnen Sie die Masse dieses Baumstamms in der Einheit kg. *[0/1/2 P.]*

b) Ein Baumstamm mit der Länge a wurde vom Abwurfpunkt aus geworfen. In der nachstehenden Abbildung ist der nun auf dem Boden liegende Baumstamm in der Ansicht von oben dargestellt (Abmessungen in m).



1) Vervollständigen Sie mithilfe von a und ℓ die nachstehende Formel.

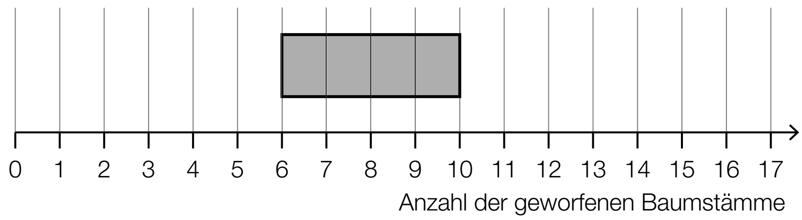
$$\alpha = \arctan\left(\frac{\boxed{}}{\boxed{}}\right)$$ *[0/1 P.]*

Es gilt: $\beta = 70°$

2) Berechnen Sie die Länge a des Baumstamms. *[0/1 P.]*

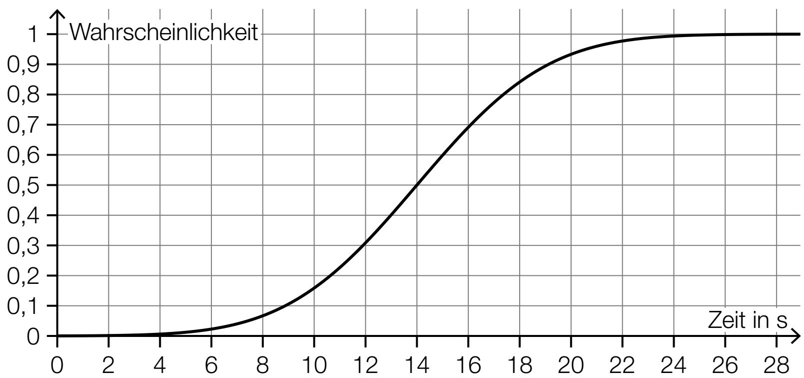
c) Bei einem Wettbewerb versucht jede teilnehmende Person, innerhalb von drei Minuten möglichst viele Baumstämme zu werfen. Die Anzahlen der jeweils geworfenen Baumstämme sollen in Form eines Boxplots dargestellt werden.
Folgende Daten sind bekannt:

Maximum	16
Spannweite	12
Median	9



1) Vervollständigen Sie den obigen Boxplot. *[0/1 P.]*

Die Zeit, die Sean pro Wurf benötigt, ist annähernd normalverteilt. Die zugehörige Verteilungsfunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ ab.

μ = __________ s *[0/1 P.]*

3) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass Sean für einen Wurf mindestens 12 s benötigt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Volumen des Baumstamms in cm^3:

$\left(\frac{6}{2} \cdot 2{,}54\right)^2 \cdot \pi \cdot (19 \cdot 12 + 6) \cdot 2{,}54 = 108\,419{,}99...$

$\frac{108\,419{,}99...}{10^6} \cdot 570 = 61{,}7...$

Die Masse des Baumstamms beträgt rund 62 kg.

a1) Ein Punkt für den richtigen Ansatz (richtige Anwendung der Formel zur Berechnung des Volumens eines Drehzylinders auf den gegebenen Sachverhalt).
Ein Punkt für das richtige Berechnen der Masse in kg.

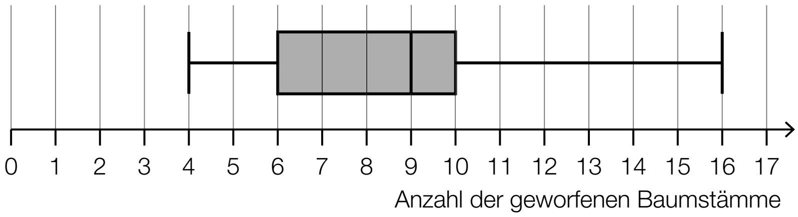
b1) $\alpha = \arctan\left(\frac{\boxed{\sqrt{a^2 - 25}}}{\boxed{\ell}}\right)$

b2) $a = \frac{5}{\sin(70°)}$

$a = 5{,}32...$ m

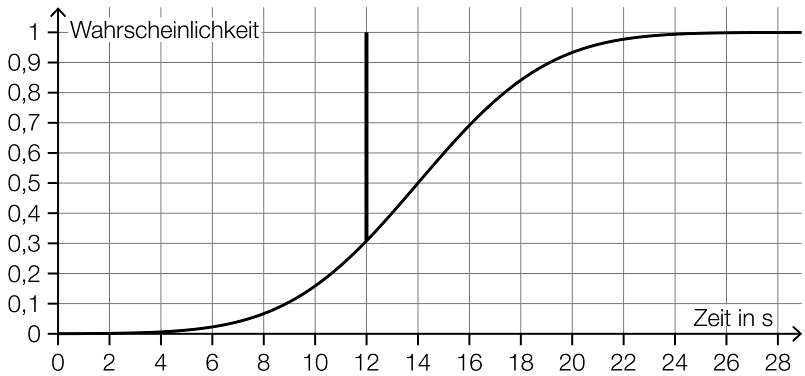
b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge *a*.

c1)



c2) $\mu = 14$ s

c3)



c1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Boxplots.
c2) Ein Punkt für das richtige Ablesen des Erwartungswerts.
c3) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Betonschutzwand

Aufgabennummer: A_171

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Zur Sicherung von Baustellen auf den Straßen werden verschiedene Betonschutzwände eingesetzt.

a) Der Querschnitt einer Betonschutzwand ist in der Abbildung 1 dargestellt.

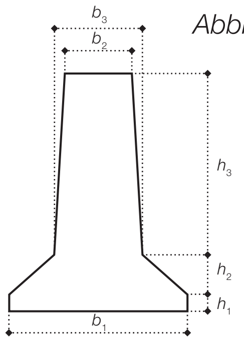


Abbildung 1

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A der Querschnittsfläche.

$A =$ ______________________________

b) Die Abbildung 2 zeigt den Querschnitt einer anderen Betonschutzwand.

$$h(x) = \frac{1}{11\,560} \cdot x^4 - \frac{1}{85} \cdot x^3 + \frac{2}{5} \cdot x^2 \text{ mit } 0 \leq x \leq 68$$

x, $h(x)$ … Koordinaten in cm

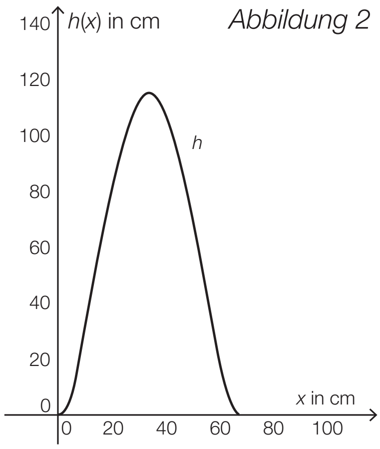


Abbildung 2

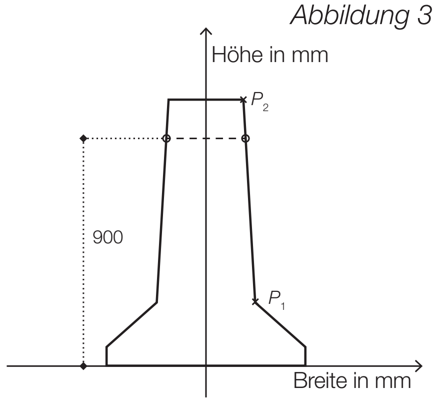
– Berechnen Sie den Flächeninhalt der Querschnittsfläche dieser Betonschutzwand.

Die Betonschutzwand hat eine Länge von 4 m und eine Dichte von 2 400 kg/m³ (Masse = Dichte × Volumen).

– Berechnen Sie die Masse dieser Betonschutzwand in Tonnen.

c) Bei einem Element einer Betonschutzwand wird in einer Höhe von 900 mm eine waagrechte Bohrung gemacht (siehe Abbildung 3). Die rechte Begrenzungslinie der zur y-Achse symmetrischen Querschnittsfläche geht durch die Punkte $P_1 = (200|255)$ und $P_2 = (150|1\,070)$.

Abbildung 3



– Berechnen Sie die Breite des Elements in 900 mm Höhe.

d) Auf einer Baustelle stehen zwei verschieden lange Elemente A und B der Betonschutzwände zur Verfügung. Für die Abgrenzung der Baustelle mit einer Länge von 70 m können entweder 14 Elemente A und 10 Elemente B oder 7 Elemente A und 15 Elemente B verwendet werden.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Längen der Elemente A und B auf.
– Berechnen Sie die Längen der Elemente A und B.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $A = b_1 \cdot h_1 + \frac{b_1 + b_3}{2} \cdot h_2 + \frac{b_2 + b_3}{2} \cdot h_3$

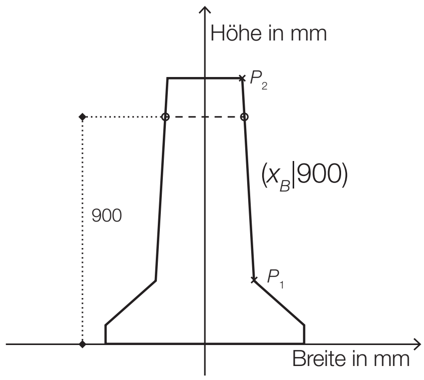
b) $A = \int_0^{68} h(x)\,\mathrm{d}x$

$A = 4\,192{,}4\ldots\ \text{cm}^2 = 0{,}41924\ldots\ \text{m}^2$
$m = V \cdot \rho = 0{,}41924\ldots \cdot 4 \cdot 2\,400 = 4\,024{,}72\ldots$
$m \approx 4\ \text{t}$

Die Masse dieser Betonschutzwand beträgt rund 4 t.

c) lineare Funktion g durch die Punkte P_1 und P_2:
$g(x) = k \cdot x + d$
$\left.\begin{array}{l} 255 = k \cdot 200 + d \\ 1\,070 = k \cdot 150 + d \end{array}\right\} \Rightarrow k = -16{,}3;\ d = 3\,515$
$g(x) = -16{,}3 \cdot x + 3\,515$
$900 = -16{,}3 \cdot x_B + 3\,515 \Rightarrow x_B = 160{,}429\ldots$
$2 \cdot x_B = 320{,}858\ldots$

Die Breite auf einer Höhe von 900 mm beträgt rund 321 mm.



d) L_A … Länge des Elements A in m
L_B … Länge des Elements B in m

I: $14 \cdot L_A + 10 \cdot L_B = 70$
II: $7 \cdot L_A + 15 \cdot L_B = 70$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$L_A = 2{,}5$ m
$L_B = 3{,}5$ m

Die Länge des Elements A beträgt 2,5 m und die Länge des Elements B beträgt 3,5 m.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 1 Zahlen und Maße
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 1
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 2
d) leicht	d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

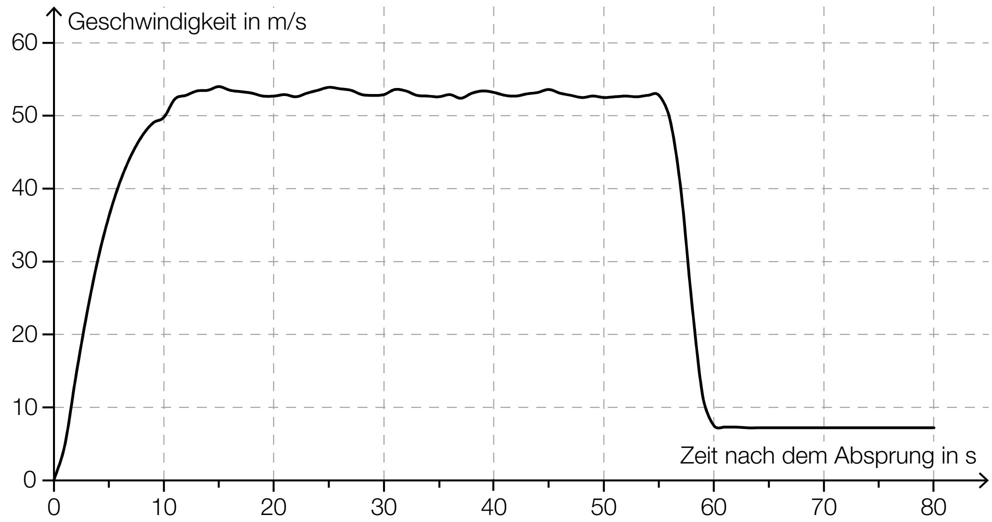
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fallschirmsprung*

Aufgabennummer: A_261

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei einem Fallschirmsprung wurde der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers aufgezeichnet. Im nachstehenden Diagramm wird diese Geschwindigkeit für die ersten 80 Sekunden nach dem Absprung veranschaulicht.



a) In den ersten Sekunden nach dem Absprung gilt für den Fallschirmspringer annähernd das Fallgesetz:

$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$s(t)$ ... Fallstrecke zur Zeit t in m
g ... Erdbeschleunigung, $g = 9{,}81$ m/s²

– Berechnen Sie mithilfe des Fallgesetzes die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers 1,5 Sekunden nach dem Absprung.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) 55 Sekunden nach dem Absprung zieht der Fallschirmspringer die Reißleine, der Fallschirm öffnet sich.

– Schätzen Sie den Flächeninhalt zwischen der Geschwindigkeitskurve und der Zeitachse im Intervall [0 s; 55 s] ab.
– Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

c) Der Höhenmesser des Fallschirmspringers zeigt 60 Sekunden nach dem Absprung eine Meereshöhe von 1 300 Metern an. Ab dieser Meereshöhe sinkt der Fallschirmspringer jeweils 100 Meter in 14 Sekunden.
Dabei soll die Meereshöhe des Fallschirmspringers (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) durch eine Funktion h beschrieben werden.

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt 60 Sekunden nach dem Absprung.

Der Fallschirmspringer landet auf einem Feld, das auf einer Meereshöhe von 350 Metern liegt.

– Berechnen Sie, wie lange der gesamte Fallschirmsprung (vom Absprung bis zur Landung) dauert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

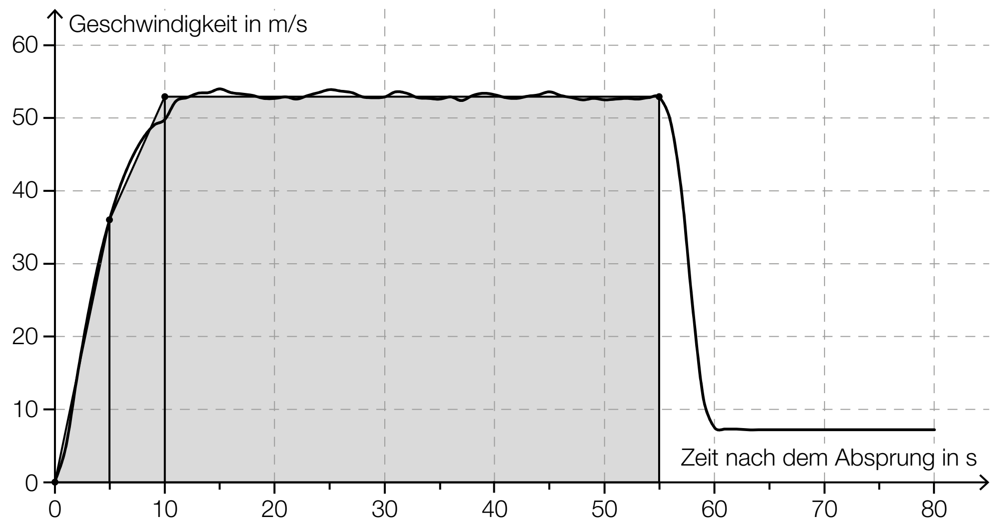
Möglicher Lösungsweg

a) $s'(t) = v(t) = g \cdot t$

$v(1{,}5) = 9{,}81 \cdot 1{,}5 = 14{,}715$

Gemäß dem Fallgesetz beträgt die Geschwindigkeit 1,5 Sekunden nach dem Absprung rund 14,72 m/s.

b) Näherungsweises Ermitteln des Flächeninhalts durch Dreiecke und Vierecke:



$A \approx \frac{36 \cdot 5}{2} + \frac{(53 + 36) \cdot 5}{2} + 53 \cdot 45 = 2\,697{,}5$

Toleranzbereich: [2 400; 2 900]

Der Flächeninhalt entspricht der Fallstrecke in den ersten 55 Sekunden in Metern.

c) $h(t) = 1\,300 - \frac{100}{14} \cdot t$

t ... Zeit in s

$h(t)$ ... Meereshöhe des Fallschirmspringers zur Zeit t in m

$350 = 1\,300 - \frac{100}{14} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = 133$

$133 + 60 = 193$

Der Fallschirmsprung dauert vom Absprung bis zur Landung insgesamt 193 Sekunden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Geschwindigkeit mithilfe des Fallgesetzes

b) 1 × B: für das richtige Abschätzen des Flächeninhalts im Toleranzbereich [2 400; 2 900]
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit

c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
1 × B: für die richtige Berechnung der insgesamten Dauer des Fallschirmsprungs

Altenpflege*

Aufgabennummer: A_262

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

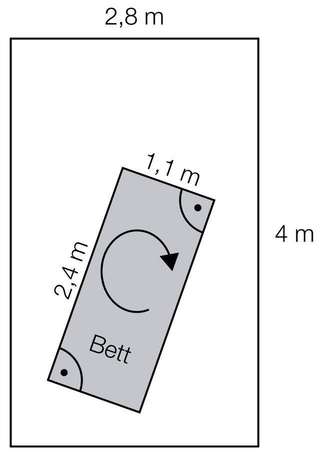
a) Katharina und Georg arbeiten als Pflegekräfte in einem Heim. Sie bekommen das gleiche monatliche Grundgehalt. Im Februar lag in diesem Heim ein besonderer Arbeitsbedarf vor. Georg leistete 14 Überstunden, Katharina leistete 46 Überstunden. Ihr jeweiliges Gesamtentgelt setzt sich aus dem Grundgehalt und der Abgeltung für die geleisteten Überstunden zusammen. Jede Überstunde wird dabei gleich abgegolten.

Das Gesamtentgelt von Georg betrug im Februar € 2.617, jenes von Katharina betrug € 3.433.

– Ermitteln Sie das Grundgehalt und die Abgeltung für eine Überstunde.

b) Der Aufzug eines Pflegeheims hat eine rechteckige Grundfläche mit einer Länge von 4 m und einer Breite von 2,8 m. Ein Pflegebett fährt auf beweglichen Rollen und hat die Außenmaße 2,4 m × 1,1 m (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).

Aufzug-Innenraum von oben gesehen



– Überprüfen Sie nachweislich, ob der Aufzug breit genug ist, damit das Bett – wie oben skizziert – um 180° gedreht werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr durch mobile Dienste im Rahmen der Altenpflege in Oberösterreich sowie deren prozentuellen Anstieg jeweils im Vergleich zur Anzahl 2 Jahre davor.

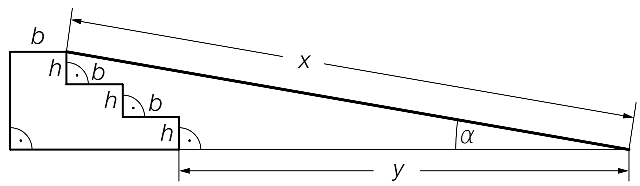
Jahr	Anzahl der Hausbesuche pro Jahr	prozentueller Anstieg (gerundet)
1994	498 086	
1996	589 168	18,3 %
1998	802 146	36,1 %
2000	1 017 793	26,9 %
2002	1 176 665	15,6 %
2004	1 360 543	15,6 %

Der prozentuelle Anstieg der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr betrug sowohl von 2000 auf 2002 als auch von 2002 auf 2004 jeweils rund 15,6 %.

– Erklären Sie in Worten, warum sich die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr von 2000 auf 2002 von jener von 2002 auf 2004 unterscheidet, obwohl die prozentuellen Anstiege in den jeweiligen Zeitintervallen gleich sind.

– Interpretieren Sie das Ergebnis der Berechnung $\frac{1\,360\,543 - 498\,086}{2004 - 1994} \approx 86\,246$ im gegebenen Sachzusammenhang.

d) Eine Rampe der Länge x überwindet 3 Stufen. Jede Stufe hat die Höhe h und die Breite b.



– Kreuzen Sie die auf den dargestellten Sachverhalt zutreffende Formel an. *[1 aus 5]*

$x = \frac{2 \cdot b}{\cos(\alpha)}$	☐
$x = \frac{3 \cdot h \cdot \sin(\alpha)}{2 \cdot b}$	☐
$x = (2 \cdot b + y) \cdot \tan(\alpha)$	☐
$x = \frac{2 \cdot b + y}{\cos(\alpha)}$	☐
$x = \frac{3 \cdot h + \sin(\alpha)}{2 \cdot b}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) x ... Grundgehalt in €
y ... Abgeltung für eine Überstunde in €

$x + 14 \cdot y = 2617$
$x + 46 \cdot y = 3433$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$x = 2260$, $y = 25{,}50$

Das Grundgehalt beträgt € 2.260, die Abgeltung für eine Überstunde € 25,50.

b) Länge der Diagonalen des Bettes d:
$d = \sqrt{1{,}1^2 + 2{,}4^2} = 2{,}640...$

Die Länge der Diagonalen beträgt rund 2,64 m. Da die Diagonale kürzer als die Liftbreite ist, kann das Bett im Lift um 180° gedreht werden.

c) Die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr unterscheidet sich, da verschiedene Grundwerte für die Berechnung der prozentuellen Anstiege herangezogen werden.

Die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr ist im Zeitintervall von 1994 bis 2004 durchschnittlich um rund 86246 pro Jahr gestiegen.

d)

[...]	
[...]	
[...]	
$x = \frac{2 \cdot b + y}{\cos(\alpha)}$	☒
[...]	

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Grundgehalts und der Abgeltung für eine Überstunde

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis

c) 1 × D: für die richtige Erklärung (Ein Nachweis, dass die absoluten Änderungen nicht gleich sind, ist für die Punktevergabe nicht ausreichend.)
1 × C: für die richtige Interpretation des Ergebnisses der Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang

d) 1 × A: für das richtige Ankreuzen

Die Genussformel*

Aufgabennummer: A_263

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Physiker Werner Gruber erklärt in seinem Buch *Die Genussformel* (Salzburg: Ecowin, 2008) die kleinen chemischen und physikalischen Tricks der großen Köchinnen und Köche. Dabei werden auch mathematische Zusammenhänge betrachtet.

a) In der *Genussformel* betrachtet Gruber den Genuss beim Essen als messbare Größe mit Werten von 0 (kein Genuss) bis 1 (maximaler Genuss). Für die Abhängigkeit des Genusses von der Anzahl der Geschmacksrichtungen auf einem Teller gibt Gruber folgende Funktion G an:

$$G(n) = e^{-\frac{(n-3)^2}{0{,}2746}}$$

n ... Anzahl der unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller
$G(n)$ ... Genuss bei n unterschiedlichen Geschmacksrichtungen auf dem Teller

– Ermitteln Sie diejenige Anzahl an unterschiedlichen Geschmacksrichtungen, bei der man laut Gruber den maximalen Genuss hat.

b) Für die optimale Bratdauer einer Gans gibt Gruber folgende Werte an:

Masse der Gans in Kilogramm	Bratdauer in Minuten
2,0	104
3,0	136
3,8	159

– Zeigen Sie mithilfe des Differenzenquotienten, dass zwischen Masse und Bratdauer kein exakter linearer Zusammenhang vorliegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Ei einer bestimmten Größe wird gekocht. Der zeitliche Verlauf der Innentemperatur wird mithilfe der Funktion T modelliert:

$T(t) = 100 - 192 \cdot e^{-\frac{25 \cdot t}{81}}$ mit $t \geq 3$

t ... Kochzeit in min
$T(t)$ ... Innentemperatur zur Zeit t in °C

– Berechnen Sie, nach welcher Kochzeit eine Innentemperatur von 84 °C erreicht wird.

Die Potenz $e^{-\frac{25 \cdot t}{81}}$ wird in Wurzelschreibweise und mit positiver Hochzahl dargestellt.

– Kreuzen Sie die zutreffende Darstellung an. *[1 aus 5]*

$\frac{1}{\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}}$	☐
$\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}$	☐
$-\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}$	☐
$-\sqrt[25]{e^{81 \cdot t}}$	☐
$\frac{1}{\sqrt[25]{e^{81 \cdot t}}}$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $G(n) = 1$:

$e^{-\frac{(n-3)^2}{0{,}2746}} = 1 \quad \Rightarrow \quad n = 3$

b) Für die jeweiligen Differenzenquotienten gilt:

$\frac{136 - 104}{3{,}0 - 2{,}0} = 32$ bzw. $\frac{159 - 136}{3{,}8 - 3{,}0} = 28{,}75$ bzw. $\frac{159 - 104}{3{,}8 - 2{,}0} = 30{,}55...$

Es liegt kein linearer Zusammenhang vor, weil die Differenzenquotienten nicht gleich sind.

Für die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, alle 3 angegebenen Differenzenquotienten zu ermitteln.

c) $84 = 100 - 192 \cdot e^{-\frac{25 \cdot t}{81}}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 8{,}0...$

Nach etwa 8 Minuten hat das Ei eine Innentemperatur von 84 °C.

$\frac{1}{\sqrt[81]{e^{25 \cdot t}}}$	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Ermitteln der Anzahl an unterschiedlichen Geschmacksrichtungen für maximalen Genuss

b) 1 × D: für den richtigen Nachweis mithilfe des Differenzenquotienten

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kochzeit
1 × C: für das richtige Ankreuzen

Pizzalieferdienst*

Aufgabennummer: A_264

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Pizzeria liefert Pizzen auf Bestellung aus. Die Kunden sollen möglichst schnell beliefert werden, damit die Pizzen bei der Zustellung noch heiß sind.

a) Für 100 Pizzen wurden die Zustellzeiten erhoben und in 6 Klassen eingeteilt:

Klasse	Zustellzeit in Minuten	Klassenmitte	absolute Häufigkeit
1	[0; 10[	5	4
2	[10; 20[	15	48
3	[20; 30[	25	27
4	[30; 40[	35	11
5	[40; 50[	45	5
6	[50; 60[	55	5

– Geben Sie an, in welcher Klasse der Median der Zustellzeiten liegt.

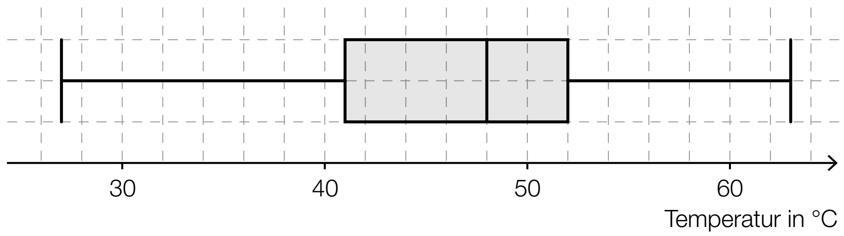
Mithilfe der Klassenmitten können das arithmetische Mittel $\bar{x}$ und die Standardabweichung s der Zustellzeiten näherungsweise berechnet werden.
Es gilt: $\bar{x} = 23$ min

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die zugehörige Standardabweichung s der Zustellzeiten berechnet werden kann.

$\sqrt{\frac{(5-23)+(15-23)+(25-23)+(35-23)+(45-23)+(55-23)}{6}}$	☐
$\sqrt{\frac{(5-23)^2+(15-23)^2+(25-23)^2+(35-23)^2+(45-23)^2+(55-23)^2}{6}}$	☐
$\sqrt{\frac{(5-23)^2\cdot 4+(15-23)^2\cdot 48+(25-23)^2\cdot 27+(35-23)^2\cdot 11+(45-23)^2\cdot 5+(55-23)^2\cdot 5}{6}}$	☐
$\sqrt{\frac{(5-23)^2\cdot 4+(15-23)^2\cdot 48+(25-23)^2\cdot 27+(35-23)^2\cdot 11+(45-23)^2\cdot 5+(55-23)^2\cdot 5}{100}}$	☐
$\sqrt{\frac{(4-23)^2\cdot 5+(48-23)^2\cdot 15+(27-23)^2\cdot 25+(11-23)^2\cdot 35+(5-23)^2\cdot 45+(5-23)^2\cdot 55}{100}}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei einer statistischen Erhebung wurde die Temperatur der gelieferten Pizzen untersucht. Die erhobenen Daten sind im folgenden Boxplot dargestellt:

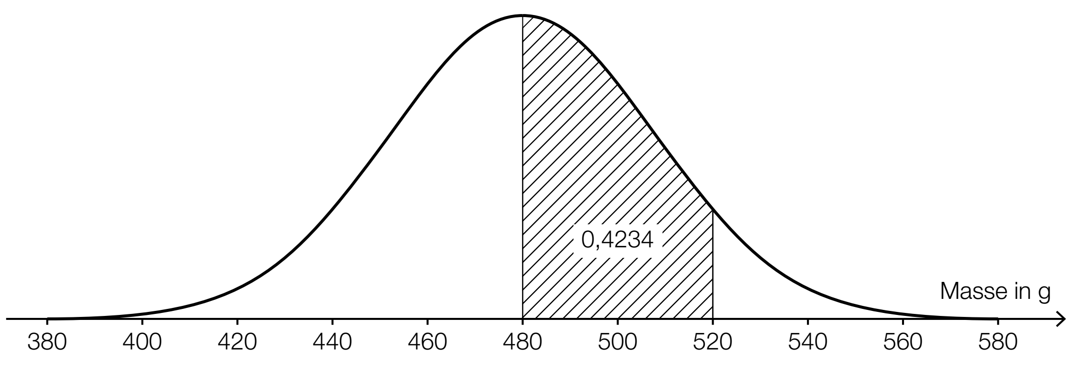


Es wird auf Basis dieses Boxplots behauptet: „Mindestens 80 % der gelieferten Pizzen haben eine Temperatur von über 45 °C.“

– Argumentieren Sie anhand des obigen Boxplots, dass diese Behauptung falsch ist.

c) Die Masse der Pizzen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 480$ g.

In der nachstehenden Darstellung der Dichtefunktion ist diejenige Fläche markiert, die der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass die Masse einer zufällig ausgewählten Pizza zwischen 480 g und 520 g liegt.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pizza eine Masse von mindestens 520 g hat.
– Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Dichtefunktion einer Normalverteilung mit einem Erwartungswert von 520 g und einer kleineren Standardabweichung als jener der gegebenen Dichtefunktion.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

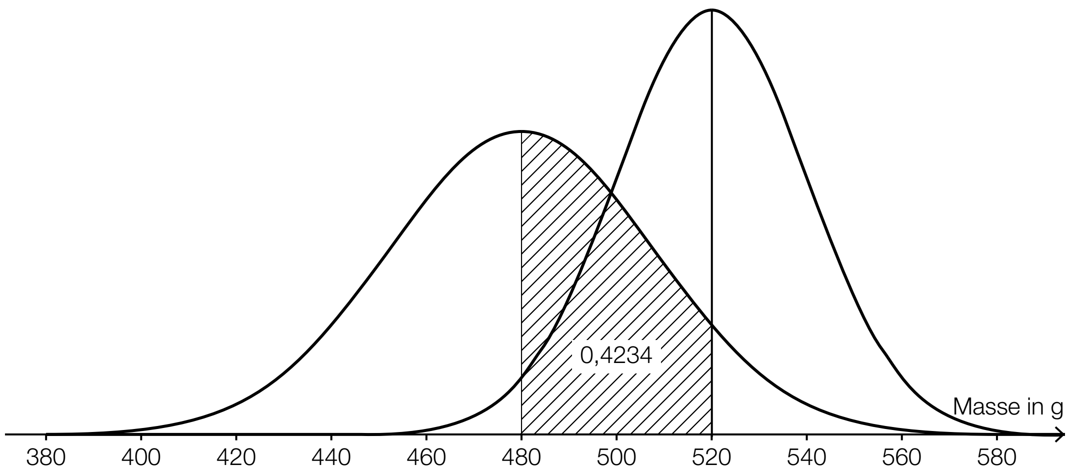
Möglicher Lösungsweg

a) Der Median liegt in der Klasse 2.

$\sqrt{\frac{(5-23)^2 \cdot 4 + (15-23)^2 \cdot 48 + (25-23)^2 \cdot 27 + (35-23)^2 \cdot 11 + (45-23)^2 \cdot 5 + (55-23)^2 \cdot 5}{100}}$	☒

b) Es gilt, dass mindestens 25 % der Werte kleiner oder gleich $q_1 = 41$ °C sind. Daher können nicht mindestens 80 % der gelieferten Pizzen eine Temperatur von über 45 °C haben.

c) Wegen der Symmetrie der Glockenkurve gilt:
$P(X \geq 520) = 0{,}5 - 0{,}4234 = 0{,}0766$
X ... Masse in g



Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für die richtige Angabe derjenigen Klasse, in der der Median liegt
   1 × C2: für das richtige Ankreuzen

b) 1 × D: für die richtige Argumentation

c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit
   1 × A: für das richtige Skizzieren des Graphen der Dichtefunktion (Maximumstelle bei 520 g, Glockenkurve höher und schmäler als in der gegebenen Darstellung)

Wahlmöglichkeiten beim Fliegen*

Aufgabennummer: A_265		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

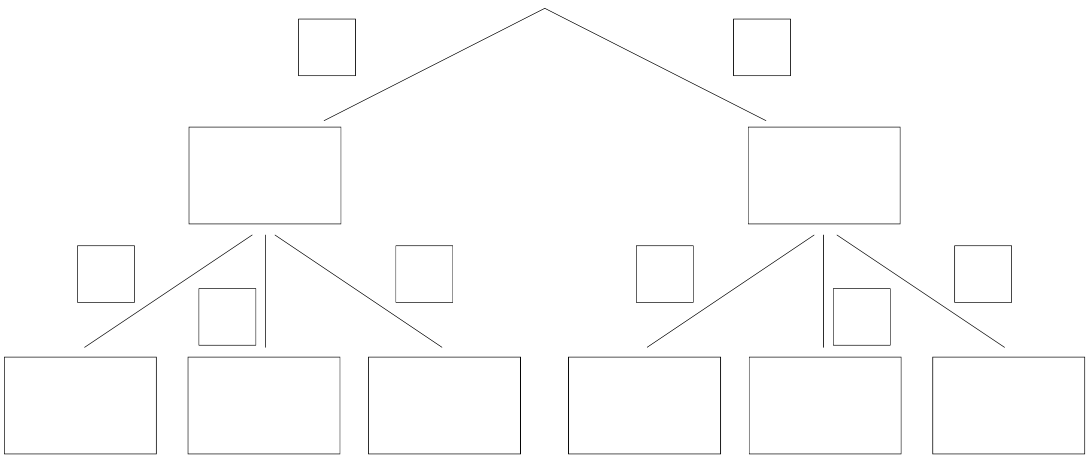
a) Beim Buchen eines Fluges kann man zwischen der Economy Class (E) und der Business Class (B) wählen. In jeder der beiden Klassen muss man entweder einen Fensterplatz (F), einen Platz am Gang (G) oder einen Platz in der Mitte (M) wählen.

Erfahrungsgemäß wählen 90 % der Fluggäste die Economy Class, die übrigen 10 % wählen die Business Class.

Von den Fluggästen der Business Class wünschen sich 80 % einen Fensterplatz und 10 % einen Platz in der Mitte.

Von den Fluggästen der Economy Class wünschen sich 75 % einen Fensterplatz und 15 % einen Platz am Gang.

– Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein zufällig ausgewählter Fluggast einen Fensterplatz wünscht.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auf einem Flug mit Verpflegung steht auch ein vegetarisches Gericht zur Auswahl. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fluggast das vegetarische Gericht wählt, beträgt p. Die Wahl jedes Fluggastes wird unabhängig von jener der anderen Fluggäste getroffen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der insgesamt n Fluggäste das vegetarische Gericht wählt, beträgt 99 %.

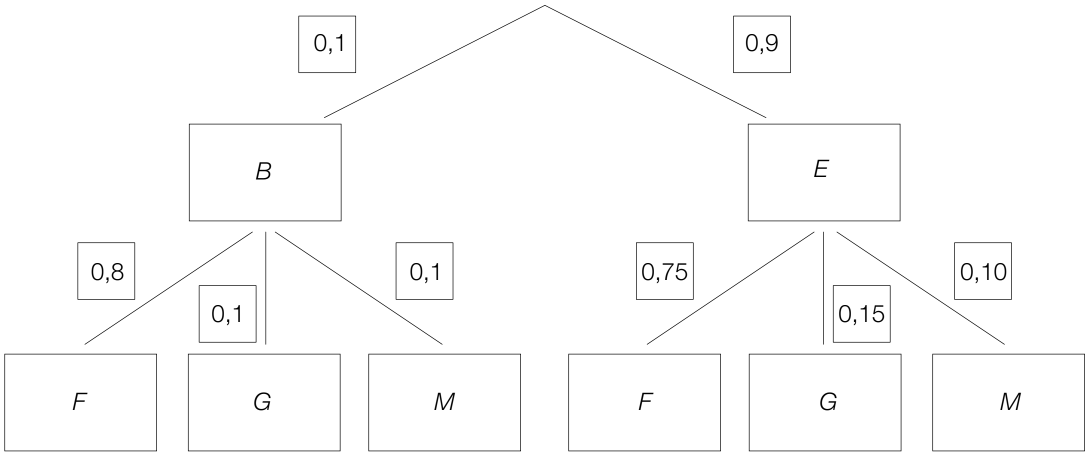
– Kreuzen Sie die für diesen Zusammenhang zutreffende Gleichung an. *[1 aus 5]*

$1 - (1-p)^n = 0{,}99$	☐
$(1-p)^n = 0{,}99$	☐
$1 - (1-p)^n = 0{,}01$	☐
$1 - p^n = 0{,}01$	☐
$1 - p^n = 0{,}99$	☐

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



P(„Fensterplatz") = 0,1 · 0,8 + 0,9 · 0,75 = 0,755

b)

$1 - (1-p)^n = 0{,}99$	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Flussläufe und Pegelstände*

Aufgabennummer: A_266

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Während eines Hochwassers wurde über den Zeitraum von einer Woche der Pegelstand eines Flusses ermittelt. Den Messergebnissen zufolge kann der zeitliche Verlauf des Pegelstands näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden:

$p(t) = -3{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 6{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 - 0{,}011 \cdot t + 7{,}661$ mit $0 \leq t \leq 168$

t ... Zeit in h
$p(t)$ ... Pegelstand zur Zeit t in m

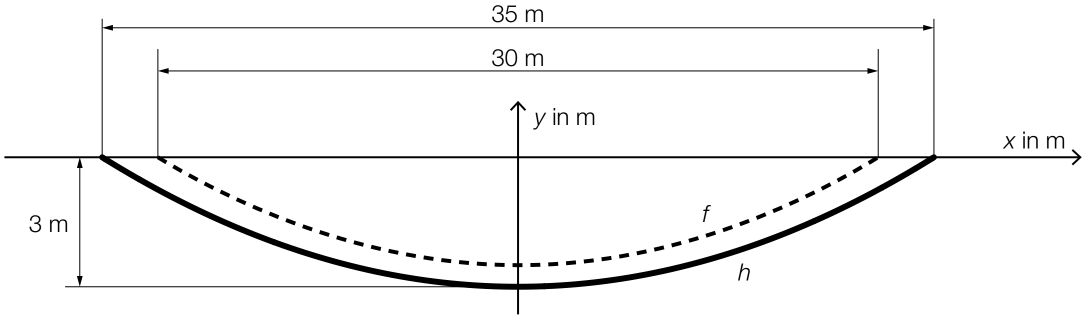
– Berechnen Sie die Abweichung des höchsten Pegelstands während des Hochwassers vom „üblichen" Pegelstand von 2,5 m.

Zur Zeit t_1 gilt: $p''(t_1) = 0$

– Interpretieren Sie die Bedeutung von t_1 im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auf einem annähernd geradlinig verlaufenden Abschnitt eines Flusses soll das Flussbett verbreitert und vertieft werden. In der nachstehenden Abbildung ist das Flussbett im Querschnitt dargestellt.



f ... Profillinie des ursprünglichen Flussbetts
h ... Profillinie des neuen Flussbetts

f und *h* sind Polynomfunktionen 2. Grades mit zur *y*-Achse symmetrischen Graphen.

Ein Teilstück des Flussbetts mit der Länge *L* (in m) wird ausgebaggert.

– Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$2 \cdot \left| \int_0^{17{,}5} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \cdot L$
– Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Funktion *h*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung des Hochpunkts H von p im gegebenen Intervall mittels Technologieeinsatz:
$p'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad H = (110{,}52...|9{,}41...)$
Abweichung: 9,41... – 2,5 = 6,91...
Die Abweichung betrug rund 6,9 m.

Zur Zeit t_1 ist der Pegelstand am stärksten gestiegen.

b) Mit dem Ausdruck wird das Volumen des dabei anfallenden Aushubs in m³ berechnet.

$h(x) = a \cdot x^2 + b$
$h(0) = -3$
$h(17{,}5) = 0$

oder:

$-3 = a \cdot 0^2 + b$
$0 = a \cdot 17{,}5^2 + b$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$h(x) = \frac{12}{1225} \cdot x^2 - 3$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Abweichung des höchsten Pegelstands vom „üblichen" Pegelstand
1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit
1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

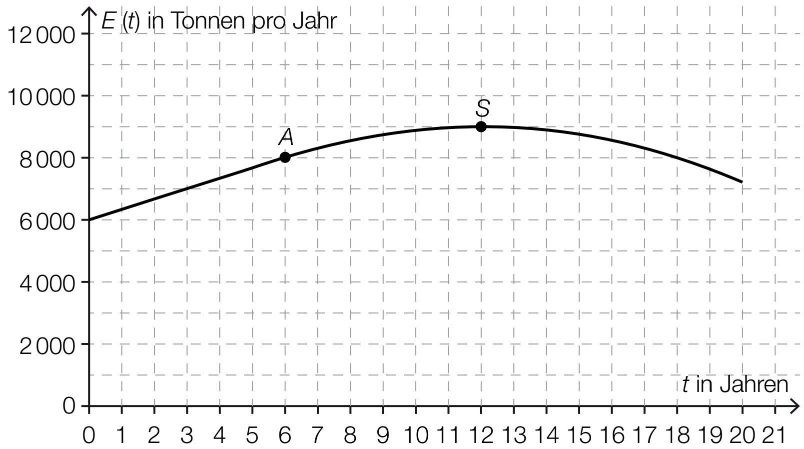
Feinstaubemissionen

Aufgabennummer: A_180

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Für den Zeitraum von 1990 bis 2010 wurden die Feinstaubemissionen in verschiedenen Bereichen aufgezeichnet.

a) Die Aufzeichnungen der durch den Straßenverkehr hervorgerufenen Feinstaubemissionen lassen sich annähernd durch die Funktion E modellieren, deren Graph in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist.



t … Zeit in Jahren nach Jahresbeginn 1990 mit $0 \leq t \leq 20$
$E(t)$ … Emission zur Zeit t in Tonnen pro Jahr

Die Funktion E verläuft in den ersten 6 Jahren linear und ab dem Zeitpunkt $t = 6$ quadratisch:

$$E(t) = \begin{cases} \boxed{\qquad\qquad\qquad} & \text{für } 0 \leq t < 6 \\ a \cdot t^2 + b \cdot t + c & \text{für } 6 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

– Ergänzen Sie den fehlenden Ausdruck in der obigen Funktionsgleichung.
– Erstellen Sie mithilfe der Informationen, die Sie den in der obigen Abbildung eingezeichneten Punkten A und S (= Scheitelpunkt der Parabel) entnehmen können, ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.
– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

b) Die Feinstaubemissionswerte der Industrie lassen sich annähernd durch die Funktion E mit $E(t) = 2{,}5 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 12\,500$ beschreiben.

t … Zeit in Jahren nach Jahresbeginn 1990 mit $0 \leq t \leq 20$
$E(t)$ … Emission zur Zeit t in Tonnen pro Jahr

F ist derjenige Flächeninhalt, der vom Graphen der Funktion E und der horizontalen Achse im Intervall [0; 20] eingeschlossen wird.

– Berechnen Sie den Flächeninhalt F.
– Interpretieren Sie die Bedeutung des Flächeninhalts F im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Aufzeichnungen über die Feinstaubemissionswerte der Landwirtschaft ergaben folgende Wertetabelle:

Jahr	1990	1995	2010
Emission in Tonnen pro Jahr	6000	5950	5800

– Zeigen Sie, dass die drei Wertepaare Koordinaten von Punkten beschreiben, die auf einer Geraden liegen.
– Berechnen Sie bei gleichbleibender Entwicklung den voraussichtlichen Emissionswert im Jahr 2020.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)
$$E(t) = \begin{cases} \boxed{6000 + 333{,}\overline{3} \cdot t} & \text{für } 0 \leq t < 6 \\ a \cdot t^2 + b \cdot t + c & \text{für } 6 \leq t \leq 20 \end{cases}$$

Für $6 \leq t \leq 20$ gilt: $E(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$
$E'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$

$E(6) = 8000 \quad \Rightarrow \quad 36 \cdot a + 6 \cdot b + c = 8000$
$E(12) = 9000 \quad \Rightarrow \quad 144 \cdot a + 12 \cdot b + c = 9000$
$E'(12) = 0 \quad \Rightarrow \quad 24 \cdot a + b = 0$

Lösung des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{250}{9}$, $b = \frac{2000}{3}$, $c = 5000$

b) $F = \int_0^{20} (2{,}5 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 12500)\,\mathrm{d}t = 246666{,}6\ldots \approx 246667$
Im Zeitintervall [0; 20] sind insgesamt rund 246667 Tonnen Feinstaub angefallen.

c) Steigung der Geraden durch die Punkte (1990|6000) und (1995|5950):

$$\frac{5950 - 6000}{1995 - 1990} = -10$$

Steigung der Geraden durch die Punkte (1995|5950) und (2010|5800):

$$\frac{5800 - 5950}{2010 - 1995} = -10$$

Die Steigungen stimmen überein, daher liegen die 3 Punkte auf einer Geraden.

voraussichtlicher Emissionswert im Jahr 2020: $5800 - 10 \cdot 10 = 5700$ Tonnen

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:

a) mittel
b) leicht
c) mittel

Punkteanzahl:

a) 3
b) 2
c) 2

Thema: Umwelt

Quelle: IW-Ausbildung März 2014 Modul 2

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Medikamentenabbau (2)

Aufgabennummer: A_231

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Bei Seereisen treten immer wieder Fälle von Seekrankheit bei den Passagieren auf. Verschiedene Medikamente stehen zu deren Behandlung zur Verfügung.

a) Der Medikamentenabbau im Blut erfolgt nach dem exponentiellen Zerfallsgesetz:

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}231 \cdot t}$

t … Zeit in Stunden (h)
$N(t)$ … Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg
N_0 … Ausgangsmenge des Wirkstoffs im Blut in mg

– Beschreiben Sie, was mit der Gleichung $0{,}5 = e^{-0{,}231 \cdot t}$ im gegebenen Sachzusammenhang ermittelt werden kann.

Ein Passagier nimmt um 18:00 Uhr und um 22:00 Uhr je eine Tablette mit 50 mg Wirkstoffmenge zu sich.

– Ermitteln Sie, wie viel Milligramm Wirkstoffmenge der Passagier am nächsten Tag um 4:00 Uhr noch im Körper hat.

b) Ein neuartiges Medikament steht in zwei Formen *A* und *B* zur Verfügung. Der Abbau des Wirkstoffs wurde für beide Formen in regelmäßigen Zeitabständen gemessen.

Die beiden Wertetabellen zeigen die Wirkstoffmenge $W(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t:

Versuchsreihe für *A*	
t in Stunden	$W(t)$ in mg/L
0	30,0
1	27,0
2	24,3
3	21,87

Versuchsreihe für *B*	
t in Stunden	$W(t)$ in mg/L
0	30,00
1	29,25
2	28,50
3	27,75

– Begründen Sie anhand der obigen Tabellen, warum die Versuchsreihe für *A* durch ein exponentielles und die Versuchsreihe für *B* hingegen durch ein lineares Modell beschrieben werden kann.
– Erstellen Sie eine Funktionsgleichung für den zeitlichen Abbau der Wirkstoffmenge des Medikaments in der Form *B*.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Mithilfe dieser Gleichung wird ermittelt, nach welcher Zeit von der ursprünglichen Wirkstoffmenge nur noch die Hälfte vorhanden ist (Halbwertszeit).

Mit $N_0 = 50$ und $t = 0$ für 18:00 Uhr gilt:
Wirkstoffmenge vor Einnahme der 2. Tablette = $N(4) = 50 \cdot e^{-0{,}231 \cdot 4} = 19{,}846\ldots$

Mit $N_0 = 19{,}846\ldots + 50 = 69{,}846\ldots$ und $t = 0$ für 22:00 Uhr gilt:
Wirkstoffmenge um 4:00 Uhr = $N(6) = 69{,}846\ldots \cdot e^{-0{,}231 \cdot 6} = 17{,}466\ldots$

Um 4:00 Uhr hat der Passagier noch rund 17,47 mg des Wirkstoffs im Blut.

b) Bei der Versuchsreihe für *A* handelt es sich um eine exponentielle Abnahme, da die Wirkstoffmenge in jeder Stunde um denselben prozentuellen Wert (nämlich um 10 %) abnimmt. Die Versuchsreihe für *B* kann durch ein lineares Modell beschrieben werden, da die Wirkstoffmenge in jeder Stunde um denselben konstanten Wert (nämlich um 0,75 mg/L) abnimmt.

$W(t) = 30 - 0{,}75 \cdot t$

t … Zeit in Stunden (h)
$W(t)$ … Wirkstoffmenge zur Zeit t in mg/L

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Blut und Blutdruck

Aufgabennummer: A_223

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Blutkreislauf ist ein wichtiges Versorgungssystem des menschlichen Körpers.

a) Ein wichtiger Bestandteil des Blutes sind die roten Blutkörperchen. 1 cm^3 Blut enthält rund 5 Milliarden rote Blutkörperchen.

– Ermitteln Sie, wie viele rote Blutkörperchen sich in 6 L Blut befinden. Geben Sie das Ergebnis in Gleitkommadarstellung in der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ an.

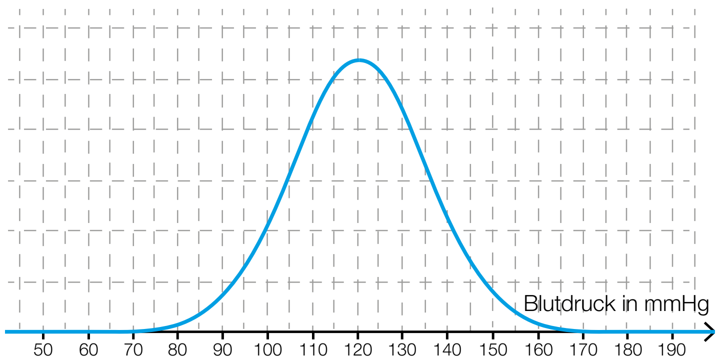
Der Durchmesser eines roten Blutkörperchens beträgt 7,5 μm.
Nehmen Sie an, man würde alle Blutkörperchen, die in 6 L Blut enthalten sind, aneinanderreihen.

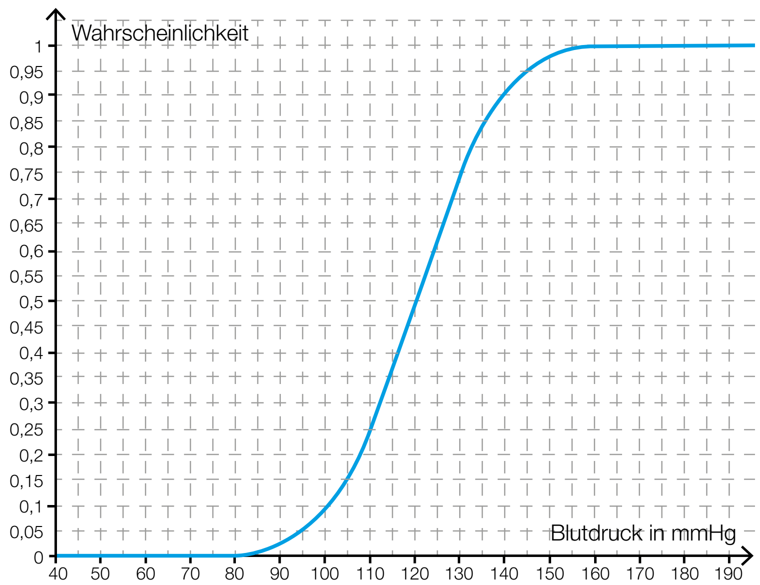
– Berechnen Sie, welche Länge in Metern die Kette der aneinandergereihten Blutkörperchen hätte.

b) Der Blutdruck wird in Millimeter Quecksilbersäule (mmHg) angegeben. Der Blutdruck von gesunden Menschen ist annähernd normalverteilt. Ein Blutdruck zwischen 110 mmHg und 130 mmHg wird als normal empfunden.

Die unten stehenden beiden Abbildungen zeigen die Graphen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion für diese Normalverteilung.

– Kennzeichnen Sie in der Abbildung der Dichtefunktion den Erwartungswert μ sowie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter gesunder Mensch einen Blutdruck zwischen 110 mmHg und 130 mmHg hat.
– Ermitteln Sie mithilfe der Verteilungsfunktion die Wahrscheinlichkeit, dass der Blutdruck eines zufällig ausgewählten gesunden Menschen zwischen 110 mmHg und 130 mmHg beträgt.





c) Die Konzentration eines blutdrucksenkenden Wirkstoffs im Blut eines Patienten kann für die ersten 10 Stunden nach Einnahme des Medikaments näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(t) = 8 \cdot t \cdot e^{-0{,}75 \cdot t}$

t … Zeit in Stunden nach der Einnahme
$f(t)$ … Konzentration des Wirkstoffs im Blut zur Zeit t in Milligramm pro Liter (mg/L)

– Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Konzentration im Zeitintervall [2; 4] nach der Einnahme.

d) Untersuchungen haben ergeben, dass ein bestimmtes Medikament mit einer Wahrscheinlichkeit von 52 % den Blutdruck senkt.
80 zufällig ausgewählte Personen erhalten das Medikament.

– Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Ausdrucks im gegebenen Sachzusammenhang:

$$\sum_{i=0}^{8} \binom{80}{i} \cdot 0{,}48^{i} \cdot 0{,}52^{80-i}$$

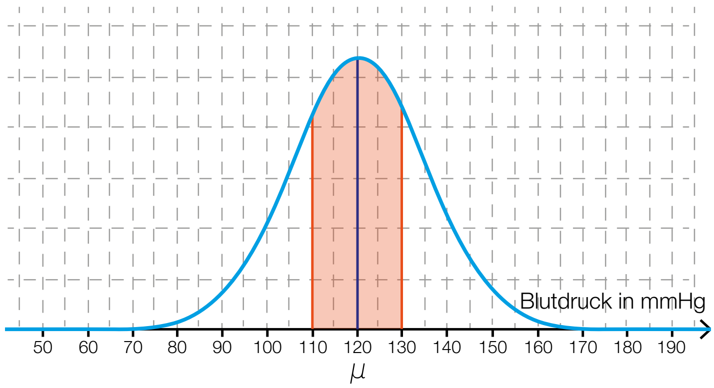
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

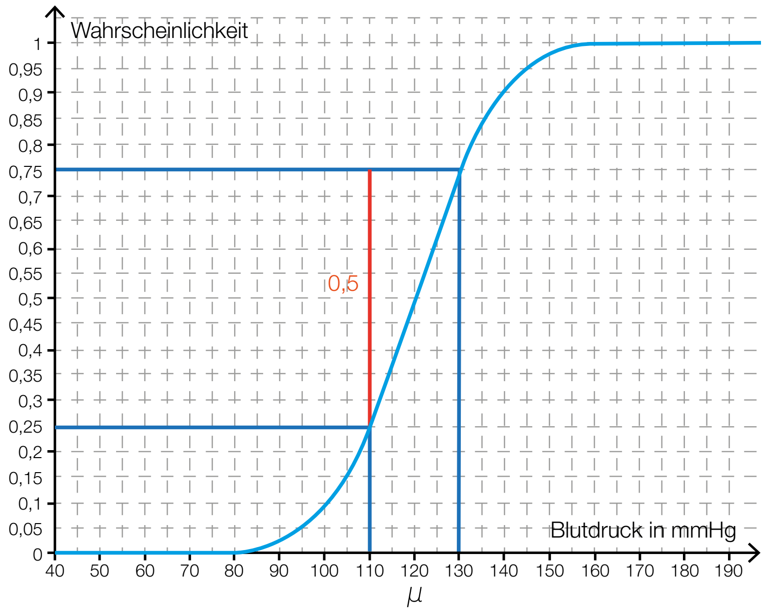
Möglicher Lösungsweg

a) $1\ \text{cm}^3 = 1\ \text{ml}$
$6\ \text{L} = 6 \cdot 10^3\ \text{ml}$
$6 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^9 = 3 \cdot 10^{13}$ Blutkörperchen

$7{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{13} = 2{,}25 \cdot 10^8$
Die Kette wäre $2{,}25 \cdot 10^8$ m lang.

b)





X … Blutdruck in mmHg
$P(110 \leq X \leq 130) = P(X \leq 130) - P(X \leq 110) = 0{,}75 - 0{,}25 = 0{,}5 = 50\ \%$

c) $\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = -0{,}988...$

Die Konzentration des Wirkstoffs nimmt im Zeitintervall [2; 4] im Mittel um rund 0,99 mg/L pro Stunde ab.

d) Mit dem Ausdruck wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass das Medikament bei höchstens 8 der 80 Personen den Blutdruck nicht senkt.
(oder: Mit dem Ausdruck wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass das Medikament bei mindestens 72 der 80 Personen den Blutdruck senkt.)

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) leicht
d) mittel

Punkteanzahl:

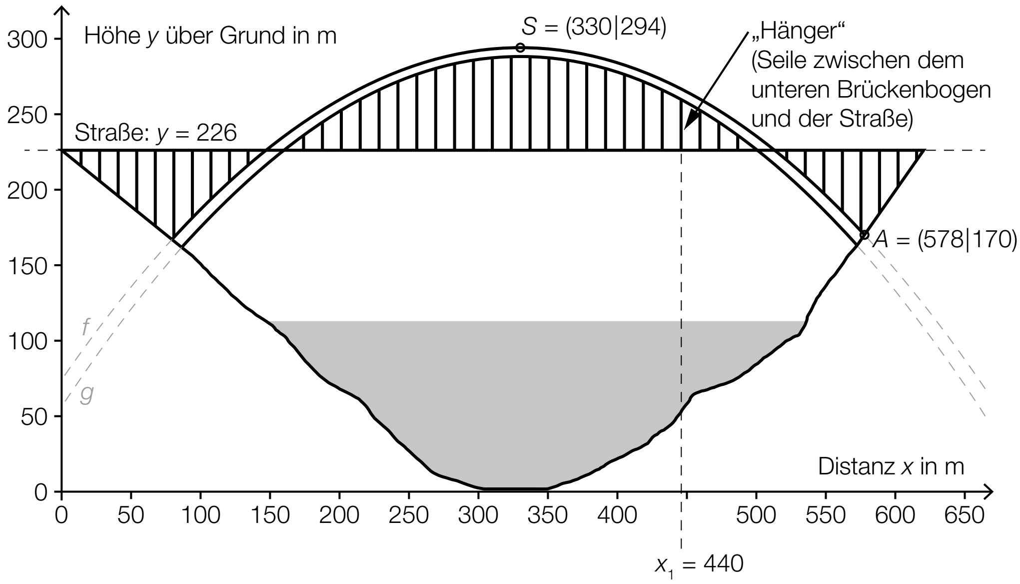
a) 2
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Medizin

Quellen: —

Wushan-Brücke

Die Wushan-Brücke über den Jangtsekiang ist eine der größten Bogenbrücken der Welt.



Die obige Abbildung stellt modellhaft die Wushan-Brücke dar. Der obere und der untere Brückenbogen werden durch die Graphen der quadratischen Funktionen f und g dargestellt. Der Punkt S ist der Scheitelpunkt der Funktion f.

a) 1) Stellen Sie mithilfe der Punkte A und S eine Gleichung der Funktion f auf.

b) Die Gleichung derjenigen Parabel, die den unteren Brückenbogen beschreibt, lautet:

$g(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x - 330)^2 + 288 \quad \text{mit} \quad 86 \leq x \leq 574$

1) Berechnen Sie die Länge des „Hängers" an der Stelle $x_1 = 440$ m.

c) Wirft man einen Stein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5$ m/s von der Brücke senkrecht nach unten, so kann man, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird, die Höhe des Steins über Grund näherungsweise folgendermaßen berechnen:

$h(t) = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$

t … Zeit in s
$h(t)$ … Höhe des Steins über Grund zur Zeit t in m
g … Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81$ m/s²)

1) Berechnen Sie die Zeit t_a, die der Stein bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche benötigt, wenn der Wasserstand 113 m über Grund beträgt.
2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion v für die Geschwindigkeit des Steins in Abhängigkeit von der Zeit t auf.

Möglicher Lösungsweg

a1) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$f(330) = 294 \;\Rightarrow\; 330^2 \cdot a + 330 \cdot b + c = 294$
$f(578) = 170 \;\Rightarrow\; 578^2 \cdot a + 578 \cdot b + c = 170$
$f'(330) = 0 \;\Rightarrow\; 660 \cdot a + b = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$a = -\frac{1}{496} = -0{,}0020\ldots,\ b = \frac{165}{124} = 1{,}3306\ldots,\ c = \frac{9231}{124} = 74{,}4435\ldots$
$f(x) = -\frac{1}{496} \cdot x^2 + \frac{165}{124} \cdot x + \frac{9231}{124}$

b1) $g(440) - 226 = 36{,}25...$
Die Länge des „Hängers“ beträgt rund 36,3 m.

c1) $113 = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$

Lösung mittels Technologieeinsatz: $t_a = 4{,}317\ldots$ (oder $t_a = -5{,}336\ldots$)
Der Stein benötigt bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche rund 4,32 s.

c2) $v(t) = |h'(t)|$
$v(t) = g \cdot t + 5$

$v(t)$ … Geschwindigkeit des Steins zur Zeit t in m/s

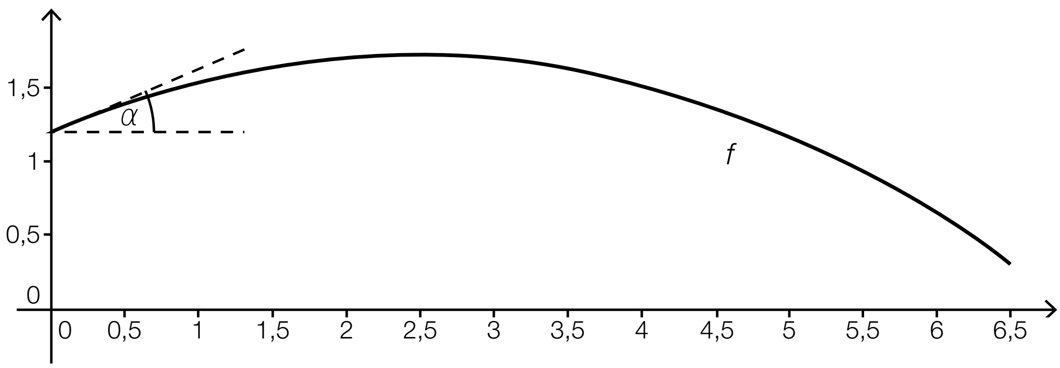
(Eine Angabe der Geschwindigkeit mit negativem Vorzeichen, also $v(t) = -g \cdot t - 5$, ist ebenfalls möglich.)

Weitsprung (2)

Aufgabennummer: A_213		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Sprungkurven beim Weitsprung lassen sich näherungsweise durch quadratische Funktionen beschreiben.

a) Der Körperschwerpunkt eines Weitspringers befindet sich beim Absprung in einer Höhe von 1,2 m. Der Absprungwinkel α beträgt 23°. Die Sprungweite beträgt 6,5 m. An der Stelle der Landung befindet sich der Körperschwerpunkt 30 cm über dem Boden.
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Funktion f dargestellt.



$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

x … horizontale Entfernung des Körperschwerpunkts von der Absprungstelle in m
$f(x)$ … Höhe des Körperschwerpunkts in der Entfernung x in m

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung des Koeffizienten a, b und c.

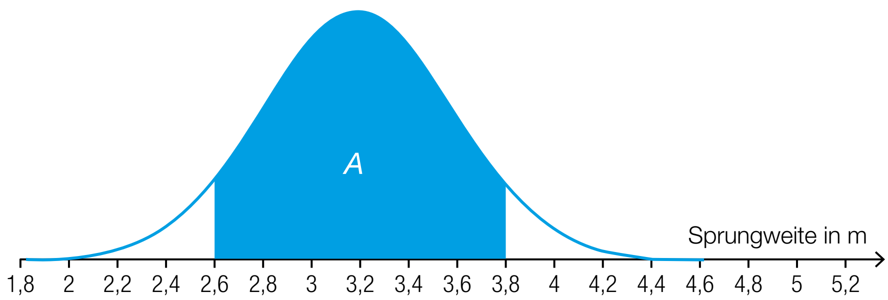
b) Zur Modellierung von Sprungparabeln können verschiedene quadratische Funktionen verwendet werden.

– Ordnen Sie den Funktionsgleichungen jeweils die zugehörige Bedingung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

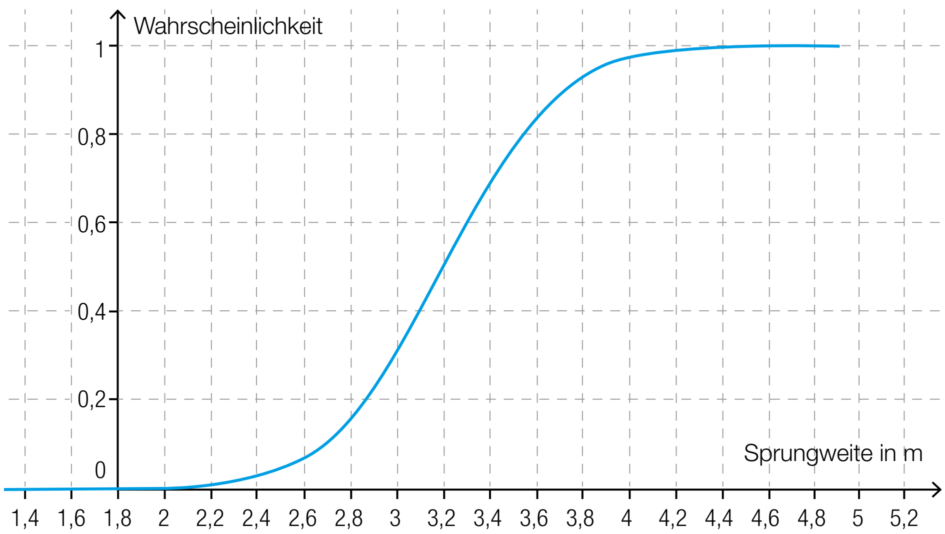
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ ($a < 0$, $b > 0$)	
$f(x) = a \cdot x^2 + c$ ($a < 0$, $c > 0$)	

A	Der Graph der Funktion f geht durch den Ursprung des Koordinatensystems.
B	Der Graph der Funktion f ist symmetrisch zur Ordinatenachse.
C	Der Graph der Funktion ist nach oben offen.
D	Der Graph der Funktion hat keine Nullstelle.

c) Die Sprungweite in der Altersgruppe der 15-jährigen Burschen kann als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 3,2 m und der Standardabweichung σ = 0,4 m angenommen werden.
Die nachstehende Grafik stellt den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion dar.



– Beschreiben Sie die Bedeutung des Inhalts der markierten Fläche *A* im gegebenen Sachzusammenhang.
– Markieren Sie den Wert des Inhalts der Fläche *A* im unten dargestellten Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion.



Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

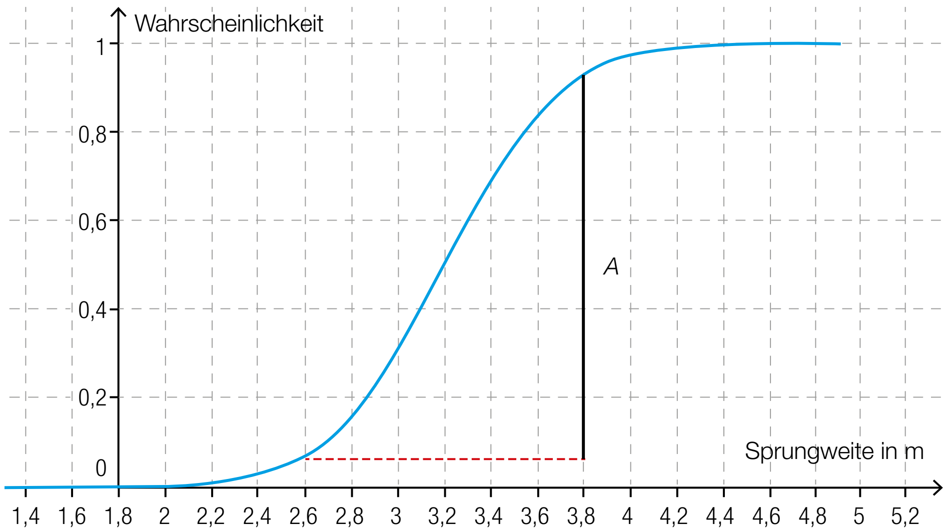
a) I: $f(0) = 1{,}2$ bzw. $c = 1{,}2$
II: $f'(0) = \tan(23°)$ bzw. $b = \tan(23°)$
III: $f(6{,}5) = 0{,}3$ bzw. $42{,}25 \cdot a + 6{,}5 \cdot b + c = 0{,}3$

b)

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ $(a < 0,\ b > 0)$	A
$f(x) = a \cdot x^2 + c$ $(a < 0,\ c > 0)$	B

A	Der Graph der Funktion f geht durch den Ursprung des Koordinatensystems.
B	Der Graph der Funktion f ist symmetrisch zur Ordinatenachse.
C	Der Graph der Funktion ist nach oben offen.
D	Der Graph der Funktion hat keine Nullstelle.

c) Der Flächeninhalt entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Sprungweite eines zufällig ausgewählten Burschen zwischen 2,6 m und 3,8 m liegt.



Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 1
c) schwer	c) 2

Thema: Sport

Quellen: —

Schülerzahlen

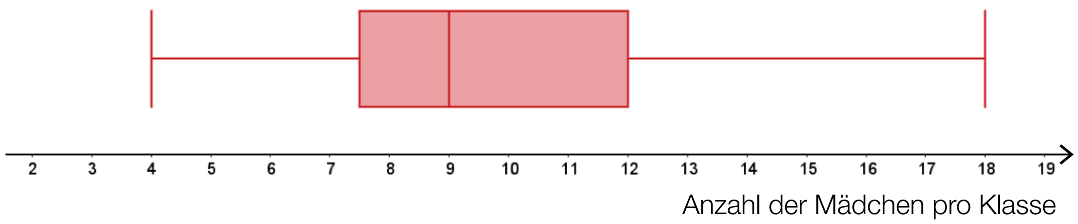
Aufgabennummer: A_215

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) An einer höheren Schule sind n Schülerinnen und Schüler angemeldet. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine Schülerin oder ein Schüler am ersten Schultag wieder abmeldet, liegt erfahrungsgemäß bei 5 %.

– Interpretieren Sie folgenden mathematischen Ausdruck im Sachzusammenhang:
$n \cdot 0{,}05$
– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich von 53 angemeldeten Schülerinnen und Schülern keine/keiner am ersten Schultag wieder abmeldet.

b) In einer Schule kann die Anzahl der Mädchen in den einzelnen Klassen durch den nachstehenden Boxplot dargestellt werden.



– Lesen Sie aus dem Boxplot die Spannweite sowie den Median ab.

Ein Mädchen wechselt während des Schuljahres von einer Klasse zur anderen.
Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Median könnte sich ändern.	☐
Der Median wird sich ändern, das arithmetische Mittel wird gleich bleiben.	☐
Das arithmetische Mittel könnte sich ändern.	☐
Das arithmetische Mittel wird sich ändern, der Median wird gleich bleiben.	☐
Sowohl der Median als auch das arithmetische Mittel werden sich ändern.	☐

c) Die Entwicklung der Anzahl der Schüler/innen aller BHS in Oberösterreich in den Jahren 2000 bis 2013 lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion N beschreiben.

$N(t) = -35{,}5 \cdot t^2 + 635 \cdot t + 22\,072$

t ... Zeit in Jahren seit dem Jahr 2000 ($t = 0$ für das Jahr 2000)
$N(t)$ ... Anzahl der Schüler/innen zur Zeit t

– Berechnen Sie den mittleren Anstieg der Anzahl der Schüler/innen im Zeitraum von 2000 bis 2008.

Ab dem Jahr 2009 ist die Anzahl der Schüler/innen rückläufig. Experten gehen davon aus, dass der tiefste Wert (Minimum) im Jahr 2018 erreicht ist.

Es soll eine Polynomfunktion 3. Grades S erstellt werden, die den gleichen Anfangswert und den gleichen Extremwert wie die Funktion N hat und die Prognose für das Jahr 2018 berücksichtigt.

$S(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$

$S(t)$ … Anzahl der Schüler/innen zur Zeit t

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $n \cdot 0{,}05$ beschreibt bei n angemeldeten Schülerinnen und Schülern die zu erwartende Anzahl derer, die sich am ersten Schultag wieder abmelden.

X … Anzahl derjenigen Schüler/innen, die sich am ersten Schultag abmelden

Bionomialverteilung mit $n = 53$ und $p = 0{,}05$:

$P(X = 0) = 0{,}0659... \approx 6{,}6\ \%$

b) Der Median ist 9. Die Spannweite beträgt 14.

Der Median könnte sich ändern.	☒
[...]	
[...]	
[...]	
[...]	

c) $\frac{N(8) - N(0)}{8 - 0} = \frac{24\,880 - 22\,072}{8} = 351$

Der mittlere Anstieg der Anzahl der Schüler/innen im Zeitraum von 2000 bis 2008 beträgt 351 Schüler/innen pro Jahr.

Berechnung des Hochpunkts $(t_{max} | N_{max})$ von N mittels Technologieeinsatz:

$t_{max} = \frac{635}{71}$, $N_{max} \approx 24\,912$

Gleichungssystem:

I: $S(0) = 22\,072$ bzw. $d = 22\,072$

II: $S(t_{max}) = N_{max}$ bzw. $a \cdot \left(\frac{635}{71}\right)^3 + b \cdot \left(\frac{635}{71}\right)^2 + c \cdot \left(\frac{635}{71}\right) + d = 24\,912$

III: $S'(t_{max}) = 0$ bzw. $a \cdot 3 \cdot \left(\frac{635}{71}\right)^2 + b \cdot 2 \cdot \left(\frac{635}{71}\right) + c = 0$

IV: $S'(18) = 0$ bzw. $a \cdot 3 \cdot 18^2 + b \cdot 2 \cdot 18 + c = 0$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Kommunizieren
b) C Interpretieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 2
c) schwer	c) 3

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

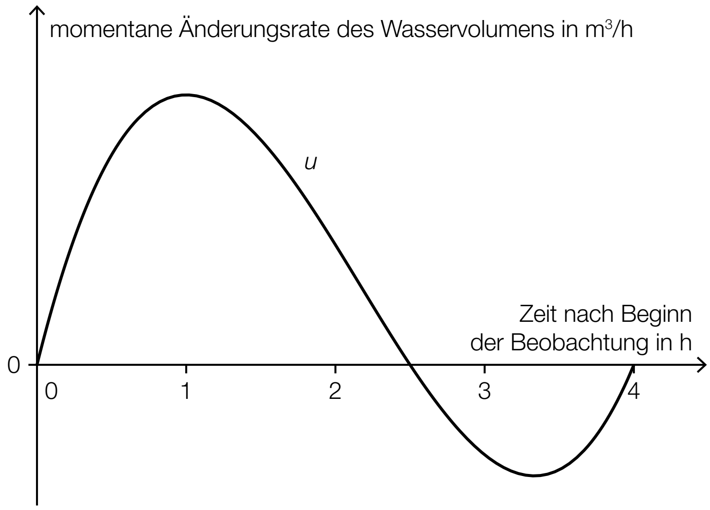
Stausee*

Aufgabennummer: A_271

Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Das Wasservolumen in einem Stausee ändert sich aufgrund von verschiedenen Einflüssen, wie z. B. Niederschlägen, Zuflüssen und Wasserentnahmen.

Zu Beginn einer Beobachtung beträgt das Wasservolumen im Stausee $1{,}5 \cdot 10^8$ m³. Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens kann im Zeitintervall [0; 4] näherungsweise durch eine Funktion u beschrieben werden, deren Graph in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist.



1) Interpretieren Sie unter Angabe der entsprechenden Einheit, was mit dem folgenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird:
$1{,}5 \cdot 10^8 + \int_0^4 u(t)\,\mathrm{d}t$

2) Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass das Wasservolumen im Stausee im Zeitintervall [1; 2] zunimmt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Der zeitliche Verlauf des Wasserstands eines Stausees kann für einen bestimmten Zeitraum näherungsweise durch die Funktion h beschrieben werden:

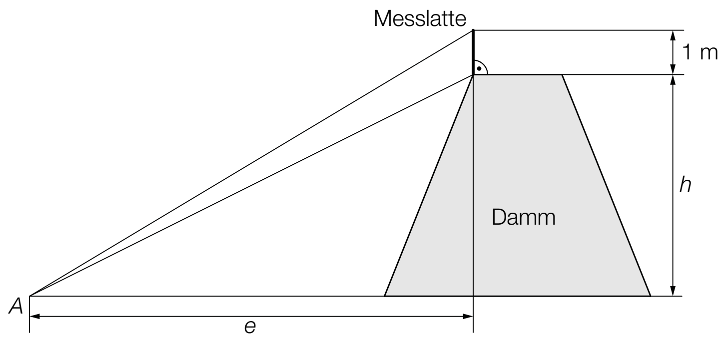
$h(t) = -6 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 0{,}001 \cdot t^2 + 0{,}005 \cdot t + 5 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 150$

t ... Zeit in h
$h(t)$ ... Wasserstand zur Zeit t in m

Ein ufernaher Parkplatz wird gesperrt, solange der Wasserstand 9 m oder höher ist.

1) Berechnen Sie die Dauer der Sperre.

c) Für den Hochwasserschutz wurde an einem Ufer ein Damm aufgeschüttet. Die Höhe des Damms wird mithilfe einer 1 m langen Messlatte ermittelt. Dazu werden von einem Punkt A aus die Enden der Messlatte anvisiert und die Höhenwinkel $\alpha = 40{,}0°$ und $\beta = 33{,}7°$ gemessen (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).



1) Beschriften Sie in der obigen Skizze die Winkel α und β.

Für die Berechnung der Dammhöhe h werden folgende Formeln verwendet:

$\tan(\alpha) = \dfrac{h + 1}{e}$

$\tan(\beta) = \dfrac{h}{e}$

2) Berechnen Sie die Dammhöhe h.

Möglicher Lösungsweg

a1) Mit dem Ausdruck wird das Wasservolumen in Kubikmetern im Stausee 4 Stunden nach Beginn der Beobachtung berechnet.

a2) Die Funktionswerte von u sind im Zeitintervall [1; 2] positiv, daher nimmt das Wasservolumen zu.

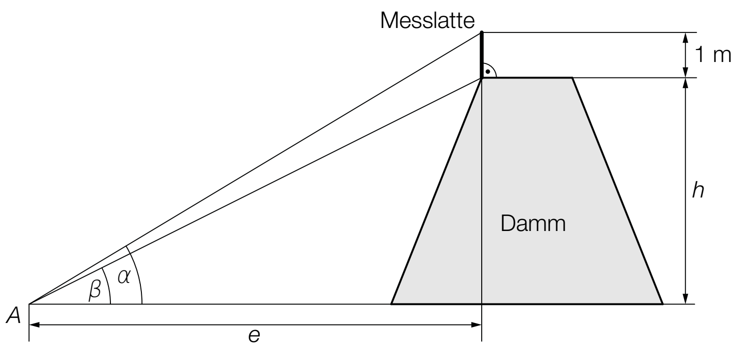
b1) $h(t) = 9$

oder:

$-6 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 0{,}001 \cdot t^2 + 0{,}005 \cdot t + 5 = 9$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t_1 = 85{,}7...$, $t_2 = 137{,}4...$, ($t_3 = -56{,}5...$)
$t_2 - t_1 = 51{,}6...$
Der Parkplatz ist für etwa 52 Stunden gesperrt.

c1)



c2) $\tan(40°) = \frac{h+1}{e} \quad \Rightarrow \quad h = e \cdot \tan(40°) - 1$

$\tan(33{,}7°) = \frac{h}{e} \quad \Rightarrow \quad h = e \cdot \tan(33{,}7°)$

$e \cdot \tan(33{,}7°) = e \cdot \tan(40°) - 1 \quad \Rightarrow \quad e = 5{,}80...$
$h = e \cdot \tan(33{,}7°) = 3{,}87...$

Die Dammhöhe beträgt rund 3,9 m.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit
1 × D: für die richtige Argumentation mithilfe des Funktionsgraphen

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer

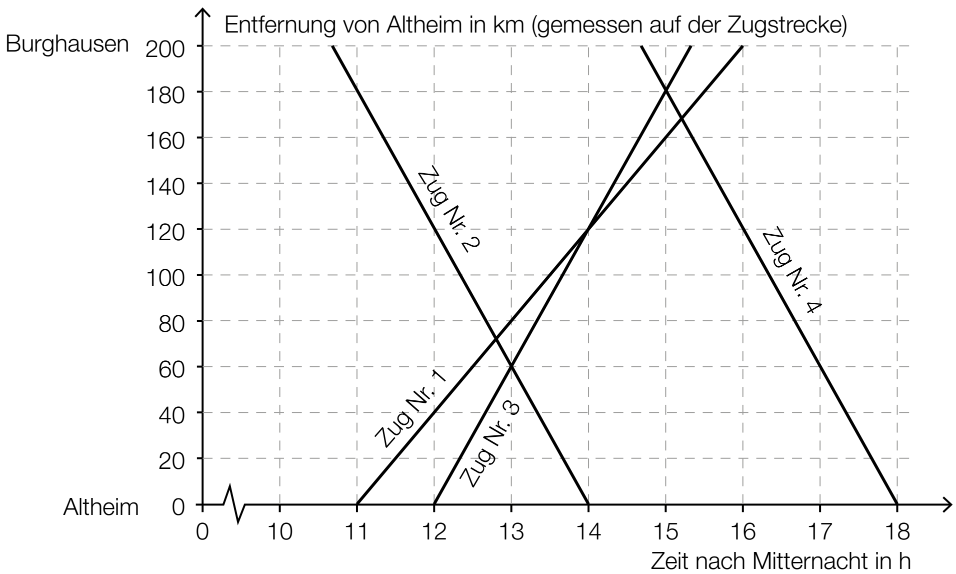
c) 1 x C: für das richtige Beschriften der beiden Winkel
1 x B: für die richtige Berechnung der Dammhöhe h

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Eisenbahn*

Aufgabennummer: A_270		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

In der nachstehenden Abbildung ist ein sogenannter Bildfahrplan für Züge zwischen Altheim und Burghausen dargestellt. Die Züge fahren dabei – vereinfacht betrachtet – mit konstanter Geschwindigkeit.



a) Zug Nr. 3 fährt um 12:00 Uhr in Altheim ab.
Zug Nr. 4 fährt um 14:40 Uhr in Burghausen ab.
Auf der Fahrt zu ihren Zielbahnhöfen begegnen die beiden Züge einander.

1) Lesen Sie aus dem obigen Bildfahrplan ab, wann und wie weit von Burghausen entfernt die beiden Züge einander begegnen.

b) 1) Argumentieren Sie, dass die Züge Nr. 2 und Nr. 4 mit der gleichen Geschwindigkeit fahren.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die Fahrt eines Zuges Nr. 5 soll im Bildfahrplan durch einen Ausschnitt des Graphen der Funktion s beschrieben werden.

$s(t) = -80 \cdot t + 1\,160$

t ... Zeit nach Mitternacht in h
$s(t)$ ... Entfernung von Altheim zur Zeit t in km

1) Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der Zug Nr. 5 in Burghausen abfährt.

2) Zeichnen Sie im obigen Bildfahrplan den Funktionsgraphen für s zwischen Altheim und Burghausen ein.

d) Eine Eisenbahnstrecke hat eine Länge von 200 km. Nach einer Sanierung der Gleise können die Züge mit einer um 10 km/h höheren Geschwindigkeit fahren. Die Fahrzeit wird dadurch um eine halbe Stunde vermindert.
Zur Verdeutlichung sind die Angaben in der nachstehenden Tabelle dargestellt.
t ist dabei die Fahrzeit vor der Sanierung in Stunden.

	Streckenlänge in km	Geschwindigkeit in km/h	Fahrzeit in h
nach der Sanierung	200	$\left(\frac{200}{t} + 10\right)$	$\left(t - \frac{1}{2}\right)$

1) Berechnen Sie t.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die beiden Züge begegnen einander um 15:00 Uhr, 20 km von Burghausen entfernt.

b1) Die beiden Züge benötigen für die Strecke Burghausen – Altheim gleich lang, sie fahren also mit der gleichen Geschwindigkeit.

oder:

Die zugehörigen Geraden im Bildfahrplan haben die gleiche Steigung.

c1) $s(t) = 200$

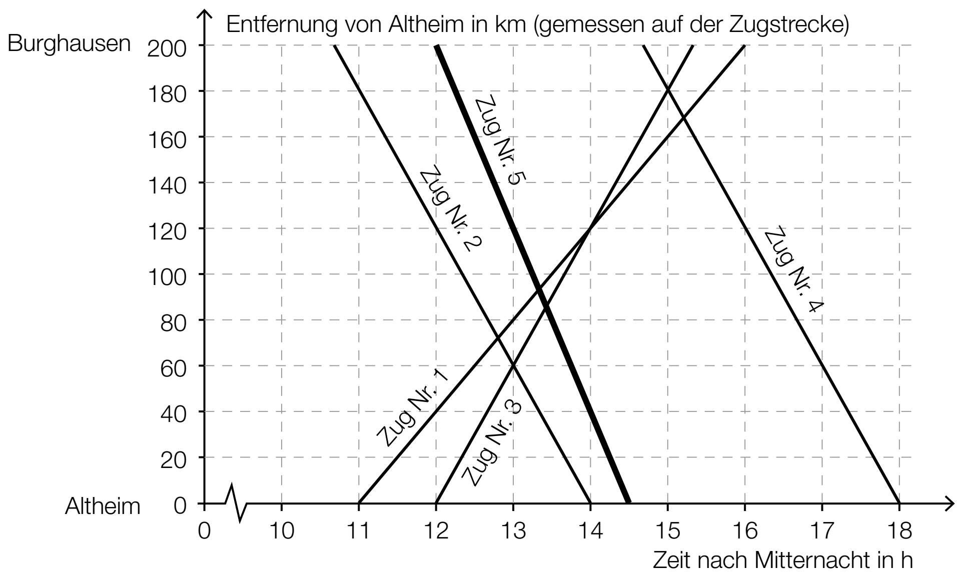
oder:

$-80 \cdot t + 1\,160 = 200$

$t = \frac{200 - 1\,160}{-80} = 12$

Zug Nr. 5 fährt um 12 Uhr in Burghausen ab.

c2)



d1) $200 = \left(\frac{200}{t} + 10\right) \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 3{,}422...$

$(t_2 = -2{,}922...)$

Die Fahrzeit vor der Sanierung betrug etwa 3,42 h.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen der Uhrzeit und der Entfernung von Burghausen

b) 1 × D: für die richtige Argumentation

c) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Abfahrtszeit von Zug Nr. 5
1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen im Bildfahrplan

d) 1 × B: für die richtige Berechnung von t

Impfen und Auffrischen*

Aufgabennummer: A_269

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Mithilfe der Konzentration von Antikörpern im Blut wird bestimmt, ob nach einer Impfung ausreichender Impfschutz besteht. Diese Konzentration wird oft als Antikörperwert bezeichnet und in „Internationalen Einheiten pro Liter" (IE/L) angegeben.

a) Bei Anna wurde unmittelbar nach einer Impfung ein Antikörperwert von 110 IE/L gemessen. Der Antikörperwert sinkt kontinuierlich und nimmt bei Anna pro Jahr um 20 % in Bezug auf das jeweils vorhergehende Jahr ab.

Der Antikörperwert in Annas Blut (in IE/L) soll in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) durch eine Funktion A beschrieben werden.

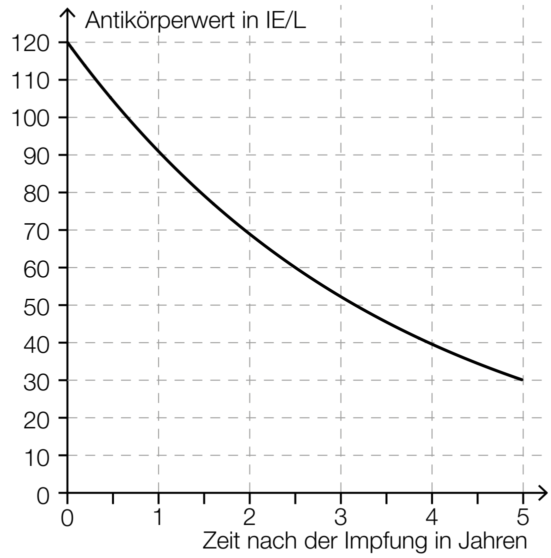
1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion A. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Messung.

Ab einem Antikörperwert von 10 IE/L ist der Impfschutz nicht mehr gegeben.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Impfschutz bei Anna nicht mehr gegeben ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die nachstehende Abbildung zeigt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Antikörperwerts von Bernhard nach einer Impfung.



1) Lesen Sie die Halbwertszeit $T_{1/2}$ ab.

$T_{1/2}$ = ______________ Jahre

Bei Sandra beträgt der Antikörperwert unmittelbar nach der Impfung 80 IE/L. Ihr Antikörperwert sinkt exponentiell mit derselben Halbwertszeit wie jener von Bernhard.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den zeitlichen Verlauf von Sandras Antikörperwert im Zeitintervall [0; 5] ein.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A(t) = 110 \cdot 0{,}8^t$

t ... Zeit in Jahren
$A(t)$ ... Antikörperwert zur Zeit t in IE/L

a2) $A(t) = 10$

oder:

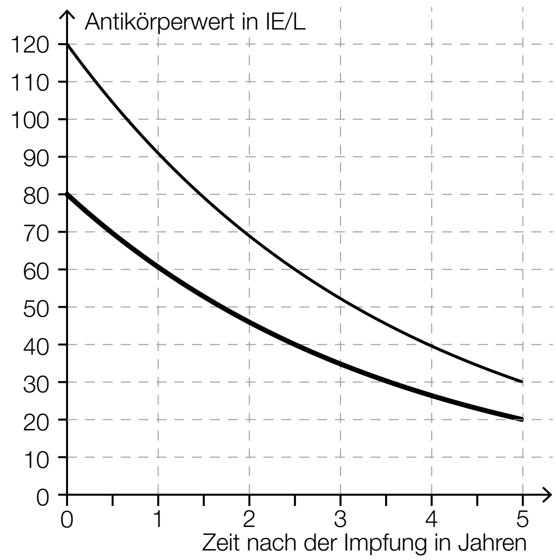
$110 \cdot 0{,}8^t = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $t = 10{,}745...$

Bei Anna ist der Impfschutz nach etwa 10,75 Jahren nicht mehr gegeben.

b1) $T_{1/2} = 2{,}5$ Jahre
Toleranzbereich: [2,3; 2,7]

b2)



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
   1 × B: für die richtige Berechnung derjenigen Zeit, nach der der Impfschutz nicht mehr gegeben ist

b) 1 × C: für das richtige Ablesen der Halbwertszeit im Toleranzbereich [2,3; 2,7]
   1 × A: für das richtige Einzeichnen des zeitlichen Verlaufs von Sandras Antikörperwert im Zeitintervall [0; 5] (Dabei müssen die Funktionswerte zu den Zeitpunkten $t = 0$, $t = 2{,}5$ und $t = 5$ richtig eingezeichnet sein.)

Steig- bzw. Sinkflug von Flugzeugen*

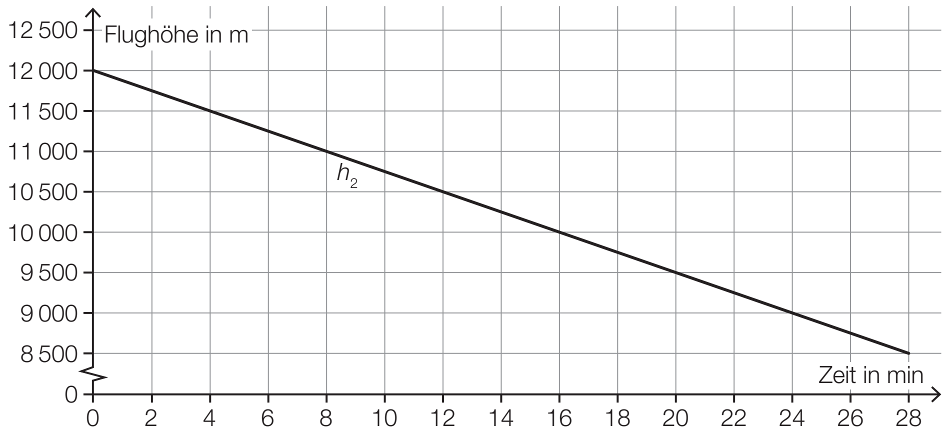
Aufgabennummer: A_301

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Flugzeug beginnt zur Zeit $t = 0$ in einer Flughöhe von 12 000 m mit dem Sinkflug. Dabei nimmt die Flughöhe um 90 m/min ab. Die Flughöhe (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Minuten) soll für den Sinkflug durch die lineare Funktion h_1 beschrieben werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion h_1 auf.

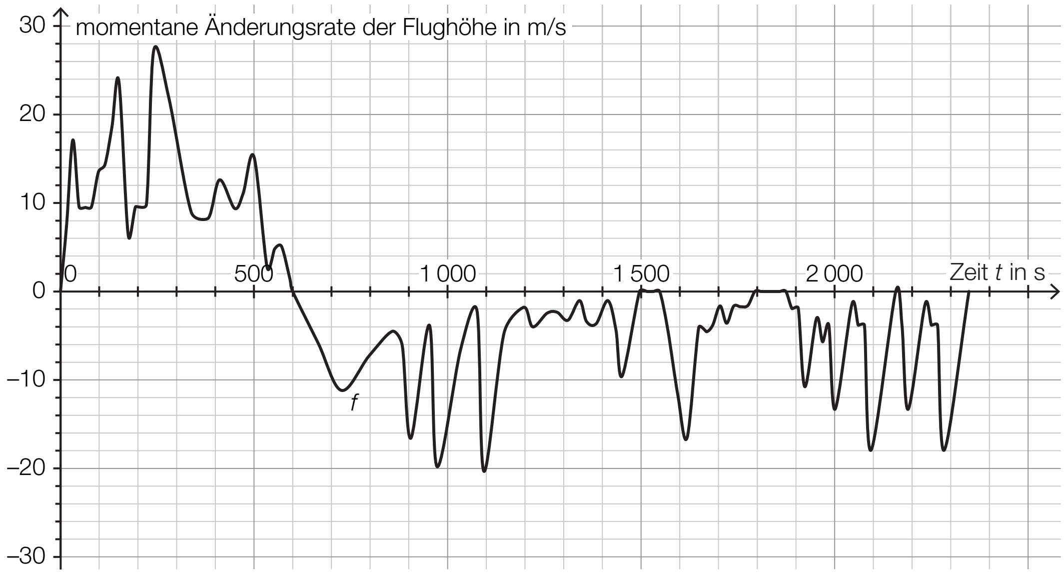
Für ein zweites Flugzeug zeigt der nachstehend dargestellte Graph der Funktion h_2 den Zusammenhang zwischen der Flughöhe und der Zeit.



2) Überprüfen Sie nachweislich, ob das zweite Flugzeug schneller als das erste Flugzeug sinkt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die momentane Änderungsrate der Flughöhe (Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit) eines Flugzeugs auf einem Flug von München nach Frankfurt am Main kann näherungsweise durch die Funktion *f* beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Datenquelle: https://de.flightaware.com/live/flight/DLH99/history/20180905/0710Z/EDDM/EDDF/tracklog [22.02.2019].

Zur Zeit $t = 0$ hebt das Flugzeug in München ab.

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung diejenige Zeit t_m ab, zu der das Flugzeug seine maximale Flughöhe erreicht.

t_m = ________________ s

Es wird folgende Berechnung durchgeführt: $\int_{1550}^{1800} f(t)\,dt = -1\,249$ m

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1) $h_1(t) = -90 \cdot t + 12000$

t ... Zeit in min
$h_1(t)$ ... Flughöhe zur Zeit t in m

a2) Ablesen der Steigung der Funktion h_1 aus der Funktionsgleichung: $k_1 = -90$
Ablesen der Steigung der Funktion h_2 aus dem Funktionsgraphen: $k_2 = -125$
$|k_1| < |k_2|$

Das zweite Flugzeug sinkt also schneller als das erste Flugzeug.

b1) $t_m = 600$ s
Toleranzbereich: [590; 610]

b2) Die Flughöhe des Flugzeugs nimmt im Zeitintervall [1 550; 1 800] um 1 249 m ab.

Lösungsschlüssel

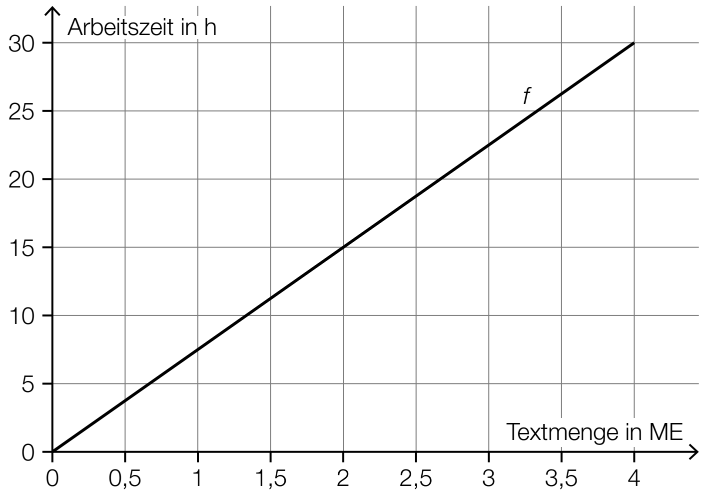
a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion h_1.
a2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
b1) Ein Punkt für das richtige Ablesen.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren des Ergebnisses im gegebenen Sachzusammenhang.

Zehnfingersystem

Das Zehnfingersystem ermöglicht schnelles Tippen auf Tastaturen.

a) In einem Diagramm soll die Arbeitszeit für das Tippen einer bestimmten Textmenge mit zwei bzw. zehn Fingern verglichen werden.

x ... Textmenge in Mengeneinheiten (ME)
$f(x)$ ... Arbeitszeit für die Textmenge x beim Tippen mit zwei Fingern in h
$g(x)$ ... Arbeitszeit für die Textmenge x beim Tippen mit zehn Fingern in h

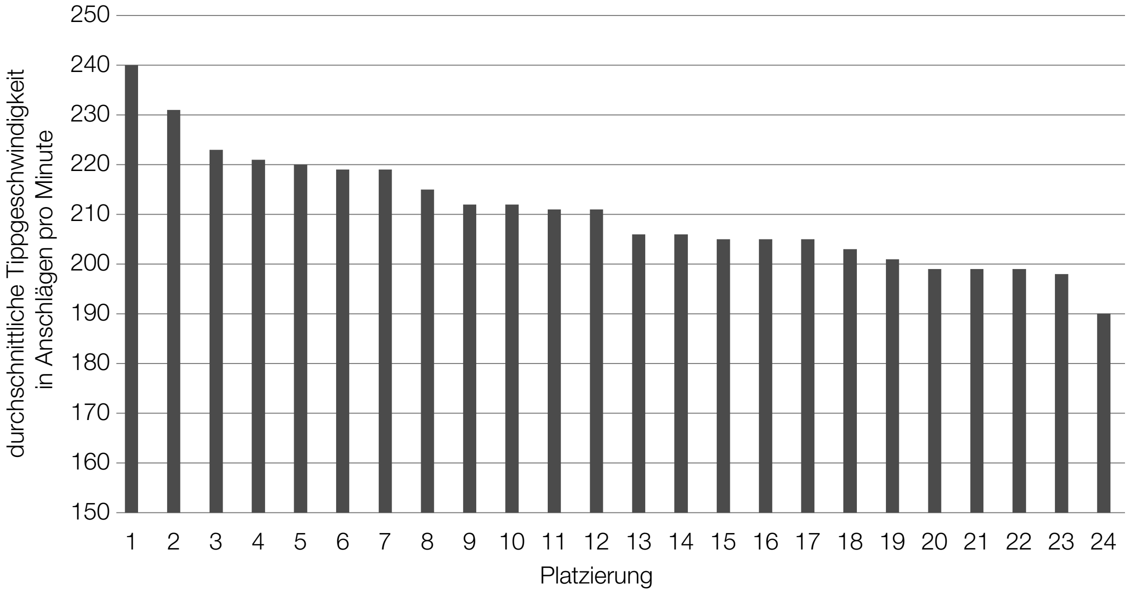


1) Stellen Sie mithilfe des obigen Diagramms eine Gleichung der linearen Funktion f auf. *[0/1 P.]*

Laut Angabe auf einer Website gilt: Beim Tippen mit zehn Fingern kann man im Vergleich zum Tippen mit zwei Fingern die doppelte Textmenge in der gleichen Arbeitszeit tippen.

2) Zeichnen Sie im obigen Diagramm den Graphen der linearen Funktion g für die Arbeitszeit beim Tippen mit zehn Fingern ein. *[0/1 P.]*

b) In einer Klasse mit 24 Schülerinnen und Schülern wird ein Tippwettbewerb veranstaltet. Dabei werden die Platzierungen nach der durchschnittlichen Tippgeschwindigkeit vergeben. Diese wird in Anschlägen pro Minute angegeben. (Siehe nachstehendes Säulendiagramm.)

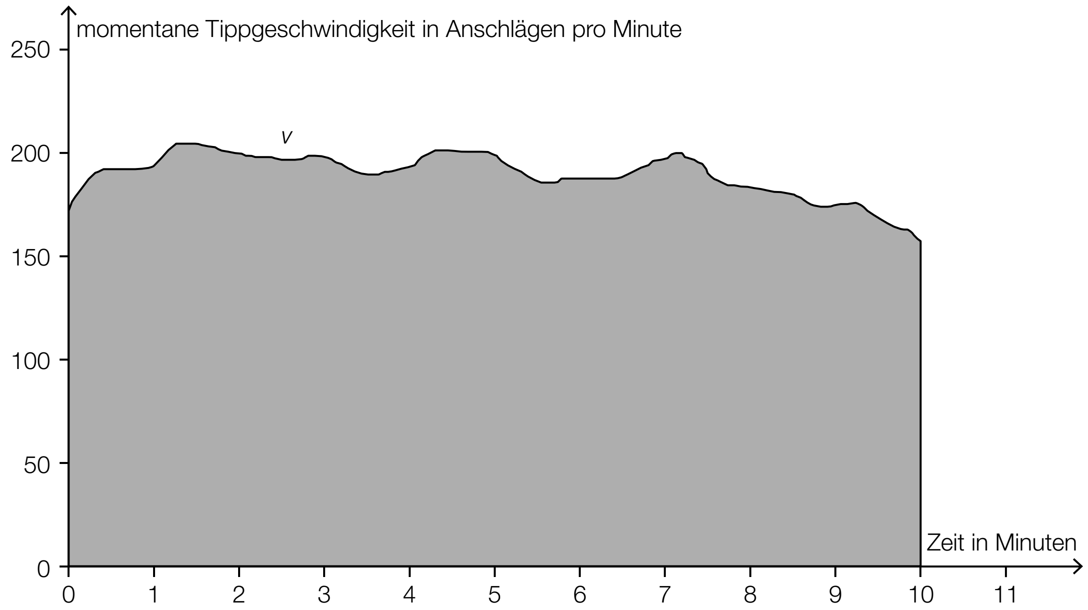


1) Kreuzen Sie die auf diesen Tippwettbewerb zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Die relative Häufigkeit der Schüler/innen mit mehr als 215 Anschlägen pro Minute liegt über 0,4.	☐
Die Spannweite beträgt 40 Anschläge pro Minute.	☐
Der Median liegt unter 210 Anschlägen pro Minute.	☐
Hätte die/der Erstplatzierte 250 Anschläge pro Minute erreicht, wäre der Median größer.	☐
Wird genau ein Wert der Liste entfernt, bleibt der Median gleich.	☐

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die durchschnittliche Tippgeschwindigkeit der/des Erstplatzierten höher ist als jene der/des Letztplatzierten. *[0/1 P.]*

c) Die momentane Tippgeschwindigkeit während einer 10-Minuten-Abschrift kann näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

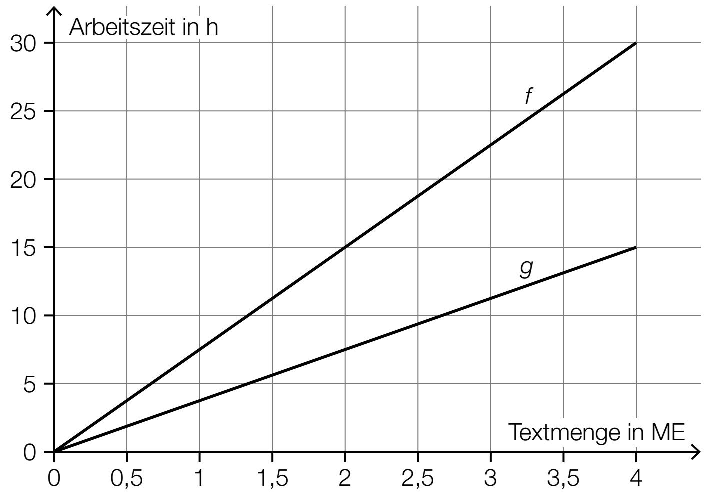


1) Interpretieren Sie den Inhalt der grau markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $f(x) = 7{,}5 \cdot x$

a2)



a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *f*.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen von *g*.

b1)

Der Median liegt unter 210 Anschlägen pro Minute.	☒

b2) $\frac{240 - 190}{190} = 0{,}2631...$

Die Tippgeschwindigkeit der/des Erstplatzierten ist um rund 26,3 % höher als jene der/des Letztplatzierten.

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

c1) Der Inhalt der grau markierten Fläche entspricht der Gesamtzahl der Anschläge bei dieser 10-Minuten-Abschrift.

Auch eine sinngemäße Interpretation als „geschriebener Text bei dieser 10-Minuten-Abschrift“ ist als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

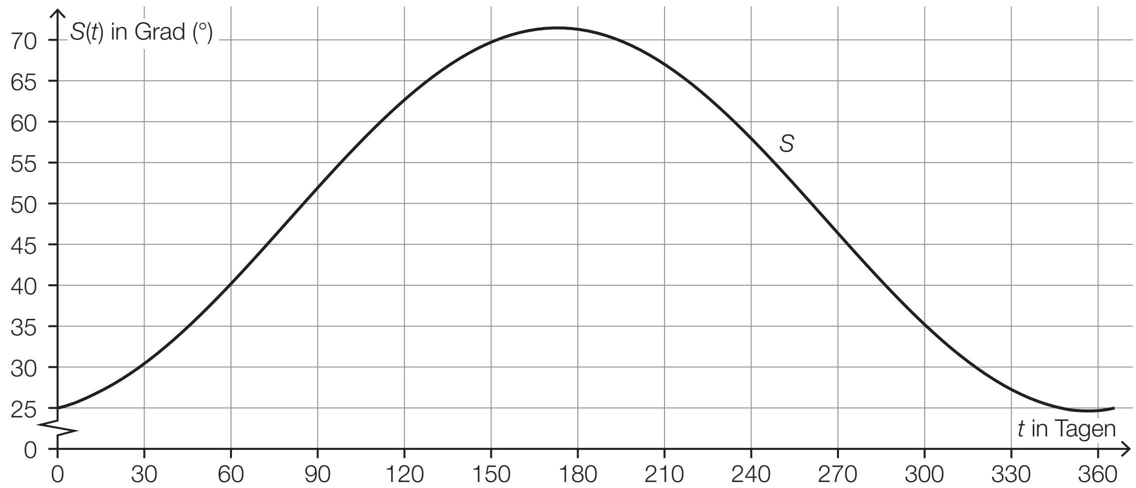
Sonnenlicht und Vitamin D*

Aufgabennummer: A_300

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Für die Bildung von Vitamin D in der Haut ist Sonnenlicht nötig. Ist der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen in der Atmosphäre zu klein, kann kein Vitamin D gebildet werden.

a) Für jeden Tag eines Jahres wird der größte Einfallswinkel der Sonnenstrahlen betrachtet. Für eine bestimmte Stadt ist die zeitliche Entwicklung dieses Winkels als Graph der Funktion S dargestellt.



t ... Zeit ab Jahresbeginn in Tagen
$S(t)$ ... größter Einfallswinkel der Sonnenstrahlen zur Zeit t in Grad (°)

1) Lesen Sie dasjenige Zeitintervall ab, in dem der größte Einfallswinkel der Sonnenstrahlen mindestens 45° beträgt.

[________ ; ________] (in Tagen)

Es wird folgende Berechnung durchgeführt: $\frac{S(90) - S(0)}{90} \approx 0{,}3$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut sinkt ab Herbstbeginn und lässt sich durch die Funktion N beschreiben.

$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}0173 \cdot t}$

t ... Zeit ab Herbstbeginn in Tagen
$N(t)$ ... Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut zur Zeit t in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml)
N_0 ... Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut zu Herbstbeginn in ng/ml

Der Körper ist ausreichend mit Vitamin D versorgt, wenn dessen Konzentration im Blut mindestens 30 ng/ml beträgt.

Claudia möchte wissen, wie hoch die Vitamin-D-Konzentration im Blut zu Herbstbeginn mindestens sein muss, damit ihr Körper nach 60 Tagen noch ausreichend mit Vitamin D versorgt ist.

1) Berechnen Sie die dafür notwendige Vitamin-D-Konzentration zu Herbstbeginn.

Im obigen Modell beträgt die Halbwertszeit beim Abbau von Vitamin D in Claudias Körper 40 Tage.

2) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Nach 80 Tagen ist noch die Hälfte von N_0 vorhanden.	☐
Nach 100 Tagen ist noch ein Drittel von N_0 vorhanden.	☐
Nach 120 Tagen ist noch ein Viertel von N_0 vorhanden.	☐
Nach 140 Tagen ist noch ein Achtel von N_0 vorhanden.	☐
Nach 160 Tagen ist noch ein Sechzehntel von N_0 vorhanden.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) [73; 273] (in Tagen)
Toleranzbereich für die untere Grenze: [70; 80]
Toleranzbereich für die obere Grenze: [270; 280]

a2) In den ersten 90 Tagen des Jahres steigt der größte Einfallswinkel der Sonnenstrahlen pro Tag um durchschnittlich 0,3°.

oder:

Die mittlere Änderungsrate des größten Einfallswinkels der Sonnenstrahlen im Zeitintervall [0; 90] beträgt 0,3° pro Tag.

b1) $30 = N_0 \cdot e^{-0{,}0173 \cdot 60} \quad \Rightarrow \quad N_0 = 84{,}7...$

Die Vitamin-D-Konzentration im Blut zu Herbstbeginn muss (mindestens) rund 85 ng/ml betragen.

b2)

Nach 160 Tagen ist noch ein Sechzehntel von N_0 vorhanden.	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Ablesen des richtigen Zeitintervalls.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der notwendigen Vitamin-D-Konzentration zu Herbstbeginn.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

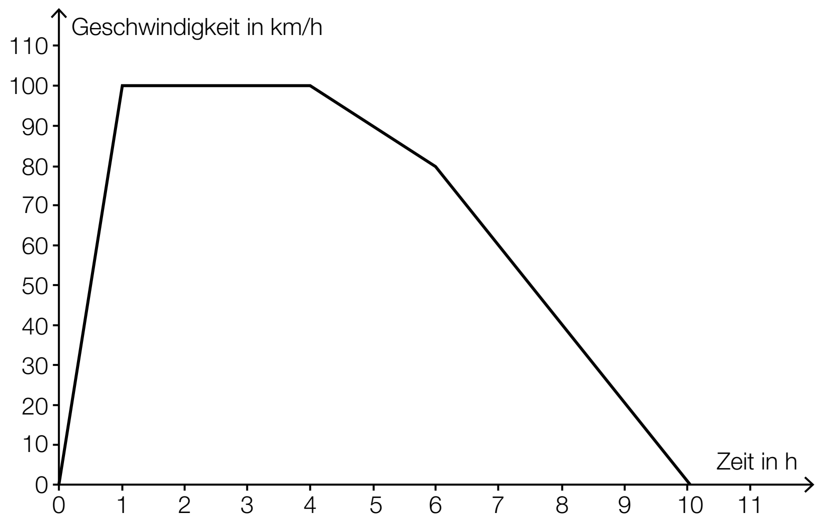
Bewegung

Aufgabennummer: A_273

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Mithilfe von mathematischen Modellen lassen sich Bewegungsvorgänge beschreiben.

a) Die nachstehende Grafik zeigt das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm einer Autofahrt.



– Berechnen Sie denjenigen Flächeninhalt, den der Funktionsgraph mit der horizontalen Achse einschließt.
– Interpretieren Sie, welcher physikalischen Größe dieser Flächeninhalt entspricht.

b) Der Verlauf der Geschwindigkeit eines Fahrzeugs auf einer bestimmten Strecke kann durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$v(t) = -0{,}002 \cdot t^4 + 0{,}3 \cdot t^3 - 10 \cdot t^2 + 106 \cdot t \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 30$

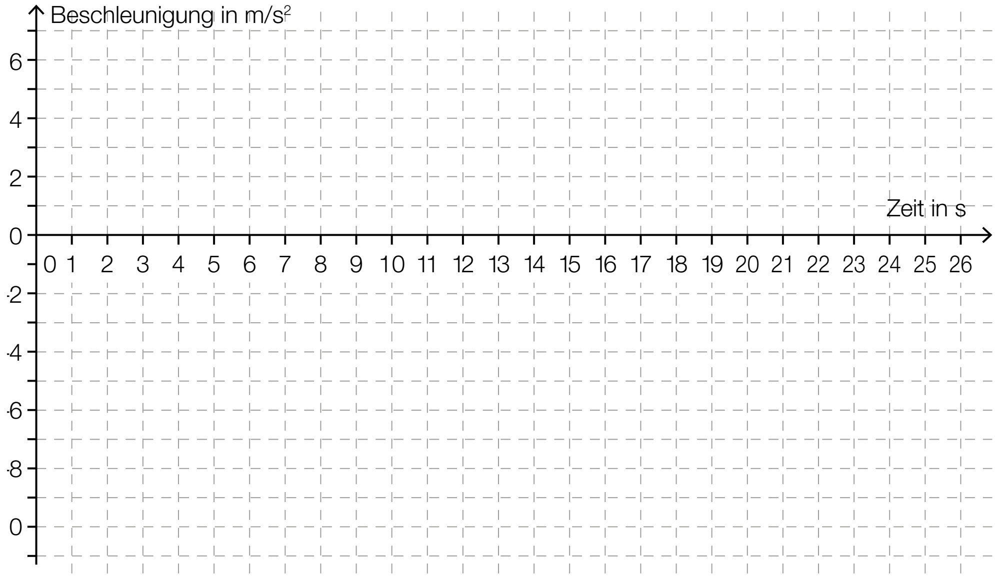
t … Zeit in min
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/min

Bis zur Zeit t_1 legt das Fahrzeug einen Weg von 2 645 m zurück.

– Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der Zeit t_1 auf.
– Berechnen Sie die Zeit t_1.

c) Ein Motorradfahrer beschleunigt gleichmäßig in 5 Sekunden aus dem Stillstand auf eine Geschwindigkeit von 30 m/s. Die nächsten 10 Sekunden fährt er mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30 m/s. Danach muss er auf eine Geschwindigkeit von 10 m/s abbremsen und benötigt dafür 2 Sekunden. 5 Sekunden lang kann er diese Geschwindigkeit beibehalten, um anschließend in 2 Sekunden auf Stillstand abzubremsen. Die Bremsvorgänge erfolgen gleichmäßig.

– Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem das zugehörige Beschleunigung-Zeit-Diagramm ein.



d) Nur eine der folgenden beiden Abbildungen stellt das Weg-Zeit-Diagramm eines bewegten Objekts dar.

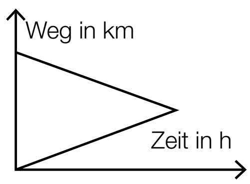


Abbildung 1

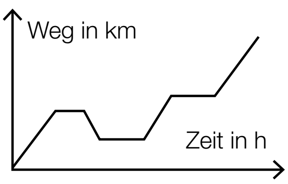


Abbildung 2

– Argumentieren Sie, welche der beiden Abbildungen keinen Funktionsgraphen darstellt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung des Flächeninhalts:

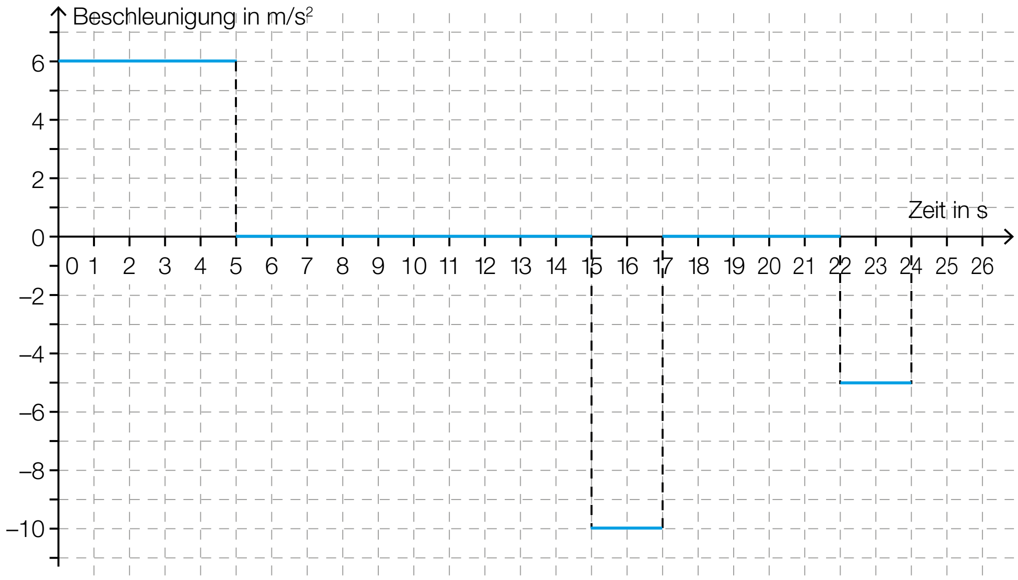
$$\frac{1 \cdot 100}{2} + 3 \cdot 100 + \frac{(100 + 80) \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 80}{2} = 690$$

Der Flächeninhalt unter der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion entspricht dem zurückgelegten Weg. Das Auto legt einen Weg von 690 km zurück.

b) $\int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 2645$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$t = 9{,}907...$
Nach rund 9,91 Minuten hat das Fahrzeug einen Weg von 2645 m zurückgelegt.

c)



d) Abbildung 1 stellt keinen Funktionsgraphen dar, da eine Funktion eine eindeutige Zuordnung ist. In Abbildung 1 gibt es aber Zeitpunkte, denen 2 Wege zugeordnet werden.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 4 Analysis
c) 4 Analysis
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) A Modellieren und Transferieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:

a) leicht
b) mittel
c) schwer
d) leicht

Punkteanzahl:

a) 2
b) 2
c) 1
d) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

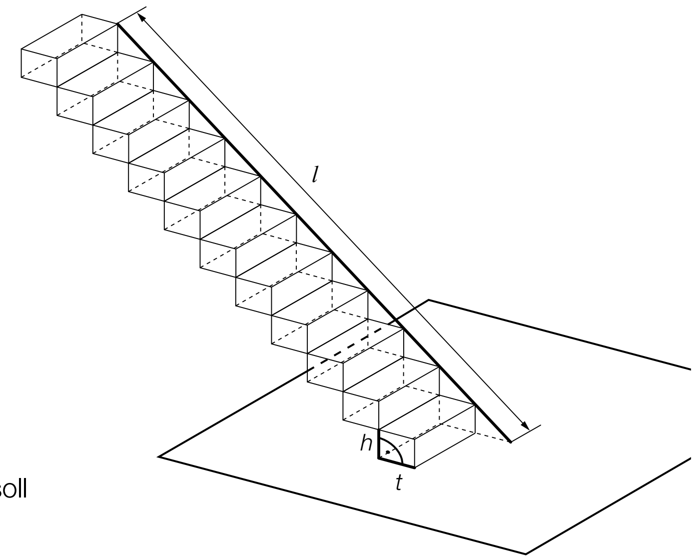
Treppenlift*

Aufgabennummer: A_274

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Vielen Menschen fällt das Treppensteigen mit zunehmendem Alter immer schwerer. Ein Treppenlift kann das Überwinden der Treppe wieder erheblich erleichtern.

a) Ein Treppenlift wird gebaut. Dafür muss eine Führungsschiene mit der Länge l montiert werden (siehe nebenstehende Abbildung). Die Stufenhöhe h und die Stufentiefe t einer geradlinig verlaufenden Treppe stehen im Verhältnis $h : t = 3 : 4$.



Die Treppe besteht aus insgesamt 11 Stufen.
Die Führungsschiene des Lifts soll direkt auf den Stufen aufliegen.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion auf, die die Länge der Führungsschiene in Abhängigkeit von der Stufentiefe beschreibt.

b) Ein Unternehmen bietet Treppenlifte an, die eine Steigung von 200 % überwinden können.

1) Stellen Sie anhand einer Skizze eine Steigung von 200 % dar.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Frau Huber möchte in ihrem Haus einen Treppenlift einbauen lassen.
Folgende zwei Angebote stehen zur Wahl (mögliche Zinsen bleiben unberücksichtigt):
Angebot 1: ein Treppenlift zu einem Kaufpreis von € 9.480
Angebot 2: ein Treppenlift mit einer Einmalzahlung von € 300 und einer monatlichen Miete von € 60

1) Stellen Sie für beide Angebote je eine Funktionsgleichung auf, die die Kosten in Abhängigkeit von der Zeit in Monaten beschreibt.

Frau Huber plant, in 10 Jahren ins Seniorenheim zu übersiedeln, und benötigt dann keinen Treppenlift mehr.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob Angebot 2 für Frau Huber unter dieser Annahme günstiger als Angebot 1 ist.

Möglicher Lösungsweg

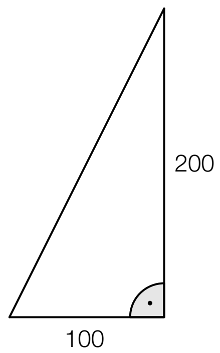
a1) $h : t = 3 : 4 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3}{4} \cdot t$

$\sqrt{t^2 + h^2} = \sqrt{t^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot t\right)^2}$

$l(t) = 11 \cdot \sqrt{t^2 + \left(\frac{3}{4} \cdot t\right)^2}$

t … Stufentiefe in cm
$l(t)$ … Länge der Führungsschiene bei einer Stufentiefe t in cm

b1)



c1) $K_1(t) = 9\,480$
$K_2(t) = 60 \cdot t + 300$

t … Anzahl der Monate
$K_1(t)$, $K_2(t)$ … Gesamtkosten nach t Monaten in Euro

c2) $K_2(120) = 7\,500$
$7\,500 < 9\,480$

Wenn Frau Huber den Treppenlift nur für 10 Jahre benötigt, ist Angebot 2 günstiger.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung

b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Skizze

c1) 1 × A: für das richtige Aufstellen der beiden Funktionsgleichungen
c2) 1 × D: für die richtige Überprüfung

Kurvenfahrt*

Aufgabennummer: A_275

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Ein Motorradfahrer durchfährt eine kreisförmig angelegte Kurve.
Die Formel für den Betrag der Fliehkraft lautet:

$$F = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

F ... Betrag der Fliehkraft in Newton (N)
m ... Masse in kg (Motorrad und Fahrer)
v ... Geschwindigkeit des Motorradfahrers in m/s
r ... Radius der Kurve in m

a) 1) Erklären Sie anhand dieser Formel, wie sich F ändert, wenn der Fahrer die Kurve mit doppelter Geschwindigkeit durchfährt.

b) 1) Stellen Sie F in Abhängigkeit von r im Intervall [10; 140] grafisch dar, wenn v = 20 m/s und m = 380 kg beträgt.

2) Kennzeichnen Sie auf der senkrechten Achse die Veränderung von F bei der Halbierung des Radius von 80 m auf 40 m.

c) Der Fahrer befährt eine Kurve mit gleichbleibendem Radius r und gleichbleibender Geschwindigkeit v einmal mit einem vollen Tank und einmal mit einem fast leeren Tank. Die Masse mit einem vollen Tank beträgt 380 kg, die Masse mit einem fast leeren Tank beträgt 362 kg.

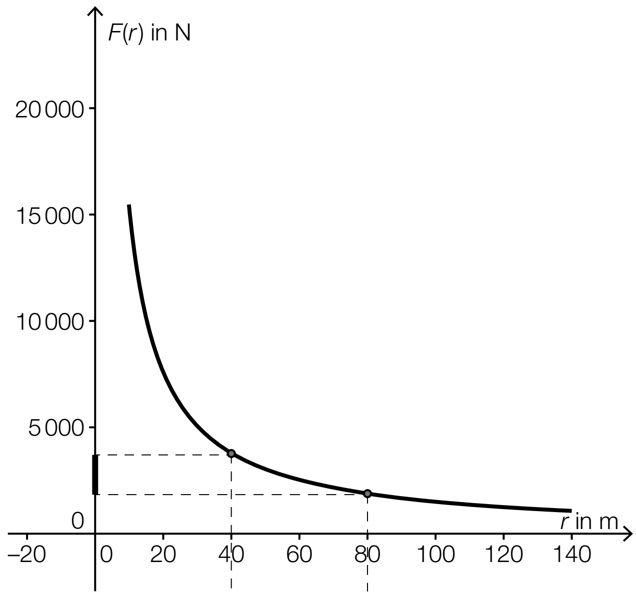
1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent F bei fast leerem Tank kleiner als bei vollem Tank ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) $(2 \cdot v)^2 = 4 \cdot v^2$
Das bedeutet: Wenn man mit doppelt so hoher Geschwindigkeit in eine Kurve mit dem Radius r fährt, dann wird F viermal so groß.

b1 und b2)



c1) 18 : 380 = 0,047...
F ist bei einem fast leeren Tank um rund 5 % geringer als bei einem vollen Tank.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für die richtige Erklärung

b1) 1 × B: für das richtige Erstellen der Grafik
b2) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der Veränderung auf der senkrechten Achse

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Münzen (1)*

Aufgabennummer: A_276		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

Susi und Markus spielen mit fairen Münzen. Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf" und „Zahl" jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Susi hat eine Schachtel mit 3 Ein-Euro-Münzen und 5 Zwei-Euro-Münzen.
Markus hat eine Schachtel mit 2 Ein-Euro-Münzen und 3 Zwei-Euro-Münzen.
Beide ziehen aus ihrer Schachtel zufällig jeweils 1 Münze.

1) Geben Sie diejenigen Möglichkeiten an, die zu einem Gesamtwert von € 3 führen (bei Susi und Markus zusammen).

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass durch die beiden Ziehungen ein Gesamtwert von € 3 erzielt wird.

b) Markus will eine Zwei-Euro-Münze 10-mal werfen.
Susi stellt die Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir mindestens 3-mal ‚Zahl'?"

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen mindestens 3-mal „Zahl" geworfen wird.

c) Susi und Markus beschäftigen sich mit der Wahrscheinlichkeit, mit der „Zahl" beim wiederholten Werfen einer Münze auftritt. Dabei stoßen sie auf folgende Gleichung:

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}5^n = 0{,}9375$

X ... Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Zahl"

1) Berechnen Sie n.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl n in diesem Zusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Möglichkeit, dass die Summe der gezogenen Münzen 3 Euro beträgt, besteht nur, wenn man entweder aus Susis Box 1 Ein-Euro-Münze und aus Markus' Box 1 Zwei-Euro-Münze zieht oder aus Susis Box 1 Zwei-Euro-Münze und aus Markus' Box 1 Ein-Euro-Münze zieht.

a2) $P(S = 1 \text{ und } M = 2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}$

$P(S = 2 \text{ und } M = 1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist die gesuchte Lösung:

$\frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40} = 47{,}5\ \%$

b1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung: $n = 10$ und $p = 0{,}5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9453... \approx 94{,}5\ \%$

c1) $n = \frac{\ln(0{,}0625)}{\ln(0{,}5)} = 4$

c2) n gibt an, wie oft man die Münze werfen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 93,75 % mindestens 1-mal „Zahl" geworfen wird.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Angeben der beiden Möglichkeiten
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

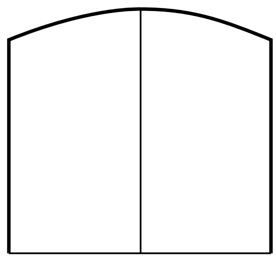
c1) 1 × B: für die richtige Berechnung von n
c2) 1 × C: für die richtige Interpretation von n

Scheunentor*

Aufgabennummer: A_277

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

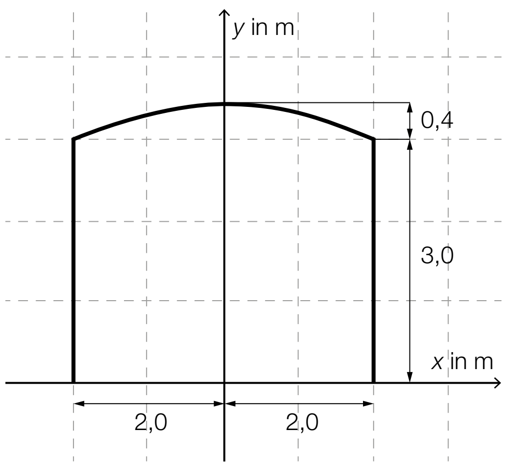
Ein Scheunentor besteht aus 2 symmetrischen Flügeln. Die Vorderseite des Scheunentors (Rechteck mit einem aufgesetzten Bogen) ist in der nachstehenden Abbildung vereinfacht dargestellt.



a) Der Bogen des Scheunentors kann näherungsweise durch den Graphen einer quadratischen Funktion mit folgender Gleichung beschrieben werden (vergleiche nachstehende Abbildung):

$y = a \cdot x^2 + b$

x, y ... Koordinaten in m



1) Berechnen Sie die Koeffizienten a und b.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Für ein anderes Scheunentor, dessen Flügel jeweils 2,5 m breit sind, lässt sich der Bogen näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion f beschreiben:

$f(x) = -0{,}08 \cdot x^2 + 4$

x ... Koordinate in m
$f(x)$ ... Höhe des Scheunentors an der Stelle x in m

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Vorderseite des Scheunentors.

c) Der Flächeninhalt der Vorderseite eines anderen Scheunentors beträgt 16 m². Das Scheunentor hat eine Dicke von 8 cm. Für die Stärke der Verankerung ist es wichtig, die Masse des Tors zu kennen.
Die Masse ist das Produkt aus Volumen und Materialdichte.
Die Materialdichte beträgt 0,7 kg/dm³.

1) Ermitteln Sie die Masse des Scheunentors in Tonnen.

Möglicher Lösungsweg

a1) Koordinatensystem in der Symmetrieachse:
$y(0) = 3{,}4$: $3{,}4 = b$
$y(2) = 3$: $3 = 4 \cdot a + 3{,}4 \quad \Rightarrow \quad a = -0{,}1$

b1) $A = 2 \cdot \int_0^{2{,}5} (-0{,}08 \cdot x^2 + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{115}{6} \approx 19{,}17$

Der Flächeninhalt beträgt rund 19,17 m².

c1) Das Volumen V ist das Produkt aus Flächeninhalt und Dicke: 16 m² = 1600 dm²;
8 cm = 0,8 dm
$V = 1\,600\text{ dm}^2 \cdot 0{,}8\text{ dm} = 1\,280\text{ dm}^3$
Masse des Scheunentors: $m = 0{,}7\text{ kg/dm}^3 \cdot 1\,280\text{ dm}^3 = 896\text{ kg} = 0{,}896\text{ t}$
Die Masse des Scheunentors beträgt 0,896 t.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für die richtige Berechnung der Koeffizienten

b1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts

c1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Masse in Tonnen

Medikamentenabbau (3)*

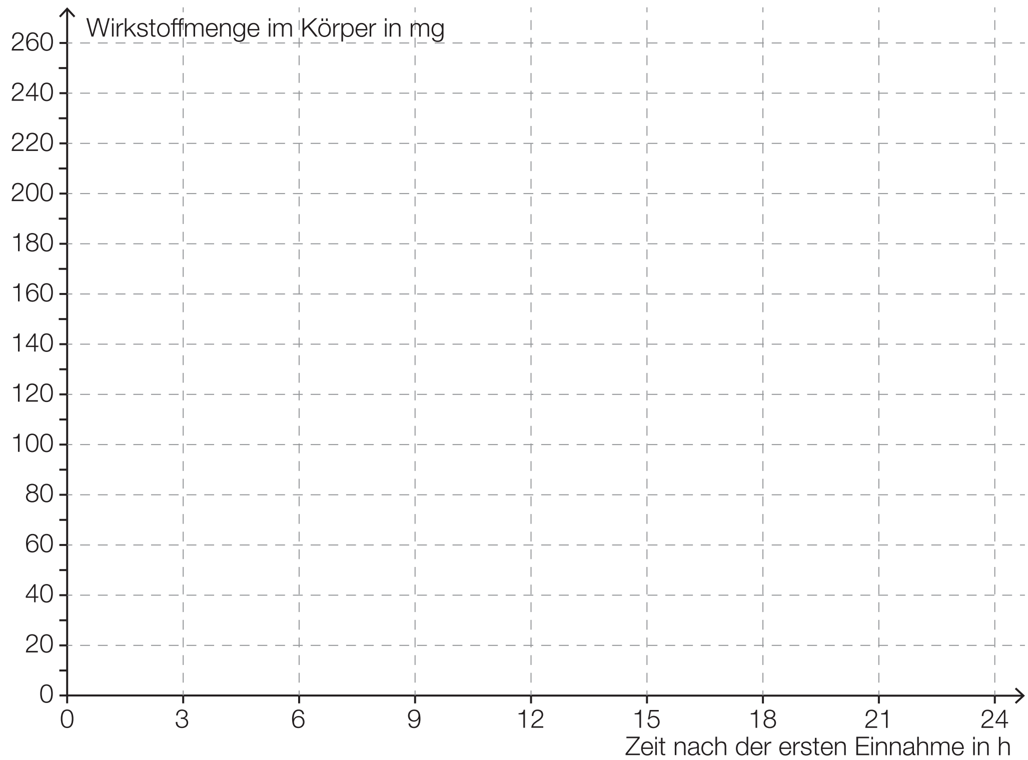
Aufgabennummer: A_278

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Ärztin verschreibt einem Patienten zur Behandlung seines Bluthochdrucks ein Medikament mit einer Wirkstoffmenge von 240 mg pro Tablette, welches im Körper exponentiell mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden abgebaut wird. Man nimmt an, dass der Wirkstoff nach Einnahme einer Tablette sofort in das Blut übergeht.

a) Ein Patient nimmt um 7 Uhr und um 19 Uhr jeweils eine Tablette ein.

1) Stellen Sie die Wirkstoffmenge des Medikaments im Körper des Patienten als Funktion der Zeit für die ersten 24 Stunden nach der ersten Einnahme in der unten stehenden Abbildung grafisch dar.



b) 1) Argumentieren Sie, weshalb der Wirkstoff bei einmaliger Einnahme nach diesem Modell nach 24 Stunden nicht vollständig aus dem Körper verschwunden sein kann.

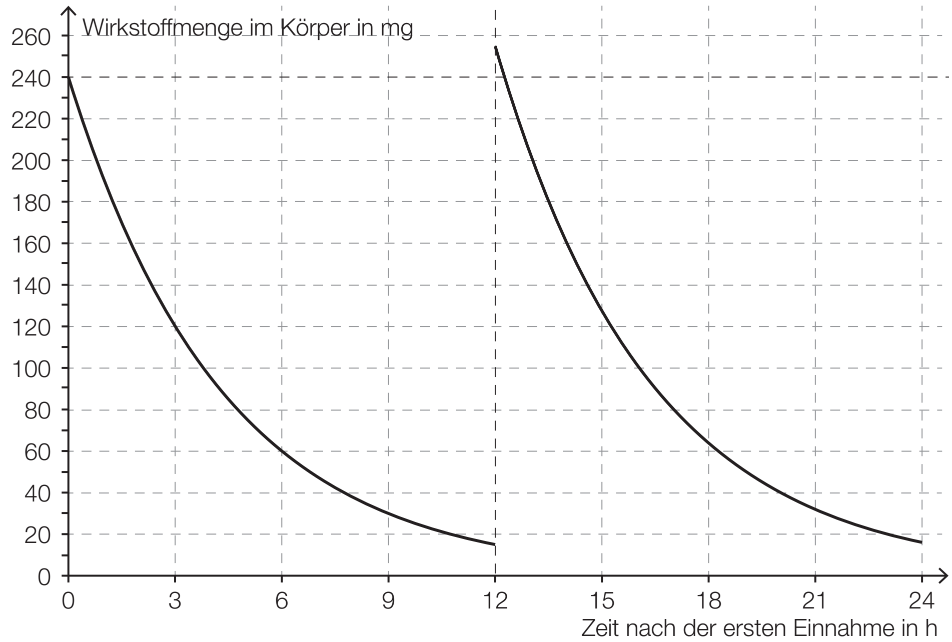
* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein anderer Patient nimmt einmalig nur um 7 Uhr Früh 2 Tabletten ein. Das Medikament wirkt bei einer Mindestmenge von 50 mg, darunter ist seine Wirkung vernachlässigbar.

1) Bestimmen Sie, wie lange das Medikament wirkt.

Möglicher Lösungsweg

a1)



b1) Bei Verwendung des exponentiellen Modells sinkt die im Körper vorhandene Wirkstoffmenge theoretisch niemals auf null ab. Nach 24 Stunden sind 8 Halbwertszeiten vergangen, d. h., ein Anteil von $\left(\frac{1}{2}\right)^8 > 0$ befindet sich noch im Blut.

c1) Modellierung durch eine Exponentialfunktion mit einer Halbwertszeit von 3 Stunden und einer Startmenge von 480 mg:

$N(t) = N_0 \cdot a^t$

$240 = 480 \cdot a^3$

$a = 0{,}5^{\frac{1}{3}} = 0{,}79370...$

$N(t) = 480 \cdot a^t$

Berechnung des Wirkungszeitraums:

$50 = 480 \cdot a^t$
$t = 9{,}7...$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für die richtige Darstellung im Intervall [0; 12[
1 × A2: für die richtige Darstellung im Intervall [12; 24[

b1) 1 × D: für die richtige Argumentation

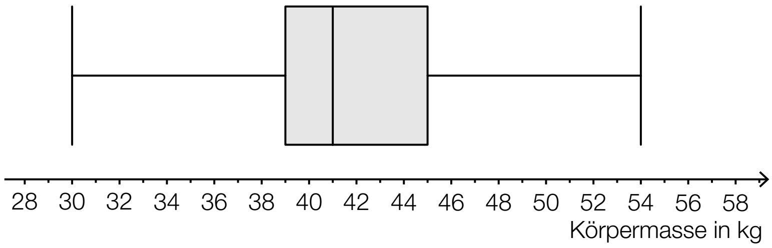
c1) 1 × A: für die richtige Modellierung der Exponentialfunktion
1 × B: für das richtige Bestimmen des Wirkungszeitraums

Statistische Verteilung der Körpermassen von 12-Jährigen*

Aufgabennummer: A_279

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Die Körpermassen von 12-jährigen Schülerinnen, die bei einer Stichprobe erhoben wurden, sind in folgendem Boxplot dargestellt:



1) Lesen Sie die beiden statistischen Kennzahlen *Median* und *3. Quartil* ab.

In einer Tageszeitung wird behauptet: „Die Stichprobe zeigt: Mehr als die Hälfte der 12-jährigen Schülerinnen ist schwerer als 42 kg."

2) Begründen Sie mithilfe des Boxplots, warum die Behauptung in der Tageszeitung falsch ist.

b) Eine Schulärztin hat die Körpermassen von 10 Schülerinnen und Schülern aufgezeichnet (Angaben in kg):

37	34	38	48	68	38	40	48	38	47

1) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel und den Median.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Es kann davon ausgegangen werden, dass die Körpermassen von 12-jährigen Schülern österreichweit annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 42$ kg und der Standardabweichung $\sigma = 3{,}5$ kg sind.

1) Veranschaulichen Sie in einer Skizze der Dichtefunktion die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter 12-jähriger Schüler eine Körpermasse von mehr als 45 kg hat.

2) Berechnen Sie dasjenige symmetrische Intervall um μ, in dem die Körpermasse eines zufällig ausgewählten 12-jährigen Schülers mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

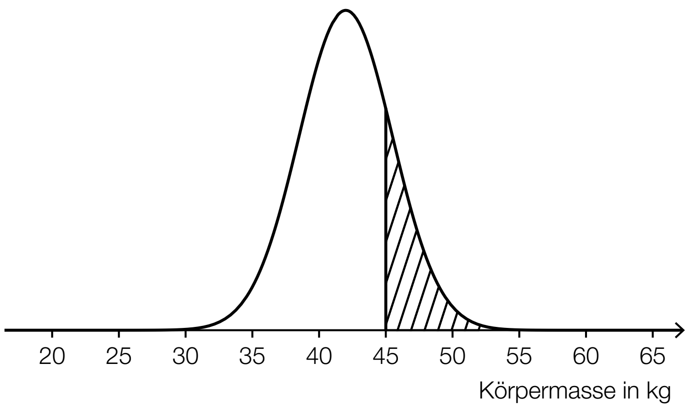
Möglicher Lösungsweg

a1) Median: 41 kg
3. Quartil: 45 kg

a2) Die Behauptung in der Tageszeitung ist falsch, weil 42 kg größer als der Median sind.

b1) Bestimmung der statistischen Kennzahlen mittels Technologieeinsatz:
– arithmetisches Mittel: 43,6 kg
– Median: 39 kg

c1)



c2) Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad [36{,}2 \text{ kg}; 47{,}8 \text{ kg}]$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für das richtige Ablesen der beiden statistischen Kennzahlen
a2) 1 × D: für die richtige Begründung

b1) 1 × B: für die richtige Bestimmung des arithmetischen Mittels und des Medians

c1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in einer Skizze der Dichtefunktion
c2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Intervalls

Die Adria-Wien-Pipeline*

Aufgabennummer: A_280

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Österreich muss einen Großteil seines Erdölbedarfs durch Importe von Rohöl decken. Diese Importe werden vorwiegend über die Adria-Wien-Pipeline durchgeführt, die von Triest nach Wien-Schwechat führt.

a) Die folgende Tabelle gibt die nach Österreich importierten Rohölmengen in den Jahren 2006 bis 2014 an:

Jahr	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
importierte Rohölmenge in Millionen Tonnen	7,7	7,6	7,9	7,4	6,8	7,3	7,4	7,8	7,5

Quelle: https://www.wko.at/branchen/industrie/mineraloelindustrie/jahresberichte.html [22.11.2018].

1) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der importierten Rohölmengen für diesen Zeitraum in Millionen Tonnen.

b) Modellhaft betrachtet ist die Pipeline ein Drehzylinder mit dem Durchmesser d und der Höhe l.

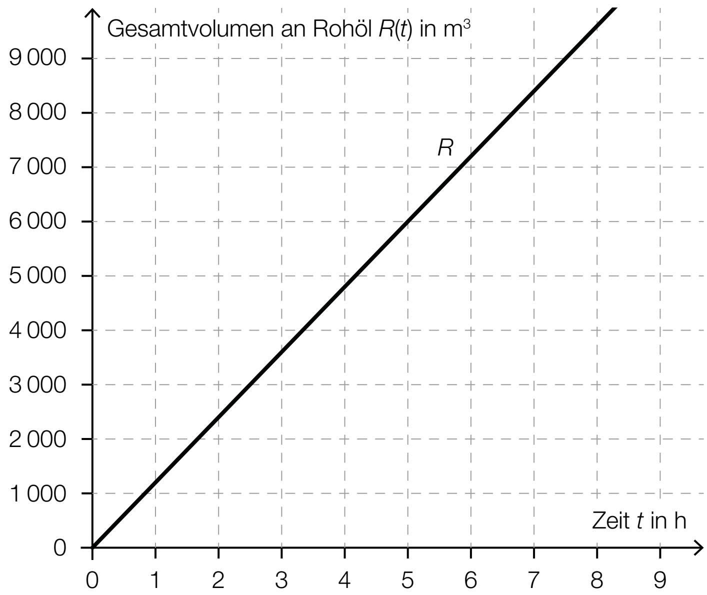
Der Innendurchmesser der Pipeline beträgt $d = 457{,}2$ mm. Die Länge der Pipeline beträgt rund $l = 416$ km.

In der Erdölindustrie wird für das Volumen von Rohöl häufig die Einheit *Barrel* verwendet.
Es gilt: 1 Barrel ≈ 0,159 m³

1) Berechnen Sie, wie viele Barrel Rohöl die vollständig befüllte Pipeline fasst.

* ehemalige Klausuraufgabe

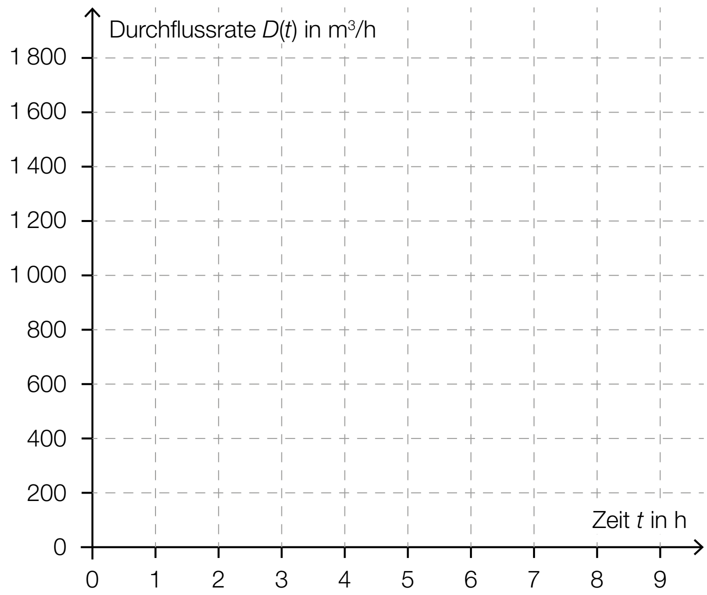
c) Das Gesamtvolumen an Rohöl, das im Zeitintervall $[0; t]$ einen Kontrollpunkt in der Pipeline passiert, kann näherungsweise durch die Funktion R in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden. Der Graph der Funktion R ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe des oben dargestellten Graphen eine Gleichung der Funktion R.

Die Durchflussrate $D(t)$ zum Zeitpunkt t ist die momentane Änderungsrate der Funktion R.

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Durchflussrate ein.



Möglicher Lösungsweg

a1) Ermittlung mittels Technologieeinsatz:

$\bar{x} = 7{,}48...$ Millionen Tonnen
$s = 0{,}30...$ Millionen Tonnen

Auch eine Ermittlung der Standardabweichung als $s_{n-1} = 0{,}32...$ *ist als richtig zu werten.*

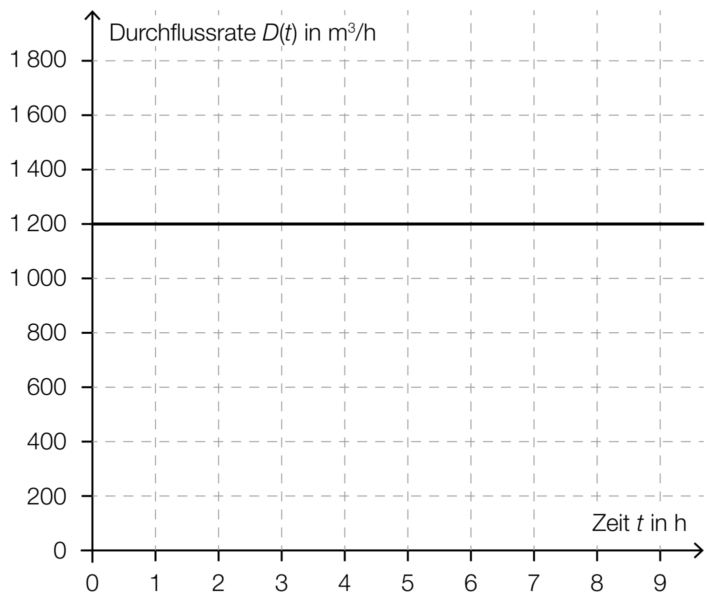
b1) $\left(\frac{0{,}4572}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 416\,000 = 68\,296{,}06...$

$68\,296{,}06... : 0{,}159 = 429\,534{,}9...$

Insgesamt fasst die Pipeline rund 429535 Barrel Rohöl.

c1) $R(t) = 1\,200 \cdot t$

c2)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung
b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz (richtige Anwendung der Formel zur Berechnung des Volumens eines Drehzylinders auf den gegebenen Sachverhalt)
1 × B: für die richtige Berechnung in Barrel
c1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion
c2) 1 × A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Durchflussrate

Vitamin C*

Aufgabennummer: A_281

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Der Vitamin-C-Gehalt eines Apfels nimmt nach der Ernte exponentiell ab. Alle 4 Wochen nimmt der Vitamin-C-Gehalt um 20 % bezogen auf den Wert zu Beginn dieser 4 Wochen ab.
Ein bestimmter Apfel hat bei der Ernte einen Vitamin-C-Gehalt von 18 mg.

Der Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels in Milligramm soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt der Ernte.
2) Berechnen Sie den Vitamin-C-Gehalt dieses Apfels 36 Wochen nach der Ernte.

b) Der Vitamin-C-Gehalt von Tabletten der Sorte *Zitruspower* ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ mg und der Standardabweichung $\sigma = 5$ mg.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Vitamin-C-Gehalt einer zufällig ausgewählten Tablette zwischen 92 mg und 110 mg liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Nach der Einnahme einer Vitamin-C-Tablette steigt die Vitamin-C-Konzentration im Blut zunächst an und sinkt danach wieder ab.

Die Funktion c beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf der Vitamin-C-Konzentration im Blut einer bestimmten Person.

$c(t) = 24 \cdot (e^{-0{,}0195 \cdot t} - e^{-1{,}3 \cdot t}) + 3$

t ... Zeit seit der Einnahme der Vitamin-C-Tablette in h
$c(t)$ ... Vitamin-C-Konzentration im Blut zur Zeit t in Mikrogramm pro Milliliter (µg/ml)

1) Zeigen Sie, dass die maximale Vitamin-C-Konzentration im Blut der Person gerundet 25,18 µg/ml beträgt.
2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die maximale Vitamin-C-Konzentration in mg/L angibt. *[1 aus 5]*

0,02518 mg/L	☐
25,18 mg/L	☐
25 180 mg/L	☐
0,00002518 mg/L	☐
25 180 000 mg/L	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $N(t) = 18 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$0,8 \cdot 18 = 18 \cdot e^{-\lambda \cdot 4}$

$\lambda = \frac{\ln(0,8)}{-4} = 0,05578... \approx 0,0558$

$N(t) = 18 \cdot e^{-0,0558 \cdot t}$

oder:

$N(t) = 18 \cdot 0,8^{\frac{t}{4}}$

t ... Zeit nach der Ernte in Wochen
$N(t)$ ... Vitamin-C-Gehalt zur Zeit t in mg

a2) $N(36) = 2,41...$

Der Apfel hat 36 Wochen nach der Ernte einen Vitamin-C-Gehalt von rund 2,4 mg.

b1) X ... Vitamin-C-Gehalt einer Tablette in mg

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(92 < X < 110) = 0,9224...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 92,2 %.

c1) $c'(t) = 0$ *oder* $24 \cdot (-0{,}0195 \cdot e^{-0{,}0195 \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 3{,}279...$

$c(3{,}279...) = 25{,}175...$

Die maximale Vitamin-C-Konzentration im Blut dieser Person beträgt also rund 25,18 µg/ml.

Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, sowie eine Überprüfung von Randstellen sind für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c2)

25,18 mg/L	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Vitamin-C-Gehalts 36 Wochen nach der Ernte
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c1) 1 × D: für den richtigen Nachweis
Eine Überprüfung, ob an der berechneten Stelle tatsächlich ein Maximum vorliegt, z. B. mithilfe der 2. Ableitung, sowie eine Überprüfung von Randstellen sind für die Punktevergabe nicht erforderlich.
c2) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Glücksspiel*

Aufgabennummer: A_282

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Glücksspiel werden aus verschiedenen Gefäßen Kugeln zufällig gezogen.

a) Im ersten Gefäß befinden sich insgesamt a Kugeln. 7 dieser Kugeln sind rot, die anderen Kugeln sind weiß.

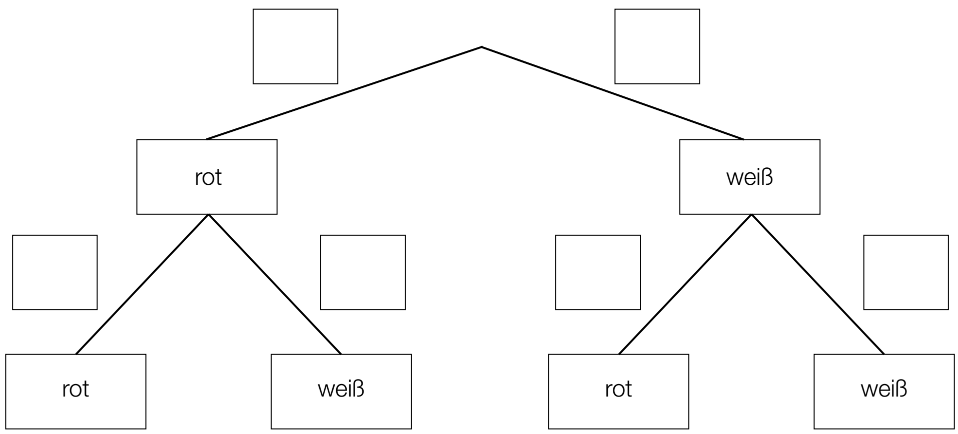
Es wird 1 Kugel aus diesem Gefäß gezogen.

1) Erstellen Sie mithilfe von a einen Ausdruck zur Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeit:

P(„die gezogene Kugel ist weiß") = ____________________

Aus diesem Gefäß mit a Kugeln zieht Elena 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Dann zieht sie wieder 1 Kugel.

2) Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass Elena 2-mal eine rote Kugel zieht, beträgt 12,25 %.

3) Berechnen Sie die Anzahl a.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im zweiten Gefäß befinden sich 6 schwarze und 2 blaue Kugeln.

Aus diesem Gefäß zieht Susi 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Das macht sie insgesamt 5-mal.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Susi dabei genau 3-mal eine schwarze Kugel zieht.

c) Im dritten Gefäß befinden sich 12 Kugeln. 7 dieser Kugeln sind grün, die anderen Kugeln sind gelb.

Aus diesem Gefäß zieht Moritz 1 Kugel und legt diese Kugel anschließend in das Gefäß zurück. Das macht er insgesamt 3-mal.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Die Wahrscheinlichkeit, dass ____①____, ist durch den Ausdruck ____②____ gegeben.

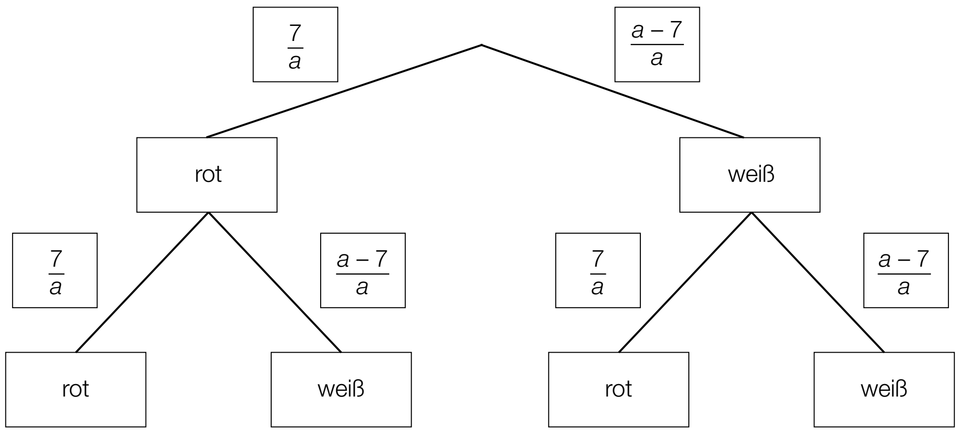
①	
alle 3 Kugeln grün sind	☐
mindestens 1 Kugel grün ist	☐
höchstens 1 Kugel grün ist	☐

②	
$1 - \left(\frac{5}{12}\right)^3$	☐
$1 - \left(\frac{7}{12}\right)^3$	☐
$\left(\frac{5}{12}\right)^3$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $P(\text{„die gezogene Kugel ist weiß“}) = \frac{a-7}{a}$

a2)



a3) $\left(\frac{7}{a}\right)^2 = 0{,}1225 \quad \Rightarrow \quad a = 20$

b1) Binomialverteilung mit $n = 5$, $p = 0{,}75$:
X ... Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X = 3) = 0{,}2636...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 26,4 %.

c1)

①	
mindestens 1 Kugel grün ist	☒

②	
$1 - \left(\frac{5}{12}\right)^3$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen des Ausdrucks
a2) 1 × A2: für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms
a3) 1 × B: für die richtige Berechnung von *a*
b1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
c1) 1 × A: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bahnverkehr in Österreich*

Aufgabennummer: A_283

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Eine Bahnfahrt von Wien nach Graz dauert 2 Stunden und 35 Minuten. Die mittlere Reisegeschwindigkeit beträgt dabei rund 81,83 km/h. Im Jahr 2026 soll der Semmering-Basistunnel fertiggestellt werden. Dadurch wird sich die Fahrtstrecke um 13,7 Kilometer und die Fahrtdauer um 50 Minuten verkürzen.

1) Berechnen Sie die mittlere Reisegeschwindigkeit zwischen Wien und Graz für die verkürzte Fahrt.

b) Die Fahrtstrecke im Semmering-Basistunnel wird 27,3 Kilometer lang sein und eine (als konstant angenommene) Steigung von 0,84 % haben.
In der folgenden Berechnung des Höhenunterschieds Δh in Metern auf dieser Fahrtstrecke ist genau ein Fehler passiert:

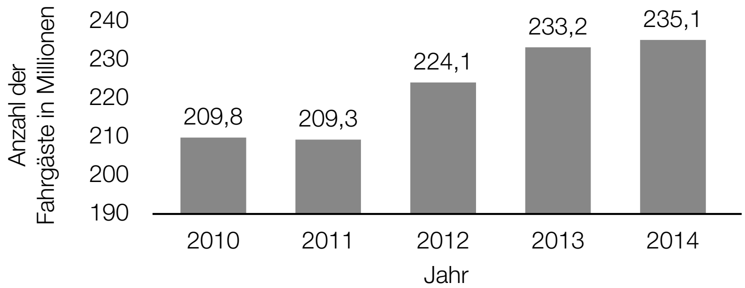
Steigungswinkel: $\alpha = \arctan(0{,}0084) = 0{,}48127\ldots°$

$$\Delta h = \frac{27\,300 \text{ m}}{\sin(\alpha)} = 3\,250\,114{,}6\ldots \text{ m}$$

1) Stellen Sie die Berechnung und das Ergebnis richtig.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Im nachstehenden Diagramm sind die Fahrgastzahlen der Österreichischen Bundesbahnen für die Jahre 2010 bis 2014 dargestellt.



Datenquelle: Agentur für Passagier- und Fahrgastrechte (Hrsg.): *Fahrgastrechte-Statistik Bahn 2014*, 2016, S. 4.
https://www.apf.gv.at/files/1-apf-Homepage/1g-Publikationen/Fahrgastrechtestatistik-2014.pdf [22.11.2018].

1) Berechnen Sie die Spannweite der angegebenen Fahrgastzahlen in Millionen.

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{235{,}1 - 209{,}8}{209{,}8} \approx 0{,}12$$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1) Länge der ursprünglichen Fahrtstrecke in km:
$81{,}83 \cdot \left(2 + \frac{35}{60}\right) = 211{,}394...$

Länge der verkürzten Fahrtstrecke in km:
$211{,}394... - 13{,}7 = 197{,}694...$

mittlere Reisegeschwindigkeit für die verkürzte Fahrt in km/h:
$\frac{197{,}694...}{1{,}75} = 112{,}968...$

Die mittlere Reisegeschwindigkeit für die verkürzte Fahrt beträgt rund 112,97 km/h.

b1) $\Delta h = 27\,300 \text{ m} \cdot \sin(\alpha) = 229{,}3... \text{ m}$

c1) $235{,}1 - 209{,}3 = 25{,}8$

Die Spannweite beträgt 25,8 Millionen Fahrgäste.

c2) Im Jahr 2014 war die Anzahl der Fahrgäste um rund 12 % höher als im Jahr 2010.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge der verkürzten Fahrtstrecke
1 × B2: für die richtige Berechnung der mittleren Reisegeschwindigkeit für die verkürzte Fahrt
b1) 1 × A: für die Richtigstellung mit dem richtigen Ergebnis
c1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Spannweite in Millionen
c2) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sonnenaufgang*

Aufgabennummer: A_284

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Während der Morgendämmerung wird es kontinuierlich heller. Die Beleuchtungsstärke bei klarem Himmel kann an einem bestimmten Ort in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch folgende Exponentialfunktion E beschrieben werden:

$E(t) = 80 \cdot a^t$ mit $-60 \leq t \leq 30$

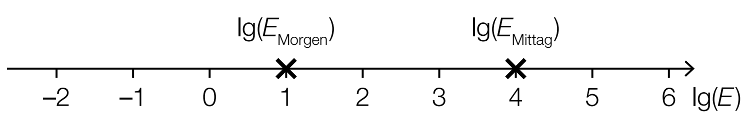
t ... Zeit in min, wobei $t = 0$ der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs ist
$E(t)$ ... Beleuchtungsstärke zur Zeit t in Lux
a ... Parameter

1) Interpretieren Sie die Zahl 80 in der Funktionsgleichung von E im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Beleuchtungsstärke verdoppelt sich alle 5 min.

2) Berechnen Sie den Parameter a.

b) An einem Wintertag wurde die Beleuchtungsstärke E in Lux am Morgen und zu Mittag gemessen. Die dekadischen Logarithmen (Logarithmen zur Basis 10) der beiden Messergebnisse sind nachstehend dargestellt:

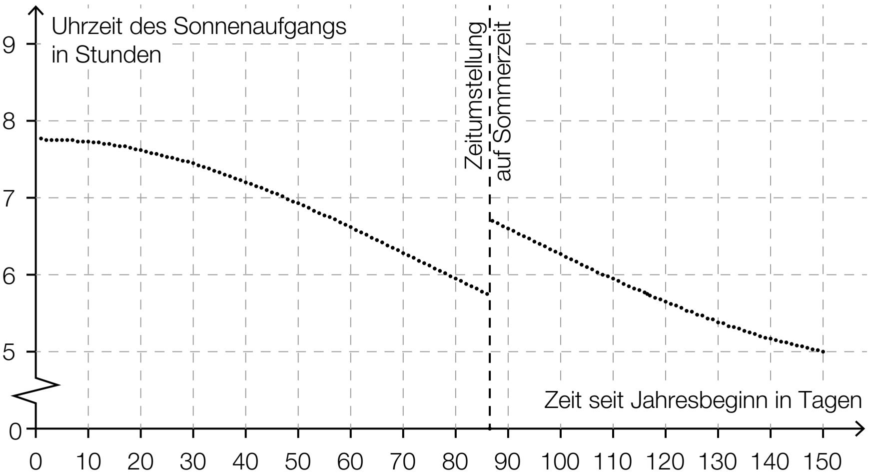


Marco behauptet, die Beleuchtungsstärke E sei an diesem Tag zu Mittag 4-mal so hoch wie am Morgen gewesen.

1) Zeigen Sie, dass Marcos Behauptung falsch ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) In der nachstehenden Grafik ist die jeweilige Uhrzeit des Sonnenaufgangs in Wien für die ersten 150 Tage eines Jahres dargestellt.



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Grafik, wie viele Tage nach der Zeitumstellung der Sonnenaufgang erstmals zu einer früheren Uhrzeit als unmittelbar vor der Zeitumstellung stattfindet.

Im Zeitintervall [0; 40] kann die Uhrzeit des Sonnenaufgangs näherungsweise durch eine quadratische Funktion f modelliert werden.

$f(t) = a \cdot t^2 + c$

t … Zeit seit Jahresbeginn in Tagen
$f(t)$ … Uhrzeit des Sonnenaufgangs am Tag t in Stunden

2) Argumentieren Sie anhand der obigen Grafik, dass der Parameter a dabei negativ sein muss.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Beleuchtungsstärke bei Sonnenaufgang beträgt 80 Lux.

a2) $a^5 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[5]{2} = 1{,}148...$

b1) Mit den konkreten Zahlen folgt: $E_{\text{Morgen}} = 10$ Lux, $E_{\text{Mittag}} = 10\,000$ Lux
Daher war die Beleuchtungsstärke zu Mittag nicht 4-mal so hoch wie am Morgen.

Auch ein allgemeiner Nachweis ist als richtig zu werten.

c1) 31 Tage
Toleranzbereich: [26 Tage; 34 Tage]

c2) Die Datenpunkte im Zeitintervall [0; 40] können durch eine nach unten offene (negativ gekrümmte) Parabel angenähert werden. Daher ist der Parameter a der zugehörigen quadratischen Funktion negativ.

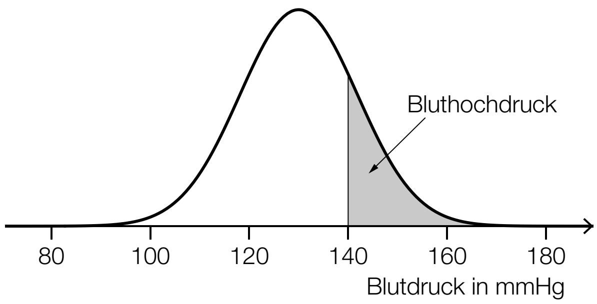
Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Parameters a
b1) 1 × D: für den richtigen Nachweis (allgemein oder anhand der konkreten Zahlen)
c1) 1 × C: für das richtige Ermitteln im Toleranzbereich [26 Tage; 34 Tage]
c2) 1 × D: für die richtige Argumentation

Bluthochdruck bei Erwachsenen

a) Der Blutdruck wird in der Einheit *Millimeter Quecksilbersäule* (mmHg) angegeben. Ab einem (systolischen) Blutdruck von 140 mmHg spricht man von *Bluthochdruck*.

Der Blutdruck der Bevölkerung eines bestimmten Landes ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 130$ mmHg und der Standardabweichung $\sigma = 11{,}9$ mmHg. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Bevölkerung dieses Landes Bluthochdruck haben.
[0/1 P.]

Laut einer Studie der Weltgesundheitsorganisation ist der Blutdruck im Idealfall normalverteilt mit dem Erwartungswert 115 mmHg und einer kleineren Standardabweichung.

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Für den Graphen der Dichtefunktion im Idealfall gilt im Vergleich zum oben dargestellten Graphen: Der Hochpunkt liegt ___①___ und ___②___.

①	
weiter links	☐
weiter rechts	☐
an der gleichen Stelle	☐

②	
höher	☐
niedriger	☐
auf der gleichen Höhe	☐

b) In einem bestimmten Land beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Bluthochdruck hat, p.
Es werden 20 Personen zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt.

1) Kreuzen Sie das Ereignis E an, für dessen Wahrscheinlichkeit gilt:
$P(E) = \binom{20}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{18} + \binom{20}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{19} + \binom{20}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{20}$ *[1 aus 5]*
[0/1 P.]

Mindestens 2 Personen haben Bluthochdruck.	☐
Höchstens 2 Personen haben Bluthochdruck.	☐
Genau 2 Personen haben Bluthochdruck.	☐
Mindestens 2 Personen haben keinen Bluthochdruck.	☐
Höchstens 2 Personen haben keinen Bluthochdruck.	☐

250 Personen werden zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt. Jemand berechnet den Erwartungswert der Anzahl der Personen, die Bluthochdruck haben.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, bei der sich ein Erwartungswert von 55 ergibt.
[0/1 P.]

c) Im Jahr 1975 hatten in einer bestimmten Stadt 40,8 % aller Männer Bluthochdruck. Im Jahr 2015 hatten in dieser Stadt nur noch 25,2 % aller Männer Bluthochdruck.

Jemand argumentiert: „Im Jahr 1975 war die Anzahl der Männer mit Bluthochdruck in dieser Stadt daher sicher größer als jene im Jahr 2015."

1) Begründen Sie, warum diese Argumentation unzulässig ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) X ... Blutdruck in mmHg

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(X \geq 140) = 0{,}200...$

Rund 20 % der Bevölkerung dieses Landes haben Bluthochdruck.

a2)

①	
weiter links	☒

②	
höher	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

b1)

Höchstens 2 Personen haben Bluthochdruck.	☒

b2) $p = \frac{55}{250} = 0{,}22$

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit p.

c1) Um die jeweilige Anzahl der Männer mit Bluthochdruck berechnen zu können, muss man die Anzahl aller Männer in dieser Stadt in den beiden Jahren kennen. Das ist hier nicht der Fall.

c1) Ein Punkt für das richtige Begründen.

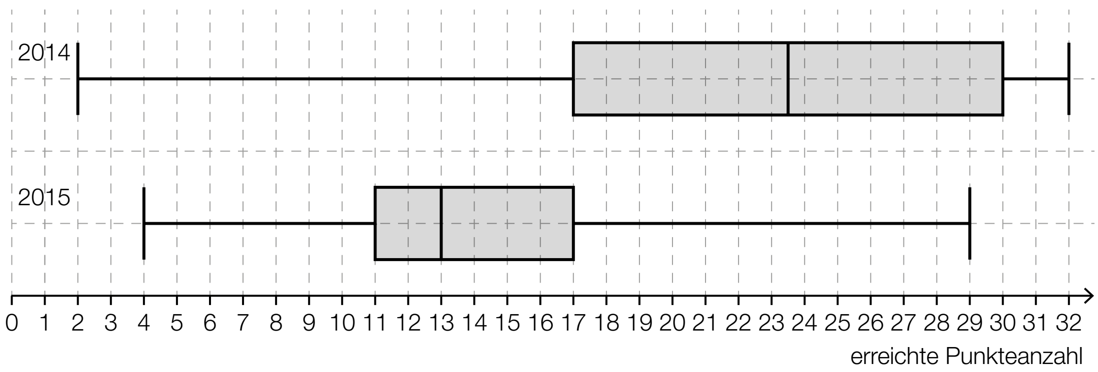
Mathematik-Olympiade*

Aufgabennummer: A_066

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die Mathematik-Olympiade ist ein bekannter Wettbewerb für Schüler/innen.

a) Beim Bundeswettbewerb der Mathematik-Olympiade kann man im ersten Teil maximal 32 Punkte erreichen. Die nachstehenden Boxplots zeigen die erreichte Punkteanzahl der Teilnehmer/innen im Jahr 2014 und im Jahr 2015.



Lara hat in beiden Jahren beim Bundeswettbewerb teilgenommen. Im Jahr 2014 hat sie 29 Punkte erreicht, im Jahr 2015 waren es 18 Punkte.

1) Argumentieren Sie, dass Lara im Jahr 2015 im Vergleich zu den anderen Teilnehmerinnen und Teilnehmern ein besseres Ergebnis als im Jahr 2014 erzielt hat.

2) Kreuzen Sie die <u>nicht</u> zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Interquartilsabstand im Jahr 2014 ist mehr als doppelt so groß wie der Interquartilsabstand im Jahr 2015.	☐
Im Jahr 2015 erreichten mindestens 75 % der Teilnehmer/innen mindestens 17 Punkte.	☐
Die Spannweite im Jahr 2015 ist um rund 17 % kleiner als die Spannweite im Jahr 2014.	☐
Im Jahr 2015 ist der Median um 10,5 Punkte kleiner als im Jahr 2014.	☐
Im Jahr 2015 erreichten mindestens 75 % der Teilnehmer/innen maximal 17 Punkte.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) 8 Jugendliche haben am Bundeswettbewerb der Mathematik-Olympiade teilgenommen. Sie möchten das arithmetische Mittel und die Standardabweichung ihrer erreichten Punkteanzahlen berechnen. Für die Varianz s^2 ergibt sich die nachstehende Berechnung.

$$s^2 = \frac{1}{8} \cdot \left((16-16)^2 + (22-16)^2 + (21-16)^2 + (30-16)^2 + (4-16)^2 + (11-16)^2 + (9-16)^2 + (15-16)^2\right)$$

1) Lesen Sie aus der obigen Berechnung das arithmetische Mittel ab.

c) Die nachstehende Häufigkeitstabelle zeigt die erreichten Punkteanzahlen der 40 Teilnehmer/innen des Bundeswettbewerbs der Mathematik-Olympiade im Jahr 2016.

erreichte Punkteanzahl	Anzahl der Teilnehmer/innen
0 – 8	7
9 – 16	22
17 – 24	9
25 – 32	2

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Teilnehmer/innen mindestens 17 Punkte erreicht haben.

Möglicher Lösungsweg

a1) Lara hat im Jahr 2015 ein besseres Ergebnis erzielt, da sie mit 18 erreichten Punkten unter den besten 25 % der Teilnehmer/innen war und im Jahr 2014 mit 29 erreichten Punkten schlechter als die besten 25 % der Teilnehmer/innen war.

a2)

Im Jahr 2015 erreichten mindestens 75 % der Teilnehmer/innen mindestens 17 Punkte.	☒

b1) arithmetisches Mittel: 16

c1) $\frac{9 + 2}{40} = 0{,}275$

27,5 % der Teilnehmer/innen haben mindestens 17 Punkte erreicht.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × D: für die richtige Argumentation
a2) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen des arithmetischen Mittels
c1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes

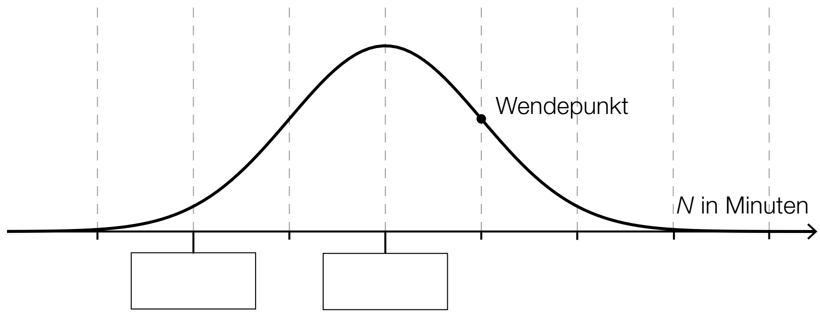
Internet (1)*

Aufgabennummer: A_190

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Studie besagt, dass die durchschnittliche tägliche Internet-Nutzungsdauer N von Jugendlichen annähernd normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt 180 Minuten und die Standardabweichung 20 Minuten. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

– Tragen Sie die fehlenden Zeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.



– Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass für eine zufällig ausgewählte Person der untersuchten Altersgruppe die durchschnittliche tägliche Internet-Nutzungsdauer 200 Minuten oder weniger beträgt.

b) Selina verbringt 25 % ihrer Internet-Nutzungsdauer mit Spielen. Ein Achtel dieser Spielzeit entfällt dabei auf ein bestimmtes Spiel.

– Ermitteln Sie, wie viel Prozent ihrer Internet-Nutzungsdauer Selina für dieses bestimmte Spiel aufwendet.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Eine Umfrage unter Schülerinnen und Schülern einer Schulklasse über die durchschnittliche tägliche Internet-Nutzungsdauer ergab folgendes Ergebnis (gerundet auf halbe Stunden):

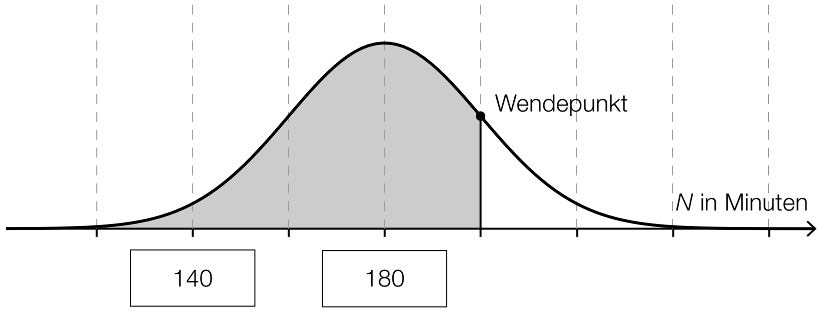
durchschnittliche tägliche Internet-Nutzungsdauer pro Person in Stunden	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	6,0	10,0
Anzahl der Personen	3	4	5	2	4	1	1

– Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der durchschnittlichen täglichen Internet-Nutzungsdauer pro Person aus den gegebenen Daten.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



b) $0{,}25 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}03125$

Sie wendet etwa 3 % ihrer gesamten Internet-Nutzungsdauer für dieses Spiel auf.

c) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 3{,}95$ h
Standardabweichung: $s = 1{,}627...$ h

Auch eine Berechnung der Standardabweichung als $s_{n-1} = 1{,}669...$ h ist als richtig zu werten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Eintragen der beiden fehlenden Zeiten
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der gegebenen Abbildung

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung (s bzw. s_{n-1})

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Der Pauliberg*

Aufgabennummer: A_067

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Pauliberg ist Österreichs jüngster erloschener Vulkan und ein beliebtes Ausflugsziel im Burgenland.

a) Beim Pauliberg befindet sich eine Fundstätte von großen Brocken aus vulkanischem Gestein. Für die nachfolgenden Aufgaben wird vereinfacht von kugelförmigen Brocken ausgegangen.

Ein bestimmter Brocken hat eine Masse von 4,5 t.
Die Dichte des Gesteins beträgt 3 000 kg/m³.
Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V, also $m = \varrho \cdot V$.

1) Berechnen Sie den Durchmesser dieses Brockens.

Von zwei solchen Brocken mit gleicher Dichte und verschiedener Masse kennt man jeweils den Durchmesser:

	Brocken 1	Brocken 2
Masse in kg	m_1	m_2
Durchmesser	1 m	1 dm

2) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

m_1 ist das Zehnfache von m_2.	☐
m_1 und m_2 stehen im Verhältnis 10 000 : 1.	☐
$m_2 = 1000 \cdot \pi \cdot m_1$	☐
m_1 und m_2 stehen im Verhältnis 100 : 1.	☐
$m_1 = 1000 \cdot m_2$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Beim Pauliberg gibt es einen beliebten Wanderweg.

Sarah benötigt für die a Kilometer lange Wanderung b Stunden. Leonie wandert auf der gleichen Strecke, startet aber 1,5 Stunden später. Sarah und Leonie erreichen gleichzeitig das Ziel.

1) Erstellen Sie aus a und b eine Formel zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit v von Leonie in km/h.

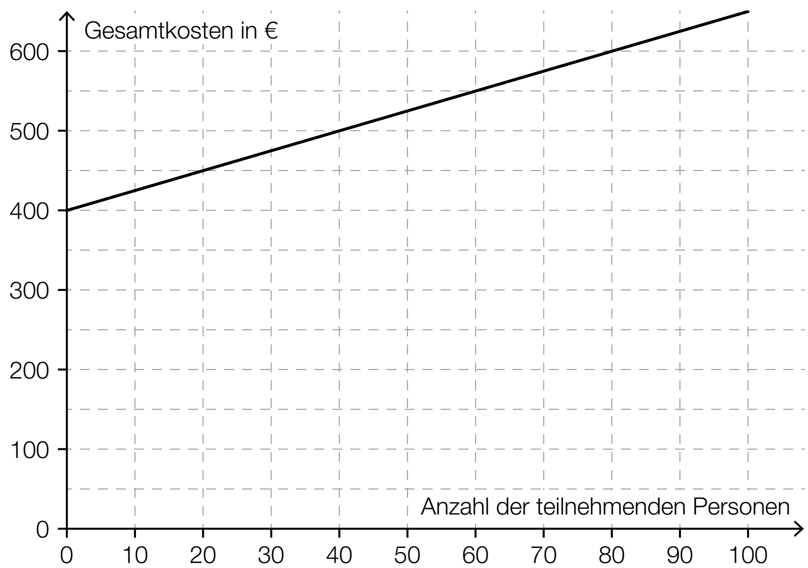
v = ______________________________

c) Unweit des Paulibergs liegt die Burgruine Landsee. Diese kann für private Veranstaltungen gemietet werden.

Die Raummiete für eine Veranstaltung beträgt € 450. Zusätzlich sind pro teilnehmender Person € 1,50 zu bezahlen.
Die Gesamtkosten (in €) sollen in Abhängigkeit von der Anzahl der teilnehmenden Personen x durch eine lineare Kostenfunktion K beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Funktionsgleichung von K.

Der Vermieter schlägt eine neue Preisgestaltung vor. Zur Veranschaulichung wurde das folgende Diagramm erstellt:



2) Ermitteln Sie, ab welcher Anzahl an teilnehmenden Personen die Gesamtkosten mit der neuen Preisgestaltung höher als bisher sind.

Möglicher Lösungsweg

a1) $V = \frac{m}{\varrho} = \frac{4\,500 \text{ kg}}{3\,000 \text{ kg/m}^3} = 1{,}5 \text{ m}^3$

$1{,}5 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad r = 0{,}71...$

$d = 2 \cdot r = 1{,}42...$

Der Durchmesser beträgt rund 1,4 m.

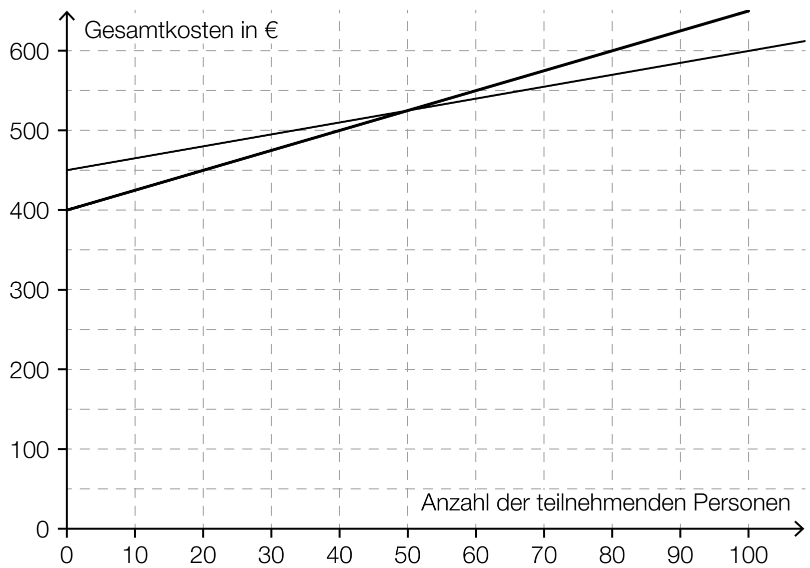
a2)

$m_1 = 1\,000 \cdot m_2$	☒

b1) $v = \frac{a}{b - 1{,}5}$

c1) $K(x) = 1{,}50 \cdot x + 450$

c2)



Bei mehr als 50 teilnehmenden Personen sind die Gesamtkosten mit der neuen Preisgestaltung höher als bisher.
Toleranzbereich: [40; 60]

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers
a2) 1 × A: für das richtige Ankreuzen
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung von v
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung von K
c2) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Anzahl der teilnehmenden Personen
(Toleranzbereich: [40; 60])

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Luftverschmutzung*

Aufgabennummer: A_075

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Belastung der Luft durch Schwefeldioxid entsteht unter anderem durch Verbrennung von Heizöl und Kohle. Als gesetzliche Obergrenze für den Schwefeldioxidgehalt der Luft gilt ein Tagesmittelwert von 120 µg/m³. Im Jahr 1986 wurde dieser Wert am „schwarzen Freitag" in Linz um 857 % überschritten.

1) Berechnen Sie den Tagesmittelwert des Schwefeldioxidgehalts der Luft in µg/m³ an diesem Tag in Linz.

b) In Linz ist die Staubbelastung der Luft im Zeitraum von 1985 bis 1996 stark zurückgegangen. Im Jahr 1985 wurde die Luft in Linz mit 11 000 t Staub belastet. Im Jahr 1996 waren es nur noch 3 000 t.

Im Zuge eines Forschungsprojekts hat man erkannt, dass die Funktion S, die die Staubbelastung $S(t)$ in Tonnen in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren angibt, annähernd linear ist.

1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Daten eine Gleichung dieser linearen Funktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1985.
2) Berechnen Sie den Funktionswert für das Jahr 2001 gemäß diesem Modell.
3) Erklären Sie, warum der berechnete Funktionswert für das Jahr 2001 im gegebenen Sachzusammenhang nicht sinnvoll ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Kohlenstoffmonoxid entsteht bei Verbrennungsprozessen und ist für Menschen giftig.

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß im Jahr t in einer Region kann näherungsweise folgendermaßen beschrieben werden:

$c(t) = 1{,}29 \cdot 0{,}9659^t$

t ... Zeit in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Jahr 1990
$c(t)$ ... Kohlenstoffmonoxidausstoß im Jahr t in Tonnen

1) Kreuzen Sie die auf dieses Modell zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 29 % pro Jahr zu.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt im Laufe der Zeit immer schneller ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt linear ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 3,41 % pro Jahr ab.	☐
Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 96,59 % pro Jahr ab.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $120 \cdot 9{,}57 = 1\,148{,}4$

Am „schwarzen Freitag“ betrug der Tagesmittelwert des Schwefeldioxidgehalts der Luft $1\,148{,}4$ µg/m³.

b1) $S(t) = k \cdot t + S_0$

$k = \dfrac{3\,000 - 11\,000}{11} = -727{,}27...$

$S(t) = -727{,}3 \cdot t + 11\,000$ *(Steigung gerundet)*

b2) $S(16) = -636{,}36...$

b3) Die Staubbelastung kann nicht negativ sein. Daher ist der Funktionswert für das Jahr 2001 im gegebenen Sachzusammenhang nicht sinnvoll.

c1)

Der Kohlenstoffmonoxidausstoß nimmt um 3,41 % pro Jahr ab.	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Tagesmittelwerts
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung
b2) 1 × B: für die richtige Berechnung des Funktionswerts
b3) 1 × D: für die richtige Erklärung
c1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Gewitter*

Aufgabennummer: A_071

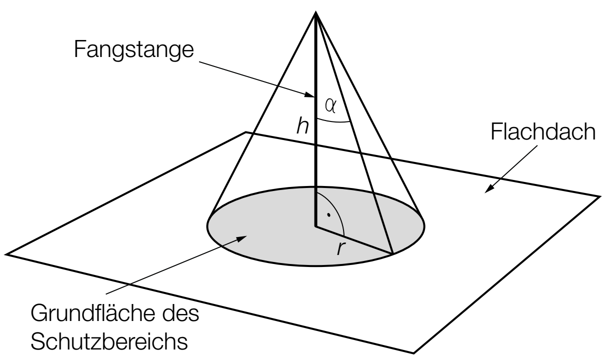
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) In drei verschiedenen Städten – *A*, *B* und *C* – werden am Nachmittag laut Wetterprognose unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten Gewitter auftreten:

Stadt	*A*	*B*	*C*
Wahrscheinlichkeit für ein Gewitter	50 %	80 %	80 %

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftreten wird.

b) Um Gebäude vor Blitzeinschlägen zu schützen, werden Blitzableiter verwendet. Dabei wird eine Metallstange, die sogenannte *Fangstange*, auf dem Gebäude senkrecht montiert. Der höchste Punkt einer solchen Fangstange kann als Spitze eines drehkegelförmigen Schutzbereichs angesehen werden. Alle Objekte, die sich vollständig innerhalb dieses Schutzbereichs befinden, sind vor direkten Blitzeinschlägen geschützt.



h … Höhe der Fangstange
α … Schutzwinkel
r … Radius der Grundfläche des Schutzbereichs

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Radius r aus α und h.

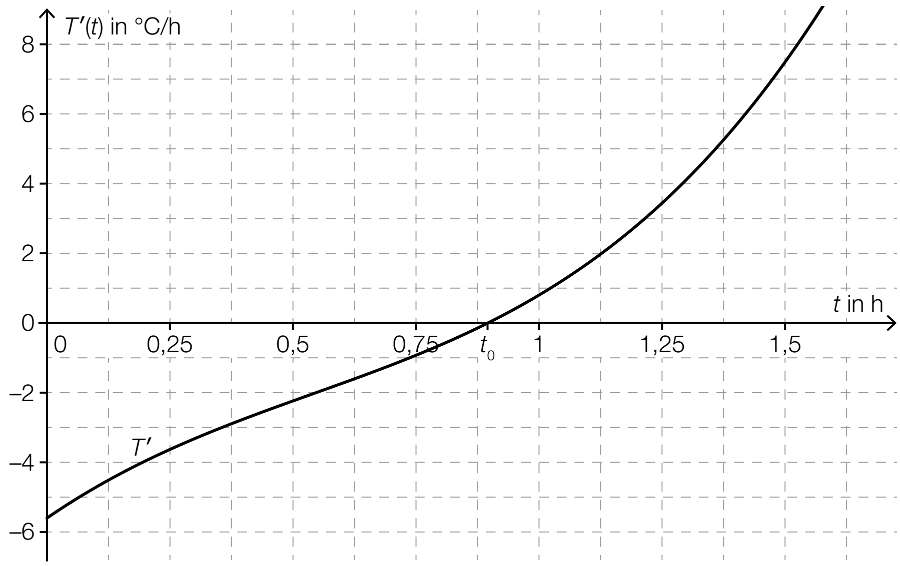
$r =$ ____________________

Auf einem Flachdach ist eine 2 m hohe Fangstange senkrecht montiert. 3 m vom Fußpunkt der Fangstange entfernt steht eine 1,2 m hohe Antenne senkrecht auf dem Flachdach. Der Schutzwinkel beträgt 77°.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich diese Antenne vollständig innerhalb des Schutzbereichs befindet.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Während eines Nachmittags, an dem es ein Gewitter gab, wurde die Veränderung der Temperatur ermittelt. Die Funktion T' beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



t … Zeit seit Beginn der Messung in h
$T'(t)$ … momentane Änderungsrate der Temperatur zur Zeit t in °C/h

Die Funktion T' hat an der Stelle t_0 eine Nullstelle (siehe obige Abbildung).

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Maximumstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Minimumstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Nullstelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Wendestelle.	☐
Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine positive Steigung.	☐

Die absolute Temperaturänderung in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ kann durch das Integral $\int_{t_1}^{t_2} T'(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.

2) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5].

Möglicher Lösungsweg

a1) $1 - 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}68$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftritt, beträgt 68 %.

b1) $r = h \cdot \tan(\alpha)$

b2) $\frac{3}{\tan(77°)} = 0{,}69...$

$2 - 0{,}69... = 1{,}30...$

In einer Entfernung von 3 m von der Fangstange hat der Schutzbereich eine Höhe von rund 1,3 m.
Die 1,2 m hohe Antenne befindet sich daher zur Gänze im Schutzbereich.

Auch eine Überprüfung mithilfe einer exakten Zeichnung ist als richtig zu werten.

c1)

Jede Stammfunktion von T' hat an der Stelle t_0 eine Minimumstelle.	☒

c2) Die dem Integral $\int_{1,25}^{1,5} T'(t)\,dt$ entsprechende Fläche wird von rund 10,5 Kästchen mit einem Flächeninhalt von jeweils 0,125 überdeckt.
Gesamtflächeninhalt: $10{,}5 \cdot 0{,}125 \approx 1{,}3$

Die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5] beträgt rund 1,3 °C.
Toleranzbereich: [1,2 °C; 1,45 °C]

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Radius r
b2) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung
c1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
c2) 1 × B: für das richtige näherungsweise Bestimmen der absoluten Temperaturänderung
(Toleranzbereich: [1,2 °C; 1,45 °C])

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Pelletsheizung*

Aufgabennummer: A_068

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Pellets sind Heizmaterial aus gepressten Sägespänen.

a) Die Gesamtkosten für eine Pelletslieferung setzen sich aus einer fixen Grundgebühr und den Kosten für die Liefermenge zusammen. Dabei ist für jede Tonne Pellets der gleiche Preis zu bezahlen.

Ein Pelletshändler bietet auf seiner Website einen Online-Rechner an. Eine Kundin verwendet diesen Online-Rechner und notiert die Gesamtkosten für drei verschiedene Liefermengen:

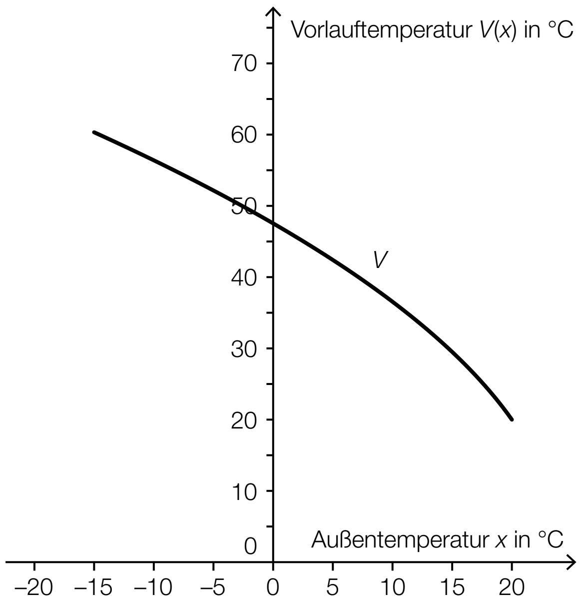
Liefermenge in Tonnen	Gesamtkosten in Euro
2	500
4	960
5,5	1 260

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Online-Rechner die Gesamtkosten wie oben beschrieben berechnet.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Temperatur, auf die das Wasser eines Heizsystems erwärmt wird, bezeichnet man als *Vorlauftemperatur*. Bei einer Pelletsheizung ist die Vorlauftemperatur abhängig von der Außentemperatur.

Den Graphen der zugehörigen Funktion V nennt man *Heizkurve*. In der nachstehenden Abbildung ist eine solche Heizkurve für Außentemperaturen von –15 °C bis 20 °C dargestellt.



1) Kreuzen Sie die auf die Funktion V im Intervall $]0; 20[$ zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$V(x) > 0$ und $V'(x) > 0$	☐
$V'(x) > 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V'(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☐
$V(x) < 0$ und $V''(x) > 0$	☐

Die Funktion V soll im Intervall $[-15; 20]$ durch eine lineare Funktion ersetzt werden. Diese soll an den Randpunkten des Intervalls die gleichen Funktionswerte wie V haben.

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen dieser linearen Funktion ein.

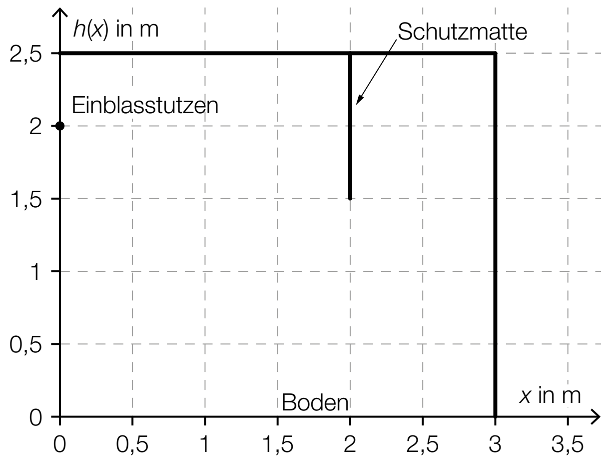
3) Geben Sie an, um wie viel Grad Celsius die Vorlauftemperatur bei einer Außentemperatur von 0 °C geringer ist, wenn anstelle der Funktion V die lineare Funktion verwendet wird.

c) Bei einer Lieferung werden die Pellets in einer Höhe von 2 m durch einen Einblasstutzen in einen Lagerraum waagrecht eingeblasen. Eine aufgehängte Schutzmatte soll dabei verhindern, dass die Pellets brechen, wenn die Einblasgeschwindigkeit zu groß ist. Die Flugbahn eines Pellets kann modellhaft durch den Graphen der folgenden quadratischen Funktion beschrieben werden:

$h(x) = -\frac{5 \cdot x^2}{v_0^2} + 2$

x ... waagrechte Entfernung vom Einblasstutzen in m
$h(x)$ ... Flughöhe eines Pellets über dem Boden bei der Entfernung x in m
v_0 ... Einblasgeschwindigkeit in m/s

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Funktion h für eine Einblasgeschwindigkeit von $v_0 = 4$ m/s ein.



Bei einer anderen Einblasgeschwindigkeit trifft das Pellet gerade noch das untere Ende der 1 m langen Schutzmatte.

2) Bestimmen Sie diese Einblasgeschwindigkeit.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{960 - 500}{4 - 2} = 230$

$\frac{1\,260 - 960}{5{,}5 - 4} = 200$

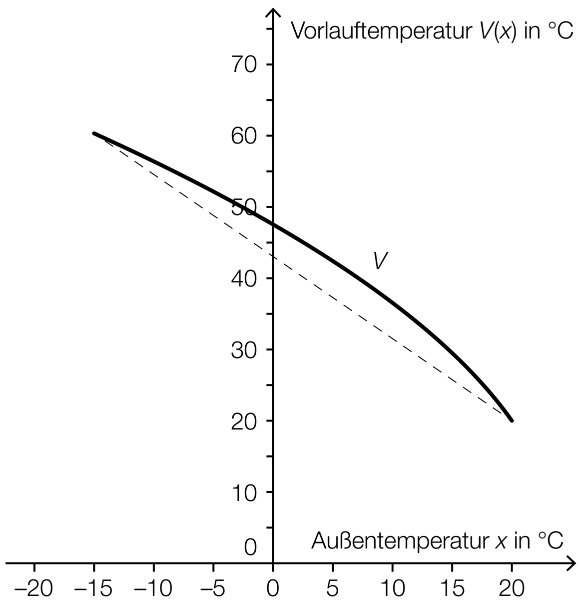
Der Online-Rechner berechnet die Gesamtkosten nicht wie oben beschrieben, weil nicht für jede Liefermenge der gleiche Preis pro Tonne zu bezahlen ist.

Ein anderer richtiger Nachweis ist ebenfalls zulässig.

b1)

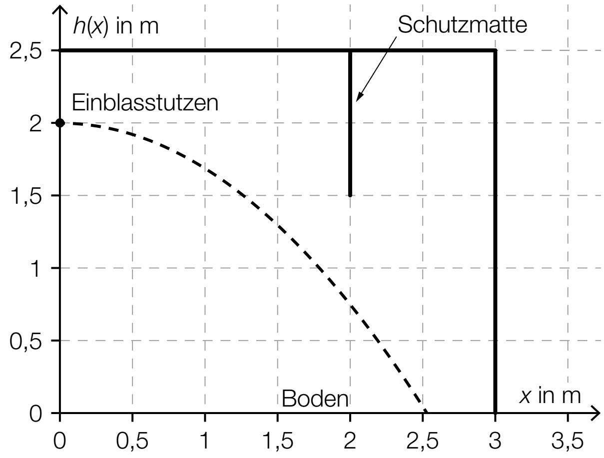
$V'(x) < 0$ und $V''(x) < 0$	☒

b2)



b3) Die Vorlauftemperatur bei einer Außentemperatur von 0 °C ist um rund 5 °C geringer.
Toleranzbereich: [3,5 °C; 6,5 °C]

c1)



c2) Das Pellet trifft gerade noch die Matte, wenn seine Bahn durch den Punkt (2|1,5) verläuft:

$$1{,}5 = -\frac{5 \cdot 2^2}{v_0^2} + 2$$

Lösung mittels Technologieeinsatz:

$v_{0,1} = 6{,}324...$ (*oder* $v_{0,2} = -6{,}324...$)

Bei einer Einblasgeschwindigkeit von 6,32... m/s trifft das Pellet gerade noch das untere Ende der Schutzmatte.

Lösungsschlüssel

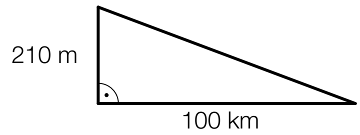
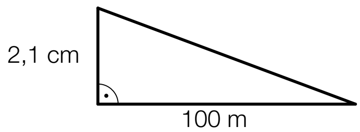
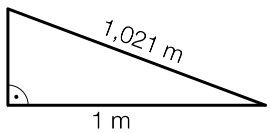
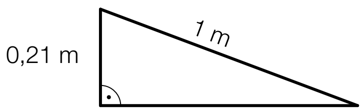
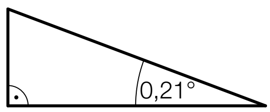
a1) 1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung
b1) 1 × A1: für das richtige Ankreuzen
b2) 1 × A2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der linearen Funktion
b3) 1 × C: für die richtige Angabe der Temperaturdifferenz (Toleranzbereich: [3,5 °C; 6,5 °C])
c1) 1 × B1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Funktion *h*
c2) 1 × B2: für das richtige Bestimmen der Einblasgeschwindigkeit

Trinkwasser

a) Ein Teil des Wiener Trinkwassers wird über die *II. Wiener Hochquellenleitung* aus dem Hochschwabgebiet nach Wien geleitet. Das Gefälle dieser Leitung beträgt durchschnittlich rund 2,1 ‰.

Eine der nachstehenden Abbildungen veranschaulicht ein Gefälle von 2,1 ‰.

1) Kreuzen Sie die zutreffende Abbildung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

Durch die II. Wiener Hochquellenleitung fließen pro Tag durchschnittlich 210 000 m^3 Wasser.

2) Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Wasser durchschnittlich pro Sekunde durch die II. Wiener Hochquellenleitung fließen. *[0/1 P.]*

b) Der pH-Wert des Trinkwassers wird regelmäßig überprüft. Der pH-Wert ist folgendermaßen definiert:

$\text{pH} = -\log_{10}(a)$

a … Wasserstoffionen-Aktivität ($a > 0$)

Der Ausdruck $-\log_{10}(a)$ soll umgeformt werden.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Umformung durch Eintragen in die beiden Kästchen.

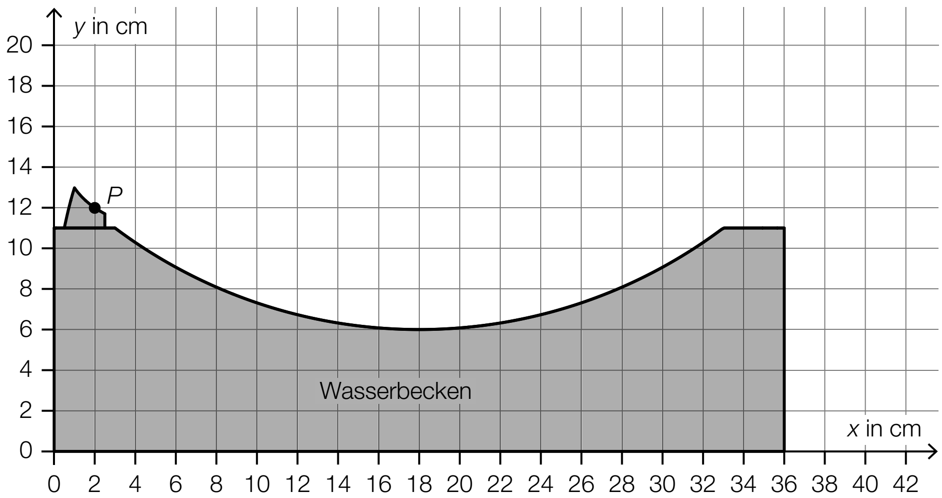
$$-\log_{10}(a) = \log_{10}\left(a^{\square}\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{\square}\right)$$ *[0/1 P.]*

Ein pH-Wert von 6,5 entspricht einer Wasserstoffionen-Aktivität von $10^{-6{,}5}$.
Die Zahl $10^{-6{,}5}$ kann auch in der Form $\sqrt{10^z}$ geschrieben werden, wobei z eine ganze Zahl ist.

2) Geben Sie diese Zahl z an.

$z =$ ____________________ *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist der Querschnitt eines Trinkbrunnens mit Wasserbecken schematisch dargestellt.

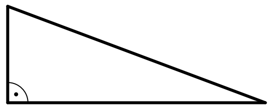


Der Wasserstrahl kann vom Austritt im Punkt P bis zum Auftreffen auf das Wasserbecken näherungsweise durch den Graphen einer quadratischen Funktion f beschrieben werden.

1) Skizzieren Sie den Graphen einer solchen Funktion f vom Austritt bis zum Auftreffen auf das Wasserbecken, wenn gilt: $f'(10) = 0$ und $f''(10) < 0$. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

	☒

a2) 1 Tag = 86 400 s

$\frac{210\,000}{86\,400} = 2{,}43...$

Durch die II. Wiener Hochquellenleitung fließen pro Sekunde durchschnittlich rund 2,4 m³ Wasser.

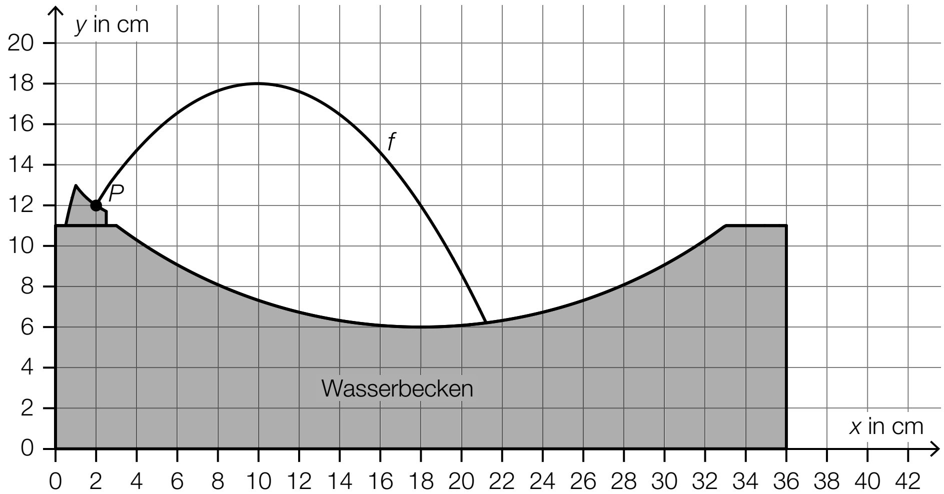
a1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wassermenge.

b1) $-\log_{10}(a) = \log_{10}\left(a^{\boxed{-1}}\right) = \log_{10}\left(\frac{1}{\boxed{a}}\right)$

b2) $z = -13$

b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Umformung.
b2) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Zahl z.

c1)



Der Graph der quadratischen Funktion muss durch den Punkt P *verlaufen und an der Stelle* x = *10 ein lokales Maximum haben.*

c1) Ein Punkt für das richtige Skizzieren des Graphen einer quadratischen Funktion durch den Punkt P mit der lokalen Maximumstelle $x = 10$.

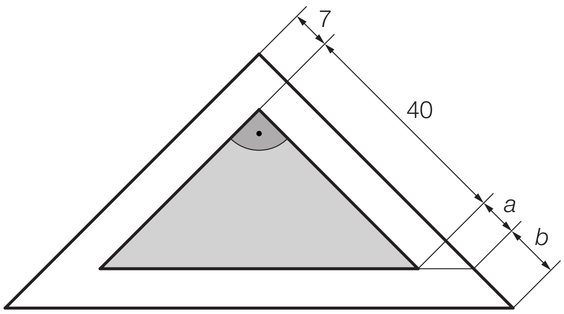
Patchwork

Aufgabennummer: A_072

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Beim Patchwork werden Stoffstücke zusammengenäht und auf diese Weise neue Textilien angefertigt. Ein Handarbeitsgeschäft bietet Patchworkkurse an.

a) Eine Patchworkarbeit enthält gleichschenkelige, rechtwinkelige Stoffdreiecke mit einer Kathetenlänge von 4 cm. Um die Dreiecke zusammennähen zu können, müssen sie jedoch größer zugeschnitten werden. Der zusätzliche Rand ist auf allen Seiten 7 mm breit (siehe nachstehende Abbildung, Maße in Millimetern).



– Weisen Sie nach, dass gilt: $a = 7$ mm und $b = 7 \cdot \sqrt{2}$ mm

– Berechnen Sie Länge der Hypotenuse des zugeschnittenen Stoffdreiecks.

b) Für eine Decke stehen 12 verschiedene Farben zur Auswahl. Die 5 teilnehmenden Personen wählen unabhängig voneinander jeweils eine Farbe aus. (Dabei kann eine Farbe auch von mehreren Personen gewählt werden.)

– Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils dasjenige Ereignis aus A bis D zu, dessen Wahrscheinlichkeit damit berechnet wird. *[2 zu 4]*

$\frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12}$	
$12 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^5$	

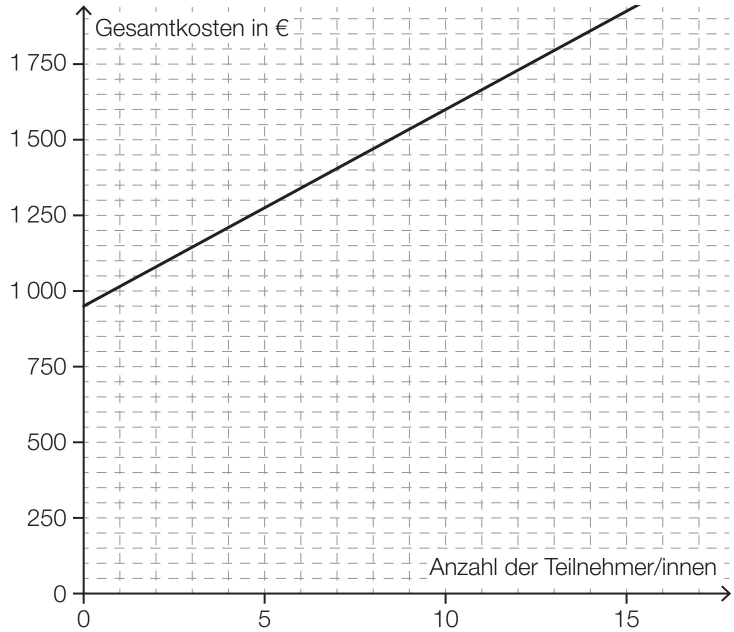
A	Alle Personen wählen unterschiedliche Farben.
B	Alle Personen wählen die gleiche Farbe.
C	Mindestens 2 Personen wählen die gleiche Farbe.
D	Höchstens 2 Personen wählen die gleiche Farbe.

c) Für einen neuen Kursraum werden n Stück Nähmaschinen benötigt. Der Preis einer solchen Maschine beträgt exklusive 20 % Mehrwertsteuer p Euro. Es wird ein Mengenrabatt von r % gewährt.

– Erstellen Sie aus n, p und r eine Formel zur Berechnung der Anschaffungskosten K inklusive Mehrwertsteuer (in Euro).

K = ____

d) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Kostenfunktion für die Abhaltung eines Kurses dargestellt.

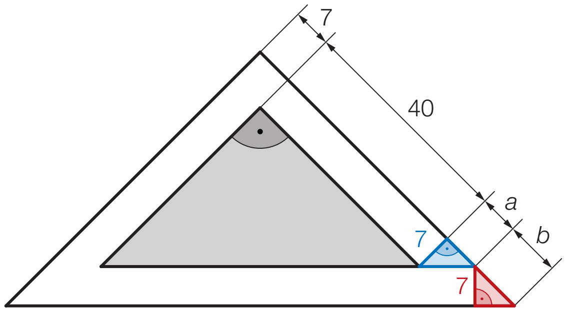


– Ermitteln Sie, welche zusätzlichen Kosten pro teilnehmender Person anfallen.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



Die beiden färbig markierten Dreiecke sind ähnlich zum gesamten Stoffdreieck und daher gleichschenkelig und rechtwinkelig.

Da die Katheten im blauen Dreieck gleich lang sind, ist $a = 7$.

Da die Katheten im roten Dreieck beide 7 mm lang sind, gilt für die Hypotenuse b:
$b = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{2 \cdot (7 + 40 + 7 + 7 \cdot \sqrt{2})^2} = 90{,}3\ldots$
Die Hypotenuse des zugeschnittenen Stoffdreiecks ist rund 9,0 cm lang.

b)

$\frac{12}{12} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{12}$	A
$12 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^5$	B

A	Alle Personen wählen unterschiedliche Farben.
B	Alle Personen wählen die gleiche Farbe.
C	Mindestens 2 Personen wählen die gleiche Farbe.
D	Höchstens 2 Personen wählen die gleiche Farbe.

c) $K = n \cdot p \cdot 1{,}2 \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$

d) Ermitteln der Steigung der Funktion mithilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks: $\frac{650}{10} = 65$
Pro teilnehmender Person fallen zusätzliche Kosten in Höhe von € 65 an.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 5 Stochastik
c) 1 Zahlen und Maße
d) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) schwer	b) 1
c) leicht	c) 1
d) leicht	d) 1

Thema: Alltag

Quellen: —

Das perfekte Ei

a) Der österreichische Physiker Werner Gruber entwickelte folgende Formel für das Kochen von Eiern:

$$t = 0{,}0016 \cdot d^2 \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot (T_S - T_A)}{T_S - T_{Ei}}\right)$$

t … Kochzeit des Eies in min
T_A … Ausgangstemperatur des Eies in °C
T_S … Siedetemperatur des Wassers in °C
T_{Ei} … gewünschte Innentemperatur des Eies in °C
d … Durchmesser des Eies an der dicksten Stelle in mm

Die Siedetemperatur des Wassers nimmt mit steigender Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel) ab. Eine Höhenzunahme um 300 m bewirkt dabei eine Abnahme der Siedetemperatur um jeweils 1 °C.

1) Ergänzen Sie die fehlende Zahl in der nachstehenden Formel zur Berechnung der Siedetemperatur.

$$T_S = \boxed{} \cdot h + 100$$

h … Seehöhe in m

Ein bestimmtes Ei hat an der dicksten Stelle einen Durchmesser von 44 mm und eine Ausgangstemperatur von 5 °C. Es soll auf einer Seehöhe von 160 m eine Innentemperatur von 82 °C erreichen.

2) Berechnen Sie die dafür erforderliche Kochzeit in Minuten und Sekunden.

In der Formel zur Berechnung der Kochzeit kommt der nachstehende Ausdruck vor:

$\ln\left(\frac{2 \cdot (T_S - T_A)}{T_S - T_{Ei}}\right)$

3) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der zu diesem Ausdruck äquivalent (gleichwertig) ist. *[1 aus 5]*

$\ln\left(\frac{2 \cdot T_A}{T_{Ei}}\right)$	☐
$2 \cdot \ln\left(\frac{T_S - T_A}{T_S - T_{Ei}}\right)$	☐
$\ln(2) + \frac{\ln(T_S)}{\ln(T_A)} - \frac{\ln(T_S)}{\ln(T_{Ei})}$	☐
$\ln(2) + \ln(T_S - T_A) - \ln(T_S - T_{Ei})$	☐
$\ln(2) + \ln(T_S) - \ln(T_A) - \ln(T_S) + \ln(T_{Ei})$	☐

b) Im Kühlschrank liegt eine Packung mit 10 Eiern, deren Mindesthaltbarkeitsdatum stark überschritten ist. Aus langjähriger Erfahrung weiß man, dass jedes dieser Eier mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % verdorben ist.

1) Stellen Sie ein Formel zur Berechnung der folgenden Wahrscheinlichkeit auf:

P(„es sind genau a Eier der 10er-Packung verdorben“) = ______________________________

Möglicher Lösungsweg

a1) $T_S = \boxed{-\frac{1}{300}} \cdot h + 100$

a2) $T_S = -\frac{1}{300} \cdot 160 + 100 = 99{,}46\ldots$

$t = 0{,}0016 \cdot 44^2 \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot (99{,}46\ldots - 5)}{99{,}46\ldots - 82}\right) = 7{,}37\ldots$

Die Kochzeit beträgt etwa 7 Minuten und 23 Sekunden.

a3)

$\ln(2) + \ln(T_S - T_A) - \ln(T_S - T_{Ei})$	☒

b1) $P(\text{„es sind genau } a \text{ Eier der 10er-Packung verdorben“}) = \binom{10}{a} \cdot 0{,}15^a \cdot 0{,}85^{10-a}$

Basketball

Aufgabennummer: A_081

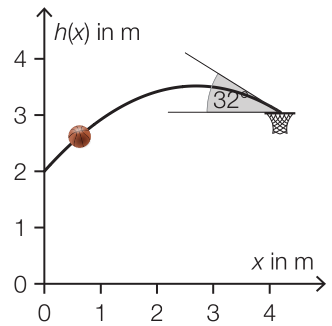
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Beim Basketball versuchen die Spieler/innen, den Ball in den Korb der gegnerischen Mannschaft zu werfen.

a) Beim Freiwurf wird der Ball von der Freiwurflinie aus geworfen. Die Mitte des Korbrings hat von der Freiwurflinie eine waagrechte Entfernung von 4,191 m und ist in 3,05 m Höhe montiert. Die Flugbahn des Basketballs bei einem bestimmten Freiwurf kann annähernd durch die Funktion h beschrieben werden:

$h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

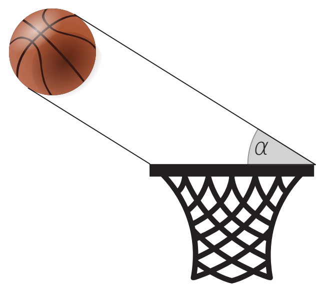
x … waagrechte Entfernung von der Freiwurflinie in m
$h(x)$ … Höhe des Balles in der Entfernung x in m



Der Ball wird aus 2 m Höhe geworfen und fällt mit einem Einfallswinkel von 32° genau durch die Mitte des Korbrings (siehe nebenstehende Abbildung).

– Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

b) Bei besonders gelungenen Würfen fällt der Ball ohne Berührung des Korbrings ins Netz. Der kleinste Einfallswinkel α, bei dem dies möglich ist, ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.
(Die „Dicke“ des kreisförmigen Korbrings wird bei dieser Überlegung vernachlässigt.)



– Erstellen Sie aus dem Durchmesser d des Balles und dem Durchmesser D des Korbrings eine Formel zur Berechnung von α.

$\alpha =$ ____________________________________

c) Laut Vorgabe des Weltbasketballverbands FIBA darf bei Wettkämpfen der Umfang des (kugelförmigen) Balles nicht weniger als 749 mm und nicht mehr als 780 mm betragen.

– Berechnen Sie, um wie viel dm^3 sich das Volumen des größten erlaubten Balles von jenem des kleinsten erlaubten Balles unterscheidet.

d) Auf der Basis von statistischen Aufzeichnungen geht man davon aus, dass ein bestimmter Spieler bei jedem Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 87,7 % in den Korb trifft. Der Spieler wettet, dass er bei 10 Freiwürfen mindestens 9 Treffer erzielt.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler die Wette verliert.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

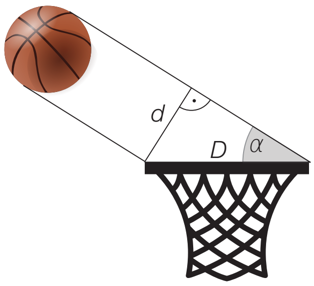
Möglicher Lösungsweg

a) I: $h(0) = 2$
II: $h(4{,}191) = 3{,}05$
III: $h'(4{,}191) = -\tan(32°)$

oder:

I: $c = 2$
II: $4{,}191^2 \cdot a + 4{,}191 \cdot b + c = 3{,}05$
III: $2 \cdot 4{,}191 \cdot a + b = -\tan(32°)$

b)



$\alpha = \arcsin\left(\frac{d}{D}\right)$

c) $u = 2 \cdot \pi \cdot r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{u}{2 \cdot \pi}$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{u}{2 \cdot \pi}\right)^3$

$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{7{,}8}{2 \cdot \pi}\right)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{7{,}49}{2 \cdot \pi}\right)^3 = 0{,}918\ldots$

Die Volumina unterscheiden sich um rund 0,92 dm^3.

d) X … Anzahl der Treffer

Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = 0{,}877$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \leq 8) = 0{,}3533\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 35,3 %.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 1
c) mittel	c) 1
d) mittel	d) 1

Thema: Sport

Quelle: NBA.com

Immobilienmarkt

a) In zwei Wohnblöcken wurden die Nutzflächen der Wohnungen vermessen:

Wohnblock 1

Nutzfläche	Anzahl der Wohnungen
45 m²	13
60 m²	13
80 m²	7
95 m²	16
150 m²	4

Wohnblock 2

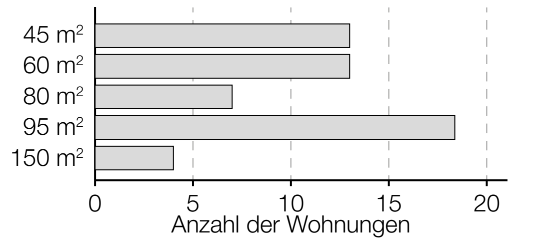
Nutzfläche	Anzahl der Wohnungen
45 m²	5
60 m²	10
80 m²	10
95 m²	3
150 m²	2

Diese Daten können auf unterschiedliche Arten grafisch dargestellt werden.

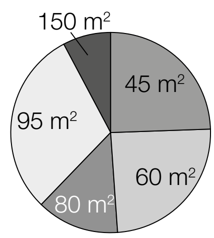
1) Ordnen Sie den beiden Wohnblöcken jeweils die passende grafische Darstellung aus A bis D zu.

Wohnblock 1	
Wohnblock 2	

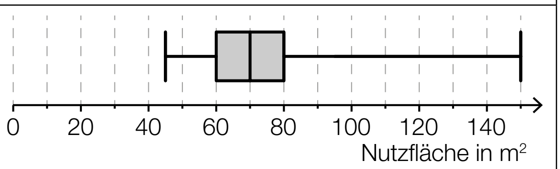
A



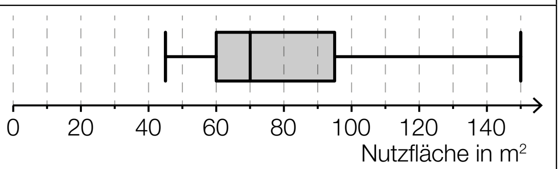
B



C



D



2) Berechnen Sie für den Wohnblock 1 das arithmetische Mittel der Nutzflächen.

b) In einer Wohnungsanzeige ist der Grundrissplan einer Wohnung abgebildet. Dieser wurde im Maßstab 1 : m angefertigt. Ein rechteckiger Raum dieser Wohnung hat in diesem Plan eine Länge von a cm und eine Breite von b cm.

1) Stellen Sie mithilfe von a, b und m eine Formel zur Berechnung des tatsächlichen Flächeninhalts A dieses Raums in m² auf.

A = ____

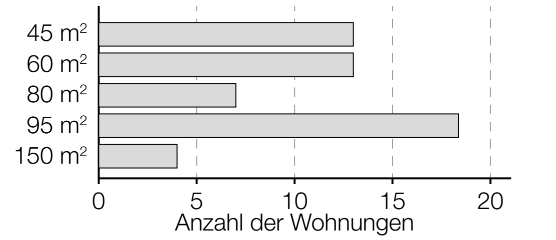
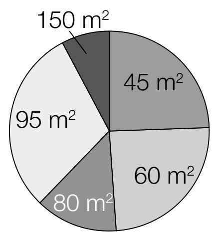
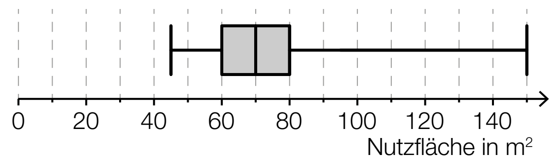
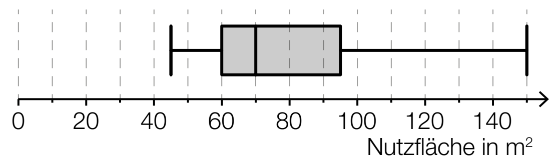
c) Die Miete für ein Büro beträgt 1.350 Euro pro Monat. Dieser Betrag soll folgendermaßen auf 4 Mieterinnen aufgeteilt werden:
Mieterin B zahlt ein Drittel des Betrags von Mieterin A. Mieterin C zahlt um 50 Euro mehr als Mieterin A. Mieterin D zahlt die Hälfte des Betrags von Mieterin C.

1) Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung des Betrags von Mieterin A auf.
2) Berechnen Sie den Betrag von Mieterin A.

Möglicher Lösungsweg

a1)

Wohnblock 1	B
Wohnblock 2	C

A	
B	
C	
D	

a2) $\frac{45 \cdot 13 + 60 \cdot 13 + 80 \cdot 7 + 95 \cdot 16 + 150 \cdot 4}{13 + 13 + 7 + 16 + 4} = \frac{4\,045}{53} = 76{,}32...$

Das arithmetische Mittel der Nutzflächen im Wohnblock 1 beträgt rund 76,3 m^2.

b1) $A = \frac{a \cdot b \cdot m^2}{10\,000}$

c1) x … Betrag von Mieterin A in Euro

$x + \frac{x}{3} + x + 50 + \frac{x + 50}{2} = 1\,350$

c2) $x = 450$

Der Betrag von Mieterin A beläuft sich auf 450 Euro.

Erwärmung von Substanzen

Aufgabennummer: A_096

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Eine Substanz wird aus dem Kühlschrank (Temperatur T_1) genommen und in einen Raum mit der Umgebungstemperatur T_2 gebracht. Der zeitliche Verlauf der Temperatur dieser Substanz kann näherungsweise durch die Funktion T beschrieben werden:

$T(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$ mit $T_2 > T_1$

t … Zeit seit der Entnahme aus dem Kühlschrank in min
$T(t)$ … Temperatur zur Zeit t in °C

a) – Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils die zutreffenden Eigenschaften aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$(T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$	
$T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$	

A	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer größer. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert T_2. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl 0.
B	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer kleiner. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert 0. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl T_1.
C	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer größer. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert T_1. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl T_2.
D	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer kleiner. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert $T_2 - T_1$. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl 0.

b) In der folgenden Berechnung wurde ein Fehler gemacht:

$T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t = T_2 - T_2 + T_1 \cdot 0{,}94^t = T_1 \cdot 0{,}94^t$

– Erklären Sie, welcher Fehler gemacht wurde.

c) Die Substanz muss bei einer Temperatur von 13 °C weiterverarbeitet werden.

– Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis die Substanz nach Entnahme aus dem Kühlschrank diese Temperatur erreicht hat, wenn $T_1 = 6$ °C und $T_2 = 24$ °C beträgt.

d) Die Funktion T kann auch in der folgenden Form angegeben werden:

$T(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

– Berechnen Sie λ.

– Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der die 1. Ableitung von T richtig angibt. *[1 aus 5]*

$T'(t) = \lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☐
$T'(t) = -\lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☐
$T'(t) = -(T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☐
$T'(t) = -\lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t - 1}$	☐
$T'(t) = \lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t - 1}$	☐

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Ausdrucks $T'(5)$ im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

e) Ergänzen Sie die fehlende Zahl in der nachstehenden Funktionsgleichung so, dass die Funktion T_{neu} einen Erwärmungsvorgang beschreibt, der langsamer verläuft als der durch die Funktion T beschriebene.

$T_{neu}(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot \boxed{}^{\,t}$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a)

$(T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$	D
$T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0{,}94^t$	C

A	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer größer. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert T_2. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl 0.
B	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer kleiner. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert 0. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl T_1.
C	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer größer. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert T_1. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl T_2.
D	Der Ausdruck ist für alle $t \in \mathbb{R}^+$ positiv. Der Ausdruck wird mit zunehmender Zeit t immer kleiner. Für $t = 0$ hat der Ausdruck den Wert $T_2 - T_1$. Für $t \to \infty$ nähert sich der Ausdruck der Zahl 0.

b) Die Regel „Punkt vor Strich“ wurde nicht beachtet. Das Weglassen der Klammer im ersten Umformungsschritt ist nicht zulässig.

c) $T(t) = 24 - 18 \cdot 0{,}94^t$

$24 - 18 \cdot 0{,}94^t = 13 \quad \Rightarrow \quad t = 7{,}9\ldots$

Nach rund 8 Minuten hat sich die Substanz auf 13 °C erwärmt.

d) $e^{-\lambda \cdot t} = 0{,}94^t \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda} = 0{,}94 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\ln(0{,}94) = 0{,}0618\ldots$

$T'(t) = \lambda \cdot (T_2 - T_1) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$	☒

$T'(5)$ ist die momentane Änderungsrate der Temperatur (in °C/min) 5 Minuten nach der Entnahme der Substanz aus dem Kühlschrank.

e) Jede Zahl aus dem Intervall]0,94; 1[ist richtig.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) 4 Analysis
e) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) —
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 2 Algebra und Geometrie
e) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) C Interpretieren und Dokumentieren
e) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) B Operieren und Technologieeinsatz
e) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 1
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 1
d) mittel	d) 3
e) mittel	e) 1

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Schiefe Türme

Aufgabennummer: A_112

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Einer Legende zufolge soll Galileo Galilei am *Schiefen Turm von Pisa* Fallversuche durchgeführt haben.
Der beim freien Fall zurückgelegte Weg einer Kugel kann näherungsweise mit der Funktion s beschrieben werden:

$s(t) = 5 \cdot t^2$

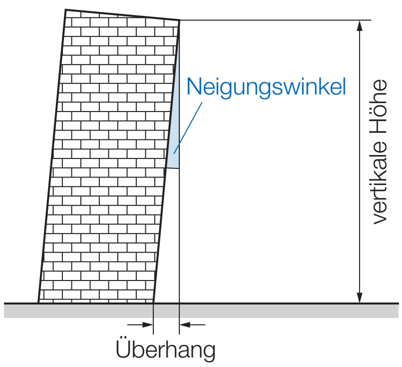
t … Zeit ab dem Loslassen der Kugel in s
$s(t)$ … bis zur Zeit t zurückgelegter Weg in m

Eine Kugel wird aus 55 m Höhe fallen gelassen. Die Funktion h beschreibt die Höhe $h(t)$ der Kugel über dem Boden (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden).

– Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h.

– Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Kugel beim Aufprall auf den Boden.

b) Der *Schiefe Turm von Suurhusen* ist ein Kirchturm in Ostfriesland. Er hat eine vertikale Höhe von 27,37 m und einen Überhang von 2,47 m.
Der *Schiefe Turm von Pisa* hat einen Neigungswinkel von rund 4°.



– Ermitteln Sie, welcher der beiden Türme einen größeren Neigungswinkel aufweist.

c) Im Vermessungswesen werden Winkel manchmal in der Einheit Gon gemessen.
Dabei gilt: 400 gon = 360°

Der *Schiefe Turm von Dausenau* weist eine Neigung von 5,8 gon auf.

– Geben Sie diese Neigung in der Einheit Grad (°) an.

– Ergänzen Sie die fehlende Zahl in der nachstehenden Umrechnungsvorschrift, mit der von der Einheit Gon in das Bogenmaß umgerechnet werden kann.

$1 \text{ gon} = \frac{\pi}{\boxed{}} \text{ rad}$

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $h(t) = -5 \cdot t^2 + 55$

Zeitpunkt des Aufpralls: $5 \cdot t^2 = 55 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{11} = 3{,}3166\ldots$
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t: $v(t) = s'(t) = 10 \cdot t$
Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Aufpralls: $v(3{,}3166\ldots) = 33{,}166\ldots$
Die Geschwindigkeit der Kugel beim Aufprall auf den Boden beträgt rund 33,17 m/s.

b) Neigungswinkel des Schiefen Turms von Suurhusen:
$\arctan\left(\frac{2{,}47}{27{,}37}\right) = 5{,}1\ldots°$

Der Schiefe Turm von Suurhusen weist einen größeren Neigungswinkel auf als der Schiefe Turm von Pisa.

c) $5{,}8 \text{ gon} = 5{,}8 \cdot \frac{360°}{400} = 5{,}22°$

$1 \text{ gon} = \frac{\pi}{\boxed{200}} \text{ rad}$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 4 Analysis
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

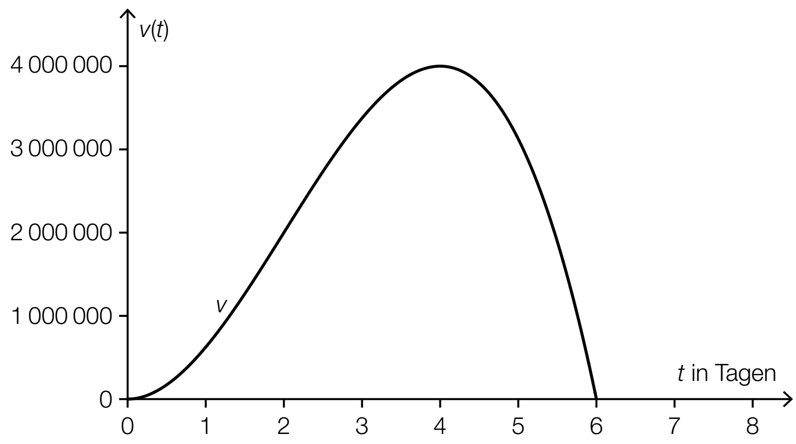
Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) leicht	b) 1
c) leicht	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Virusinfektion

Die Anzahl der Viren in 1 ml Blut im Verlauf einer leichten Viruserkrankung lässt sich näherungsweise durch die Funktion *v* beschreiben.



t … Zeit seit Beginn der Erkrankung in Tagen
$v(t)$ … Anzahl der Viren in 1 ml Blut zur Zeit *t*

a) Die Gleichung $v(t) = 3 \cdot 10^6$ hat die positiven Lösungen t_1 und t_2 (mit $t_1 < t_2$).

1) Markieren Sie in der obigen Abbildung die Lösungen t_1 und t_2.
2) Interpretieren Sie t_1 und t_2 im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Die Funktion *v* ist eine Polynomfunktion.

1) Begründen Sie unter Bezugnahme auf die obige Abbildung, warum *v* mindestens den Grad 3 haben muss.

c) Die Funktion *v* kann in folgender Form angegeben werden: $v(t) = a \cdot (6 - t) \cdot t^2$

Es gilt: $v'(t_3) = 0$ und $v''(t_3) < 0$

1) Kennzeichnen Sie t_3 in der obigen Abbildung.

Jemand behauptet: Die Koordinaten des Wendepunkts von *v* hängen nicht vom Faktor *a* ab.

2) Beurteilen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung.

d) Die Funktion v kann in folgender Form angegeben werden:

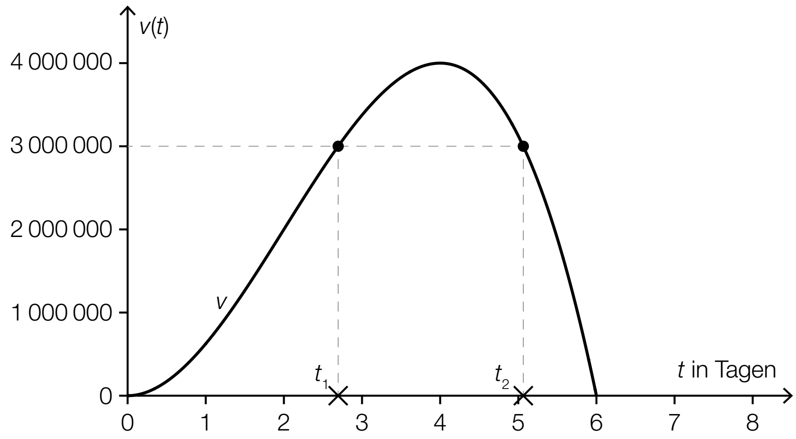
$v(t) = a \cdot (6 - t) \cdot t^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

Nach 4 Tagen befinden sich 4 Millionen Viren in 1 ml Blut.

1) Berechnen Sie den Parameter a.

Möglicher Lösungsweg

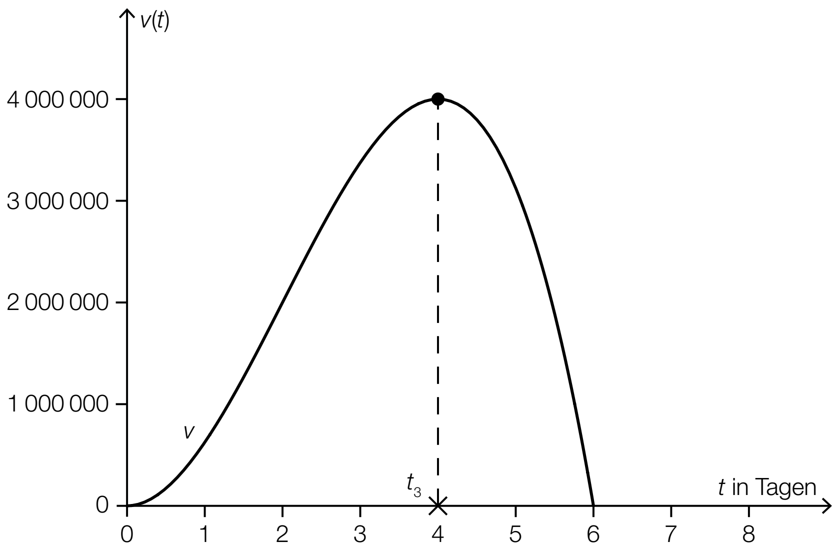
a1)



a2) t_1 und t_2 sind diejenigen Zeitpunkte, zu denen in 1 ml Blut 3 Millionen Viren enthalten sind.

b1) v hat eine Wendestelle. Polynomfunktionen vom Grad 1 und vom Grad 2 haben jedoch keine Wendestellen. Daher muss v mindestens den Grad 3 haben.

c1)



c2) $v(t) = a \cdot (6 - t) \cdot t^2 = 6 \cdot a \cdot t^2 - a \cdot t^3$
$v''(t) = 12 \cdot a - 6 \cdot a \cdot t$

Die Gleichung $v''(t_w) = 0$ kann durch den Faktor a dividiert werden, daher hängt die Stelle des Wendepunkts nicht von a ab. Der Funktionswert ergibt sich durch $v(t_w)$ und hängt daher von a ab.

d1) $v(4) = 4 \cdot 10^6$
$a \cdot (6 - 4) \cdot 4^2 = 4 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad a = 125\,000$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

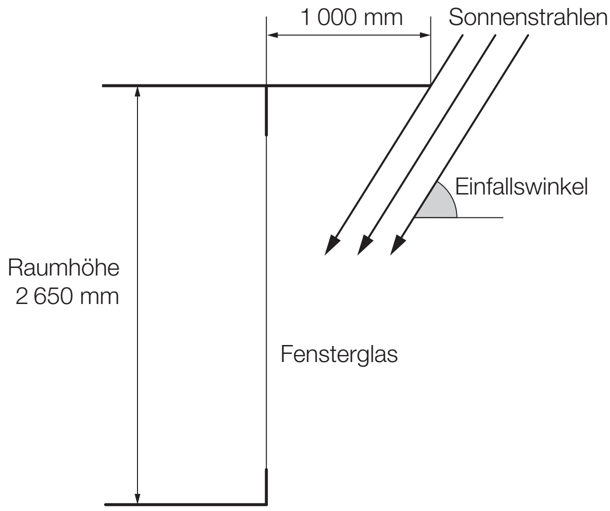
Lichtverhältnisse

Aufgabennummer: A_118

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

In verschiedenen Situationen werden unterschiedliche Lichtverhältnisse benötigt.

a) Die Decke des Untergeschoßes eines Hauses wird um 1 000 mm nach vorne gezogen, um den unteren Wohnungsbereich zu beschatten (siehe nachstehende Abbildung).



Die Sonnenstrahlen haben zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Einfallswinkel von 65,2°.

– Berechnen Sie, wie weit die Sonne unter diesen Bedingungen in den Raum hineinstrahlt.

b) Im Zusammenhang mit Beleuchtung können manche Sachverhalte durch exponentielle Modelle beschrieben werden: beim Durchdringen von Glas nimmt die Lichtintensität exponentiell ab; die Menge an künstlichen Lichtquellen hat in der Vergangenheit annähernd exponentiell zugenommen; …

– Ordnen Sie den beiden exponentiellen Modellen jeweils die passende Funktionsgleichung aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

exponentielles Wachstum	
exponentielle Abnahme	

A	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$
B	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x}$
C	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$
D	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

c) Die Beleuchtungsstärke an einem bestimmten Ort kann durch die nachstehende Formel berechnet werden.

$$E = \frac{I}{r^2}$$

E … Beleuchtungsstärke in Lux
I … Lichtstärke der Lichtquelle in Candela
r … Entfernung zur Lichtquelle in m

Ein Buch befindet sich in r Metern Entfernung von der Lichtquelle.

– Argumentieren Sie, wie sich die Beleuchtungsstärke verändert, wenn man die Entfernung verdoppelt.

Die Entfernung des Buches zur Lichtquelle wird um a % von r vergrößert. Die Lichtstärke der Lichtquelle bleibt unverändert. Die Beleuchtungsstärke an der neuen Position des Buches ist E_{neu}.

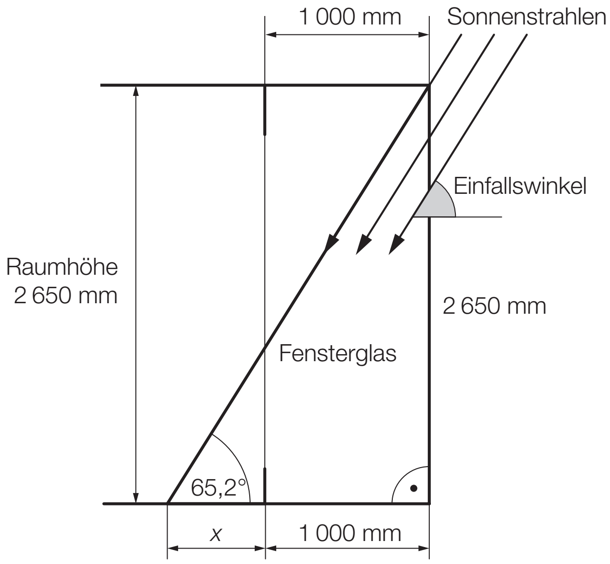
– Stellen Sie aus I, r und a eine Formel zur Berechnung von E_{neu} auf.

E_{neu} = ____

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)



$$\tan(65{,}2°) = \frac{2\,650}{x + 1\,000} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\,650}{\tan(65{,}2°)} - 1\,000 = 224{,}4\ldots$$

Die Sonne strahlt rund 224 mm in den Raum hinein.

b)

exponentielles Wachstum	C
exponentielle Abnahme	B

A	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{x}}$
B	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x}$
C	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-x}$
D	$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$

c) Bei einer Verdoppelung der Entfernung viertelt sich die Beleuchtungsstärke, da die Beleuchtungsstärke indirekt proportional zum Quadrat der Entfernung ist.

$$E_{neu} = \frac{I}{\left(r + \frac{a}{100} \cdot r\right)^2}$$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) A Modellieren und Transferieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 1
c) mittel	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Körpermaße von Föten und Neugeborenen

Aufgabennummer: A_121

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Die durchschnittliche Größe und die durchschnittliche Masse von menschlichen Föten und Babys wurden statistisch erfasst.

a) Die Länge eines Fötus (vom Scheitel bis zum Steiß) kann für einen bestimmten Zeitraum während der Schwangerschaft näherungsweise durch die Funktion L beschrieben werden:

$L(t) = 1{,}3 \cdot t - 9{,}8$ mit $8 \leq t \leq 20$

t … Zeit seit Beginn der Schwangerschaft in Wochen
$L(t)$ … Länge des Fötus zur Zeit t in cm

– Interpretieren Sie die Bedeutung des Koeffizienten 1,3 im gegebenen Sachzusammenhang.

Der Ausdruck $\frac{L(t+1) - L(t)}{L(t)}$ gibt die relative Längenzunahme des Fötus im Zeitintervall $[t; t + 1]$ an (für $8 \leq t \leq 19$).

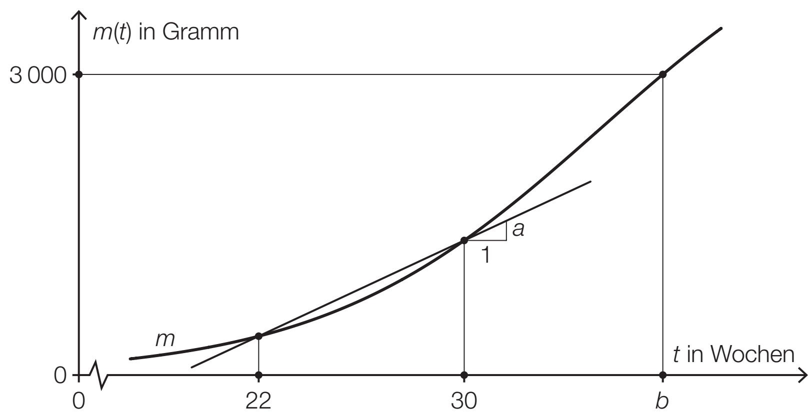
– Argumentieren Sie, dass diese relative Längenzunahme mit zunehmender Zeit t immer kleiner wird.

b) Die Masse eines Fötus kann für einen bestimmten Zeitraum während der Schwangerschaft näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$m(t) = \frac{4\,900}{1 + 681 \cdot e^{-0{,}185 \cdot t}}$ mit $17 \leq t \leq 40$

t … Zeit seit Beginn der Schwangerschaft in Wochen
$m(t)$ … Masse des Fötus zur Zeit t in Gramm

In der nachstehenden Abbildung des Graphen von m sind die zwei Größen a und b veranschaulicht.



– Berechnen Sie a.

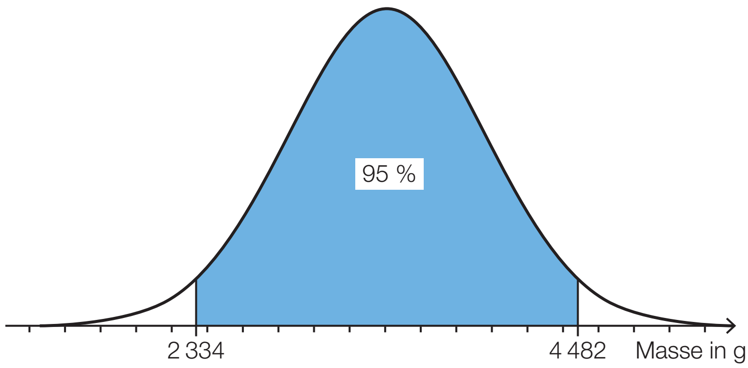
– Interpretieren Sie den Wert von a im gegebenen Sachzusammenhang.

– Berechnen Sie b.

c) Die Masse von in Österreich geborenen Mädchen bei ihrer Geburt ist annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von 3 276 g und einer Standardabweichung von 512 g.

– Berechnen Sie diejenige Masse, die von genau 5,5 % der neugeborenen Mädchen unterschritten wird.

d) Die Masse von in Österreich geborenen Buben bei ihrer Geburt ist annähernd normalverteilt.
Die Masse von 95 % aller Buben liegt in dem zum Erwartungswert symmetrischen Intervall [2334 g; 4482 g]:



f ist die Dichtefunktion, F die Verteilungsfunktion dieser normalverteilten Zufallsvariablen.

– Ordnen Sie den beiden Ausdrücken jeweils den richtigen Wert aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\int_{2334}^{3408} f(x)\,\mathrm{d}x =$	
$1 - F(2334) =$	

A	0,025
B	0,05
C	0,475
D	0,975

– Erstellen Sie mithilfe von F einen Ausdruck, der dem in der obigen Abbildung markierten Flächeninhalt entspricht.

____ = 95 %

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) Im Zeitintervall [8; 20] nimmt die Länge des Fötus pro Woche um 1,3 cm zu.

Die Differenz $L(t + 1) - L(t)$ beträgt konstant 1,3.
Daher gilt: relative Längenzunahme $= \frac{L(t + 1) - L(t)}{L(t)} = \frac{1{,}3}{L(t)}$
$L(t)$ wird mit zunehmendem t immer größer, weil L streng monoton steigend ist. Die relative Längenzunahme $\frac{1{,}3}{L(t)}$ wird somit mit zunehmendem t immer kleiner.

Auch eine Argumentation im Kontext der Prozentrechnung (konstante absolute Zunahme bei größer werdendem Grundwert) ist möglich.

b) $\frac{m(30) - m(22)}{30 - 22} = \frac{1\,343{,}4... - 387{,}9}{8} = 119{,}4...$

Im Zeitintervall [22; 30] nimmt die Masse des Fötus pro Woche im Mittel um rund 119 g zu.

oder:

Die mittlere Änderungsrate der Masse des Fötus im Zeitintervall [22; 30] beträgt rund 119 g pro Woche.

$m(b) = 3000 \quad \Rightarrow \quad \frac{4\,900}{1 + 681 \cdot e^{-0{,}185 \cdot b}} = 3000$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$b = 37{,}7...$ Wochen

c) X … Masse in g
$P(X \leq a) = 0{,}055$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = 2\,457{,}7…$
5,5 % der neugeborenen Mädchen haben eine Masse von weniger als rund 2 458 g.

d)

$\int_{2334}^{3408} f(x)\,\mathrm{d}x =$	C
$1 - F(2334) =$	D

A	0,025
B	0,05
C	0,475
D	0,975

$F(4\,482) - F(2\,334) = 95\ \%$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 4 Analysis
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) A Modellieren und Transferieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) —
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) schwer	a) 2
b) mittel	b) 3
c) leicht	c) 1
d) mittel	d) 2

Thema: Alltag

Quellen: http://www.babycenter.de/l%C3%A4nge-und-gewicht-des-f%C3%B6tus-tabelle-nach-schwangerschaftswochen
http://www.statistik.at/web_de/statistiken/bevoelkerung/geburten/index.html
http://www.springermedizin.at/artikel/9393-zu-klein-zu-gross-gerade-richtig

Helligkeit

Die *Leuchtdichte* ist ein Maß für den Helligkeitseindruck, der von beleuchteten Flächen ausgeht. Sie wird in der Einheit Candela pro Quadratmeter (cd/m²) angegeben.

a) Die nachstehende Funktion beschreibt den Zusammenhang zwischen der Leuchtdichte und der menschlichen Empfindungsstärke.

$E(L) = c \cdot \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$
L … Leuchtdichte in cd/m²
$E(L)$ … Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L
L_0 … minimale wahrnehmbare Leuchtdichte in cd/m²
$c > 0$ … Konstante

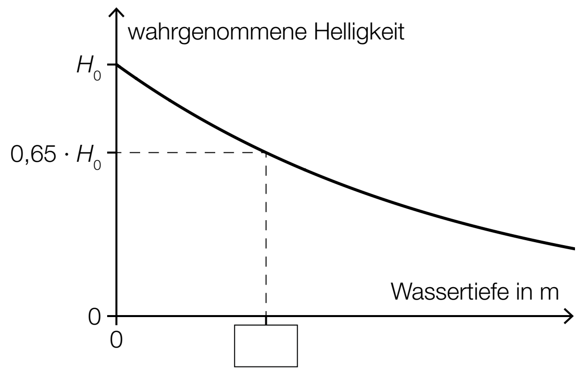
1) Weisen Sie nach, dass die Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L_0 unabhängig von c ist.

Die Formel $E = c \cdot \lg\left(\frac{L}{L_0}\right)$ wird nach L_0 umgeformt.

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der ein richtiges Ergebnis dieser Umformung ist. *[1 aus 5]*

$L_0 = \frac{L \cdot 10^E}{10^c}$	☐
$L_0 = \frac{L \cdot c}{10^E}$	☐
$L_0 = \frac{10^L}{c \cdot 10^E}$	☐
$L_0 = \frac{L}{10^{\frac{E}{c}}}$	☐
$L_0 = \frac{c \cdot 10^L}{10^E}$	☐

b) Unter bestimmten Bedingungen nimmt die wahrgenommene Helligkeit unter Wasser pro 1 m Tiefe um 7 % des vorherigen Wertes ab. Die wahrgenommene Helligkeit an der Wasseroberfläche ist H_0.
In der nachstehenden Abbildung ist diese Abnahme dargestellt.



1) Tragen Sie den fehlenden Wert in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

Möglicher Lösungsweg

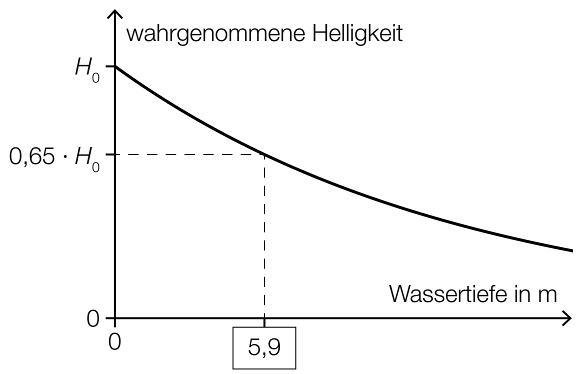
a1) $E(L_0) = c \cdot \lg\left(\frac{L_0}{L_0}\right) = c \cdot \lg(1) = c \cdot 0 = 0$

Die Empfindungsstärke bei der Leuchtdichte L_0 hat den Wert 0 und ist daher unabhängig von c.

a2)

$L_0 = \frac{L}{10^{\frac{E}{c}}}$	☒

b1)



(Wert gerundet)

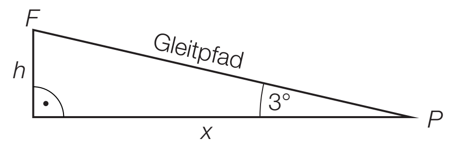
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Flugzeuge

Aufgabennummer: A_126

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Verkehrsflugzeug folgt beim Landeanflug einem Gleitpfad, der eine geradlinige Verbindung zwischen der aktuellen Position des Flugzeugs F und dem Landepunkt P ist. Der Gleitpfad schließt mit der horizontalen Landebahn einen Winkel von 3° ein (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).

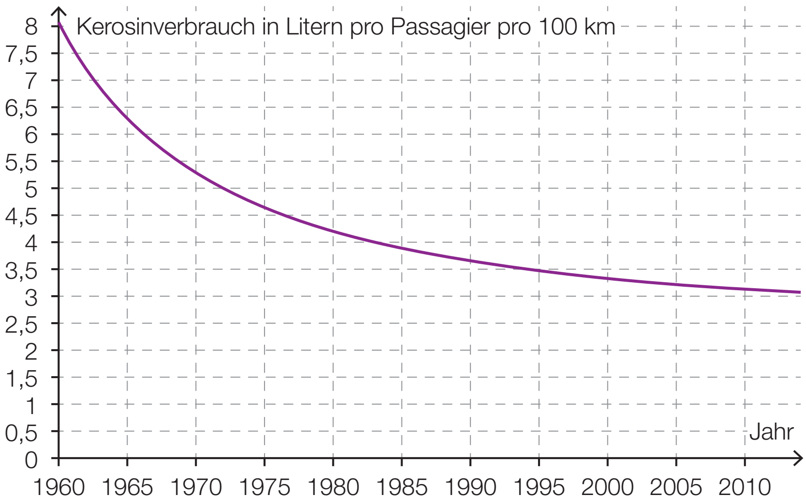


– Erstellen Sie mithilfe der Höhe h eine Formel zur Berechnung der horizontalen Entfernung x.

$x =$ ______________________________

– Berechnen Sie, in welcher Höhe h sich das Flugzeug befindet, wenn es eine Horizontalentfernung von 10 km vom Landepunkt hat.

b) Der Kerosinverbrauch wird üblicherweise pro Passagier pro 100 km angegeben. Die nachstehende Abbildung stellt die Abnahme des Kerosinverbrauchs von Flugzeugen in den vergangenen Jahrzenten dar.



– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die mittlere Änderungsrate des Kerosinverbrauchs im Zeitintervall [1960; 1995].

– Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die momentane Änderungsrate des Kerosinverbrauchs im Jahr 1970.

c) Der Kerosinverbrauch von Flugzeugen kann ab dem Jahr 1960 näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = 5{,}3 \cdot 0{,}935^t + 2{,}9$

t … Zeit nach 1960 in Jahren
$f(t)$ … Kerosinverbrauch in Litern pro Passagier pro 100 km

– Berechnen Sie mithilfe der Funktion f, in welchem Jahr der Kerosinverbrauch 3 Liter pro Passagier pro 100 km beträgt.

– Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 2,9 in der Funktionsgleichung von f im gegebenen Sachzusammenhang.

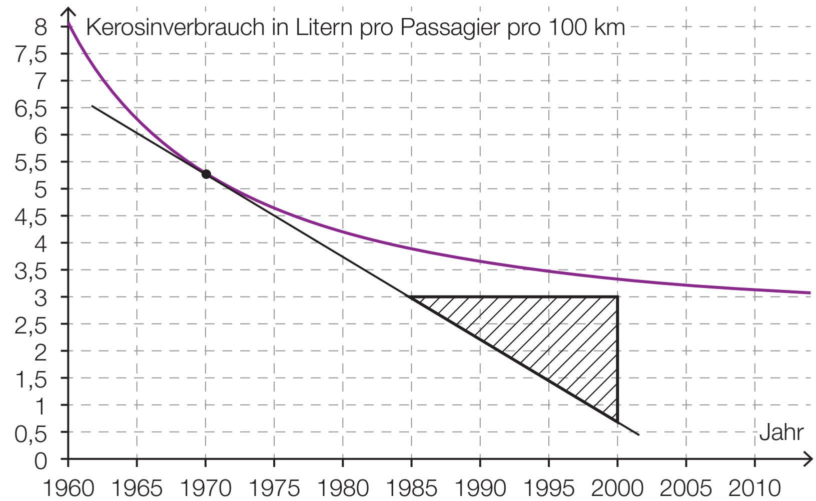
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) $x = \frac{h}{\tan(3°)}$

$h = 10 \cdot \tan(3°) = 0{,}5241\ldots$
Das Flugzeug befindet sich in rund 524 m Höhe.

b)



1960 … ca. 8 Liter pro Passagier pro 100 km
1995 … ca. 3,5 Liter pro Passagier pro 100 km

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3{,}5 - 8}{1995 - 1960} = \frac{-4{,}5}{35} \approx -0{,}13$
Die mittlere Änderungsrate beträgt ungefähr –0,13 Liter Kerosin pro Passagier pro 100 km pro Jahr.

Steigung der in der obigen Abbildung eingezeichneten Tangente: $\frac{-2{,}3}{15} \approx -0{,}15$
Die momentane Änderungsrate beträgt ungefähr –0,15 Liter Kerosin pro Passagier pro 100 km pro Jahr.

c) $f(t) = 3$ bzw. $5{,}3 \cdot 0{,}935^t + 2{,}9 = 3$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$t = 59{,}0\ldots$
Im Jahr 2019 beträgt der Kerosinverbrauch 3 Liter pro Passagier pro 100 km.

Gemäß der Funktion f nähert sich der Kerosinverbrauch mit zunehmender Zeit immer mehr dem Wert 2,9. Dieser Wert wird aber nie erreicht oder unterschritten.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 4 Analysis
c) 3 Funktionale Zusammenhänge

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

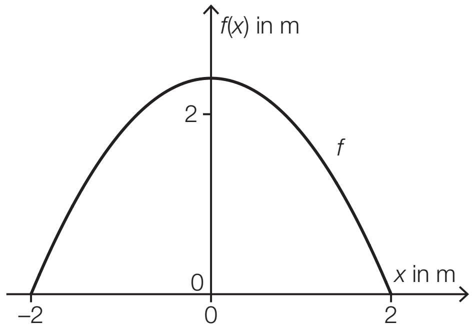
Tunnelzelte

Aufgabennummer: A_131

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Aufblasbare Tunnelzelte erfreuen sich als Messestände immer größerer Beliebtheit.

a) In der nebenstehenden Abbildung ist die innere Querschnittsfläche eines Tunnelzelts dargestellt. Sie kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.



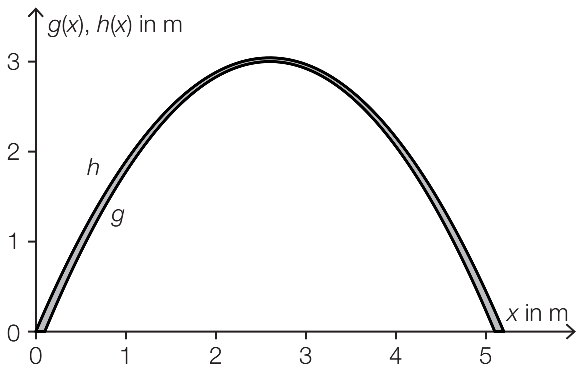
– Kreuzen Sie die für die Koeffizienten von f zutreffenden Bedingungen an. *[1 aus 5]*

$a > 0,\ b = 0,\ c > 0$	☐
$a < 0,\ b = 0,\ c > 0$	☐
$a > 0,\ b > 0,\ c < 0$	☐
$a < 0,\ b < 0,\ c > 0$	☐
$a > 0,\ b > 0,\ c > 0$	☐

b) In der nebenstehenden Abbildung ist die Querschnittsfläche eines Tunnelzelts dargestellt. Die Querschnittsfläche der Innenhaut wird durch den Graphen der Funktion g, jene der Außenhaut durch den Graphen der Funktion h beschrieben.

$g(x) = -0{,}48 \cdot x^2 + 2{,}496 \cdot x - 0{,}2448$
$h(x) = -0{,}45 \cdot x^2 + 2{,}34 \cdot x$

x, $g(x)$, $h(x)$ … Koordinaten in m



Der Bereich zwischen der Innen- und der Außenhaut muss mit Luft gefüllt werden.

– Berechnen Sie das zum Aufblasen benötigte Luftvolumen bei einer Zeltlänge von 5 m.

c) Die nachstehende *allgemeine Gasgleichung* beschreibt den Zusammenhang verschiedener physikalischer Größen für ein Gas (z. B. Luft):

$p \cdot V = n \cdot 8{,}314 \cdot T$

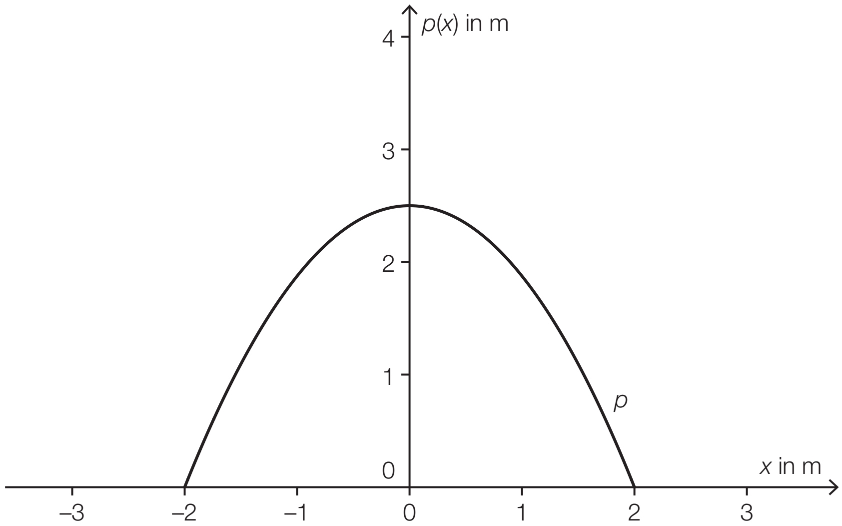
p … Druck in Pascal (Pa)
V … Volumen in m^3
n … Stoffmenge in Mol
T … Temperatur in Kelvin (K)

1 Mol Luft enthält rund $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

Zum Aufblasen eines Zeltes werden 4 m^3 Luft benötigt.

– Berechnen Sie, wie viele Teilchen in diesem Luftvolumen unter einem Druck von 303 000 Pa bei einer Temperatur von 293 K enthalten sind.

d) In der nachstehenden Abbildung ist die Außenhülle eines Zeltes, die durch den Graphen einer geraden Funktion p modelliert wurde, dargestellt.



In einer Höhe von 2 m werden an der linken und an der rechten Seite der Außenhülle Seile angebracht. Diese werden so gespannt und am Boden befestigt, dass sie wie eine Tangente an die Außenhülle verlaufen.

– Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die Seile ein.

Eine Funktion f wird *gerade* genannt, wenn für alle x aus ihrem Definitionsbereich gilt:
$f(x) = f(-x)$
Eine Funktion f wird *ungerade* genannt, wenn für alle x aus ihrem Definitionsbereich gilt:
$f(x) = -f(-x)$

Mit der folgenden Rechnung wird gezeigt, dass die Ableitung jeder geraden Funktion f ungerade ist:

$$f(x) = f(-x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) \overset{(1)}{=} f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x)$$

– Erklären Sie den mit (1) gekennzeichneten Rechenschritt unter Angabe der entsprechenden Ableitungsregel.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a)

$a < 0, \ b = 0, \ c > 0$	☒

b) Berechnung der Nullstellen von g und h mittels Technologieeinsatz:
Nullstellen von g: $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 5{,}1$
Nullstellen von h: $x_3 = 0$, $x_4 = 5{,}2$

Flächeninhalt der Querschnittsfläche zwischen der Innen- und der Außenhaut:
$$\int_0^{5{,}2} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0{,}1}^{5{,}1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}5456$$

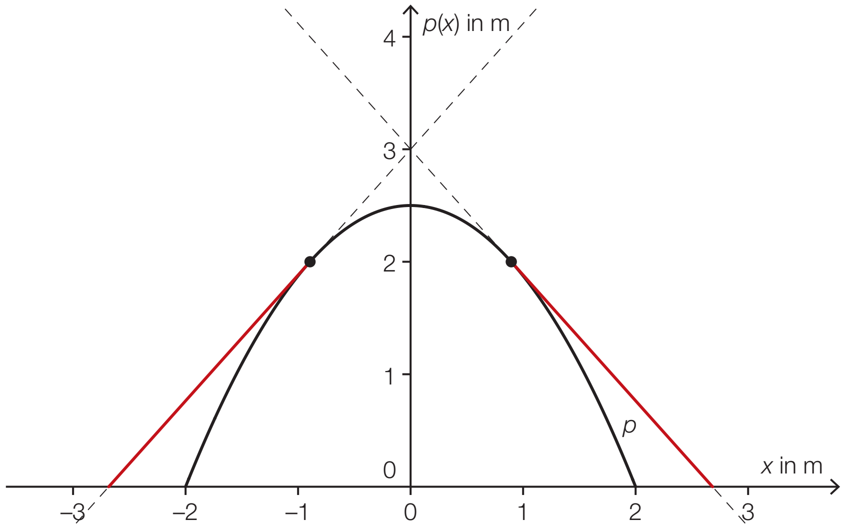
Luftvolumen: $0{,}5456 \cdot 5 = 2{,}728 \text{ m}^3$

Das benötigte Luftvolumen beträgt $2{,}728 \text{ m}^3$.

c) $n = \frac{p \cdot V}{8{,}314 \cdot T} = \frac{303\,000 \cdot 4}{8{,}314 \cdot 293} = 497{,}53...$
$497{,}53... \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 2{,}9... \cdot 10^{26}$

Es sind rund $3 \cdot 10^{26}$ Teilchen enthalten.

d)



Es wurde die Kettenregel angewendet („äußere Ableitung × innere Ableitung“).
Der Faktor (–1) ist die Ableitung der inneren Funktion: $(-x)' = -1$

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 4 Analysis

Nebeninhaltsdimension:

a) 2 Algebra und Geometrie
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 3 Funktionale Zusammenhänge
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) —
d) D Argumentieren und Kommunizieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 1
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 1
d) schwer	d) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Diätplan

Aufgabennummer: A_134

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Zu Beginn einer Diät beträgt die Körpermasse einer Person 110,7 kg.

a) Die Hausärztin empfiehlt im Rahmen der Diät eine kontinuierliche Abnahme von 600 g pro Woche, bis eine Körpermasse von 86 kg erreicht ist.

– Erklären Sie, mit welchem mathematischen Modell sich die Körpermasse im Verlauf der Diät beschreiben lässt.

– Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis das Diät-Ziel erreicht ist, wenn die Empfehlung der Hausärztin eingehalten wird.

b) Die Person folgt einem speziellen Diätplan. Um den Verlauf dieses Diätplans zu dokumentieren, wurden folgende Werte erhoben:

Zeit seit Beginn der Diät in Wochen	Körpermasse in kg
6	101,6
10	98,0

Die Werte der Körpermasse im Verlauf der Diät können näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden.

$m(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $0 \leq t \leq 15$

t ... Zeit seit Beginn der Diät in Wochen
$m(t)$ ... Körpermasse in kg nach t Wochen

– Erstellen Sie mithilfe der Tabellenwerte und der Körpermasse zu Beginn der Diät ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten a, b und c.

– Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

c) Der Body-Mass-Index (BMI) ist eine Maßzahl für die Bewertung der Körpermasse eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße. Es gilt:

$\mathrm{BMI} = \frac{m}{l^2}$

m ... Körpermasse in kg
l ... Körpergröße in m

– Berechnen Sie, wie viel Kilogramm die Person abnehmen muss, wenn sie eine Körpergröße von 186 cm hat und einen BMI von 22 kg/m² erreichen will.
– Begründen Sie anhand der angegebenen Formel, warum auch der BMI um 10 % sinkt, wenn die Körpermasse um 10 % abnimmt.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) Die Masse nimmt jede Woche um den gleichen Betrag ab, deswegen handelt es sich um ein lineares Modell.

$$\frac{110{,}7 - 86}{0{,}6} = 41{,}1...$$

Es dauert etwas mehr als 41 Wochen, bis das Diät-Ziel erreicht ist.

b) I: $m(0) = 110{,}7$ bzw. $c = 110{,}7$
II: $m(6) = 101{,}6$ bzw. $a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 101{,}6$
III: $m(10) = 98$ bzw. $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 98$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$a = 0{,}061\overline{6}$, $b = -1{,}88\overline{6}$, $c = 110{,}7$

c) $22 = \frac{110{,}7 - x}{1{,}86^2} \quad \Rightarrow \quad x = 34{,}58\ldots$

Die Person muss rund 34,6 kg abnehmen.

$$\text{BMI}_{\text{neu}} = \frac{0{,}9 \cdot m}{l^2} = 0{,}9 \cdot \frac{m}{l^2} = 0{,}9 \cdot \text{BMI}_{\text{alt}}$$

Die Begründung kann auch durch eine konkrete Berechnung oder mit Verweis auf die direkte Proportionalität erfolgen.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 2 Algebra und Geometrie
c) 2 Algebra und Geometrie

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) 3 Funktionale Zusammenhänge
c) 1 Zahlen und Maße

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) D Argumentieren und Kommunizieren

Nebenhandlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) leicht	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Sonstiges

Quellen: —

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Natur in Zahlen

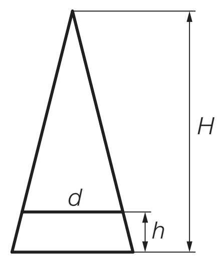
Aufgabennummer: A_136

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Bestimmte Tropfsteine wachsen mit einer Geschwindigkeit von etwa 0,8 mm pro Jahr.
In Mexiko gibt es eine Höhle mit Riesenkristallen, die Schätzungen zufolge mit einer Geschwindigkeit von $1{,}4 \cdot 10^{-5}$ nm pro Sekunde gewachsen sind.
Jemand behauptet, dass die Tropfsteine um mehr als 1 500-mal schneller wachsen als die Riesenkristalle.

– Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Behauptung zutrifft.

b) Das Volumen eines Baumstamms kann mithilfe der folgenden Methode abgeschätzt werden:
Vereinfacht wird der Stamm als Drehkegel betrachtet. Man ermittelt die Höhe H des Stamms und misst außerdem den Stammdurchmesser d in der Höhe h über dem Boden (siehe nebenstehende Skizze). Aus diesen 3 Größen kann das Volumen V des Drehkegels berechnet werden.



– Stellen Sie mithilfe von d, h und H eine Formel für V auf.

V = ____________________________________

Der *General Sherman Tree* ist – bezogen auf den Stamm – der volumenmäßig größte lebende Baum der Erde. Der Stamm ist 83,8 m hoch und hat in 1,37 m Höhe einen Durchmesser von 7,7 m.

– Schätzen Sie mithilfe der oben beschriebenen Methode das Volumen dieses Stamms.

c) Erdmännchen sind Raubtiere, die im südlichen Afrika leben. Es wird angenommen: In freier Wildbahn beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Jungtier überlebt, unabhängig voneinander 25 %.
In einer Erdmännchen-Kolonie werden 20 Jungtiere geboren.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 30 % davon überleben.

Ein Erdmännchen-Weibchen bringt 3 Jungtiere zur Welt.

– Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils das passende Ereignis aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$P(E) = 0{,}25^3$	
$P(E) = 1 - 0{,}25^3$	

A	E = „alle 3 Jungtiere überleben“
B	E = „keines der Jungtiere überlebt“
C	E = „mindestens 1 Jungtier überlebt“
D	E = „mindestens 1 Jungtier überlebt nicht“

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

a) $1{,}4 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{nm}}{\text{s}} = 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{mm}}{\text{Jahr}} = 44\,150\,400 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{mm}}{\text{Jahr}}$

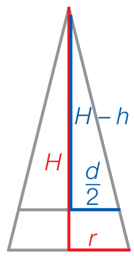
$= 4{,}41504 \cdot 10^{-4}\,\frac{\text{mm}}{\text{Jahr}}$

$\frac{0{,}8}{4{,}41504 \cdot 10^{-4}} = 1\,811{,}9\ldots$

Die Tropfsteine wachsen 1 812-mal schneller als die Riesenkristalle. Die Behauptung ist daher zutreffend.

b) r … Radius des Drehkegels am Boden

Anwendung des Strahlensatzes: $\frac{r}{H} = \frac{\frac{d}{2}}{H - h} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{d \cdot H}{2 \cdot (H - h)}$



$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d \cdot H}{2 \cdot (H - h)}\right)^2 \cdot H$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{7{,}7 \cdot 83{,}8}{2 \cdot (83{,}8 - 1{,}37)}\right)^2 \cdot 83{,}8 = 1\,344{,}3\ldots$

Das Volumen des Stamms beträgt etwa 1 344 m³.

c) X … Anzahl der überlebenden Jungtiere

Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0{,}25$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \geq 6) = 0{,}3828\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 38,3 %.

$P(E) = 0{,}25^3$	A
$P(E) = 1 - 0{,}25^3$	D

A	E = „alle 3 Jungtiere überleben“
B	E = „keines der Jungtiere überlebt“
C	E = „mindestens 1 Jungtier überlebt“
D	E = „mindestens 1 Jungtier überlebt nicht“

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 1 Zahlen und Maße
c) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) 1 Zahlen und Maße
b) 2 Algebra und Geometrie
c) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) D Argumentieren und Kommunizieren
b) A Modellieren und Transferieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) —
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) C Interpretieren und Dokumentieren

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 1
b) schwer	b) 2
c) mittel	c) 2

Thema: Biologie

Quellen: http://www.zamg.ac.at/
http://www.spektrum.de/news/mexikanische-riesenkristalle-sind-extremisten/1123070
https://en.wikipedia.org/wiki/General_Sherman_(tree)
https://www.tierparkstadthaag.at/de/tierpark_tiere/erdmaennchen/

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Marillenernte

Aufgabennummer: A_139		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

In einer bestimmten Region werden Marillen geerntet.

a) Man geht davon aus, dass in dieser Region 12 % der Marillen Schäden aufweisen.

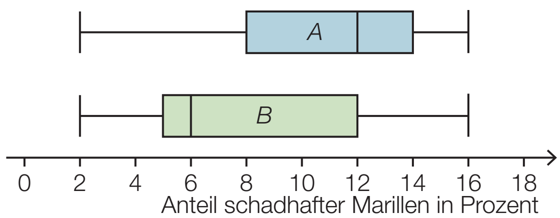
– Beschreiben Sie ein Ereignis im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Ausdruck $\binom{50}{3} \cdot 0{,}12^3 \cdot 0{,}88^{47}$ berechnet wird.

Aus der gesamten Ernte wird eine Zufallsstichprobe von n Stück Marillen ausgewählt.

– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung folgender Wahrscheinlichkeit:

P(„keine der ausgewählten Marillen weist Schäden auf") = ____________________

b) Eine mehrjährig laufende Untersuchung zur Erntequalität von Marillen in dieser Region ergab unterschiedliche Ergebnisse bei den Sorten A und B. Der relative Anteil schadhafter Marillen an der gesamten Ernte pro Erntejahr und Sorte ist in den nachstehenden Boxplots veranschaulicht.



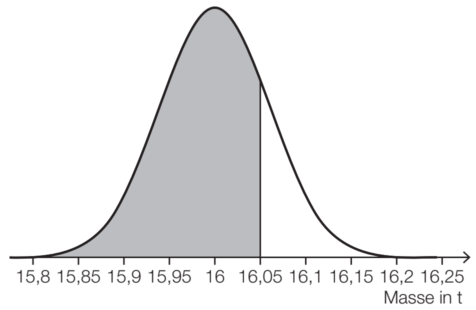
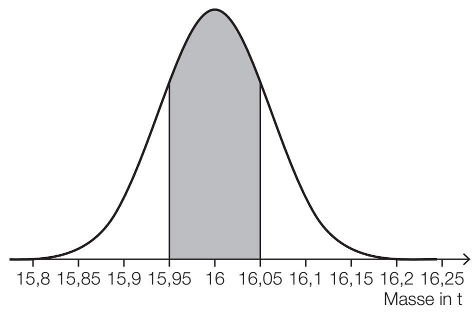
– Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die aufgrund der obigen Boxplots sicher richtig ist. *[1 aus 5]*

Insgesamt waren in keinem Jahr weniger als 4 % der Marillen in dieser Region schadhaft.	☐
Bei Sorte B waren in mehr Erntejahren mindestens 6 % der Marillen schadhaft als bei Sorte A.	☐
Bei beiden Sorten waren in mindestens der Hälfte der Erntejahre mindestens 12 % der Marillen schadhaft.	☐
Bei Sorte A waren in mindestens $\frac{3}{4}$ der Erntejahre höchstens 14 % der Marillen schadhaft.	☐
In jedem Erntejahr waren zumindest bei einer der beiden Sorten weniger als 16 % der Marillen schadhaft.	☐

c) Die Masse der pro Jahr verkauften Marillen X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 16 Tonnen und der Standardabweichung σ = 0,06 Tonnen.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr höchstens 15,9 Tonnen Marillen verkauft werden.

– Ordnen Sie den gekennzeichneten Flächen jeweils die entsprechende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

A	$1 - P(X \geq 16{,}05)$
B	$P(X \geq 16{,}05)$
C	$1 - 2 \cdot P(X \geq 16{,}05)$
D	$P(X \leq 15{,}95) - P(X \leq 16{,}05)$

d) Ein Obstbauer hat 30 Tonnen Marillen geerntet. 75 % seiner diesjährig geernteten Marillen sind einwandfrei und können direkt verkauft werden. 15 % der schadhaften Marillen können zur Herstellung von Marillenschnaps verwendet werden. Alle übrigen Marillen sind Abfall.

– Berechnen Sie, wie viel Prozent der Ernte Abfall ist.

1 kg einwandfreier Marillen kann um € 1,50 und 1 kg Marillen zum Schnapsbrennen kann um € 0,40 verkauft werden.

– Berechnen Sie die Einnahmen des Obstbauern.

Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben.

Möglicher Lösungsweg

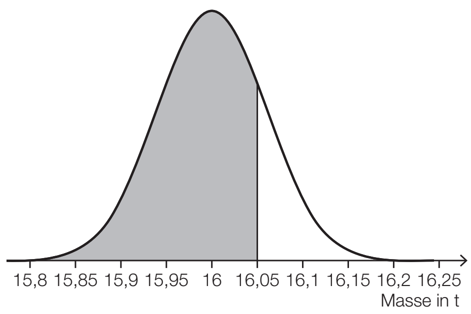
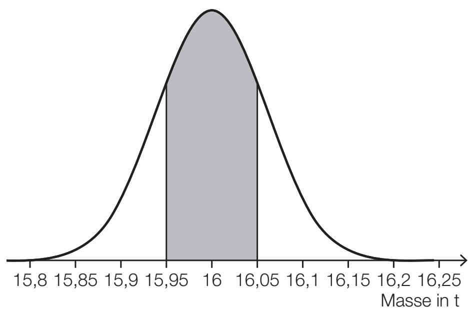
a) In einer Zufallsstichprobe von 50 Stück weisen genau 3 Marillen Schäden auf.

P(„keine der ausgewählten Marillen weist Schäden auf“) $= 0{,}88^n$

b)

Bei Sorte A waren in mindestens $\frac{3}{4}$ der Erntejahre höchstens 14 % der Marillen schadhaft.	☒

c) Berechnung mit Technologieeinsatz: Normalverteilung mit $\sigma = 0{,}06$ und $\mu = 16$
$P(X \leq 15{,}9) = 0{,}0477...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 4,8 %.

	A
	C

A	$1 - P(X \geq 16{,}05)$
B	$P(X \geq 16{,}05)$
C	$1 - 2 \cdot P(X \geq 16{,}05)$
D	$P(X \leq 15{,}95) - P(X \leq 16{,}05)$

d) $(1 - 0{,}75) \cdot (1 - 0{,}15) = 0{,}25 \cdot 0{,}85 = 0{,}2125$
21,25 % der Ernte ist Abfall.

$30\,000 \cdot (0{,}75 \cdot 1{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}4) = 34\,200$
Die Einnahmen betragen € 34.200.

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 5 Stochastik
b) 5 Stochastik
c) 5 Stochastik
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) C Interpretieren und Dokumentieren
c) B Operieren und Technologieeinsatz
d) B Operieren und Technologieeinsatz

Nebenhandlungsdimension:

a) A Modellieren und Transferieren
b) —
c) C Interpretieren und Dokumentieren
d) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) mittel	a) 2
b) mittel	b) 1
c) mittel	c) 2
d) mittel	d) 2

Thema: Sonstiges

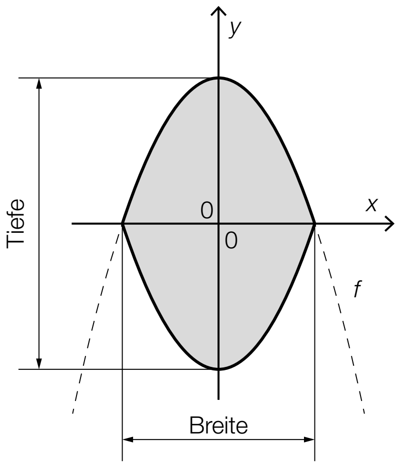
Quellen: —

Dinosaurier

a) Um das Körpervolumen eines Dinosauriers zu schätzen, werden Messungen an dessen Skelett durchgeführt. Die Form des Körperquerschnitts wird dann – wie in der nachstehenden Abbildung dargestellt – mithilfe einer Funktion f modelliert:

$f(x) = 1 - a \cdot x^2$ mit $a > 0$

Der Graph von f bildet die obere Begrenzung des Körperquerschnitts, die untere Begrenzung verläuft dazu symmetrisch bezüglich der x-Achse.



Quelle: Etemenanki3 – own work, CC BY-SA 4.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diplodocus_longus_Denver_1.jpg [15.01.2020].

Für die Bestimmung von a ist das Verhältnis von Breite zu Tiefe des Körpers des untersuchten Dinosauriers ausschlaggebend.

1) Zeigen Sie, dass bei der Modellierung des Körperquerschnitts mithilfe der Funktion f gilt:

$$\text{Breite} : \text{Tiefe} = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

Zur Berechnung der Körperquerschnittsfläche mithilfe des Integrals wird eine Stammfunktion von f benötigt.

2) Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion F von f auf, für die gilt: $F(0) = 0$

b) Aus der Körperlänge L (in Metern) eines Dinosauriers kann mithilfe der nachstehenden Formel seine Körpermasse M (in Kilogramm) geschätzt werden.

$M = a \cdot L^b$

Die Werte der Parameter a und b haben für verschiedene Gruppen von Dinosauriern unterschiedliche Werte. Für zwei dieser Gruppen sind die Werte in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Gruppe	a	b
Prosauropoden	12,32	2,40
Theropoden	0,73	3,63

Der Tyrannosaurus Rex gehört zur Gruppe der Theropoden.

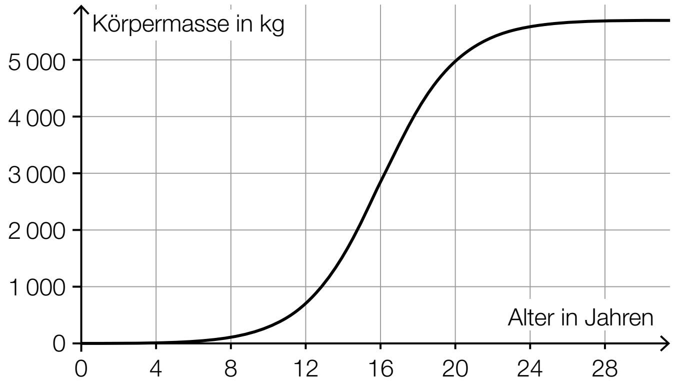
1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Formel die Masse (in Tonnen) eines 13 m langen Tyrannosaurus Rex.

Für die Gruppe der Prosauropoden kann die Formel folgendermaßen angeschrieben werden:

$M = 12{,}32 \cdot \sqrt[5]{L^{\boxed{}}}$

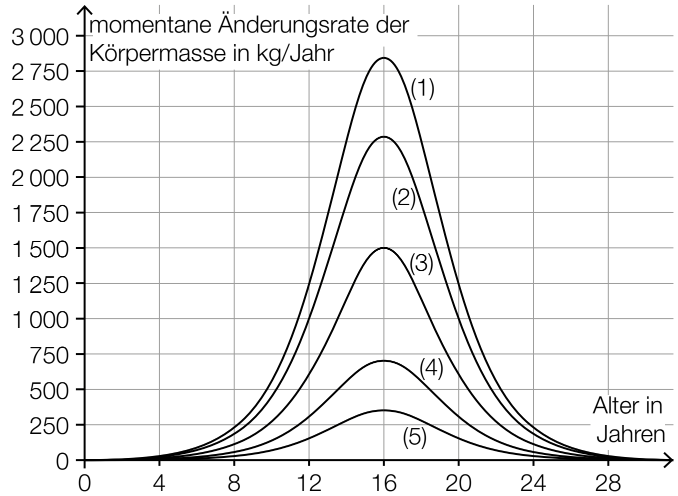
2) Ergänzen Sie den fehlenden Exponenten in der obigen Formel im dafür vorgesehenen Kästchen.

c) Die nachstehende Abbildung zeigt die vermutliche Wachstumskurve für einen durchschnittlichen Tyrannosaurus Rex. Sie stellt die Körpermasse in Abhängigkeit vom Lebensalter dar.



Einer der 5 Graphen in der nachstehenden Abbildung stellt die zugehörige momentane Änderungsrate der Körpermasse richtig dar.

1) Kreuzen Sie den richtigen Graphen an. *[1 aus 5]*



Graph (1)	☐
Graph (2)	☐
Graph (3)	☐
Graph (4)	☐
Graph (5)	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Breite ist der Abstand zwischen den beiden Nullstellen von f:

$f(x) = 0$
$1 - a \cdot x^2 = 0$
$x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}}$
$\text{Breite} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}$
$\text{Tiefe} = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 1 = 2$

$$\frac{\text{Breite}}{\text{Tiefe}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{a}}}{2} = \sqrt{\frac{1}{a}}$$

a2) $F(x) = x - \frac{a}{3} \cdot x^3$

b1) $M_{\text{T. Rex}} = 0{,}73 \cdot 13^{3{,}63} = 8\,071{,}1...$
Die Masse beträgt gemäß der Formel etwa 8,1 Tonnen.

b2) $M = 12{,}32 \cdot \sqrt[5]{L^{\boxed{12}}}$

c1)

Graph (4)	⊠

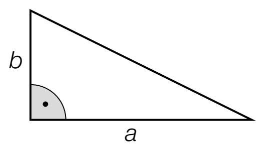
WM-Abfahrt

Die alpine Skiweltmeisterschaft 2015 fand in Vail/Beaver Creek (USA) statt.

a) Bei der 2623 m langen Abfahrt der Herren betrug die Siegerzeit 1 Minute und 43,18 Sekunden. Der beste Österreicher hatte auf den Sieger einen Rückstand von 92 Hundertstelsekunden.

1) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Siegers in km/h.
2) Berechnen Sie, um wie viel Promille der beste Österreicher langsamer als der Sieger war.

b) Das größte Gefälle der Abfahrtsstrecke *Birds of Prey* beträgt 45 %. In der nachstehenden Abbildung ist dieses Gefälle durch ein Steigungsdreieck veranschaulicht.



1) Kreuzen Sie den auf die Seitenlängen *a* und *b* zutreffenden Zusammenhang an. *[1 aus 5]*

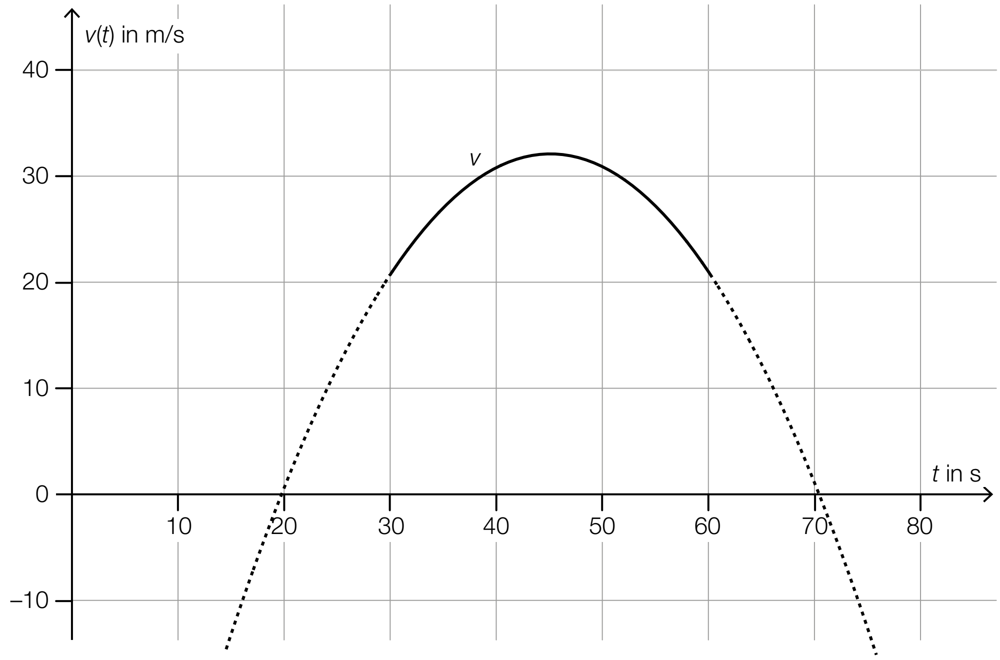
$\frac{a}{b} = 0{,}45$	☐
$\frac{b}{a} = 45$	☐
$b = \frac{45}{100} \cdot a$	☐
$b = a \cdot \tan(45°)$	☐
$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = 45°$	☐

c) Die Geschwindigkeit eines bestimmten Rennläufers auf einem Teilabschnitt der Abfahrtsstrecke kann näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -0{,}05 \cdot t^2 + 4{,}51 \cdot t - 69{,}6$ mit $30 \leq t \leq 60$

t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion v dargestellt.



1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Weg, den der Rennläufer in diesem Teilabschnitt zurücklegt.

Die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ im Zeitintervall [a; b] kann durch die nachstehende Formel berechnet werden.

$$\overline{v} = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

2) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Rennläufers im Zeitintervall [30; 60].

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{2623\text{ m}}{103{,}18\text{ s}} = 25{,}421\ldots\text{ m/s}$

$25{,}421\ldots\text{ m/s} = (25{,}421\ldots \cdot 3{,}6)\text{ km/h} = 91{,}517\ldots\text{ km/h}$

Die mittlere Geschwindigkeit des Siegers betrug rund 91,52 km/h.

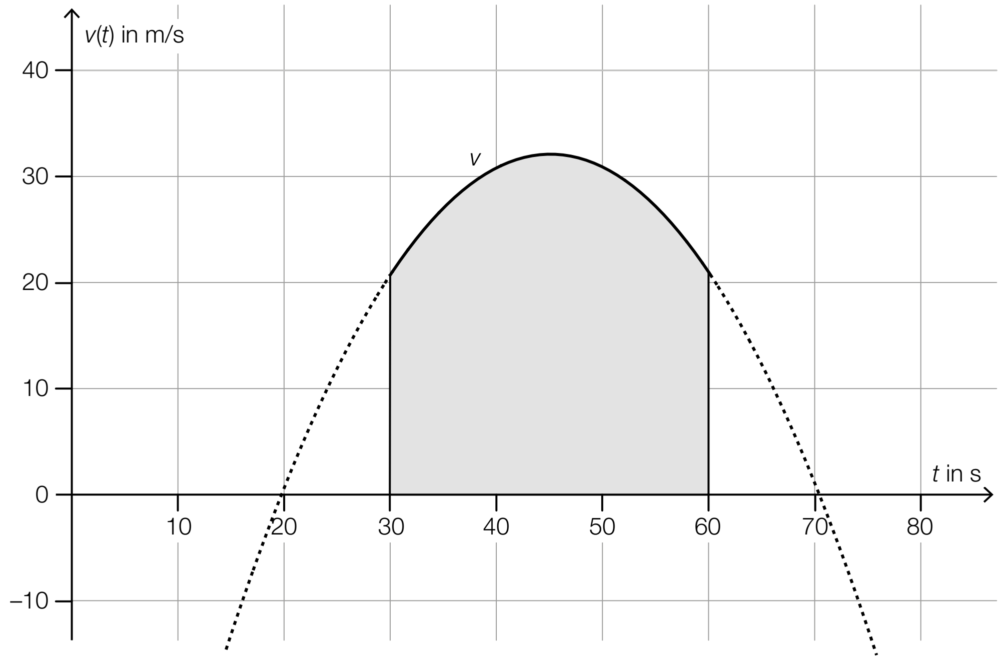
a2) $\frac{0{,}92}{103{,}18} = 0{,}0089\ldots = 8{,}9\ldots$ ‰

Der beste Österreicher war um rund 9 Promille langsamer als der Sieger.

b1)

$b = \frac{45}{100} \cdot a$	☒

c1)



c2) $\bar{v} = \frac{1}{60-30} \cdot \int_{30}^{60} (-0{,}05 \cdot t^2 + 4{,}51 \cdot t - 69{,}6)\,dt = \frac{1}{30} \cdot 850{,}5 = 28{,}35$

Die mittlere Geschwindigkeit des Rennläufers auf diesem Teilabschnitt beträgt 28,35 m/s.

Zimt

Aufgabennummer: A_164

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

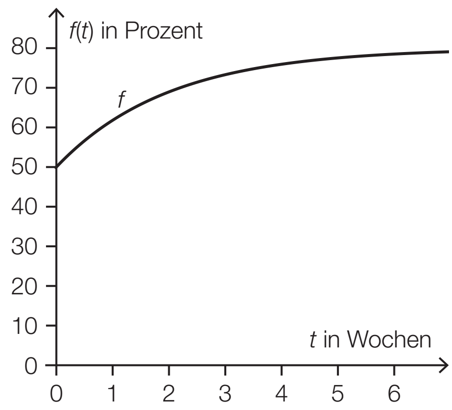
Zimt ist eines der ältesten bekannten Gewürze und wird aus der getrockneten Rinde von Zimtbäumen gewonnen.

a) Zimt gibt Feuchtigkeit ab. Werden die Zimtstangen in geschlossenen Containern transportiert, so steigt der Feuchtigkeitsgehalt im Behälter, was zu einer Beeinträchtigung der Qualität führen kann. Die in einem bestimmten Container gemessene relative Luftfeuchtigkeit kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(t) = 30 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right) + b$$

t ... Zeit nach Verschluss des Containers in Wochen
$f(t)$ ... relative Luftfeuchtigkeit zur Zeit t in Prozent
b ... Parameter (in Prozent)

– Ermitteln Sie unter Verwendung des nachstehend abgebildeten Graphen der Funktion f den Parameter b.



– Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters b im gegebenen Sachzusammenhang.

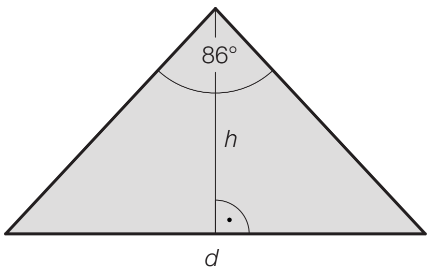
b) Zimt wird in speziellen Mühlen zur gewünschten Korngröße vermahlen. Die Durchmesser der Körner nach dem Mahlvorgang sind annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 175 µm und der Standardabweichung σ = 35 µm.

– Ermitteln Sie, wie viel Prozent aller Körner einen Durchmesser zwischen 100 µm und 250 µm haben.

Durch einen Verarbeitungsfehler hat sich der Erwartungswert der Durchmesser (bei gleichbleibender Standardabweichung) auf den Wert μ_1 = 180 µm verschoben.

– Erläutern Sie anhand einer geeigneten Skizze der Gauß'schen Glockenkurve, ob der Prozentsatz der Körner mit einem Durchmesser zwischen 100 µm und 250 µm dadurch kleiner wird, größer wird oder gleich bleibt.

c) Für die Qualitätsprüfung „rinnt" das gemahlene Gewürz aus einer Abfüllanlage und bildet einen Schüttkegel. Das Zimtpulver bildet dabei annähernd einen Drehkegel mit einem Öffnungswinkel von 86° (siehe nachstehende Abbildung).



– Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Höhe h aus dem Durchmesser d des Grundkreises.

h = ____

d) Das Zimtpulver wird in einer Anlage automatisch in Säckchen verpackt. Aus Erfahrung weiß man, dass 2 % der Säckchen nicht korrekt verschlossen sind. Eine Zufallsstichprobe von 50 Säckchen wird kontrolliert.

– Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Ausdruck berechnet wird:

$$P(E) = 0{,}98^{50} + 50 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{49} + \binom{50}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{48}$$

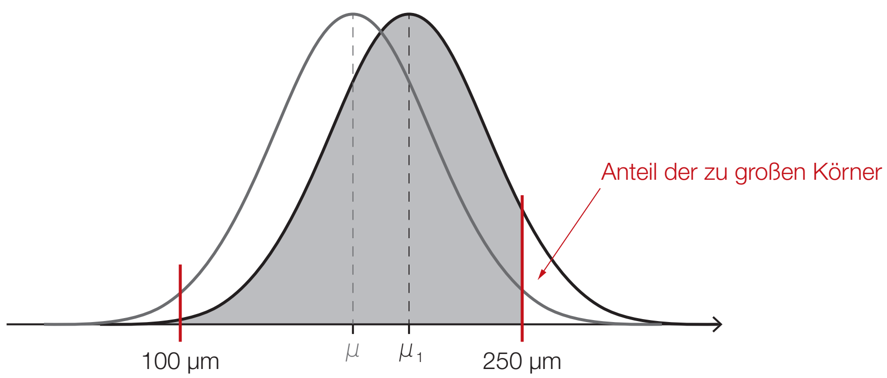
Hinweis zur Aufgabe:
Lösungen müssen der Problemstellung entsprechen und klar erkennbar sein. Ergebnisse sind mit passenden Maßeinheiten anzugeben. Diagramme sind zu beschriften und zu skalieren.

Möglicher Lösungsweg

a) An der Stelle $t = 0$ kann man ablesen: $b = 50$
Der Wert des Parameters b entspricht der relativen Luftfeuchtigkeit beim Verschließen des Containers in Prozent.

b) X … Durchmesser in µm
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(100 < X < 250) = 0{,}967... \approx 97\ \%$

Der Prozentsatz der Körner mit einem Durchmesser zwischen 100 µm und 250 µm sinkt.
Begründung: Die Glockenkurve ist nun so verschoben, dass der zulässige Bereich nicht mehr symmetrisch um den Erwartungswert liegt. Dadurch steigt der Anteil der zu großen Körner stärker, als der Anteil der zu kleinen Körner sinkt.



c) $h = \dfrac{d}{2 \cdot \tan(43°)}$

d) E … in der Stichprobe befinden sich 0, 1 oder 2 Säckchen, die nicht korrekt verschlossen sind

Klassifikation

☒ Teil A ☐ Teil B

Wesentlicher Bereich der Inhaltsdimension:

a) 3 Funktionale Zusammenhänge
b) 5 Stochastik
c) 2 Algebra und Geometrie
d) 5 Stochastik

Nebeninhaltsdimension:

a) —
b) —
c) —
d) —

Wesentlicher Bereich der Handlungsdimension:

a) B Operieren und Technologieeinsatz
b) B Operieren und Technologieeinsatz
c) A Modellieren und Transferieren
d) C Interpretieren und Dokumentieren

Nebenhandlungsdimension:

a) C Interpretieren und Dokumentieren
b) D Argumentieren und Kommunizieren
c) —
d) —

Schwierigkeitsgrad:	Punkteanzahl:
a) leicht	a) 2
b) mittel	b) 2
c) mittel	c) 1
d) mittel	d) 1

Thema: Sonstiges

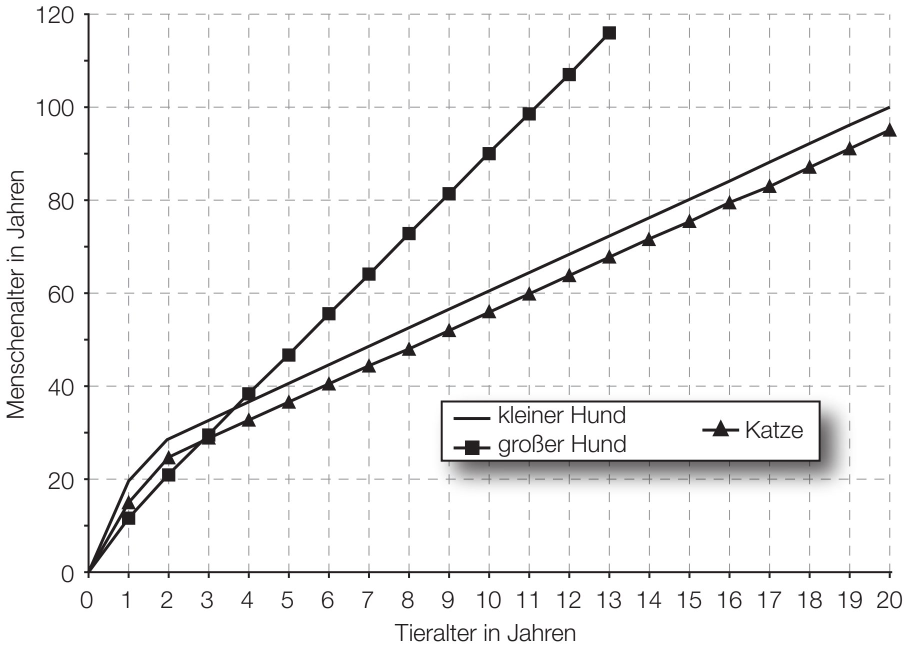
Quellen: http://www.prozesstechnik-online.de/widget/food/-/article/31534493/37266314/Gewürze-mundgerecht-mahlen/
http://www.tis-gdv.de/tis/ware/gewuerze/zimt/zimt.htm

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Entwicklung von Katzen und Hunden*

Aufgabennummer: A_098		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Viele Tiere altern schneller als Menschen. Ein 9 Jahre alter großer Hund ist beispielsweise etwa so „alt" wie ein 80-jähriger Mensch. Für einige Haustiere ist der Zusammenhang zwischen Tieralter und Menschenalter in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Für eine Katze kann der Zusammenhang zwischen dem Tieralter in Jahren und dem Menschenalter in Jahren in einem bestimmten Bereich durch eine lineare Funktion K beschrieben werden:

$K(t) = k \cdot t + d$

t ... Tieralter in Jahren mit $t \geq 2$
$K(t)$ ... das dem Tieralter t der Katze entsprechende Menschenalter in Jahren

1) Erstellen Sie unter Zuhilfenahme von 2 Punkten aus der obigen Grafik eine Gleichung der linearen Funktion K für $t \geq 2$.

* ehemalige Klausuraufgabe

Für einen kleinen Hund kann dieser Zusammenhang durch eine lineare Funktion H modelliert werden:

$H(t) = k_1 \cdot t + d_1$

t ... Tieralter in Jahren mit $t \geq 2$
$H(t)$ ... das dem Tieralter t des kleinen Hundes entsprechende Menschenalter in Jahren

2) Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen den Parametern k und k_1 besteht.
Begründen Sie Ihre Antwort mithilfe der obigen Abbildung.

b) Bei einer Studie wurde die Körpermasse von ausgewachsenen Katzen einer bestimmten Rasse als annähernd normalverteilt mit einem Erwartungswert von $\mu = 3{,}6$ kg und einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}7$ kg angenommen.
Die schwersten 10 % der ausgewachsenen Katzen wurden in dieser Studie als übergewichtig bezeichnet.

1) Bestimmen Sie diejenige Körpermasse, ab der eine ausgewachsene Katze in dieser Studie als übergewichtig bezeichnet wurde.

Möglicher Lösungsweg

a1) Ablesen von 2 Punkten aus der Abbildung – beispielsweise: $(6|40)$ und $(11|60)$

$k = \frac{60 - 40}{11 - 6} = 4$
$40 = 4 \cdot 6 + d \quad \Rightarrow \quad d = 16$
$K(t) = 4 \cdot t + 16 \quad \text{mit} \quad t \geq 2$

Toleranzbereich beim Ermitteln der Parameter im Rahmen der Ablesegenauigkeit der verwendeten Punkte

a2) Die beiden Parameter k und k_1 sind gleich, weil die beiden Funktionsgraphen (für $t \geq 2$) parallel verlaufen.

b1) X ... Körpermasse in kg

Normalverteilung mit $\mu = 3{,}6$ kg und $\sigma = 0{,}7$ kg:
$P(X \geq a) = 0{,}1$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$a = 4{,}49...$

Ab einer Körpermasse von rund 4,5 kg wurde eine ausgewachsene Katze in dieser Studie als übergewichtig bezeichnet.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung (Toleranzbereich beim Ermitteln der Parameter im Rahmen der Ablesegenauigkeit der verwendeten Punkte)
a2) 1 × D: für das richtige Angeben und die richtige Begründung
b1) 1 × B: für das richtige Bestimmen der Körpermasse, ab der eine ausgewachsene Katze in dieser Studie als übergewichtig bezeichnet wurde

Baumhaus*

Aufgabennummer: A_116

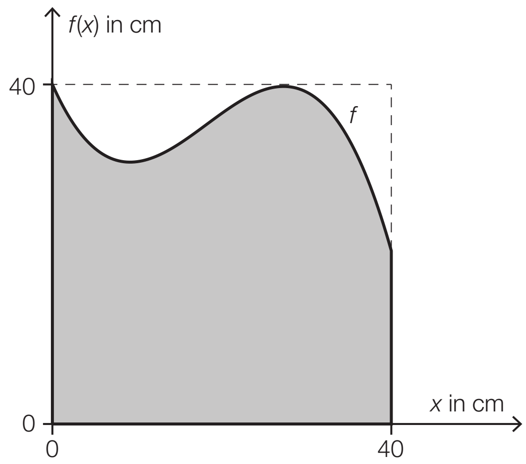
Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Eine Familie plant, ein Baumhaus aus Holz zu errichten. Der Baum dafür steht in einem horizontalen Teil des Gartens.

a) Eine 3,2 m lange Leiter wird angelehnt und reicht dann vom Boden genau bis zum Einstieg ins Baumhaus in einer Höhe von 2,8 m.

1) Berechnen Sie denjenigen Winkel, unter dem die Leiter gegenüber dem horizontalen Boden geneigt ist.

b) Die Fenster des Baumhauses sollen eine spezielle Form haben (siehe grau markierte Fläche in der nachstehenden Abbildung).



Die obere Begrenzungslinie des Fensters kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden.

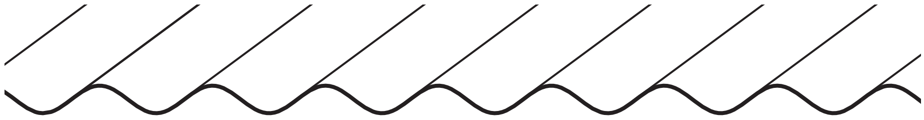
$f(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}164 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 40$ mit $0 \leq x \leq 40$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

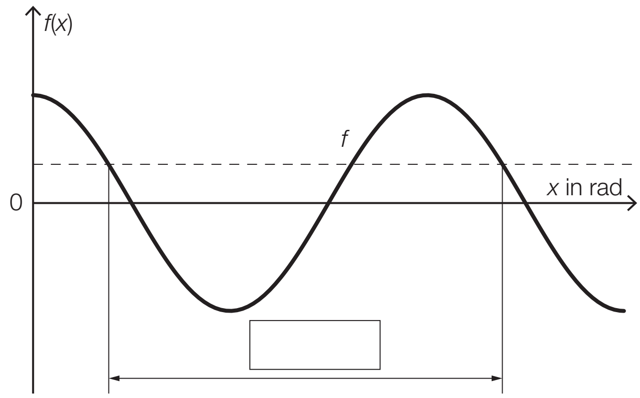
1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Fensterfläche in der dargestellten Form kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Das Baumhaus wird mit gewellten Kunststoffplatten überdacht.

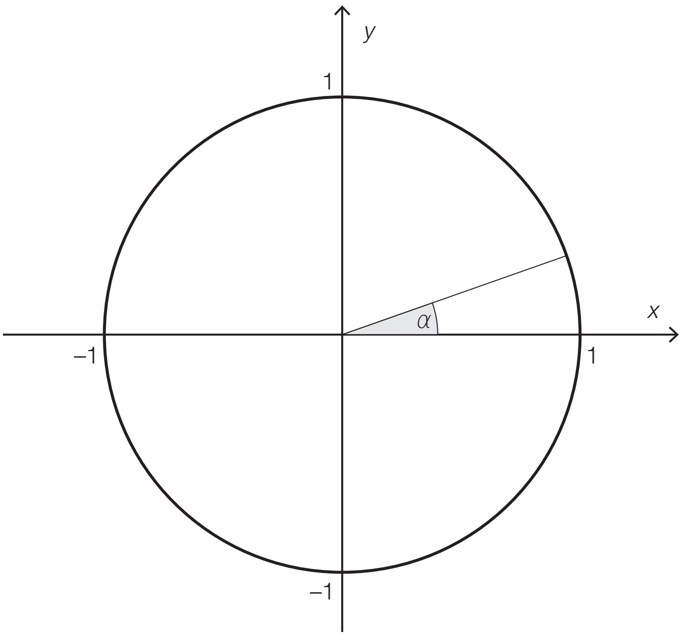


Dem Querschnitt liegt der Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ zugrunde. Dieser ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.



2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel β ein, für den gilt: $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\arcsin\left(\frac{2,8}{3,2}\right) = 61,0...°$

Der Winkel beträgt rund 61°.

b1) Flächeninhalt zwischen den Achsen und dem Graphen der Funktion in cm²:

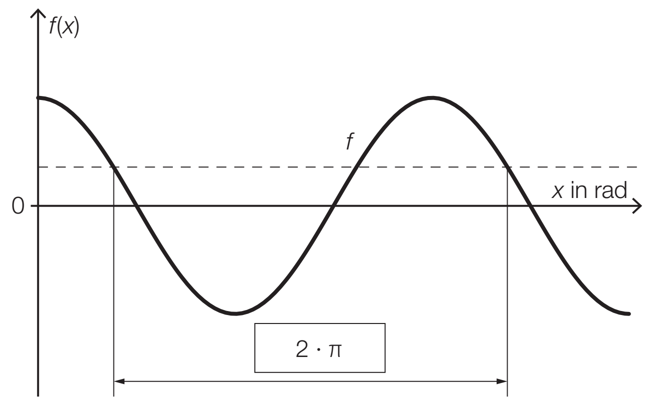
$\int_0^{40} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,378,66...$

Flächeninhalt des Quadrats in cm²: $A = 1\,600$

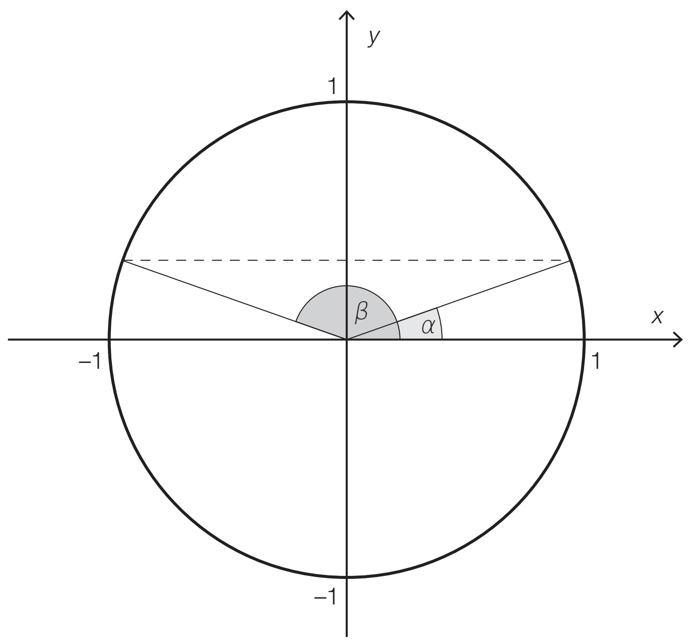
prozentueller Unterschied: $\frac{1\,378,66... - 1\,600}{1\,600} = -0,1383...$

Die Fensterfläche ist um rund 13,8 % kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm.

c1)



c2)



Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels
b1) 1 × A: für den richtigen Ansatz (Berechnung des Flächeninhalts mittels Integral)
1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Unterschieds
c1) 1 × A1: für das richtige Eintragen der fehlenden Zahl
c2) 1 × A2: für das richtige Einzeichnen des Winkels β im Einheitskreis

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kontrolle der Geschwindigkeit*

Aufgabennummer: A_117

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

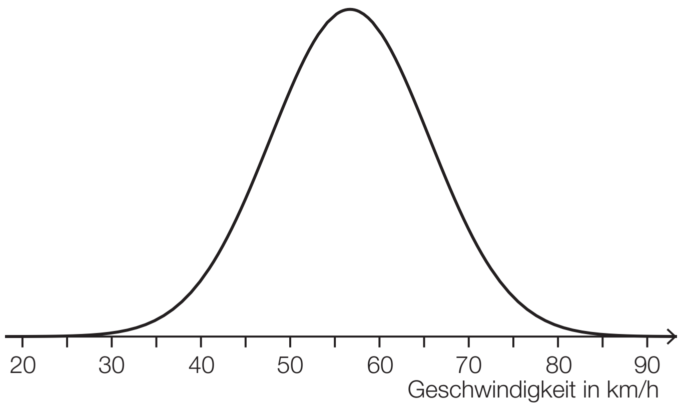
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem bestimmten Abschnitt der Westautobahn ein Fahrzeug mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs ist, beträgt 4 %.
Eine Zufallsstichprobe von 1 500 Fahrzeugen wird überprüft.
Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl derjenigen Fahrzeuge an, die dort mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs sind.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass genau a Fahrzeuge dieser Zufallsstichprobe mit überhöhter Geschwindigkeit unterwegs sind.

$P(X = a) =$ ____

b) Es wird angenommen, dass die Geschwindigkeiten der Fahrzeuge an einer bestimmten Stelle, an der die erlaubte Höchstgeschwindigkeit 50 km/h beträgt, annähernd normalverteilt sind.

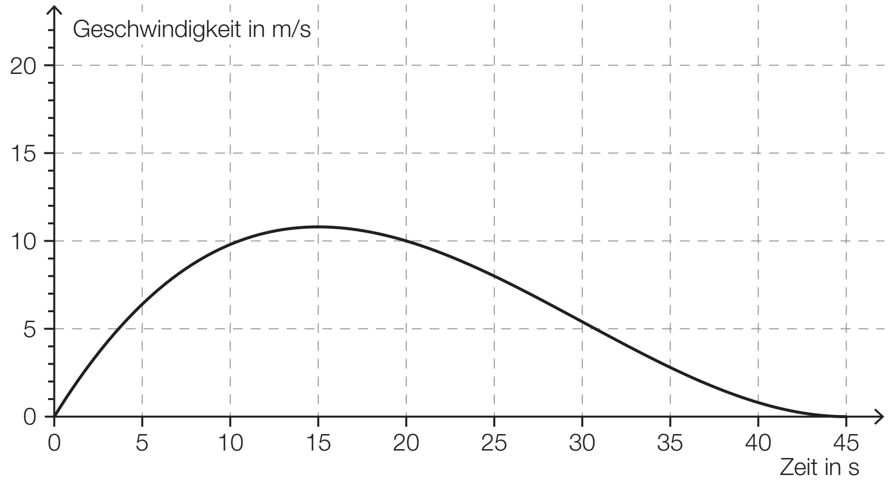
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschwindigkeit mehr als 15 km/h über der erlaubten Höchstgeschwindigkeit von 50 km/h liegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der nachstehend dargestellte Graph zeigt annähernd den Geschwindigkeitsverlauf eines im Stadtgebiet fahrenden Autos.



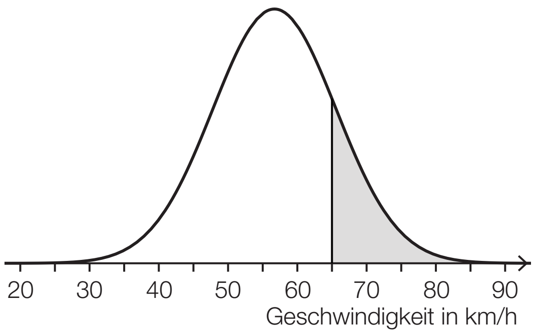
1) Ermitteln Sie näherungsweise die Länge des im Zeitintervall [0; 45] zurückgelegten Weges.

2) Lesen Sie die Höchstgeschwindigkeit des Autos ab. Geben Sie das Ergebnis in km/h an.

Möglicher Lösungsweg

a1) $P(X = a) = \binom{1\,500}{a} \cdot 0{,}04^a \cdot 0{,}96^{1\,500-a}$

b1)



c1) Abschätzen der Länge des zurückgelegten Weges s:
$s \approx 25 \cdot 11 = 275$
Die Länge des zurückgelegten Weges beträgt näherungsweise 275 m.
Toleranzbereich: [220; 330]

c2) Höchstgeschwindigkeit: 11 m/s = 39,6 km/h
Toleranzbereich: [37,8; 41,4]

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b1) 1 × C: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit
c1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Weglänge im Toleranzbereich [220; 330]
c2) 1 × C: für das richtige Angeben der Höchstgeschwindigkeit in km/h im Toleranzbereich [37,8; 41,4]

Eiffelturm*

Aufgabennummer: A_287

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Der Eiffelturm ist ein Wahrzeichen der Stadt Paris.

a) Die Metallkonstruktion des Eiffelturms hat eine Masse von 7300 Tonnen, das sind

$7{,}3 \cdot 10^{\square}$ Kilogramm.

1) Tragen Sie den fehlenden Exponenten in das obige Kästchen ein.

Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V, also $m = \varrho \cdot V$.
Das Metall des Eiffelturms hat eine Dichte von 7800 kg/m³.
Die Grundfläche des Eiffelturms ist quadratisch und hat eine Seitenlänge von 125 m.

Stellen Sie sich vor, die Metallkonstruktion des Eiffelturms würde eingeschmolzen und zu einem Quader mit der gleichen Grundfläche gegossen.

2) Berechnen Sie die Höhe dieses Quaders in Zentimetern.

b) Im Jahr 1950 besuchten rund 1027000 Personen den Eiffelturm, im Jahr 1980 waren es rund 3594000 Personen.

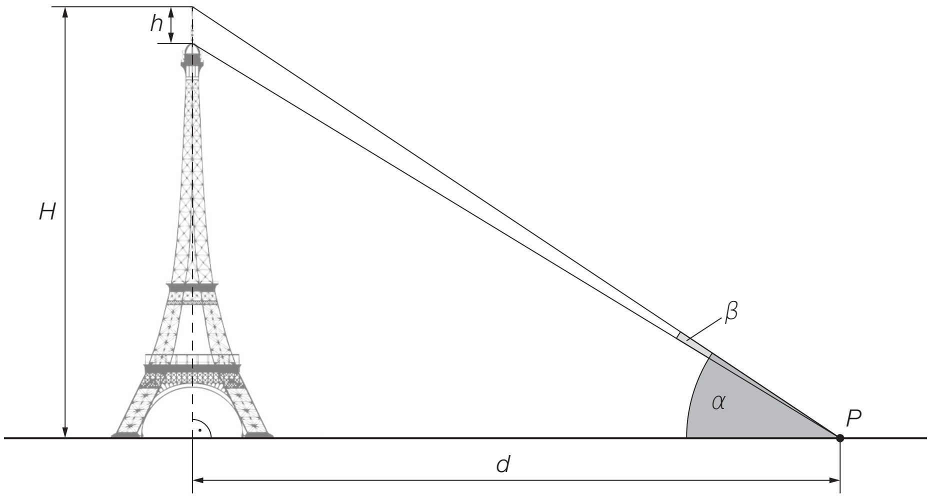
Für den Zeitraum von 1950 bis 1980 kann die Anzahl der Personen, die den Eiffelturm pro Jahr besuchten, näherungsweise durch eine lineare Funktion b beschrieben werden.

t … Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1950
$b(t)$ … Anzahl der Personen, die den Eiffelturm pro Jahr besuchten, zur Zeit t

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion b. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1950.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Von Punkt P aus sieht man den höchsten Punkt des H Meter hohen Eiffelturms unter dem Höhenwinkel α und die h Meter hohe Spitze unter dem Sehwinkel β (siehe nachstehende Abbildung).



1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Die Höhe ______①______ ist durch den Ausdruck ______②______ gegeben.

①	
H	☐
h	☐
$H - h$	☐

②	
$d \cdot \tan(\alpha + \beta)$	☐
$d \cdot \tan(\alpha - \beta)$	☐
$d \cdot \tan(\beta)$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $7{,}3 \cdot 10^{\boxed{6}}$ Kilogramm

a2) 7 300 t = 7 300 000 kg

Volumen des verbauten Metalls in m³: $V = \frac{7\,300\,000}{7\,800} = 935{,}897...$

Höhe des Quaders in m: $h = \frac{935{,}897...}{125^2} = 0{,}059...$

Der Quader wäre rund 6 cm hoch.

b1) $b(t) = k \cdot t + d$

$k = \frac{3\,594\,000 - 1\,027\,000}{30} = 85\,566{,}6...$

$d = 1\,027\,000$

$b(t) = 85\,567 \cdot t + 1\,027\,000$ *(Steigung gerundet)*

c1)

①	
$H - h$	☒

②	
$d \cdot \tan(\alpha - \beta)$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A1: für das richtige Eintragen des Exponenten

a2) 1 × A2: für den richtigen Ansatz (richtige Anwendung der Formel zur Berechnung des Volumens eines Quaders auf den gegebenen Sachverhalt)

1 × B: für das richtige Berechnen der Höhe in Zentimetern

b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung

c1) 1 × A: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fressverhalten von Furchenwalen*

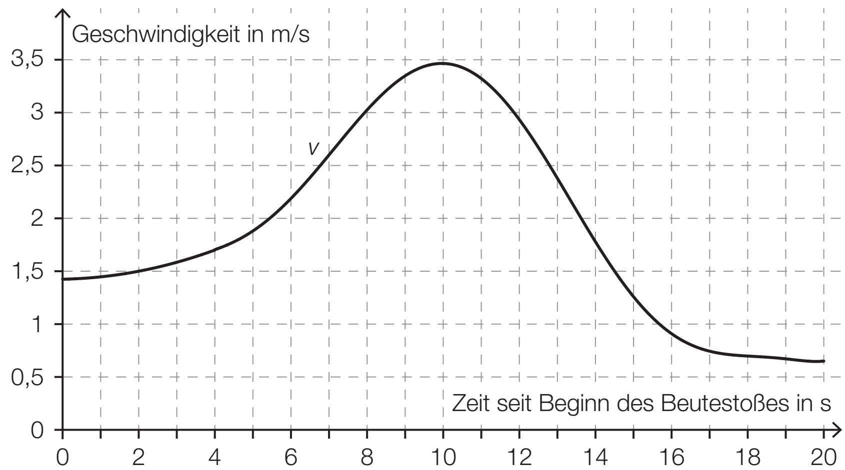
Aufgabennummer: A_288

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Bei einem Beutestoß nehmen Furchenwale mit weit geöffnetem Maul eine große Menge Meerwasser und die darin enthaltene Beute auf. Forscher/innen beobachteten dieses Fressverhalten. Sie ermittelten mithilfe von Sensoren die Geschwindigkeit des Furchenwals bei einem Beutestoß, die Größe der Maulöffnung und das gesamte Wasservolumen, das dabei aufgenommen wird.

Datenquelle: Goldbogen, Jeremy A.: Schwieriger Krillfang der Wale. In: *Spektrum der Wissenschaft* November 2010, S. 60–67.

a) Die Geschwindigkeit eines Furchenwals bei einem Beutestoß, der insgesamt 20 s dauert, kann näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Schätzen Sie die Länge s desjenigen Weges ab, der bei diesem Beutestoß zurückgelegt wird.

$s \approx$ ______________________ m

Ein Forscher behauptet:
„Der Furchenwal erreicht bei diesem Beutestoß eine maximale Geschwindigkeit von 15 km/h."

2) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

* ehemalige Klausuraufgabe

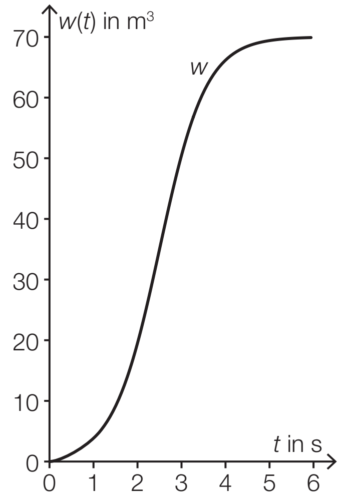
b) Die Größe der Maulöffnung bei einem Beutestoß eines Furchenwals kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{1}{175} \cdot (-17 \cdot t^4 + 204 \cdot t^3 - 922{,}5 \cdot t^2 + 1\,863 \cdot t) \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 6$$

t ... Zeit seit Beginn des Öffnens des Mauls in s
$m(t)$ ... Größe der Maulöffnung zur Zeit t in m^2

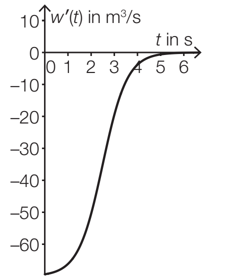
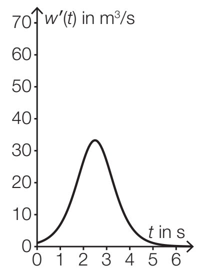
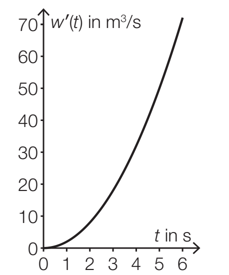
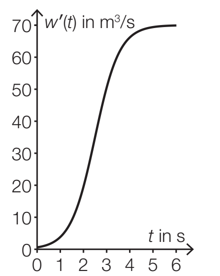
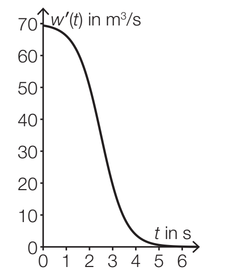
1) Ermitteln Sie die maximale Größe der Maulöffnung.

c) Die Funktion w beschreibt näherungsweise das gesamte Wasservolumen, das ein Furchenwal während eines Beutestoßes aufnimmt (siehe nachstehende Abbildung).



t ... Zeit seit Beginn der Wasseraufnahme in s
$w(t)$ ... gesamtes aufgenommenes Wasservolumen bis zur Zeit t in m^3

1) Kreuzen Sie den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion w' an. *[1 aus 5]*

	☐		☐
	☐		☐
	☐		

Möglicher Lösungsweg

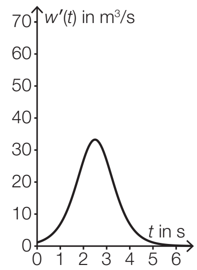
a1) $s \approx 40$ m
Toleranzbereich: [30; 50]

a2) 15 km/h sind rund 4,2 m/s, aus der Abbildung geht allerdings hervor, dass die Maximalgeschwindigkeit unter 3,5 m/s liegt.

b1) Berechnung des Hochpunkts H von m im gegebenen Intervall mittels Technologieeinsatz:
$m'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad H = (3\,|\,8{,}1)$

Die maximale Größe der Maulöffnung beträgt 8,1 m².

c1)



☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Abschätzen von s (Toleranzbereich: [30; 50])
a2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der maximalen Größe der Maulöffnung
c1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

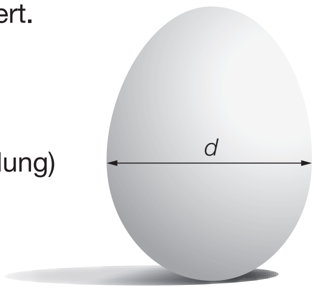
Kochzeit von Eiern*

Aufgabennummer: A_289

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Der Physiker Werner Gruber hat mit Hühnereiern experimentiert.
Er hat festgestellt, dass die Kochzeit von Eiern
unter anderem abhängt von:

- dem Durchmesser d des Eies (siehe nebenstehende Abbildung)
- der Lagertemperatur x vor dem Kochen



Datenquelle: Gruber, Werner: *Die Genussformel. Kulinarische Physik.* Salzburg: Ecowin 2008, S. 79–84.

a) Ein Ei soll weich gekocht werden. Die Kochzeit kann in Abhängigkeit vom Durchmesser d unter bestimmten Bedingungen näherungsweise durch die quadratische Funktion W beschrieben werden:

$W(d) = a \cdot d^2$

d ... Durchmesser des Eies in mm
$W(d)$ ... Kochzeit bei einem Durchmesser d in min
a ... positiver Parameter

Bei einem Durchmesser von 45 mm ergibt sich eine Kochzeit von 5 min.

1) Ermitteln Sie den Parameter a.

Zwei Eier mit unterschiedlichen Durchmessern werden weich gekocht. Der Durchmesser von Ei B ist um 10 % größer als der Durchmesser von Ei A.

2) Zeigen Sie, dass die Kochzeit von Ei B um mehr als 10 % länger ist als die Kochzeit von Ei A.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die quadratische Funktion Z beschreibt näherungsweise die Kochzeit für ein weich gekochtes Ei in Abhängigkeit von der Lagertemperatur:

$Z(x) = -0{,}024 \cdot x^2 - 2{,}16 \cdot x + 252$

x ... Lagertemperatur in °C
$Z(x)$ ... Kochzeit bei der Lagertemperatur x in s

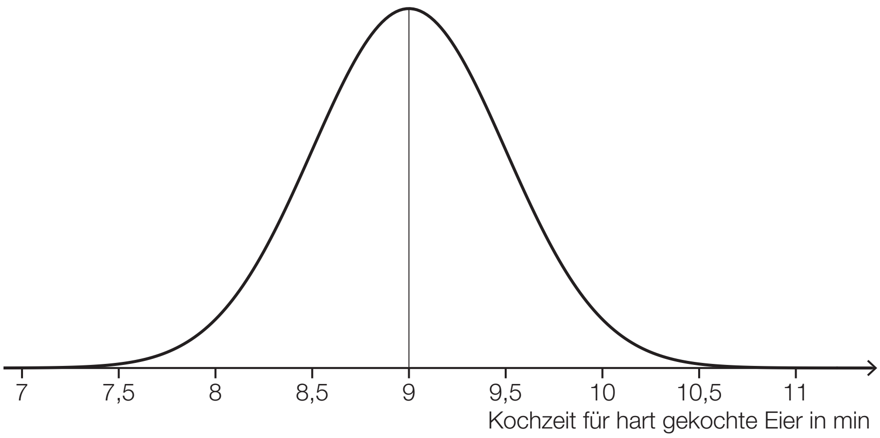
Ein Ei wird anstatt bei einer Temperatur von 4 °C (Kühlschranktemperatur) bei einer Temperatur von 20 °C (Raumtemperatur) gelagert.

1) Ermitteln Sie, um wie viele Sekunden die Kochzeit dadurch kürzer ist.

c) Die Kochzeit für weich gekochte Eier ist unter bestimmten Bedingungen annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5{,}5$ min und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}35$ min.

1) Ermitteln Sie dasjenige um den Erwartungswert symmetrische Intervall, in dem die Kochzeit für ein zufällig ausgewähltes Ei mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

Die Kochzeit für hart gekochte Eier ist unter bestimmten Bedingungen annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 9$ min und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}5$ min. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



X ... Kochzeit für hart gekochte Eier in min

2) Kreuzen Sie die auf diese Dichtefunktion nicht zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

$P(X \geq 9) = 0{,}5$	☐
$P(X \geq 10) = P(X \leq 8)$	☐
$P(8{,}5 \leq X \leq 9{,}5) \approx 0{,}68$	☐
$P(8 \leq X \leq 10) = 1 - P(X \geq 10)$	☐
$P(7 \leq X \leq 11) \approx 1$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $5 = a \cdot 45^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{45^2} = 0{,}00246...$

a2) $W(1{,}1 \cdot d) = a \cdot (1{,}1 \cdot d)^2 = a \cdot 1{,}21 \cdot d^2$
Ist der Durchmesser um 10 % größer, dann ist die Kochzeit um 21 % länger.

Der geforderte Nachweis kann auch mit konkreten Zahlen erfolgen.

b1) $Z(4) = 242{,}976$
$Z(20) = 199{,}2$

$Z(4) - Z(20) = 43{,}7...$

Die Kochzeit ist um rund 44 s kürzer.

c1) X ... Kochzeit für weich gekochte Eier in min
Berechnung des Intervalls mittels Technologieeinsatz:
$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad [4{,}92 \text{ min}; 6{,}08 \text{ min}]$

c2)

$P(8 \leq X \leq 10) = 1 - P(X \geq 10)$	☒

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Parameters *a*
a2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Zeitdifferenz
c1) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Intervalls
c2) 1 × C: für das richtige Ankreuzen

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Standseilbahnen*

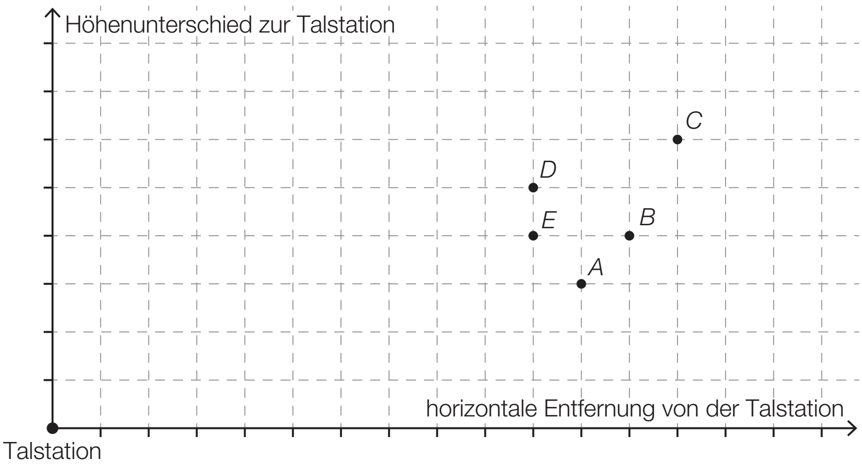
Aufgabennummer: A_290

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

Die Wägen von Standseilbahnen fahren auf Schienen und können große Steigungen bewältigen.

a) Eine bestimmte Standseilbahn hat eine konstante Steigung von 40 %. Der Streckenverlauf dieser Bahn soll im unten stehenden Koordinatensystem dargestellt werden.

Die beiden Achsen des Koordinatensystems haben die gleiche Skalierung.
Die Talstation der Bahn liegt im Koordinatenursprung. Nur einer der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* und *E* kommt als Bergstation der Bahn infrage.



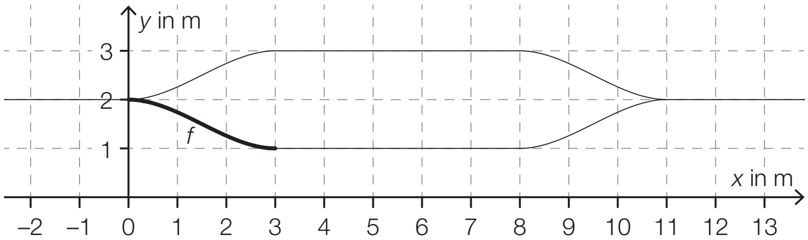
1) Kreuzen Sie denjenigen Punkt an, der als Bergstation infrage kommt. *[1 aus 5]*

A	☐
B	☐
C	☐
D	☐
E	☐

2) Berechnen Sie, welchen Höhenunterschied ein Wagen dieser Bahn überwindet, wenn er von der Talstation bis zur Bergstation eine Fahrstrecke von 180 m zurücklegt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Bei den meisten Standseilbahnen gibt es in der Mitte der Strecke eine Ausweichstelle, bei der der talwärts fahrende Wagen dem bergwärts fahrenden Wagen ausweichen kann. In der nachstehenden Abbildung ist eine solche Ausweichstelle modellhaft dargestellt.



Der Funktionsgraph von *f* schließt an den Stellen 0 und 3 knickfrei an die eingezeichneten Geradenstücke an. „Knickfrei“ bedeutet, dass die Funktionen an denjenigen Stellen, an denen ihre Graphen aneinander anschließen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Für die Funktion *f* gilt:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x, $f(x)$ … Koordinaten in m

Die Koeffizienten a, b, c und d können mithilfe eines linearen Gleichungssystems berechnet werden. Der Ansatz für zwei der benötigten Gleichungen lautet:

$27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{}$

$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{}$

1) Vervollständigen Sie mithilfe der obigen Abbildung die beiden Gleichungen, indem Sie jeweils die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen schreiben.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert des Koeffizienten d ab.

c) Der Umsatz des Weltmarktführers im Seilbahnbau betrug im Geschäftsjahr 2015/16 rund 834 Millionen Euro und lag somit um 5,04 % über dem Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15.

1) Berechnen Sie den Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 in Millionen Euro.

Möglicher Lösungsweg

a1)

E	☒

a2) Neigungswinkel $\alpha = \arctan(0{,}4) = 21{,}801...°$
Höhenunterschied $h = 180 \cdot \sin(\alpha) = 66{,}850...$

Der Wagen überwindet einen Höhenunterschied von rund 66,85 m.

b1) $27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{1}$
$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{0}$

b2) $d = 2$

c1) $\frac{834}{1{,}0504} = 793{,}9...$

Der Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 betrug rund 794 Millionen Euro.
Die Angabe des Zusatzes „Millionen Euro“ ist für die Punktevergabe nicht relevant.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Ankreuzen
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Höhenunterschieds
b1) 1 × A1: für das richtige Vervollständigen der ersten Gleichung
1 × A2: für das richtige Vervollständigen der zweiten Gleichung
b2) 1 × C: für das richtige Ablesen von d
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Umsatzes
Die Angabe des Zusatzes „Millionen Euro“ ist für die Punktevergabe nicht relevant.

Psi-Tests*

Aufgabennummer: A_291

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Seit vielen Jahren hat die GWUP (Gesellschaft zur wissenschaftlichen Untersuchung von Parawissenschaften e. V.) ein Preisgeld für den Nachweis einer paranormalen (übersinnlichen) Fähigkeit ausgeschrieben.
Die behaupteten Fähigkeiten einer Versuchsperson werden dabei mit verschiedenen Tests überprüft.

a) Eine Versuchsperson muss auf Basis ihrer paranormalen Fähigkeiten angeben, unter welcher von 10 Schachteln ein Glas Wasser versteckt ist. Der Versuch wird 13-mal durchgeführt, wobei das Glas Wasser jedes Mal neu versteckt wird. Um die Testphase zu bestehen, müssen bei 13 Durchführungen des Versuchs 7 oder mehr Treffer erzielt werden.

Es wird angenommen, dass die Versuchsperson keine paranormalen Fähigkeiten besitzt und daher bei jeder Durchführung des Versuchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % einen Treffer erzielt.

1) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Treffer.
2) Zeigen Sie, dass es wahrscheinlicher ist, dass diese Versuchsperson mindestens 1 Treffer erzielt, als dass sie gar keinen Treffer erzielt.
3) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Versuchsperson die Testphase besteht.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine Versuchsperson muss auf Basis ihrer paranormalen Fähigkeiten angeben, ob in einem Kabel Strom fließt oder nicht. Dieser Versuch wird 50-mal durchgeführt. Um die Testphase zu bestehen, müssen bei 50 Durchführungen des Versuchs 40 oder mehr Treffer erzielt werden.

Es wird angenommen, dass die Versuchsperson keine paranormalen Fähigkeiten besitzt und daher bei jeder Durchführung des Versuchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % einen Treffer erzielt.

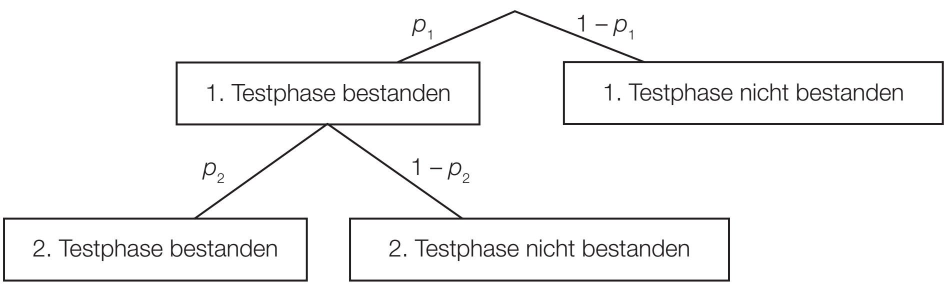
1) Ordnen Sie den beiden Ereignissen jeweils die zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Die Versuchsperson erzielt mindestens 40 Treffer.	
Die Versuchsperson erzielt höchstens 20 Treffer.	

A	$\sum\limits_{k=20}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
B	$\sum\limits_{k=0}^{20} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
C	$\sum\limits_{k=0}^{40} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
D	$\sum\limits_{k=40}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$

c) Sollte eine Versuchsperson die 1. Testphase bestehen, so muss die Versuchsperson die 2. Testphase ebenfalls bestehen, um das Preisgeld zu gewinnen.

Dieser Sachverhalt ist im nachstehenden Baumdiagramm dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe von p_1 und p_2 eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass die Versuchsperson das Preisgeld nicht gewinnt.

P(„Versuchsperson gewinnt das Preisgeld nicht") = ____________________

Möglicher Lösungsweg

a1) X ... Anzahl der Treffer
Binomialverteilung mit $n = 13$, $p = 0{,}1$:

$E(X) = n \cdot p = 13 \cdot 0{,}1 = 1{,}3$

a2) $P(X = 0) = 0{,}9^{13} = 0{,}254... < 1 - P(X = 0)$

a3) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(7 \leq X \leq 13) = 0{,}000099... = 0{,}0099...$ %
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 0,01 %.

b1)

Die Versuchsperson erzielt mindestens 40 Treffer.	D
Die Versuchsperson erzielt höchstens 20 Treffer.	B

A	$\sum_{k=20}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
B	$\sum_{k=0}^{20} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
C	$\sum_{k=0}^{40} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$
D	$\sum_{k=40}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}5^k \cdot 0{,}5^{50-k}$

c1) P(„Versuchsperson gewinnt das Preisgeld nicht“) $= (1 - p_1) + p_1 \cdot (1 - p_2)$

oder:

P(„Versuchsperson gewinnt das Preisgeld nicht“) $= 1 - p_1 \cdot p_2$

Lösungsschlüssel

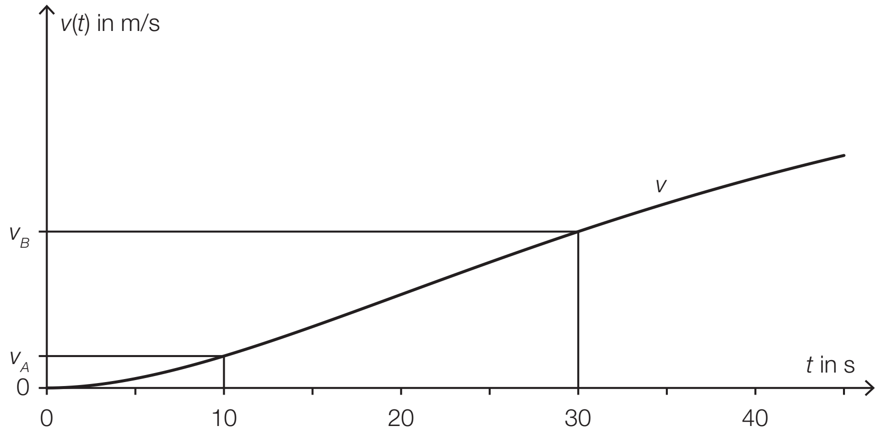
a1) 1 × B1: für das richtige Berechnen des Erwartungswerts
a2) 1 × D: für das richtige Nachweisen
a3) 1 × B2: für das richtige Ermitteln der Wahrscheinlichkeit
b1) 1 × C: für das richtige Zuordnen
c1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel

Straßenbahn (3)*

Aufgabennummer: A_123

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) Eine Straßenbahn fährt von einer Haltestelle los. Ihr Geschwindigkeitsverlauf für die ersten 45 Sekunden ist im nachstehenden Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm dargestellt.



t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Die Geschwindigkeit der Straßenbahn nimmt im Zeitintervall [10; 30] linear zu.

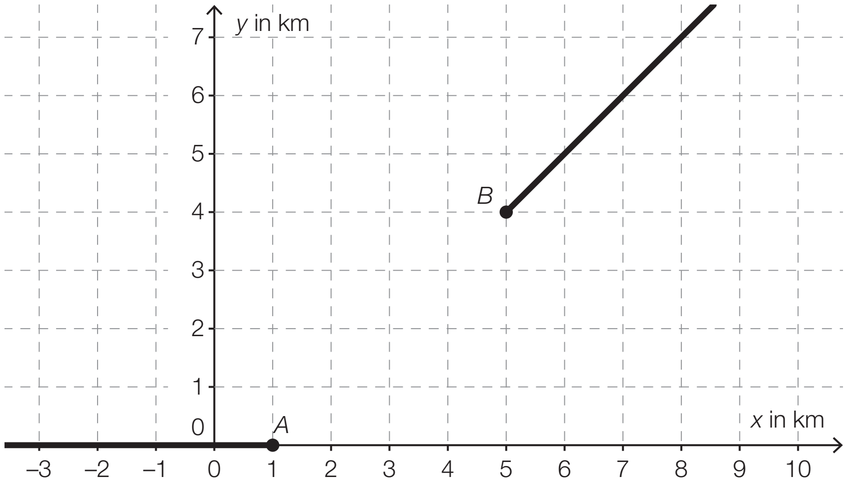
1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit der Straßenbahn 15 Sekunden nach Beginn der Fahrt aus v_A und v_B.

$v(15) =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe

b) In der nachstehenden Abbildung sind 2 geradlinige Gleise, die im Punkt A bzw. im Punkt B enden, modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden. „Knickfrei" bedeutet, dass die entsprechenden Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Diese Gleisverbindung soll durch eine Polynomfunktion g mit
$g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ modelliert werden (x, $g(x)$ in km).

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion g.

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Steigung der linearen Funktion entspricht der Beschleunigung der Straßenbahn im betrachteten Zeitintervall.

a2) $v(15) = v_A + \frac{v_B - v_A}{4}$

b1) $g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$g(1) = 0$
$g(5) = 4$
$g'(1) = 0$
$g'(5) = 1$

oder:

$a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$
$a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 4$
$3 \cdot a \cdot 1^2 + 2 \cdot b \cdot 1 + c = 0$
$3 \cdot a \cdot 5^2 + 2 \cdot b \cdot 5 + c = 1$

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang
a2) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel für $v(15)$
b1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte
1 × A2: für das richtige Erstellen der beiden Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung

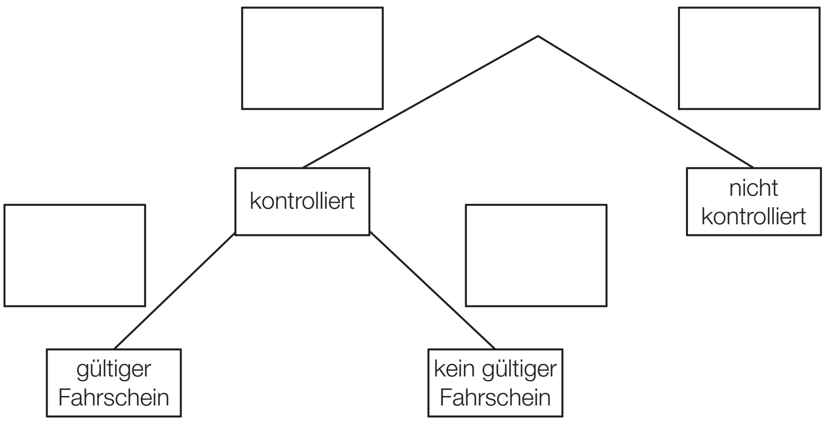
Fahrscheine*

Aufgabennummer: A_133		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

a) Im Jahr 2016 wurden von den Wiener Linien insgesamt 954,2 Millionen Fahrgäste transportiert. Bei 6,6 Millionen Fahrgästen wurden die Fahrscheine kontrolliert.
1,7 % dieser 6,6 Millionen Fahrgäste hatten keinen gültigen Fahrschein.

Das unten stehende Baumdiagramm soll den obigen Zusammenhang veranschaulichen.

1) Tragen Sie in diesem Baumdiagramm die fehlenden Wahrscheinlichkeiten ein.



In einem einfachen Modell geht man davon aus, dass diese Wahrscheinlichkeiten auch in den nachfolgenden Jahren gleich bleiben.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Fahrgast kontrolliert wird und keinen gültigen Fahrschein hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Erfahrungsgemäß wird man bei einer Fahrt mit einer bestimmten U-Bahn-Linie mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,5 % kontrolliert.

Eine Person fährt 300-mal mit dieser U-Bahn-Linie.

1) Ordnen Sie den beiden Wahrscheinlichkeiten jeweils das entsprechende Ereignis aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

$\binom{300}{2} \cdot 0{,}975^{298} \cdot 0{,}025^{2}$	
$1 - \binom{300}{1} \cdot 0{,}975^{299} \cdot 0{,}025^{1} - \binom{300}{0} \cdot 0{,}975^{300} \cdot 0{,}025^{0}$	

A	Die Person wird genau 2-mal kontrolliert.
B	Die Person wird genau 2-mal nicht kontrolliert.
C	Die Person wird mindestens 2-mal nicht kontrolliert.
D	Die Person wird mindestens 2-mal kontrolliert.

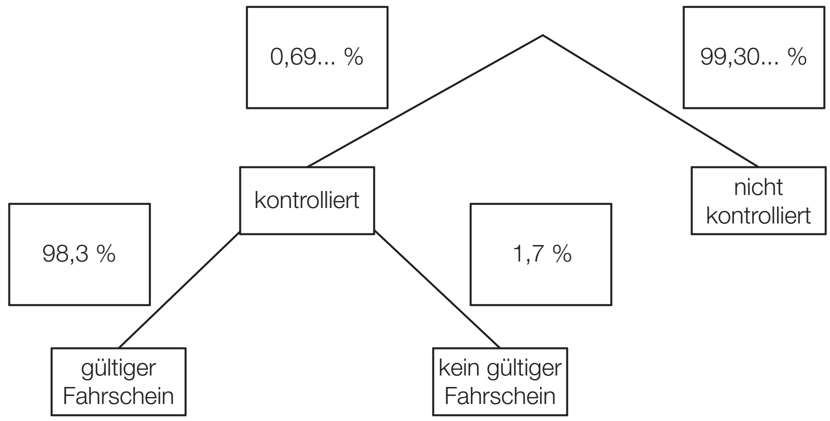
c) Für ein öffentliches Verkehrsmittel wurden an einem Tag 150 000 Fahrscheine verkauft. Ein Vollpreisfahrschein kostet € 2,60, ein ermäßigter Fahrschein € 1,20.
Durch den Verkauf von x Vollpreisfahrscheinen und y ermäßigten Fahrscheinen wurden an diesem Tag insgesamt € 337.500 eingenommen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung von x und y.

2) Berechnen Sie x und y.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $P(\text{„kontrolliert und kein gültiger Fahrschein“}) = 0{,}0069... \cdot 0{,}017 = 0{,}00011...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Fahrgast kontrolliert wird und keinen gültigen Fahrschein hat, beträgt rund 0,01 %.

b1)

$\binom{300}{2} \cdot 0{,}975^{298} \cdot 0{,}025^{2}$	A
$1 - \binom{300}{1} \cdot 0{,}975^{299} \cdot 0{,}025^{1} - \binom{300}{0} \cdot 0{,}975^{300} \cdot 0{,}025^{0}$	D

A	Die Person wird genau 2-mal kontrolliert.
B	
C	
D	Die Person wird mindestens 2-mal kontrolliert.

c1) I: $x + y = 150\,000$

II: $2{,}6 \cdot x + 1{,}2 \cdot y = 337\,500$

c2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 112\,500$

$y = 37\,500$

Lösungsschlüssel

a1) 1 x A: für das richtige Eintragen der Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm
a2) 1 x B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit
b1) 1 x C: für das richtige Zuordnen
c1) 1 x A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
c2) 1 x B: für das richtige Berechnen von x und y

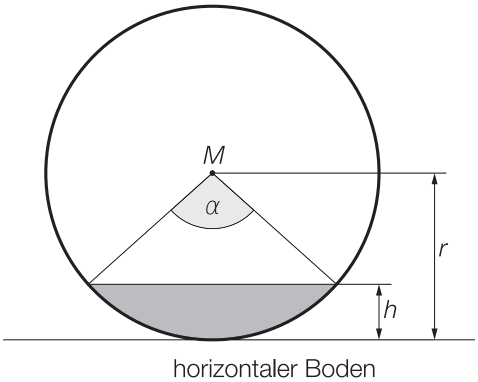
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Rund um die Heizung*

Aufgabennummer: A_140

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

a) Die nachstehende Abbildung zeigt einen waagrecht gelagerten, zylinderförmigen Öltank in der Ansicht von vorne. Der Punkt M ist der Mittelpunkt des dargestellten Kreises mit dem Radius r.



1) Erstellen Sie mithilfe von r und α eine Formel zur Berechnung der Füllhöhe h.

h = ______________________________

Für das Volumen V eines 2 m langen Öltanks gilt:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot 2$

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent das Volumen größer wäre, wenn der Radius um 20 % größer wäre.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Eine Heizung beginnt um 15 Uhr, einen Wohnraum zu erwärmen. Ab diesem Zeitpunkt kann die Raumtemperatur durch die Funktion T beschrieben werden.

$T(t) = 24 - 6 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

t ... Heizdauer in h mit $t = 0$ für 15 Uhr
$T(t)$ ... Raumtemperatur nach der Heizdauer t in °C

1) Bestimmen Sie die Raumtemperatur um 15 Uhr.

Um 16 Uhr beträgt die Raumtemperatur 21 °C.

2) Berechnen Sie den Parameter λ.

Möglicher Lösungsweg

a1) $h = r - r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

a2) $V_{neu} = (1{,}2 \cdot r)^2 \cdot \pi \cdot 2 = 1{,}44 \cdot r^2 \cdot \pi \cdot 2 = 1{,}44 \cdot V$

Das Volumen wäre um 44 % größer.

b1) $T(0) = 18$

Um 15 Uhr beträgt die Raumtemperatur 18 °C.

b2) $T(1) = 21$ *oder* $24 - 6 \cdot e^{-\lambda \cdot 1} = 21$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\lambda = \ln(2) = 0{,}693...$

Lösungsschlüssel

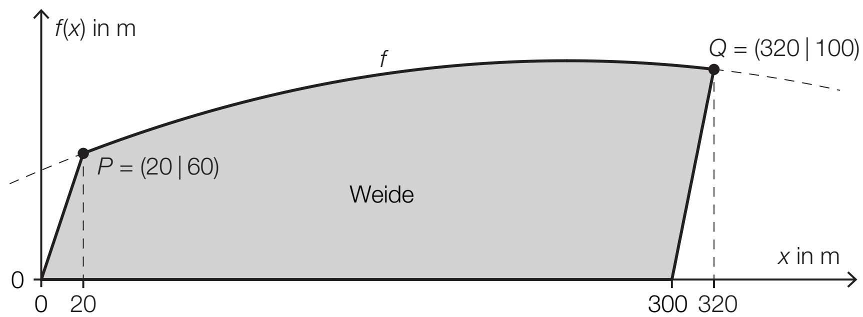
a1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
a2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Prozentsatzes
b1) 1 × B1: für das richtige Bestimmen der Raumtemperatur
b2) 1 × B2: für das richtige Berechnen des Parameters λ

Kühe auf der Weide*

Aufgabennummer: A_141

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

a) In der nachstehenden Abbildung ist eine Weide modellhaft dargestellt. Die obere Begrenzungslinie kann mithilfe einer Funktion f beschrieben werden. Die anderen drei Begrenzungslinien verlaufen geradlinig.



1) Erstellen Sie mithilfe von f eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A dieser Weide.

A = ____

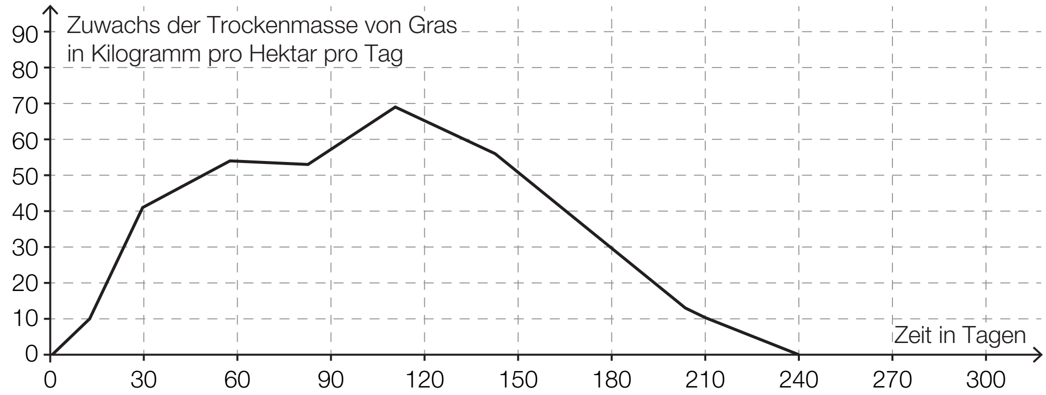
Für die Funktion f gilt: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + 52$

2) Erstellen Sie unter Verwendung der in der obigen Abbildung angegebenen Koordinaten ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a und b.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Um zu ermitteln, wie viele Kühe auf einer Weide gehalten werden können, ist der Zuwachs der Trockenmasse von Gras auf dieser Weide von Bedeutung.

Für eine bestimmte Weide wurde auf Basis mehrjähriger Messungen der nachstehend dargestellte Graph erstellt.



1 Hektar (ha) = 10 000 m^2

1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht. *[Lückentext]*

Im Zeitintervall [0; 240] liefert diese Weide rund ____①____ ____②____ Trockenmasse von Gras.

①	
90	☐
900	☐
9 000	☐

②	
kg/m^2	☐
kg/ha	☐
t/ha	☐

c) Die Körpergröße von Rindern wird durch die sogenannte *Widerristhöhe* beschrieben.

Eine Landwirtin züchtet eine Rinderrasse, für die die Widerristhöhe in Abhängigkeit vom Alter modellhaft durch die Funktion h beschrieben wird.

$h(t) = 0{,}0024 \cdot t^3 - 0{,}19 \cdot t^2 + 5{,}73 \cdot t + 73$ mit $1 \leq t \leq 24$

t … Alter in Monaten
$h(t)$ … Widerristhöhe eines Rindes im Alter t in cm

1) Berechnen Sie das Alter, in dem gemäß diesem Modell eine Widerristhöhe von 115 cm erreicht wird.
2) Weisen Sie mithilfe der 2. Ableitung von h nach, dass der Graph von h im gesamten Definitionsbereich [1; 24] negativ gekrümmt ist.

Es gilt: $h'(12) \approx 2{,}2$

3) Interpretieren Sie den Wert 2,2 im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

Möglicher Lösungsweg

a1) $A = \frac{60 \cdot 20}{2} + \int_{20}^{320} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{100 \cdot 20}{2}$ *oder* $A = \int_{20}^{320} f(x)\,\mathrm{d}x - 400$

a2) I: $f(20) = 60$
II: $f(320) = 100$

oder:

I: $a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 52 = 60$
II: $a \cdot 320^2 + b \cdot 320 + 52 = 100$

b1)

①	
9000	⊠

②	
kg/ha	⊠

c1) $h(t) = 115$

oder:

$0{,}0024 \cdot t^3 - 0{,}19 \cdot t^2 + 5{,}73 \cdot t + 73 = 115$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t = 10{,}50...$

Im Alter von rund 10,5 Monaten wird gemäß diesem Modell eine Widerristhöhe von 115 cm erreicht.

c2) $h''(t) = 0{,}0144 \cdot t - 0{,}38$

h'' ist eine steigende lineare Funktion mit der Nullstelle $t_0 = 26{,}38...$
Für alle $t < t_0$ ist $h''(t)$ negativ. Der Graph von h ist daher für alle $t < t_0$ (und somit insbesondere für alle $t \in [1; 24]$) negativ gekrümmt.

c3) Die Widerristhöhe nimmt im Alter von 12 Monaten um rund 2,2 cm/Monat zu.

Lösungsschlüssel

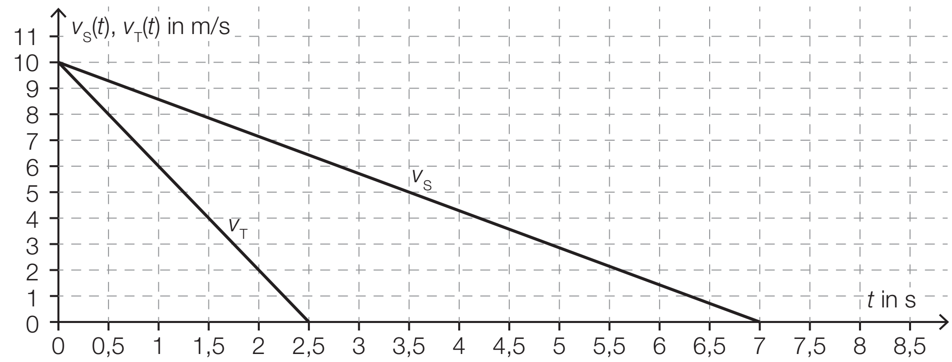
a1) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Formel
a2) 1 × A2: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems
b1) 1 × C: für das richtige Ergänzen der beiden Textlücken
c1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Alters
c2) 1 × D: für das richtige Nachweisen mithilfe der 2. Ableitung von h
c3) 1 × C: für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit

Winterliche Fahrbahnverhältnisse im Straßenverkehr*

Aufgabennummer: A_143

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Bremswege eines PKW auf schneebedeckter sowie auf trockener Fahrbahn werden miteinander verglichen.
Das nachstehende Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zeigt modellhaft den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit v_S auf schneebedeckter Fahrbahn sowie den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit v_T auf trockener Fahrbahn vom Reagieren der Bremse bis zum Stillstand des PKW.



1) Ermitteln Sie mithilfe des obigen Diagramms die (negative) Beschleunigung auf schneebedeckter Fahrbahn.

Der Bremsweg ist diejenige Strecke, die der PKW vom Reagieren der Bremse ($t = 0$) bis zum Stillstand zurücklegt.

2) Veranschaulichen Sie im obigen Diagramm den Bremsweg auf trockener Fahrbahn.
3) Ermitteln Sie mithilfe des obigen Diagramms die Differenz zwischen dem Bremsweg auf schneebedeckter Fahrbahn und dem Bremsweg auf trockener Fahrbahn.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Auf einer geraden Teststrecke werden mit zwei PKWs Bremsversuche durchgeführt. Die beiden PKWs fahren dabei in die gleiche Richtung. Während der ersten 5 s des Bremsvorgangs werden die Abstände der beiden PKWs zu einer Markierungslinie gemessen. Diese Abstände können näherungsweise durch die nachstehenden Funktionen beschrieben werden.

$s_A(t) = -2 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 12$
$s_B(t) = -2 \cdot t^2 + 24 \cdot t$

t ... Zeit in s
$s_A(t)$ ... Abstand des PKW A zur Markierungslinie zur Zeit t in m
$s_B(t)$ ... Abstand des PKW B zur Markierungslinie zur Zeit t in m

1) Berechnen Sie den Abstand des PKW A zur Markierungslinie zur Zeit $t = 2$.
2) Zeigen Sie, dass PKW A zur Zeit $t = 3$ langsamer als PKW B fährt.

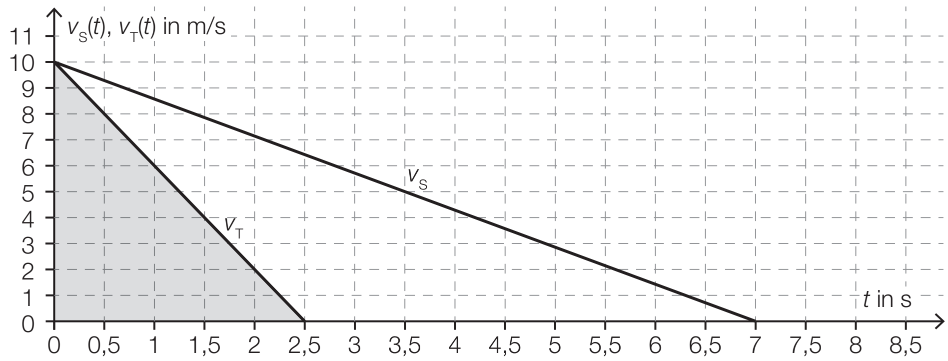
Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{\Delta v_S(t)}{\Delta t} = \frac{-10}{7} = -1{,}428...$

Die Beschleunigung beträgt rund –1,43 m/s².

Wird der Betrag der Beschleunigung angegeben, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.

a2)



a3) Bremsweg auf schneebedeckter Fahrbahn in m: $\frac{10 \cdot 7}{2} = 35$

Bremsweg auf trockener Fahrbahn in m: $\frac{10 \cdot 2{,}5}{2} = 12{,}5$

$35 - 12{,}5 = 22{,}5$

Die Differenz zwischen dem Bremsweg auf schneebedeckter Fahrbahn und dem Bremsweg auf trockener Fahrbahn beträgt 22,5 m.

b1) $s_A(2) = 44$

Der Abstand des PKW *A* zur Markierungslinie zur Zeit $t = 2$ beträgt 44 m.

b2) $s_A'(3) = 8$
$s_B'(3) = 12$

oder:

$s_A'(t) = -4 \cdot t + 20$
$s_B'(t) = -4 \cdot t + 24$
$s_A'(t) < s_B'(t)$

PKW *A* fährt zur Zeit $t = 3$ langsamer als PKW *B*.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Beschleunigung auf schneebedeckter Fahrbahn
(Wird der Betrag der Beschleunigung angegeben, so ist dies ebenfalls als richtig zu werten.)

a2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen des Bremswegs auf trockener Fahrbahn

a3) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Differenz der Bremswege

b1) 1 × B: für das richtige Berechnen des Abstands

b2) 1 × D: für das richtige Zeigen

Pflanzenwachstum*

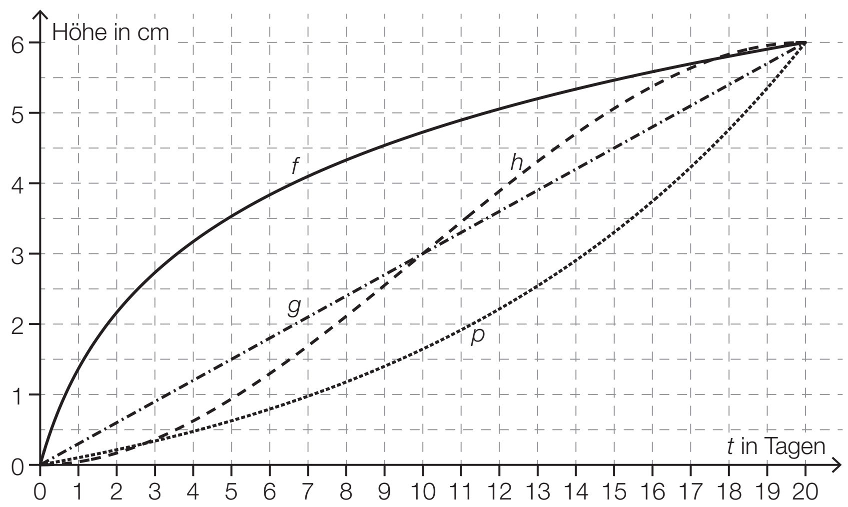
Aufgabennummer: A_292

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Die Entwicklung der Höhe von vier verschiedenen Pflanzen wurde über einen Zeitraum von 20 Tagen beobachtet und lässt sich jeweils näherungsweise durch die Funktion f, g, h bzw. p beschreiben.

t ... Zeit ab Beobachtungsbeginn in Tagen
$f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, $p(t)$ ... Höhe der entsprechenden Pflanze zur Zeit t in cm

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen dieser vier Funktionen.



Zur Zeit $t = 20$ sind diese vier Pflanzen gleich hoch.

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die mittlere Änderungsrate der Höhe in Zentimetern pro Tag im Zeitintervall [0; 20].

2) Ordnen Sie den beiden Aussagen jeweils die entsprechende Funktion aus A bis D zu. *[2 zu 4]*

Im Zeitintervall [0; 20] ist die 1. Ableitung streng monoton steigend.	
Im Zeitintervall [0; 20] ist die 2. Ableitung immer negativ.	

A	f
B	g
C	h
D	p

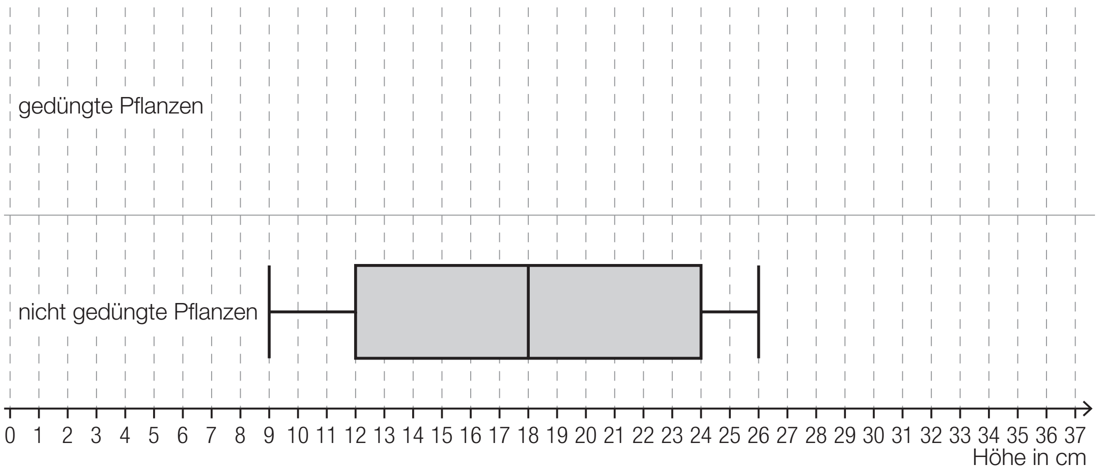
* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Höhe der Pflanzen einer bestimmten Pflanzenart wird untersucht, wobei einige der Pflanzen regelmäßig gedüngt werden und die anderen nicht. Nach einer bestimmten Zeit werden die Höhen aller beobachteten Pflanzen gemessen.

Der Boxplot für die Höhen der nicht gedüngten Pflanzen ist im unten stehenden Diagramm dargestellt.

Für die Höhen der gedüngten Pflanzen gilt:
Minimum: 19 cm
1. Quartil: 21 cm
Median: 25 cm
Interquartilsabstand: 6 cm
Spannweite: 16 cm

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Diagramm den Boxplot für die Höhen der gedüngten Pflanzen ein.



Aus dem Boxplot für die Höhen der nicht gedüngten Pflanzen kann Folgendes abgelesen werden:
Mindestens ein Viertel der Pflanzen hat eine Höhe kleiner als oder gleich einem Wert *a*, und zugleich haben mindestens drei Viertel der Pflanzen eine Höhe größer als oder gleich diesem Wert *a*.

2) Geben Sie diesen Wert *a* an.

a = ____________________ cm

c) Die Höhe einer bestimmten Pflanze wird täglich zu Mittag gemessen. Zu Beobachtungsbeginn hat die Pflanze die Höhe H_0. Sie wächst um 0,5 % pro Tag bezogen auf die Höhe des jeweils vorangegangenen Tages.

1) Erstellen Sie mithilfe von H_0 eine Formel zur Berechnung der Höhe H dieser Pflanze 10 Tage nach Beobachtungsbeginn.

H = ____

Möglicher Lösungsweg

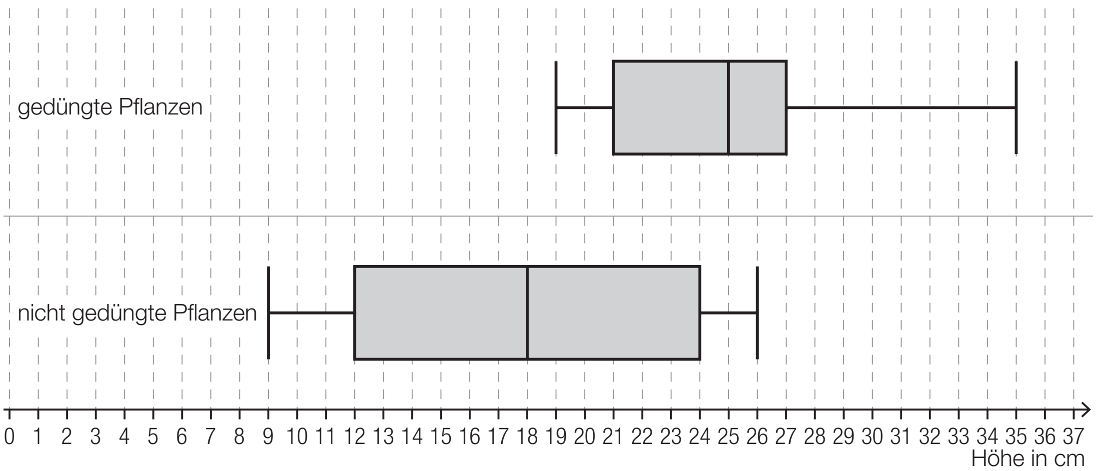
a1) mittlere Änderungsrate der Höhe in Zentimetern pro Tag: $\frac{6}{20} = 0{,}3$

a2)

Im Zeitintervall [0; 20] ist die 1. Ableitung streng monoton steigend.	D
Im Zeitintervall [0; 20] ist die 2. Ableitung immer negativ.	A

A	f
B	g
C	h
D	p

b1)



b2) $a = 12$ cm

c1) $H = H_0 \cdot 1{,}005^{10}$

oder:

$H = H_0 \cdot 1{,}0511...$

Lösungsschlüssel
a1) 1 x B: für das richtige Ermitteln der mittleren Änderungsrate a2) 1 x C: für das richtige Zuordnen b1) 1 x A: für das richtige Einzeichnen des Boxplots b2) 1 x C: für das richtige Angeben des Wertes c1) 1 x A: für das richtige Erstellen der Formel

Sicherheit auf dem Schulweg*

Aufgabennummer: A_293

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Im Nahbereich von Schulen stellen die zu- und abfahrenden Fahrzeuge ein großes Problem dar.

a) Vor einer Schule werden Geschwindigkeitsmessungen durchgeführt. Es ist bekannt, dass sich Kfz-Lenker/innen mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 26 % an das geltende Tempolimit halten.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich von 20 zufällig ausgewählten Kfz-Lenkerinnen und -Lenkern mehr als die Hälfte an das geltende Tempolimit hält.

b) Vor einer Schule wurden über einen Zeitraum von einer Woche Geschwindigkeitsmessungen durchgeführt. 2958 Fahrzeuge, das sind 85 % aller kontrollierten Fahrzeuge, fuhren langsamer als 33 km/h.

1) Berechnen Sie, wie viele Fahrzeuge in dieser Woche insgesamt kontrolliert wurden.

Die Ergebnisse dieser Geschwindigkeitsmessungen sollen in einem Boxplot dargestellt werden.

2) Erklären Sie, warum für diesen Boxplot die Aussage „Das Quartil q_3 beträgt 35 km/h“ nicht richtig sein kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Der relative Anteil derjenigen Schüler/innen, die mit dem Auto zur Schule gebracht werden, kann für einen bestimmten Zeitabschnitt modellhaft durch die Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot b^t$

t ... Zeit ab Beginn der Beobachtung
$f(t)$ ... relativer Anteil derjenigen Schüler/innen, die mit dem Auto zur Schule gebracht werden, zur Zeit t
b ... Parameter ($b > 0$, $b \neq 1$)

1) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters b auf das Monotonieverhalten der Funktion f.

Folgende Berechnung wurde durchgeführt:

$f(0) = 0{,}1 + 0{,}2 \cdot b^0 = 0{,}1 + 0 = 0{,}1$

2) Beschreiben Sie, welcher Fehler bei dieser Berechnung gemacht wurde.

Möglicher Lösungsweg

a1) Binomialverteilung mit $n = 20$, $p = 0{,}26$
X ... Anzahl der Kfz-Lenker/innen, die sich an das geltende Tempolimit halten

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X > 10) = 0{,}0054...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 0,5 %.

b1) $2\,958 : 0{,}85 = 3\,480$
In dieser Woche wurden insgesamt 3480 Fahrzeuge kontrolliert.

b2) Diese Aussage kann nicht richtig sein, da bekannt ist, dass 85 % der Fahrzeuge langsamer als 33 km/h fuhren. Daher kann das Quartil q_3 (also diejenige Geschwindigkeit, die von mindestens 25 % der Fahrzeuge erreicht oder überschritten wurde) nicht größer als 33 km/h sein.

c1) Beschreibung des Einflusses des Parameters b auf das Monotonieverhalten:
$b < 1$ ... f ist streng monoton fallend
$b > 1$ ... f ist streng monoton steigend

c2) Es wurde fälschlich $b^0 = 0$ angenommen.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit
b1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Anzahl der Fahrzeuge
b2) 1 × D: für das richtige Erklären
c1) 1 × C1: für das richtige Beschreiben des Einflusses des Parameters b
c2) 1 × C2: für das richtige Beschreiben des Fehlers

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

*New Horizons**

Aufgabennummer: A_294

Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

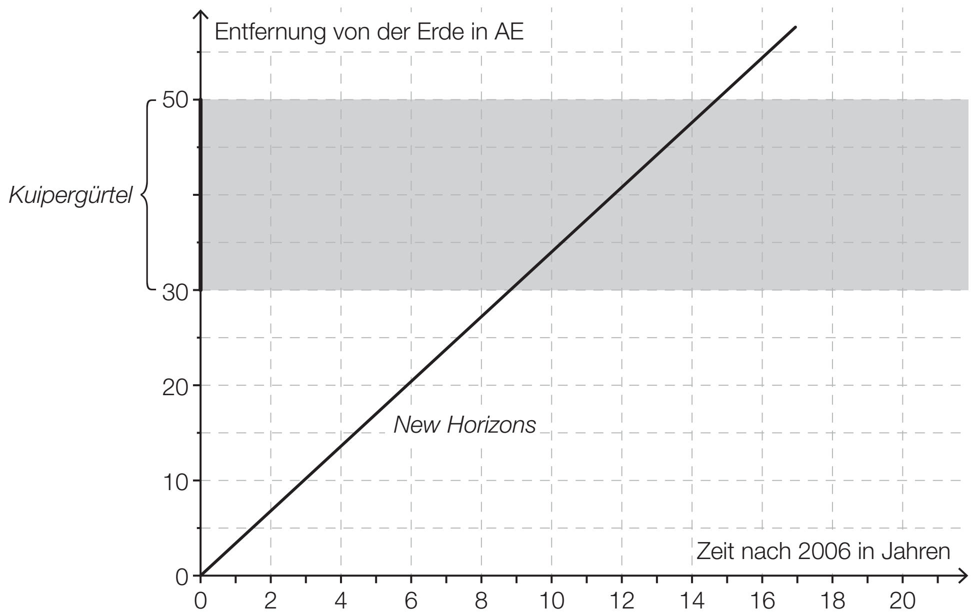
New Horizons ist eine Raumsonde, die im Jahr 2006 von der Erde aus in den Weltraum gestartet ist und immer noch unterwegs ist.

a) Rund 9 Jahre nach ihrem Start flog *New Horizons* am Zwergplaneten Pluto vorbei. Sie bewegte sich in diesen 9 Jahren mit einer mittleren Geschwindigkeit von 16,2 km/s.
Es gilt vereinfacht: 1 Jahr = 365 Tage.

1) Berechnen Sie die Länge des Weges, den *New Horizons* in 9 Jahren zurückgelegt hat.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Im unten stehenden Diagramm ist die Entfernung von *New Horizons* von der Erde in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise dargestellt. Eine in der Astronomie gebräuchliche Längeneinheit ist die sogenannte *astronomische Einheit* (AE).
In einer Entfernung von 30 bis 50 AE von der Erde durchfliegt *New Horizons* den sogenannten *Kuipergürtel.*

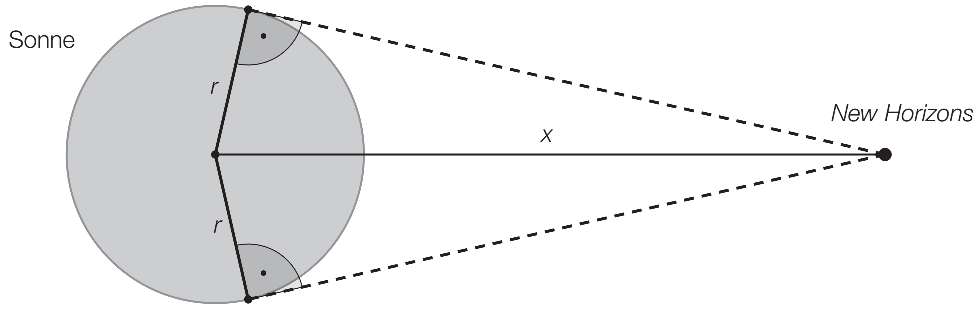


1) Lesen Sie aus dem obigen Diagramm ab, wie lange *New Horizons* benötigt, um den gesamten Kuipergürtel zu durchfliegen.

4 Jahre nach dem Start von *New Horizons* ist eine weitere Raumsonde von der Erde gestartet. Diese Raumsonde fliegt auf derselben Route wie *New Horizons*, aber mit der halben Geschwindigkeit.

2) Zeichnen Sie im obigen Diagramm die Entfernung dieser Raumsonde von der Erde in Abhängigkeit von der Zeit ein.

c) Die nachstehende (nicht maßstabgetreue) Skizze zeigt die Position von *New Horizons* relativ zur Sonne.



1) Zeichnen Sie in der obigen Skizze den Sehwinkel α ein, unter dem die Sonne von *New Horizons* aus gesehen wird.

2) Erstellen Sie aus r und x eine Formel zur Berechnung des Sehwinkels α.

α = ____

Möglicher Lösungsweg

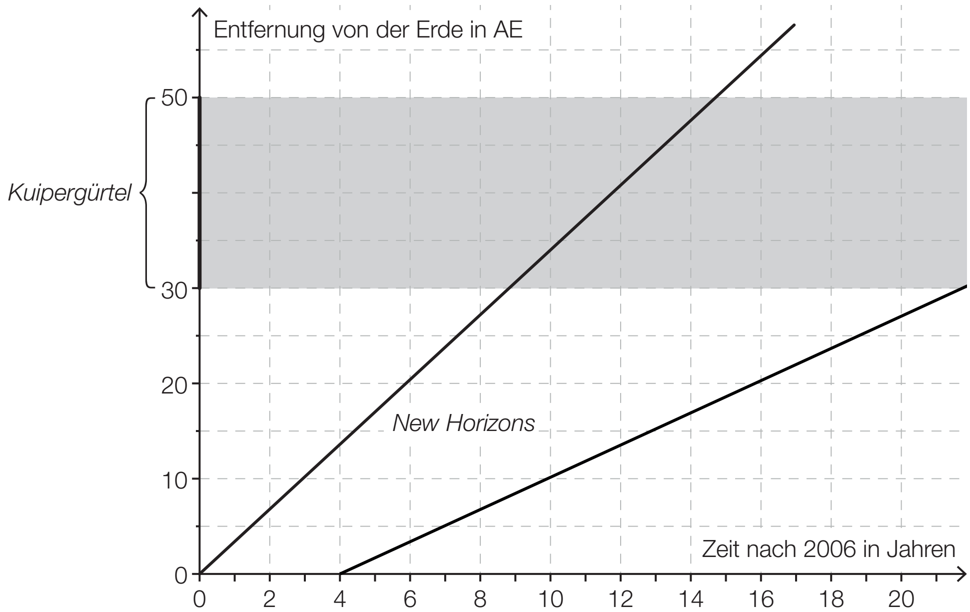
a1) $16{,}2 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 9 = 4\,597\,948\,800 \approx 4{,}6 \cdot 10^9$

Der zurückgelegte Weg hat eine Länge von rund $4{,}6 \cdot 10^9$ km.

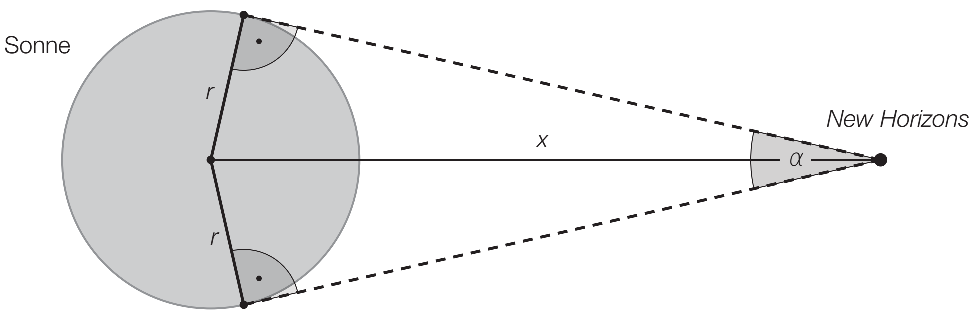
Das Ergebnis muss nicht in Gleitkommadarstellung angegeben werden.

b1) *New Horizons* benötigt etwa 6 Jahre, um den gesamten Kuipergürtel zu durchfliegen.
Toleranzbereich: [5,5 Jahre; 6,5 Jahre]

b2)



c1)



c2) $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{r}{x}\right)$

Lösungsschlüssel

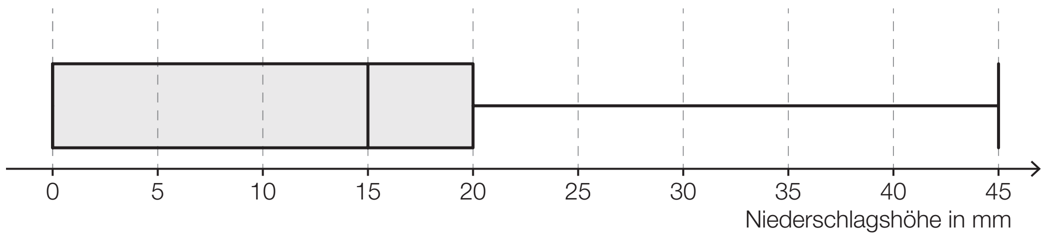
a1) 1 × B: für das richtige Berechnen der Länge des zurückgelegten Weges
b1) 1 × C: für das richtige Ablesen der Zeit (Toleranzbereich: [5,5 Jahre; 6,5 Jahre])
b2) 1 × A: für das richtige Einzeichnen
c1) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Sehwinkels α
c2) 1 × A2: für das richtige Erstellen der Formel zur Berechnung des Sehwinkels α

Niederschlagsmessung*

Aufgabennummer: A_295

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) An einem bestimmten Ort wurde an jedem Tag eines bestimmten Monats die Niederschlagshöhe gemessen. In der nachstehenden Abbildung sind die gesammelten Daten als Boxplot dargestellt.



1) Kreuzen Sie die mit Sicherheit zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

An jedem Tag dieses Monats gab es Niederschlag.	☐
An $\frac{3}{4}$ aller Tage dieses Monats betrug die Niederschlagshöhe weniger als 15 mm.	☐
An über 50 % aller Tage dieses Monats betrug die Niederschlagshöhe mehr als 20 mm.	☐
An mindestens 25 % aller Tage dieses Monats hat es keinen Niederschlag gegeben.	☐
An 75 % aller Tage dieses Monats betrug die Niederschlagshöhe mehr als 20 mm.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert)

b) Niederschlagsmengen werden oft in der Einheit „Liter pro Quadratmeter" (L/m²) angegeben. Alternativ wird aber auch die zugehörige Niederschlagshöhe in der Einheit „Millimeter" (mm) angegeben.

1) Zeigen Sie, dass eine Niederschlagsmenge von 1 L/m² genau einer Niederschlagshöhe von 1 mm entspricht.

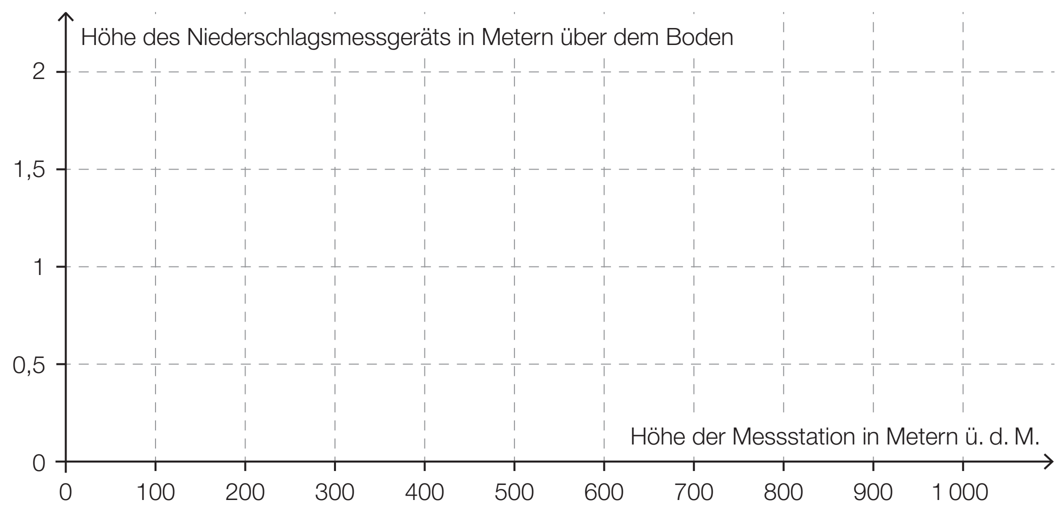
Im Juni 2016 betrug die Niederschlagshöhe an einer bestimmten Messstation in Wien insgesamt 79 mm. Der Normalwert (langjähriger Durchschnittswert) für Wien im Juni beträgt 70 mm.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Niederschlagshöhe im Juni 2016 über dem Normalwert lag.

c) Die Höhe, in der Niederschlagsmessgeräte über dem Boden aufgestellt werden, hängt von der Höhe der Messstation über dem Meeresspiegel (ü. d. M.) ab.

Bei einer Höhe der Messstation von bis zu 500 m ü. d. M. beträgt die Höhe, in der ein Niederschlagsmessgerät aufgestellt wird, genau 1 m über dem Boden.
Bei einer Höhe der Messstation von mehr als 500 m ü. d. M. und bis zu 800 m ü. d. M. wird das Niederschlagsmessgerät 1,5 m über dem Boden aufgestellt.
Bei einer Höhe der Messstation von mehr als 800 m ü. d. M. wird das Niederschlagsmessgerät 2 m über dem Boden aufgestellt.

1) Veranschaulichen Sie diese Informationen im nachstehenden Koordinatensystem.



Möglicher Lösungsweg

a1)

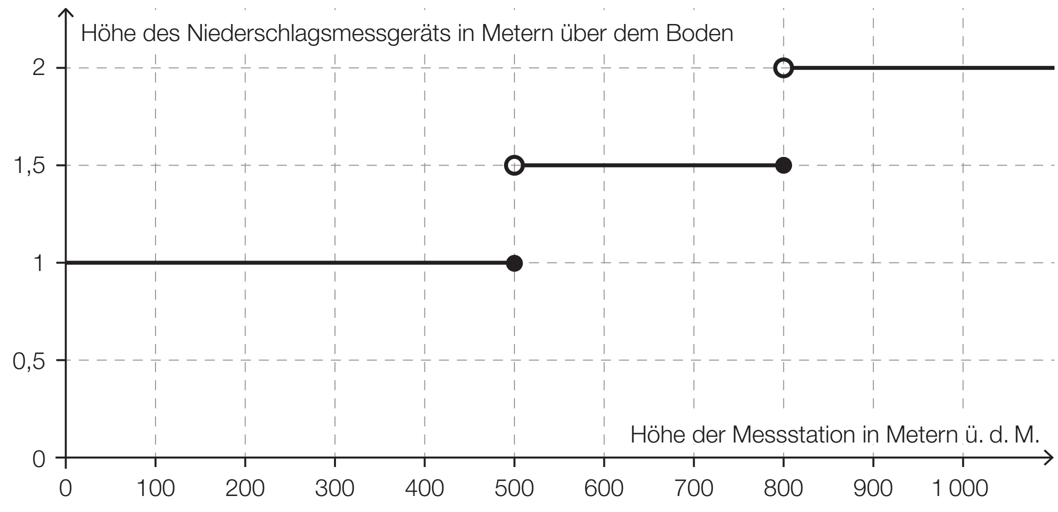
An mindestens 25 % aller Tage dieses Monats hat es keinen Niederschlag gegeben.	☒

b1) $1\,\frac{\text{L}}{\text{m}^2} = \frac{1\text{ dm}^3}{1\text{ m}^2} = \frac{10^6\text{ mm}^3}{10^6\text{ mm}^2} = 1\text{ mm}$

b2) $\frac{79-70}{70} = 0{,}128...$

Die Niederschlagshöhe im Juni 2016 lag um rund 13 % über dem Normalwert.

c1)



Für die Punktevergabe ist entscheidend, dass die horizontalen Abschnitte jeweils in der richtigen Höhe dargestellt sind. Das Verhalten an den Sprungstellen ist für die Punktevergabe nicht relevant.

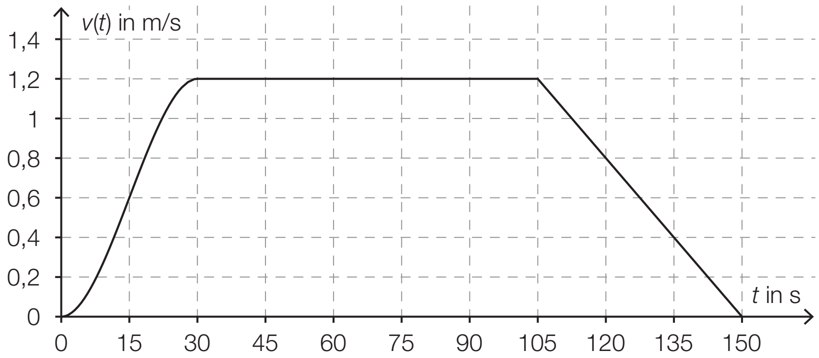
Lösungsschlüssel
a1) 1 × C: für das richtige Ankreuzen
b1) 1 × D: für das richtige Zeigen
b2) 1 × B: für das richtige Berechnen des Prozentsatzes
c1) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen

*Torre de Collserola**

Aufgabennummer: A_296

Technologieeinsatz: möglich ☐ erforderlich ☒

Vom Fußpunkt des *Torre de Collserola* (Fernsehturm in Barcelona) bis zu dessen Aussichtsplattform führt ein Aufzug senkrecht nach oben.
In der nachstehenden Abbildung ist die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v bei einer Aufzugsfahrt modellhaft dargestellt.



t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

a) 1) Ermitteln Sie die maximale Geschwindigkeit bei dieser Aufzugsfahrt in km/h.

b) 1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Steigung k der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v im Zeitintervall [105; 150].

2) Interpretieren Sie die Steigung k und ihr Vorzeichen im gegebenen Sachzusammenhang.Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

c) Im Zeitintervall [0; 30] gilt für die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v:

$$v(t) = -\frac{1}{11\,250} \cdot t^3 + \frac{1}{250} \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 30$$

Die Aufzugsfahrt dauert insgesamt 150 Sekunden.

1) Berechnen Sie die Länge des Weges, der bei dieser Aufzugsfahrt insgesamt zurückgelegt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1) maximale Geschwindigkeit: 1,2 m/s
$1{,}2 \cdot 3{,}6 = 4{,}32$

Die maximale Geschwindigkeit beträgt 4,32 km/h.

b1) $k = -\frac{1{,}2}{45} = -0{,}0266...$

b2) k ist die Beschleunigung des Aufzugs in m/s^2. Das Vorzeichen gibt an, dass die Geschwindigkeit abnimmt.

oder:

Pro Sekunde nimmt die Geschwindigkeit des Aufzugs um rund 0,027 m/s ab.

c1) $\int_0^{30}\left(-\frac{1}{11\,250} \cdot t^3 + \frac{1}{250} \cdot t^2\right) \mathrm{d}t + 1{,}2 \cdot 75 + \frac{1{,}2 \cdot 45}{2} = 135$

oder:

$\frac{1{,}2 \cdot 30}{2} + 1{,}2 \cdot 75 + \frac{1{,}2 \cdot 45}{2} = 135$

Der zurückgelegte Weg hat eine Länge von insgesamt 135 m.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der maximalen Geschwindigkeit in km/h
b1) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Steigung k
b2) 1 × C: für das richtige Interpretieren der Steigung k und ihres Vorzeichens unter Verwendung der entsprechenden Einheit(en) im gegebenen Sachzusammenhang
c1) 1 × A: für den richtigen Ansatz (Länge des zurückgelegten Weges entspricht dem Inhalt derjenigen Fläche, die der Graph mit der horizontalen Achse im Intervall [0; 150] einschließt)
1 × B: für das richtige Berechnen der Länge des zurückgelegten Weges

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

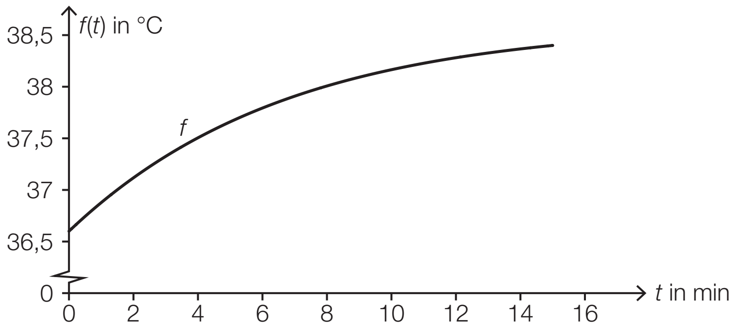
Sauna*

Aufgabennummer: A_297
Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

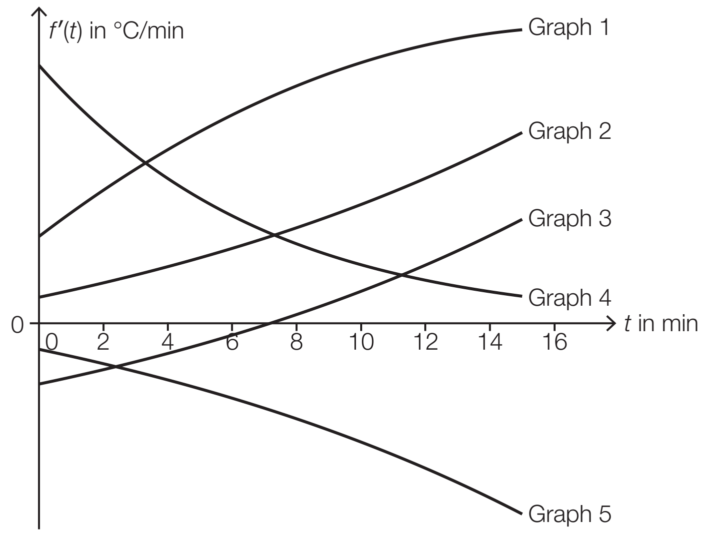
In der kalten Jahreszeit besuchen viele Menschen regelmäßig eine Sauna.

a) Der Graph der Funktion *f* in der nachstehenden Abbildung zeigt die Körpertemperatur eines Saunagasts während eines Saunagangs.

t ... Zeit seit Betreten der Sauna in min
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C



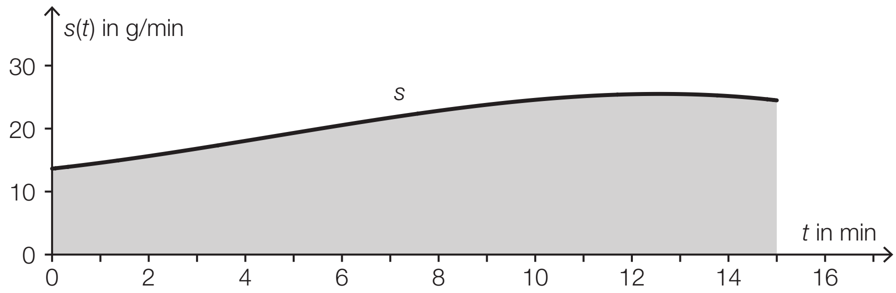
1) Kreuzen Sie den zutreffenden Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion f' an. *[1 aus 5]*



Graph 1	☐
Graph 2	☐
Graph 3	☐
Graph 4	☐
Graph 5	☐

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Die Funktion s, deren Graph in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist, beschreibt die momentane Schweißabsonderung eines Saunagasts zur Zeit t bei einem 15-minütigen Saunagang.

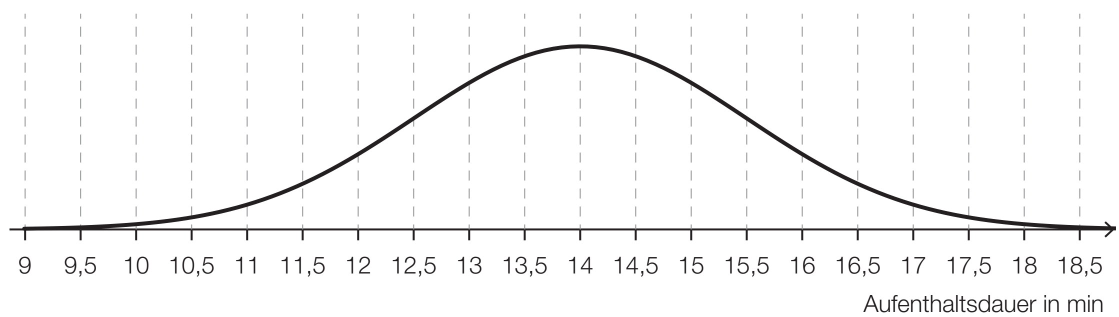


1) Erstellen Sie mithilfe der Funktion s eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche.

A = ____

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von A im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

c) In einer bestimmten Sauna ist die Aufenthaltsdauer der Saunagäste annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 14$ min. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Standardabweichung σ ab.

σ = ____ min

2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass die Aufenthaltsdauer eines zufällig ausgewählten Saunagasts mehr als 16 min beträgt.

d) Frau Maier nimmt sich vor, zwischen Oktober und April an jedem Mittwoch die Sauna zu besuchen.
Sie stellt fest, dass sie diese Termine unabhängig voneinander mit jeweils 90%iger Wahrscheinlichkeit wahrnehmen kann.

Man betrachtet n Wochen in diesem Zeitraum.

1) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet werden kann.
$P(E) = 1 - 0{,}1^n$

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

a1)

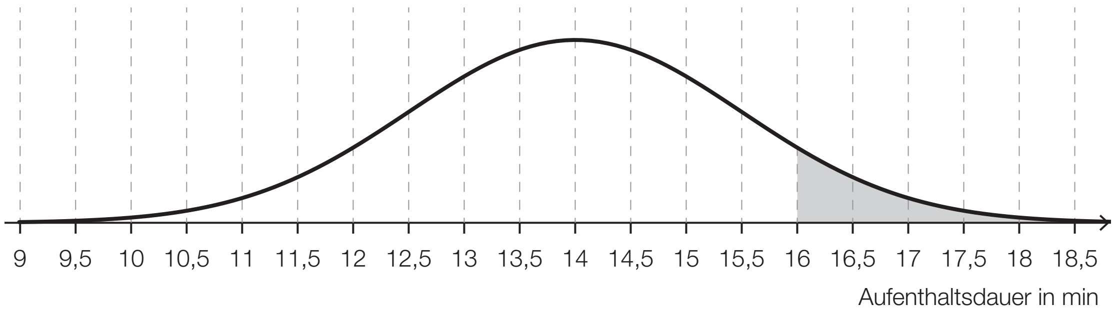
Graph 4	☒

b1) $A = \int_0^{15} s(t)\,\mathrm{d}t$

b2) A ist die Schweißmenge in Gramm, die der Saunagast während des Saunagangs abgesondert hat.

c1) σ = 1,5 min
Toleranzbereich: [1; 2]

c2)



d1) In diesen n Wochen besucht sie (mittwochs) mindestens 1-mal die Sauna.

Lösungsschlüssel

a1) 1 × A: für das richtige Ankreuzen
b1) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel
b2) 1 × C: für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit
c1) 1 × C: für das richtige Ablesen von σ (Toleranzbereich: [1; 2])
c2) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit
d1) 1 × C: für das richtige Beschreiben des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang

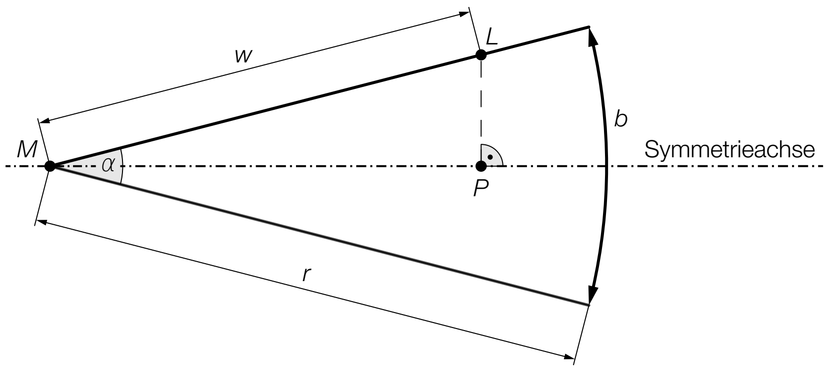
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Speerwurf*

Aufgabennummer: A_303

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Der Wurfbereich beim Speerwurf hat die Form eines Kreissektors (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung in der Ansicht von oben).



z ist die Differenz aus der tatsächlichen Wurfweite $w = \overline{ML}$ und der Streckenlänge $\overline{MP}$.

1) Stellen Sie unter Verwendung von w und α eine Formel zur Berechnung von z auf.

z = ____

Für die Bogenlänge b des Kreissektors und den Öffnungswinkel α des Kreissektors gilt:
b = 48,08 m
α = 29°

2) Berechnen Sie den Radius r des Kreissektors.

b) Ein Teil des Graphen der Funktion f beschreibt die Flugbahn der Speerspitze bei einem bestimmten Wurf.

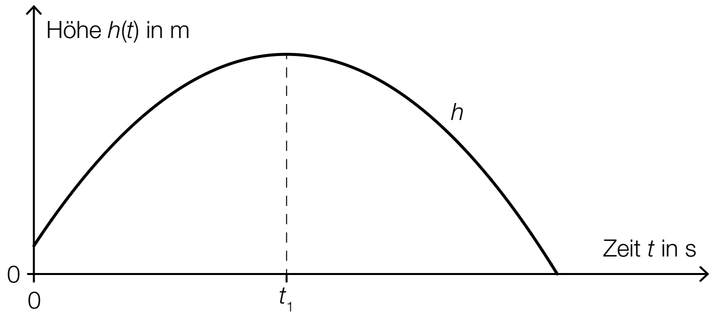
$f(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}7 \cdot x + 1{,}8 \quad \text{mit} \quad x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt in m
$f(x)$ ... Höhe über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Berechnen Sie die horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt, in der die Speerspitze bei diesem Wurf auf dem Boden auftrifft.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Die quadratische Funktion h beschreibt die Höhe der Speerspitze während eines bestimmten Wurfes in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D so zu, dass zutreffende Aussagen entstehen.

Die momentane Änderungsrate von h zur Zeit t ist negativ für	
Die momentane Änderungsrate von h zur Zeit t ist null für	

A	$t = 0$
B	$t = t_1$
C	$t < t_1$
D	$t > t_1$

Möglicher Lösungsweg

a1) $z = w - w \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

a2) $b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180°}$

$r = \frac{b \cdot 180°}{\pi \cdot \alpha} = \frac{48{,}08 \cdot 180°}{\pi \cdot 29°} = 94{,}9...$

Der Radius r beträgt rund 95 m.

b1) $f(x) = 0$ *oder* $-0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}7 \cdot x + 1{,}8 = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$(x_1 = -2{,}483...)$, $x_2 = 72{,}483...$

Die Speerspitze trifft in einer horizontalen Entfernung von rund 72,48 m auf dem Boden auf.

c1)

Die momentane Änderungsrate von h zur Zeit t ist negativ für	D
Die momentane Änderungsrate von h zur Zeit t ist null für	B

A	$t = 0$
B	$t = t_1$
C	$t < t_1$
D	$t > t_1$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Radius *r*.
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der horizontalen Entfernung.
c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kartenspiel*

Aufgabennummer: A_304

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Ein Kartenstapel besteht aus 20 *Diener*-Karten und 10 *Zauber*-Karten. Sabine zieht zufällig ohne Zurücklegen 3 Karten aus diesem Kartenstapel.

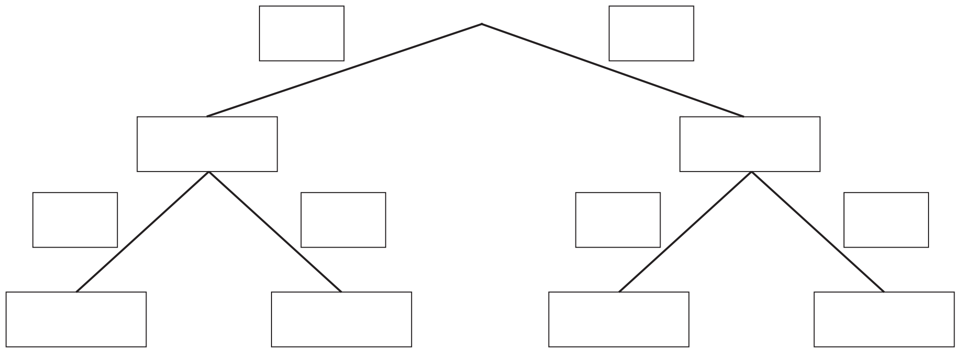
1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sabine dabei genau 1 *Zauber*-Karte zieht.

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$$P(E) = 1 - \frac{20}{30} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{18}{28} = 0{,}719...$$

b) Lukas wählt für 40 % seiner Spiele eine aggressive Strategie, für die restlichen Spiele wählt er eine defensive Strategie.
Spiele, für die er eine aggressive Strategie wählt, gewinnt er mit der Wahrscheinlichkeit p.
Spiele, für die er eine defensive Strategie wählt, gewinnt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 54 %.

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass Lukas ein zufällig ausgewähltes Spiel gewinnt, beträgt 53,2 %.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

* ehemalige Klausuraufgabe

Möglicher Lösungsweg

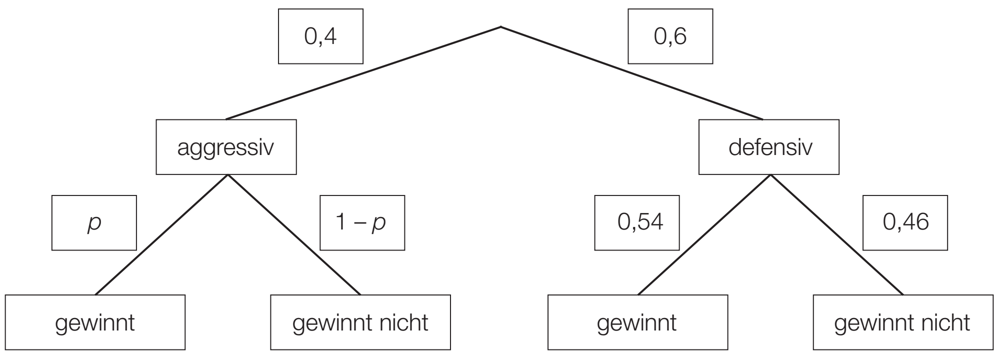
a1) X ... Anzahl der gezogenen *Zauber*-Karten

$P(X = 1) = 3 \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{19}{28} = 0{,}4679...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Sabine genau 1 *Zauber*-Karte zieht, beträgt rund 46,8 %.

a2) E ... „Sabine zieht mindestens 1 *Zauber*-Karte“

b1)



Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn im Baumdiagramm für p = *0,52 und für 1 –* p = *0,48 angegeben wird (vgl. Lösung zu b2).*
Der Punkt ist auch zu vergeben, wenn im Baumdiagramm „verliert“ anstelle von „gewinnt nicht“ geschrieben wird.

b2) $0{,}4 \cdot p + 0{,}6 \cdot 0{,}54 = 0{,}532$

$p = 0{,}52$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben des Ereignisses im gegebenen Sachzusammenhang.
b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit p.

Leuchtdioden*

Aufgabennummer: A_305

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

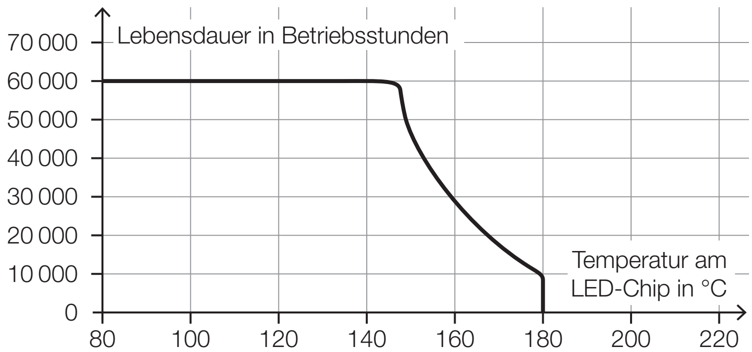
Leuchtdioden (LEDs) werden häufig als Beleuchtungsmittel verwendet.

a) LEDs haben einen begrenzten Öffnungswinkel. Für eine sogenannte *Rundum-Beleuchtung* werden daher mehrere LEDs benötigt. Die Anzahl der LEDs gleicher Bauart, die für eine Rundum-Beleuchtung benötigt werden, kann gemäß der nachstehenden Vorschrift berechnet werden.

Dividiere 1 durch den Sinus von einem Viertel des Öffnungswinkels.
Quadriere die erhaltene Zahl.
Ist das nun erhaltene Ergebnis nicht ganzzahlig, dann runde es auf die nächstgrößere ganze Zahl auf.

1) Berechnen Sie die Anzahl der LEDs mit einem Öffnungswinkel von 40°, die man gemäß der obigen Vorschrift für eine Rundum-Beleuchtung benötigt.

b) Die Lebensdauer von LEDs ist abhängig von der Temperatur am LED-Chip. Auf einer Website ist dieser Zusammenhang grafisch dargestellt (siehe nachstehende Abbildung).



Quelle: https://www.led-studien.de/wp-content/uploads/2015/10/Lebensdauer-nach-LED-Temperatur.png [16.08.2019] (adaptiert).

1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Lebensdauer bei Erhöhung der Temperatur von 140 °C auf 160 °C.

2) Begründen Sie, warum es sich bei der in der obigen Abbildung dargestellten Kurve nicht um den Graphen einer Funktion handeln kann.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) Ein Maß für die Helligkeit einer Lichtquelle ist der sogenannte *Lichtstrom*. Dieser wird in der Einheit Lumen angegeben.
Man geht davon aus, dass der maximale Lichtstrom von LEDs durch technische Weiterentwicklung exponentiell ansteigen wird.
Dabei gilt: Alle 10 Jahre steigt der maximale Lichtstrom von LEDs auf das 20-Fache.

Diese Entwicklung kann durch eine Exponentialfunktion L modelliert werden.

$L(t) = L_0 \cdot a^t$

t … Zeit in Jahren
$L(t)$ … maximaler Lichtstrom zur Zeit t in Lumen
L_0 ... maximaler Lichtstrom zur Zeit $t = 0$ in Lumen
a ... positiver Parameter

1) Berechnen Sie den Parameter a.

2) Interpretieren Sie den Wert des Parameters a im gegebenen Sachzusammenhang.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{40°}{4}\right)}\right)^2 = 33{,}1...$

Für eine Rundum-Beleuchtung benötigt man 34 LEDs.

b1) $\frac{29\,000 - 60\,000}{160 - 140} = -1\,550$

Toleranzbereich: [–1 600; –1 500]

b2) Bei der dargestellten Kurve handelt es sich nicht um den Graphen einer Funktion, da nicht jedem Argument genau ein Funktionswert zugeordnet wird. (Hier sind der Temperatur 180 °C mehrere Lebensdauer-Werte zugeordnet.)

c1) $20 = a^{10} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[10]{20} = 1{,}349...$

c2) Der maximale Lichtstrom von LEDs nimmt laut diesem Modell pro Jahr um rund 35 % (bezogen auf den Wert des jeweiligen Vorjahrs) zu.

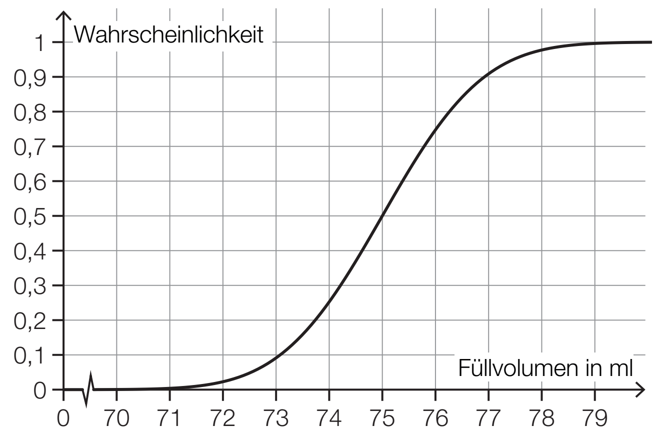
Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl.
b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der mittleren Änderungsrate.
b2) Ein Punkt für das richtige Begründen.
c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Parameters *a*.
c2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Kosmetikartikel*

Aufgabennummer: A_306		
Technologieeinsatz:	möglich ☐	erforderlich ☒

a) Ein Parfum wird in bestimmte Fläschchen abgefüllt. Das Füllvolumen wird dabei als annähernd normalverteilt mit der Standardabweichung σ = 1,5 ml angenommen. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Erwartungswert μ des Füllvolumens ab.

μ = ________________________ ml

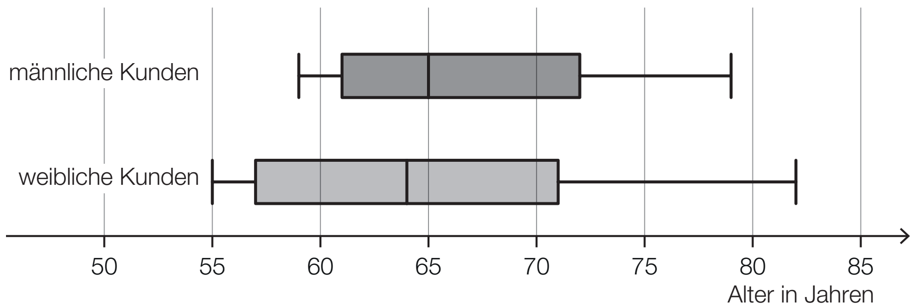
2) Ermitteln Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem das Füllvolumen eines zufällig ausgewählten Fläschchens mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % liegt.

3) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass das Füllvolumen eines zufällig ausgewählten Fläschchens höchstens 76 ml beträgt.

* ehemalige Klausuraufgabe

b) Ein bestimmter Kosmetikartikel wurde sowohl von männlichen als auch von weiblichen Kunden gekauft.

Eine Erhebung zum Alter aller Kunden, die diesen Kosmetikartikel gekauft haben, ist in der nachstehenden Abbildung in Form zweier Boxplots zusammengefasst.



1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

Die Spannweite des Alters der weiblichen Kunden ist kleiner als diejenige der männlichen Kunden.	☐
Die jüngste Person, die den Kosmetikartikel gekauft hat, ist männlich.	☐
Der Median des Alters der männlichen Kunden ist größer als derjenige der weiblichen Kunden.	☐
Mehr als die Hälfte der weiblichen Kunden ist älter als 65 Jahre.	☐
Das 3. Quartil des Alters der weiblichen Kunden ist größer als dasjenige der männlichen Kunden.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\mu = 75$ ml

a2) X ... Füllvolumen in ml

$P(X \leq a) = 0{,}1$

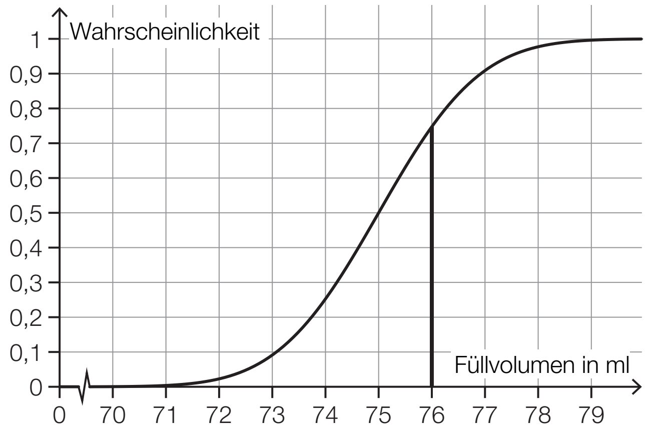
Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 73{,}077...$

Intervall: [73,077...; 76,922...]
Auch ein Ermitteln mithilfe der Abbildung ist als richtig zu werten.

Toleranzbereich für die untere Intervallgrenze: [73; 73,2]
Toleranzbereich für die obere Intervallgrenze: [76,8; 77]

a3)



b1)

Der Median des Alters der männlichen Kunden ist größer als derjenige der weiblichen Kunden.	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ablesen des Erwartungswerts μ.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Intervalls.
a3) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.
b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

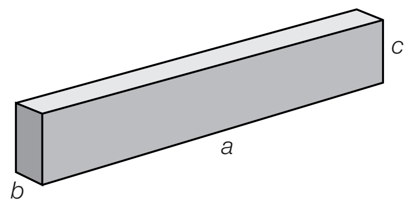
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Holzfeuchte und Holztrocknung*

Aufgabennummer: A_307

Technologieeinsatz: möglich ☒ erforderlich ☐

a) Beim Trocknen verkürzen sich die Seitenlängen eines feuchten quaderförmigen Holzstücks.



a, b, c ... Seitenlängen des quaderförmigen Holzstücks in feuchtem Zustand

In trockenem Zustand ist die Seitenlänge a um 0,5 %, die Seitenlänge b um 10 % und die Seitenlänge c um 5 % kürzer als in feuchtem Zustand.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens V des quaderförmigen Holzstücks in trockenem Zustand auf. Verwenden Sie dabei die Seitenlängen a, b und c.

$V =$ ________________________________

2) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent das Volumen des quaderförmigen Holzstücks in trockenem Zustand kleiner als in feuchtem Zustand ist.

b) Holzbretter der gleichen Holzsorte mit verschiedenen Dicken trocknen unterschiedlich schnell. Dieser Zusammenhang kann näherungsweise durch die nachstehende Formel beschrieben werden.

$$\frac{T}{t} = \left(\frac{D}{d}\right)^{1,5}$$

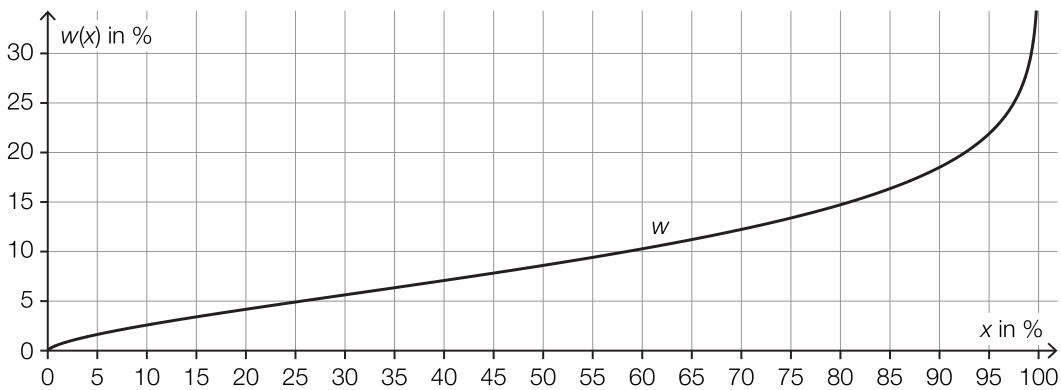
	Dicke	Trockenzeit
Holzbrett 1	d	t
Holzbrett 2	D	T

* ehemalige Klausuraufgabe

1) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der <u>nicht</u> dem obigen Zusammenhang entspricht. *[1 aus 5]*

$\frac{T}{t} = \left(\frac{D}{d}\right)^{\frac{3}{2}}$	☐
$\frac{T}{t} = \left(\frac{d}{D}\right)^{-1,5}$	☐
$\frac{T}{t} = \sqrt{\left(\frac{D}{d}\right)^3}$	☐
$\frac{t}{T} = \left(\frac{d}{D}\right)^{-\frac{3}{2}}$	☐
$\frac{t}{T} = \left(\frac{d}{D}\right)^{1,5}$	☐

c) Im nachstehenden Diagramm ist der Zusammenhang zwischen der relativen Luftfeuchtigkeit x (in Prozent) und dem Wassergehalt $w(x)$ (in Prozent) einer bestimmten Holzsorte bei der Lagerung dargestellt.



1) Kennzeichnen Sie im obigen Diagramm denjenigen Punkt $P = (x_0 | w(x_0))$, für den gilt:
$w'(x_0) = 1$

Der im obigen Diagramm dargestellte Zusammenhang soll im Intervall [45; 55] mithilfe der Punkte $A = (45 | 7{,}8)$ und $B = (55 | 9{,}4)$ durch eine lineare Funktion modelliert werden.

2) Stellen Sie eine Gleichung dieser linearen Funktion auf.

Möglicher Lösungsweg

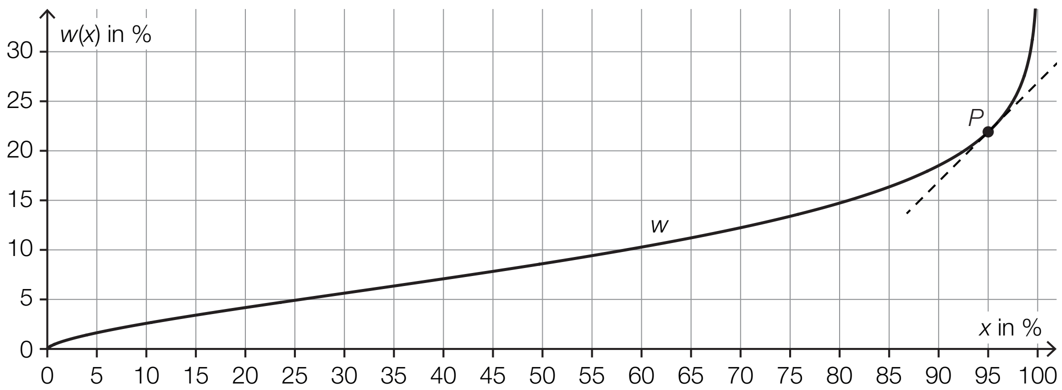
a1) $V = 0{,}995 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot a \cdot b \cdot c = 0{,}850725 \cdot a \cdot b \cdot c$

a2) $1 - 0{,}850725 = 0{,}149275$
Das Volumen des Holzstücks ist in trockenem Zustand um rund 14,9 % kleiner als in feuchtem Zustand.

b1)

$\frac{t}{T} = \left(\frac{d}{D}\right)^{-\frac{3}{2}}$	☒

c1)



Toleranzbereich für x_0: [92; 97]

c2) $f(x) = k \cdot x + d$
x ... relative Luftfeuchtigkeit in %
$f(x)$ ... Wassergehalt von Holz dieser Holzsorte bei der relativen Luftfeuchtigkeit x in %

$k = \frac{9{,}4 - 7{,}8}{55 - 45} = 0{,}16$

$d = 7{,}8 - 0{,}16 \cdot 45 = 0{,}6$

$f(x) = 0{,}16 \cdot x + 0{,}6$

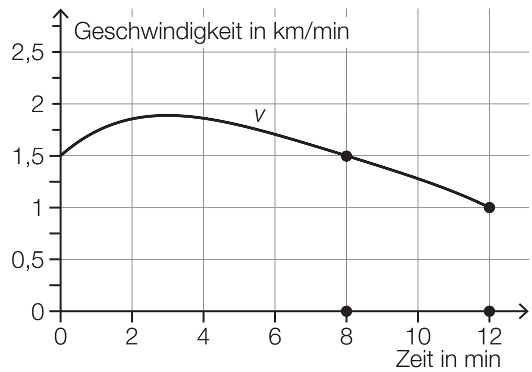
Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes.
b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
c1) Ein Punkt für das richtige Kennzeichnen des Punktes *P*.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung.

Bordcomputer*

Aufgabennummer: A_308		
Technologieeinsatz:	möglich ☒	erforderlich ☐

Ein Bordcomputer hat 12 min lang die Geschwindigkeit eines PKW aufgezeichnet. Der Graph der so ermittelten Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v ist im nachstehenden Diagramm modellhaft dargestellt.



a) Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen von v und der Zeitachse im Intervall [8 min; 12 min] kann durch den Flächeninhalt eines Vierecks angenähert werden. Die gekennzeichneten Gitterpunkte sind die Eckpunkte dieses Vierecks.

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Vierecks.

2) Interpretieren Sie diesen Flächeninhalt im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei auch die zugehörige Einheit an.

b) Ein Motorrad ist in diesen 12 min mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1,75 km/min gefahren.

1) Zeichnen Sie im obigen Diagramm den Graphen der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion dieses Motorrads ein.

* ehemalige Klausuraufgabe

c) 1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]*

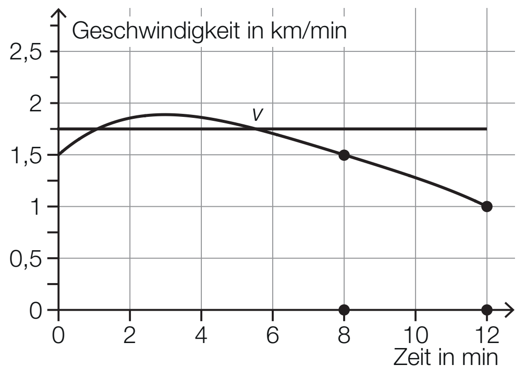
Der vom PKW zurückgelegte Weg nimmt im Intervall [4 min; 8 min] ab.	☐
Die Geschwindigkeit des PKW nimmt im Intervall [4 min; 8 min] zu.	☐
Die Beschleunigung des PKW ist im Intervall [4 min; 8 min] negativ.	☐
Die mittlere Geschwindigkeit des PKW ist im Intervall [4 min; 8 min] geringer als 1,5 km/min.	☐
Es gibt einen Zeitpunkt im Intervall [4 min; 8 min], zu dem der PKW mit 75 km/h fährt.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{(1{,}5 + 1) \cdot 4}{2} = 5$

a2) Im Intervall [8 min; 12 min] hat der PKW (rund) 5 km zurückgelegt.

b1)



c1)

Die Beschleunigung des PKW ist im Intervall [4 min; 8 min] negativ.	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Flächeninhalts.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.
b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.
c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Aufgabe 4

Infusion (2)

Wenn eine Medikamentenlösung als Infusion verabreicht wird, gelangt der Wirkstoff meist über einen Infusionsschlauch und eine Nadel in die Vene.

a) Von einem Medikament sollen 3 mg Wirkstoff pro kg Körpermasse verabreicht werden. Für Herrn Wagner mit der Körpermasse m werden 60 ml der Medikamentenlösung mit einer Wirkstoffkonzentration von 4 mg/ml vorbereitet.

1) Berechnen Sie die Körpermasse m von Herrn Wagner. *[0/1 P.]*

Die 60 ml Medikamentenlösung (Wirkstoffkonzentration 4 mg/ml) werden mit 450 ml Flüssigkeit (Wirkstoffkonzentration 0 mg/ml) verdünnt. Die Wirkstoffkonzentration der verdünnten Medikamentenlösung muss niedriger als 0,5 mg/ml sein.

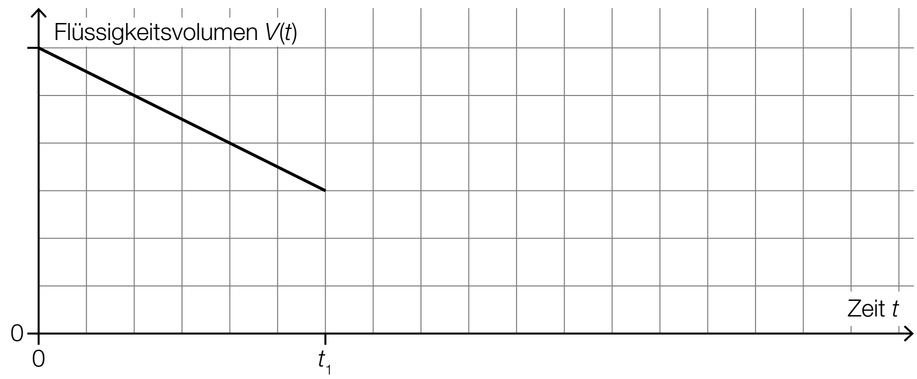
2) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Forderung erfüllt wird. *[0/1 P.]*

b) Modellhaft betrachtet, hat das Innere eines Infusionsschlauchs die Form eines Drehzylinders. Ein 200 cm langer Schlauch hat einen Innendurchmesser von 3 mm.

1) Berechnen Sie das Innenvolumen des Schlauchs. Geben Sie das Ergebnis in Millilitern an. *[0/1 P.]*

c) Die Durchflussrate einer Infusion gibt dasjenige Flüssigkeitsvolumen an, das pro Zeiteinheit aus dem Behälter fließt.

Eine Infusion wird zu Beginn auf eine konstante Durchflussrate eingestellt. Das im Behälter verbleibende Flüssigkeitsvolumen $V(t)$ wird in Abhängigkeit von der Zeit t durch den in der nachstehenden Abbildung dargestellten Graphen beschrieben.

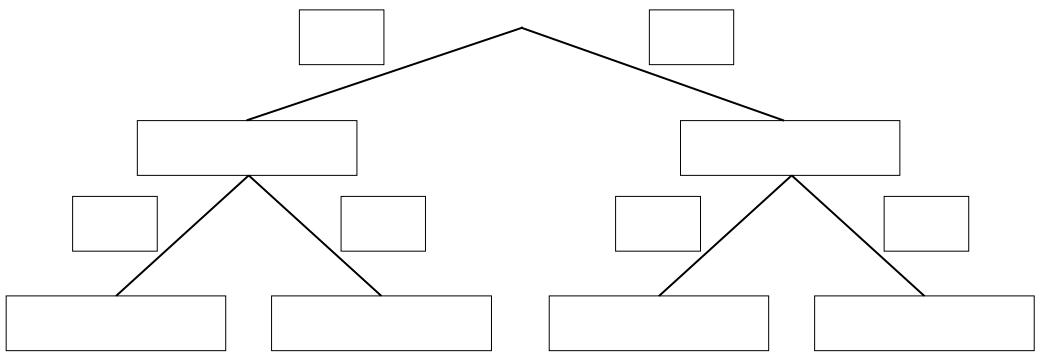


Ab dem Zeitpunkt t_1 ist die Infusion auf die doppelte Durchflussrate eingestellt.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen für $t > t_1$ ein. *[0/1 P.]*

d) Im Rahmen einer Studie über die Wirksamkeit eines neuen Medikaments haben 50 % der Personen eine Infusion mit Wirkstoff und die übrigen 50 % der Personen eine Infusion ohne Wirkstoff bekommen.
65 % der Personen, die eine Infusion mit Wirkstoff bekommen haben, verspürten eine Besserung. 55 % der Personen, die eine Infusion ohne Wirkstoff bekommen haben, verspürten ebenfalls eine Besserung.

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Baumdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[0/1 P.]*



2) Beschreiben Sie ein Ereignis A im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.
$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}65 + 0{,}5 \cdot 0{,}55$ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) 4 mg/ml · 60 ml = 240 mg

$m = \frac{240}{3} = 80$

Die Körpermasse von Herrn Wagner beträgt 80 kg.

a2) $\frac{240}{450 + 60} = 0{,}470...$

Die Forderung wird erfüllt, da die Wirkstoffkonzentration niedriger als 0,5 mg/ml ist.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Körpermasse *m*.
a2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

b1) Innenvolumen in cm³:

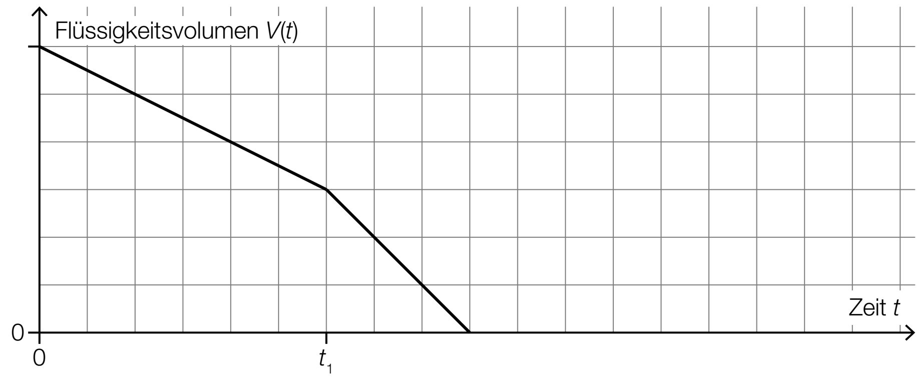
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 0{,}15^2 \cdot 200 = 14{,}1...$

$14{,}1...\text{ cm}^3 = 14{,}1...\text{ ml}$

Das Innenvolumen des Schlauchs beträgt rund 14 ml.

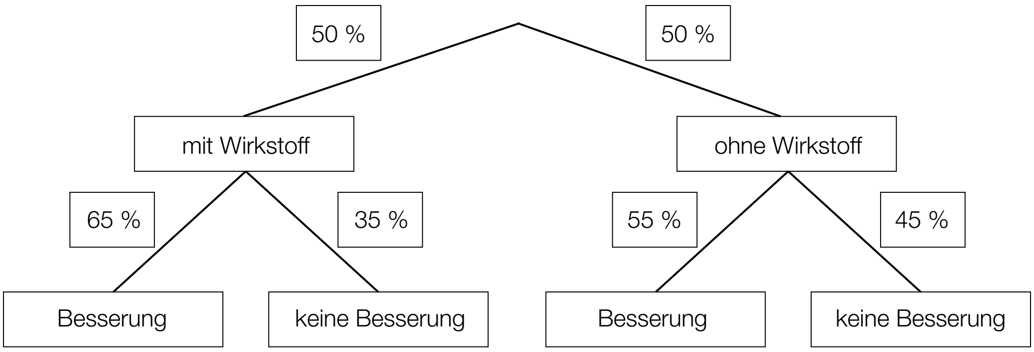
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Innenvolumens in Millilitern.

c1)



c1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.

d1)

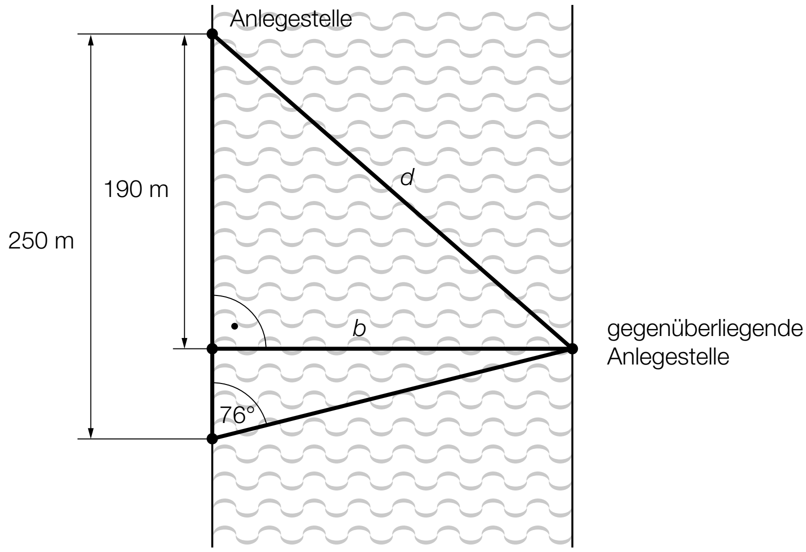


d2) Eine zufällig ausgewählte Person verspürte eine Besserung.

d1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms.
d2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.

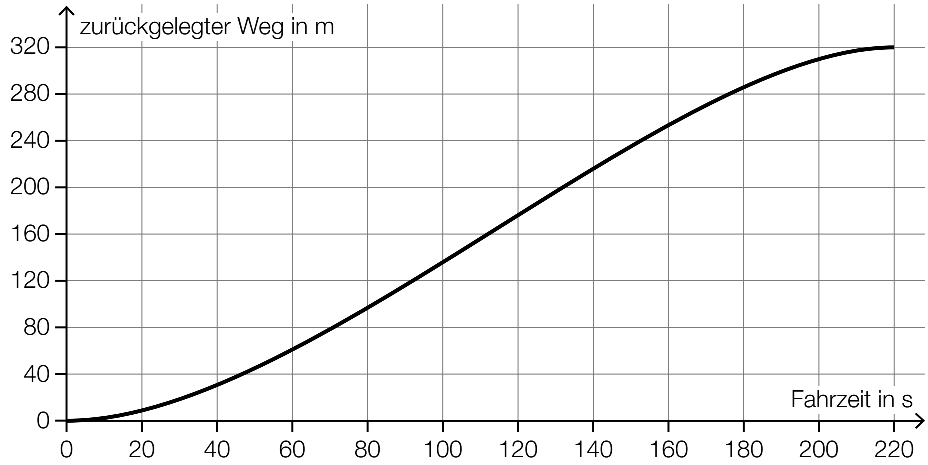
Schiffsfähre

a) Ein Radfahrer möchte mit einer Schiffsfähre einen Fluss mit der Breite *b* überqueren.
In einer Entfernung von 250 m von der Anlegestelle sieht er die gegenüberliegende Anlegestelle unter einem Winkel von 76° zum Flussufer.
In einer Entfernung von 190 m von der Anlegestelle sieht er die gegenüberliegende Anlegestelle unter einem Winkel von 90° zum Flussufer.
(Siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze.)



1) Berechnen Sie die Entfernung *d* zwischen den beiden Anlegestellen. *[0/1/2 P.]*

b) Das nachstehende Weg-Zeit-Diagramm beschreibt die Fahrt einer Schiffsfähre, die von einer Anlegestelle zur gegenüberliegenden Anlegestelle fährt.



1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [0; 220] beträgt rund 0,69 m/s.	☐
Die Geschwindigkeit ist im Zeitintervall [0; 220] monoton steigend.	☐
Die Beschleunigung ist nach rund 110 s maximal.	☐
Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [0; 100] ist geringer als die momentane Geschwindigkeit bei 100 s Fahrzeit.	☐
Der zurückgelegte Weg im Zeitintervall [20; 40] ist länger als der zurückgelegte Weg im Zeitintervall [120; 140].	☐

c) Auf einer Schiffsfähre gelten folgende Tarife:

	einfache Fahrt
PKW	€ 5,00
Erwachsener	€ 2,00
Kind	€ 1,50

Bei einer bestimmten Fahrt befinden sich *a* PKWs, *b* Erwachsene und *c* Kinder auf der Schiffsfähre.

- Bei dieser Fahrt erzielt der Betreiber einen Erlös von insgesamt € 26,50.
- Bei dieser Fahrt befinden sich doppelt so viele Erwachsene wie Kinder auf der Schiffsfähre.

1) Stellen Sie die zwei Gleichungen auf, die diesen Sachverhalt beschreiben. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $b = 60 \cdot \tan(76°) = 240{,}6...$

$d = \sqrt{190^2 + b^2} = \sqrt{190^2 + 240{,}6...^2} = 306{,}6...$

Die Entfernung *d* beträgt rund 307 m.

a1) Ein Punkt für den richtigen Ansatz.
Ein Punkt für das richtige Berechnen der Entfernung *d*.

b1)

Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall [0; 100] ist geringer als die momentane Geschwindigkeit bei 100 s Fahrzeit.	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) $5 \cdot a + 2 \cdot b + 1{,}5 \cdot c = 26{,}5$

$b = 2 \cdot c$

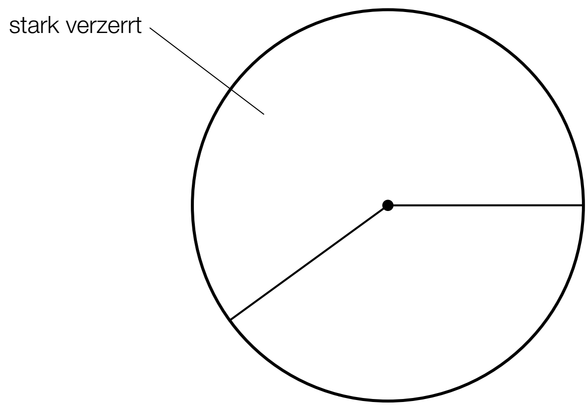
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Gleichungen.

Gesundheitsberichte

Wissenschaftler/innen zeigten in einer Studie*, wie wenig faktenbasiert österreichische Medien zu Gesundheitsthemen berichten.

a) Ein Ergebnis dieser Studie war: 60 % der untersuchten Berichte zu Gesundheitsthemen enthielten stark verzerrte Inhalte. Bei rund 11 % waren die Berichte angemessen. Der restliche Anteil der untersuchten Berichte enthielt leicht verzerrte Inhalte.

1) Vervollständigen Sie das nachstehende Kreisdiagramm so, dass es den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt. *[0/1 P.]*



Insgesamt wurden 990 Berichte untersucht.

2) Berechnen Sie die Anzahl der untersuchten Berichte, die stark verzerrte Inhalte enthielten. *[0/1 P.]*

b) Ein weiteres Ergebnis dieser Studie war: 97,6 % aller Berichte zu den Themen *Kosmetische Behandlungen* und *Gewichtsreduktion* geben den aktuellen Wissensstand stark verzerrt wieder.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 zufällig ausgewählten Berichten zu diesen Themen mindestens 8 Berichte befinden, die den aktuellen Wissensstand stark verzerrt wiedergeben. *[0/1 P.]*

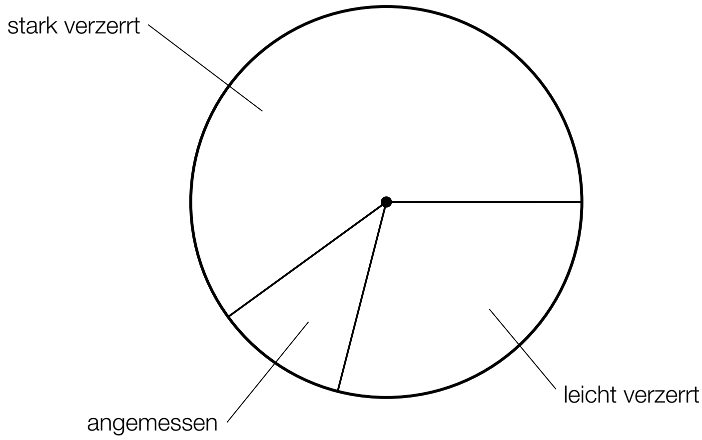
2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$P(E) = \binom{10}{7} \cdot 0{,}976^7 \cdot 0{,}024^3$ *[0/1 P.]*

* Kerschner, Bernd et al.: Wie evidenzbasiert berichten Print- und Online-Medien in Österreich? Eine quantitative Analyse. In: *Zeitschrift für Evidenz, Fortbildung und Qualität im Gesundheitswesen* 109 (2015), S. 341–349.

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $990 \cdot 0{,}6 = 594$
Insgesamt enthielten 594 untersuchte Berichte stark verzerrte Inhalte.

a1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen des Kreisdiagramms.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der untersuchten Berichte, die stark verzerrte Inhalte enthielten.

b1) Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = 0{,}976$
X ... Anzahl der Berichte, die den aktuellen Wissensstand stark verzerrt wiedergeben

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \geq 8) = 0{,}99853...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 99,85 %.

b2) Unter 10 zufällig ausgewählten Berichten befinden sich genau 7 Berichte, die den aktuellen Wissensstand stark verzerrt wiedergeben.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.

Wandern (2)

a) Lukas unternimmt eine Wanderung.

Zu Beginn wandert er für 1 h 15 min mit einer konstanten Geschwindigkeit von 4 km/h.
Dann wandert er mit einer konstanten Geschwindigkeit von 2 km/h weiter.
Er benötigt für die gesamte Wanderung 3 h 45 min.

1) Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit für die gesamte Wanderung. *[0/1 P.]*

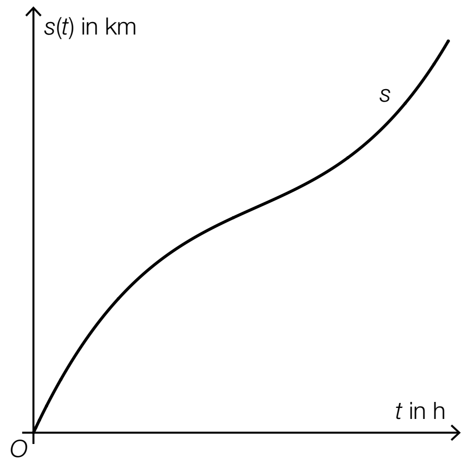
b) Lena unternimmt eine Wanderung.

Der von ihr zurückgelegte Weg kann dabei in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die Funktion s beschrieben werden.

$s(t) = 0{,}32 \cdot t^3 - 2{,}32 \cdot t^2 + 7{,}08 \cdot t \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 4{,}5$

t ... Zeit seit Beginn der Wanderung in h
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in km

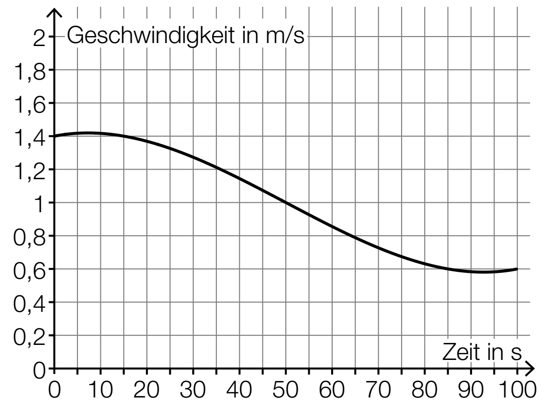
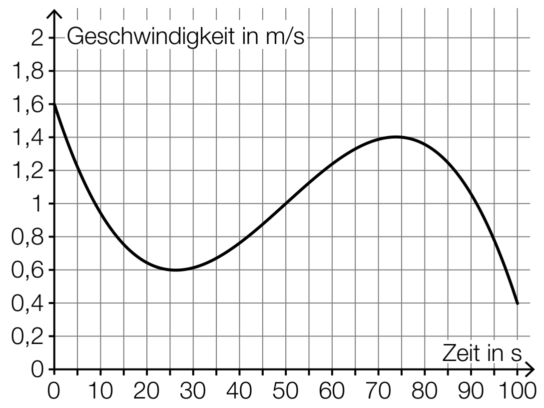
In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion s dargestellt.



1) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit Lena mit der geringsten Geschwindigkeit wandert. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem Lena mit einer Geschwindigkeit von höchstens 5 km/h wandert. *[0/1 P.]*

c) 1) Ordnen Sie den beiden Geschwindigkeit-Zeit-Diagrammen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

A	Die Geschwindigkeit ist nach etwa 26 Sekunden am höchsten.
B	Die Beschleunigung ist nach etwa 50 Sekunden am geringsten.
C	Der zurückgelegte Weg im Zeitintervall [70; 80] ist länger als jener im Zeitintervall [20; 30].
D	Im Zeitintervall [0; 100] ist die Geschwindigkeit nach etwa 75 Sekunden am höchsten.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{4 \cdot 1{,}25 + 2 \cdot 2{,}5}{3{,}75} = 2{,}66...$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 2,7 km/h.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der mittleren Geschwindigkeit.

b1) $v'(t) = s''(t) = 1{,}92 \cdot t - 4{,}64$

$v'(t) = 0$ *oder* $1{,}92 \cdot t - 4{,}64 = 0$
$t = 2{,}41...$

Lena wandert nach etwa 2,4 h mit der geringsten Geschwindigkeit.

In der Abbildung ist erkennbar, dass die Steigung von s an der Wendestelle minimal ist. Ein entsprechender Nachweis und eine Überprüfung der Randstellen sind daher nicht erforderlich.

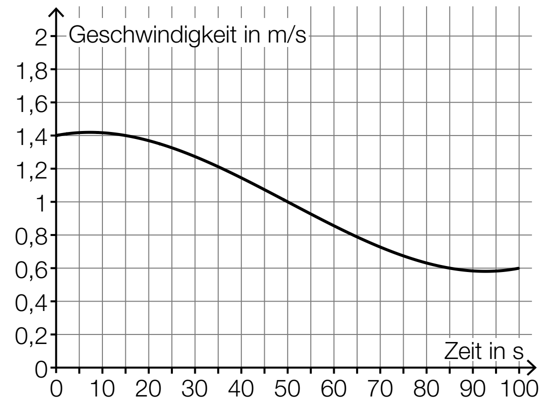
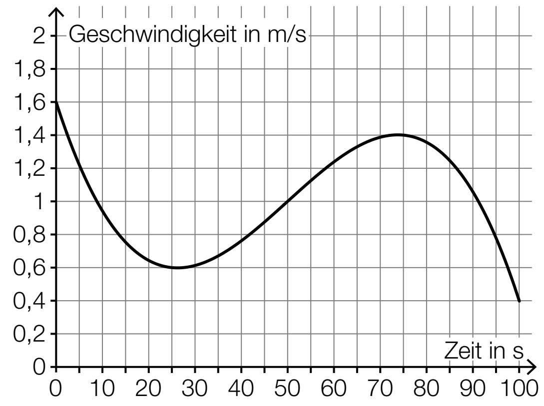
b2) $v(t) = s'(t) = 0{,}96 \cdot t^2 - 4{,}64 \cdot t + 7{,}08$

$v(t) = 5$ *oder* $0{,}96 \cdot t^2 - 4{,}64 \cdot t + 7{,}08 = 5$
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t_1 = 0{,}5 \quad t_2 = 4{,}33...$

Im Zeitintervall [0,5; 4,33...] wandert Lena mit einer Geschwindigkeit von höchstens 5 km/h.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Zeit, nach der Lena mit der geringsten Geschwindigkeit wandert.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Zeitintervalls, in dem Lena mit einer Geschwindigkeit von höchstens 5 km/h wandert.

c1)

	B
	C

A	Die Geschwindigkeit ist nach etwa 26 Sekunden am höchsten.
B	Die Beschleunigung ist nach etwa 50 Sekunden am geringsten.
C	Der zurückgelegte Weg im Zeitintervall [70; 80] ist länger als jener im Zeitintervall [20; 30].
D	Im Zeitintervall [0; 100] ist die Geschwindigkeit nach etwa 75 Sekunden am höchsten.

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Taxi (2)

a) Eine Studie über die Auslastung von Großraumtaxis ergab die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Taxifahrt genau 5 Fahrgäste befördert werden, beträgt 8 %.
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Taxifahrt 6 oder mehr Fahrgäste befördert werden, beträgt 7 %.

Mit dem nachstehenden Ausdruck wird für eine zufällig ausgewählte Taxifahrt die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E berechnet.

$P(E) = 0{,}08 + 0{,}07$

1) Kreuzen Sie die auf E zutreffende Beschreibung an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Es werden mehr als 5 Fahrgäste befördert.	☐
Es werden mehr als 6 Fahrgäste befördert.	☐
Es werden genau 6 Fahrgäste befördert.	☐
Es werden mindestens 5 Fahrgäste befördert.	☐
Es werden mindestens 6 Fahrgäste befördert.	☐

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 1 Fahrgast befördert wird, beträgt bei jeder Taxifahrt 31 %.
Eine Zufallsstichprobe von 30 Taxifahrten wird untersucht.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens 8 Taxifahrten jeweils genau 1 Fahrgast befördert wird. *[0/1 P.]*

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Taxifahrt aus privaten Gründen erfolgt, beträgt 83 %.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Taxifahrt aus beruflichen Gründen erfolgt, beträgt 17 %.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 zufällig ausgewählten Taxifahrten 1 aus privaten Gründen und 1 aus beruflichen Gründen erfolgt. *[0/1 P.]*

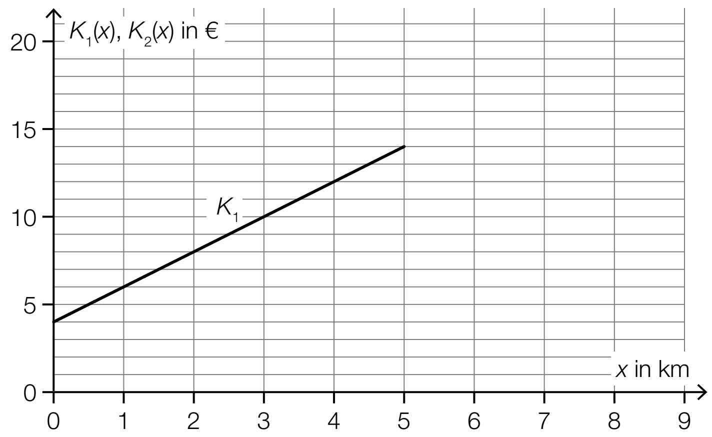
c) Die Kosten für eine Taxifahrt können durch lineare Funktionen beschrieben werden.

Für die ersten 5 km lassen sich die Kosten durch die Funktion K_1 beschreiben.

$K_1(x) = G + p \cdot x$

x ... Fahrtstrecke in km
$K_1(x)$ ... Kosten bei der Fahrtstrecke x in €
G ... Grundgebühr in €
p ... Kilometertarif in €/km

Der Graph der Funktion K_1 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Grundgebühr G und den Kilometertarif p.

G = ____________________ €

p = ____________________ €/km [0/1 P.]

Ab einer Fahrtstrecke von 5 km können die Kosten durch die lineare Funktion K_2 beschrieben werden.

Der Kilometertarif für die Funktion K_2 beträgt 1 €/km.
Außerdem gilt: $K_1(5) = K_2(5)$

2) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen von K_2 für $x \geq 5$ ein. [0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1)

Es werden mindestens 5 Fahrgäste befördert.	☒

a2) Binomialverteilung mit $n = 30$ und $p = 0{,}31$

X ... Anzahl der Taxifahrten, bei denen jeweils genau 1 Fahrgast befördert wird

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(X \geq 8) = 0{,}757...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 76 %.

a1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

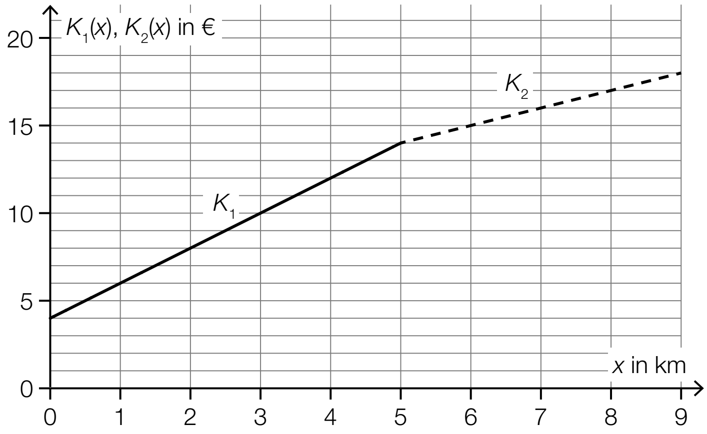
b1) $2 \cdot 0{,}83 \cdot 0{,}17 = 0{,}2822$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 28,22 %.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c1) $G = 4$ €
$p = 2$ €/km

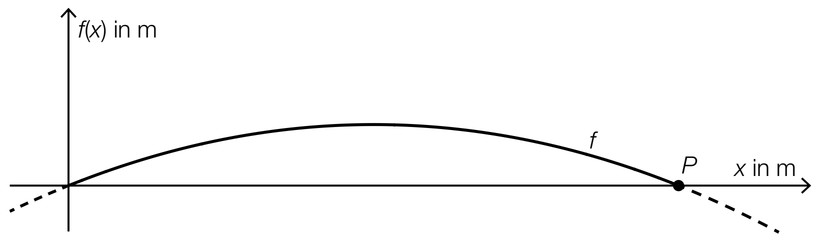
c2)



c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von G und p.
c2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen von K_2.

Alpentransit

a) In der nachstehenden Abbildung ist das Höhenprofil einer bestimmten Straße modellhaft durch den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ dargestellt.

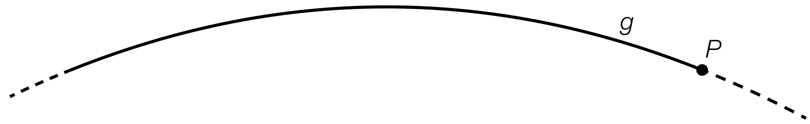


Der Graph von f verläuft durch den Punkt $P = (200\,|\,0)$.
An der Stelle $x = 0$ hat der Graph von f die Steigung 10 %.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a und b. *[0/1/2 P.]*

Das Höhenprofil soll in einem Koordinatensystem durch eine Funktion g der Form $g(x) = a \cdot x^2$ modelliert werden.

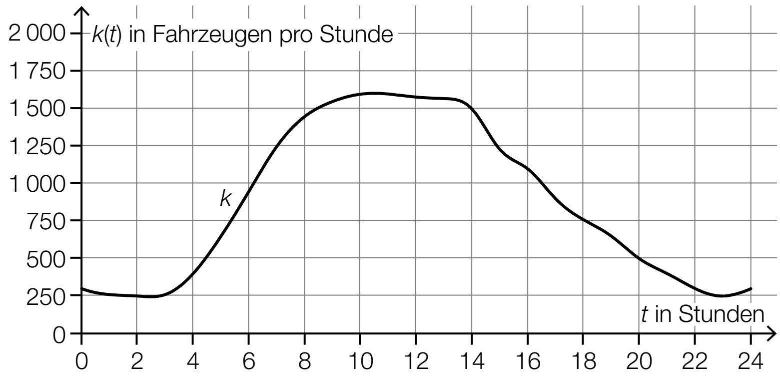
2) Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung die Achsen des zugehörigen Koordinatensystems ein. *[0/1 P.]*



b) An einer Messstelle der Inntalautobahn wird die Anzahl der vorbeifahrenden Fahrzeuge erhoben.

Eine Auswertung der Messung für einen bestimmten Tag kann näherungsweise durch die Funktion k beschrieben werden.

t ... Zeit in Stunden mit $t = 0$ für 0 Uhr
$k(t)$ ... Anzahl der Fahrzeuge pro Stunde zur Zeit t



Datenquelle: https://www.tirol.gv.at/fileadmin/themen/verkehr/verkehrsplanung/downloads/verkehrsberichte/VB_2017_web.pdf [25.10.2022].

1) Schätzen Sie mithilfe der obigen Abbildung, wie viele Fahrzeuge in der Zeit von 8 Uhr bis 14 Uhr an dieser Messstelle vorbeifahren.

≈ ____________________ Fahrzeuge *[0/1 P.]*

2) Ordnen Sie den beiden Zeitpunkten jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

$t = 8$	
$t = 14$	

A	$k'(t) > 0$ und $k''(t) > 0$
B	$k'(t) > 0$ und $k''(t) < 0$
C	$k'(t) < 0$ und $k''(t) > 0$
D	$k'(t) < 0$ und $k''(t) < 0$

c) Über den Brennerpass werden Güter entweder auf der Straße oder auf der Schiene transportiert. Im Jahr 2016 wurden auf der Schiene $1{,}34 \cdot 10^7$ t an Gütern über den Brennerpass transportiert. Das entspricht 29 % des gesamten Gütertransports über den Brennerpass im Jahr 2016.

Der gesamte Gütertransport über den Brennerpass war im Jahr 2015 um 3 Millionen t geringer als im Jahr 2016.

1) Berechnen Sie den gesamten Gütertransport über den Brennerpass im Jahr 2015. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

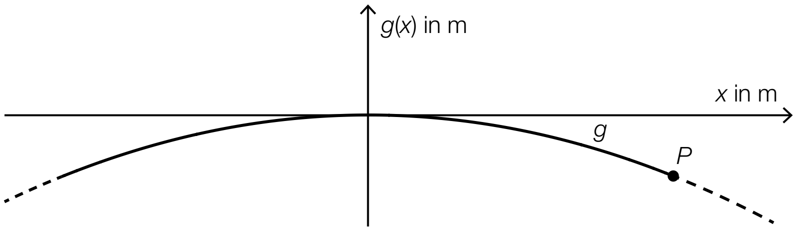
a1) $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

I: $f(200) = 0$
II: $f'(0) = 0{,}1$

oder:

I: $a \cdot 200^2 + b \cdot 200 = 0$
II: $b = 0{,}1$

a2)



Im Hinblick auf die Punktevergabe ist es nicht erforderlich, die Koordinatenachsen zu beschriften.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Koordinaten.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der Ableitung.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen der Achsen des Koordinatensystems.

b1) ≈ 9300 Fahrzeuge
Toleranzbereich: [9000; 10000]

b2)

$t = 8$	B
$t = 14$	D

A	$k'(t) > 0$ und $k''(t) > 0$
B	$k'(t) > 0$ und $k''(t) < 0$
C	$k'(t) < 0$ und $k''(t) > 0$
D	$k'(t) < 0$ und $k''(t) < 0$

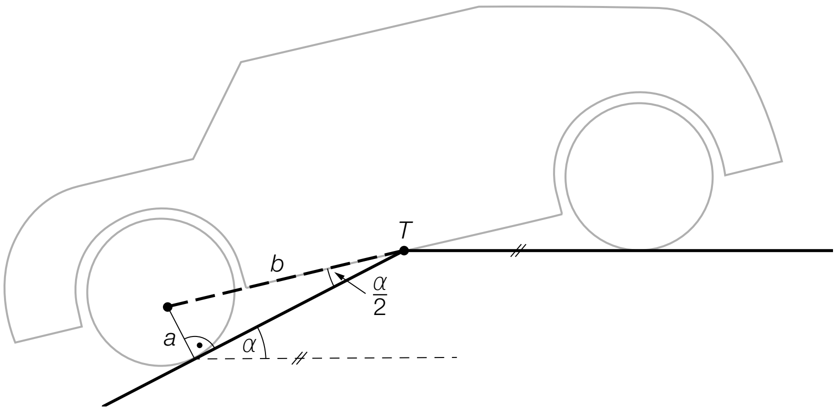
b1) Ein Punkt für das richtige Schätzen der Anzahl der Fahrzeuge.
b2) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

c1) $\frac{1{,}34 \cdot 10^7}{0{,}29} - 3 \cdot 10^6 = 43{,}20... \cdot 10^6$
Der gesamte Gütertransport über den Brennerpass im Jahr 2015 betrug rund 43,2 Mio. t.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des gesamten Gütertransports über den Brennerpass im Jahr 2015.

Tiefgarage

a) In eine bestimmte Tiefgarage führt eine Rampe mit konstantem Steigungswinkel α. Beim Befahren dieser Rampe berührt ein bestimmtes Auto die Rampe im Punkt *T*. (Siehe nachstehende modellhafte Abbildung.)



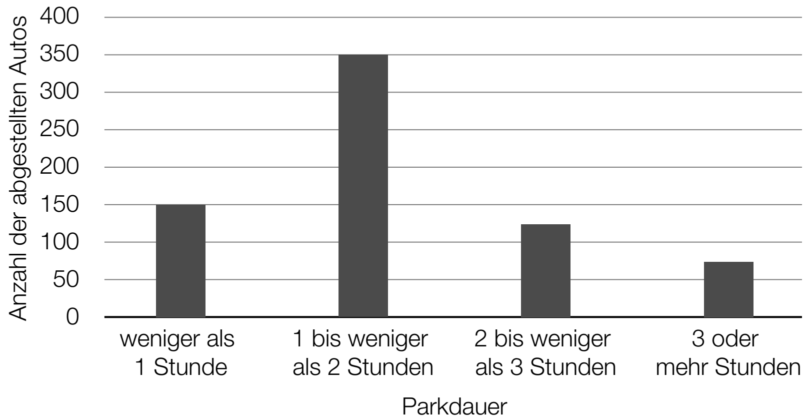
1) Stellen Sie mithilfe von *a* und *b* eine Formel zur Berechnung von α auf.

$\alpha =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

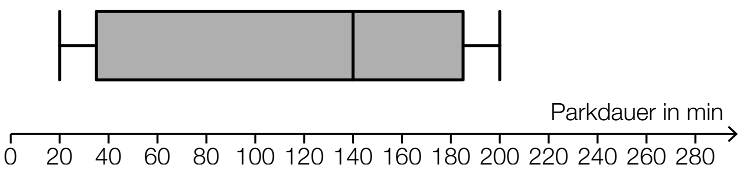
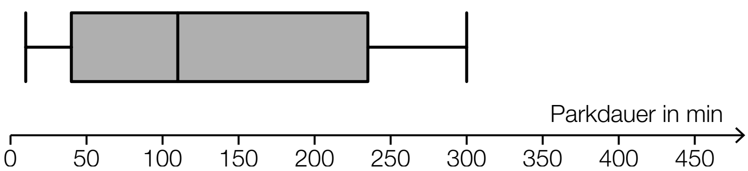
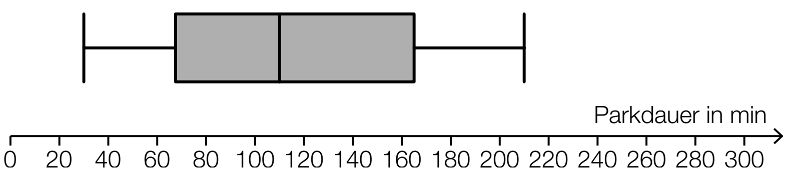
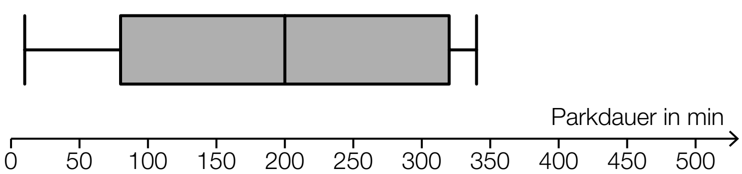
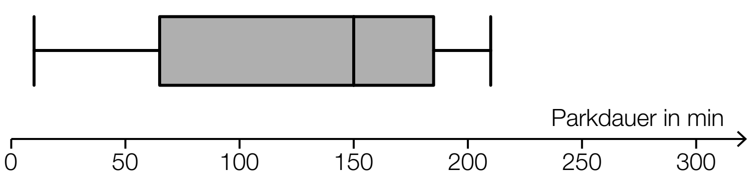
Es gilt: $a = 14$ cm und $b = 135$ cm

2) Berechnen Sie die Steigung der Rampe in Prozent. *[0/1 P.]*

b) Die Parkdauer von insgesamt 700 in einer Tiefgarage abgestellten Autos wurde erhoben.
Auf Basis dieser Erhebung wurde das nachstehende Säulendiagramm erstellt.



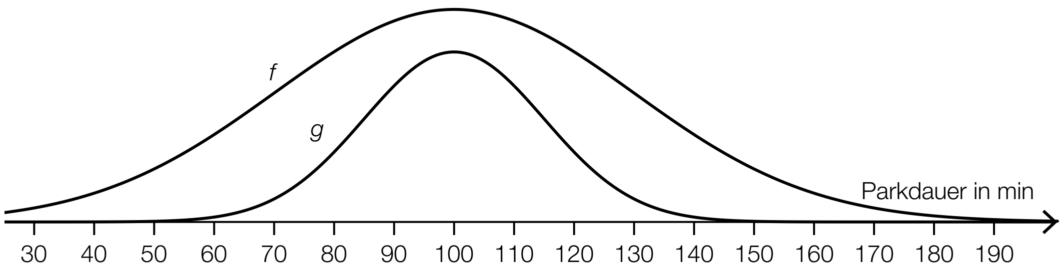
1) Kreuzen Sie den zu diesem Säulendiagramm passenden Boxplot an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

c) In einer anderen Tiefgarage ist die Parkdauer der abgestellten Autos annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 100 min und der Standardabweichung σ = 30 min.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Parkdauer eines abgestellten Autos in dieser Tiefgarage mindestens 1 Stunde und höchstens 2 Stunden beträgt. *[0/1 P.]*

Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion *f* ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Jemand behauptet, dass der Graph der Funktion *g* ebenfalls der Graph einer Dichtefunktion sei.

2) Begründen Sie, warum diese Behauptung falsch ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a}{b}\right)$

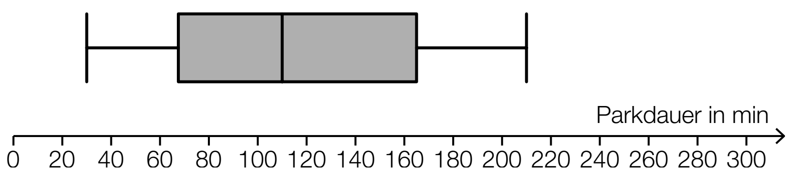
a2) $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{14}{135}\right) = 11{,}90...°$

$\tan(\alpha) = 0{,}210...$

Die Steigung der Rampe beträgt rund 21 %.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Steigung in Prozent.

b1)

	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) X ... Parkdauer in min

$P(60 \leq X \leq 120) = 0{,}6562...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 65,6 %.

c2) Der Flächeninhalt unter dem Graphen einer Dichtefunktion muss 1 betragen. Da der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion g kleiner als der Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion f ist, kann g keine Dichtefunktion sein.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
c2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

Flächenverbauung

Jeden Tag werden naturbelassene Flächen für unterschiedliche Zwecke verbaut.

a) Im Jahr 2013 wurde in Österreich täglich durchschnittlich eine Fläche von 15 Hektar neu verbaut.
Im Jahr 2017 wurde in Österreich täglich durchschnittlich eine Fläche von 12,4 Hektar neu verbaut.
Die zeitliche Entwicklung der Fläche, die in Österreich täglich durchschnittlich neu verbaut wird, kann modellhaft durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2013
$f(t)$ ... täglich durchschnittlich neu verbaute Fläche zur Zeit t in Hektar

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f auf. *[0/1 P.]*

Die täglich durchschnittlich neu verbaute Fläche soll auf 2 Hektar reduziert werden.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell diese Vorgabe erfüllt ist. *[0/1 P.]*

b) Die Fläche, die für landwirtschaftliche Nutzung verwendet wird, wird als Agrarfläche bezeichnet. Die zeitliche Entwicklung der Agrarfläche Österreichs kann modellhaft durch die Funktion N beschrieben werden.

$N(t) = N_0 \cdot 0{,}995^t$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für den Beginn des Jahres 2017
$N(t)$ ... Agrarfläche Österreichs zur Zeit t in Hektar
N_0 ... Agrarfläche Österreichs zu Beginn des Jahres 2017 in Hektar

1) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell die Agrarfläche Österreichs um 5 % kleiner als zu Beginn des Jahres 2017 sein wird. *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die relative Änderung der Agrarfläche Österreichs für jedes Zeitintervall $[0; T]$ berechnet werden kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$-0{,}005 \cdot T$	☐
$1 - 0{,}005^T$	☐
$0{,}995^T$	☐
$0{,}005^T$	☐
$0{,}995^T - 1$	☐

c) Im Jahr 2015 wurde in Deutschland täglich durchschnittlich eine Fläche von 0,6 km^2 neu verbaut.
Ein typisches Fußballfeld ist rechteckig und hat die Seitenlängen 68 m und 105 m.

1) Berechnen Sie, wie viele solcher Fußballfelder insgesamt eine Fläche von 0,6 km^2 haben.
[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $f(t) = k \cdot t + d$

$d = 15$

$k = \frac{12{,}4 - 15}{4 - 0} = -0{,}65$

$f(t) = -0{,}65 \cdot t + 15$

a2) $f(t) = 2$ *oder* $-0{,}65 \cdot t + 15 = 2$

$t = 20$

Die Vorgabe wird nach 20 Jahren (also im Jahr 2033) erfüllt.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion *f*.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeit, nach der die Vorgabe erfüllt ist.

b1) $0{,}95 = 0{,}995^t$

$\frac{\ln(0{,}95)}{\ln(0{,}995)} = 10{,}2...$

Nach etwa 10 Jahren wird die Agrarfläche Österreichs gemäß diesem Modell um 5 % kleiner als zu Beginn des Jahres 2017 sein.

b2)

$0{,}995^T - 1$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeit, nach der die Agrarfläche Österreichs um 5 % kleiner als zu Beginn des Jahres 2017 sein wird.
b2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

c1) Flächeninhalt *A* des Fußballfelds:

$A = 68\text{ m} \cdot 105\text{ m} = 7\,140\text{ m}^2 = 0{,}00714\text{ km}^2$

$\frac{0{,}6}{0{,}00714} = 84{,}0...$

Rund 84 solcher Fußballfelder haben insgesamt eine Fläche von $0{,}6\text{ km}^2$.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl der Fußballfelder.

Lern-App

In einer bestimmten Lern-App gibt es Übungen zu verschiedenen Themen.

a) Jede Übung besteht aus mehreren Aufgaben.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Übung Multiple-Choice-Aufgaben enthält, beträgt 78 %.

Für ein bestimmtes Arbeitspaket werden 25 Übungen zufällig ausgewählt.

1) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl derjenigen Übungen dieses Arbeitspakets, die keine Multiple-Choice-Aufgaben enthalten. *[0/1 P.]*

Für ein anderes Arbeitspaket werden 5 Übungen zufällig ausgewählt.

2) Ordnen Sie den beiden Ereignissen jeweils die zugehörige Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Mindestens 1 der 5 Übungen enthält Multiple-Choice-Aufgaben.	
Keine der 5 Übungen enthält Multiple-Choice-Aufgaben.	

A	$1 - 0{,}78^5$
B	$1 - 0{,}22^5$
C	$(1 - 0{,}22)^5$
D	$(1 - 0{,}78)^5$

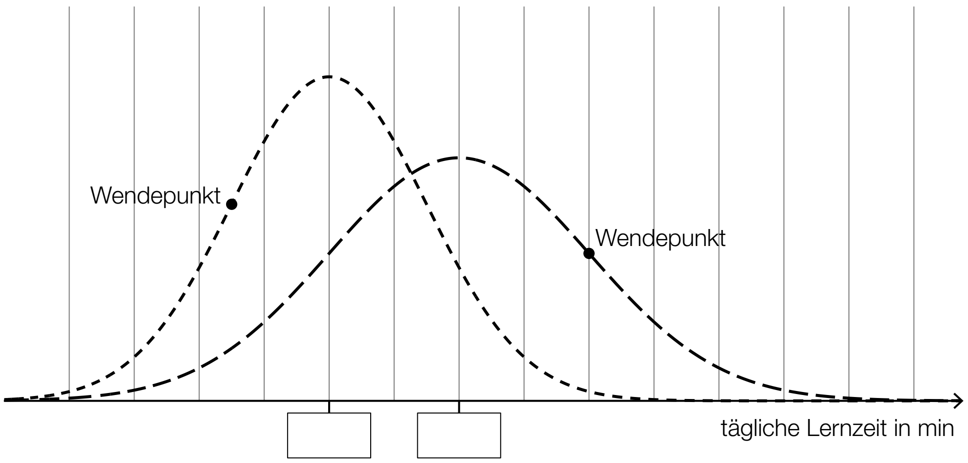
b) Daniela und Esma üben mit dieser Lern-App. Ihre täglichen Lernzeiten sind jeweils annähernd normalverteilt.

Der Erwartungswert von Danielas täglicher Lernzeit beträgt 35 min.
Die zugehörige Standardabweichung beträgt 10 min.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Danielas tägliche Lernzeit mindestens 30 min beträgt. *[0/1 P.]*

Die Standardabweichung von Esmas täglicher Lernzeit ist kleiner als jene von Danielas täglicher Lernzeit.

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Dichtefunktionen für Danielas und Esmas tägliche Lernzeiten dargestellt.



2) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlenden Zahlen in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. *[0/1 P.]*

c) In einem bestimmten Lernkapitel stehen 25 Übungen zur Verfügung. Bei genau 2 dieser Übungen kommen Lückentexte vor.

Laura wählt nacheinander 4 verschiedene Übungen aus diesem Lernkapitel zufällig aus.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in keiner dieser 4 Übungen Lückentexte vorkommen. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $25 \cdot 0{,}22 = 5{,}5$

Der Erwartungswert für die Anzahl der Übungen dieses Arbeitspakets, die keine Multiple-Choice-Aufgaben enthalten, beträgt 5,5.

Auch ein ganzzahliges Runden des Erwartungswerts (6) *ist als richtig zu werten.*

a2)

Mindestens 1 der 5 Übungen enthält Multiple-Choice-Aufgaben.	B
Keine der 5 Übungen enthält Multiple-Choice-Aufgaben.	D

A	$1 - 0{,}78^5$
B	$1 - 0{,}22^5$
C	$(1 - 0{,}22)^5$
D	$(1 - 0{,}78)^5$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts.
a2) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

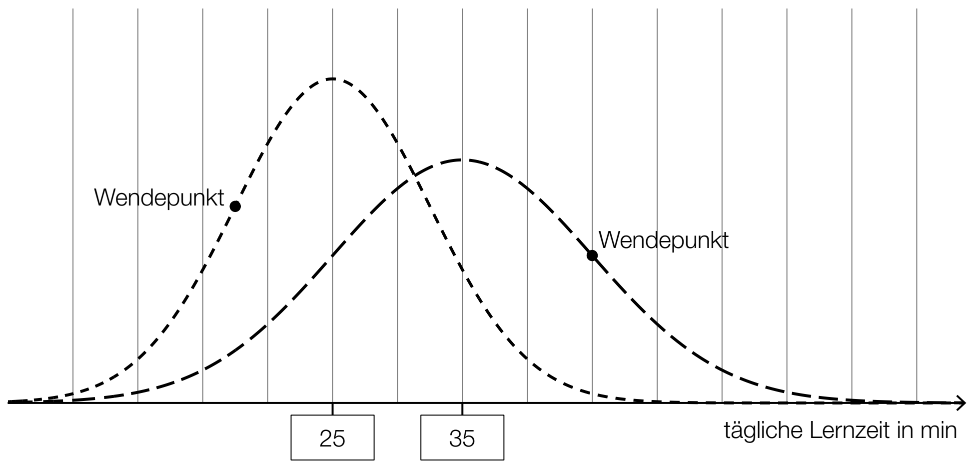
b1) X ... Danielas tägliche Lernzeit in min

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(X \geq 30) = 0{,}6914...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 69,1 %.

b2)



b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahlen.

c1) $\frac{23}{25} \cdot \frac{22}{24} \cdot \frac{21}{23} \cdot \frac{20}{22} = 0{,}7$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 70 %.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Raucherentwöhnung

a) 10 Raucher führen unabhängig voneinander eine Entwöhnungskur durch. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Entwöhnungskur erfolgreich ist, beträgt jeweils 60 %.

1) Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

E ... „bei genau 8 Rauchern ist die Entwöhnungskur erfolgreich“

$P(E) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^8$	☐
$P(E) = 1 - \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^2$	☐
$P(E) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^8$	☐
$P(E) = 1 - \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^8$	☐
$P(E) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^2$	☐

b) Durch das Rauchen von Zigaretten gelangt Nikotin in den Körper und wird dort abgebaut.

Die zeitliche Entwicklung der Nikotinmenge im Körper kann durch die Funktion N beschrieben werden.

$N(t) = N_0 \cdot a^t$

t ... Zeit seit dem Konsum der letzten Zigarette in h
$N(t)$ ... Nikotinmenge im Körper zur Zeit t in mg
N_0, a ... positive Parameter

Für eine bestimmte Person gilt:
Unmittelbar nach dem Konsum der letzten Zigarette ($t = 0$) befinden sich 20 mg Nikotin im Körper.
2 h später befinden sich noch 9,5 mg Nikotin im Körper.

1) Ermitteln Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Halbwertszeit für den Abbau von Nikotin bei dieser Person. *[0/1 P.]*

c) In einer Studie wurde der Nichtraucheranteil einer Personengruppe untersucht. Zu Beginn der Beobachtung betrug der Nichtraucheranteil dieser Personengruppe 45,6 %. 10 Jahre später betrug der Nichtraucheranteil dieser Personengruppe 51,3 %.
Der Nichtraucheranteil kann in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

$f(t) = k \cdot t + d$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für den Beginn der Beobachtung
$f(t)$ ... Nichtraucheranteil zur Zeit t in %

1) Ermitteln Sie die Parameter k und d.

$k =$ ______________________ % pro Jahr

$d =$ ______________________ % *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

$P(E) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^2$	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

b1) $9{,}5 = 20 \cdot a^2$
$a = 0{,}689...$

b2) $N(t) = \frac{N_0}{2}$ *oder* $20 \cdot 0{,}689...^t = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 1{,}86...$

Die Halbwertszeit beträgt etwa 1,9 h.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Parameters *a*.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Halbwertszeit.

c1) $k = 0{,}57$ % pro Jahr
$d = 45{,}6$ %

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Parameter *k* und *d*.

Burgernomics

Das Konzept, anhand der Preise von Hamburgern wirtschaftliche Entwicklungen zu beschreiben, wird *Burgernomics* genannt.

a) Um die Kaufkraft verschiedener Währungen zu vergleichen, kann man den sogenannten *Big-Mac-Index* verwenden.

Dazu wandelt man den Preis für einen Big Mac in der Landeswährung mit dem aktuellen Wechselkurs in US-Dollar um. Danach ermittelt man die prozentuelle Abweichung vom Preis für einen Big Mac in den USA.

In der nachstehenden Tabelle ist der jeweilige Preis für einen Big Mac im Juli 2018 in den USA und in Chile angegeben.
Zu diesem Zeitpunkt galt: 1 US-Dollar = 652 Pesos

Land	Preis für einen Big Mac in der Landeswährung
USA	5,51 US-Dollar
Chile	2.640 Pesos

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Preis für einen Big Mac in Chile niedriger als jener in den USA war. *[0/1 P.]*

In der Schweiz war der Preis für einen Big Mac im Juli 2018 um 18,8 % höher als in den USA.

Zu diesem Zeitpunkt galt: 1 US-Dollar = 0,99224 Schweizer Franken

2) Berechnen Sie den Preis für einen Big Mac in der Schweiz im Juli 2018 in Schweizer Franken. *[0/1 P.]*

b) Der Preis für einen Big Mac kann auch zur Beobachtung der Inflation im jeweiligen Land verwendet werden.

Jahr	Preis für einen Big Mac in US-Dollar
1990	2,20
2000	2,51
2010	3,73

Die zeitliche Entwicklung des Preises für einen Big Mac in den USA kann näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden.

$p(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1990
$p(t)$ ... Preis für einen Big Mac zur Zeit t in US-Dollar

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

   $p(30) = 5{,}86$ *[0/1 P.]*

3) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, mit dem die mittlere Änderungsrate des Preises für einen Big Mac für jedes Zeitintervall [0; n] berechnet werden kann. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\frac{p(n)}{n}$	☐
$\frac{p(n) - p(0)}{p(0)}$	☐
$\frac{p(n) - p(0)}{p(n)}$	☐
$\frac{p(n) - p(0)}{n}$	☐
$\frac{p(n)}{p(0)}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) Preis für einen Big Mac in Chile in US-Dollar:

$\frac{2\,640}{652} = 4{,}049...$

$\frac{4{,}049...}{5{,}51} - 1 = -0{,}2651...$

Im Juli 2018 war der Preis für einen Big Mac in Chile um rund 26,5 % niedriger als jener in den USA.

a2) $5{,}51 \cdot 1{,}188 \cdot 0{,}99224 = 6{,}495...$

Der Preis für einen Big Mac in der Schweiz im Juli 2018 betrug 6,50 Schweizer Franken.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der prozentuellen Abweichung.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Preises in Schweizer Franken.

b1) I: $p(0) = 2{,}2$
II: $p(10) = 2{,}51$
III: $p(20) = 3{,}73$

oder:

I: $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2{,}2$
II: $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 2{,}51$
III: $a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c = 3{,}73$

b2) Gemäß diesem Modell betrug im Jahr 2020 (also zur Zeit $t = 30$) der Preis für einen Big Mac in den USA 5,86 US-Dollar.

b3)

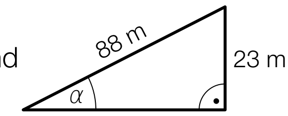
$\frac{p(n) - p(0)}{n}$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

San Francisco

a) In San Francisco wurden viele Straßen geradlinig und rechtwinkelig zueinander gebaut. Dabei wurde keine Rücksicht auf Steigungen genommen.

Ein 88 m langer Abschnitt der Lombard Street verlief früher geradlinig bergauf. Die Steigung dieser Straße war in diesem Abschnitt annähernd konstant (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



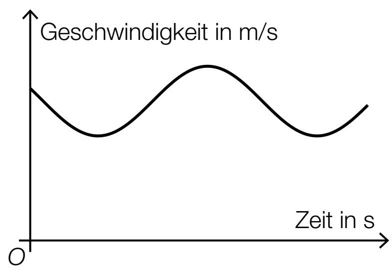
1) Berechnen Sie den Steigungswinkel α für diesen Abschnitt. *[0/1 P.]*

Nach einem Umbau gibt es in diesem Abschnitt einige Kurven. Dadurch beträgt der annähernd konstante Steigungswinkel nur mehr rund 9,1°.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob in diesem Abschnitt die Steigung in Prozent durch den Umbau halbiert wurde. *[0/1 P.]*

b) Die Lombard Street verläuft in einem bestimmten Abschnitt in engen Kurven.

Aleksandar zeichnet mit einem Navigationsgerät seine Geschwindigkeit beim Fahren auf diesem Abschnitt auf. In der nachstehenden Abbildung ist das zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm für ein bestimmtes Zeitintervall dargestellt.

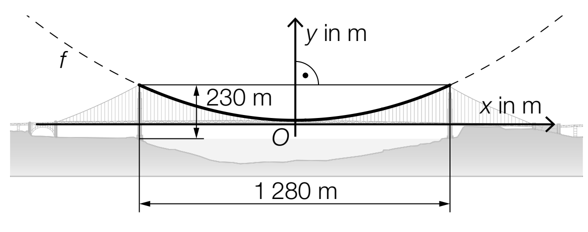
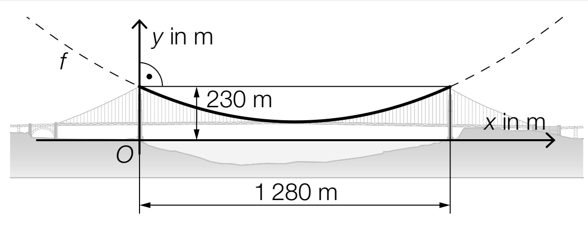


1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung die Länge desjenigen Weges, den Aleksandar bis zum Erreichen seiner maximalen Geschwindigkeit zurückgelegt hat. *[0/1 P.]*

c) Die Golden Gate Bridge in San Francisco ist eine Hängebrücke. Der Verlauf der Stahlseile zwischen den 230 m hohen Stützen kann näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion f beschrieben werden.

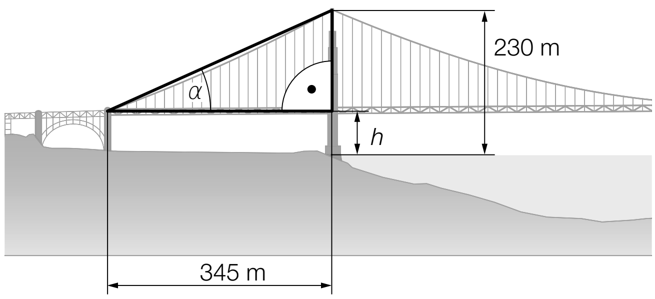
1) Ordnen Sie den beiden Abbildungen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu.

[0/1 P.]

A	$f'(640) = 0$
B	$f'(640) = 230$
C	$f(-640) = f(640)$
D	$f(-640) = 0$

Die in der nachstehenden Abbildung mit h bezeichnete Höhe ist die Durchfahrtshöhe für Schiffe.



2) Stellen Sie mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von h (in m) auf.

$h =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

d) Die Golden Gate Bridge in San Francisco wird von 2 Stahlseilen mit kreisförmigem Querschnitt getragen. Die Stahlseile werden dabei modellhaft als zylinderförmig angenommen.

Für jedes dieser beiden Stahlseile ist auf einem Schild angegeben:

Durchmesser: 92,4 cm
Länge: 2 331,7 m
Dichte des verwendeten Stahls: $\varrho = 7{,}86\ \text{t/m}^3$
Masse: 11 113 t

Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ϱ und Volumen V, also $m = \varrho \cdot V$.

1) Zeigen Sie, dass sich aus den obigen Angaben für Durchmesser, Länge und Dichte <u>nicht</u> die angegebene Masse ergibt. *[0/1 P.]*

Tatsächlich besteht jedes der beiden Stahlseile aus 27 572 dünnen Drähten, die jeweils eine Länge von 2 331,7 m haben.

Die Gesamtlänge aller Drähte der 2 Stahlseile entspricht dem 11,77-fachen Umfang des Mondes. Der Mond wird dabei modellhaft als kugelförmig angenommen.

2) Berechnen Sie auf Basis dieser Angaben den Umfang des Mondes in km. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\alpha = \arcsin\left(\frac{23}{88}\right) = 15{,}15\ldots°$

Der Steigungswinkel α für diesen Abschnitt beträgt rund 15,2°.

a2) Steigung vor dem Umbau: $\tan(15{,}15\ldots°) = 0{,}270\ldots$
Steigung nach dem Umbau: $\tan(9{,}1°) = 0{,}160\ldots$

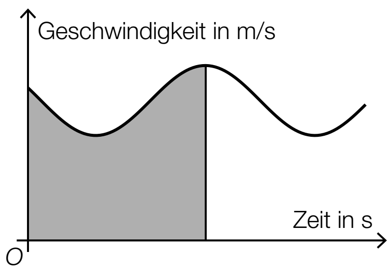
$\frac{0{,}270\ldots}{2} = 0{,}135\ldots < 0{,}160\ldots$

Durch den Umbau wurde die Steigung von rund 27 % auf rund 16 % gesenkt. Die Steigung wurde also nicht halbiert.

Ein Vergleich der beiden Steigungswinkel ohne Umrechnung in die zugehörige Steigung ist als falsch zu werten.

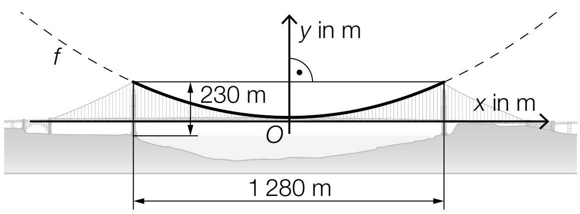
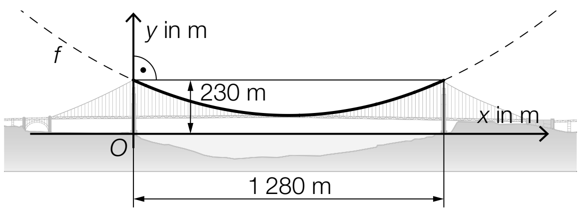
a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Steigungswinkels α.
a2) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.

b1)



b1) Ein Punkt für das richtige Kennzeichnen.

c1)

	C
	A

A	$f'(640) = 0$
B	$f'(640) = 230$
C	$f(-640) = f(640)$
D	$f(-640) = 0$

c2) $h = 230 - 345 \cdot \tan(\alpha)$

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

d1) $m = 7{,}86 \cdot \pi \cdot \left(\frac{0{,}924}{2}\right)^2 \cdot 2\,331{,}7 = 12\,289{,}3...$

Die Masse, die sich aus den genannten Angaben für Durchmesser, Länge und Dichte ergibt, beträgt rund 12 289 t und entspricht damit nicht der mit 11 113 t angegebenen Masse.

d2) Gesamtlänge aller Drähte in km:

$27\,572 \cdot 2\,331{,}7 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 128\,579{,}2...$

Umfang u des Mondes in km:

$u = \frac{128\,579{,}2...}{11{,}77} = 10\,924{,}3...$

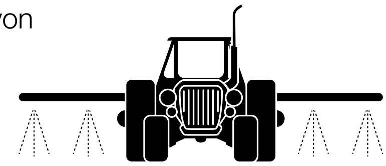
Der auf Basis der genannten Angaben berechnete Umfang des Mondes beträgt rund 10 924 km.

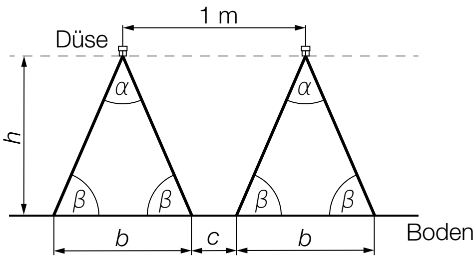
d1) Ein Punkt für das richtige Zeigen.
d2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Umfangs des Mondes in km.

Pflanzenschutzmittel

Zum Schutz von Nutzpflanzen werden Pflanzenschutzmittel angewendet.

a) Die Anwendung von Pflanzenschutzmitteln erfolgt oft mithilfe von Düsen (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).





1) Stellen Sie mithilfe von α und b eine Formel zur Berechnung der Höhe h auf.

$h =$ ______________________ *[0/1 P.]*

Es gilt: $\alpha = 70°$, $c = 0{,}3$ m

2) Berechnen Sie h. *[0/1 P.]*

b) Es wurden insgesamt 24 Proben von Marillen auf Rückstände von Pflanzenschutzmitteln hin untersucht (siehe nachstehende Tabelle).

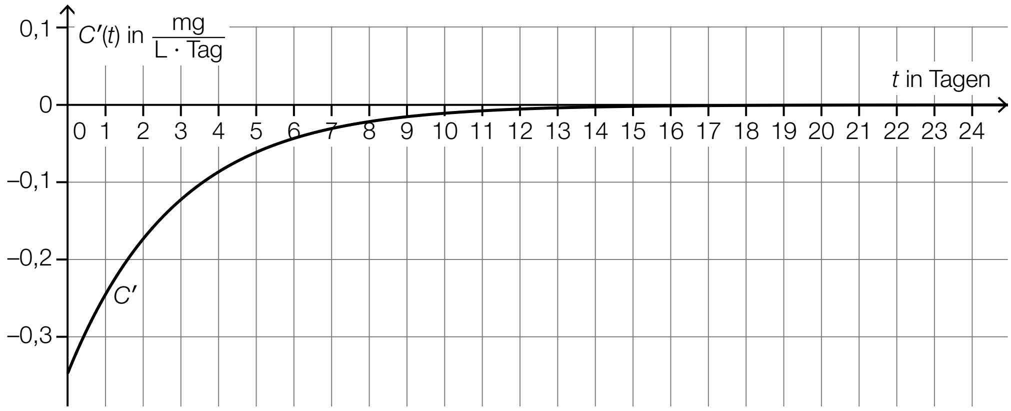
Anzahl der festgestellten Pflanzenschutzmittel pro Probe	Anzahl der Proben
1	4
2	10
3	3
4	2
5	2
6	3

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Anzahl der festgestellten Pflanzenschutzmittel pro Probe. *[0/1 P.]*

c) Die zeitliche Entwicklung der Konzentration eines bestimmten Pflanzenschutzmittels im Boden kann näherungsweise durch die Funktion C beschrieben werden.

t ... Zeit nach dem Anwenden des Pflanzenschutzmittels in Tagen
$C(t)$ ... Konzentration des Pflanzenschutzmittels im Boden zur Zeit t in mg/L
$C'(t)$ ... momentane Änderungsrate der Konzentration des Pflanzenschutzmittels im Boden zur Zeit t in $\frac{\text{mg}}{\text{L} \cdot \text{Tag}}$

Die nachstehende Abbildung zeigt die momentane Änderungsrate der Konzentration dieses Pflanzenschutzmittels im Boden.



1) Veranschaulichen Sie $\int_0^2 C'(t)\,\mathrm{d}t$ in der obigen Abbildung. *[0/1 P.]*

Es gilt: $\int_0^2 C'(t)\,\mathrm{d}t = -0{,}5$ mg/L

2) Interpretieren Sie das Ergebnis $-0{,}5$ mg/L im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $h = \dfrac{b}{2 \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

a2) $b = 1 - c = 0{,}7$

$h = \dfrac{0{,}7}{2 \cdot \tan(35°)} = 0{,}499...$

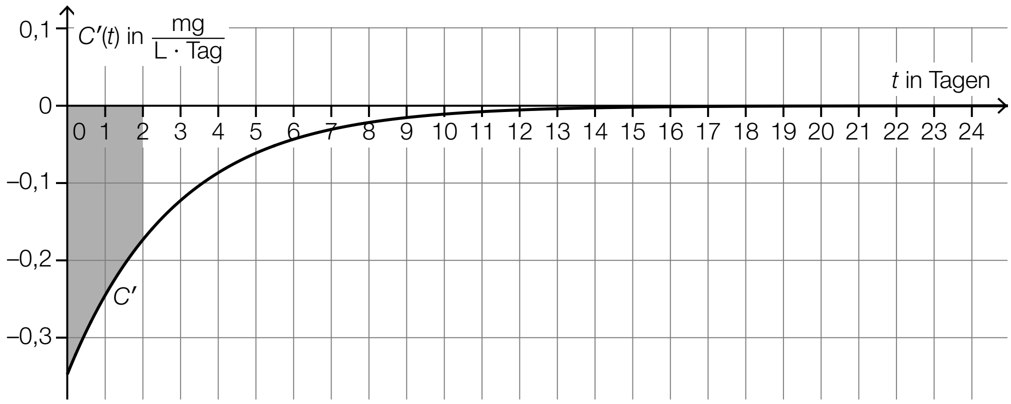
$h \approx 0{,}5$ m

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen von h.

b1) $\frac{1}{24} \cdot (1 \cdot 4 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3) = 2{,}875$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des arithmetischen Mittels.

c1)



c2) In den ersten zwei Tagen nimmt die Konzentration des Pflanzenschutzmittels um 0,5 mg/L ab.

c1) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen des bestimmten Integrals.
c2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Straßenrad-WM

Die Straßenrad-WM 2018 in Tirol führte unter anderem durch den Innsbrucker Stadtteil Hötting.

a) Der Streckenabschnitt mit der größten Steigung heißt *Höttinger Höll*. Dort beträgt die maximale Steigung 25 %.

Jemand vergleicht diese Steigung mit jener auf der *Kitzbüheler Streif*.

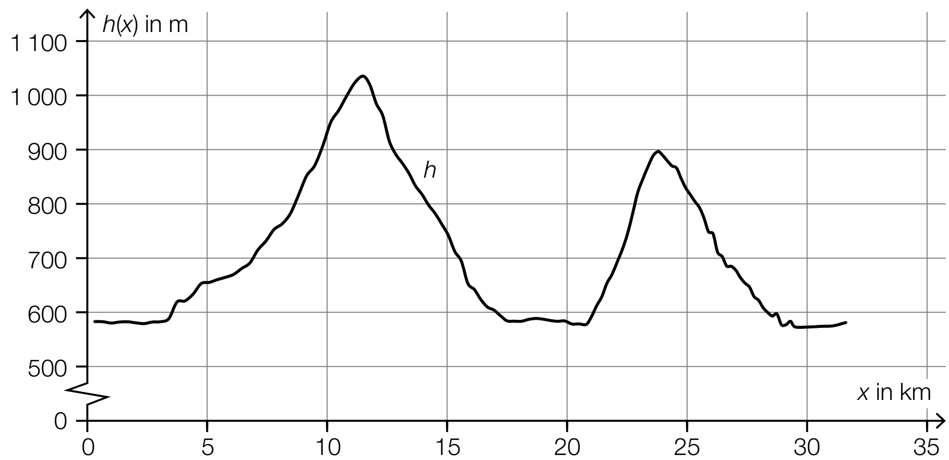
Der Streckenabschnitt auf der Kitzbüheler Streif mit der größten Steigung heißt *Mausefalle*. Dort beträgt der maximale Steigungswinkel 40,4°.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob die maximale Steigung der Mausefalle größer als jene der Höttinger Höll ist. *[0/1 P.]*

Die Steigung entlang eines 7,9 km langen Teilabschnitts wird modellhaft als konstant mit 5,7 % angenommen.

2) Berechnen Sie den Höhenunterschied auf diesem Teilabschnitt in Metern. *[0/1 P.]*

b) Für einen bestimmten Teilabschnitt kann die Höhe über dem Meeresspiegel in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg x durch die Funktion h modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).

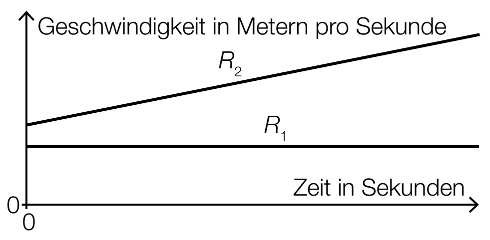


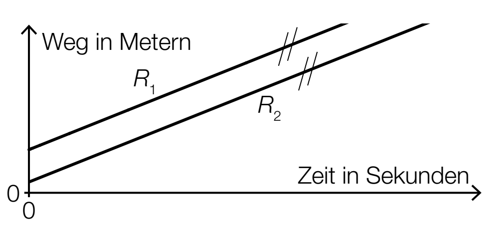
Im Intervall [5; 15] gibt es genau eine Stelle x_1, an der gilt: $h'(x_1) = 0$ und $h''(x_1) < 0$

1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung den zugehörigen Punkt $P = (x_1 | h(x_1))$ auf dem Graphen von h. *[0/1 P.]*

c) Von den zwei Radrennfahrern R_1 und R_2 werden die auf verschiedenen Streckenabschnitten aufgezeichneten Weg-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme verglichen.

1) Ordnen Sie den beiden Diagrammen jeweils die zutreffende Aussage aus A bis D zu. *[0/1 P.]*





A	R_1 und R_2 fahren mit der gleichen Geschwindigkeit.
B	R_1 befindet sich im Stillstand und R_2 beschleunigt.
C	Die Geschwindigkeit von R_1 ist zu jedem Zeitpunkt höher als jene von R_2.
D	Die Geschwindigkeit von R_1 ist konstant und R_2 beschleunigt.

Möglicher Lösungsweg

a1) $\tan(40{,}4°) = 0{,}851... > 0{,}25$

a2) Steigungswinkel α auf diesem Teilabschnitt:

$\alpha = \arctan(0{,}057) = 3{,}26...°$

Höhenunterschied Δh auf diesem Teilabschnitt:

$\Delta h = 7\,900 \cdot \sin(\alpha) = 449{,}57...$

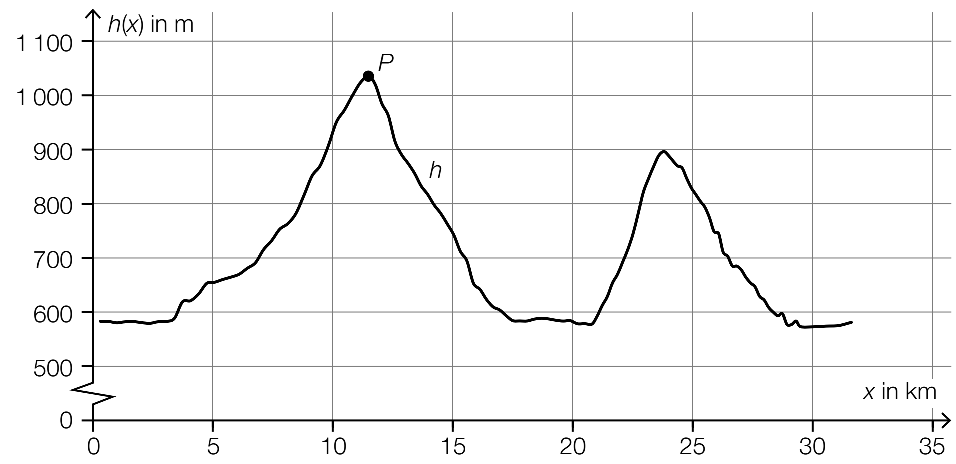
Der Höhenunterschied auf diesem Teilabschnitt beträgt rund 449,6 m.

Da $\sin(\arctan(0{,}057)) \approx 0{,}057$ *gilt, ist auch folgende Berechnung als richtig zu werten:*

$7\,900 \cdot 0{,}057 = 450{,}3$

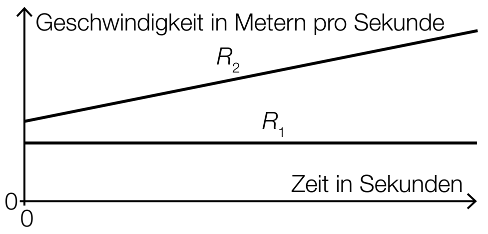
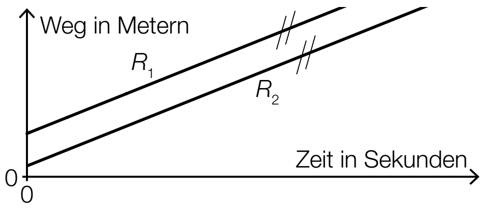
a1) Ein Punkt für das richtige nachweisliche Überprüfen.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Höhenunterschieds in Metern.

b1)



b1) Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Punktes.

c1)

	D
	A

A	R_1 und R_2 fahren mit der gleichen Geschwindigkeit.
B	R_1 befindet sich im Stillstand und R_2 beschleunigt.
C	Die Geschwindigkeit von R_1 ist zu jedem Zeitpunkt höher als jene von R_2.
D	Die Geschwindigkeit von R_1 ist konstant und R_2 beschleunigt.

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Käse

a) Bei der Herstellung von Käse werden verschiedene Enzyme verwendet.

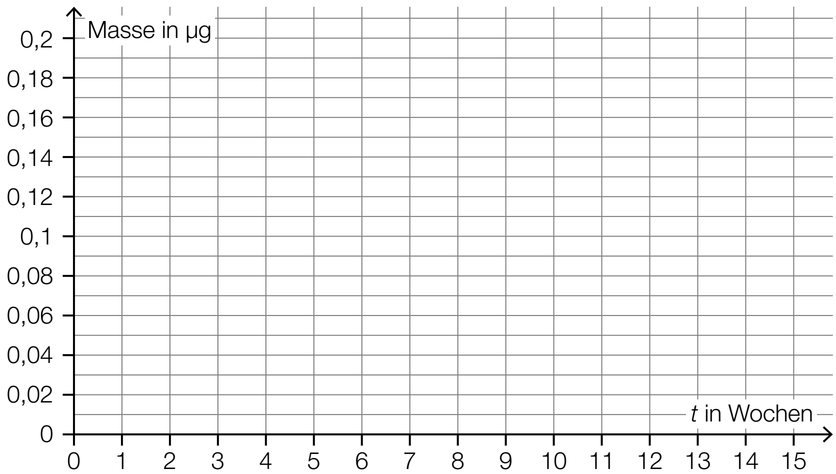
Die Masse eines bestimmten Enzyms nimmt mit der Zeit exponentiell ab.

Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) betrug die Masse 0,19 μg, nach 15 Wochen betrug die Masse 0,06 μg.

Die Masse des Enzyms in μg soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen näherungsweise durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf. *[0/1 P.]*

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Exponentialfunktion f im Intervall [0; 15] ein. *[0/1 P.]*

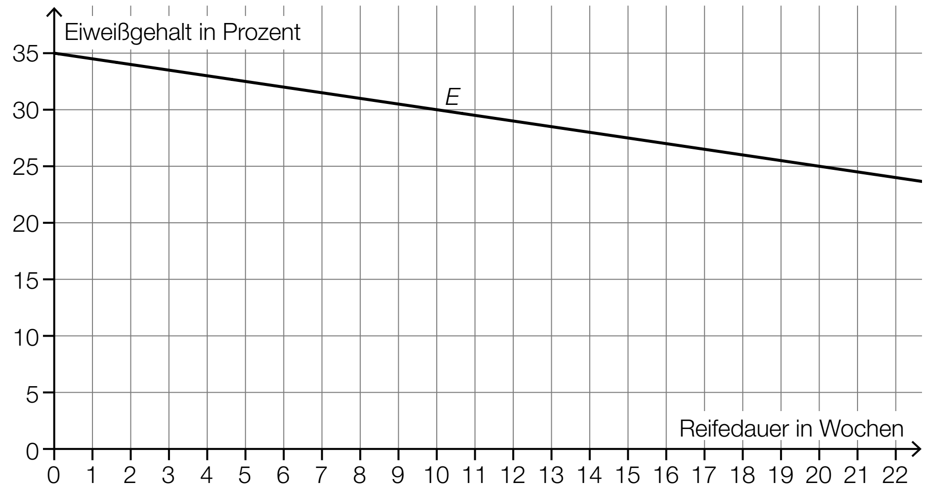


Zum Volumen eines anderen Enzyms wurden die nachstehenden Daten ermittelt.

Zeit in Wochen	0	2	15
Volumen in ml	0,040	0,033	0,034

3) Begründen Sie anhand der Daten aus der obigen Tabelle, warum das Volumen in Abhängigkeit von der Zeit nicht durch ein lineares Modell beschrieben werden kann. *[0/1 P.]*

b) Bei der Reifung eines Käses einer bestimmten Sorte ändert sich dessen Eiweißgehalt.
In der nachstehenden Abbildung ist die zeitliche Entwicklung des Eiweißgehalts während der Reifung als Graph der linearen Funktion *E* dargestellt.



1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion *E* auf. *[0/1 P.]*

c) Bei Käse ist die Gesamtmasse die Summe aus der Trockenmasse und der Masse an enthaltenem Wasser.

Jemand kauft ein Käsestück mit einer Gesamtmasse von 120 g.
Der Wasseranteil dieses Käsestücks beträgt 35 %.
Auf der Verpackung wird der Fettanteil in der Trockenmasse mit 40 % angegeben.

1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

Die Trockenmasse beträgt 85 g.	☐
Die Fettmasse beträgt 35 g.	☐
Der Fettanteil an der Gesamtmasse beträgt 26 %.	☐
Der Anteil der Trockenmasse an der Gesamtmasse beträgt 60 %.	☐
Die Wassermasse beträgt 30 g.	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $f(t) = a \cdot b^t$

$a = 0{,}19$

$f(15) = 0{,}06$ *oder* $0{,}19 \cdot b^{15} = 0{,}06$

$b = \sqrt[15]{\frac{0{,}06}{0{,}19}} = 0{,}926...$

$f(t) = 0{,}19 \cdot 0{,}926...^t$

oder:

$f(t) = 0{,}19 \cdot e^{-0{,}0768...\cdot t}$

a2)

a3) Da das Volumen zuerst abnimmt, aber zwischen der 2. und 15. Woche wieder zunimmt, kann der Zusammenhang nicht durch ein lineares Modell beschrieben werden.

Auch eine rechnerische Überprüfung (z. B. mittels Geradengleichung oder Berechnung der Differenzenquotienten) ist als richtig zu werten.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von *f*.
a2) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen von *f*.
a3) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) $E(t) = -0{,}5 \cdot t + 35$

t ... Reifedauer in Wochen
$E(t)$ ... Eiweißgehalt bei der Reifedauer t in Prozent

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von *E*.

c1)

Der Fettanteil an der Gesamtmasse beträgt 26 %.	☒

c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bremsvorgänge (2)

a) Ein LKW bremst vor einer Kreuzung ab.

Die Weg-Zeit-Funktion dieses LKW für den Zeitraum vom Beginn des Bremsvorgangs bis zum Stillstand wird mit s_L bezeichnet.

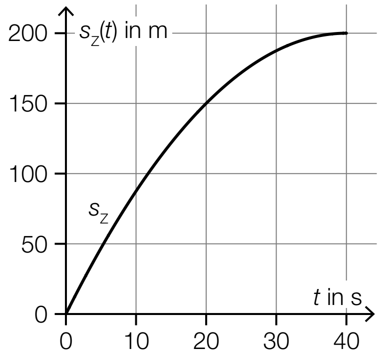
$s_L(t) = 12 \cdot t - t^2$

t ... Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Bremsvorgangs
$s_L(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

1) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des LKW zu Beginn des Bremsvorgangs. Geben Sie das Ergebnis in km/h an. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem der LKW zum Stillstand kommt. *[0/1 P.]*

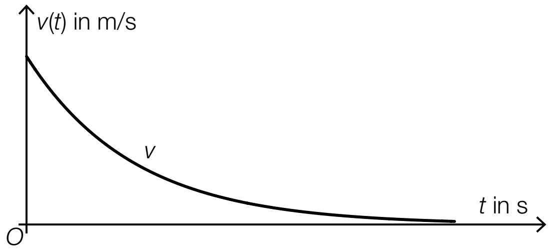
b) Ein Zug bremst vor einer Haltestelle ab. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Weg-Zeit-Funktion s_Z für die letzten 200 m vor dem Stillstand dargestellt.



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die momentane Geschwindigkeit dieses Zuges zur Zeit $t = 20$. *[0/1 P.]*

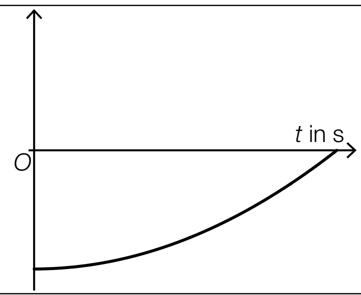
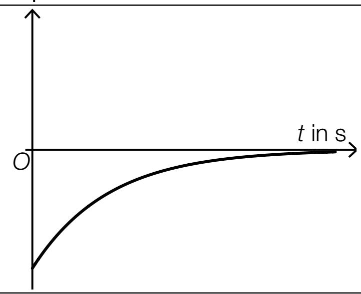
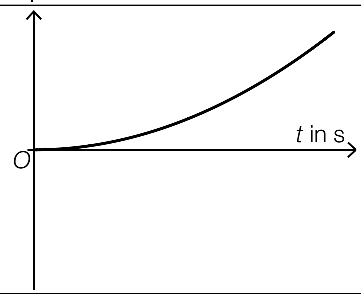
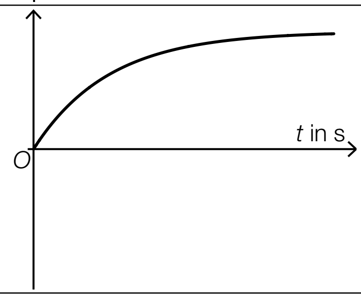
c) Während einer Fahrt mit einem Motorboot wird der Motor abgestellt. Durch den Widerstand im Wasser wird das Motorboot abgebremst.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion des Motorboots dargestellt.



1) Ordnen Sie den beiden Funktionen jeweils den zutreffenden Graphen aus A bis D zu. *[0/1 P.]*

Weg-Zeit-Funktion des Motorboots	
Beschleunigung-Zeit-Funktion des Motorboots	

A	
B	
C	
D	

Möglicher Lösungsweg

a1) $v_L(t) = s_L'(t) = 12 - 2 \cdot t$
$v_L(0) = 12$
12 m/s = 43,2 km/h

Die Geschwindigkeit des LKW zu Beginn des Bremsvorgangs beträgt 43,2 km/h.

a2) $v_L(t) = 0$ *oder* $12 - 2 \cdot t = 0$
$t = 6$

Nach 6 s kommt der LKW zum Stillstand.

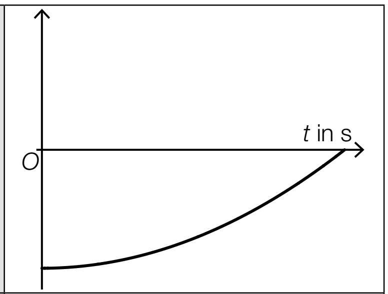
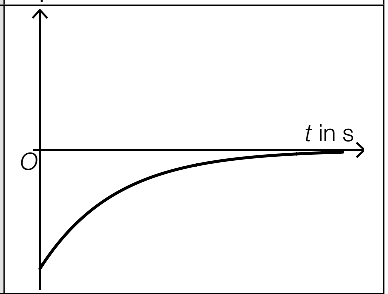
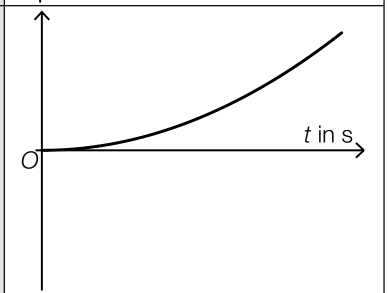
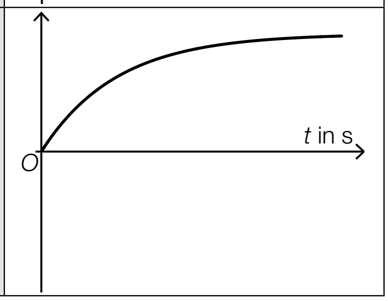
a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Geschwindigkeit in km/h.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Zeitpunkts.

b1) Die momentane Geschwindigkeit des Zuges zur Zeit $t = 20$ beträgt 5 m/s.
Toleranzbereich: [4; 6]

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der momentanen Geschwindigkeit.

c1)

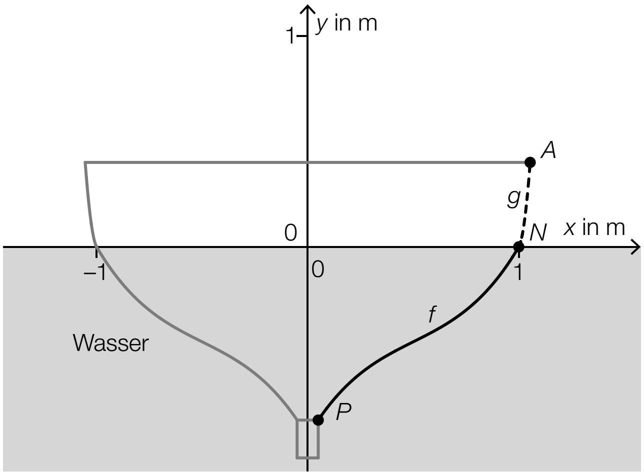
Weg-Zeit-Funktion des Motorboots	D
Beschleunigung-Zeit-Funktion des Motorboots	B

A	
B	
C	
D	

c1) Ein Punkt für das richtige Zuordnen.

Ruderboot

In der nachstehenden Abbildung ist der zur y-Achse symmetrische Querschnitt eines Ruderboots modellhaft dargestellt.



Der Graph der Funktion f ist die Begrenzungslinie des Querschnitts vom Punkt P bis zum Punkt N.

Der Graph der quadratischen Funktion g ist die Begrenzungslinie des Querschnitts vom Punkt N bis zum Punkt A.

Für die Funktion f gilt:

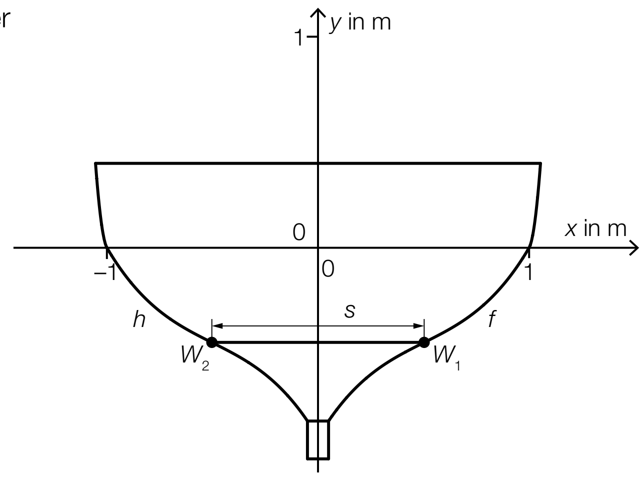
$f(x) = 1{,}6 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 1{,}7 \cdot x - 0{,}9$

a) Im Punkt $N = (1\,|\,0)$ haben die Funktionen f und g die gleiche Steigung.
Der Graph von g verläuft durch den Punkt $A = (1{,}05\,|\,0{,}35)$.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der quadratischen Funktion g. *[0/1/2 P.]*

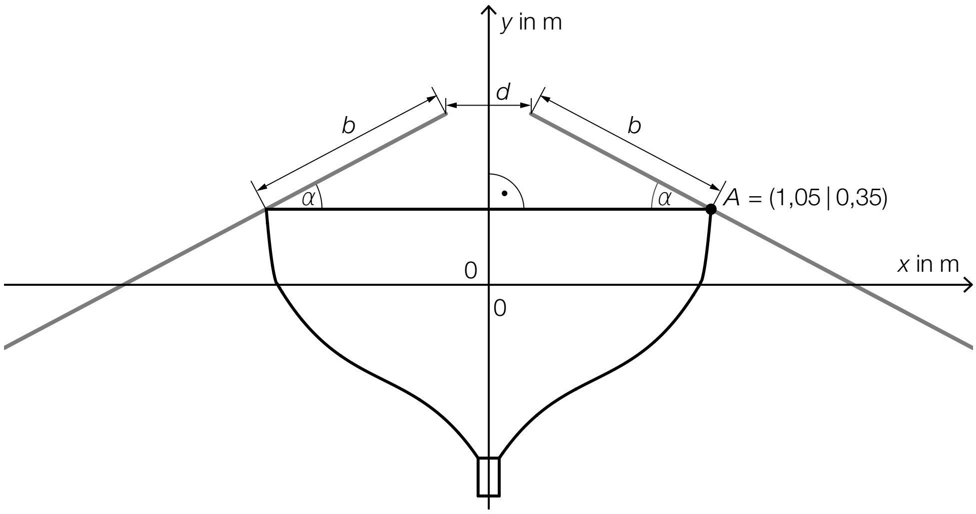
2) Berechnen Sie die Koeffizienten von g. *[0/1 P.]*

b) In der nebenstehenden Abbildung sind der Wendepunkt W_1 der Funktion f sowie der Wendepunkt W_2 der zu f symmetrischen Funktion h eingezeichnet.
Zwischen den Punkten W_1 und W_2 soll eine horizontale Verbindung s angebracht werden.



1) Berechnen Sie mithilfe der Funktion f die Länge von s. *[0/1 P.]*

c) Die beiden Ruder tauchen unter dem Winkel α in das Wasser ein (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kreuzen Sie die richtige Formel zur Berechnung des Winkels α an. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\alpha = \arccos\left(\frac{1{,}05 - 0{,}5 \cdot d}{b}\right)$	☐
$\alpha = \arctan\left(\frac{1{,}05 - d}{b}\right)$	☐
$\alpha = \arcsin\left(\frac{0{,}35}{b}\right)$	☐
$\alpha = \arccos\left(\frac{b}{1{,}05}\right)$	☐
$\alpha = \arcsin\left(\frac{1{,}05 - 0{,}5 \cdot d}{b}\right)$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$g'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

I: $g(1{,}05) = 0{,}35$
II: $g(1) = 0$
III: $g'(1) = f'(1) = 1{,}7$

oder:

I: $a \cdot 1{,}05^2 + b \cdot 1{,}05 + c = 0{,}35$
II: $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$
III: $2 \cdot a \cdot 1 + b = 1{,}7$

a2) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 106$
$b = -210{,}3$
$c = 104{,}3$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Punktkoordinaten.
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koeffizienten von *g*.

b1) $f''(x) = 0$ *oder* $9{,}6 \cdot x - 4{,}8 = 0$
$x = 0{,}5$

$s = 2 \cdot 0{,}5 \text{ m} = 1 \text{ m}$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge von *s*.

c1)

$\alpha = \arccos\left(\frac{1{,}05 - 0{,}5 \cdot d}{b}\right)$	☒

c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Fluggepäck

a) Bei einer bestimmten Fluglinie darf jeder Fluggast höchstens 2 Gepäckstücke aufgeben.

In der nachstehenden Tabelle ist die Häufigkeitsverteilung der Anzahl der Gepäckstücke pro Fluggast für einen bestimmten Flug dieser Fluglinie dargestellt.

Anzahl i der Gepäckstücke pro Fluggast	0	1	2
absolute Häufigkeit der Fluggäste mit i Gepäckstücken	H_0	H_1	H_2

1) Stellen Sie mithilfe der obigen Tabelle eine Formel zur Berechnung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ der Anzahl der Gepäckstücke pro Fluggast auf.

$\bar{x}$ = ____________________ *[0/1 P.]*

2) Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der in jedem Fall die Standardabweichung der Anzahl der Gepäckstücke pro Fluggast angibt. *[1 aus 5]* *[0/1 P.]*

$\sqrt{\frac{(0-\bar{x})^2 + (1-\bar{x})^2 + (2-\bar{x})^2}{3}}$	☐
$\sqrt{\frac{(H_0-\bar{x})^2 + (H_1-\bar{x})^2 + (H_2-\bar{x})^2}{3}}$	☐
$\sqrt{\frac{(0-\bar{x})^2 \cdot H_0 + (1-\bar{x})^2 \cdot H_1 + (2-\bar{x})^2 \cdot H_2}{H_1 + 2 \cdot H_2}}$	☐
$\sqrt{\frac{(0-\bar{x})^2 \cdot H_0 + (1-\bar{x})^2 \cdot H_1 + (2-\bar{x})^2 \cdot H_2}{H_0 + H_1 + H_2}}$	☐
$\sqrt{\frac{(H_0-\bar{x})^2 \cdot 0 + (H_1-\bar{x})^2 \cdot 1 + (H_2-\bar{x})^2 \cdot 2}{H_0 + H_1 + H_2}}$	☐

Für eine Reisegruppe von 12 Fluggästen beträgt der Median der Anzahl der Gepäckstücke pro Fluggast 2.

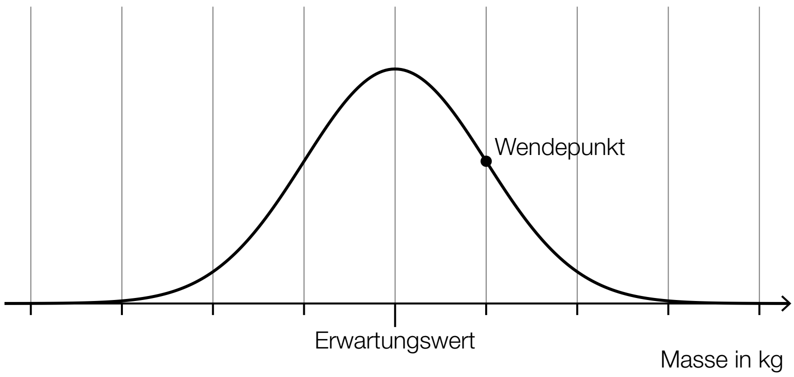
3) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle. *[0/1 P.]*

Anzahl i der Gepäckstücke pro Fluggast	0	1	2
Anzahl der Fluggäste mit i Gepäckstücken	5		

b) Die Masse eines aufgegebenen Gepäckstücks ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert 20 kg und der Standardabweichung 2 kg.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück eine Masse von mindestens 25 kg hat. *[0/1 P.]*

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.



2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse eines Gepäckstücks um höchstens 2 kg vom Erwartungswert abweicht. *[0/1 P.]*

c) Immer wieder werden Gepäckstücke beim Transport beschädigt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück beim Transport beschädigt wird, beträgt jeweils 0,7 %.

Eine Zufallsstichprobe von 300 Gepäckstücken wird nach dem Transport untersucht.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 dieser Gepäckstücke beim Transport beschädigt worden sind. *[0/1 P.]*

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$P(E) = 1 - 0{,}993^{300} \approx 0{,}88$ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\bar{x} = \frac{H_1 + 2 \cdot H_2}{H_0 + H_1 + H_2}$

a2)

$\sqrt{\frac{(0-\bar{x})^2 \cdot H_0 + (1-\bar{x})^2 \cdot H_1 + (2-\bar{x})^2 \cdot H_2}{H_0 + H_1 + H_2}}$	☒

a3)

Anzahl *i* der Gepäckstücke pro Fluggast	0	1	2
Anzahl der Fluggäste mit *i* Gepäckstücken	5	0	7

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
a3) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der Tabelle.

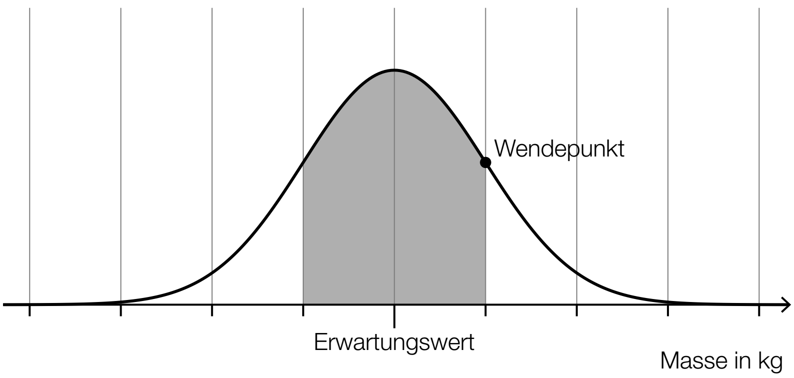
b1) X ... Masse in kg

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(X \geq 25) = 0{,}0062...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück eine Masse von mindestens 25 kg hat, beträgt rund 0,6 %.

b2)



b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit.

c1) Binomialverteilung mit $n = 300$, $p = 0{,}007$
X ... Anzahl der Gepäckstücke, die beim Transport beschädigt worden sind

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$P(X \leq 2) = 0{,}649...$

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 dieser Gepäckstücke beim Transport beschädigt worden sind, beträgt rund 65 %.

c2) Mindestens 1 dieser Gepäckstücke ist beim Transport beschädigt worden.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
c2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben im gegebenen Sachzusammenhang.