Geben Sie das kleinstmögliche Intervall W an, das alle Werte von r enthält.

$W = [\ \_\_\_\_\_\_\_\_ ;\ \_\_\_\_\_\_\_\_\ ]$

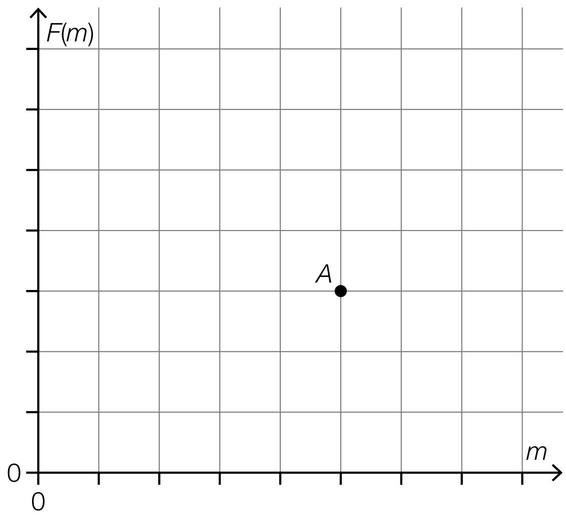
Zentripetalkraft

Bei der Bewegung eines Körpers auf einer Kreisbahn mit dem Radius r mit konstanter Geschwindigkeit v ist der Betrag der Zentripetalkraft F eine Funktion in Abhängigkeit von der Masse m dieses Körpers.

Es gilt: $F(m) = \frac{m \cdot v^2}{r}$

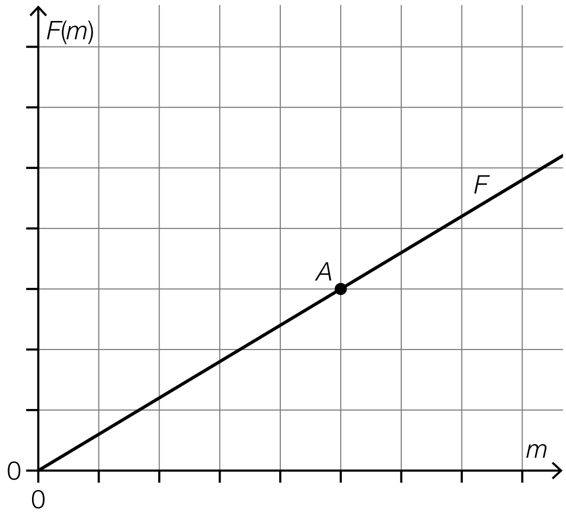
Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen von F so, dass er durch den Punkt A verläuft.



[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg



Ein Punkt für das richtige Skizzieren des Graphen.

Der Punkt ist auch dann zu geben, wenn nur eine Strecke vom Ursprung bis zum Punkt *A* eingezeichnet ist.

Ideales Gas*

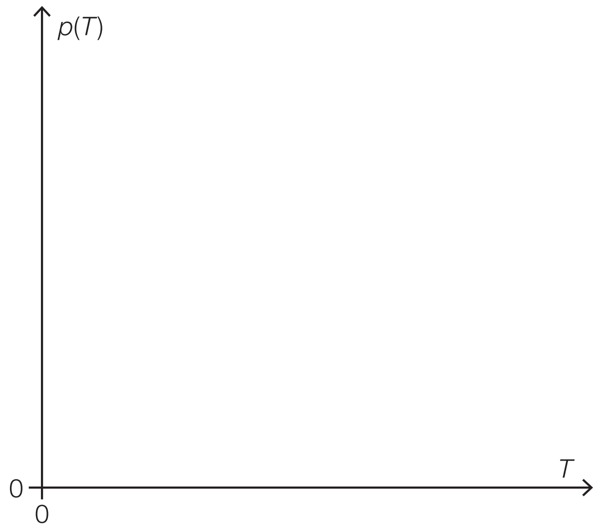
Aufgabennummer: 1_836	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	

Die Gleichung $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen dem Druck p, dem Volumen V, der Stoffmenge n und der absoluten Temperatur T eines idealen Gases, wobei R eine Konstante ist ($V, n, R \in \mathbb{R}^+$ und $p, T \in \mathbb{R}_0^+$).

Die Funktion p modelliert in Abhängigkeit von der Temperatur T den Druck $p(T)$, wenn die anderen in der Gleichung vorkommenden Größen konstant bleiben.

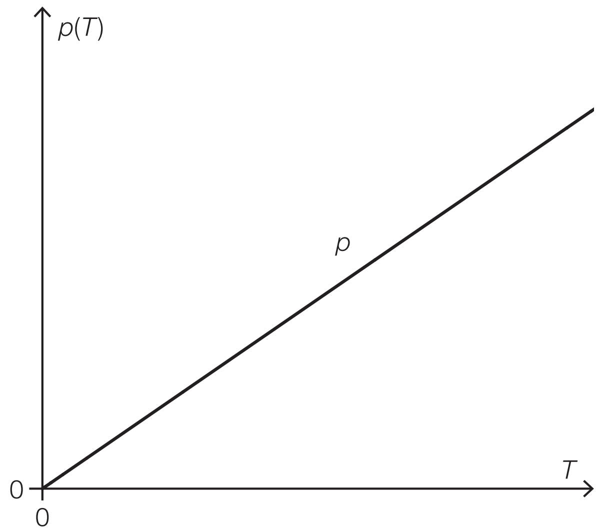
Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen einer solchen Funktion p.



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Skizzieren des Graphen.

Elektrischer Widerstand*

Aufgabennummer: 1_533	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Der elektrische Widerstand R eines zylinderförmigen Leiters mit dem Radius r und der Länge l kann mithilfe der Formel $R = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ berechnet werden. Dabei ist die Größe ϱ vom Material und von der Temperatur des Leiters abhängig.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Gleichungen an, die eine lineare Funktion bestimmen.

$R(l) = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ mit ϱ, r konstant	☐
$l(\varrho) = \frac{R}{\varrho} \cdot r^2 \cdot \pi$ mit R, r konstant	☐
$R(\varrho) = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ mit l, r konstant	☐
$R(r) = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ mit ϱ, l konstant	☐
$l(r) = \frac{R}{\varrho} \cdot r^2 \cdot \pi$ mit R, ϱ konstant	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017, adaptiert

Lösungserwartung

$R(l) = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ mit ϱ, r konstant	☒
$R(\varrho) = \varrho \cdot \frac{l}{r^2 \cdot \pi}$ mit l, r konstant	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Funktionale Zusammenhänge*

Aufgabennummer: 1_741	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.2

Gegeben ist die Gleichung $w = \frac{y \cdot z^2}{2 \cdot x}$ mit $w, x, y, z \in \mathbb{R}^+$.

Die gegebene Gleichung beschreibt funktionale Zusammenhänge zwischen zwei Variablen, wenn die beiden anderen Variablen als konstant angenommen werden.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Betrachtet man z in Abhängigkeit von x, so ist $z\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto z(x)$ eine Exponentialfunktion.	☐
Betrachtet man w in Abhängigkeit von z, so ist $w\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, z \mapsto w(z)$ eine quadratische Funktion.	☐
Betrachtet man w in Abhängigkeit von x, so ist $w\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto w(x)$ eine lineare Funktion.	☐
Betrachtet man y in Abhängigkeit von z, so ist $y\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, z \mapsto y(z)$ eine Polynomfunktion vom Grad 2.	☐
Betrachtet man x in Abhängigkeit von y, so ist $x\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, y \mapsto x(y)$ eine lineare Funktion.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

Betrachtet man w in Abhängigkeit von z, so ist $w\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, z \mapsto w(z)$ eine quadratische Funktion.	☒
Betrachtet man x in Abhängigkeit von y, so ist $x\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, y \mapsto x(y)$ eine lineare Funktion.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Funktionen zuordnen*

Aufgabennummer: 1_692	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.2

Gegeben ist die Formel $F = \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $c \neq 0$, $n \neq 0$.

Nimmt man an, dass eine der Größen a, b, c, d oder n variabel ist und die anderen Größen konstant sind, so kann F als Funktion in Abhängigkeit von der variablen Größe interpretiert werden.

Aufgabenstellung:

Welche der unten angegebenen Zuordnungen beschreiben (mit geeignetem Definitions- und Wertebereich) eine lineare Funktion?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Zuordnungen an!

$a \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$b \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$c \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$d \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐
$n \mapsto \frac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

$b \mapsto \dfrac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	$\boxtimes$
$d \mapsto \dfrac{a^2 \cdot b}{c^n} + d$	$\boxtimes$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Zuordnungen angekreuzt sind.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Stefan-Boltzmann-Gesetz*

Aufgabennummer: 1_596	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: FA 1.2

Die Leuchtkraft L eines Sterns wird durch folgende Formel beschrieben:

$L = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot T^4 \cdot \sigma$

Dabei ist R der Sternradius und T die Oberflächentemperatur des Sterns; σ ist eine Konstante (die sogenannte Stefan-Boltzmann-Konstante).

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Für verschiedene Sterne mit gleichem, bekanntem Sternradius R ist die Leuchtkraft L eine Funktion ______①______; es handelt sich dabei um eine ______②______.

①	
des Sternradius R	☐
der Oberflächentemperatur T	☐
der Konstanten σ	☐

②	
lineare Funktion	☐
Potenzfunktion	☐
Exponentialfunktion	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

①	
der Oberflächentemperatur T	☒

②	
Potenzfunktion	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

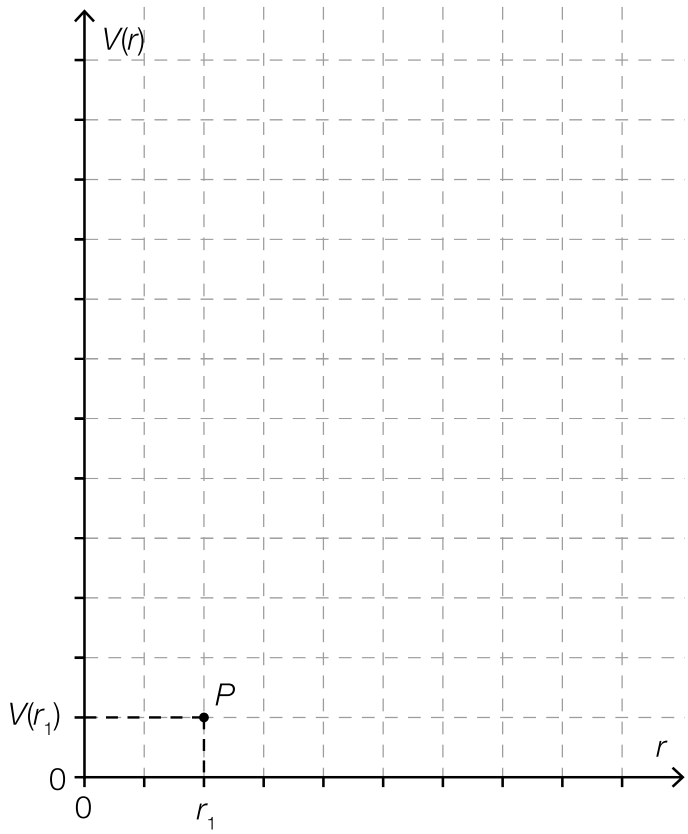
Zylindervolumen*

Aufgabennummer: 1_559	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 1.2

Bei einem Drehzylinder wird der Radius des Grundkreises mit r und die Höhe des Zylinders mit h bezeichnet. Ist die Höhe des Zylinders konstant, dann beschreibt die Funktion V mit $V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot h$ die Abhängigkeit des Zylindervolumens vom Radius.

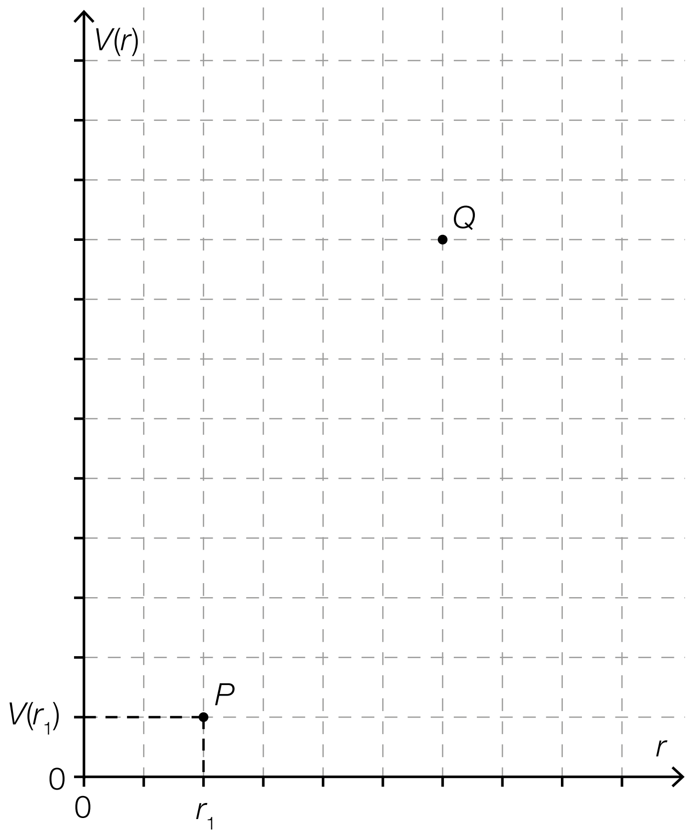
Aufgabenstellung:

Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Punkt $P = (r_1 | V(r_1))$ eingezeichnet. Ergänzen Sie in diesem Koordinatensystem den Punkt $Q = (3 \cdot r_1 | V(3 \cdot r_1))$!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die korrekte Ergänzung von Q.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Volumen eines Drehkegels*

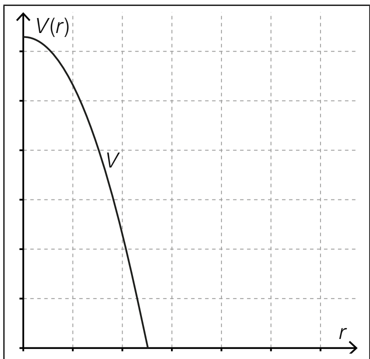
Aufgabennummer: 1_415	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 1.2

Das Volumen V eines Drehkegels hängt vom Radius r und von der Höhe h ab. Es wird durch die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$ beschrieben.

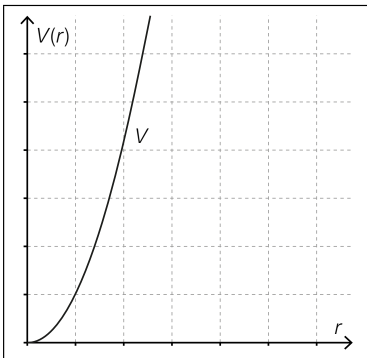
Aufgabenstellung:

Eine der nachstehenden Abbildungen stellt die Abhängigkeit des Volumens eines Drehkegels vom Radius bei konstanter Höhe dar.

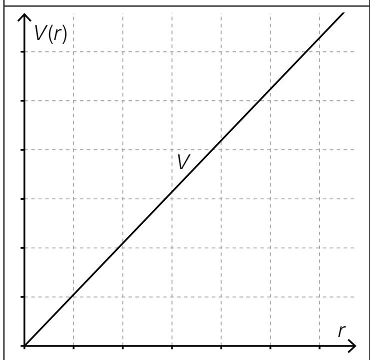
Kreuzen Sie die entsprechende Abbildung an!



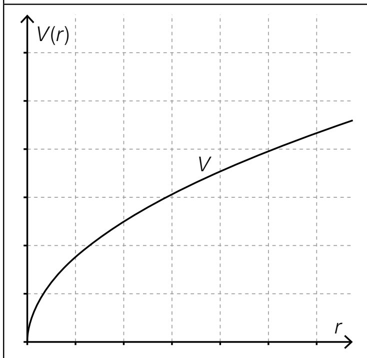
☐



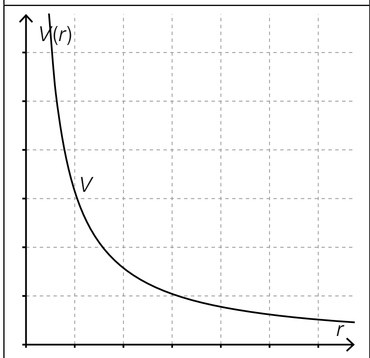
☐



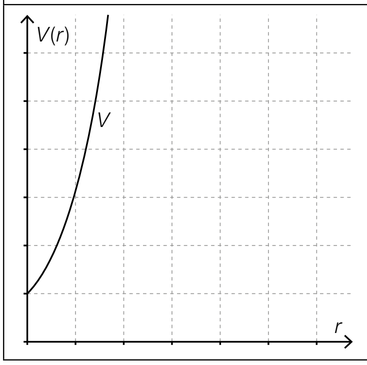
☐



☐



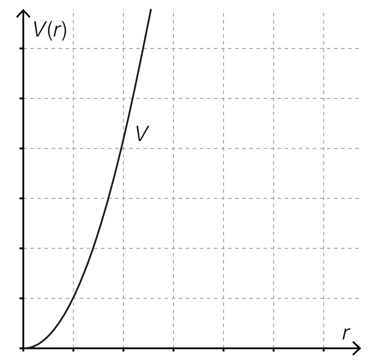
☐



☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

			☒

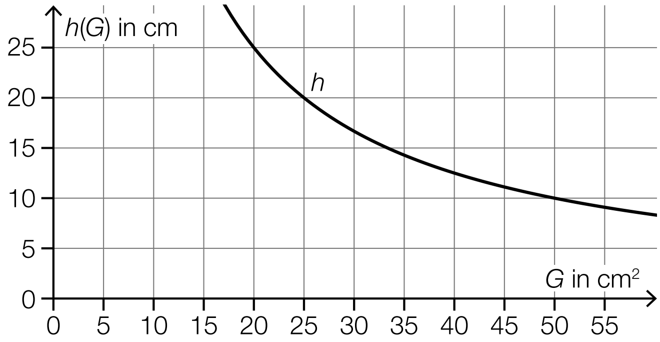
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Abbildung angekreuzt ist.

Behälter

Es werden zylindrische Behälter, die alle das gleiche Volumen V_0 haben, produziert.

Die Funktion h beschreibt die Höhe eines solchen Behälters in Abhängigkeit vom Inhalt G seiner Grundfläche (G in cm², $h(G)$ in cm). Der Graph der Funktion h ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie V_0.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$V_0 = G \cdot h(G) = 25 \cdot 20 = 500$

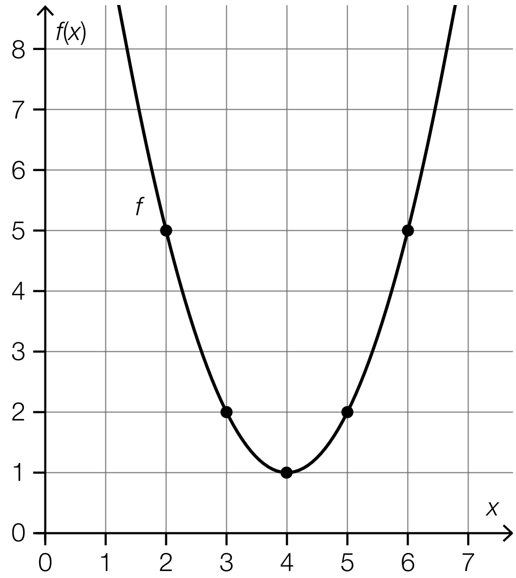
$V_0 = 500\text{ cm}^3$

Ein Punkt für das richtige Berechnen von V_0.
Toleranzintervall: $[480\text{ cm}^3; 520\text{ cm}^3]$

Grundkompetenz: FA 1.4

Wertepaare

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Funktion *f*.
Die gekennzeichneten Punkte des Graphen haben ganzzahlige Koordinaten.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Für ______①______ gilt $f(x) \leq 5$; für $x \in [3; 5]$ gilt ______②______.

①	
$x \in [1; 5]$	☐
$x \in [2; 6]$	☐
$x \in [3; 7]$	☐

②	
$f(x) \in [1; 2]$	☐
$f(x) \in [0; 1]$	☐
$f(x) \in [2; 5]$	☐

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

①	
$x \in [2; 6]$	☒

②	
$f(x) \in [1; 2]$	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

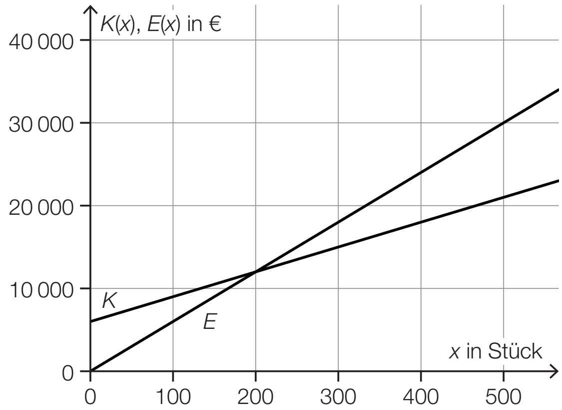
Trikots*

Aufgabennummer: 1_860	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Ein Unternehmen produziert und verkauft Trikots.

Die lineare Funktion K beschreibt die Kosten $K(x)$ in Euro in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x.
Die lineare Funktion E beschreibt den Erlös $E(x)$ in Euro in Abhängigkeit von der verkauften Stückzahl x.

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Funktion K und der Graph der Funktion E dargestellt.



Der Schnittpunkt von K und E hat die Koordinaten $(200 \mid 12\,000)$ und es gilt: $K(0) = 6\,000$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Der Verkaufspreis eines Trikots beträgt € 60.	☐
Die Produktion eines Trikots kostet € 25.	☐
Wenn das Unternehmen 400 Trikots produziert und verkauft, wird ein Gewinn von € 6.000 erzielt.	☐
Bei der Produktion fallen keine Fixkosten an.	☐
Wenn das Unternehmen weniger als 200 Trikots produziert und verkauft, wird ein Gewinn erzielt.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

Der Verkaufspreis eines Trikots beträgt € 60.	☒
Wenn das Unternehmen 400 Trikots produziert und verkauft, wird ein Gewinn von € 6.000 erzielt.	☒

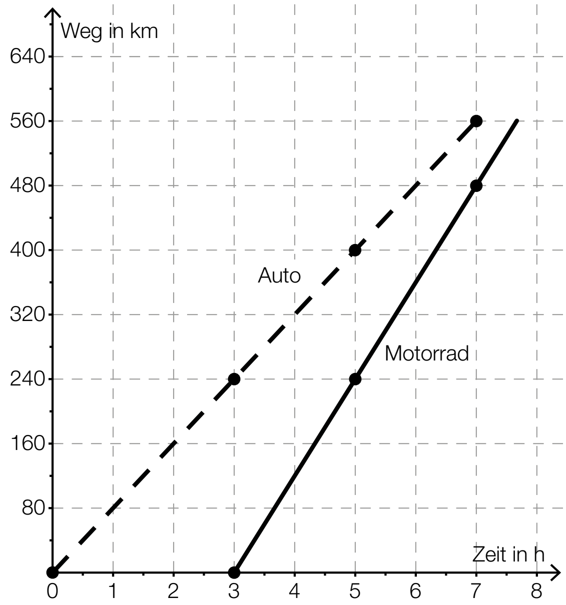
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Daten aus einem Diagramm ablesen*

Aufgabennummer: 1_511	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.4

Ein Motorradfahrer fährt dieselbe Strecke (560 km) wie ein Autofahrer. Die beiden Bewegungen werden im nachstehenden Zeit-Weg-Diagramm modellhaft als geradlinig angenommen. Die hervorgehobenen Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die eine korrekte Interpretation des Diagramms darstellen!

Der Motorradfahrer fährt drei Stunden nach der Abfahrt des Autofahrers los.	☐
Das Motorrad hat eine Durchschnittsgeschwindigkeit von 100 km/h.	☐
Wenn der Autofahrer sein Ziel erreicht, ist das Motorrad davon noch 120 km entfernt.	☐
Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos ist um 40 km/h niedriger als jene des Motorrads.	☐
Die Gesamtfahrzeit des Motorradfahrers ist für diese Strecke größer als jene des Autofahrers.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Der Motorradfahrer fährt drei Stunden nach der Abfahrt des Autofahrers los.	☒
Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Autos ist um 40 km/h niedriger als jene des Motorrads.	☒

Lösungsschlüssel

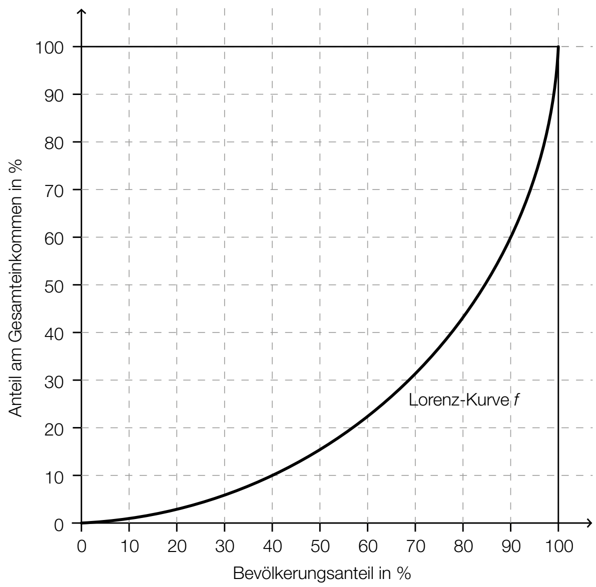
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Lorenz-Kurve*

Aufgabennummer: 1_414	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.4

Die in der unten stehenden Abbildung dargestellte Lorenz-Kurve kann als Graph einer Funktion *f* verstanden werden, die gewissen Bevölkerungsanteilen deren jeweiligen Anteil am Gesamteinkommen zuordnet.

Dieser Lorenz-Kurve kann man z. B. entnehmen, dass die einkommensschwächsten 80 % der Bevölkerung über ca. 43 % des Gesamteinkommens verfügen. Das bedeutet zugleich, dass die einkommensstärksten 20 % der Bevölkerung über ca. 57 % des Gesamteinkommens verfügen.



Quelle: http://www.lai.fu-berlin.de/e-learning/projekte/vwl_basiswissen/Umverteilung/Gini_Koeffizient/index.html [21.01.2015] (adaptiert).

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für die oben dargestellte Lorenz-Kurve zutreffenden Aussagen an!

Die einkommensstärksten 10 % der Bevölkerung verfügen über ca. 60 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensstärksten 40 % der Bevölkerung verfügen über ca. 90 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensschwächsten 40 % der Bevölkerung verfügen über ca. 10 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensschwächsten 60 % der Bevölkerung verfügen über ca. 90 % des Gesamteinkommens.	☐
Die einkommensschwächsten 90 % der Bevölkerung verfügen über ca. 60 % des Gesamteinkommens.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

Die einkommensschwächsten 40 % der Bevölkerung verfügen über ca. 10 % des Gesamteinkommens.	☒
Die einkommensschwächsten 90 % der Bevölkerung verfügen über ca. 60 % des Gesamteinkommens.	☒

Lösungsschlüssel

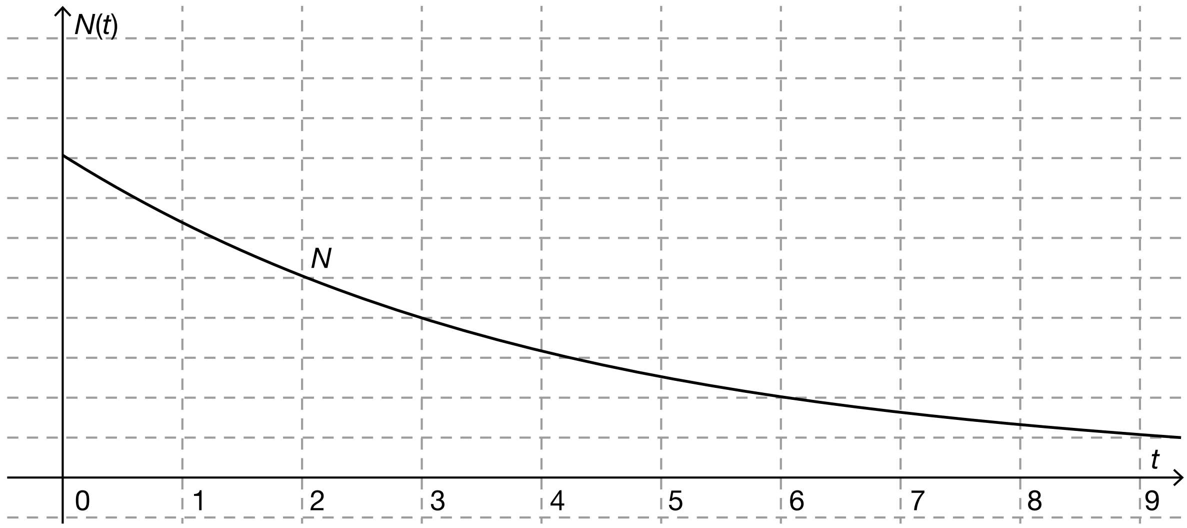
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Zerfallsprozess*

Aufgabennummer: 1_343	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.4

Der unten abgebildete Graph einer Funktion N stellt einen exponentiellen Zerfallsprozess dar; dabei bezeichnet t die Zeit und $N(t)$ die zum Zeitpunkt t vorhandene Menge des zerfallenden Stoffes.
Für die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Menge gilt: $N(0) = 800$.



Mit t_H ist diejenige Zeitspanne gemeint, nach deren Ablauf die ursprüngliche Menge des zerfallenden Stoffes auf die Hälfte gesunken ist.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$t_H = 6$	☐
$t_H = 2$	☐
$t_H = 3$	☐
$N(t_H) = 400$	☐
$N(t_H) = 500$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

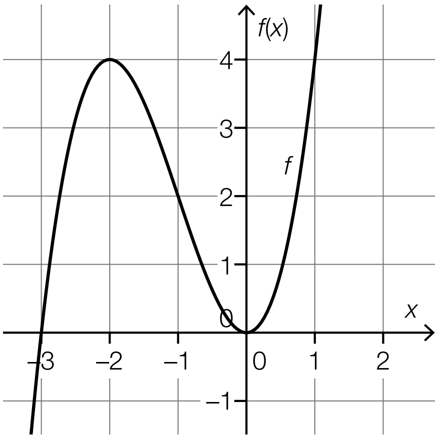
$t_H = 3$	☒
$N(t_H) = 400$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Monotonie- und Krümmungsverhalten einer Polynomfunktion

Nachstehend ist der Graph der Polynomfunktion 3. Grades *f* dargestellt. Alle charakteristischen Punkte dieses Graphen (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrempunkte, Wendepunkte) haben ganzzahlige Koordinaten.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Funktion *f* ist im Intervall ___①___ streng monoton steigend und ändert ihr Krümmungsverhalten an der Stelle ___②___.

①	
$(-\infty; -2)$	☐
$(-1; 1)$	☐
$(-2; 0)$	☐

②	
$x = -2$	☐
$x = -1$	☐
$x = 0$	☐

[0 / ½ / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

①		②	
$(-\infty; -2)$	☒		
		$x = -1$	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

Exponentialfunktionen

Gegeben ist eine Exponentialfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $b \neq 1$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jede Exponentialfunktion der oben angeführten Form zutreffen. *[2 aus 5]*

f hat keine Nullstellen.	☐
f ist streng monoton steigend.	☐
f hat mindestens eine lokale Extremstelle.	☐
Der Graph von f ist positiv gekrümmt (linksgekrümmt).	☐
Der Graph von f nähert sich für $x \to \infty$ der positiven x-Achse.	☐

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

f hat keine Nullstellen.	☒
Der Graph von *f* ist positiv gekrümmt (linksgekrümmt).	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

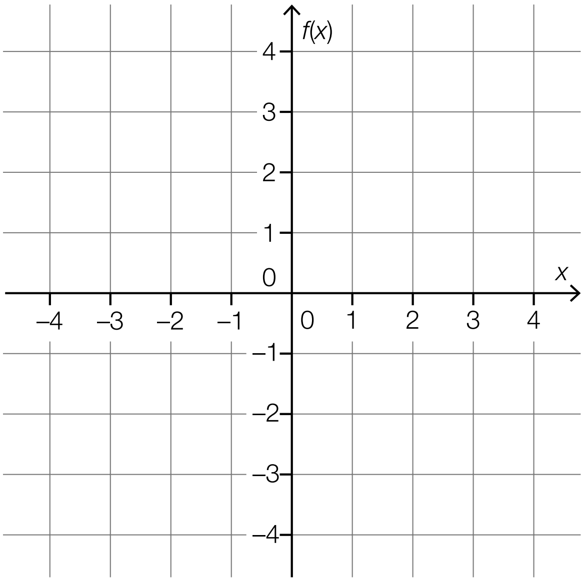
Graph einer Polynomfunktion

Eine Polynomfunktion 4. Grades f hat folgende Eigenschaften:

- f hat an der Stelle $x = -3$ ein lokales Maximum.
- Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse.

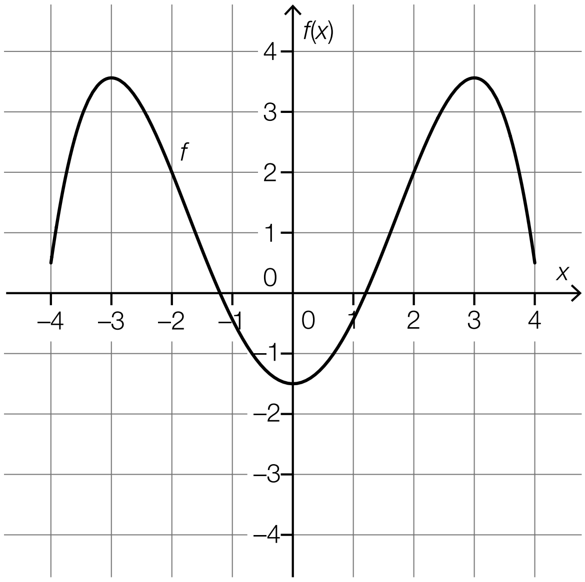
Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem im Intervall [–4; 4] den Graphen einer solchen Polynomfunktion f.



[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg



Ein Punkt für das richtige Skizzieren des Funktionsgraphen (Polynomfunktion 4. Grades), wobei dieser klar erkennbar an den Stellen –3 und 3 jeweils ein Maximum haben muss und symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse verlaufen muss.

Eigenschaften reeller Funktionen

Nachstehend sind Eigenschaften einer reellen Funktion *f* angegeben.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Eigenschaften jeweils die zutreffende Aussage aus A bis F zu.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = f(-x)$.	
Für ein bestimmtes $m \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f(x + m) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$.	
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \neq 0$.	

A	*f* ist streng monoton steigend.
B	Der Graph von *f* ist symmetrisch zur senkrechten Achse.
C	Der Graph von *f* hat eine Asymptote.
D	*f* ist streng monoton fallend.
E	*f* ist periodisch.
F	Der Graph von *f* hat keinen Schnittpunkt mit der *x*-Achse.

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = f(-x)$.	B
Für ein bestimmtes $m \in \mathbb{R}^+$ gilt: $f(x + m) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	E
Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) > f(x_2)$.	D
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \neq 0$.	F

A	f ist streng monoton steigend.
B	Der Graph von f ist symmetrisch zur senkrechten Achse.
C	Der Graph von f hat eine Asymptote.
D	f ist streng monoton fallend.
E	f ist periodisch.
F	Der Graph von f hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse.

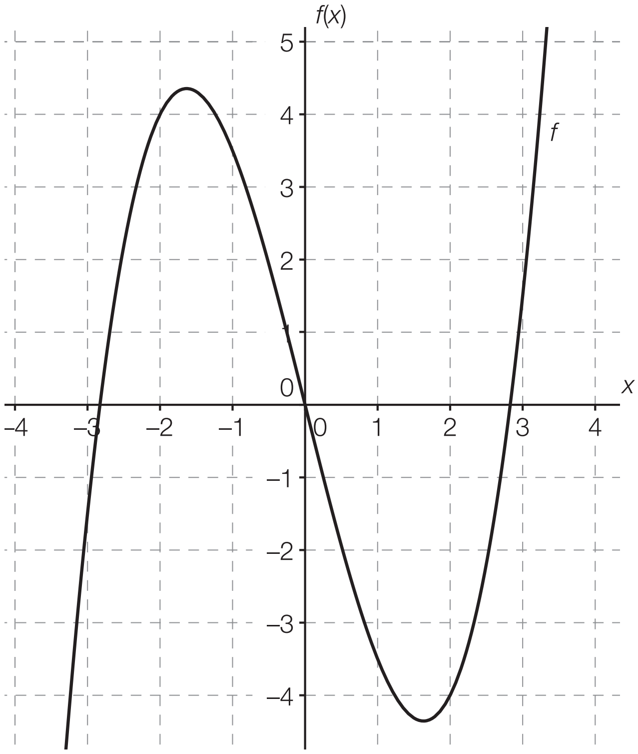
Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Funktionseigenschaften erkennen*

Aufgabennummer: 1_487	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden auf f zutreffenden Aussagen an.

Die Funktion f ist im Intervall (1; 3) monoton steigend.	☐
Die Funktion f hat im Intervall (1; 2) eine lokale Maximumstelle.	☐
Die Funktion f ändert im Intervall (–1; 1) das Krümmungsverhalten.	☐
Der Funktionsgraph von f ist symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse.	☐
Die Funktion f ändert im Intervall (–3; 0) das Monotonieverhalten.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016, adaptiert

Lösungserwartung

Die Funktion f ändert im Intervall $(-1; 1)$ das Krümmungsverhalten.	☒
Die Funktion f ändert im Intervall $(-3; 0)$ das Monotonieverhalten.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Quadratische Funktion*

Aufgabennummer: 1_367	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☒
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Gegeben ist eine quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Der Graph von f hat zwei verschiedene reelle Nullstellen, wenn gilt: $a > 0$ und $b < 0$.	☐
Der Graph von f mit $b = 0$ berührt die x-Achse in der lokalen Extremstelle.	☐
Der Graph von f mit $b > 0$ berührt die x-Achse im Ursprung.	☐
Für $a < 0$ hat der Graph von f einen Tiefpunkt.	☐
Für die lokale Extremstelle x_s von f gilt immer: $x_s = b$.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014, adaptiert

Lösungserwartung

Der Graph von f hat zwei verschiedene reelle Nullstellen, wenn gilt: $a > 0$ und $b < 0$.	☒
Der Graph von f mit $b = 0$ berührt die x-Achse in der lokalen Extremstelle.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Asymptotisches Verhalten*

Aufgabennummer: 1_463	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☒
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Nachstehend sind fünf Funktionen durch ihre Gleichungen angegeben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Funktionen an, die eine waagrechte Asymptote haben.

$f_1(x) = \frac{2}{x}$	☐
$f_2(x) = x^2$	☐
$f_3(x) = \frac{x}{2}$	☐
$f_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	☐
$f_5(x) = x^{\frac{1}{2}}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016, adaptiert

Lösungserwartung

$f_1(x) = \frac{2}{x}$	☒
$f_4(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Graph einer Polynomfunktion*

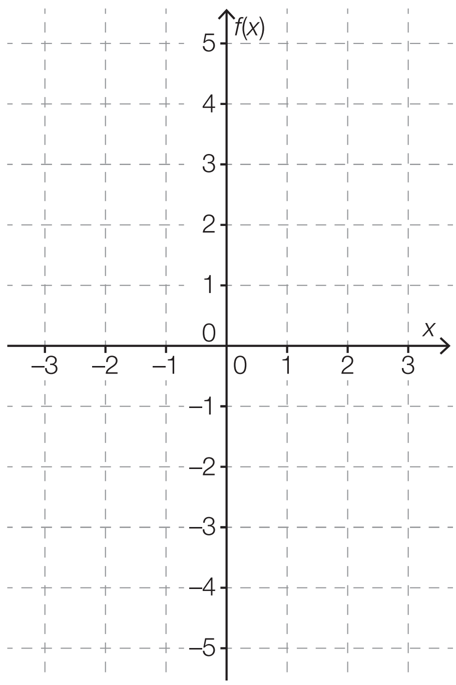
Aufgabennummer: 1_788	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 1.5

Eine Polynomfunktion $f: [-3; 3] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ hat folgende Eigenschaften:

- Der Graph von f ist symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse.
- Die Funktion f hat im Punkt $(2|1)$ ein lokales Minimum.
- Der Graph von f schneidet die senkrechte Achse im Punkt $(0|3)$.

Aufgabenstellung:

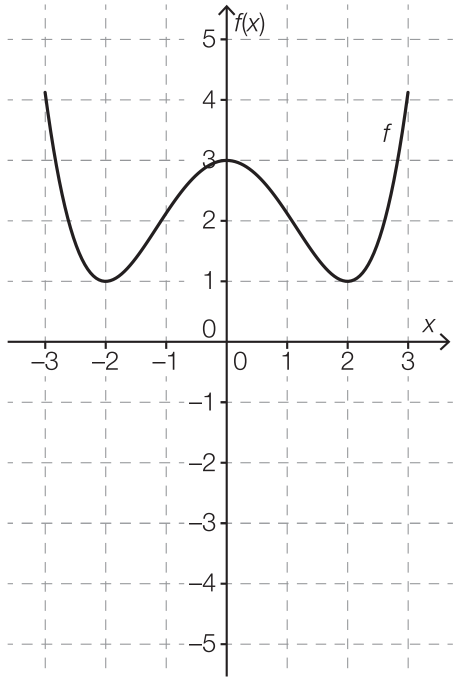
Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen einer solchen Funktion f im Intervall $[-3; 3]$ ein.



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

möglicher Graph:



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Darstellung des Graphen einer solchen Funktion f, wobei die in der Angabe angeführten Eigenschaften klar erkennbar sein müssen.

Kostenfunktion*

Aufgabennummer: 1_764	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 1.5

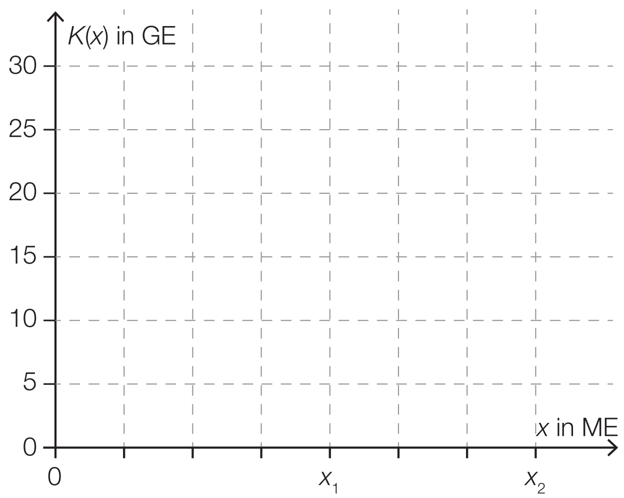
Die Gesamtkosten, die bei der Herstellung eines Produkts anfallen, können mithilfe einer differenzierbaren Kostenfunktion K modelliert werden. Dabei ordnet K der Produktionsmenge x die Kosten $K(x)$ zu (x in Mengeneinheiten (ME), $K(x)$ in Geldeinheiten (GE)).

Für eine Kostenfunktion $K: [0; x_2] \to \mathbb{R}$ und x_1 mit $0 < x_1 < x_2$ gelten nachstehende Bedingungen:

- K ist im Intervall $[0; x_2]$ streng monoton steigend.
- Die Fixkosten betragen 10 GE.
- Die Kostenfunktion hat im Intervall $[0; x_1)$ einen degressiven Verlauf, d. h., die Kosten steigen bei zunehmender Produktionsmenge immer schwächer.
- Bei der Produktionsmenge x_1 liegt die Kostenkehre. Die Kostenkehre von K ist diejenige Stelle, ab der die Kosten immer stärker steigen.

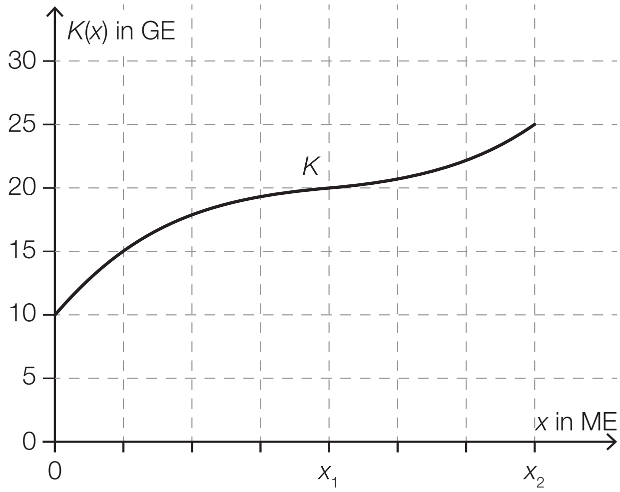
Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Verlauf des Graphen einer solchen Kostenfunktion K.



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Darstellung des Graphen einer solchen Funktion K, der folgende Bedingungen erfüllt:

- Er muss im Punkt $(0|10)$ beginnen.
- Er muss im Intervall $[0; x_2]$ streng monoton steigend sein.
- Er muss an der Stelle x_1 eine Wendestelle aufweisen.
- Er muss im Intervall $(0; x_1)$ rechtsgekrümmt und im Intervall $(x_1; x_2)$ linksgekrümmt sein.

Gewinnfunktion*

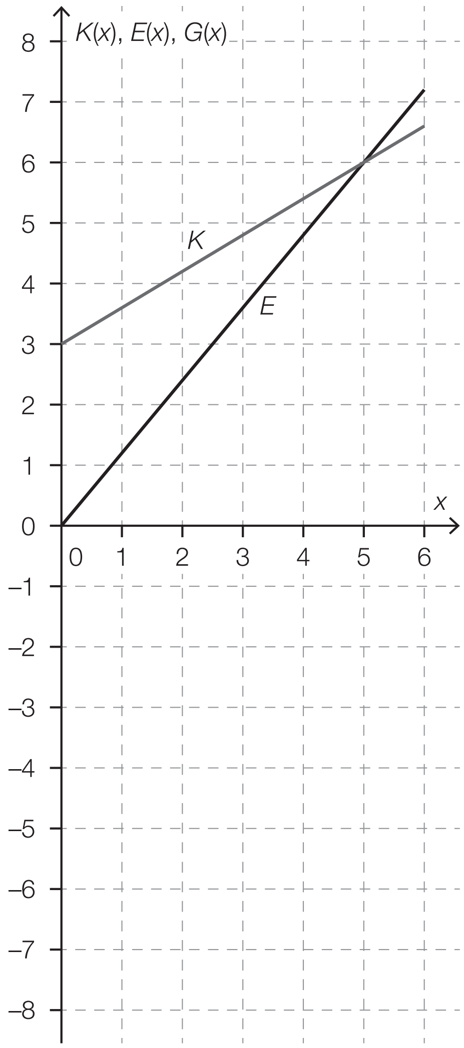
Aufgabennummer: 1_740	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 1.5

Die unten stehende Abbildung zeigt eine lineare Kostenfunktion $K: x \mapsto K(x)$ und eine lineare Erlösfunktion $E: x \mapsto E(x)$ mit $x \in [0; 6]$.

Für die Gewinnfunktion $G: x \mapsto G(x)$ gilt für alle $x \in [0; 6]$: $G(x) = E(x) - K(x)$.

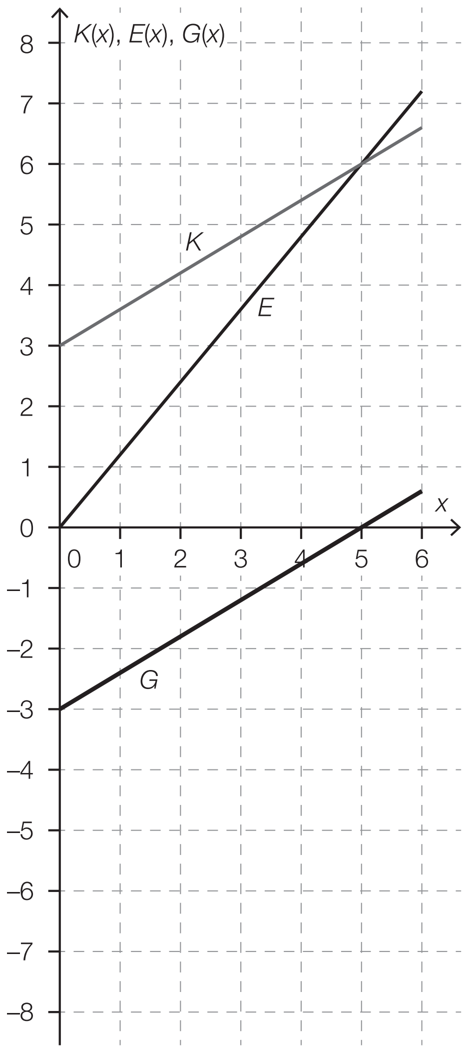
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen von G ein.



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Darstellung des Graphen der Funktion G, wobei G eine lineare Funktion sein muss, deren Graph durch die beiden Punkte $(0|-3)$ und $(5|0)$ verläuft.

Quadratische Funktion*

Aufgabennummer: 1_716	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: FA 1.5

Gegeben ist eine quadratische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$).

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Wenn ______①______ gilt, so hat die Funktion f auf jeden Fall ______②______.

①	
$a < 0$	☐
$b = 0$	☐
$c > 0$	☐

②	
einen zur senkrechten Achse symmetrischen Graphen	☐
zwei reelle Nullstellen	☐
ein lokales Minimum	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

①	
$b = 0$	☒

②	
einen zur senkrechten Achse symmetrischen Graphen	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

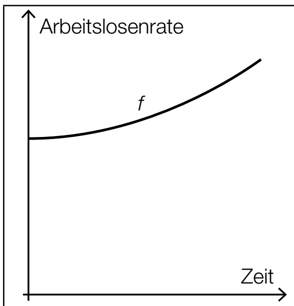
Arbeitslosenrate*

Aufgabennummer: 1_693	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 1.5

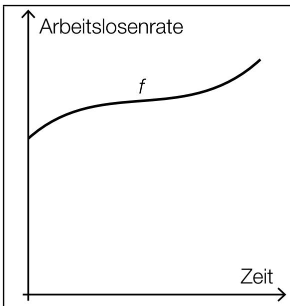
Ein Politiker, der die erfolgreiche Arbeitsmarktpolitik einer Regierungspartei hervorheben möchte, sagt: „Die Zunahme der Arbeitslosenrate verringerte sich während des ganzen Jahres.“
Ein Politiker der Opposition sagt darauf: „Die Arbeitslosenrate ist während des ganzen Jahres gestiegen.“

Aufgabenstellung:

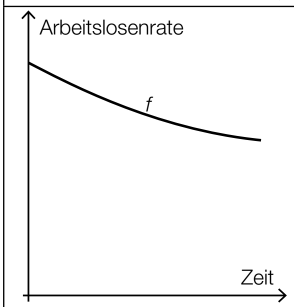
Die Entwicklung der Arbeitslosenrate während dieses Jahres kann durch eine Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit modelliert werden.
Welcher der nachstehenden Graphen stellt die Entwicklung der Arbeitslosenrate während dieses Jahres dar, wenn die Aussagen beider Politiker zutreffen?
Kreuzen Sie den zutreffenden Graphen an!



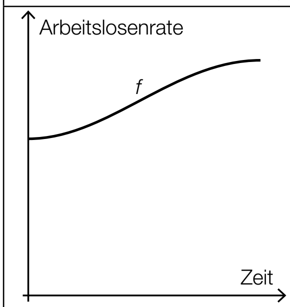
☐



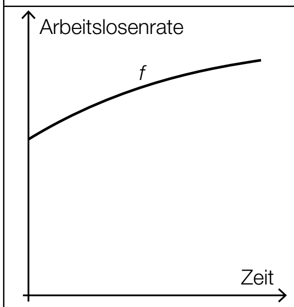
☐



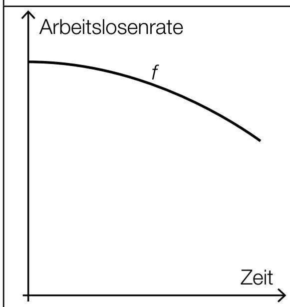
☐



☐



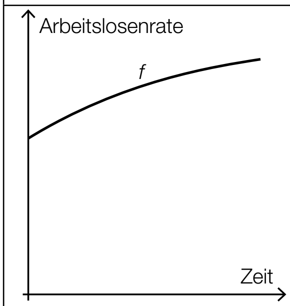
☐



☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

	☒		

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Graph angekreuzt ist.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Eigenschaften von Funktionsgraphen*

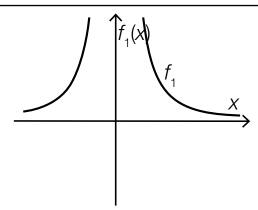
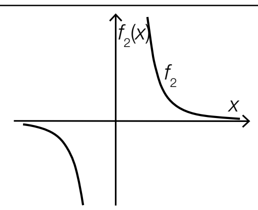
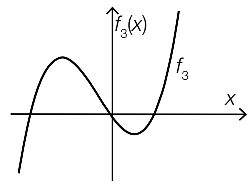
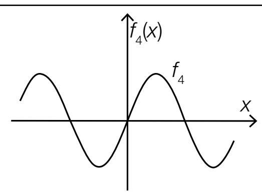
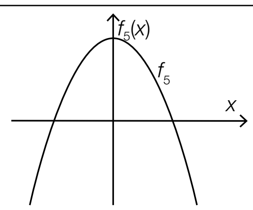
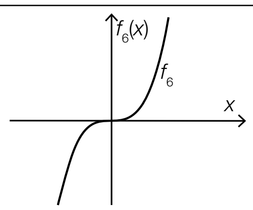
Aufgabennummer: 1_668	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 1.5

Nachstehend sind Eigenschaften von Funktionen angeführt sowie charakteristische Ausschnitte von Funktionsgraphen abgebildet.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Eigenschaften jeweils den passenden Graphen (aus A bis F) zu!

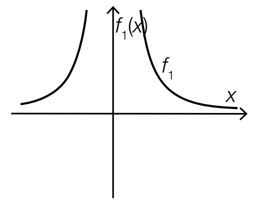
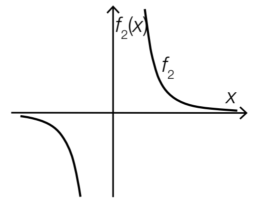
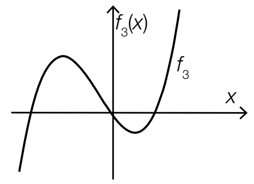
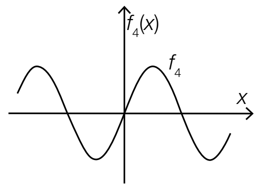
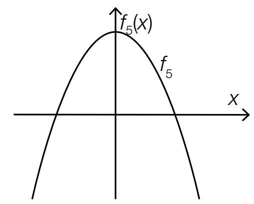
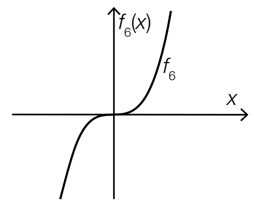
Die Funktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich monoton steigend.	
Die Funktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt).	
Die Funktion ist auf dem Intervall (–∞; 0) positiv gekrümmt (linksgekrümmt).	
Die Funktion ist auf dem Intervall (–∞; 0) monoton fallend.	

A	
B	
C	
D	
E	
F	

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Die Funktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich monoton steigend.	F
Die Funktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt).	E
Die Funktion ist auf dem Intervall (–∞; 0) positiv gekrümmt (linksgekrümmt).	A
Die Funktion ist auf dem Intervall (–∞; 0) monoton fallend.	B

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Eigenschaften ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Krümmungsverhalten einer Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_558	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 1.5

Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades hat im Punkt $T = (-3|1)$ ein lokales Minimum, in $H = (-1|3)$ ein lokales Maximum und in $W = (-2|2)$ einen Wendepunkt.

Aufgabenstellung:

In welchem Intervall ist diese Funktion linksgekrümmt (positiv gekrümmt)?
Kreuzen Sie das zutreffende Intervall an!

$(-\infty; 2)$	☐
$(-\infty; -2)$	☐
$(-3; -1)$	☐
$(-2; 2)$	☐
$(-2; \infty)$	☐
$(3; \infty)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

$(-\infty; -2)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich das laut Lösungserwartung richtige Intervall angekreuzt ist.

Bewegung*

Aufgabennummer: 1_439	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 1.5

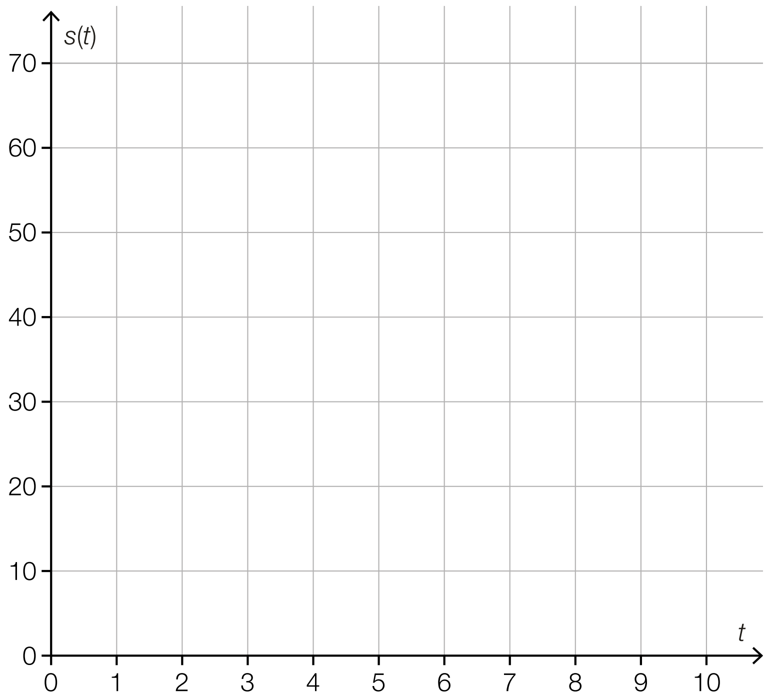
Ein Körper wird entlang einer Geraden bewegt.
Die Entfernungen des Körpers (in Metern) vom Ausgangspunkt seiner Bewegung nach t Sekunden sind in der nachstehenden Tabelle angeführt.

Zeit (in Sekunden)	zurückgelegter Weg (in Metern)
0	0
3	20
6	50
10	70

Der Bewegungsablauf des Körpers weist folgende Eigenschaften auf:
- (positive) Beschleunigung im Zeitintervall [0; 3) aus dem Stillstand bei $t = 0$
- konstante Geschwindigkeit im Zeitintervall [3; 6]
- Bremsen (negative Beschleunigung) im Zeitintervall (6; 10] bis zum Stillstand bei $t = 10$

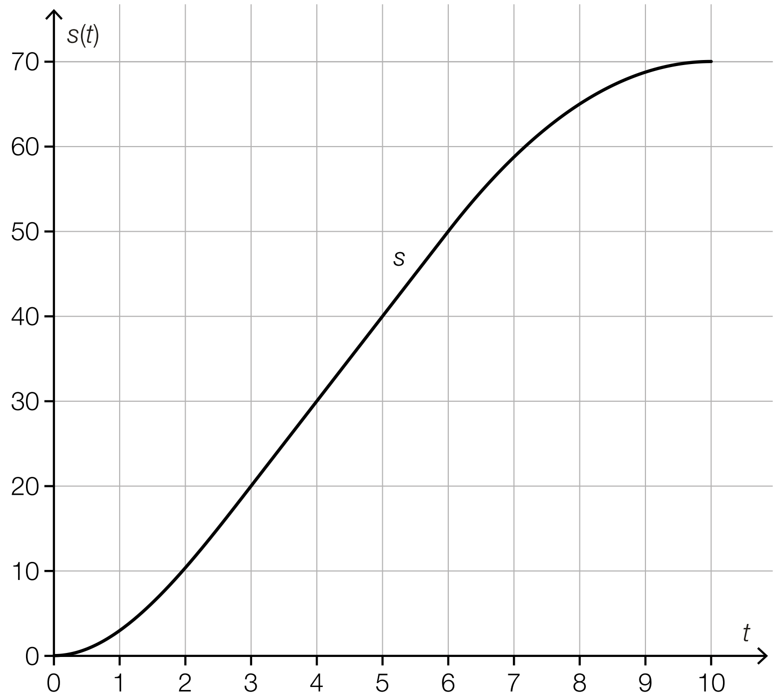
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den Graphen einer möglichen Zeit-Weg-Funktion s, die den beschriebenen Sachverhalt modelliert, in das nachstehende Koordinatensystem!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Skizze, wobei folgende Aspekte erkennbar sein müssen:

- der Graph verläuft durch die in der Tabelle angegebenen Punkte
- $s'(0) = s'(10) = 0$
- linksgekrümmt in [0; 3), rechtsgekrümmt in (6; 10] und linearer Verlauf in [3; 6]

Den Graphen einer Polynomfunktion skizzieren*

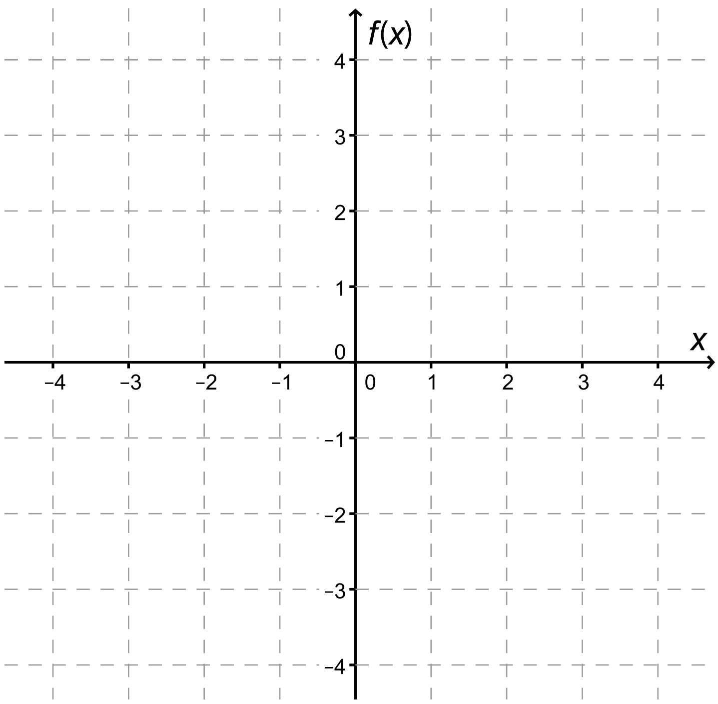
Aufgabennummer: 1_413	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 1.5

Eine Polynomfunktion f hat folgende Eigenschaften:

- Die Funktion ist für $x \leq 0$ streng monoton steigend.
- Die Funktion ist im Intervall $[0; 3]$ streng monoton fallend.
- Die Funktion ist für $x \geq 3$ streng monoton steigend.
- Der Punkt $P = (0|1)$ ist ein lokales Maximum (Hochpunkt).
- Die Stelle 3 ist eine Nullstelle.

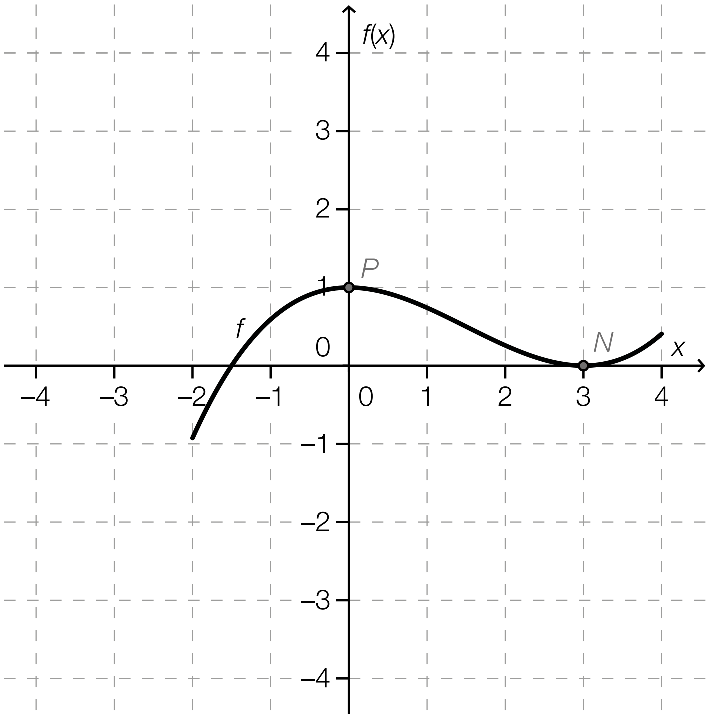
Aufgabenstellung:

Erstellen Sie anhand der gegebenen Eigenschaften eine Skizze eines möglichen Funktionsgraphen von f im Intervall $[-2; 4]$!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Skizze, wobei alle in der Angabe angeführten Eigenschaften der Polynomfunktion *f* erkennbar sein müssen.

Kosten und Erlös*

Aufgabennummer: 1_669	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 1.6

Für ein Produkt sind die Kostenfunktion K mit $K(x) = 2 \cdot x + 4\,000$ und die Erlösfunktion E mit $E(x) = 10 \cdot x$ bekannt, wobei x die Anzahl der produzierten Mengeneinheiten ist und alle produzierten Mengeneinheiten verkauft werden. Kosten und Erlös werden jeweils in Euro angegeben.
Der Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen ist $S = (500 \,|\, 5\,000)$.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Koordinaten 500 und 5 000 des Schnittpunkts S im gegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Mögliche Interpretation:

Bei einer Produktionsmenge von 500 Mengeneinheiten sind die Kosten und der Erlös jeweils € 5.000.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Interpretation beider Koordinaten des Schnittpunkts.

Grafisches Lösen einer quadratischen Gleichung*

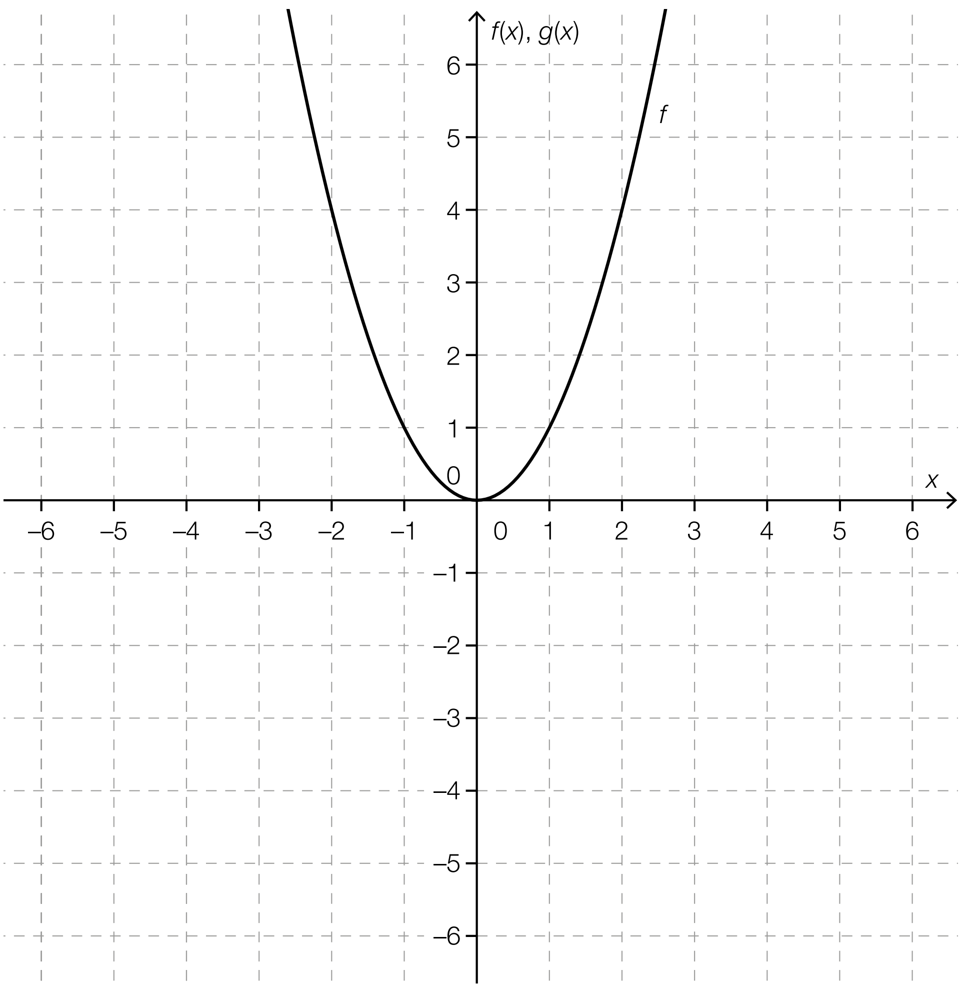
Aufgabennummer: 1_644	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 1.6

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + x - 2 = 0$.

Man kann die gegebene Gleichung geometrisch mithilfe der Graphen zweier Funktionen f und g lösen, indem man die Gleichung $f(x) = g(x)$ betrachtet.

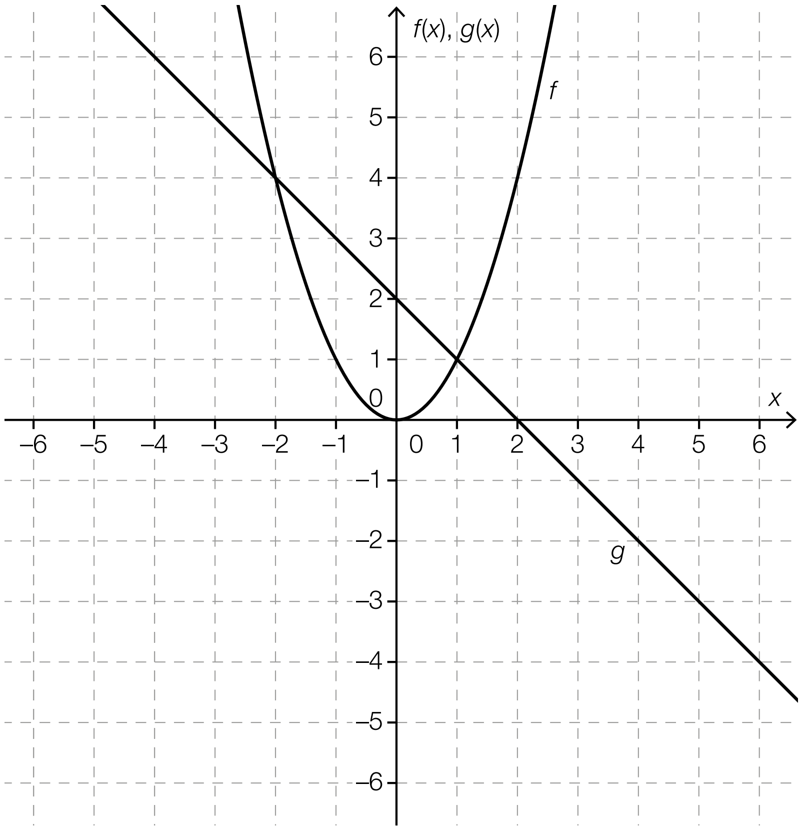
Aufgabenstellung:

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der quadratischen Funktion f, wobei gilt: $f(x) \in \mathbb{Z}$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$. Zeichnen Sie in dieser Abbildung den Graphen der Funktion g ein!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung



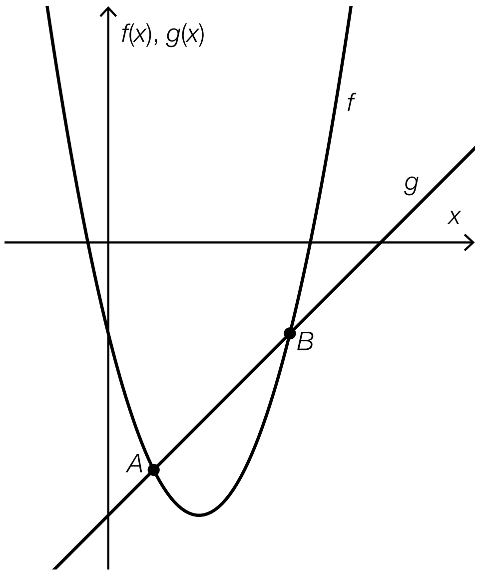
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Ergänzung eines korrekten Graphen von g.

Schnittpunkte*

Aufgabennummer: 1_597	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 1.6

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4 \cdot x - 2$ und der Graph der Funktion g mit $g(x) = x - 6$ dargestellt sowie deren Schnittpunkte A und B gekennzeichnet.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b der quadratischen Gleichung $x^2 + a \cdot x + b = 0$ so, dass die beiden Lösungen dieser Gleichung die x-Koordinaten der Schnittpunkte A und B sind!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$x^2 - 4 \cdot x - 2 = x - 6$

$x^2 - 5 \cdot x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; a = -5,\, b = 4$

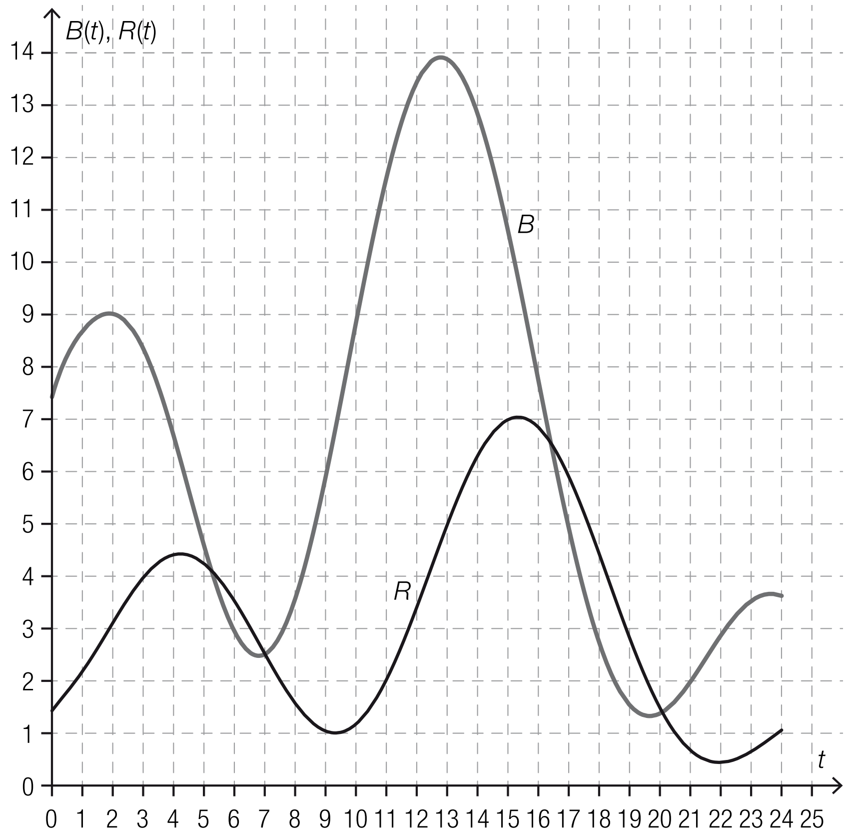
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

Räuber-Beute-Modell*

Aufgabennummer: 1_557	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 1.6

Das Räuber-Beute-Modell zeigt vereinfacht Populationsschwankungen einer Räuberpopulation (z. B. der Anzahl von Kanadischen Luchsen) und einer Beutepopulation (z. B. der Anzahl von Schneeschuhhasen). Die in der unten stehenden Grafik abgebildeten Funktionen R und B beschreiben modellhaft die Anzahl der Räuber $R(t)$ bzw. die Anzahl der Beutetiere $B(t)$ für einen beobachteten Zeitraum von 24 Jahren ($B(t)$, $R(t)$ in 10 000 Individuen, t in Jahren).



Aufgabenstellung:

Geben Sie alle Zeitintervalle im dargestellten Beobachtungszeitraum an, in denen sowohl die Räuberpopulation als auch die Beutepopulation abnimmt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

In den beiden Zeitintervallen [4,2 Jahre; 6,8 Jahre] und [15,3 Jahre; 19,6 Jahre] nimmt sowohl die Räuberpopulation als auch die Beutepopulation ab.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe beider korrekter Zeitintervalle, wobei die Einheit „Jahre" nicht angegeben sein muss. Andere Schreibweisen der Intervalle (offen oder halboffen) sowie korrekte formale oder verbale Beschreibungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

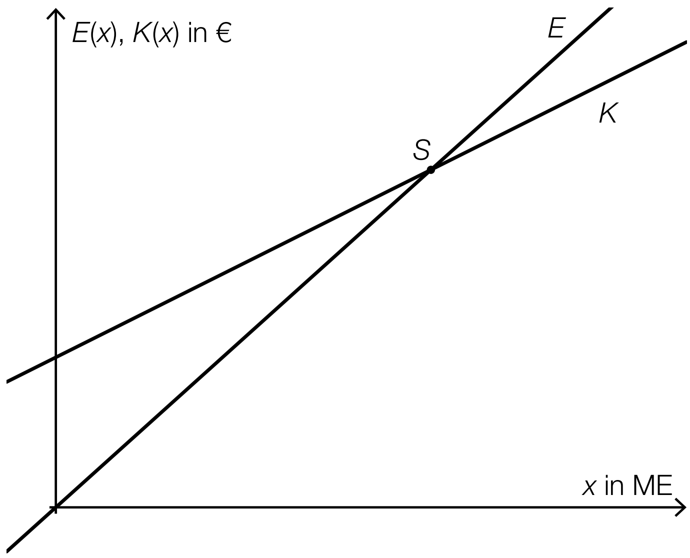
1. Zeitintervall:
Toleranzintervall für den unteren Wert: [3,9 Jahre; 4,5 Jahre]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [6,5 Jahre; 7,1 Jahre]

2. Zeitintervall:
Toleranzintervall für den unteren Wert: [15 Jahre; 15,6 Jahre]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [19,3 Jahre; 19,9 Jahre]

Schnittpunkt*

Aufgabennummer: 1_535	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 1.6

Die Funktion E gibt den Erlös $E(x)$ und die Funktion K die Kosten $K(x)$ jeweils in Euro bezogen auf die Produktionsmenge x an. Die Produktionsmenge x wird in Mengeneinheiten (ME) angegeben. Im folgenden Koordinatensystem sind die Graphen beider Funktionen dargestellt:



Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die beiden Koordinaten des Schnittpunkts S der beiden Funktionsgraphen im gegebenen Zusammenhang!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

Mögliche Interpretationen:

Die erste Koordinate des Schnittpunkts gibt diejenige Produktionsmenge an, bei der kostendeckend produziert wird (d. h., bei der Erlös und Kosten gleich hoch sind), die zweite Koordinate gibt dabei den zugehörigen Erlös bzw. die zugehörigen Kosten an.

oder:

Die erste Koordinate des Schnittpunkts gibt diejenige Produktionsmenge an, bei der weder Gewinn noch Verlust gemacht wird, die zweite Koordinate gibt dabei den zugehörigen Erlös bzw. die zugehörigen Kosten an.

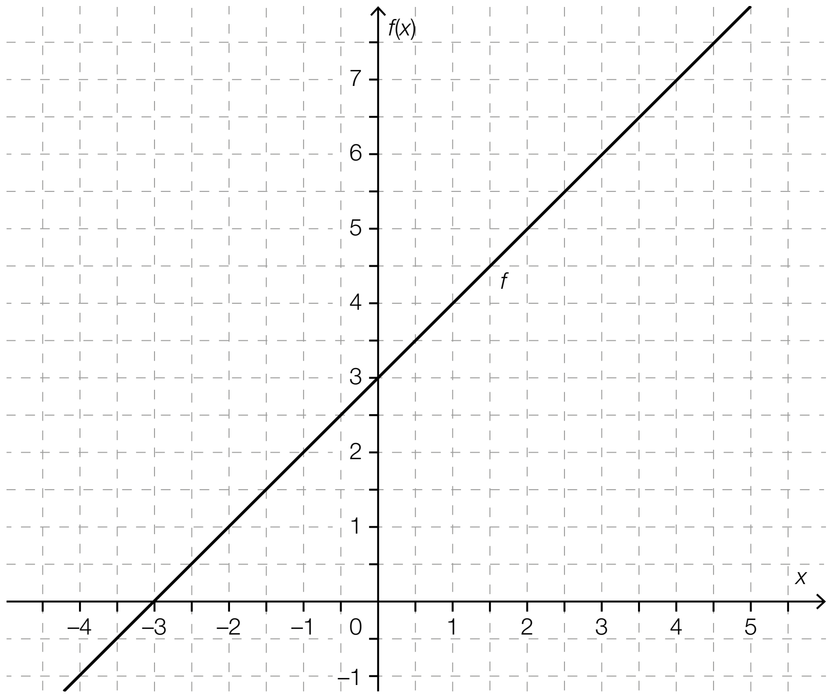
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation beider Koordinaten.

Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen*

Aufgabennummer: 1_391	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 1.6

Gegeben sind der Graph einer Funktion f und die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = -x + 5$.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen der Funktionen f und g!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$S = (1|4)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Beschleunigung

Ein Körper bewegt sich im Zeitintervall [0; 5] geradlinig mit einer konstanten Beschleunigung und kommt zum Zeitpunkt $t = 5$ zum Stillstand.

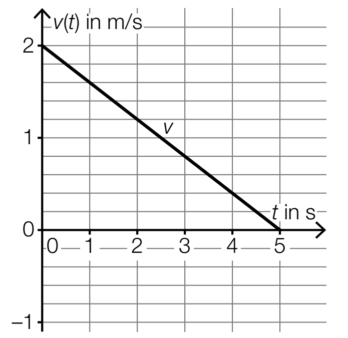
Für die Beschleunigung gilt: $a(t) = -0{,}4$

t ... Zeit in s
$a(t)$ ... Beschleunigung zum Zeitpunkt t in m/s^2
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in m

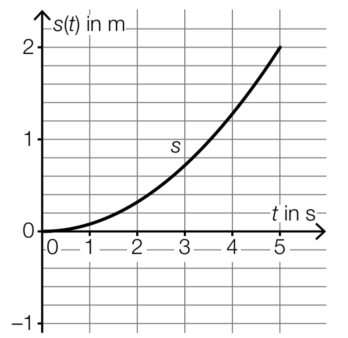
In zwei der unten stehenden Abbildungen wird die Bewegung des Körpers richtig dargestellt.

Aufgabenstellung:

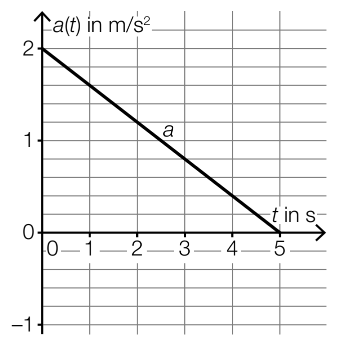
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Abbildungen an. *[2 aus 5]*



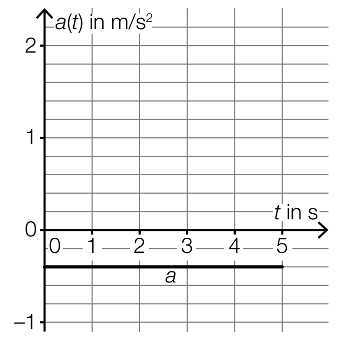
☐



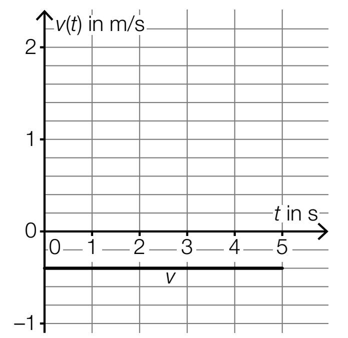
☐



☐



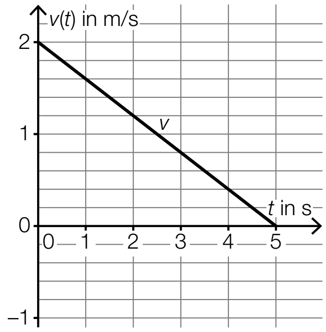
☐

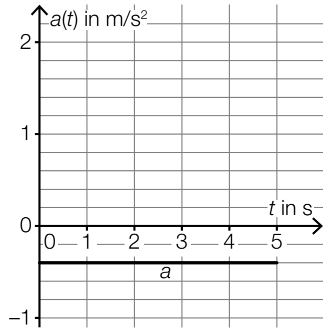


☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

<table>
<tr><td>
</td><td>☒</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>
</td><td>☒</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

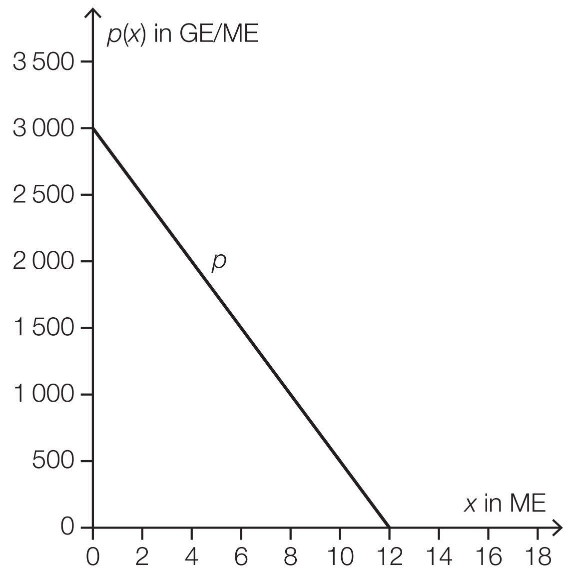
Erlösfunktion*

Aufgabennummer: 1_861	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: halboffenes Format

Für ein bestimmtes Produkt kann der Zusammenhang zwischen der nachgefragten Menge x und dem Nachfragepreis $p(x)$ durch die nachstehend dargestellte lineare Funktion p modelliert werden.

x ... nachgefragte Menge in Mengeneinheiten (ME), $0 \leq x \leq 12$
$p(x)$ ... Nachfragepreis bei der Menge x in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME)



Für die Erlösfunktion E gilt: $E(x) = p(x) \cdot x$.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von E auf.

$E(x) =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$E(x) = (3\,000 - 250 \cdot x) \cdot x = 3\,000 \cdot x - 250 \cdot x^2$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von E.

Kosten, Erlös und Gewinn*

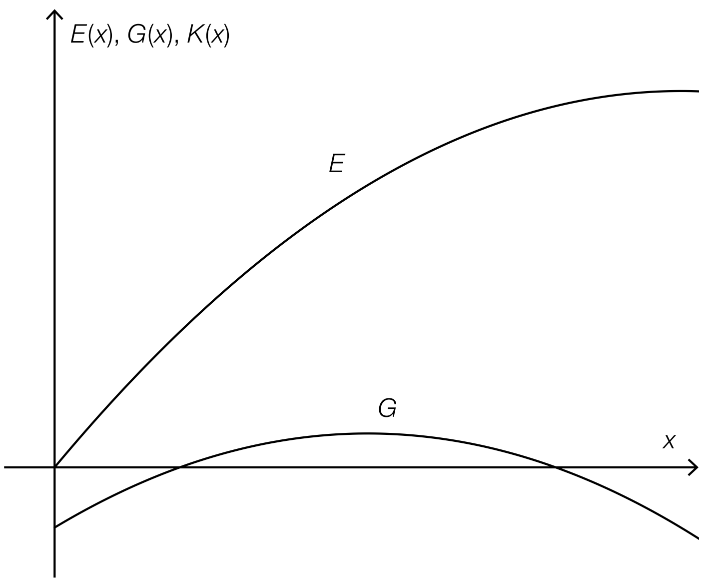
Aufgabennummer: 1_486	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 1.7

Die Funktion E beschreibt den Erlös (in €) beim Absatz von x Mengeneinheiten eines Produkts. Die Funktion G beschreibt den dabei erzielten Gewinn in €. Dieser ist definiert als Differenz „Erlös – Kosten“.

Aufgabenstellung:

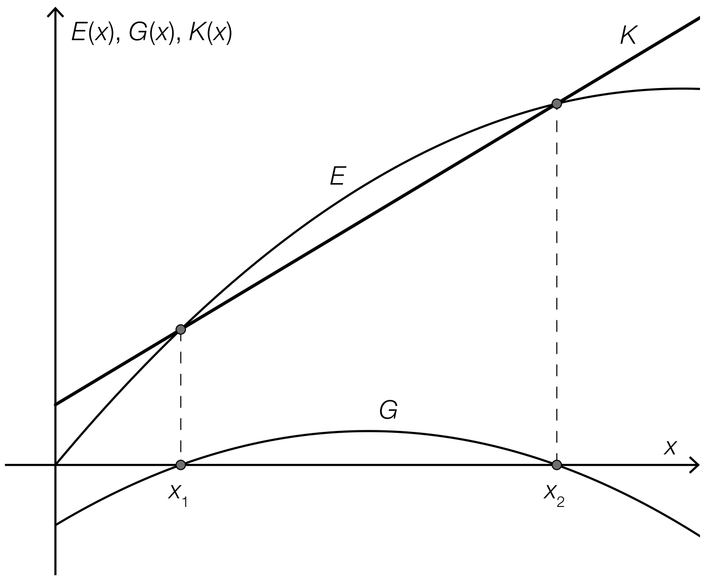
Ergänzen Sie die nachstehende Abbildung durch den Graphen der zugehörigen Kostenfunktion K!

Nehmen Sie dabei K als linear an! (Die Lösung der Aufgabe beruht auf der Annahme, dass alle produzierten Mengeneinheiten des Produkts verkauft werden.)



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn der Graph einer linearen Kostenfunktion skizziert wurde und dieser den Graphen der Erlösfunktion E an den Stellen x_1 und x_2 schneidet.

Schwingung einer Saite*

Aufgabennummer: 1_717	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 1.8

Die Frequenz f der Grundschwingung einer Saite eines Musikinstruments kann mithilfe der nachstehenden Formel berechnet werden.

$$f = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \sqrt{\frac{F}{\varrho \cdot A}}$$

l … Länge der Saite
A … Querschnittsfläche der Saite
ϱ … Dichte des Materials der Saite
F … Kraft, mit der die Saite gespannt ist

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie die Länge l einer Saite zu ändern ist, wenn die Saite mit einer doppelt so hohen Frequenz schwingen soll und die anderen Größen (F, ϱ, A) dabei konstant gehalten werden.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

Wenn die anderen Größen (F, ϱ, A) konstant gehalten werden, ist die Länge l einer Saite zu halbieren, damit die Saite mit einer doppelt so hohen Frequenz schwingt.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Volumen eines Drehzylinders*

Aufgabennummer: 1_645	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 1.8

Das Volumen eines Drehzylinders kann als Funktion V der beiden Größen h und r aufgefasst werden. Dabei ist h die Höhe des Zylinders und r der Radius der Grundfläche.

Aufgabenstellung:

Verdoppelt man den Radius r und die Höhe h eines Zylinders, so erhält man einen Zylinder, dessen Volumen x-mal so groß wie jenes des ursprünglichen Zylinders ist.
Geben Sie x an!

x = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

$x = 8$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Quadratische Pyramide*

Aufgabennummer: 1_620	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 1.8

Die Oberfläche einer regelmäßigen quadratischen Pyramide kann als Funktion O in Abhängigkeit von der Länge der Grundkante a und der Höhe der Seitenfläche h_1 aufgefasst werden.
Es gilt: $O(a, h_1) = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_1$, wobei $a \in \mathbb{R}^+$ und $h_1 > \frac{a}{2}$.

Aufgabenstellung:

Gegeben sind sechs Aussagen zur Oberfläche von regelmäßigen quadratischen Pyramiden. Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

Ist h_1 konstant, dann ist die Oberfläche direkt proportional zu a.	☐
Ist a konstant, dann ist die Oberfläche direkt proportional zu h_1.	☐
Für $a = 1$ cm ist die Oberfläche sicher größer als 2 cm².	☐
Für $a = 1$ cm ist die Oberfläche sicher kleiner als 10 cm².	☐
Werden sowohl a als auch h_1 verdoppelt, so wird die Oberfläche verdoppelt.	☐
Ist $h_1 = a^2$, dann kann die Oberfläche durch eine Exponentialfunktion in Abhängigkeit von a beschrieben werden.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Für $a = 1$ cm ist die Oberfläche sicher größer als 2 cm^2.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Aussage angekreuzt ist.

Funktionseigenschaften

Gegeben sind reelle Funktionen sowie die Parameter $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in (0; 1)$.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier angegebenen Funktionsgleichungen jeweils die zutreffende Funktionseigenschaft aus A bis F zu.

$f(x) = a \cdot x + b$	
$f(x) = a \cdot x^2 + b$	
$f(x) = a \cdot b^x$	
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	

A	Es gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
B	Es gilt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
C	f ist streng monoton fallend in $\mathbb{R}$.
D	f hat genau zwei Nullstellen.
E	f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).
F	f hat genau eine Nullstelle.

[0 / ½ / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$f(x) = a \cdot x + b$	F
$f(x) = a \cdot x^2 + b$	A
$f(x) = a \cdot b^x$	C
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	B

A	Es gilt $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
B	Es gilt $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
C	f ist streng monoton fallend in $\mathbb{R}$.
D	f hat genau zwei Nullstellen.
E	f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).
F	f hat genau eine Nullstelle.

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

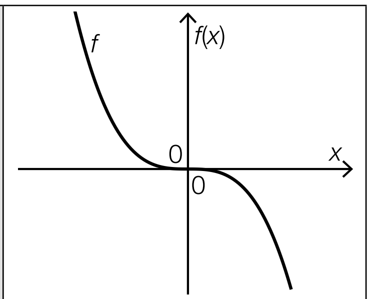
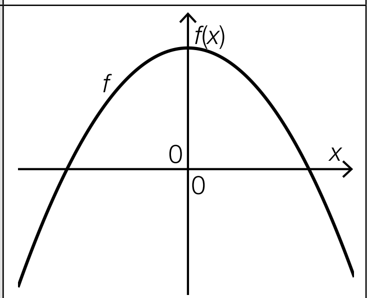
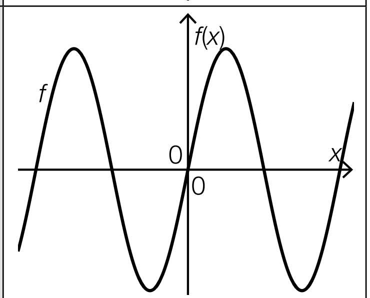
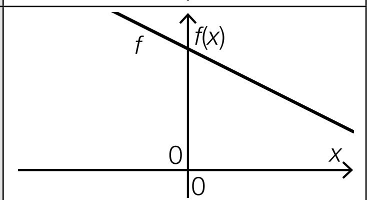
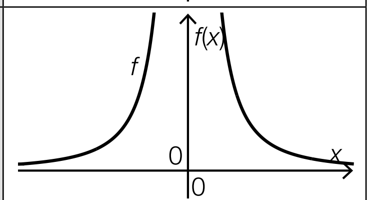
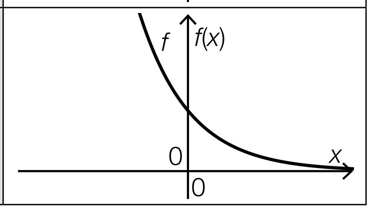
Funktionsgraphen

Unten stehend sind vier Funktionstypen angegeben sowie charakteristische Ausschnitte von sechs Funktionsgraphen abgebildet.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Funktionstypen jeweils den zugehörigen Funktionsgraphen aus A bis F zu.

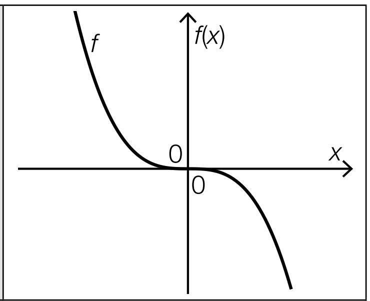
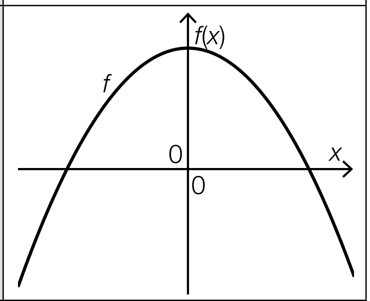
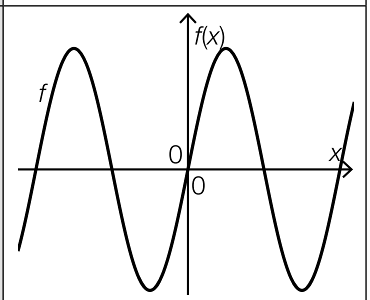
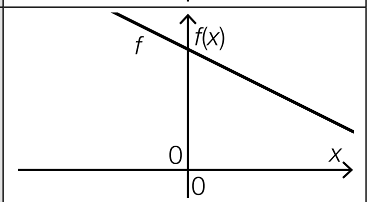
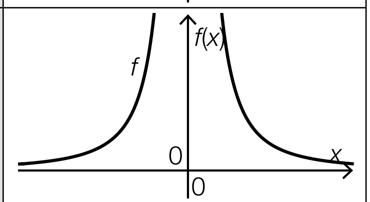
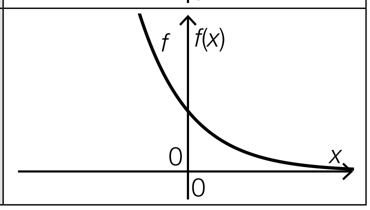
Exponentialfunktion	
lineare Funktion	
Polynomfunktion vom Grad 2	
Sinusfunktion	

A	
B	
C	
D	
E	
F	

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Exponentialfunktion	F
lineare Funktion	D
Polynomfunktion vom Grad 2	B
Sinusfunktion	C

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Funktionstypen*

Aufgabennummer: 1_837	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	

Gegeben sind vier Funktionstypen sowie sechs Wertetabellen der Funktionen f_1 bis f_6, die jeweils einem bestimmten Funktionstyp angehören. Die Funktionswerte von f_1 sind auf zwei Dezimalstellen gerundet.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie jedem der vier angegebenen Funktionstypen jeweils die entsprechende Wertetabelle (aus A bis F) zu.

lineare Funktion	
quadratische Funktion	
Exponentialfunktion	
Sinusfunktion	

A

x	$f_1(x)$
–2	–0,91
–1	–0,84
0	0
1	0,84
2	0,91

B

x	$f_2(x)$
–2	8
–1	2
0	0
1	2
2	8

C

x	$f_3(x)$
–2	–7
–1	–1
0	0
1	1
2	9

D

x	$f_4(x)$
–2	0,25
–1	0,5
0	1
1	2
2	4

E

x	$f_5(x)$
–2	–3
–1	–1
0	1
1	3
2	5

F

x	$f_6(x)$
–2	–0,5
–1	–1
0	nicht definiert
1	1
2	0,5

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

lineare Funktion	E
quadratische Funktion	B
Exponentialfunktion	D
Sinusfunktion	A

A

x	$f_1(x)$
–2	–0,91
–1	–0,84
0	0
1	0,84
2	0,91

B

x	$f_2(x)$
–2	8
–1	2
0	0
1	2
2	8

C

x	$f_3(x)$
–2	–7
–1	–1
0	0
1	1
2	9

D

x	$f_4(x)$
–2	0,25
–1	0,5
0	1
1	2
2	4

E

x	$f_5(x)$
–2	–3
–1	–1
0	1
1	3
2	5

F

x	$f_6(x)$
–2	–0,5
–1	–1
0	nicht definiert
1	1
2	0,5

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Eigenschaften von Funktionen*

Aufgabennummer: 1_813	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 1.9

Gegeben sind vier Funktionsgleichungen der reellen Funktionen f_1 bis f_4 (mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $b < 1$) und sechs Listen mit Eigenschaften von Funktionen.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Funktionsgleichungen jeweils die zugehörige Liste (aus A bis F) zu.

$f_1(x) = a \cdot b^x$	
$f_2(x) = a \cdot x + b$	
$f_3(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	
$f_4(x) = a \cdot x^3 + b$	

A	– kein Monotoniewechsel – konstante Steigung – kein Krümmungswechsel
B	– genau eine lokale Extremstelle x_0 – symmetrisch zur Geraden $x = x_0$ – maximal zwei Nullstellen
C	– unendlich viele lokale Extremstellen – unendlich viele Wendestellen – keine Asymptote
D	– nur für $x \in [0; \infty)$ definierbar – überall rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt) – keine lokalen Extrem- oder Wendestellen
E	– keine lokale Extremstelle – genau eine Nullstelle – genau eine Wendestelle
F	– kein Monotoniewechsel – die x-Achse ist Asymptote – kein Krümmungswechsel

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

$f_1(x) = a \cdot b^x$	F
$f_2(x) = a \cdot x + b$	A
$f_3(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	C
$f_4(x) = a \cdot x^3 + b$	E

A	– kein Monotoniewechsel – konstante Steigung – kein Krümmungswechsel
B	– genau eine lokale Extremstelle x_0 – symmetrisch zur Geraden $x = x_0$ – maximal zwei Nullstellen
C	– unendlich viele lokale Extremstellen – unendlich viele Wendestellen – keine Asymptote
D	– nur für $x \in [0; \infty)$ definierbar – überall rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt) – keine lokalen Extrem- oder Wendestellen
E	– keine lokale Extremstelle – genau eine Nullstelle – genau eine Wendestelle
F	– kein Monotoniewechsel – die x-Achse ist Asymptote – kein Krümmungswechsel

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Funktionsgleichungen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist. Bei zwei oder drei richtigen Zuordnungen ist ein halber Punkt zu geben.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Funktionstypen*

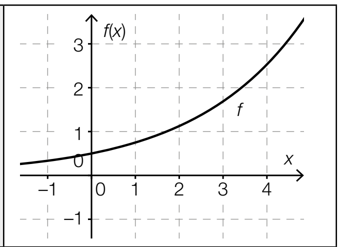
Aufgabennummer: 1_572	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 1.9

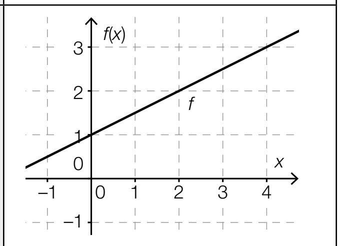
Im Folgenden sind vier Funktionsgleichungen (mit $a, b \in \mathbb{R}^+$) angeführt und die Graphen von sechs reellen Funktionen dargestellt.

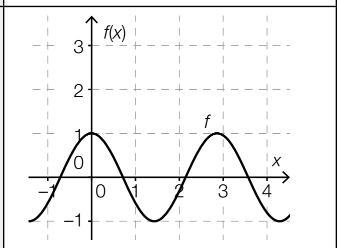
Aufgabenstellung:

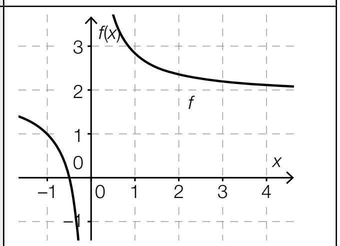
Ordnen Sie den vier Funktionsgleichungen jeweils den passenden Graphen (aus A bis F) zu!

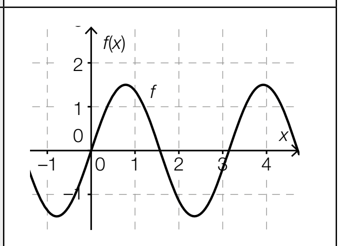
$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	
$f(x) = a \cdot b^x$	
$f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$	
$f(x) = a \cdot x + b$	

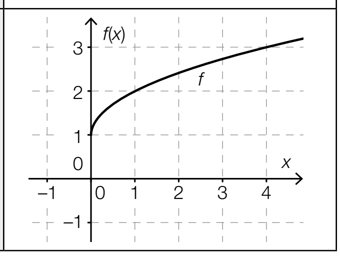
A


B


C


D


E


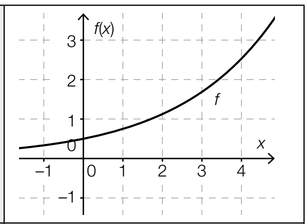
F


* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

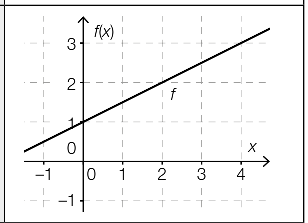
Lösungserwartung

$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	E
$f(x) = a \cdot b^x$	A
$f(x) = a \cdot \sqrt{x} + b$	F
$f(x) = a \cdot x + b$	B

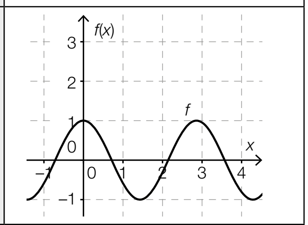
A



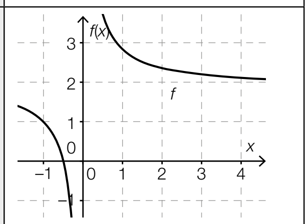
B



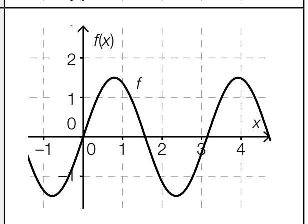
C



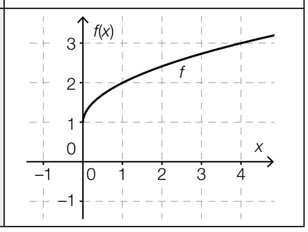
D



E



F



Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Funktionsgleichungen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Steigende Funktion*

Aufgabennummer: 1_534	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 1.9

Gegeben sind fünf Funktionen.

Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Funktionen f sind in jedem Intervall $[x_1; x_2]$ mit $0 < x_1 < x_2$ streng monoton steigend? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Funktionen an!

lineare Funktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x + b$ $(a > 0, b > 0)$	☐
Potenzfunktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^n$ $(a < 0, n \in \mathbb{N}, n > 0)$	☐
Sinusfunktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ $(a > 0, b > 0)$	☐
Exponentialfunktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ $(a > 0, k < 0)$	☐
Exponentialfunktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = c \cdot a^x$ $(a > 1, c > 0)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

lineare Funktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x + b$ $(a > 0, b > 0)$	☒
Exponentialfunktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = c \cdot a^x$ $(a > 1, c > 0)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Funktionen angekreuzt sind.

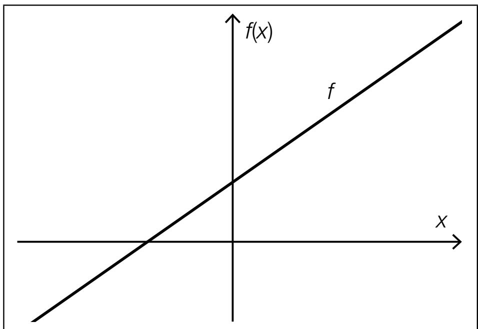
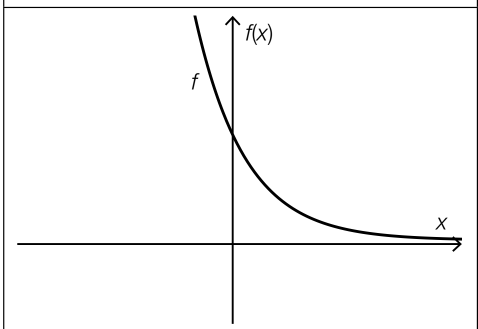
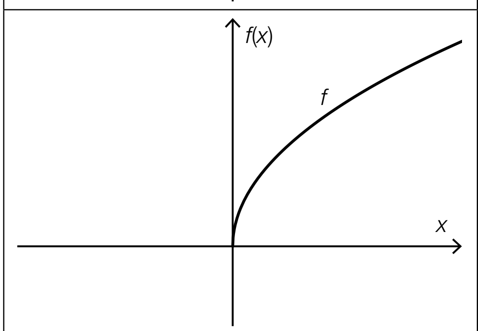
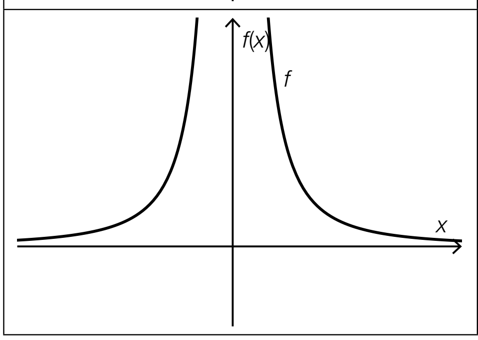
Graphen und Funktionstypen*

Aufgabennummer: 1_510	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 1.9

Im Folgenden sind die Graphen von vier Funktionen dargestellt. Weiters sind sechs Funktionstypen angeführt, wobei die Parameter $a, b \in \mathbb{R}^+$ sind.

Aufgabenstellung:

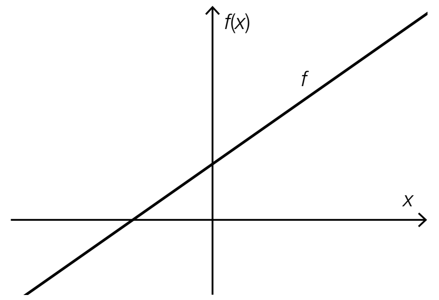
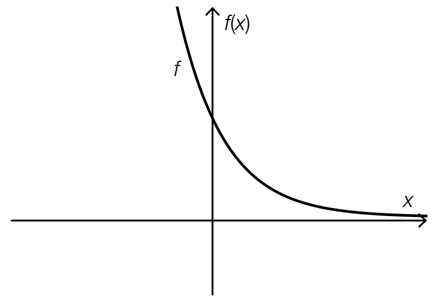
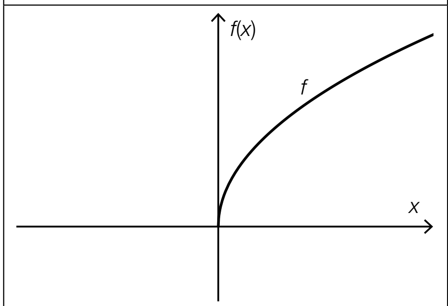
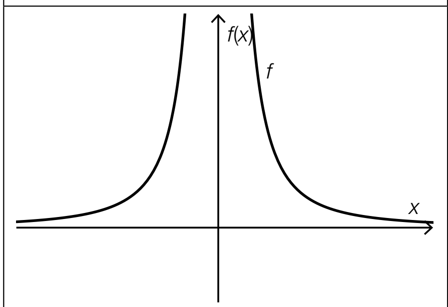
Ordnen Sie den vier Graphen jeweils den entsprechenden Funktionstyp (aus A bis F) zu!

A	$f(x) = a \cdot b^x$
B	$f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}}$
C	$f(x) = a \cdot \frac{1}{x^2}$
D	$f(x) = a \cdot x^2 + b$
E	$f(x) = a \cdot x^3$
F	$f(x) = a \cdot x + b$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

	F
	A
	B
	C

A	$f(x) = a \cdot b^x$
B	$f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}}$
C	$f(x) = a \cdot \frac{1}{x^2}$
D	$f(x) = a \cdot x^2 + b$
E	$f(x) = a \cdot x^3$
F	$f(x) = a \cdot x + b$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Eigenschaften von Funktionen zuordnen*

Aufgabennummer: 1_366	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 1.9

Gegeben sind vier Funktionstypen. Für alle unten angeführten Funktionen gilt: $a \neq 0$; $b \neq 0$; $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Funktionstypen jeweils die passende Eigenschaft (aus A bis F) zu!

lineare Funktion f mit $f(x) = a \cdot x + b$	
Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ $(b > 0, b \neq 1)$	
Wurzelfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$	
Sinusfunktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	

A	Die Funktion f ist für $a > 0$ und $0 < b < 1$ streng monoton fallend.
B	Die Funktion f hat genau drei Null-stellen.
C	Die Funktion f hat in jedem Punkt die gleiche Steigung.
D	Der Graph der Funktion f hat einen Wendepunkt im Ursprung.
E	Die Funktion f ist für $b = 2$ konstant.
F	Die Funktion f ist nur für $x \geq 0$ definiert.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

lineare Funktion f mit $f(x) = a \cdot x + b$	C
Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$)	A
Wurzelfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$	F
Sinusfunktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	D

A	Die Funktion f ist für $a > 0$ und $0 < b < 1$ streng monoton fallend.
B	Die Funktion f hat genau drei Nullstellen.
C	Die Funktion f hat in jedem Punkt die gleiche Steigung.
D	Der Graph der Funktion f hat einen Wendepunkt im Ursprung.
E	Die Funktion f ist für $b = 2$ konstant.
F	Die Funktion f ist nur für $x \geq 0$ definiert.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Funktionstypen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Rennrad

Im Handbuch zu einem Rennrad sind folgende Werte angegeben:

Anzahl der Kurbelumdrehungen pro Minute	Geschwindigkeit in km/h
60	28,8
85	40,8

Die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Kurbelumdrehungen kann durch die lineare Funktion v modelliert werden.

x ... Anzahl der Kurbelumdrehungen pro Minute
$v(x)$ ... Geschwindigkeit bei x Kurbelumdrehungen pro Minute in km/h

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Gleichung von v auf.

$v(x) =$ ______________________________

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$v(x) = k \cdot x + d$

$k = \frac{40{,}8 - 28{,}8}{85 - 60} = 0{,}48$

$d = 0$

$v(x) = 0{,}48 \cdot x$

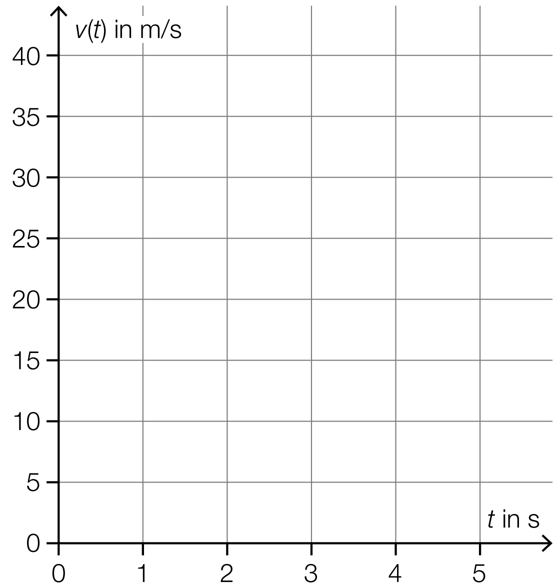
Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von v.

Beschleunigung

Ein Fahrzeug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s auf einer geradlinig verlaufenden Strecke vorwärts.
Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ beschleunigt es 5 s lang gleichmäßig mit 3 m/s^2. Die Richtung der Bewegung bleibt unverändert.
Die Funktion v beschreibt die Geschwindigkeit des Fahrzeugs (in m/s) nach t Sekunden im Zeitintervall [0; 5].

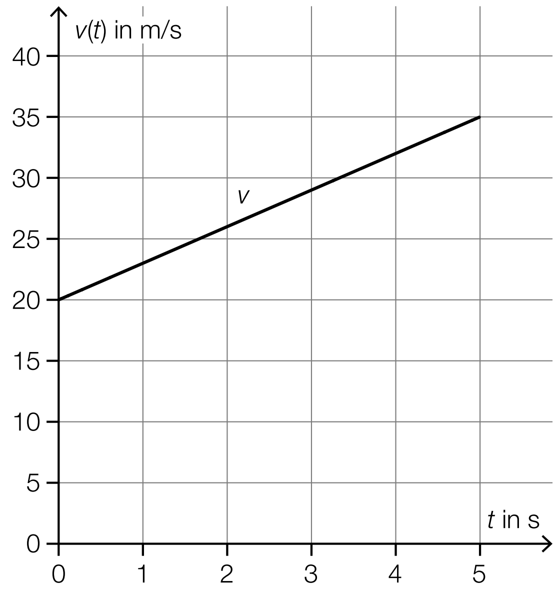
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von v ein.



[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg



Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.

Länge einer Kerze

Eine zylinderförmige Kerze hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Länge von 10 cm. Nach einer Brenndauer von 120 min hat die Kerze eine Länge von 4 cm.
Die lineare Funktion L beschreibt modellhaft die Länge der Kerze in Abhängigkeit von der Brenndauer t mit $0 \leq t \leq 200$ (t in min, $L(t)$ in cm).

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von L auf.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$L(t) = 10 - \frac{1}{20} \cdot t$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *L*.

Grundkompetenz: FA 2.1

Längenausdehnung einer Brücke*

Aufgabennummer: 1_862	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Die Länge einer bestimmten Brücke ist abhängig von ihrer Temperatur.
Bei einer Temperatur der Brücke von –14 °C ist diese 300 m lang.
Bei einer Erwärmung um 25 °C dehnt sie sich um 0,1 m aus.

Die lineare Funktion l beschreibt modellhaft die Länge dieser Brücke in Abhängigkeit von ihrer Temperatur T. Dabei wird jeder Temperatur $T \in [-20\ °C; 40\ °C]$ die Länge der Brücke $l(T)$ zugeordnet (T in °C, $l(T)$ in m).

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von l auf.

$l(T) =$ ______________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$l(T) = k \cdot T + d$

$l(-14) = 300, \quad l(11) = 300{,}1$

$l(T) = 0{,}004 \cdot T + 300{,}056$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von l.

Graph zeichnen*

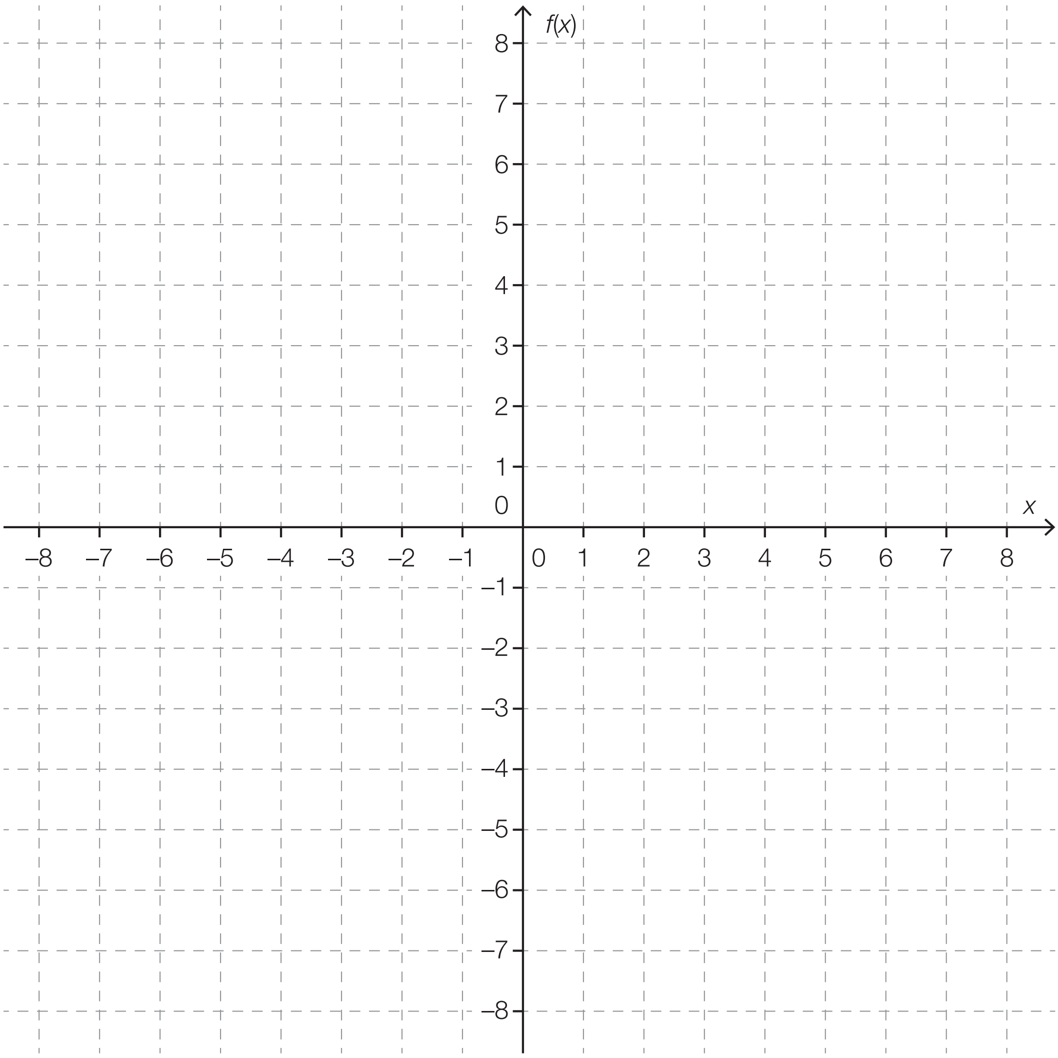
Aufgabennummer: 1_742	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 2.1

Von einer linearen Funktion *f* sind nachstehende Eigenschaften bekannt:

- Die Steigung von *f* ist –0,4.
- Der Funktionswert von *f* an der Stelle 2 ist 1.

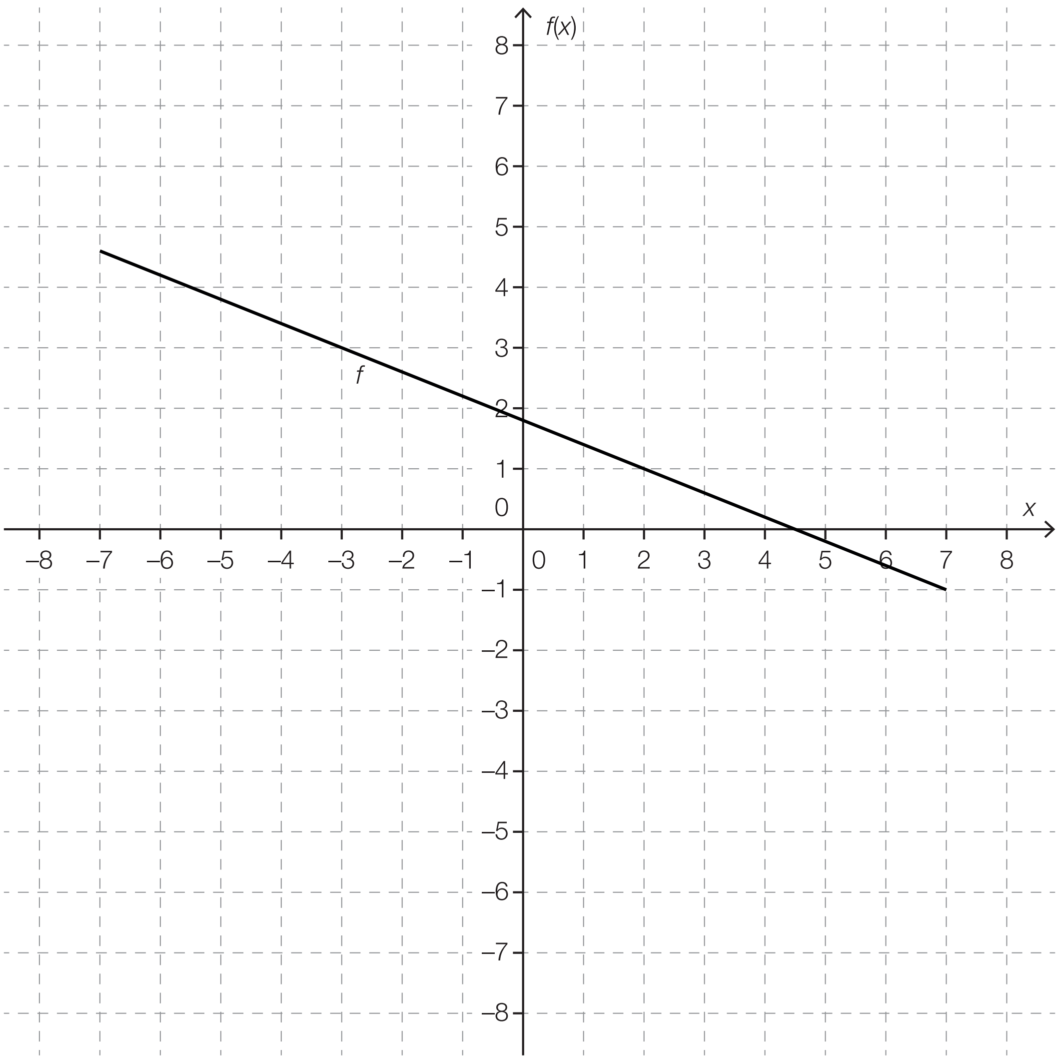
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen von *f* auf dem Intervall [–7; 7] ein.



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Darstellung des Graphen der Funktion f, wobei der Graph von f durch die Punkte $(-3|3)$ und $(2|1)$ verlaufen muss.

Gleichung einer Funktion*

Aufgabennummer: 1_462	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 2.1

Der Graph der Funktion f ist eine Gerade, die durch die Punkte $P = (2|8)$ und $Q = (4|4)$ verläuft.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung der Funktion f an!

$f(x) =$ ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$f(x) = -2x + 12$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.

Swimmingpool

Aus einem Swimmingpool wird Wasser abgelassen.

Die Funktion $h\colon [0; 6] \to \mathbb{R}$ mit $h(t) = 180 - 30 \cdot t$ beschreibt modellhaft die Höhe der Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $h(t)$ in cm).

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Koeffizienten 180 und –30 im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheiten.

180: ____________________

–30: ____________________

[0 / ½ / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

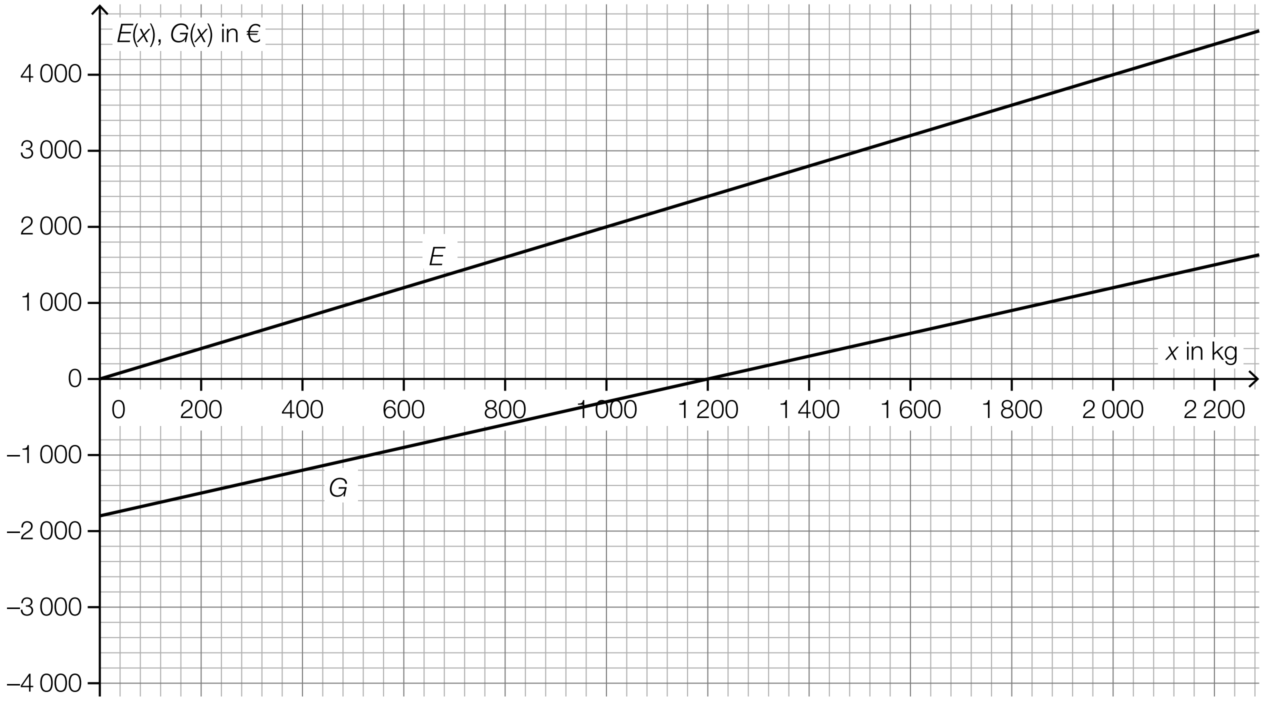
180: Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Höhe der Wasseroberfläche 180 cm.

–30: Die Höhe der Wasseroberfläche sinkt um 30 cm pro h.

Ein Punkt für das richtige Interpretieren der beiden Koeffizienten im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheiten, ein halber Punkt für nur eine richtige derartige Interpretation unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Erlös und Gewinn

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der linearen Erlösfunktion $E: x \mapsto E(x)$ und den Graphen der linearen Gewinnfunktion $G: x \mapsto G(x)$ (x in kg, $E(x)$ und $G(x)$ in €).



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Verkaufspreis und die Fixkosten an.

Verkaufspreis: ____________________ €/kg

Fixkosten: ____________________ €

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Verkaufspreis: 2 €/kg

Fixkosten: 1.800 €

Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.
Toleranzintervall für den Verkaufspreis in €/kg: [1,95; 2,05]
Toleranzintervall für die Fixkosten in €: [1 750; 1 850]

Kerzenhöhe*

Aufgabennummer: 1_718	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 2.2

Eine brennende Kerze, die vor t Stunden angezündet wurde, hat die Höhe $h(t)$. Für die Höhe der Kerze gilt dabei näherungsweise $h(t) = a \cdot t + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie für jeden der Koeffizienten a und b an, ob er positiv, negativ oder genau null sein muss.

Lösungserwartung

$a < 0$
$b > 0$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Bedingungen.

Wasserbehälter*

Aufgabennummer: 1_694	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 2.2

In einem quaderförmigen Wasserbehälter steht eine Flüssigkeit 40 cm hoch. Diese Flüssigkeit fließt ab dem Öffnen des Ablaufs in 8 Minuten vollständig ab.

Eine lineare Funktion h mit $h(t) = k \cdot t + d$ beschreibt für $t \in [0; 8]$ die Höhe (in cm) des Flüssigkeitspegels im Wasserbehälter t Minuten ab dem Öffnen des Ablaufs.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Werte k und d!

k = ____

d = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

$k = -5$
$d = 40$

Lösungsschlüssel

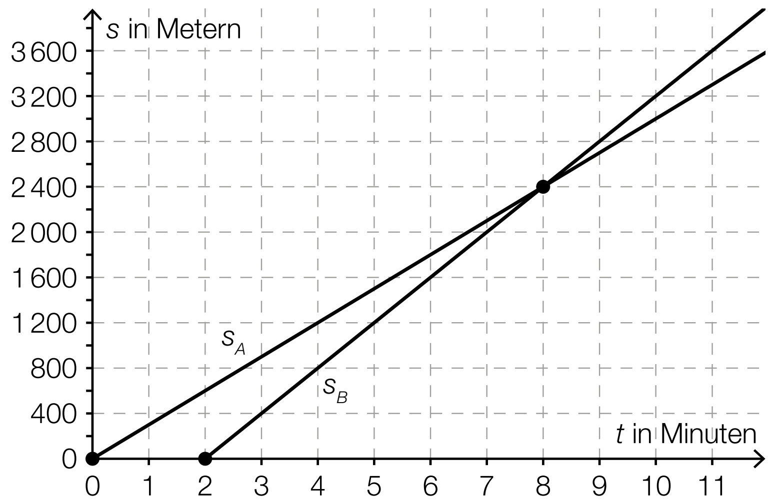
Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

Radfahrer*

Aufgabennummer: 1_621	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.2

Zwei Radfahrer *A* und *B* fahren mit Elektrofahrrädern vom gleichen Startpunkt aus mit jeweils konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Straße in dieselbe Richtung.

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen s_A und s_B dargestellt, die den von den Radfahrern zurückgelegten Weg in Abhängigkeit von der Fahrzeit beschreiben. Die markierten Punkte haben die Koordinaten $(0|0)$, $(2|0)$ bzw. $(8|2\,400)$.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die der obigen Abbildung entnommen werden können!

Der Radfahrer *B* startet zwei Minuten später als der Radfahrer *A*.	☐
Die Geschwindigkeit des Radfahrers *A* beträgt 200 Meter pro Minute.	☐
Der Radfahrer *B* holt den Radfahrer *A* nach einer Fahrstrecke von 2,4 Kilometern ein.	☐
Acht Minuten nach dem Start von Radfahrer *B* sind die beiden Radfahrer gleich weit vom Startpunkt entfernt.	☐
Vier Minuten nach der Abfahrt des Radfahrers *A* sind die beiden Radfahrer 200 Meter voneinander entfernt.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Der Radfahrer *B* startet zwei Minuten später als der Radfahrer *A*.	☒
Der Radfahrer *B* holt den Radfahrer *A* nach einer Fahrstrecke von 2,4 Kilometern ein.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Steigung einer linearen Funktion*

Aufgabennummer: 1_598	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 2.2

Der Graph einer linearen Funktion f verläuft durch die Punkte $A = (a|b)$ und $B = (5 \cdot a|-3 \cdot b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Steigung k der linearen Funktion f!

k = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

$k = -\frac{b}{a}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

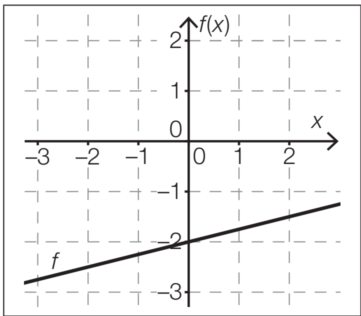
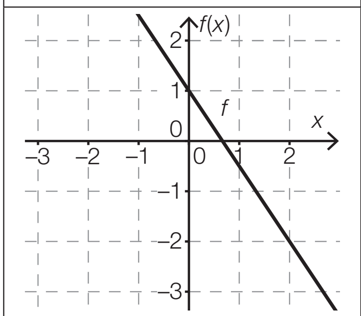
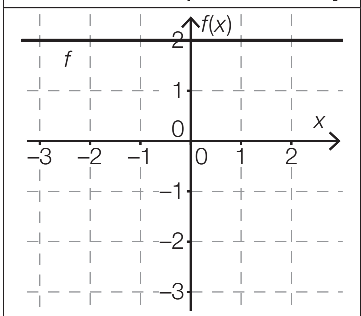
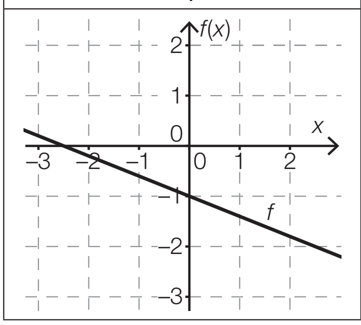
Lineare Funktionen*

Aufgabennummer: 1_556	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 2.2

Gegeben sind die Graphen von vier verschiedenen linearen Funktionen f mit $f(x) = k \cdot x + d$, wobei $k, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

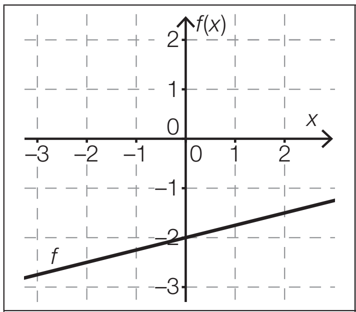
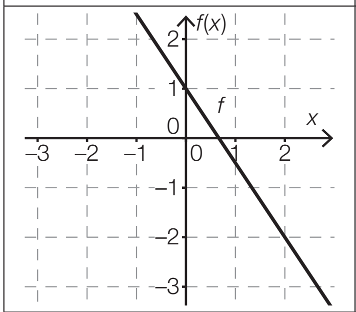
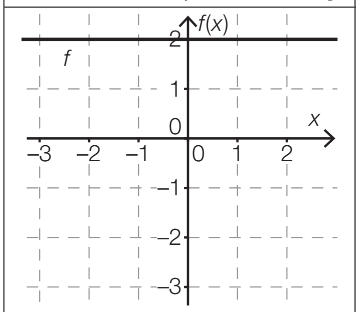
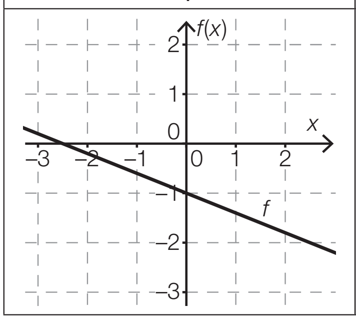
Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die entsprechende Aussage über die Parameter k und d (aus A bis F) zu!

A	$k = 0, d < 0$
B	$k > 0, d > 0$
C	$k = 0, d > 0$
D	$k < 0, d < 0$
E	$k > 0, d < 0$
F	$k < 0, d > 0$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

	E
	F
	C
	D

A	$k = 0, d < 0$
B	$k > 0, d > 0$
C	$k = 0, d > 0$
D	$k < 0, d < 0$
E	$k > 0, d < 0$
F	$k < 0, d > 0$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Erwärmung von Wasser*

Aufgabennummer: 1_485	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 2.2

Bei einem Versuch ist eine bestimmte Wassermenge für eine Zeit t auf konstanter Energiestufe in einem Mikrowellengerät zu erwärmen. Die Ausgangstemperatur des Wassers und die Temperatur des Wassers nach 30 Sekunden werden gemessen.

Zeit (in Sekunden)	$t = 0$	$t = 30$
Temperatur (in °C)	35,6	41,3

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Gleichung der zugehörigen linearen Funktion, die die Temperatur $T(t)$ zum Zeitpunkt t beschreibt!

$T(t) =$ ________ $\cdot t + 35{,}6$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

$T(t) = 0{,}19 \cdot t + 35{,}6$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Äquivalente Lösungen wie z. B. $T(t) = \frac{41{,}3 - 35{,}6}{30} \cdot t + 35{,}6$ sind als richtig zu werten.

Produktionskosten*

Aufgabennummer: 1_412	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 2.2

Ein Betrieb gibt für die Abschätzung der Gesamtkosten $K(x)$ für x produzierte Stück einer Ware folgende Gleichung an: $K(x) = 25x + 12\,000$.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die beiden Zahlenwerte 25 und 12 000 in diesem Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

Mögliche Interpretationen:

25 ... der Kostenzuwachs für die Produktion eines weiteren Stücks
... zusätzliche (variable) Kosten, die pro Stück für die Produktion anfallen

12 000 ... Fixkosten
... jene Kosten, die unabhängig von der produzierten Stückzahl anfallen

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation beider Zahlenwerte.

Steigung des Graphen einer linearen Funktion*

Aufgabennummer: 1_365	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 2.2

Gegeben ist eine Gleichung einer Geraden g in der Ebene:

$3 \cdot x + 5 \cdot y = 15$

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Steigung des Graphen der dieser Gleichung zugeordneten linearen Funktion an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

Die Steigung der zugeordneten linearen Funktion beträgt $-\frac{3}{5}$.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Wird die Steigung der linearen Funktion z. B. mit k oder mit $f'(x)$ bezeichnet, so ist dies als richtig zu werten. Jede korrekte Schreibweise des Ergebnisses (als äquivalenter Bruch oder als Dezimalzahl) ist als richtig zu werten.

Steigung einer linearen Funktion*

Aufgabennummer: 1_342	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.2

Fünf lineare Funktionen sind in verschiedener Weise dargestellt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Darstellungen an, bei denen die Steigung der dargestellten linearen Funktion den Wert $k = -2$ annimmt!

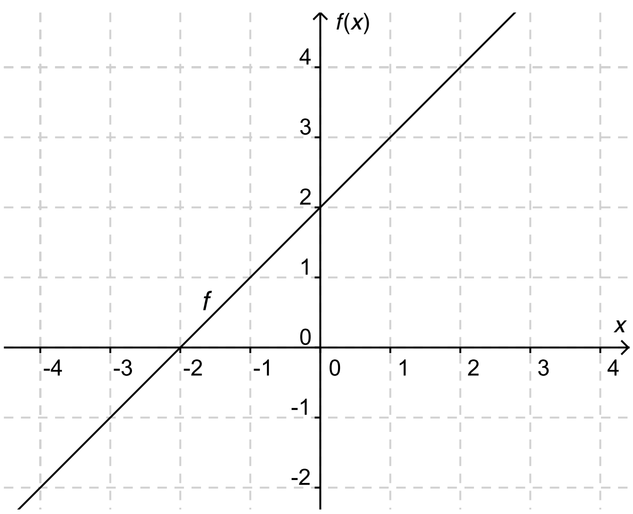
x	$m(x)$
5	3
6	1
8	–3

☐

$g(x) = -2 + 3x$ ☐

x	$h(x)$
0	–2
1	0
2	2

☐



☐

$l(x) = \frac{3 - 4x}{2}$ ☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

<table><tr><th>x</th><th>$m(x)$</th></tr><tr><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>8</td><td>–3</td></tr></table>	☒
$l(x) = \frac{3 - 4x}{2}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Darstellungen angekreuzt sind.

Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse

Jede Gleichung der Form $y = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ beschreibt eine Gerade in der Ebene.

Aufgabenstellung:

Geben Sie diejenigen Bedingungen an, die die Parameter k und d einer solchen Geraden auf jeden Fall erfüllen müssen, damit diese <u>keinen</u> Schnittpunkt mit der x-Achse hat.

Bedingung für k: ____

Bedingung für d: ____

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Bedingung für k: $k = 0$
Bedingung für d: $d \neq 0$

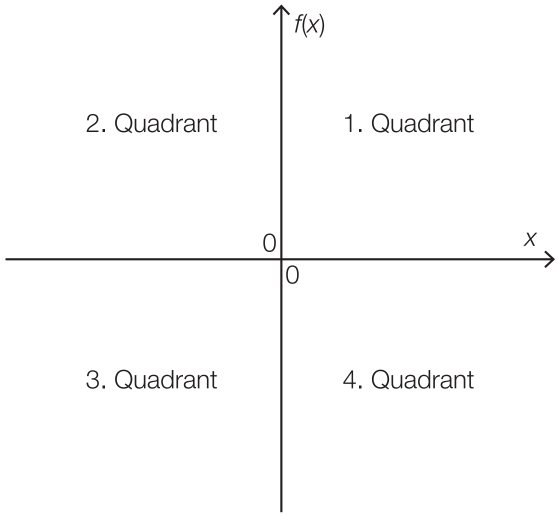
Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Bedingungen, ein halber Punkt für nur eine richtige Bedingung.

Verlauf des Graphen einer linearen Funktion*

Aufgabennummer: 1_814	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 2.3

Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ und $d \neq 0$.

Die Ebene wird von den beiden Koordinatenachsen in vier Quadranten unterteilt (siehe nebenstehende Skizze).



Für den Graphen von f gilt:

- Er verläuft nicht durch den 1. Quadranten.
- Er verläuft durch den 2., 3. und 4. Quadranten.

Dafür müssen bestimmte Bedingungen für k und d gelten.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die Aussage mit den entsprechenden Bedingungen an.

$k < 0$ und $d < 0$	☐
$k < 0$ und $d > 0$	☐
$k > 0$ und $d < 0$	☐
$k > 0$ und $d > 0$	☐
$k = 0$ und $d < 0$	☐
$k = 0$ und $d > 0$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

$k < 0$ und $d < 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Aussage angekreuzt ist.

Zug*

Aufgabennummer: 1_765	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: FA 2.3

Ein Zug bewegt sich bis zum Zeitpunkt $t = 0$ mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ erhöht der Zug seine Geschwindigkeit.

Die Funktion v ordnet dem Zeitpunkt t mit $0 \leq t \leq 60$ die Geschwindigkeit $v(t) = a \cdot t + b$ zu (t in s, $v(t)$ in m/s, $a, b \in \mathbb{R}$).

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Für den Parameter a gilt ____①____ und für den Parameter b gilt ____②____.

①	
$a < 0$	☐
$a = 0$	☐
$a > 0$	☐

②	
$b < 0$	☐
$b = 0$	☐
$b > 0$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

①	
$a > 0$	☒

②	
$b > 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist. Ist nur für eine der beiden Lücken der richtige Satzteil angekreuzt, ist ein halber Punkt zu geben.

Wert eines Gegenstandes*

Aufgabennummer: 1_573	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 2.3

Der Wert eines bestimmten Gegenstandes t Jahre nach der Anschaffung wird mit $W(t)$ angegeben und kann mithilfe der Gleichung $W(t) = -k \cdot t + d$ ($k, d \in \mathbb{R}^+$) berechnet werden ($W(t)$ in Euro).

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung der Parameter k und d im Hinblick auf den Wert des Gegenstandes an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

k ... jährliche Wertminderung (des Gegenstandes), jährlicher Wertverlust, jährliche Abnahme des Wertes
d ... Wert des Gegenstandes zum Zeitpunkt der Anschaffung

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung beider Parameter.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

# Funktionsgleichung einer linearen Funktion*	
Aufgabennummer: 1_509	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 2.3

Gegeben ist eine lineare Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

- Wenn das Argument x um 2 zunimmt, dann nimmt der Funktionswert $f(x)$ um 4 ab.
- $f(0) = 1$

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung dieser linearen Funktion f an!

$f(x) =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

$f(x) = -2 \cdot x + 1$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.

Wasserkosten*

Aufgabennummer: 1_390	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 2.3

Die monatlichen Wasserkosten eines Haushalts bei einem Verbrauch von x m^3 Wasser können durch eine Funktion K mit der Gleichung $K(x) = a + b \cdot x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Erklären Sie, welche Bedeutung die Parameter a und b in diesem Zusammenhang haben!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

a gibt die Fixkosten an.
b gibt die (variablen) Kosten pro m^3 Wasser an.

Lösungsschlüssel

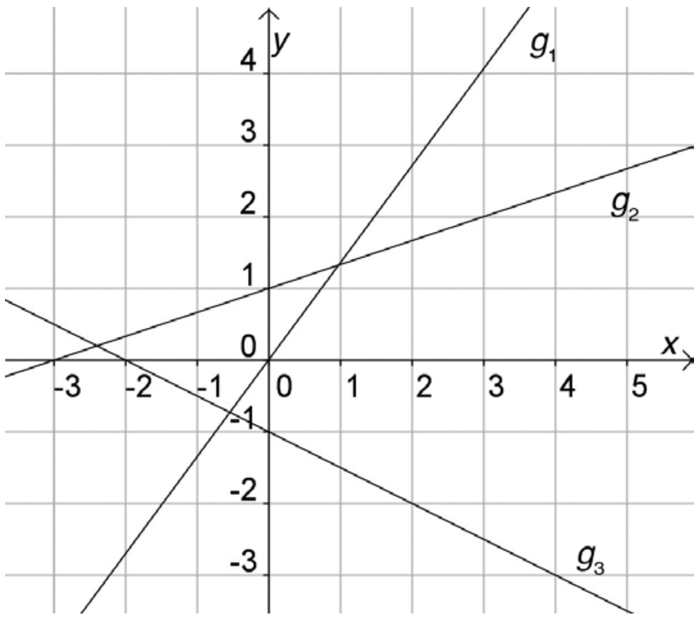
Ein Punkt für die richtige Lösung.
Beide Parameter müssen richtig gedeutet sein, damit die Lösung als richtig gewertet wird.

Vergleich dreier Geraden*

Aufgabennummer: 1_364	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.3

In der untenstehenden Graphik sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3 dargestellt. Es gilt:

g_1: $y = k_1 \cdot x + d_1$
g_2: $y = k_2 \cdot x + d_2$
g_3: $y = k_3 \cdot x + d_3$



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$k_1 < k_2$	☐
$d_3 > d_2$	☐
$k_2 > k_3$	☐
$k_3 < k_1$	☐
$d_1 < d_3$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

$k_2 > k_3$	☒
$k_3 < k_1$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Lineare Funktion

Gegeben ist die lineare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = k \cdot x + d$ und $k, d \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass auf jeden Fall eine richtige Aussage entsteht.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: ______①______ = ______②______ .

①	
$f(x + 1)$	☐
$f(x + 2)$	☐
$f(x + 1) + f(x + 1)$	☐

②	
$f(x) + 2 \cdot k$	☐
$f(x) + d$	☐
$2 \cdot f(x) + 2$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

①	
$f(x + 2)$	☒

②	
$f(x) + 2 \cdot k$	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Eigenschaften einer linearen Funktion*

Aufgabennummer: 1_363	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Eine Funktion f wird durch die Funktionsgleichung $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$ beschrieben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden auf f zutreffenden Aussagen an.

f kann lokale Extremstellen haben.	☐
$f(x + 1) = f(x) + d$	☐
f hat immer genau eine Nullstelle.	☐
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k$ für $x_1 \neq x_2$	☐
Die Krümmung des Graphen der Funktion f ist für $k < 0$ negativ.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014, adaptiert

Lösungserwartung

f hat immer genau eine Nullstelle.	☒
$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k$ für $x_1 \neq x_2$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Lineare Funktion*

Aufgabennummer: 1_766	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 2.4

Gegeben ist eine lineare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$.

Es gilt: $\frac{f(5) - f(a)}{2} = k$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie a an.

a = ____________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$a = 3$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Deutung einer Gleichung*

Aufgabennummer: 1_670	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 2.4

Ein mit Helium gefüllter Ballon steigt lotrecht auf. Die jeweilige Höhe des Ballons über einer ebenen Fläche kann durch eine lineare Funktion h in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden. Die Höhe $h(t)$ wird in Metern, die Zeit t in Sekunden gemessen.

Aufgabenstellung:

Deuten Sie die Gleichung $h(t + 1) - h(t) = 2$ im gegebenen Kontext unter Angabe der richtigen Einheiten!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Mögliche Deutungen:

Pro Sekunde steigt der Ballon um 2 m.

oder:

Der Ballon steigt mit einer (konstanten) Geschwindigkeit von 2 m/s.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Deutung der Gleichung unter Angabe der richtigen Einheiten.

Modellierung*

Aufgabennummer: 1_438	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Eine lineare Funktion f wird allgemein durch eine Funktionsgleichung $f(x) = k \cdot x + d$ mit den Parametern $k \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ dargestellt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aufgabenstellungen an, die <u>nicht</u> durch eine lineare Funktion modelliert werden können.

Die Gesamtkosten bei der Herstellung einer Keramikglasur setzen sich aus einmaligen Kosten von € 1.000 für die Maschine und € 8 pro erzeugtem Kilogramm Glasur zusammen. Stellen Sie die Gesamtkosten für die Herstellung einer Keramikglasur in Abhängigkeit von den erzeugten Kilogramm Glasur dar.	☐
Eine Bakterienkultur besteht zu Beginn einer Messung aus 20 000 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdreifacht sich alle vier Stunden. Stellen Sie die Anzahl der Bakterien in dieser Kultur in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit (in Stunden) dar.	☐
Die Anziehungskraft zweier Planeten verhält sich indirekt proportional zum Quadrat des Abstands der beiden Planeten. Stellen Sie die Abhängigkeit der Anziehungskraft zweier Planeten von ihrem Abstand dar.	☐
Ein zinsenloses Wohnbaudarlehen von € 240.000 wird 40 Jahre lang mit gleichbleibenden Jahresraten von € 6.000 zurückgezahlt. Stellen Sie die Restschuld in Abhängigkeit von der Anzahl der vergangenen Jahre dar.	☐
Bleibt in einem Stromkreis die Spannung konstant, so ist die Leistung direkt proportional zur Stromstärke. Stellen Sie die Leistung im Stromkreis in Abhängigkeit von der Stromstärke dar.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015, adaptiert

Lösungserwartung

Eine Bakterienkultur besteht zu Beginn einer Messung aus 20 000 Bakterien. Die Anzahl der Bakterien verdreifacht sich alle vier Stunden. Stellen Sie die Anzahl der Bakterien in dieser Kultur in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit (in Stunden) dar.	☒
Die Anziehungskraft zweier Planeten verhält sich indirekt proportional zum Quadrat des Abstands der beiden Planeten. Stellen Sie die Abhängigkeit der Anziehungskraft zweier Planeten von ihrem Abstand dar.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bruttogehalt und Nettogehalt*

Aufgabennummer: 1_743	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 2.5

Auf der Website des Finanzministeriums findet man einen Brutto-Netto-Rechner, der für jedes monatliche Bruttogehalt das entsprechende Nettogehalt berechnet.

Folgende Tabelle gibt Auskunft über einige Gehälter:

Bruttogehalt in €	1500	2000	2500
Nettogehalt in €	1199	1483	1749

Aufgabenstellung:

Zeigen Sie unter Verwendung der in der obigen Tabelle angeführten Werte, dass zwischen dem Bruttogehalt und dem Nettogehalt kein linearer Zusammenhang besteht.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

Es besteht kein linearer Zusammenhang, da die gleiche Zunahme des Bruttogehalts (jeweils € 500) nicht die gleiche Erhöhung des Nettogehalts (€ 284 bzw. € 266) bewirkt.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen richtigen Nachweis unter Verwendung der angeführten Werte.

Lineare Zusammenhänge*

Aufgabennummer: 1_646	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 2.5

Verbal gegebene Zusammenhänge können in bestimmten Fällen als lineare Funktionen betrachtet werden.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Zusammenhänge lassen sich mittels einer linearen Funktion beschreiben?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Zusammenhänge an!

Die Wohnungskosten steigen jährlich um 10 % in Bezug auf den Wert des jeweiligen Vorjahres.	☐
Der Flächeninhalt eines quadratischen Grundstücks wächst mit zunehmender Seitenlänge.	☐
Der Umfang eines Kreises wächst mit zunehmendem Radius.	☐
Die Länge einer 17 cm hohen Kerze nimmt nach dem Anzünden in jeder Minute um 8 mm ab.	☐
In einer Bakterienkultur verdoppelt sich stündlich die Anzahl der Bakterien.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

Der Umfang eines Kreises wächst mit zunehmendem Radius.	☒
Die Länge einer 17 cm hohen Kerze nimmt nach dem Anzünden in jeder Minute um 8 mm ab.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Zusammenhänge angekreuzt sind.

Direkte Proportionalität*

Aufgabennummer: 1_838	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: halboffenes Format

Der Funktionsgraph einer linearen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ verläuft durch die Punkte $A = (x_A|6)$ und $B = (12|16)$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinate x_A des Punktes A so, dass die Funktion f einen direkt proportionalen Zusammenhang beschreibt.

$x_A =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$x_A = 4{,}5$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Bestimmen der Koordinate x_A.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Futterbedarf*

Aufgabennummer: 1_789	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 2.6

In einem Reitstall werden Pferde für t Tage eingestellt. Der tägliche Futterbedarf jedes dieser Pferde wird als konstant angenommen und mit c bezeichnet.

Die Funktion f beschreibt den gesamten Futterbedarf $f(p)$ für t Tage in Abhängigkeit von der Anzahl p der Pferde in diesem Reitstall.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die zutreffende Gleichung an.

$f(p) = p + t + c$	☐
$f(p) = c + p \cdot t$	☐
$f(p) = c \cdot \frac{t}{p}$	☐
$f(p) = \frac{c}{p \cdot t}$	☐
$f(p) = c \cdot p \cdot t$	☐
$f(p) = \frac{p \cdot t}{c}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

$f(p) = c \cdot p \cdot t$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Gleichung angekreuzt ist.

Potenzfunktion

Gegeben ist eine Potenzfunktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^z$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$.

Es gilt:

- Verdoppelt man den Wert des Arguments x, so verringert sich der zugehörige Funktionswert auf ein Viertel des ursprünglichen Funktionswerts.
- Der Punkt $(2|2)$ liegt auf dem Graphen von f.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Werte von a und z an.

z = __________

a = __________

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$z = -2$
$a = 8$

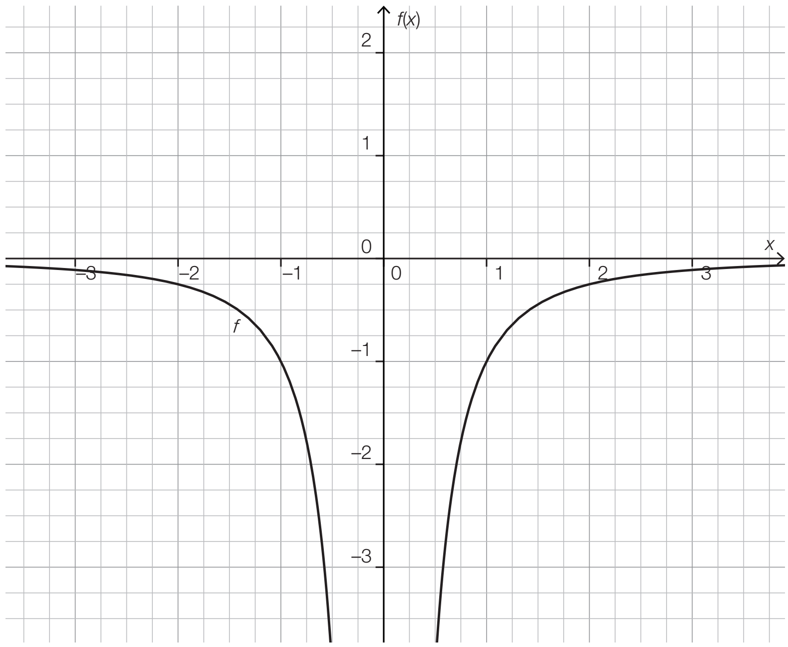
Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Potenzfunktion*

Aufgabennummer: 1_437	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☒
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Potenzfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^z$ und $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $z \in \mathbb{Z}$ dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Funktionsgleichung an, die zum abgebildeten Graphen passt.

$f(x) = 2 \cdot x^{-4}$	☐
$f(x) = -x^{-2}$	☐
$f(x) = -x^{2}$	☐
$f(x) = -x^{-1}$	☐
$f(x) = x^{-2}$	☐
$f(x) = x^{-1}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015, adaptiert

Lösungserwartung

$f(x) = -x^{-2}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

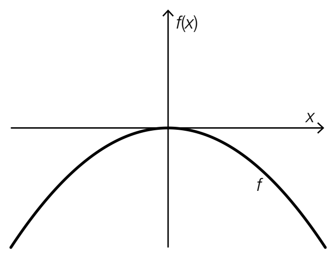
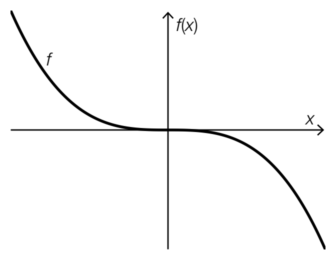
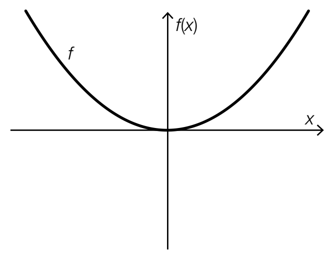
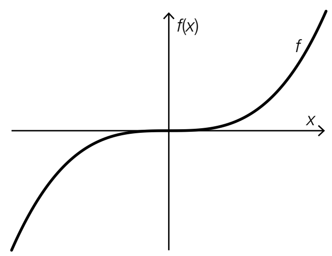
Potenzfunktionen*

Aufgabennummer: 1_484	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 3.1

Gegeben sind die Graphen von vier verschiedenen Potenzfunktionen f mit $f(x) = a \cdot x^z$ sowie sechs Bedingungen für den Parameter a und den Exponenten z. Dabei ist a eine reelle, z eine natürliche Zahl.

Aufgabenstellung:

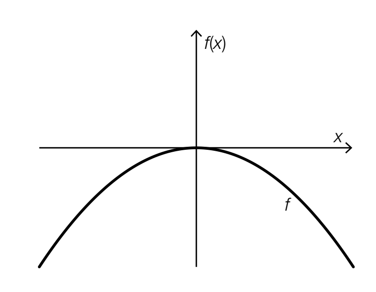
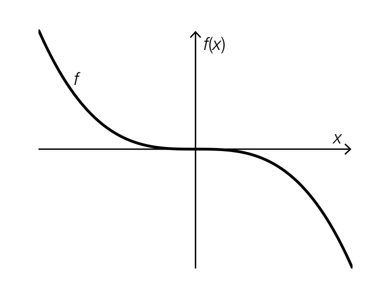
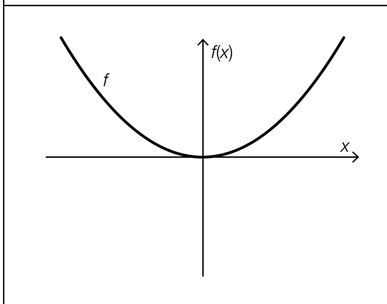
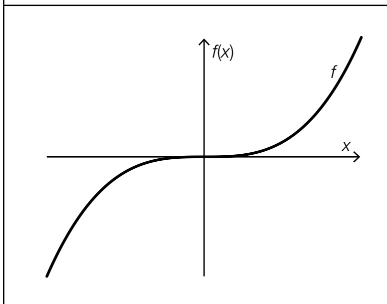
Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die entsprechende Bedingung für den Parameter a und den Exponenten z der Funktionsgleichung (aus A bis F) zu!

A	$a > 0$, $z = 1$
B	$a > 0$, $z = 2$
C	$a > 0$, $z = 3$
D	$a < 0$, $z = 1$
E	$a < 0$, $z = 2$
F	$a < 0$, $z = 3$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

	E
	F
	B
	C

A	$a > 0, z = 1$
B	$a > 0, z = 2$
C	$a > 0, z = 3$
D	$a < 0, z = 1$
E	$a < 0, z = 2$
F	$a < 0, z = 3$

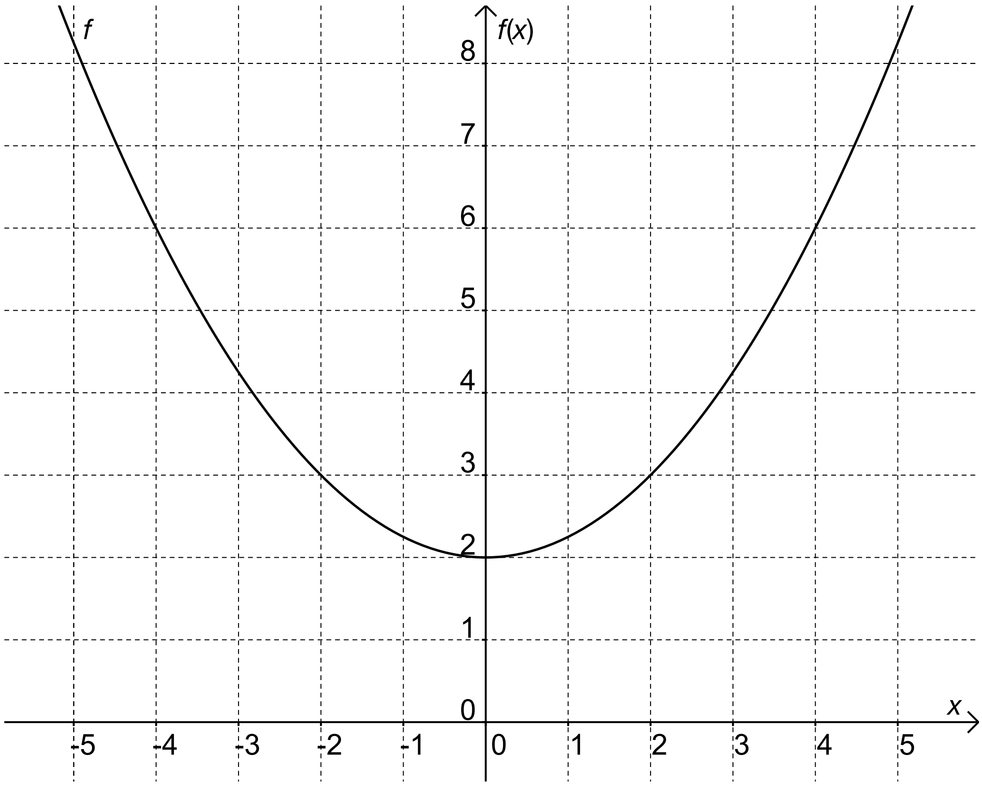
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Gleichung einer quadratischen Funktion*

Aufgabennummer: 1_341	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 3.1

Im nachstehenden Koordinatensystem ist der Graph einer quadratischen Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dargestellt.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Werte der Parameter a und b! Die für die Berechnung relevanten Punkte mit ganzzahligen Koordinaten können dem Diagramm entnommen werden.

a = ______________________________

b = ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

$a = \frac{1}{4}$ oder $a = 0,25$

$b = 2$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei beide Parameter richtig angegeben sein müssen.

Parameter einer quadratischen Funktion

Der Graph der quadratischen Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^2 + b$ hat im Punkt $S = (0|-2)$ ein lokales Minimum und verläuft durch den Punkt $P = (1|0)$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die reellen Parameter a und b.

a = ____

b = ____

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$a = 2$
$b = -2$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln von *a* und *b*, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Fallender Ball

Ein Ball fällt von einer Aussichtsplattform. Die Funktion h beschreibt modellhaft die Höhe des fallenden Balles über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t.

Dabei gilt: $h: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $h(t) = 30 - 4{,}9 \cdot t^2$ (t in s, $h(t)$ in m).

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem sich der Ball 4 m über dem Boden befindet.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$30 - 4{,}9 \cdot t^2 = 4$
$t = 2{,}30...\text{ s}$

Nach rund 2,3 s befindet sich der Ball 4 m über dem Boden.

Ein Punkt für das richtige Berechnen des Zeitpunkts.

Grundkompetenz: FA 3.2

Potenzfunktion*

Aufgabennummer: 1_790	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 3.2

Gegeben ist eine Potenzfunktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{a}{x^2}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf die Funktion *f* auf jeden Fall zutreffen.

$f\left(\frac{1}{a}\right) = 1$	☐
$f(x + 1) = \frac{a}{x^2 - 2 \cdot x + 1}$	☐
$f(2 \cdot x) = \frac{a}{4 \cdot x^2}$	☐
$f(2 \cdot a) = \frac{1}{2 \cdot a}$	☐
$f(-x) = f(x)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

$f(2 \cdot x) = \frac{a}{4 \cdot x^2}$	$\boxtimes$
$f(-x) = f(x)$	$\boxtimes$

Lösungsschlüssel

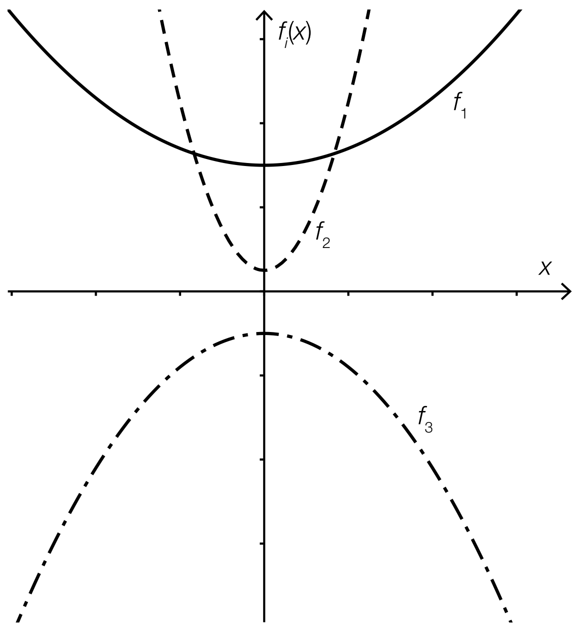
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Graphen quadratischer Funktionen*

Aufgabennummer: 1_622	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 3.2

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen quadratischer Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit den Gleichungen $f_i(x) = a_i \cdot x^2 + b_i$, wobei gilt: $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie die Parameterwerte a_i und b_i jeweils der Größe nach, beginnend mit dem kleinsten!

Parameterwerte a_i: _______ < _______ < _______

Parameterwerte b_i: _______ < _______ < _______

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

$a_3 < a_1 < a_2$
$b_3 < b_2 < b_1$

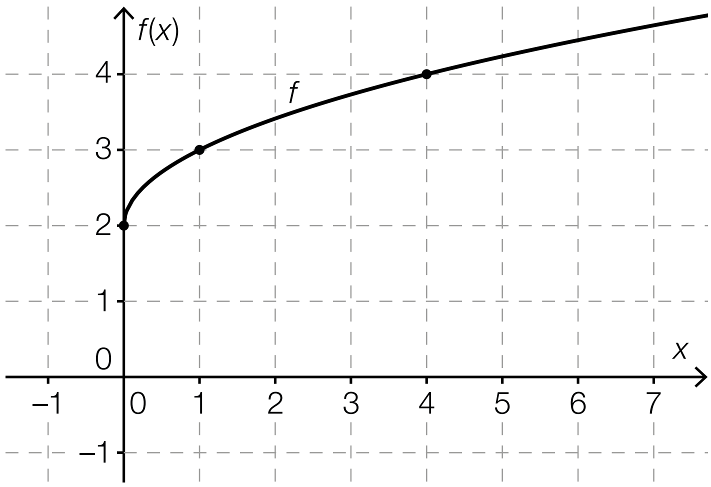
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Funktion*

Aufgabennummer: 1_532	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 3.2

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^{\frac{1}{2}} + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ dargestellt.
Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Werte von a und b an!

a = ____________________

b = ____________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

$a = 1$
$b = 2$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die korrekten Werte von a und b.

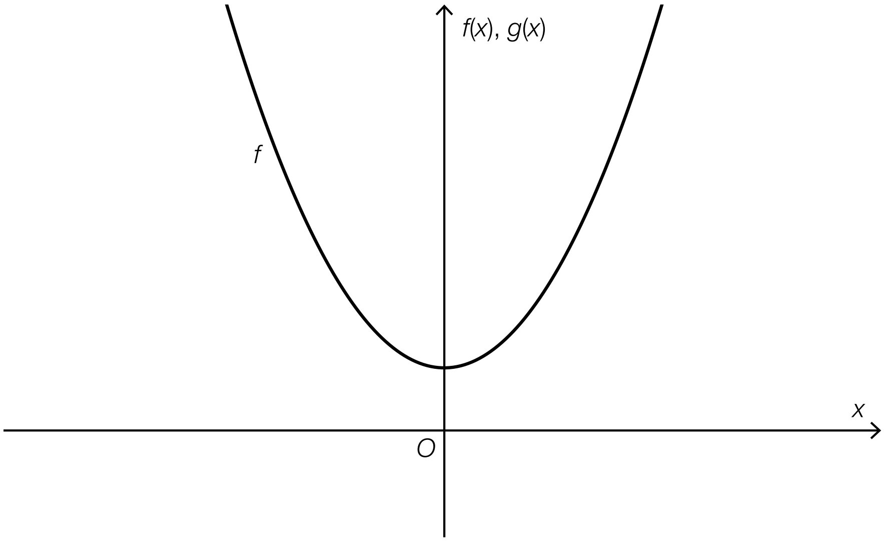
Graph einer quadratischen Funktion

Gegeben ist der Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Für eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $g(x) = c \cdot x^2 + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ gilt: $c < -a$ und $d > b$

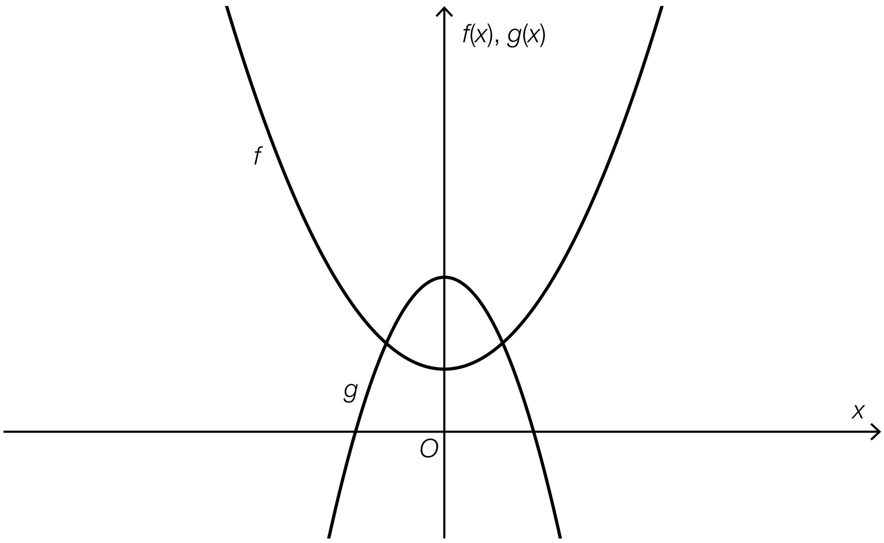
Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen einer solchen Funktion g.



[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg



Ein Punkt für das richtige Skizzieren des Graphen von g. Für die Punktvergabe ist erforderlich, dass der Graph von g eine nach unten geöffnete Parabel ist, deren Scheitel auf der senkrechten Achse oberhalb des Scheitels von f liegt und klar erkennbar schmäler als der Graph von f ist.

Quadratische Funktion

Gegeben ist eine quadratische Funktion f der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Bedingung an, die die Parameter a und b erfüllen müssen, damit f zwei reelle Nullstellen hat.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Parameter a und b müssen verschiedene Vorzeichen haben.

oder:

$a \cdot b < 0$

Ein Punkt für das Angeben einer richtigen Bedingung.

Grundkompetenz: FA 3.3

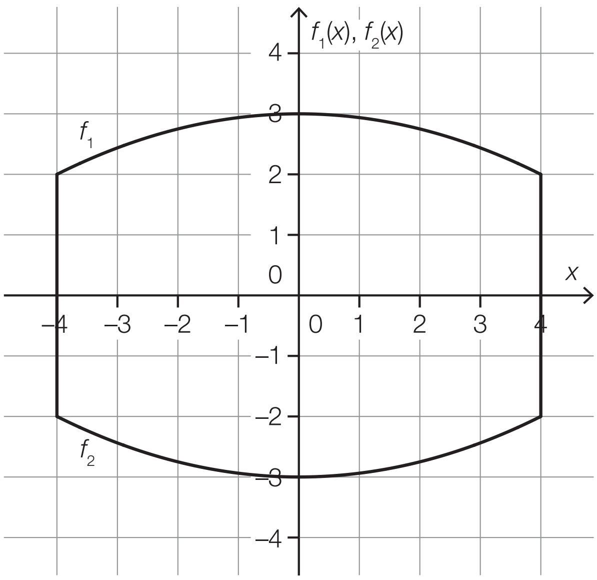
Zwei quadratische Funktionen*

Aufgabennummer: 1_863	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: halboffenes Format

Eine bestimmte Querschnittsfläche wird von den Graphen der quadratischen Funktionen f_1 und f_2 sowie den Geraden $x = -4$ und $x = 4$ begrenzt.
Es gilt:
$f_1: [-4; 4] \to \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
$f_2: [-4; 4] \to \mathbb{R}, x \mapsto c \cdot x^2 + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$

Der Sachverhalt wird durch die nachstehende Abbildung veranschaulicht.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie „<“, „=“ oder „>“ in (1) und (2) jeweils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

(1) a ______ c

(2) b ______ d

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

(1) $a < c$
(2) $b > d$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Einsetzen der beiden richtigen Ungleichheitszeichen, ein halber Punkt für nur ein richtiges Ungleichheitszeichen.

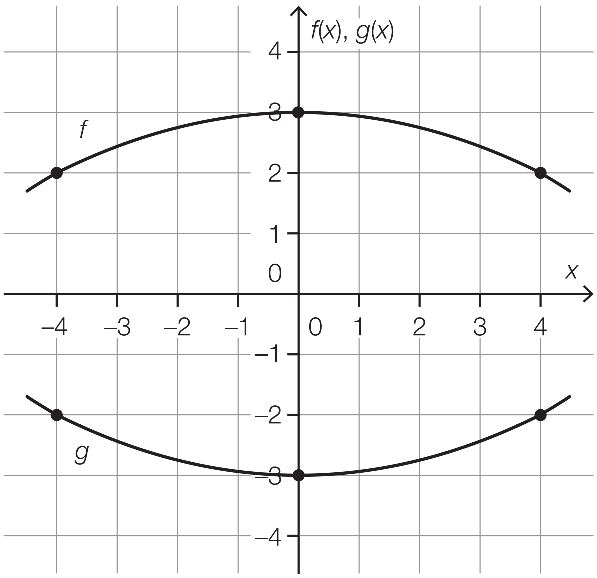
Quadratische Funktionen*

Aufgabennummer: 1_839	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der beiden reellen Funktionen f und g dargestellt. Es gilt:

$f(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
$g(x) = c \cdot x^2 + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$



Die Koordinaten der gekennzeichneten Punkte sind ganzzahlig.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$d = f(0)$	☐
$b = d$	☐
$a = -c$	☐
$-f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$	☐
$f(2) = g(2)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$a = -c$	☒
$-f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$	☒

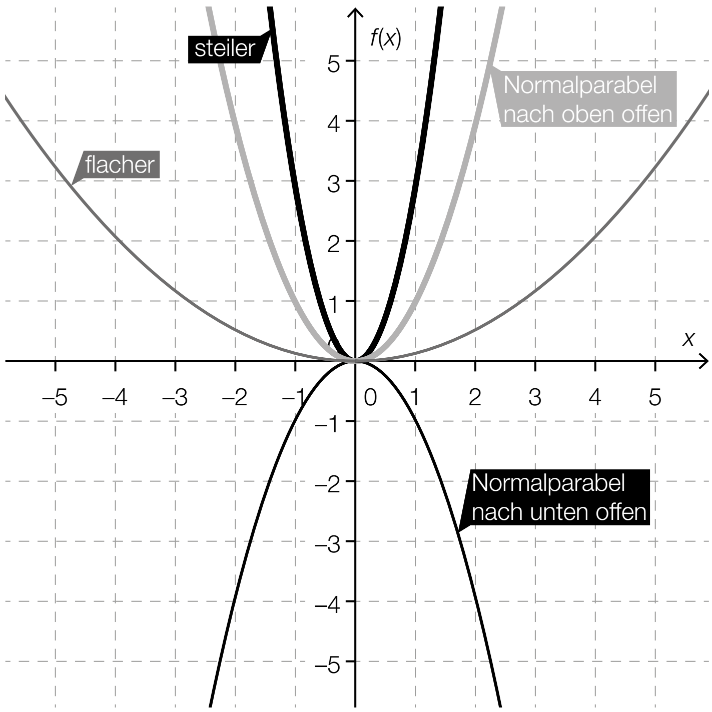
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Parabeln*

Aufgabennummer: 1_719	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 3.3

Die Graphen von Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sind Parabeln. Für $a = 1$ erhält man den oft als *Normalparabel* bezeichneten Graphen. Je nach Wert des Parameters a erhält man Parabeln, die im Vergleich zur Normalparabel „steiler" oder „flacher" bzw. „nach unten offen" oder „nach oben offen" sind.



Aufgabenstellung:

Nachstehend sind vier Parabeln beschrieben. Ordnen Sie den vier Beschreibungen jeweils diejenige Bedingung (aus A bis F) zu, die der Parameter a erfüllen muss.

Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „flacher" und „nach oben offen".	
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel weder „flacher" noch „steiler", aber „nach unten offen".	
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „steiler" und „nach unten offen".	
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „steiler" und „nach oben offen".	

A	$a < -1$
B	$a = -1$
C	$-1 < a < 0$
D	$0 < a < 1$
E	$a = 1$
F	$a > 1$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „flacher“ und „nach oben offen“.	D
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel weder „flacher“ noch „steiler“, aber „nach unten offen“.	B
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „steiler“ und „nach unten offen“.	A
Die Parabel ist im Vergleich zur Normalparabel „steiler“ und „nach oben offen“.	F

A	$a < -1$
B	$a = -1$
C	$-1 < a < 0$
D	$0 < a < 1$
E	$a = 1$
F	$a > 1$

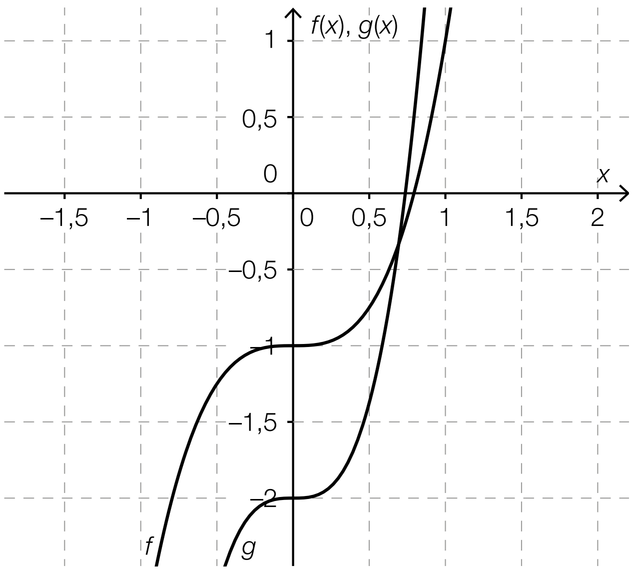
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Aussagen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist. Bei zwei oder drei richtigen Zuordnungen ist ein halber Punkt zu geben.

Parameter reeller Funktionen*

Aufgabennummer: 1_574	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 3.3

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen zweier reeller Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = a \cdot x^3 + b$ und $g(x) = c \cdot x^3 + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.



Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Aussagen treffen für die Parameter a, b, c und d zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$a > c$	☐
$b > d$	☐
$a > 0$	☐
$b > 0$	☐
$c < 1$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$b > d$	☒
$a > 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Parabeln zuordnen*

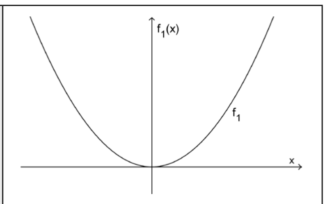
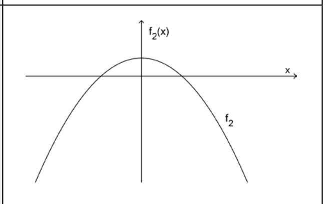
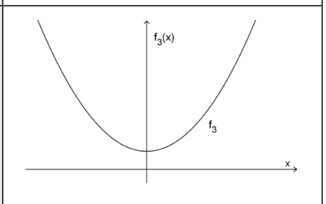
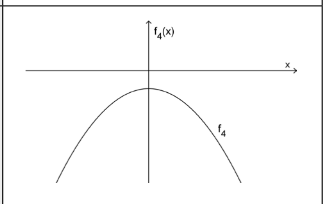
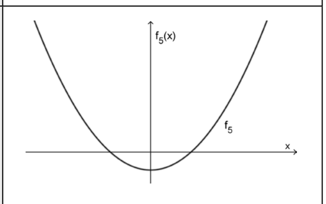
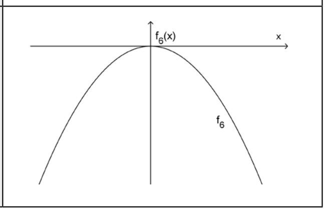
Aufgabennummer: 1_389	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 3.3

Gegeben sind die Graphen von sechs Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 und f_6 mit der Gleichung $f_i(x) = ax^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ (i von 1 bis 6).

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den folgenden Eigenschaften jeweils den entsprechenden Graphen der dargestellten Funktionen zu!

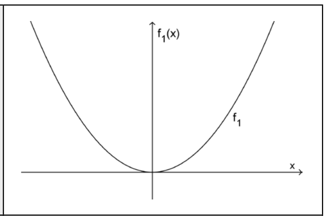
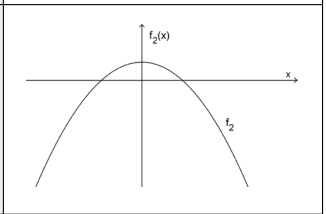
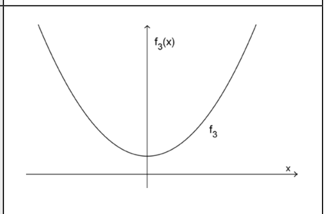
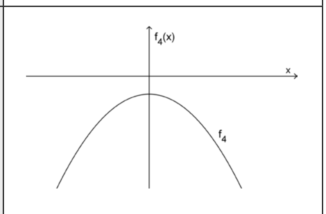
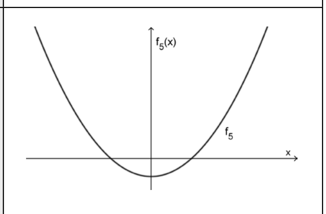
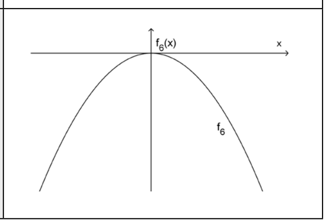
$a < 0$ und $b < 0$	
$a < 0$ und $b > 0$	
$a > 0$ und $b < 0$	
$a > 0$ und $b > 0$	

A	
B	
C	
D	
E	
F	

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

a < 0 und *b* < 0	D
a < 0 und *b* > 0	B
a > 0 und *b* < 0	E
a > 0 und *b* > 0	C

A	
B	
C	
D	
E	
F	

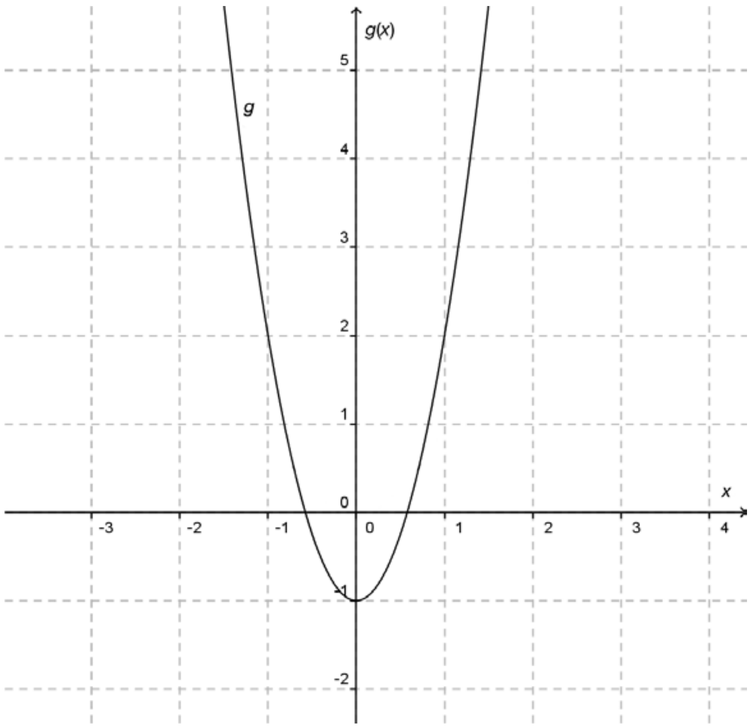
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Aussagen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Graph einer quadratischen Funktion*

Aufgabennummer: 1_362	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 3.3

Gegeben ist der Graph einer Funktion g mit $g(x) = a \cdot x^2 + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Parameter a und b so an, dass sie zum abgebildeten Graphen von g passen!

a = ____

b = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

$a = 3$
$b = -1$

Lösungsschlüssel

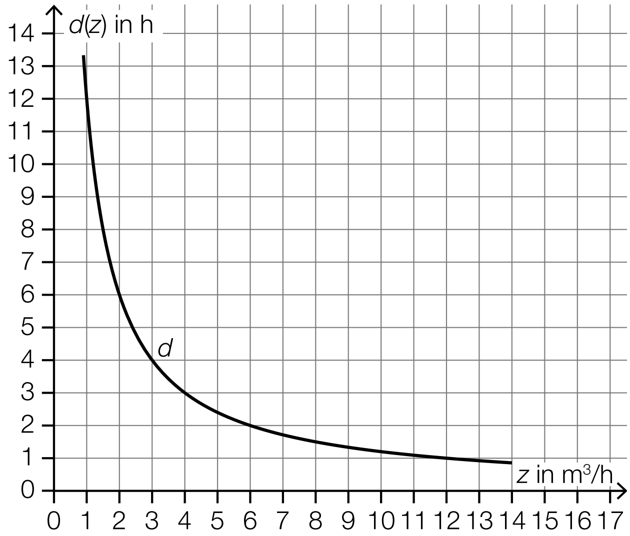
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn beide Parameter korrekt angegeben sind.
Toleranzintervalle: $a \in [2{,}9;\ 3{,}1]$; $b \in [-1{,}1;\ -0{,}9]$

Befüllen eines Wasserbeckens

Ein leeres Wasserbecken wird vollständig mit Wasser befüllt.

Die Funktion $d\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ beschreibt die Dauer des Befüllens in Abhängigkeit von der Zuflussrate z (z in m³/h, $d(z)$ in h).

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen von d.



Aufgabenstellung:

Geben Sie das Volumen V des Wasserbeckens an.

V = ____________________ m³

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$V = 12\text{ m}^3$

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Volumens V.

Abfüllmaschinen

Werden vier gleich schnell arbeitende Abfüllmaschinen gleichzeitig eingesetzt, so benötigen sie 24 Minuten zum Befüllen von 6 000 Flaschen Mineralwasser.

Die Funktion f ordnet einer Anzahl n solcher gleichzeitig arbeitender Abfüllmaschinen die Dauer $f(n)$ zu, die für die Befüllung der 6 000 Flaschen benötigt wird ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $f(n)$ in Minuten).

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f auf.

$f(n) =$ ____

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$f(n) = \frac{96}{n}$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von f.

Indirekte Proportionalität

Gegeben sind sechs Zuordnungen mit $x \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Zuordnung an, die eine indirekte Proportionalität beschreibt. *[1 aus 6]*

$x \mapsto 3 - x$	☐
$x \mapsto -\frac{x}{3}$	☐
$x \mapsto \frac{3}{x^2}$	☐
$x \mapsto 3 \cdot x^{-1}$	☐
$x \mapsto 3^{-x}$	☐
$x \mapsto x^{-3}$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$x \mapsto 3 \cdot x^{-1}$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Flächeninhalt von Rechtecken

Die Funktion f ordnet der Breite x (mit $x > 0$) eines Rechtecks mit dem Flächeninhalt 26 cm^2 die Länge $f(x)$ zu (x, $f(x)$ in cm).

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf.

$f(x) =$ ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$f(x) = \frac{26}{x}$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *f*.

Druck und Volumen eines idealen Gases*

Aufgabennummer: 1_791	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 3.4

Bei gleichbleibender Temperatur sind der Druck und das Volumen eines idealen Gases zueinander indirekt proportional. Die Funktion p ordnet dem Volumen V den Druck $p(V)$ zu (V in m^3, $p(V)$ in Pascal).

Aufgabenstellung:

Geben Sie $p(V)$ mit $V \in \mathbb{R}^+$ an, wenn bei einem Volumen von 4 m^3 der Druck 50 000 Pascal beträgt.

$p(V) =$ ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

$p(V) = \frac{200\,000}{V}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Weinlese*

Aufgabennummer: 1_767	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 3.4

Die sogenannte *Weinlese* (Ernte der Weintrauben) in einem Weingarten erfolgt umso schneller, je mehr Personen daran beteiligt sind. Die Funktion f modelliert den indirekt proportionalen Zusammenhang zwischen der für die Weinlese benötigten Zeit und der Anzahl der beteiligten Personen. Dabei ist $f(n)$ die benötigte Zeit für die Weinlese, wenn n Personen beteiligt sind ($n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $f(n)$ in Stunden).

Aufgabenstellung:

Geben Sie $f(n)$ an, wenn bekannt ist, dass die benötigte Zeit für die Weinlese bei einer Anzahl von 8 beteiligten Personen 6 Stunden beträgt.

$f(n) =$ ______________________________ mit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$f(n) = \frac{48}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Heizungstage*

Aufgabennummer: 1_461	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 3.4

Die Anzahl der Heizungstage, für die ein Vorrat an Heizöl in einem Tank reicht, ist indirekt proportional zum durchschnittlichen Tagesverbrauch x (in Litern).

Aufgabenstellung:

In einem Tank befinden sich 1 500 Liter Heizöl. Geben Sie einen Term an, der die Anzahl $d(x)$ der Heizungstage in Abhängigkeit vom durchschnittlichen Tagesverbrauch x bestimmt!

$d(x)$ = ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$d(x) = \frac{1\,500}{x}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen korrekten Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Ungerade Funktion

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^n$ ($a \in \mathbb{R}, a \neq 0$) mit ungeradem $n \in \mathbb{N}$ ist die nachstehende Wertetabelle gegeben.

x	-2	0	2
$f(x)$	v	0	w

Dabei sind $v, w \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Zusammenhang zwischen v und w in Form einer Gleichung an.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$v = -w$

Ein Punkt für das Angeben der richtigen Gleichung.

Grundkompetenz: FA 3.2

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

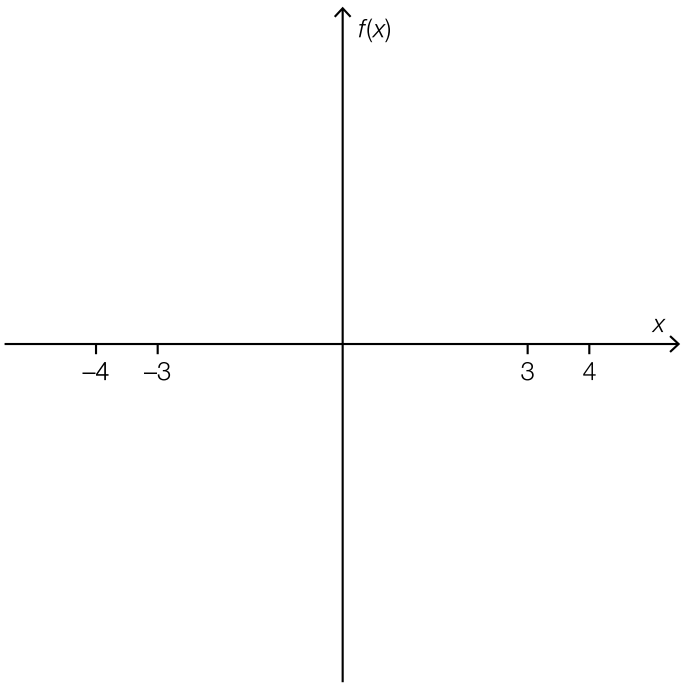
Verlauf einer Polynomfunktion vierten Grades*

Aufgabennummer: 1_695	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 4.1

Es gibt Polynomfunktionen vierten Grades, die genau drei Nullstellen x_1, x_2 und x_3 mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ und $x_1 < x_2 < x_3$ haben.

Aufgabenstellung:

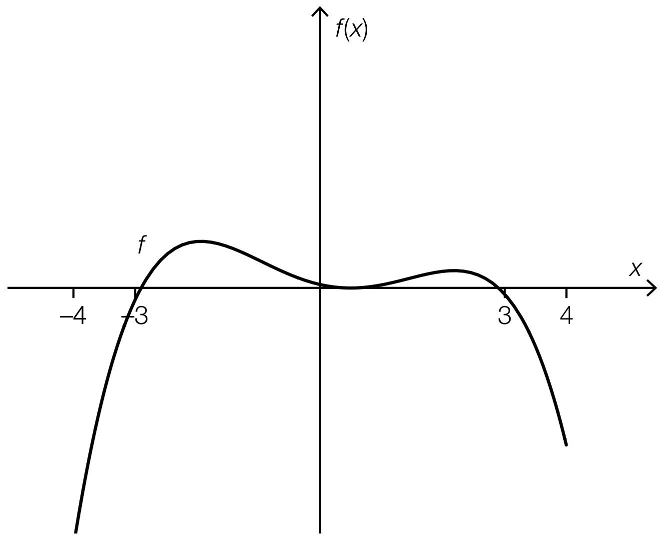
Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem im Intervall [–4; 4] den Verlauf des Graphen einer solchen Funktion *f* mit allen drei Nullstellen im Intervall [–3; 3]!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

mögliche Lösung:



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Darstellung des Graphen einer solchen Funktion vierten Grades, wobei alle drei Nullstellen im Intervall [–3; 3] liegen müssen und genau eine der drei Nullstellen eine lokale Extremstelle sein muss. Der Verlauf des Graphen soll vor der ersten Nullstelle und nach der dritten Nullstelle klar erkennbar sein.

Kosten eines Betriebs

Die Funktion K mit $K(x) = 100 \cdot x^3 - 1\,800 \cdot x^2 + 11\,200 \cdot x + 20\,000$ gibt die Gesamtkosten in Euro an, die für einen Betrieb bei der Erzeugung von x (in Tonnen) eines bestimmten Produkts entstehen.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie diejenige Produktionsmenge (in Tonnen), bei der die Gesamtkosten um € 48.000 höher als die Fixkosten sind.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$K(x) = 68\,000$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$x = 12$
Bei einer Produktionsmenge von 12 Tonnen sind die Gesamtkosten um € 48.000 höher als die Fixkosten.

Ein Punkt für das richtige Berechnen der Produktionsmenge.

Grundkompetenz: FA 4.3

Negative Funktionswerte*

Aufgabennummer: 1_555	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 4.3

Gegeben ist die Gleichung einer reellen Funktion f mit $f(x) = x^2 - x - 6$. Einen Funktionswert $f(x)$ nennt man negativ, wenn $f(x) < 0$ gilt.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, deren zugehöriger Funktionswert $f(x)$ negativ ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

Für alle $x \in (-2; 3)$ gilt:

$f(x) < 0$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösungsmenge. Andere korrekte Schreibweisen der Lösungsmenge oder eine korrekte verbale oder grafische Beschreibung der Lösungsmenge, aus der klar hervorgeht, dass die Endpunkte –2 und 3 nicht inkludiert sind, sind ebenfalls als richtig zu werten.

Anzahl von Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen

Gegeben ist eine Polynomfunktion 4. Grades *f*.

Im Folgenden sind Aussagen über die genaue Anzahl von verschiedenen reellen Nullstellen, lokalen Extremstellen und Wendestellen angeführt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf *f* zutreffen können. *[2 aus 5]*

Die Funktion *f* kann 0 reelle Nullstellen, 1 lokale Extremstelle und 0 Wendestellen haben.	☐
Die Funktion *f* kann 1 reelle Nullstelle, 3 lokale Extremstellen und 2 Wendestellen haben.	☐
Die Funktion *f* kann 2 verschiedene reelle Nullstellen, 2 lokale Extremstellen und 2 Wendestellen haben.	☐
Die Funktion *f* kann 3 verschiedene reelle Nullstellen, 2 lokale Extremstellen und 0 Wendestellen haben.	☐
Die Funktion *f* kann 4 verschiedene reelle Nullstellen, 3 lokale Extremstellen und 1 Wendestelle haben.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Funktion *f* kann 0 reelle Nullstellen, 1 lokale Extremstelle und 0 Wendestellen haben.	☒
Die Funktion *f* kann 1 reelle Nullstelle, 3 lokale Extremstellen und 2 Wendestellen haben.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Anzahl der Nullstellen einer Polynomfunktion

Zwischen der Anzahl der möglichen reellen Nullstellen und dem Grad einer Polynomfunktion gibt es einen Zusammenhang.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Jede Polynomfunktion ___①___ Grades hat ___②___ eine reelle Nullstelle.

①	
zweiten	☐
dritten	☐
vierten	☐

②	
genau	☐
mindestens	☐
mehr als	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

①	
dritten	☒

②	
mindestens	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen

Die Anzahl der reellen Nullstellen, der lokalen Extremstellen und der Wendestellen einer Polynomfunktion hängt unter anderem von ihrem Grad ab.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Jede Polynomfunktion vom Grad 1 hat genau 1 lokale Extremstelle.	☐
Jede Polynomfunktion vom Grad 2 hat mindestens 1 reelle Nullstelle.	☐
Jede Polynomfunktion vom Grad 3 hat mindestens 1 reelle Nullstelle.	☐
Jede Polynomfunktion vom Grad 4 hat genau 3 lokale Extremstellen.	☐
Jede Polynomfunktion vom Grad 5 hat mindestens 1 Wendestelle.	☐

[0/1 P.]

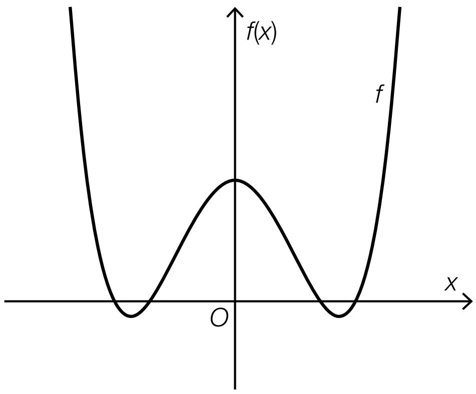
Möglicher Lösungsweg

Jede Polynomfunktion vom Grad 3 hat mindestens 1 reelle Nullstelle.	☒
Jede Polynomfunktion vom Grad 5 hat mindestens 1 Wendestelle.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Grad einer Polynomfunktion

Nachstehend ist der Graph der Polynomfunktion *f* abgebildet. Außerhalb des dargestellten Bereichs hat *f* keine Null-, keine Extrem- und keine Wendestellen.



Aufgabenstellung:

Begründen Sie, warum der Grad von *f* mindestens 4 sein muss.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Funktion hat 4 Nullstellen.

oder:

Die Funktion hat 3 Extremstellen.

oder:

Die Funktion hat 2 Wendestellen.

Ein Punkt für das richtige Begründen.

Grundkompetenz: FA 4.4

Eigenschaften einer Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_647	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☒
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Gegeben ist eine Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$).

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf die Funktion f für beliebige Werte von a, b, c und d auf jeden Fall zutreffen.

Die Funktion f hat genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse.	☐
Die Funktion f hat höchstens zwei lokale Extremstellen.	☐
Die Funktion f hat höchstens zwei Punkte mit der x-Achse gemeinsam.	☐
Die Funktion f hat genau eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f hat mindestens eine lokale Extremstelle.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018, adaptiert

Lösungserwartung

Die Funktion *f* hat höchstens zwei lokale Extremstellen.	☒
Die Funktion *f* hat genau eine Wendestelle.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_815	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: FA 4.4

Zwischen dem Grad einer Polynomfunktion und der Anzahl der reellen Nullstellen, der lokalen Extremstellen und der Wendestellen besteht ein Zusammenhang.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Jede Polynomfunktion ___①___ hat ___②___ .

①	
4. Grades	☐
5. Grades	☐
6. Grades	☐

②	
mindestens zwei verschiedene lokale Extremstellen	☐
mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen	☐
mindestens eine Wendestelle	☐

Lösungserwartung

①	
5. Grades	☒

②	
mindestens eine Wendestelle	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

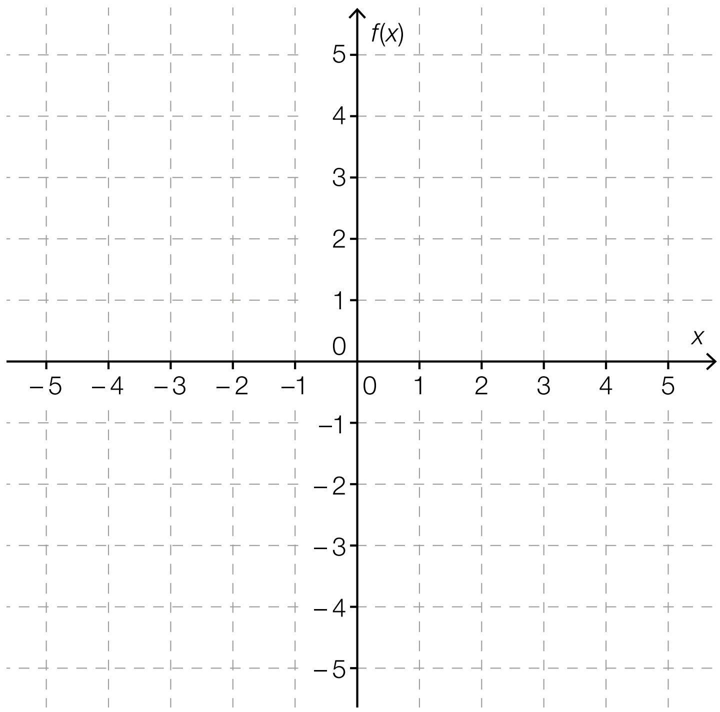
Polynomfunktionen dritten Grades*

Aufgabennummer: 1_671	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 4.4

Eine Polynomfunktion dritten Grades ändert an höchstens zwei Stellen ihr Monotonieverhalten.

Aufgabenstellung:

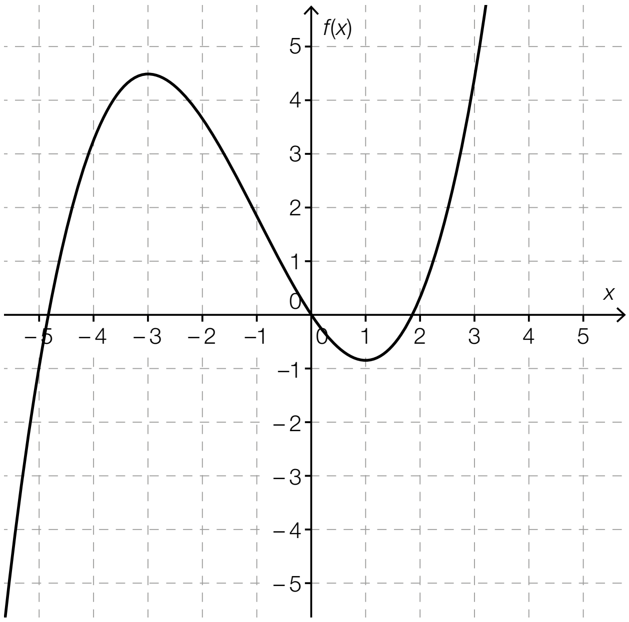
Skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades f, die an den Stellen $x = -3$ und $x = 1$ ihr Monotonieverhalten ändert!



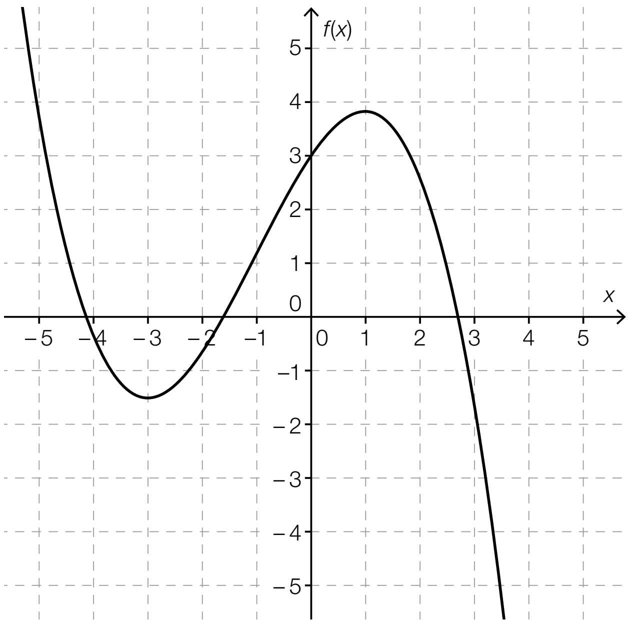
* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Mögliche Graphen:



oder:



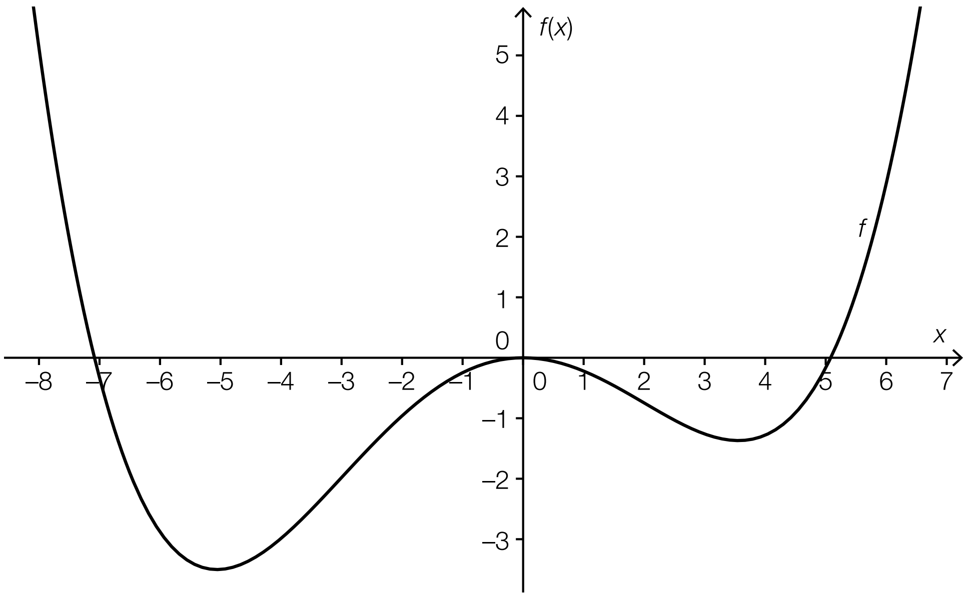
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen richtigen Graphen, wobei die Extremstellen bei $x = -3$ und $x = 1$ klar als solche erkennbar sein müssen.

Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_623	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 4.4

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f.



Aufgabenstellung:

Begründen Sie, warum es sich bei der dargestellten Funktion nicht um eine Polynomfunktion dritten Grades handeln kann!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Mögliche Begründungen:

Eine Polynomfunktion dritten Grades hat höchstens zwei lokale Extremstellen. (Die dargestellte Funktion f hat aber mindestens drei lokale Extremstellen.)

oder:

Eine Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle. (Die dargestellte Funktion f hat aber mindestens zwei Wendestellen.)

oder:

Die dargestellte Funktion hat bei $x_1 \approx -7$ und bei $x_2 \approx 5$ jeweils eine Nullstelle und bei $x_3 \approx 0$ eine Nullstelle, die auch lokale Extremstelle ist. Damit kann im dargestellten Intervall die Funktionsgleichung in der Form $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ angegeben werden. Der Grad von f wäre somit zumindest vier.

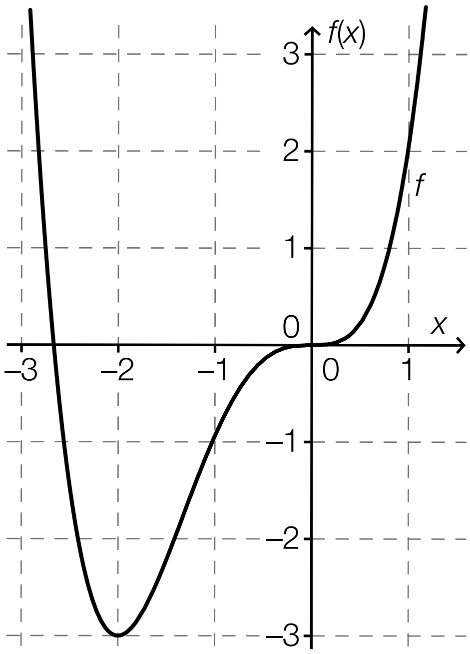
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Polynomfunktion vom Grad n*

Aufgabennummer: 1_508	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: FA 4.4

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f. Alle charakteristischen Punkte des Graphen (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrempunkte, Wendepunkte) sind in dieser Abbildung enthalten.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die Polynomfunktion f ist vom Grad ___①___, weil f genau ___②___ hat.

①	
$n < 3$	☐
$n = 3$	☐
$n > 3$	☐

②	
eine Extremstelle	☐
zwei Wendestellen	☐
zwei Nullstellen	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

①	
$n > 3$	☒

②	
zwei Wendestellen	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für beide Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Eigenschaften von Polynomfunktionen 3. Grades*

Aufgabennummer: 1_460	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 4.4

Eine Polynomfunktion 3. Grades hat allgemein die Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Eigenschaften treffen für Polynomfunktionen 3. Grades zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die keine lokale Extremstelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die keine Nullstelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die mehr als eine Wendestelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die keine Wendestelle haben.	☐
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die genau zwei verschiedene reelle Nullstellen haben.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die keine lokale Extremstelle haben.	☒
Es gibt Polynomfunktionen 3. Grades, die genau zwei verschiedene reelle Nullstellen haben.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

Eigenschaften einer Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_436	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 4.4

Eine reelle Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$) heißt Polynomfunktion dritten Grades.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Jede Polynomfunktion dritten Grades hat immer zwei Nullstellen.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat mehr Nullstellen als lokale Extremstellen.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat mindestens eine lokale Maximumstelle.	☐
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat höchstens zwei lokale Extremstellen.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

Jede Polynomfunktion dritten Grades hat genau eine Wendestelle.	☒
Jede Polynomfunktion dritten Grades hat höchstens zwei lokale Extremstellen.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Symmetrische Polynomfunktion*	
Aufgabennummer: 1_388	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 4.4

Der Graph einer zur senkrechten Achse symmetrischen Polynomfunktion f hat den lokalen Tiefpunkt $T = (3|-2)$.

Aufgabenstellung:

Begründen Sie, warum die Polynomfunktion f mindestens 4. Grades sein muss!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

Wegen der Symmetrie muss ein weiterer lokaler Tiefpunkt vorliegen und damit auch ein lokaler Hochpunkt. Beim Vorliegen von mindestens drei Extrempunkten muss die Polynomfunktion mindestens 4. Grades sein.

Alternativen:
– Vorliegen eines weiteren Tiefpunkts und daher auch eines Hochpunkts
– Vorliegen von insgesamt drei Extrempunkten
– Vorliegen eines weiteren Tiefpunkts und nur gerader Potenzen aufgrund der Symmetrie

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Argumentation.

Baumhöhe

Die Höhe eines bestimmten Baumes kann in den ersten 15 Jahren nach dem Einpflanzen durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.

Dieser Baum hat 10 Jahre nach dem Einpflanzen eine Höhe von 2,2 m und 15 Jahre nach dem Einpflanzen eine Höhe von 2,7 m.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Höhe dieses Baumes zum Zeitpunkt des Einpflanzens.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$f(t) = a \cdot b^t$
$f(10) = 2{,}2$ und $f(15) = 2{,}7$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = 1{,}46...$

Der Baum war zum Zeitpunkt des Einpflanzens rund 1,5 m hoch.

Ein Punkt für das richtige Berechnen der Höhe.

Grundkompetenz: FA 5.1

Grippeerkrankungen

Am Abend des 10. Februar 2019 waren in einem bestimmten Land 2000 Personen an Grippe erkrankt, am Abend des 21. Februar 2019 waren es 4000 Personen. Modellhaft wird angenommen, dass in diesem Land im Februar 2019 die Anzahl der an Grippe erkrankten Personen von Tag zu Tag um den gleichen Prozentsatz gestiegen ist.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie diesen Prozentsatz.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\sqrt[11]{2} = 1{,}0650...$

Prozentsatz: rund 6,5 %

Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

Grundkompetenz: FA 5.1

Funktionsterm*

Aufgabennummer: 1_841	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Von einer reellen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist Folgendes bekannt:

- $f(1) = 3$
- Für alle reellen Zahlen x gilt: $f(x + 1)$ ist um 50 % größer als $f(x)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Funktionsterm einer solchen Funktion f an.

$f(x) =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$

oder:

$f(x) = 3 \cdot 1{,}5^{x-1}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Funktionsterms.

Dicke einer Bleiplatte*

Aufgabennummer: 1_672	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.1

In der Medizintechnik werden Röntgenstrahlen eingesetzt. Durch den Einbau von Bleiplatten in Schutzwänden sollen Personen vor diesen Strahlen geschützt werden. Man geht davon aus, dass pro 1 mm Dicke der Bleiplatte die Strahlungsintensität um 5 % abnimmt.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die notwendige Dicke x (in mm) einer Bleiplatte, wenn die Strahlungsintensität auf 10 % der ursprünglichen Strahlungsintensität, mit der die Strahlen auf die Bleiplatte auftreffen, gesenkt werden soll!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}1 = 0{,}95^x \quad \Rightarrow \quad x \approx 44{,}9$ mm

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „mm" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [40 mm; 46 mm]

Änderungsprozess*

Aufgabennummer: 1_599	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 5.1

Durch die Gleichung $N(t) = 1{,}2 \cdot 0{,}98^t$ wird ein Änderungsprozess einer Größe N in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben.

Aufgabenstellung:

Welcher der angeführten Änderungsprozesse kann durch die angegebene Gleichung beschrieben werden? Kreuzen Sie den zutreffenden Änderungsprozess an!

Von einer radioaktiven Substanz zerfallen pro Zeiteinheit 0,02 % der am jeweiligen Tag vorhandenen Menge.	☐
In ein Speicherbecken fließen pro Zeiteinheit 0,02 m^3 Wasser zu.	☐
Vom Wirkstoff eines Medikaments werden pro Zeiteinheit 1,2 mg abgebaut.	☐
Die Einwohnerzahl eines Landes nimmt pro Zeiteinheit um 1,2 % zu.	☐
Der Wert einer Immobilie steigt pro Zeiteinheit um 2 %.	☐
Pro Zeiteinheit nimmt die Temperatur eines Körpers um 2 % ab.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

Pro Zeiteinheit nimmt die Temperatur eines Körpers um 2 % ab.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Änderungsprozess angekreuzt ist.

Exponentialfunktion*

Aufgabennummer: 1_575	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.1

Von einer Exponentialfunktion f sind die folgenden Funktionswerte bekannt:

$f(0) = 12$ und $f(4) = 192$

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung der Exponentialfunktion f an!

$f(x) =$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$f(x) = c \cdot a^x \;\Rightarrow\; f(0) = c = 12$

$f(4) = 12 \cdot a^4 = 192 \;\Rightarrow\; a = 2$

$f(x) = 12 \cdot 2^x$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Ausbreitung eines Ölteppichs*

Aufgabennummer: 1_483	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.1

Der Flächeninhalt eines Ölteppichs beträgt momentan 1,5 km^2 und wächst täglich um 5 %.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, nach wie vielen Tagen der Ölteppich erstmals größer als 2 km^2 ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

$1{,}5 \cdot 1{,}05^{d} = 2 \;\Rightarrow\; d = 5{,}896\ldots \;\Rightarrow$ Nach 6 Tagen ist der Ölteppich erstmals größer als 2 km^2.

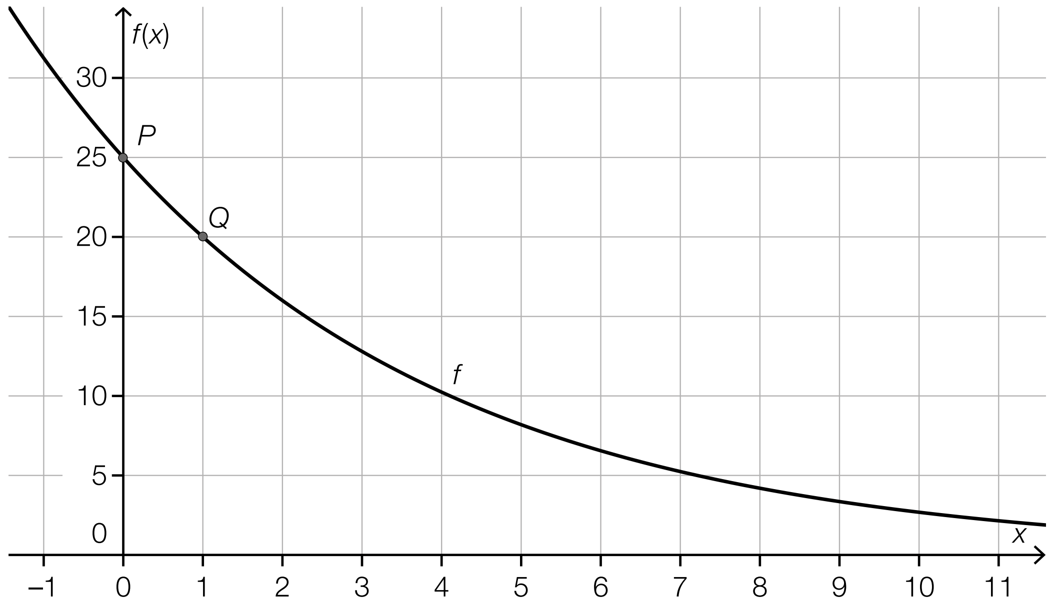
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Tage" nicht angeführt sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
Toleranzintervall: [5,89; 6]

Exponentialfunktion*

Aufgabennummer: 1_435	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.1

Gegeben ist der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ durch die Punkte $P = (0|25)$ und $Q = (1|20)$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung der dargestellten Exponentialfunktion f an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

$f(x) = 25 \cdot 0{,}8^x$

oder:

$f(x) = 25 \cdot e^{\ln(0{,}8) \cdot x}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
Toleranzintervall für ln(0,8): [–0,23; –0,22]

Aufrufe eines Videos

Ein Video wurde auf eine Internetplattform hochgeladen. Zu Beginn der Beobachtung waren 500 Aufrufe zu verzeichnen. Im Zeitintervall $[0; t_1]$ wird die Anzahl der bisher erfolgten Aufrufe durch eine Exponentialfunktion beschrieben.

In der nachstehenden Tabelle sind Wertepaare dieser Exponentialfunktion angegeben.

Zeit nach Beginn der Beobachtung in h	Anzahl der Aufrufe
0	500
1	700
2	980
3	1 372
t_1	10 330

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie t_1.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$t_1 = 8{,}99...$

Ein Punkt für das richtige Berechnen von t_1.

Grundkompetenz: FA 5.2

Jahreszinssatz

Das Kapital K_0 wächst exponentiell mit dem gleichbleibenden Jahreszinssatz i.
Nach n Jahren erreicht das Kapital den Wert K_n, der mit der nachstehenden Formel berechnet werden kann.

$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$

Nach 6 Jahren hat das Kapital K_0 um insgesamt 8,62 % zugenommen.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Jahreszinssatz i.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$1{,}0862 = (1 + i)^6$
$i = 0{,}0138...$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln von *i*.

Grundkompetenz: FA 5.1

Körperliche Leistungsfähigkeit

Im Rahmen einer Studie wird jährlich die körperliche Leistungsfähigkeit bestimmter Personen untersucht. Das Ergebnis wird in Punkten angegeben. Modellhaft wird angenommen, dass diese Punktzahl mit zunehmendem Alter exponentiell abnimmt.

Lena ist eine dieser Personen. Von ihr sind folgende Daten bekannt:

Alter in Jahren	55	60
Punktzahl	1 800	1 650

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie unter Verwendung eines exponentiellen Modells, ab welchem Alter Lena voraussichtlich höchstens 1 200 Punkte erreichen wird.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

t ... Jahre ab dem Alter von 55 Jahren

$1\,650 = 1\,800 \cdot a^5$
$a = 0{,}9827...$
$1\,200 = 1\,800 \cdot 0{,}9827...^t$
$t = 23{,}29...$

Ab einem Alter von rund 78,3 Jahren wird Lena voraussichtlich höchstens 1 200 Punkte erreichen.

Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Alters, wobei auch „78 Jahre" bzw. „79 Jahre" als richtig zu werten ist.

Grundkompetenz: FA 5.2

Medikament*

Aufgabennummer: 1_864	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	

Der schmerzlindernde Wirkstoff eines Medikaments wird im Körper eines bestimmten Patienten annähernd exponentiell abgebaut. Dabei nimmt die Wirkstoffmenge pro Stunde um 8 % ab. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Wirkstoffmenge 700 Mikrogramm.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie, nach welcher Zeit (in h) die Wirkstoffmenge im Körper des Patienten auf 100 Mikrogramm gesunken ist.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$100 = 700 \cdot 0{,}92^t$

$t = 23{,}3...$ h

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Anzahl an Stunden.

Wirkstoff*

Aufgabennummer: 1_696	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.2

Die Abnahme der Menge des Wirkstoffs eines Medikaments im Blut lässt sich durch eine Exponentialfunktion modellieren.
Nach einer Stunde sind 10 % der Anfangsmenge des Wirkstoffs abgebaut worden.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie, welcher Prozentsatz der Anfangsmenge des Wirkstoffs nach insgesamt vier Stunden noch im Blut vorhanden ist!

_____________ % der Anfangsmenge

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$0{,}9^4 = 0{,}6561$

65,61 % der Anfangsmenge

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [65 %; 66 %]

Wachstum*

Aufgabennummer: 1_340	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.2

Die Funktion f beschreibt einen exponentiellen Wachstumsprozess der Form $f(t) = c \cdot a^t$ in Abhängigkeit von der Zeit t.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie für $t = 2$ und $t = 3$ die Werte der Funktion f!

t	$f(t)$
0	400
1	600
2	$f(2)$
3	$f(3)$

$f(2) =$ ______________________________

$f(3) =$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

$f(2) = 900$
$f(3) = 1\,350$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei beide Werte richtig angegeben sein müssen.

Exponentialfunktion*

Aufgabennummer: 1_648	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.3

Für eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = 5 \cdot e^{\lambda \cdot x}$ gilt: $f(x + 1) = 2 \cdot f(x)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert von λ an!

λ = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

$\lambda = \ln(2)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung (z. B. als Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.

Zellkulturen*

Aufgabennummer: 1_624	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 5.3

Im Rahmen eines biologischen Experiments werden sechs Zellkulturen günstigen und ungünstigen äußeren Bedingungen ausgesetzt, wodurch die Anzahl der Zellen entweder exponentiell zunimmt oder exponentiell abnimmt.
Dabei gibt $N_i(t)$ die Anzahl der Zellen in der jeweiligen Zellkultur t Tage nach Beginn des Experiments an ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier beschriebenen Veränderungen jeweils die zugehörige Funktionsgleichung (aus A bis F) zu!

Die Anzahl der Zellen verdoppelt sich pro Tag.	
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % zu.	
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % ab.	
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um die Hälfte ab.	

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 0{,}15^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 0{,}5^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 0{,}85^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 1{,}5^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 1{,}85^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 2^t$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Die Anzahl der Zellen verdoppelt sich pro Tag.	F
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % zu.	E
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um 85 % ab.	A
Die Anzahl der Zellen nimmt pro Tag um die Hälfte ab.	B

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 0{,}15^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 0{,}5^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 0{,}85^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 1{,}5^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 1{,}85^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 2^t$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier beschriebenen Veränderungen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Wachstum einer Population*

Aufgabennummer: 1_531	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.3

Die Größe einer Population wird in Abhängigkeit von der Zeit mithilfe der Funktion N mit $N(t) = N_0 \cdot e^{0,1188 \cdot t}$ beschrieben, wobei die Zeit t in Stunden angegeben wird. Dabei bezeichnet N_0 die Größe der Population zum Zeitpunkt $t = 0$ und $N(t)$ die Größe der Population zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie denjenigen Prozentsatz p, um den die Population pro Stunde wächst!

$p \approx$ __________ %

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

$p \approx 12{,}6\ \%$

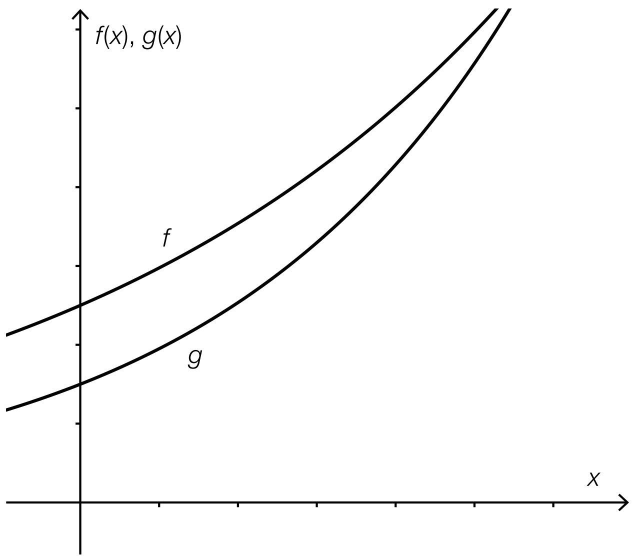
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [12 %; 13 %]

Parameter von Exponentialfunktionen*

Aufgabennummer: 1_482	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: FA 5.3

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen zweier Exponentialfunktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = c \cdot a^x$ und $g(x) = d \cdot b^x$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Für die Parameter a, b, c, d der beiden gegebenen Exponentialfunktionen gelten die Beziehungen _____①_____ und _____②_____.

①	
$c < d$	☐
$c = d$	☐
$c > d$	☐

②	
$a < b$	☐
$a = b$	☐
$a > b$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

①	
$c > d$	☒

②	
$a < b$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Exponentialfunktion*	
Aufgabennummer: 1_387	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.3

Von einer Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 25 \cdot b^x$ ($b \in \mathbb{R}^+$; $b \neq 0$; $b \neq 1$) ist folgende Eigenschaft bekannt:

Wenn x um 1 erhöht wird, sinkt der Funktionswert auf 25 % des Ausgangswertes.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Parameters b an!

b = ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$b = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jede der angeführten Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) ist als richtig zu werten.

Eigenschaften einer Exponentialfunktion*

Aufgabennummer: 1_459	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☒
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 50 \cdot 1{,}97^x$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden auf f zutreffenden Aussagen an.

Der Graph der Funktion f verläuft durch den Punkt $P = (50 \mid 0)$.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[0; 5]$ streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[0; 5]$ rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).	☐
Wenn man den Wert des Arguments x um 5 vergrößert, wird der Funktionswert 50-mal so groß.	☐
Wenn man den Wert des Arguments x um 1 vergrößert, wird der zugehörige Funktionswert um 97 % größer.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016, adaptiert

Lösungserwartung

Die Funktion f ist im Intervall [0; 5] streng monoton steigend.	☒
Wenn man den Wert des Arguments x um 1 vergrößert, wird der zugehörige Funktionswert um 97 % größer.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Funktion mit einer besonderen Eigenschaft*

Aufgabennummer: 1_720	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.4

Für eine nicht konstante Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $f(x + 1) = 3 \cdot f(x)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung einer solchen Funktion f an.

$f(x) =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

mögliche Funktionsgleichung:

$f(x) = 3^x$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Gleichung.
Jede Gleichung einer Funktion, die sich auf $f(x) = a \cdot 3^x$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zurückführen lässt, ist als richtig zu werten.

Exponentialfunktion*

Aufgabennummer: 1_339	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: FA 5.4

Eine reelle Funktion f mit der Gleichung $f(x) = c \cdot a^x$ ist eine Exponentialfunktion, für deren reelle Parameter c und a gilt: $c \neq 0$, $a > 1$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf diese Exponentialfunktion f und alle Werte $k, h \in \mathbb{R}$, $k > 1$ zutreffen!

$f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$	☐
$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$	☐
$f(x + 1) = a \cdot f(x)$	☐
$f(0) = 0$	☐
$f(x + h) = f(x) + f(h)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

$\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$	☒
$f(x + 1) = a \cdot f(x)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Halbwertszeit

Die Masse einer radioaktiven Substanz in Abhängigkeit von der Zeit t kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Dabei gilt:

$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

$N(t)$ ... vorhandene Masse der radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t
N_0 ... vorhandene Masse der radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt $t = 0$
$k \in \mathbb{R}^+$ ... Zerfallskonstante

Mit τ wird die Halbwertszeit der radioaktiven Substanz bezeichnet.
Mit t^* wird ein beliebiger Zeitpunkt bezeichnet.
Es gilt: $t^* \neq \tau$ und $t^* > 0$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie den zu $N(t^* + \tau)$ äquivalenten Ausdruck an. *[1 aus 6]*

$2 \cdot N_0$	☐
$N(\tau)$	☐
$N\left(\frac{1}{2} \cdot t^*\right)$	☐
$2 \cdot N(\tau)$	☐
$N(2 \cdot t^*)$	☐
$\frac{1}{2} \cdot N(t^*)$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\frac{1}{2} \cdot N(t^*)$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Verdoppelungszeit

Die jeweilige Anzahl der Bakterien von sechs Bakterienkulturen wächst exponentiell. Dabei ist die jeweilige Verdoppelungszeit unterschiedlich.

Die Anzahl der Bakterien der jeweiligen Bakterienkultur wird in Abhängigkeit von der Zeit t durch $N_i\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+, t \mapsto N_i(t)$ mit $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ modelliert (t in Stunden).

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Aussagen über die Verdoppelungszeiten jeweils die zugehörige Funktionsgleichung aus A bis F zu.

Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 1-mal pro Stunde.	
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 2-mal pro Stunde.	
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 3-mal pro Stunde.	
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 4-mal pro Stunde.	

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 1{,}5^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 4^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 2^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 16^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 3^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 8^t$

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 1-mal pro Stunde.	C
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 2-mal pro Stunde.	B
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 3-mal pro Stunde.	F
Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich 4-mal pro Stunde.	D

A	$N_1(t) = N_1(0) \cdot 1{,}5^t$
B	$N_2(t) = N_2(0) \cdot 4^t$
C	$N_3(t) = N_3(0) \cdot 2^t$
D	$N_4(t) = N_4(0) \cdot 16^t$
E	$N_5(t) = N_5(0) \cdot 3^t$
F	$N_6(t) = N_6(0) \cdot 8^t$

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Halbwertszeit

Die Halbwertszeit einer bestimmten radioaktiven Substanz beträgt T Jahre.
Die nach t Jahren vorhandene Menge der radioaktiven Substanz wird mit $m(t)$ bezeichnet.
Es gilt: $m(0) > 0$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an. *[2 aus 5]*

$m(T) = \frac{1}{2} \cdot m(0)$	☐
$m(2 \cdot T) = 0$	☐
$m(3 \cdot T) = \frac{7}{8} \cdot m(0)$	☐
$m(4 \cdot T) = \frac{1}{4} \cdot m(T)$	☐
$m(5 \cdot T) = \frac{1}{2} \cdot m(4 \cdot T)$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$m(T) = \frac{1}{2} \cdot m(0)$	☒
$m(5 \cdot T) = \frac{1}{2} \cdot m(4 \cdot T)$	☒

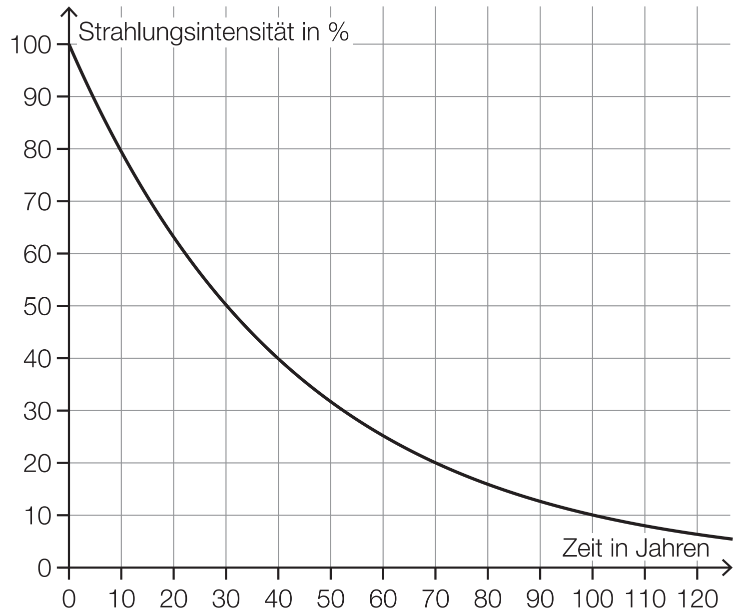
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Halbwertszeit*

Aufgabennummer: 1_865	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: halboffenes Format

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Strahlungsintensität einer bestimmten radioaktiven Substanz in Abhängigkeit von der Zeit.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Halbwertszeit T der Strahlungsintensität dieser radioaktiven Substanz an.

T = ______________________ Jahre

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$T = 30$ Jahre

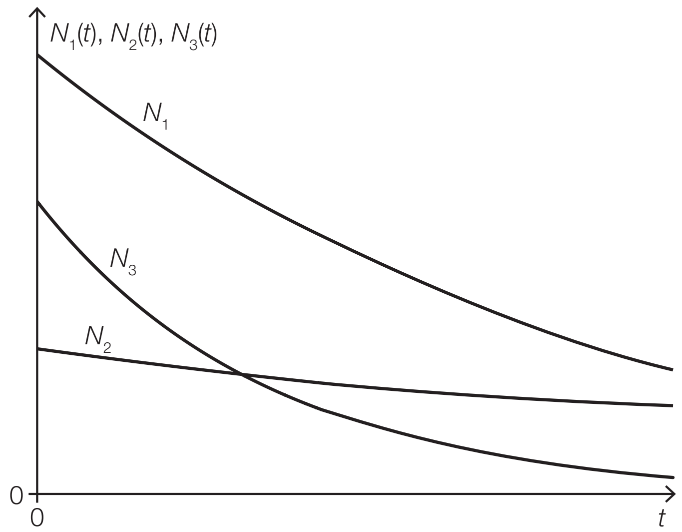
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes von T.
Toleranzintervall: [29 Jahre; 31 Jahre]

Halbwertszeiten von Zerfallsprozessen*

Aufgabennummer: 1_840	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Die drei Exponentialfunktionen N_1, N_2 und N_3 beschreiben jeweils einen Zerfallsprozess mit den zugehörigen Halbwertszeiten τ_1, τ_2 und τ_3.
Nachstehend sind Ausschnitte der Graphen dieser drei Funktionen abgebildet.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie die Halbwertszeiten τ_1, τ_2 und τ_3 der Größe nach. Beginnen Sie mit der kürzesten Halbwertszeit.

________ < ________ < ________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$\tau_3 < \tau_1 < \tau_2$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ordnen der Halbwertszeiten.
Werden statt der Bezeichnungen der Halbwertszeiten die Bezeichnungen der zugehörigen Exponentialfunktionen verwendet, ist dies ebenso als richtig zu werten.

Halbwertszeit*

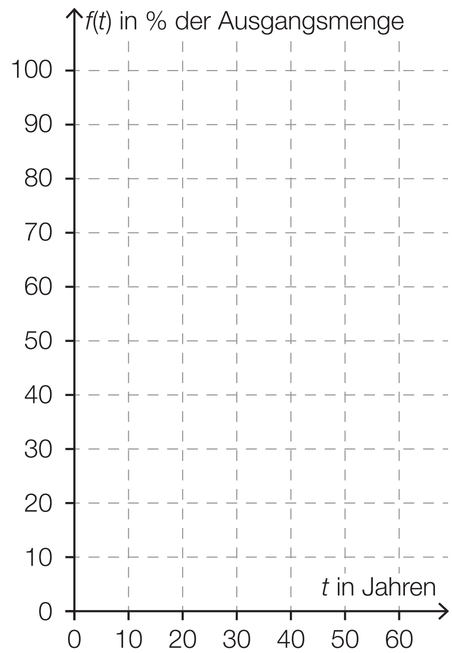
Aufgabennummer: 1_816	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 5.5

Das radioaktive Isotop ^{137}Cs (Cäsium) hat eine Halbwertszeit von etwa 30 Jahren.

Die Funktion f gibt in Abhängigkeit von der Zeit t an, wie viel Prozent der Ausgangsmenge an ^{137}Cs noch vorhanden sind (t in Jahren, $f(t)$ in % der Ausgangsmenge).
Die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Menge an ^{137}Cs wird als *Ausgangsmenge* bezeichnet.

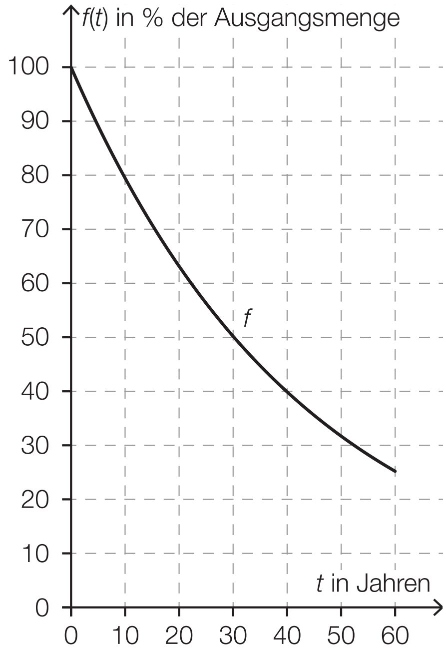
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem im Zeitintervall [0; 60] den Graphen von f ein.



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für den richtigen Graphen von f, wobei der Graph eine Exponentialfunktion darstellen und durch die Punkte $(0|100)$, $(30|50)$ und $(60|25)$ verlaufen muss.

Halbwertszeit*

Aufgabennummer: 1_792	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5

Die Funktion f mit $f(t) = 80 \cdot b^t$ mit $b \in \mathbb{R}^+$ beschreibt die Masse $f(t)$ einer radioaktiven Substanz in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $f(t)$ in mg). Die Halbwertszeit der radioaktiven Substanz beträgt 4 h.
Eine Messung beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie diejenige Masse (in mg) der radioaktiven Substanz, die nach den ersten 3 Halbwertszeiten vorhanden ist.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

10 mg

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „mg“ nicht angeführt sein muss.

Anzahl von Tieren*

Aufgabennummer: 1_768	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5

Man nimmt an, dass sich die Anzahl der Tiere einer bestimmten Tierart auf der Erde um 1,8 % pro Jahr erhöht.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie diejenige Zeitdauer in Jahren, innerhalb der sich die Anzahl der Tiere dieser Tierart auf der Erde verdoppelt.

Zeitdauer: ca. ____________ Jahre

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$1{,}018^n = 2$
$n = 38{,}8... \approx 39$

Zeitdauer: ca. 39 Jahre

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Verzinsung*

Aufgabennummer: 1_744	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5

Ein Kapital K_0 wird auf einem Sparbuch mit 1 % p.a. (pro Jahr) verzinst.

Für die nachstehende Aufgabenstellung gilt die Annahme, dass allfällige Steuern oder Gebühren nicht gesondert berücksichtigt werden müssen und dass keine weiteren Einzahlungen oder Auszahlungen erfolgen.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie, in wie vielen Jahren sich das Kapital K_0 bei gleichbleibendem Zinssatz verdoppelt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot 1{,}01^n$
$2 = 1{,}01^n$
$\ln(2) = \ln(1{,}01) \cdot n$
$n = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}01)} = 69{,}66... \approx 69{,}7$

Das Kapital K_0 verdoppelt sich nach ca. 69,7 Jahren.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Jahr" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [69 Jahre; 70 Jahre]

Halbwertszeit*

Aufgabennummer: 1_649	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5

Die Masse $m(t)$ einer radioaktiven Substanz kann durch eine Exponentialfunktion m in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.
Zu Beginn einer Messung sind 100 mg der Substanz vorhanden, nach vier Stunden misst man noch 75 mg dieser Substanz.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Halbwertszeit t_H dieser radioaktiven Substanz in Stunden!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

$t_H \approx 9{,}64$ Stunden

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Stunden" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [9,6 Stunden; 10 Stunden]

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

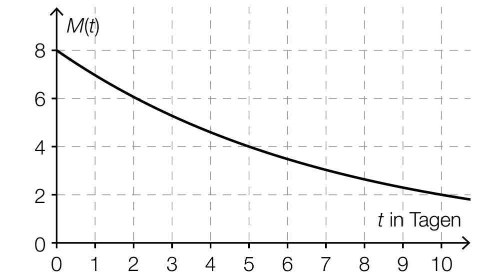
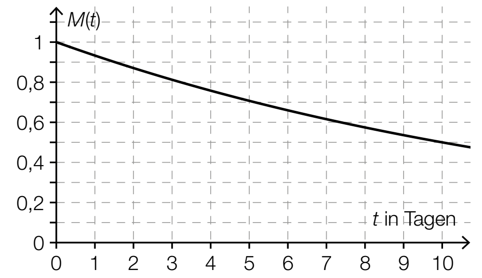
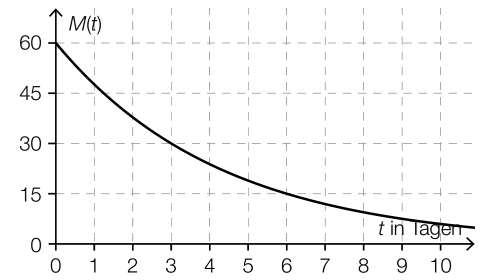
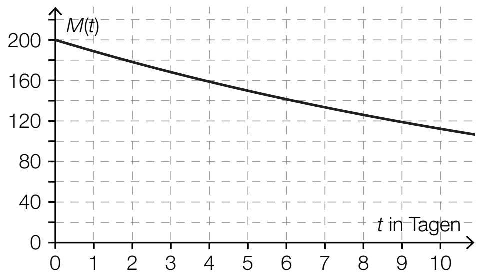
Halbwertszeiten*

Aufgabennummer: 1_600	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 5.5

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen von Exponentialfunktionen, die jeweils die Abhängigkeit der Menge einer radioaktiven Substanz von der Zeit beschreiben.
Dabei gibt $M(t)$ die Menge (in mg) zum Zeitpunkt t (in Tagen) an.

Aufgabenstellung:

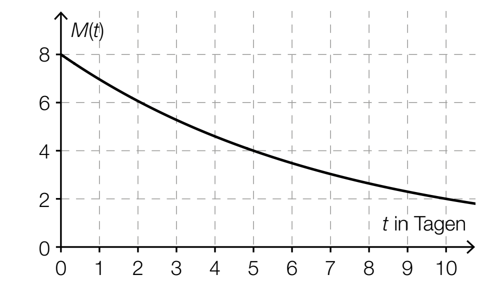
Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die entsprechende Halbwertszeit (aus A bis F) zu!

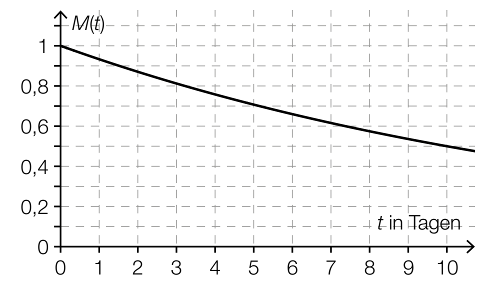
A	1 Tag
B	2 Tage
C	3 Tage
D	5 Tage
E	10 Tage
F	mehr als 10 Tage

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

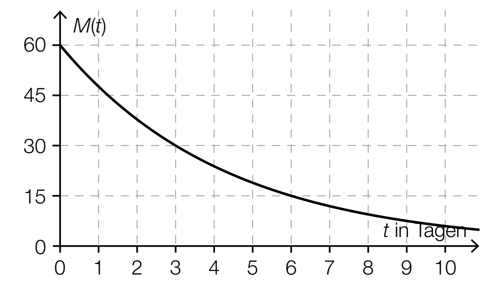
Lösungserwartung



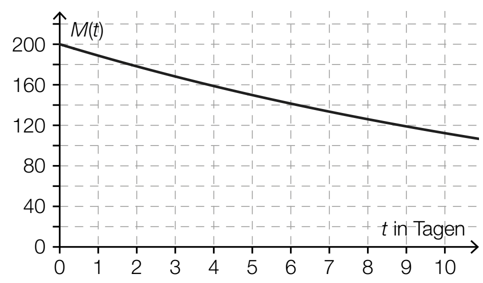
D



E



C



F

A	1 Tag
B	2 Tage
C	3 Tage
D	5 Tage
E	10 Tage
F	mehr als 10 Tage

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Dicke einer Bleischicht*

Aufgabennummer: 1_576	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5

Die Intensität elektromagnetischer Strahlung nimmt bei Durchdringung eines Körpers exponentiell ab.

Die Halbwertsdicke eines Materials ist diejenige Dicke, nach deren Durchdringung die Intensität der Strahlung auf die Hälfte gesunken ist. Die Halbwertsdicke von Blei liegt für die beobachtete Strahlung bei 0,4 cm.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie diejenige Dicke d, die eine Bleischicht haben muss, damit die Intensität auf 12,5 % der ursprünglichen Intensität gesunken ist!

d = ____________________________________ cm

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$d = 1{,}2$ cm

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Halbwertszeit von Cobalt-60*

Aufgabennummer: 1_554	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5

Das radioaktive Isotop Cobalt-60 wird unter anderem zur Konservierung von Lebensmitteln und in der Medizin verwendet.
Das Zerfallsgesetz für Cobalt-60 lautet $N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}13149 \cdot t}$ mit t in Jahren; dabei bezeichnet N_0 die vorhandene Menge des Isotops zum Zeitpunkt $t = 0$ und $N(t)$ die vorhandene Menge zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Halbwertszeit von Cobalt-60!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 \cdot e^{-0{,}13149 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 5{,}27$$

Die Halbwertszeit von Cobalt-60 beträgt ca. 5,27 Jahre.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Jahre“ nicht angegeben sein muss.
Toleranzintervall: [5 Jahre; 5,5 Jahre]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bienenbestand*	
Aufgabennummer: 1_507	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5

Wegen eines Umweltgifts nimmt der Bienenbestand eines Imkers täglich um einen fixen Prozentsatz ab. Der Imker stellt fest, dass er innerhalb von 14 Tagen einen Bestandsverlust von 50 % erlitten hat.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den täglichen relativen Bestandsverlust in Prozent!

täglicher relativer Bestandsverlust: ___________ %

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$N_0 \cdot 0{,}5 = N_0 \cdot a^{14}$
$0{,}5 = a^{14} \Rightarrow a \approx 0{,}9517$

täglicher relativer Bestandsverlust: 4,83 %

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [4,8 %; 4,9 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Technetium*

Aufgabennummer: 1_411	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 5.5

Für eine medizinische Untersuchung wird das radioaktive Isotop ${}^{99m}_{43}\mathrm{Tc}$ (Technetium) künstlich hergestellt. Dieses Isotop hat eine Halbwertszeit von 6,01 Stunden.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie lange es dauert, bis von einer bestimmten Ausgangsmenge Technetiums nur noch ein Viertel vorhanden ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

Es dauert 12,02 Stunden.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Stunden“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [11,55; 12,06]

Bevölkerungszahl

Es wurde erhoben, wie sich die Bevölkerungszahl in verschiedenen Städten in den vergangenen fünf Jahren verändert hat.
Zwei der unten angeführten Situationen können als exponentielles Wachstum der jeweiligen Bevölkerungszahl beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Situationen an, die jeweils mithilfe einer Exponentialfunktion angemessen beschrieben werden können. *[2 aus 5]*

Die Bevölkerungszahl nahm jedes Jahr um $\frac{1}{10}$ der Bevölkerungszahl des jeweiligen Vorjahres zu.	☐
Die Bevölkerungszahl hat im ersten Jahr um 10 000, im zweiten um 20 000, im dritten um 30 000, im vierten um 40 000 und im letzten Jahr um 50 000 zugenommen.	☐
Die Bevölkerungszahl war jedes Jahr um 5 % größer als im jeweiligen Vorjahr.	☐
Die Bevölkerungszahl war jedes Jahr um 20 000 größer als im jeweiligen Vorjahr.	☐
Die Bevölkerungszahl war in den ersten zwei Jahren jedes Jahr um 5 % größer als im jeweiligen Vorjahr, dann jedes Jahr um 15 % größer als im jeweiligen Vorjahr.	☐

[0/1 P.]

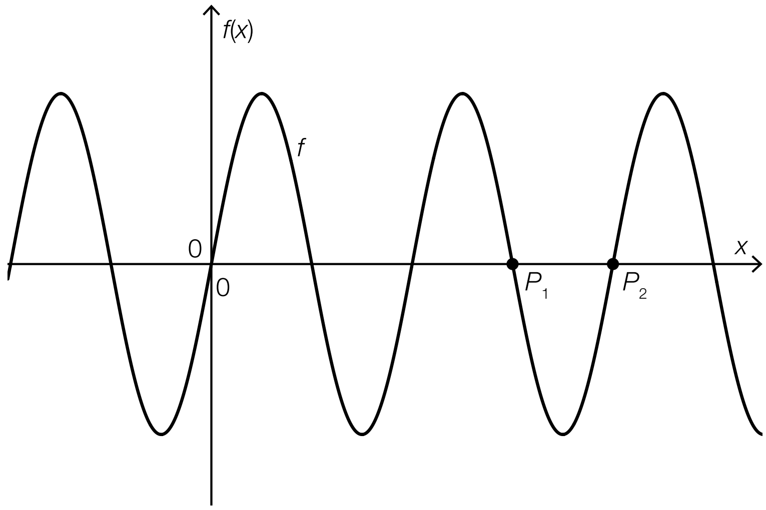
Möglicher Lösungsweg

Die Bevölkerungszahl nahm jedes Jahr um $\frac{1}{10}$ der Bevölkerungszahl des jeweiligen Vorjahres zu.	☒
Die Bevölkerungszahl war jedes Jahr um 5 % größer als im jeweiligen Vorjahr.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Sinusfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.



Die Punkte $P_1 = (x_1 \mid 0)$ und $P_2 = (x_2 \mid 0)$ mit $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4}$ und $x_2 = \pi$ liegen auf dem Graphen von f.

Es gilt: $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = -3$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie a und b.

a = ______________________

b = ______________________

[0/½/1 P.]

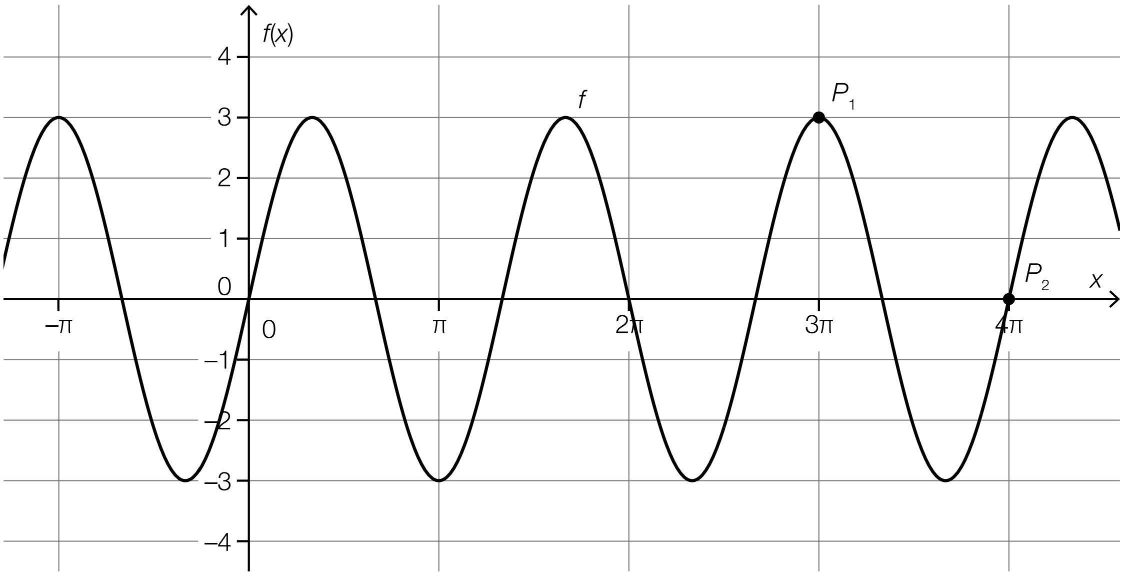
Möglicher Lösungsweg

$a = 3$
$b = 4$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln beider Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Graph einer Sinusfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Sinusfunktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.
Der Graph von f verläuft durch die Punkte $P_1 = (3\pi|3)$ und $P_2 = (4\pi|0)$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie a und b an.

a = ______________________

b = ______________________

[0 / ½ / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

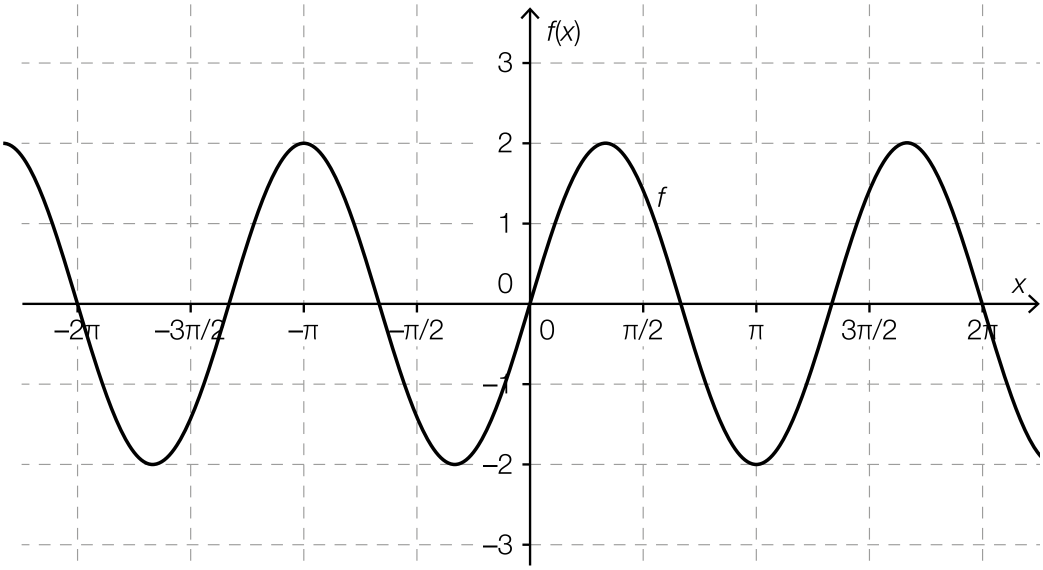
$a = 3$
$b = 1{,}5$

Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Parameter einer Sinusfunktion*

Aufgabennummer: 1_601	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 6.1

Gegeben ist der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte a und b an!

a = ____________________

b = ____________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

$a = 2$
$b = 1,5$

Lösungsschlüssel

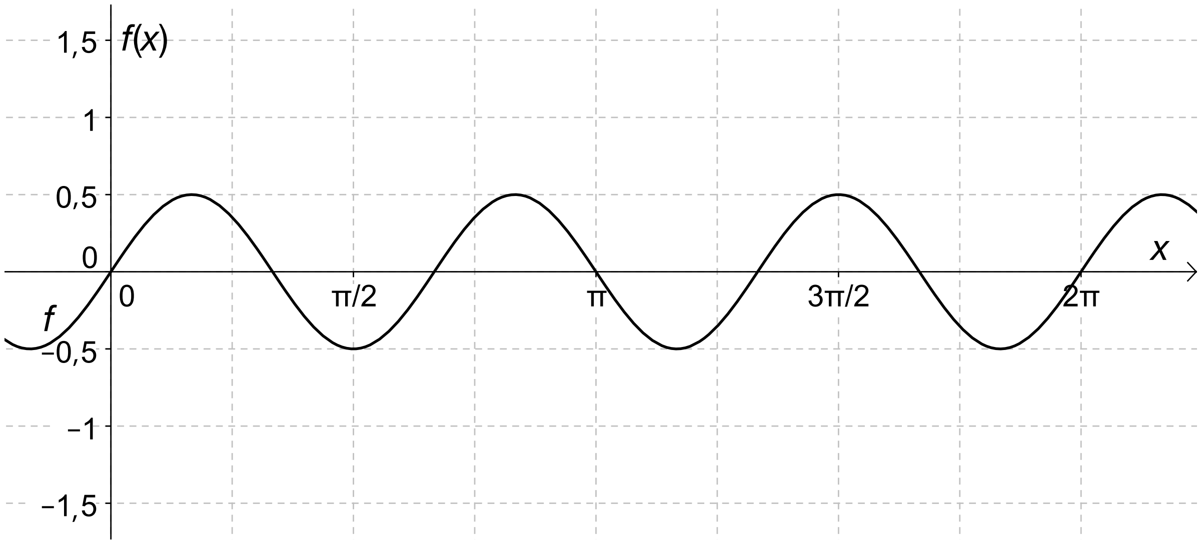
Ein Punkt für die Angabe der korrekten Werte beider Parameter.
Toleranzintervall für a: [1,9; 2,1]
Toleranzintervall für b: [1,4; 1,6]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sinusfunktion*

Aufgabennummer: 1_410	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 6.1

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die für den abgebildeten Graphen passenden Parameterwerte von f an!

a = ______________________

b = ______________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

$a = 0{,}5$
$b = 3$

oder:

$a = -0{,}5$
$b = -3$

Lösungsschlüssel

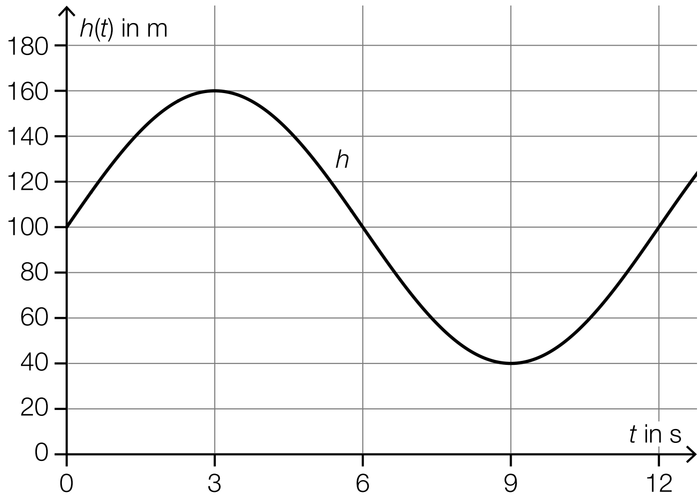
Ein Punkt für eine korrekte Angabe beider Parameterwerte.
Toleranzintervall für a: [0,48; 0,52] bzw. [–0,52; –0,48]
Toleranzintervall für b: [2,9; 3,1] bzw. [–3,1; –2,9]

Windrad

Die Spitzen der Rotorblätter von Windrädern bewegen sich auf einer Kreisbahn, deren Durchmesser als *Rotordurchmesser* bezeichnet wird.

Die Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto h(t)$ beschreibt modellhaft die Höhe der Spitze eines der Rotorblätter eines bestimmten Windrads über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t (t in s, $h(t)$ in m).

Der Funktionsgraph von h ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung den Rotordurchmesser sowie die Zeit, die ein Rotorblatt für eine volle Umdrehung benötigt, an.

Rotordurchmesser: ____________________ m

Zeit für eine volle Umdrehung: ____________________ s

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

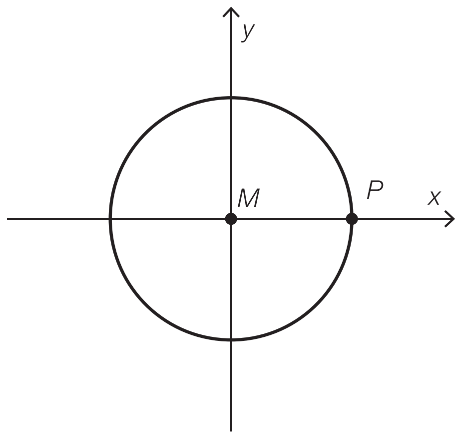
Rotordurchmesser: 120 m
Zeit für eine volle Umdrehung: 12 s

Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

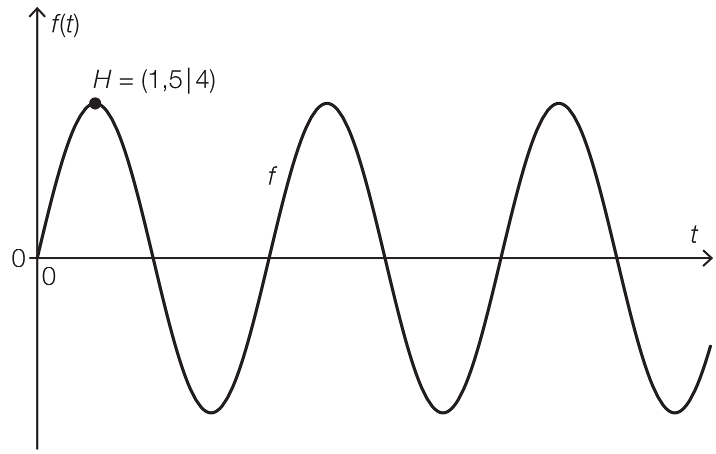
Bewegung auf einem Kreis*

Aufgabennummer: 1_769	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 6.2

Ein Punkt P bewegt sich auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M = (0|0)$ mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn.
Zu Beginn der Bewegung (zum Zeitpunkt $t = 0$) liegt der Punkt P auf der positiven x-Achse wie in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



Die Funktion f ordnet der Zeit t die zweite Koordinate $f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ des Punktes P zur Zeit t zu (t in s, $f(t)$ in dm, $a, b \in \mathbb{R}^+$). Der in der nachstehenden Abbildung dargestellte Graph von f verläuft durch den Punkt H, wobei gilt: $f'(1{,}5) = 0$.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Radius des Kreises und die Umlaufzeit des Punktes P (für eine Umrundung).

Radius des Kreises: ____________ dm

Umlaufzeit: ____________ s

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

Radius des Kreises: 4 dm

Umlaufzeit: 6 s

Lösungsschlüssel

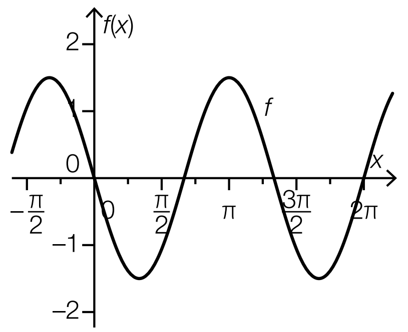
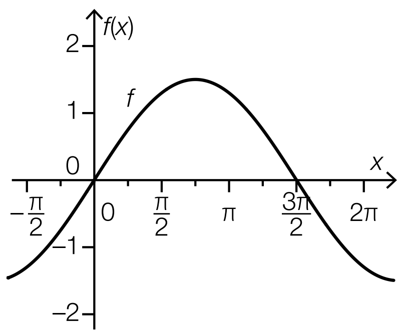
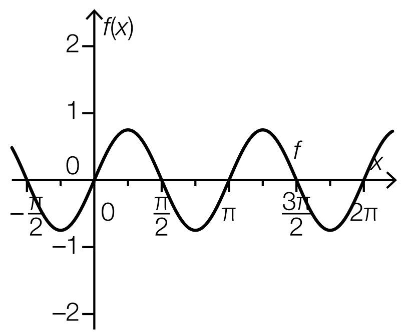
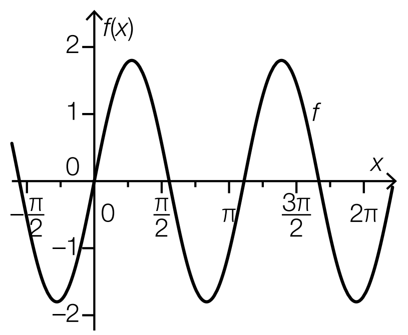
Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Ist nur einer der angegebenen Werte richtig, ist ein halber Punkt zu geben.

Sinusfunktionen

Vier Graphen von Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^+$ sind in den unten stehenden Abbildungen dargestellt.

Aufgabenstellung:

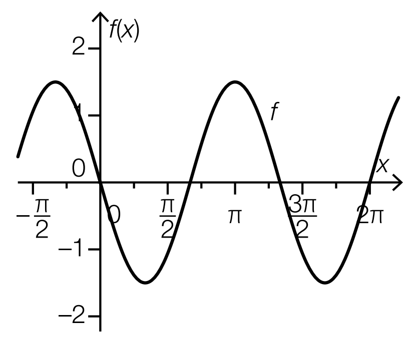
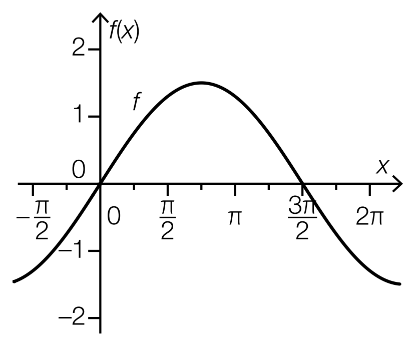
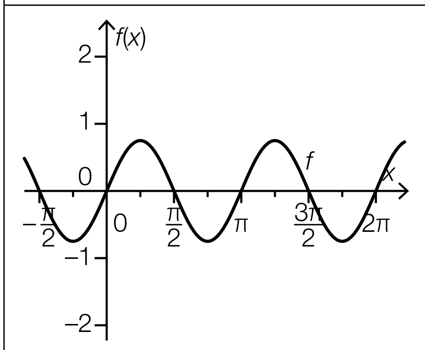
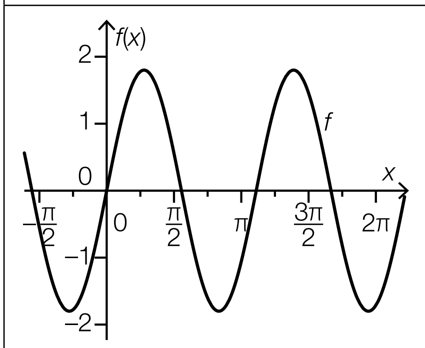
Ordnen Sie den vier Graphen jeweils die passende Bedingung für a und b aus A bis F zu.

A	$a < 0$ und $b < 1$
B	$a < 0$ und $b > 1$
C	$0 < a < 1$ und $b < 1$
D	$0 < a < 1$ und $b > 1$
E	$a > 1$ und $b < 1$
F	$a > 1$ und $b > 1$

[0 / ½ / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

	B
	E
	D
	F

A	$a < 0$ und $b < 1$
B	$a < 0$ und $b > 1$
C	$0 < a < 1$ und $b < 1$
D	$0 < a < 1$ und $b > 1$
E	$a > 1$ und $b < 1$
F	$a > 1$ und $b > 1$

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Eigenschaften einer Sinusfunktion

Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden auf die Funktion *f* zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Wenn *b* größer wird, dann wird die (kürzeste) Periodenlänge größer.	☐
Wenn *a* kleiner wird, dann wird die (kürzeste) Periodenlänge größer.	☐
Wenn *a* kleiner wird, dann wird die Anzahl der Nullstellen im Intervall $[0; 2 \cdot \pi]$ kleiner.	☐
Wenn *a* größer wird, dann wird die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert größer.	☐
Wenn *b* größer wird, dann wird der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen kleiner.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Wenn *a* größer wird, dann wird die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert größer.	☒
Wenn *b* größer wird, dann wird der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen kleiner.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Töne

Die Funktionen f, g und h beschreiben jeweils in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) Schwingungen, die Töne erzeugen.

Dabei gilt:

$f(t) = \sin(600 \cdot t)$

$g(t) = \frac{5}{4} \cdot \sin(800 \cdot t)$

$h(t) = \frac{6}{5} \cdot \sin(500 \cdot t)$

Die Lautstärke eines Tons ist umso höher, je größer die Amplitude (maximale Auslenkung) der zugehörigen Schwingung ist.
Ein Ton ist umso höher, je höher die Frequenz (Anzahl der Schwingungen pro Sekunde) der zugehörigen Schwingung ist.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Schwingung, die den Ton mit der höchsten Lautstärke erzeugt, wird durch die Funktion ____①____ beschrieben;
die Schwingung, die den tiefsten Ton erzeugt, wird durch die Funktion ____②____ beschrieben.

①	
f	☐
g	☐
h	☐

②	
f	☐
g	☐
h	☐

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

①	
g	☒

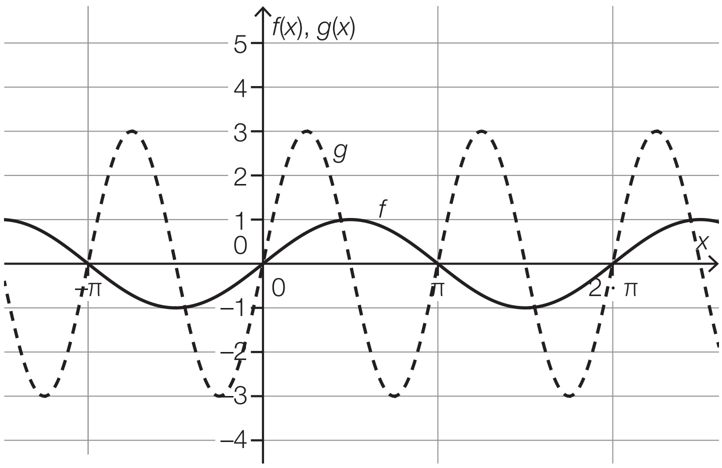
②	
h	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

Parameter einer Sinusfunktion*

Aufgabennummer: 1_386	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen von zwei Sinusfunktionen f und g der Form $a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+\setminus\{0\}$.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Der Parameter a ist bei f dreimal so groß wie bei g.	☐
Würde man den Parameter b bei f verdreifachen, so wäre der neue Graph mit jenem von g deckungsgleich.	☐
Für den Parameter b von f gilt: $b = 1$.	☐
Der Parameter b ist bei g doppelt so groß wie bei f.	☐
Eine Veränderung des Parameters a bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Funktion in senkrechter Richtung.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015, adaptiert

Lösungserwartung

Für den Parameter b von f gilt: $b = 1$.	☒
Der Parameter b ist bei g doppelt so groß wie bei f.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

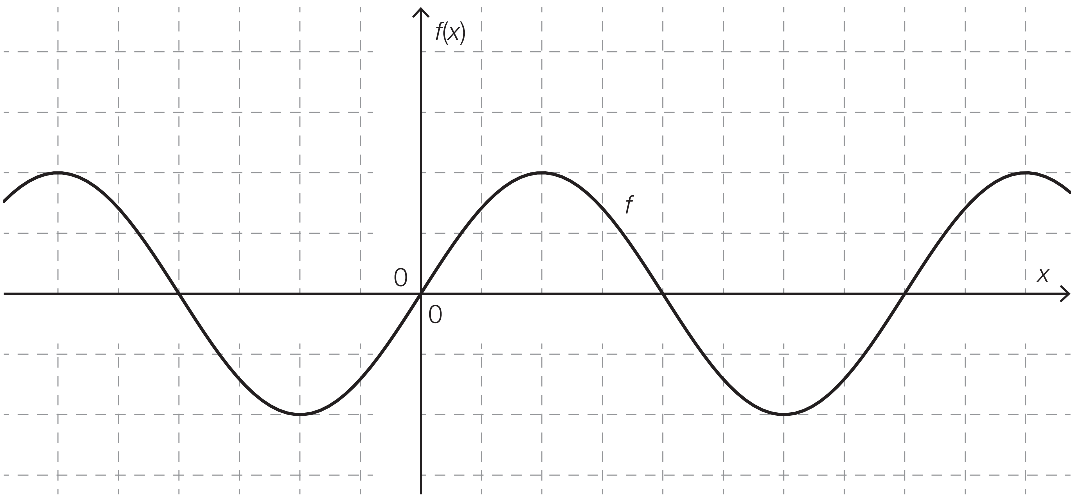
Sinusfunktion*

Aufgabennummer: 1_745	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 6.3

Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{b}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.

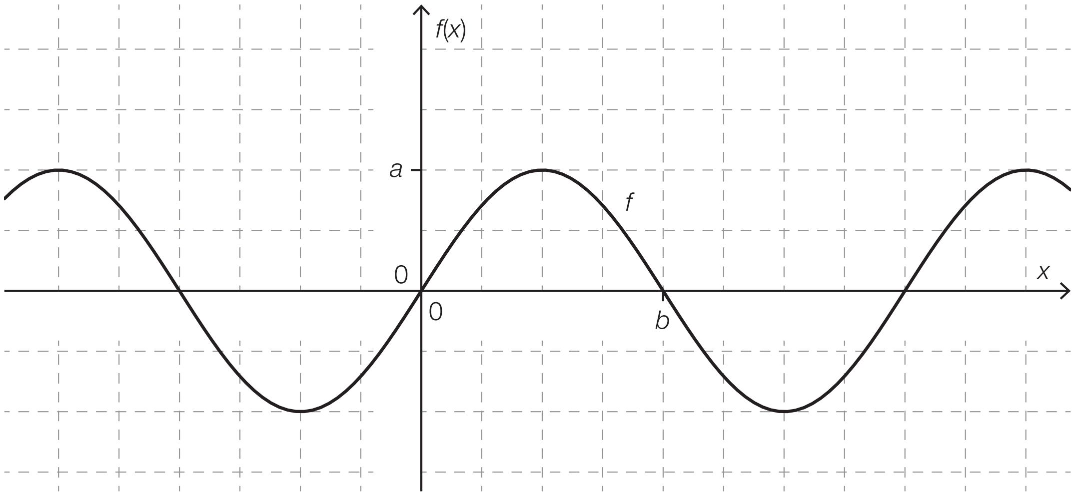
Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie in der nachstehenden Abbildung *a* und *b* auf der jeweils entsprechenden Achse so, dass der abgebildete Graph dem Graphen der Funktion *f* entspricht.



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

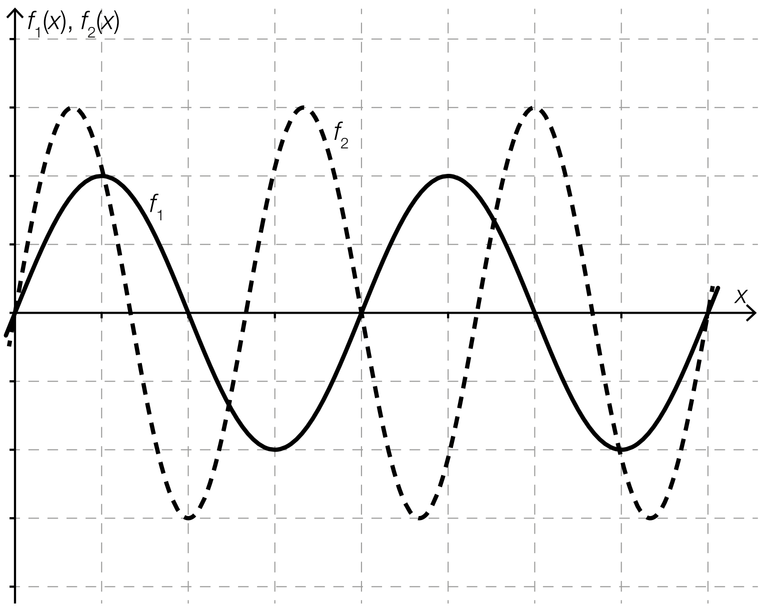
Ein Punkt für die richtige Ergänzung von a und b.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Graphen zweier Winkelfunktionen*

Aufgabennummer: 1_697	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: FA 6.3

Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = a_1 \cdot \sin(b_1 \cdot x)$ sowie $f_2(x) = a_2 \cdot \sin(b_2 \cdot x)$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Für die Parameterwerte gilt ___①___ und ___②___.

①	
$a_2 < a_1$	☐
$a_1 \leq a_2 \leq 2 \cdot a_1$	☐
$a_2 > 2 \cdot a_1$	☐

②	
$b_2 < b_1$	☐
$b_1 \leq b_2 \leq 2 \cdot b_1$	☐
$b_2 > 2 \cdot b_1$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

①	
$a_1 \leq a_2 \leq 2 \cdot a_1$	☒

②	
$b_1 \leq b_2 \leq 2 \cdot b_1$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist. Ist nur für eine der beiden Lücken der richtige Satzteil angekreuzt, ist ein halber Punkt zu geben.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Sinusfunktion*

Aufgabennummer: 1_625	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 6.3

Für $a, b \in \mathbb{R}^+$ sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Die beiden nachstehenden Eigenschaften der Funktion f sind bekannt:

- Die (kleinste) Periode der Funktion f ist π.
- Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert von f beträgt 6.

Aufgabenstellung:

Geben Sie a und b an!

a = ____________

b = ____________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

$a = 3$
$b = 2$

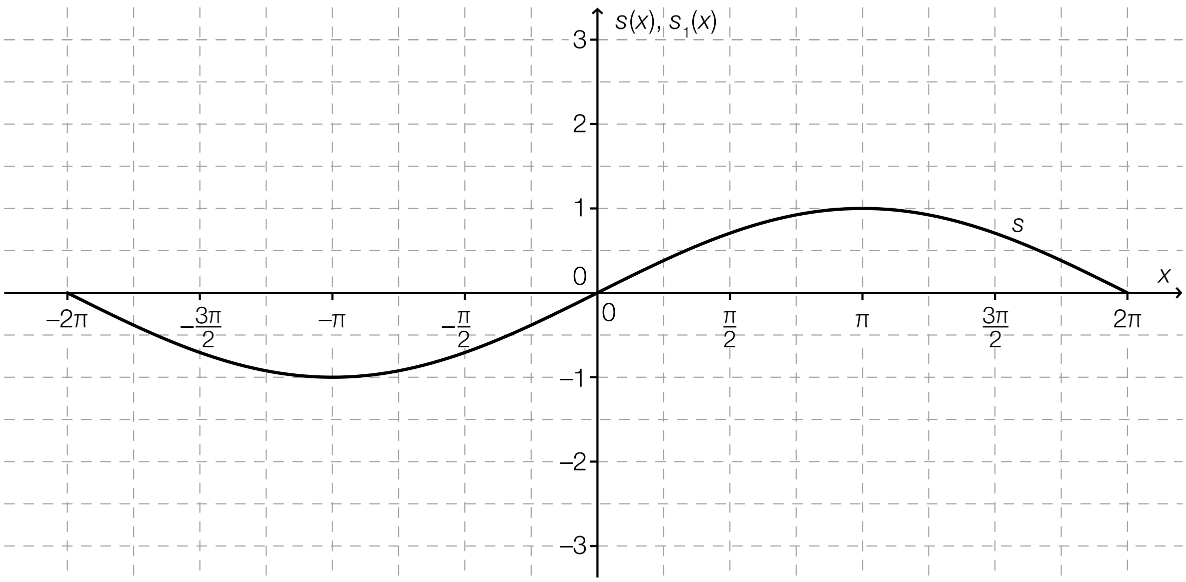
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

Parameter einer Sinusfunktion*

Aufgabennummer: 1_458	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: FA 6.3

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion s mit der Gleichung $s(x) = c \cdot \sin(d \cdot x)$ mit $c, d \in \mathbb{R}^+$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.

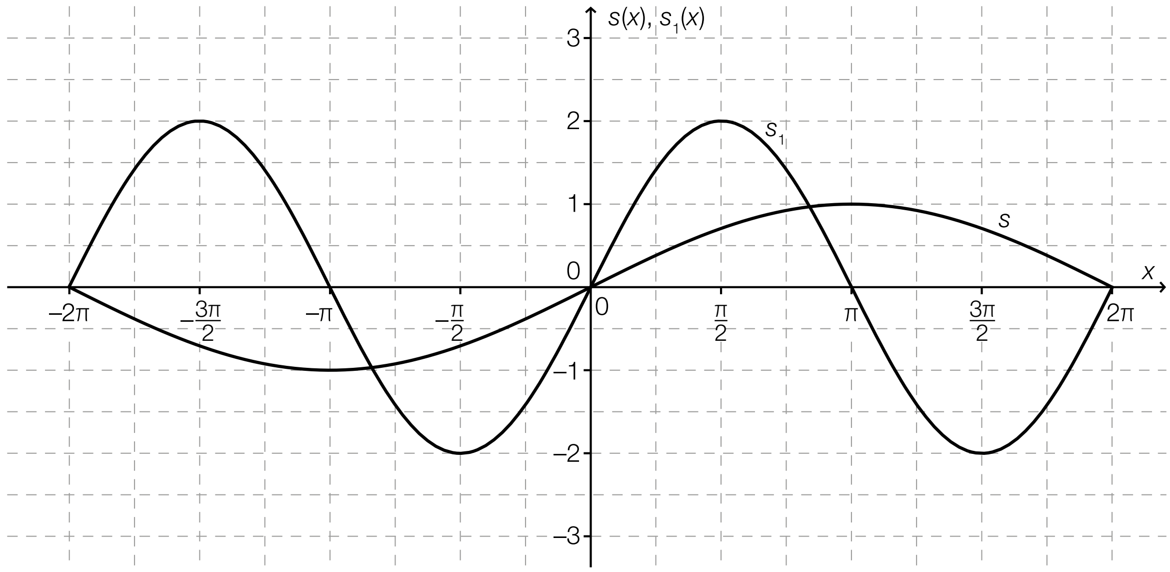


Aufgabenstellung:

Erstellen Sie im obigen Koordinatensystem eine Skizze eines möglichen Funktionsgraphen der Funktion s_1 mit $s_1(x) = 2c \cdot \sin(2d \cdot x)$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Skizze, wobei der Verlauf des Graphen der Funktion s_1 mit der Funktionsgleichung $s_1(x) = 2 \cdot \sin(x)$ erkennbar sein muss.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

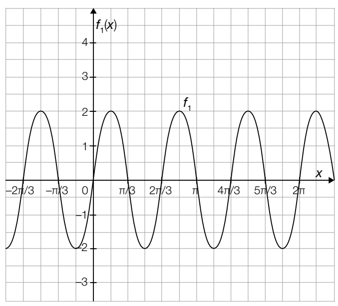
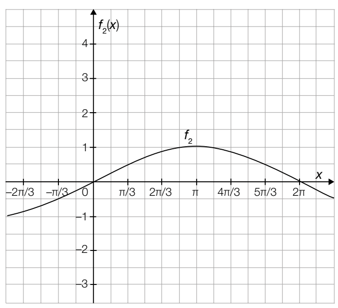
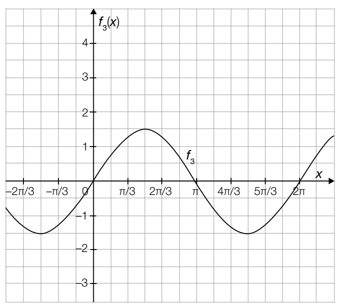
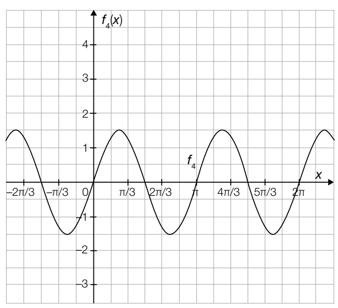
Sinusfunktion*

Aufgabennummer: 1_434	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: FA 6.3

Gegeben sind die Graphen von vier Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

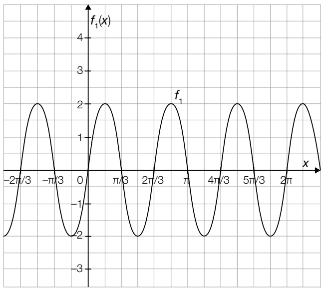
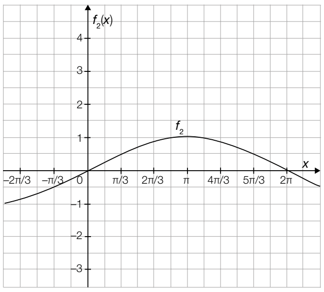
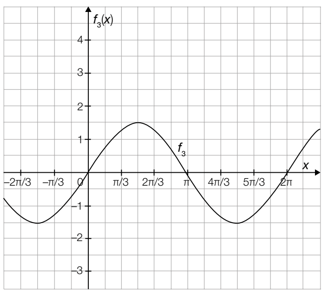
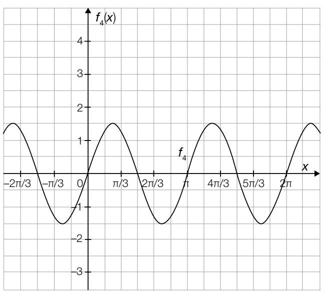
Ordnen Sie jedem Graphen den dazugehörigen Funktionsterm (aus A bis F) zu!

A	$\sin(x)$
B	$1{,}5 \cdot \sin(x)$
C	$\sin(0{,}5x)$
D	$1{,}5 \cdot \sin(2x)$
E	$2 \cdot \sin(0{,}5x)$
F	$2 \cdot \sin(3x)$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

	F
	C
	B
	D

A	$\sin(x)$
B	$1{,}5 \cdot \sin(x)$
C	$\sin(0{,}5x)$
D	$1{,}5 \cdot \sin(2x)$
E	$2 \cdot \sin(0{,}5x)$
F	$2 \cdot \sin(3x)$

Lösungsschlüssel

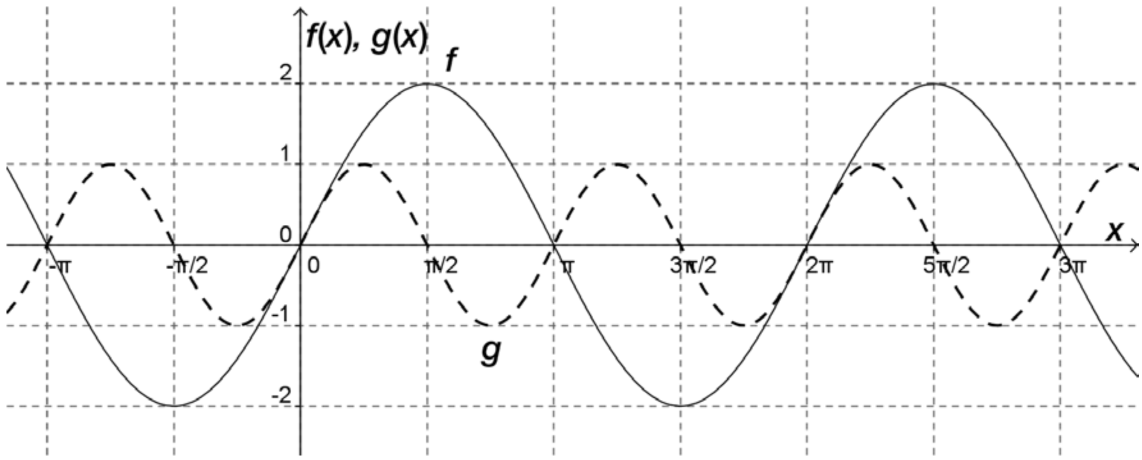
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sinusfunktion*

Aufgabennummer: 1_338	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: FA 6.3

Im unten stehenden Diagramm sind die Graphen zweier Funktionen *f* und *g* dargestellt.



Die Funktion *f* hat die Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit den reellen Parametern *a* und *b*. Wenn diese Parameter in entsprechender Weise verändert werden, erhält man die Funktion *g*.

Aufgabenstellung:

Wie müssen die Parameter *a* und *b* verändert werden, um aus *f* die Funktion *g* zu erhalten?

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Um den Graphen von *g* zu erhalten, muss *a* _____①_____ und *b* _____②_____.

①	
verdoppelt werden	☐
halbiert werden	☐
gleich bleiben	☐

②	
verdoppelt werden	☐
halbiert werden	☐
gleich bleiben	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

①	
halbiert werden	☒

②	
verdoppelt werden	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Periodenlänge

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{c} \cdot x\right)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$.

Die (kleinste) Periodenlänge von f ist $\frac{3}{2}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie c.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$\frac{3}{2} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{\pi}{c}}$$

$$c = \frac{3}{4}$$

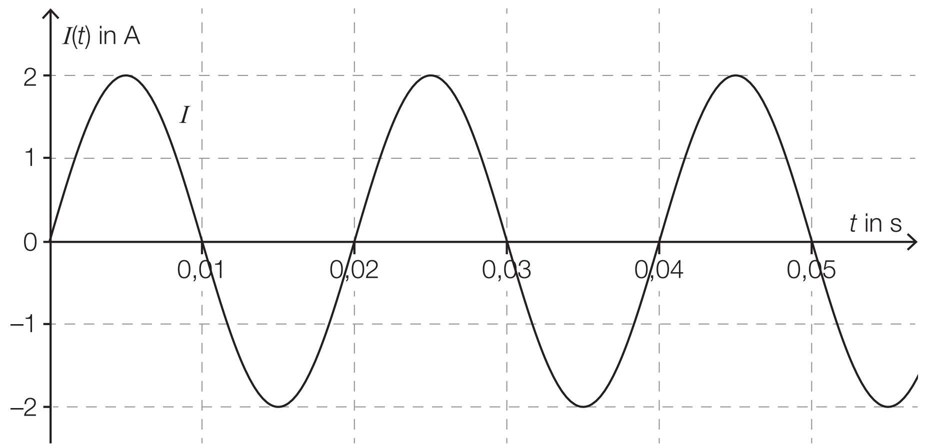
Ein Punkt für das richtige Ermitteln von c.

Grundkompetenz: FA 6.4

Wechselstrom*

Aufgabennummer: 1_793	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 6.4

Bei sinusförmigem Wechselstrom ändert sich der Wert der Stromstärke periodisch.
In der nachstehenden Abbildung ist die Stromstärke $I(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t für einen sinusförmigen Wechselstrom dargestellt (t in s, $I(t)$ in A).



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Maximalwert der Stromstärke und die (kleinste) Periodenlänge dieses sinusförmigen Wechselstroms an.

Maximalwert: ________________ A

(kleinste) Periodenlänge: ________________ s

Lösungserwartung

Maximalwert: 2 A
(kleinste) Periodenlänge: 0,02 s

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Für die Angabe von nur einem richtigen Wert ist ein halber Punkt zu geben.

Periodenlänge*

Aufgabennummer: 1_721	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 6.4

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi}{4} \cdot x\right)$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Länge der (kleinsten) Periode p der Funktion f.

$p =$ ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung
$p = \frac{8}{3}$

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für die richtige Lösung. Toleranzintervall: [2,6; 2,7]

Periodizität*

Aufgabennummer: 1_577	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: FA 6.4

Gegeben ist eine reelle Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 3 \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $b \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Einer der nachstehend angegebenen Werte gibt die (kleinste) Periodenlänge der Funktion f an. Kreuzen Sie den zutreffenden Wert an!

$\frac{b}{2}$	☐
b	☐
$\frac{b}{3}$	☐
$\frac{\pi}{b}$	☐
$\frac{2\pi}{b}$	☐
$\frac{\pi}{3}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$\frac{2\pi}{b}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Wert angekreuzt ist.

Periodische Funktion*

Aufgabennummer: 1_506	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 6.4

Gegeben ist die periodische Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = \sin(x)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die kleinste Zahl $a > 0$ (Maßzahl für den Winkel in Radiant) so an, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(x + a) = f(x)$ gilt!

$a =$ __________ rad

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

$a = 2 \cdot \pi$ rad

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [6,2 rad; 6,3 rad]

Winkelfunktion*

Aufgabennummer: 1_817	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: FA 6.5

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$. Diese Funktion soll in der Form $x \mapsto a \cdot \sin(x + b)$ dargestellt werden ($a, b \in \mathbb{R}$).

Aufgabenstellung:

Geben Sie für a und b jeweils einen passenden Wert an.

a = ____

b = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

$a = 3$

$b = \frac{\pi}{2}$

oder:

$a = -3$

$b = -\frac{\pi}{2}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen (zusammengehörigen) Werte. Für die Angabe von nur einem richtigen Wert ist ein halber Punkt zu geben.

Bei der Angabe $a = 3$ sind für die Angabe von b alle Werte $\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und auch alle Werte $90° + k \cdot 360°$ mit $k \in \mathbb{Z}$ als richtig zu werten.

Bei der Angabe $a = -3$ sind für die Angabe von b alle Werte $\frac{3 \cdot \pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und auch alle Werte $270° + k \cdot 360°$ mit $k \in \mathbb{Z}$ als richtig zu werten.

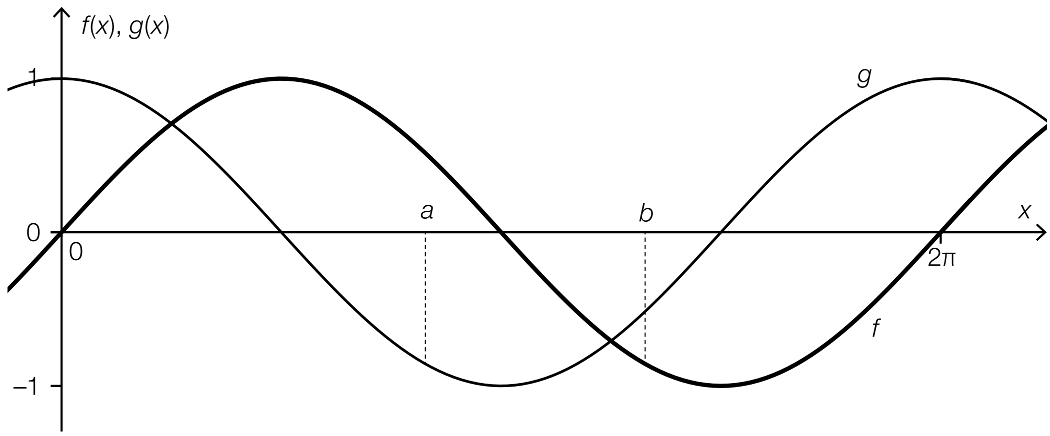
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Winkelfunktionen*

Aufgabennummer: 1_673	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 6.5

In der unten stehenden Abbildung sind die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ dargestellt.

Für die in der Abbildung eingezeichneten Stellen a und b gilt: $\cos(a) = \sin(b)$.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass $b - a = k \cdot \pi$ gilt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

$k = \frac{1}{2}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Winkelfunktionen*	
Aufgabennummer: 1_530	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: FA 6.5

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -\sin(x)$ bzw. $g(x) = \cos(x)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, um welchen Wert $b \in [0; 2\pi]$ der Graph von f verschoben werden muss, um den Graphen von g zu erhalten, sodass $-\sin(x + b) = \cos(x)$ gilt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

$b = \frac{3 \cdot \pi}{2}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [4,7 rad; 4,8 rad]

Passwörter

Passwörter bestehen aus Zeichen, die in einer festgelegten Reihenfolge angeordnet sind. Es ist erlaubt, dass in einem Passwort Zeichen mehrfach vorkommen.

Die Anzahl der Stellen eines Passworts wird als Passwortlänge k bezeichnet ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$).
Für jede dieser Stellen wird ein Zeichen aus jeweils n verschiedenen Zeichen gewählt ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Die Anzahl A aller möglichen Passwörter kann mithilfe der Formel $A = n^k$ berechnet werden.

Aufgabenstellung:

a) Ein bestimmter Computer kann 1 Milliarde Passwörter pro Sekunde überprüfen.
Für die Überprüfung von n^k Passwörtern benötigt der Computer t Stunden.

1) Stellen Sie mithilfe von k und n eine Formel zur Berechnung von t auf.

$t =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Diese Formel zur Berechnung von t kann als Funktion in Abhängigkeit von k und n aufgefasst werden.

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Ist k konstant, so ist t in Abhängigkeit von n eine ____①____; ist n konstant, so ist t in Abhängigkeit von k eine ____②____.

①	
lineare Funktion	☐
Potenzfunktion	☐
Exponentialfunktion	☐

②	
lineare Funktion	☐
Potenzfunktion	☐
Exponentialfunktion	☐

b) Das Passwort für den Zugang auf eine bestimmte Website wird automatisch von einem Zufallsgenerator erzeugt. Der Zufallsgenerator wählt jedes Zeichen unabhängig von den anderen Zeichen und mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus 26 Buchstaben und 10 Ziffern aus ($n = 36$). Die Passwortlänge beträgt 8 Zeichen ($k = 8$).

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht.
[0/1 P.]

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält.
[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $t = \frac{n^k}{60 \cdot 60 \cdot 10^9} \quad \left(= \frac{n^k}{3{,}6 \cdot 10^{12}}\right)$

a2)

①	
Potenzfunktion	☒

②	
Exponentialfunktion	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) $\left(\frac{26}{36}\right)^8 = 0{,}0740...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht, beträgt rund 7,4 %.

b2) $\left(\frac{26}{36}\right)^8 + 8 \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^7 \cdot \frac{10}{36} = 0{,}3017...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält, beträgt rund 30,2 %.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält.

Schwimmbecken

In einem Freibad gibt es verschiedene Schwimmbecken.

Aufgabenstellung:

a) Das Volumen eines bestimmten quaderförmigen Schwimmbeckens kann mithilfe der Gleichung $V = a^2 \cdot h$ berechnet werden.

a ... Seitenlänge der quadratischen Grundfläche
h ... Tiefe des Schwimmbeckens

Betrachtet werden die Funktion $V\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ a \mapsto V(a)$ bei konstantem h und die Funktion $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ V \mapsto h(V)$ bei konstantem a.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Die Funktion V ist eine ______①______, die Funktion h ist eine ______②______.

①	
lineare Funktion	☐
quadratische Funktion	☐
Quadratwurzelfunktion	☐

②	
lineare Funktion	☐
quadratische Funktion	☐
Quadratwurzelfunktion	☐

b) Zum Füllen eines anderen Schwimmbeckens werden p Pumpen verwendet, die pro Stunde jeweils die gleiche Wassermenge in das Schwimmbecken pumpen. Für $p = 2$ beträgt die Fülldauer 19 h.

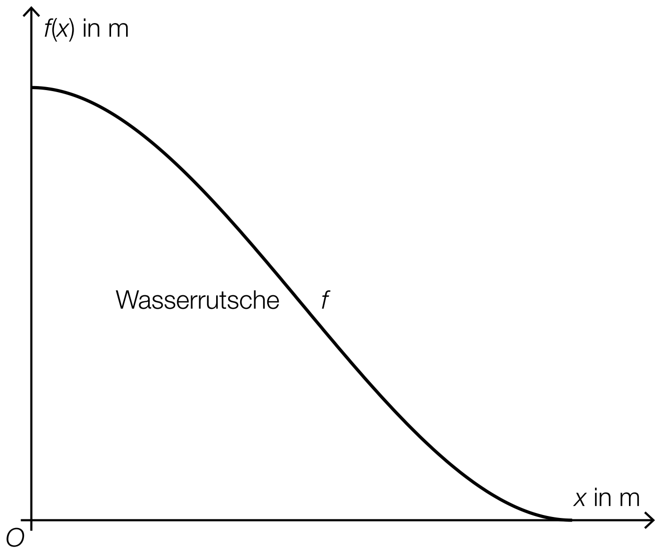
1) Stellen Sie unter Verwendung der Anzahl p der Pumpen eine Formel zur Berechnung der Fülldauer T (in h) auf.

$T =$ ________________________________ *[0/1 P.]*

Die Wassermenge in diesem Schwimmbecken nimmt durch Verdunstung und durch betriebsbedingte Ursachen ab. Dabei beschreibt die Funktion $W\colon [0; 10] \to \mathbb{R}$ mit $W(t) = -\frac{1}{96} \cdot t^3 + \frac{1}{4} \cdot t^2 - \frac{35}{24} \cdot t$ modellhaft die momentane Änderungsrate der Wassermenge zum Zeitpunkt t an einem bestimmten Tag (t in h, $W(t)$ in m^3/h).

2) Ermitteln Sie die Abnahme der Wassermenge (in m^3) im Zeitintervall $[0; 6]$. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist das seitliche Profil einer bestimmten Wasserrutsche modellhaft dargestellt.



Das seitliche Profil der Wasserrutsche ist durch den Graphen der Funktion f: $[0; 5] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{8}{125} \cdot x^3 - \frac{12}{25} \cdot x^2 + 4$ gegeben (x in m, $f(x)$ in m).

1) Ermitteln Sie die Stelle x_1, an der die Wasserrutsche am steilsten bergab verläuft. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

①	
quadratische Funktion	☒

②	
lineare Funktion	☒

a1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) $T = \frac{38}{p}$

b2) $\left|\int_0^6 W(t)\,\mathrm{d}t\right| = 11{,}625$

Die Abnahme der Wassermenge im Zeitintervall [0; 6] beträgt 11,625 m^3.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Abnahme der Wassermenge, wobei –11,625 m^3 ebenso als richtig zu werten ist.

c1) $f''(x) = 0$

$x_1 = 2{,}5$

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Stelle x_1.

Zehnkampf

Aufgabennummer: 2_FT003	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Beim Zehnkampf der Männer in der Leichtathletik erhält jeder Athlet in jeder der zehn Disziplinen Punkte, die jeweils nach einer eigenen Formel berechnet werden.
Für den Weitsprung gilt:

$P = 0{,}14354 \cdot (x - 220)^{1{,}4}$

x … Sprungweite in cm
P … Punkte

Für die Punktevergabe wird P nach der Berechnung auf Ganze gerundet.

Aufgabenstellung:

a) Der Weltrekord im Zehnkampf wurde vom Franzosen Kevin Mayer 2018 aufgestellt und liegt bei 9126 Punkten. Seine Weitsprungleistung betrug 780 cm.

1) Berechnen Sie, wie viele Punkte Kevin Mayer mehr erhalten hätte, wenn er die Weltrekordweite von 895 cm gesprungen wäre.

2) Geben Sie an, welche Sprungweite ein Athlet übertreffen muss, um Punkte zu bekommen.

Die Sprungweite muss größer als ______________________ cm sein.

b) Steigt die Sprungweite um 115 cm, so ist der durchschnittliche Punktezuwachs nicht für jeden Ausgangswert gleich.

1) Weisen Sie diese Aussage für die beiden Intervalle [500 cm; 615 cm] und [780 cm; 895 cm] rechnerisch nach.

Steigt die Sprungweite um den gleichen Wert, so ist der Punktezuwachs umso höher, je größer die Sprungweite ist, von der man ausgeht.

2) Begründen Sie diese Aussage.

c) Bei einem Zehnkampf sind 3 Sprünge erlaubt. Der weiteste fehlerfreie Sprung wird gewertet. Erfahrungsgemäß ist 1 von 20 Sprüngen ein Fehlversuch, weil er nicht korrekt durchgeführt wird.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet bei einem Zehnkampf keinen Fehlversuch im Weitsprung hat.

Lösungserwartung

a1) $0{,}14354 \cdot (780 - 220)^{1{,}4} = 1\,010{,}2\ldots \approx 1\,010$
$0{,}14354 \cdot (895 - 220)^{1{,}4} = 1\,312{,}1\ldots \approx 1\,312$

Kevin Mayer hätte 302 Punkte mehr erzielt.

a2) Die Sprungweite muss größer als 220 cm sein.

b1) Intervall [500 cm; 615 cm]: $\frac{620 - 383}{615 - 500} = 2{,}06\ldots$

Intervall [780 cm; 895 cm]: $\frac{1\,312 - 1\,010}{895 - 780} = 2{,}62\ldots$

b2) *P* kann als Funktion in Abhängigkeit von der Sprungweite *x* modelliert werden. Diese verläuft streng monoton wachsend und linksgekrümmt (positiv gekrümmt). Dadurch ist der Punktezuwachs umso höher, je größer die Sprungweite ist, von der man ausgeht.

c1) $\left(\frac{19}{20}\right)^3 = 0{,}8573\ldots \approx 85{,}7\ \%$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
a2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.
b2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

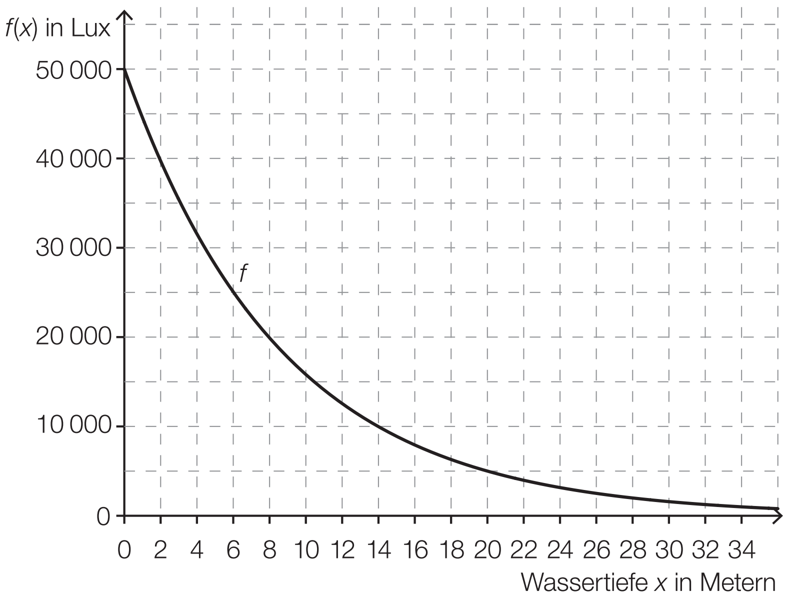
Unter Wasser

Aufgabennummer: 2_079	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.4, FA 5.1	

a) Direkt unter der Wasseroberfläche beträgt der Druck 1 Bar. Der Druck nimmt mit zunehmender Wassertiefe gleichmäßig zu, und zwar um 1 Bar je 10 Meter Wassertiefe.

1) Berechnen Sie, in welcher Wassertiefe ein Druck von 3,9 Bar herrscht.

b) Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der Graph von f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f.

c) Durch eine bestimmte Tauchermaske werden alle Gegenstände unter Wasser um ein Drittel größer wahrgenommen, als sie tatsächlich sind.

1) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die tatsächliche Größe kleiner als die wahrgenommene Größe ist.

Lösungserwartung

a1) $3{,}9 = 1 + 0{,}1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 29$

In einer Wassertiefe von 29 Metern herrscht ein Druck von 3,9 Bar.

b1) In einer Tiefe von 20 Metern beträgt die Beleuchtungsstärke 5 000 Lux.

Toleranzintervall: [19,5; 20,5]

b2) $f(x) = a \cdot b^x$

$a = 50\,000$

$5\,000 = 50\,000 \cdot b^{20} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[20]{0{,}1} = 0{,}8912... \approx 0{,}891$

$f(x) = 50\,000 \cdot 0{,}891^x$

Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

c1) tatsächliche Größe: x

wahrgenommene Größe: $w = \frac{4}{3} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{4} \cdot w$

Die tatsächliche Größe ist um 25 % kleiner als die wahrgenommene Größe.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fußballspielen im Park

Aufgabennummer: 2_081	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, FA 4.3, AN 3.3	

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balles kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x … horizontale Entfernung des Balles von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balles über dem Boden an der Stelle x in m

a) 1) Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h.

2) Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

b) Julia fängt den Ball aus einer Höhe von 1,80 m.

1) Ermitteln Sie die beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle, an denen Julia sich dabei befinden kann.

c) Roland überlegt, ob er bei diesem Schuss den Ball über ein 2,8 m hohes Klettergerüst, das in direkter Schussrichtung 10 m von der Abschussstelle entfernt steht, schießen könnte.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Schuss tatsächlich über das Klettergerüst fliegen kann.

Lösungserwartung

a1) $0 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$

$0 = x^2 \cdot (-0{,}003 \cdot x + 0{,}057) \;\Rightarrow\; x_1 = 0$

$-0{,}003 \cdot x + 0{,}057 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 19$

$D = [0;\, 19]$

a2) $h'(x) = 0$

$x \cdot (-0{,}009 \cdot x + 0{,}114) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$

$-0{,}009 \cdot x + 0{,}114 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 12{,}66... \approx 12{,}7$

$h(x_2) = 3{,}04\ldots \approx 3{,}0$

In einer horizontalen Entfernung von rund 12,7 m zur Abschussstelle erreicht der Ball seine größte Höhe von rund 3,0 m.

Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.

b1) $1{,}80 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$

$(x_1 = -5)$

$x_2 = 7{,}10\ldots \approx 7{,}1$

$x_3 = 16{,}89\ldots \approx 16{,}9$

Julia kann sich in einer Entfernung von etwa 7,1 m oder von etwa 16,9 m von der Abschussstelle befinden.

c1) $h(10) = 2{,}7$

Da $h(10)$ kleiner als 2,8 m ist, kann der Ball nicht über das Klettergerüst fliegen.

Spezielle Polynomfunktionen vierten Grades

Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Aufgabenstellung:

a) 1) Stellen Sie unter Verwendung von a und b eine Gleichung zur Berechnung der Wendestellen von f auf. *[0/1 P.]*

b) 1) Weisen Sie rechnerisch mithilfe der 1. und 2. Ableitung von f nach, dass auf der senkrechten Achse ein Extrempunkt P des Graphen von f liegt. *[0/1 P.]*

Genau einer der Koeffizienten a, b und c ist ausschlaggebend dafür, ob es sich beim ermittelten Extrempunkt P um einen Hochpunkt handelt.

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Damit dieser Extrempunkt P ein Hochpunkt ist, muss für den Koeffizienten _____①_____ gelten, dass dieser _____②_____ ist.

①	
a	☐
b	☐
c	☐

②	
kleiner als 0	☐
gleich 1	☐
größer als 0	☐

c) Gegeben ist eine Polynomfunktion g mit $g(x) = d \cdot (x + e)^2 \cdot (x - e)^2$ mit $d \neq 0$ und $e \in \mathbb{R}$.
Der Graph von g verläuft durch den Punkt $N = (2\,|\,0)$.

1) Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle möglichen Werte von e. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$
$12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b = 0$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

b1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$
$f'(0) = 0$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$
$f''(0) = 2 \cdot b \neq 0$
$P = (0 \mid y_P)$ ist ein Extrempunkt von f.

b2)

①	
b	☒

②	
kleiner als 0	☒

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.
b2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

c1) $e = -2$ bzw. $e = 2$

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln aller möglichen Werte von e.

Auslastung von Flügen

Für Fluggesellschaften ist eine hohe Auslastung ihrer Flüge wichtig.

Aufgabenstellung:

a) Häufig werden bei Flügen nicht alle verkauften Tickets in Anspruch genommen. Daher werden üblicherweise mehr Tickets verkauft, als Plätze zur Verfügung stehen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person (unabhängig von den anderen Personen) ihr Ticket in Anspruch nimmt, beträgt 90 %.
Für einen bestimmten Flug werden 6 % mehr Tickets verkauft, als Plätze zur Verfügung stehen.

Es stehen m Plätze zur Verfügung.
Es werden n Tickets verkauft.
Bei n verkauften Tickets beträgt der Erwartungswert für die in Anspruch genommenen Tickets 477.

1) Berechnen Sie n und m.

$n =$ ______________________

$m =$ ______________________ *[0/1 P.]*

Folgendes Ereignis E wird betrachtet:
E ... „für mindestens 1 Person, die ihr Ticket in Anspruch nehmen möchte, steht kein Platz zur Verfügung“

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E)$. *[0/1 P.]*

b) Für einen bestimmten Flug eines voll besetzten Flugzeugs kann der Zusammenhang zwischen der Flugdistanz s und dem Treibstoffverbrauch $V(s)$ näherungsweise durch die Funktion $V\colon [2\,000; 10\,000] \to \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

$$V(s) = 4 + \left(\frac{s}{128\,000} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{s}{1\,000} \cdot e^{-\frac{s}{4\,000}} \quad \text{mit} \quad 2\,000 \leq s \leq 10\,000$$

s ... Flugdistanz in km
$V(s)$ ... Treibstoffverbrauch bei der Flugdistanz s in Litern pro Fluggast pro 100 km

1) Ermitteln Sie die Flugdistanz d (in km), bei der der Treibstoffverbrauch am geringsten ist. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Menge an Treibstoff (in L), die dieses Flugzeug für die Flugdistanz d benötigt, wenn es mit 271 Fluggästen voll besetzt ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $n = \frac{477}{0{,}9} = 530$

$m = \frac{530}{1{,}06} = 500$

a2) X ... Anzahl der Personen, die ihr Ticket in Anspruch nehmen
Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 530$ und $p = 0{,}9$.

$P(X \geq 501) = 0{,}00012...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n und m.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) $V'(d) = 0$
$d = 3\,507{,}5...$ km
$(V''(3\,507{,}5...) > 0)$

b2) $V(3\,507{,}5...) = 3{,}67...$
$3{,}67... \cdot 271 \cdot 35{,}0... = 34\,934{,}1...$

Die benötigte Menge an Treibstoff beträgt rund 34 934 L.

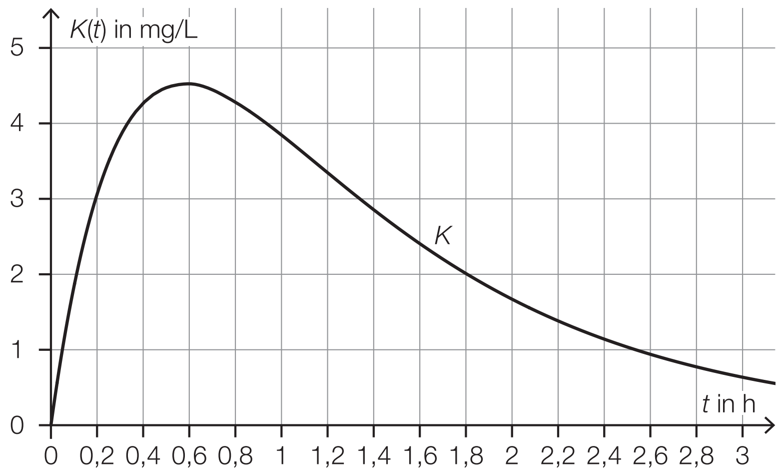
b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Flugdistanz d.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Menge an Treibstoff.

Koffein*

Aufgabennummer: 2_101	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Aufgabenstellung:

a) Lea trinkt eine Tasse Kaffee. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K dargestellt, die modellhaft die Konzentration $K(t)$ von Koffein in Leas Blut in Abhängigkeit von der Zeit t nach dem Trinken des Kaffees beschreibt (t in h, $K(t)$ in mg/L).



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung, wie viele Minuten nach dem Trinken des Kaffees die maximale Konzentration von Koffein im Blut auftritt.

______________________________ min

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Funktion K hat im Intervall (0; 0,8) ______①______ und in diesem Intervall ändert sich das Vorzeichen der ______②______.

①	
eine Wendestelle	☐
eine Extremstelle	☐
eine Nullstelle	☐

②	
Krümmung	☐
Steigung	☐
Funktionswerte	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

b) Die Löslichkeit von Koffein in Wasser gibt an, wie viel Gramm Koffein pro Liter (g/L) maximal gelöst werden können. Die Löslichkeit ist temperaturabhängig. Sie lässt sich näherungsweise durch die Funktion f beschreiben.

$f(T) = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T}$ mit $0 \leq T \leq 90$

T … Temperatur in °C
$f(T)$ … Löslichkeit von Koffein in Wasser bei der Temperatur T in g/L

Jemand behauptet:
„Bei einem Anstieg der Temperatur um 10 °C nimmt die Löslichkeit von Koffein in Wasser etwa auf das 1,65-Fache zu."

1) Überprüfen Sie rechnerisch, ob diese Behauptung richtig ist.

Folgende Gleichung wird aufgestellt:
$2 \cdot 6{,}42 = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T}$

2) Interpretieren Sie die Lösung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) 36 min

a2)

①	
eine Extremstelle	☒

②	
Steigung	☒

b) **Lösungserwartung:**

b1) $f(T + 10) = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot (T + 10)} = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T} \cdot e^{0{,}05 \cdot 10} = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T} \cdot 1{,}648... = f(T) \cdot 1{,}648...$

$\Rightarrow$ Die Behauptung ist richtig.

b2) Die Lösung der Gleichung ist die Temperaturerhöhung, bei der sich die Löslichkeit von Koffein in Wasser jeweils verdoppelt („Verdoppelungstemperatur").

oder:

Die Lösung der Gleichung ist diejenige Temperatur, bei der die Löslichkeit von Koffein in Wasser doppelt so hoch ist wie bei einer Temperatur von 0 °C.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Wertes.
Toleranzintervall: [33 min; 39 min]

a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Überprüfen. Auch ein Nachweis mit konkreten Zahlen ist als richtig zu werten.

b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Wachstum einer Pflanze

Aufgabennummer: 2_004	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Das Wachstum einer Pflanze wurde über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe gemessen. Die Höhe dieser Pflanze kann in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion h mit $h(t) = \frac{1}{24} \cdot (-t^3 + 27 \cdot t^2 + 120)$ modelliert werden (t in Wochen seit Beobachtungsbeginn, $h(t)$ in cm).

Aufgabenstellung:

a) 1) Interpretieren Sie $\frac{h(13) - h(9)}{4} = 9{,}47\ldots$ im gegebenen Sachzusammenhang.

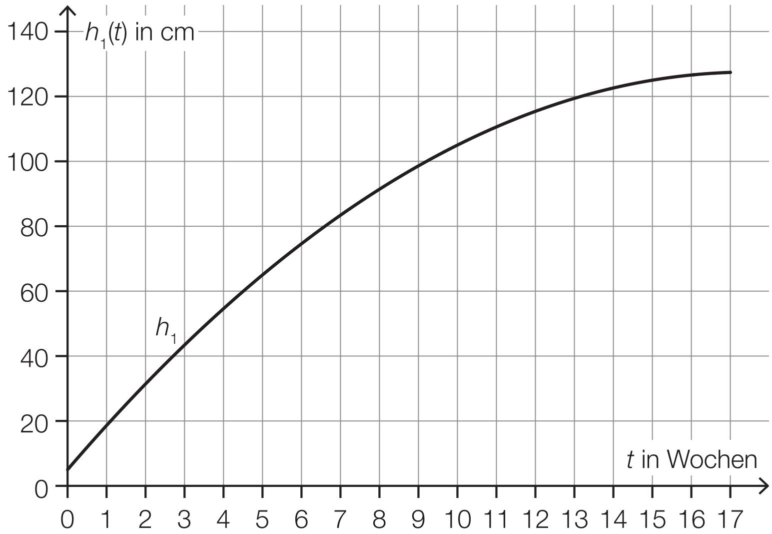
2) Interpretieren Sie $h'(9)$ unter Angabe des konkreten Wertes im gegebenen Sachzusammenhang.

b) 1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion h im Beobachtungszeitraum kein lokales Maximum hat.

c) Für ein schnelleres Wachstum wird die Pflanze gedüngt. Zwei Wochen später erreicht sie ihr stärkstes Wachstum.

1) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Pflanze gedüngt wurde.

d) Im selben Zeitraum wurde das Wachstum einer anderen Pflanze beobachtet und modelliert. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der entsprechenden Funktion h_1.



1) Interpretieren Sie das Krümmungsverhalten von h_1 im Intervall [0; 17] im Hinblick auf das Wachstum dieser Pflanze.

Lösungserwartung

a1) Die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze im Zeitintervall [9; 13] beträgt durchschnittlich 9,47... cm pro Woche.

a2) $h'(9) = 10{,}125$
Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze zum Zeitpunkt $t = 9$ beträgt rund 10,1 cm pro Woche.

b1) $h'(t) = 0$
$t_1 = 0$, $t_2 = 18$
An der Stelle $t_1 = 0$ hat die Funktion ein lokales Minimum. Die Stelle $t_2 = 18$ befindet sich außerhalb des Beobachtungszeitraums. D. h., die Funktion hat im Beobachtungszeitraum kein lokales Maximum.

c1) Zeitpunkt des stärksten Wachstums: $h''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 9$
Die Pflanze wurde zum Zeitpunkt $t = 7$ gedüngt.

d1) Die Wachstumsgeschwindigkeit dieser Pflanze nimmt im Beobachtungszeitraum ab, d. h., sie wächst immer langsamer.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe des richtigen Wertes.

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Zeitpunkts.

d1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Erderwärmung*

Aufgabennummer: 2_098	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.5, FA 2.2, FA 5.2, AN 1.3, AN 3.3

Unter *globaler Mitteltemperatur* versteht man die über die gesamte Erdoberfläche gemittelte Temperatur in einem bestimmten Zeitraum unter bestimmten Bedingungen.

Die Entwicklung der globalen Mitteltemperatur kann mithilfe von Klimamodellen prognostiziert werden.

Nachstehend sind für einzelne Jahre die globalen Mitteltemperaturen angeführt.

Jahr	1900	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980
globale Mitteltemperatur (in °C)	13,80	13,87	13,89	14,01	13,90	14,02	13,94	14,16

Jahr	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
globale Mitteltemperatur (in °C)	14,03	14,37	14,37	14,31	14,51	14,55	14,72

Die Funktion T beschreibt modellhaft die globale Mitteltemperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Jahren ab dem Jahr 1900, $T(t)$ in °C). Es gilt:

$T(t) = a \cdot e^{0{,}008 \cdot t} - 0{,}03 \cdot t + 11{,}1 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^+$

Aufgabenstellung:

a) Bei einem bestimmten Klimamodell wird $a = 2{,}7$ angenommen.
Die Funktion T hat an der Stelle $t = t_0$ eine lokale Extremstelle.

1) Ermitteln Sie t_0.

2) Begründen Sie mathematisch, warum gemäß diesem Modell die globale Mitteltemperatur ab der Stelle t_0 immer schneller ansteigt.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert), Maturatermin: 12. Jänner 2021

b) Verschiedene Studien nehmen an, dass die globale Mitteltemperatur im Jahr 2100 im Vergleich zur globalen Mitteltemperatur im Jahr 2000 (also 14,31 °C) um mindestens 1,5 °C, aber um höchstens 4,5 °C höher sein wird.

1) Weisen Sie nach, dass die Funktion T mit $a = 2,7$ diese Studien mit der Annahme für das Jahr 2100 bestätigt.

2) Geben Sie den kleinstmöglichen Wert a_{min} und den größtmöglichen Wert a_{max} so an, dass die Funktion T diese Studien bestätigt.

a_{min} = ______________________________

a_{max} = ______________________________

c) Bei der UN-Klimakonferenz in Paris im Jahr 2015 wurde eine neue internationale Klimaschutz-Vereinbarung getroffen, die die Begrenzung der Zunahme der globalen Mitteltemperatur vorsieht. Demnach dürfte die globale Mitteltemperatur im Jahr 2100 höchstens 15,3 °C betragen.

Um diese Klimaschutz-Vereinbarung zu erfüllen, darf ab dem Jahr 2015 die mittlere Änderungsrate der globalen Mitteltemperatur höchstens einen bestimmten Wert k betragen (k in °C pro Jahr).

1) Ermitteln Sie k.

Es wird angenommen, dass die globale Mitteltemperatur ab dem Jahr 2015 linear zunimmt und die mittlere Änderungsrate der globalen Mitteltemperatur tatsächlich k entspricht.

2) Geben Sie unter dieser Annahme eine Gleichung derjenigen linearen Funktion M an, die die jährliche globale Mitteltemperatur (in °C) t Jahre nach 2015 modellhaft beschreibt.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $T'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 41{,}06...$
$(T''(t_0) > 0)$

a2) mögliche Begründung:
Die globale Mitteltemperatur steigt ab t_0 immer schneller an, weil für alle $t > t_0$ der Graph von T linksgekrümmt ist.

b) **Lösungserwartung:**

b1) mögliche Vorgehensweise:
$T(200) = 18{,}473... \approx 18{,}47$
$14{,}31 + 1{,}5 \leq 18{,}47 \leq 14{,}31 + 4{,}5$
Die Funktion T mit $a = 2{,}7$ bestätigt diese Studien.

b2) Zunahme um 1,5 °C: $T(200) = 15{,}81$
Zunahme um 4,5 °C: $T(200) = 18{,}81$
$a_{min} = 2{,}162...$
$a_{max} = 2{,}768...$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $k = \frac{15{,}3 - 14{,}72}{2100 - 2015} = 0{,}00682...$
$k \approx 0{,}0068$ °C/Jahr

c2) $M(t) = 0{,}0068 \cdot t + 14{,}72$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei ein Nachweis, dass t_0 eine lokale Minimumstelle ist, nicht erbracht werden muss.
a2) Ein Punkt für eine richtige Begründung.

b1) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis.
b2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

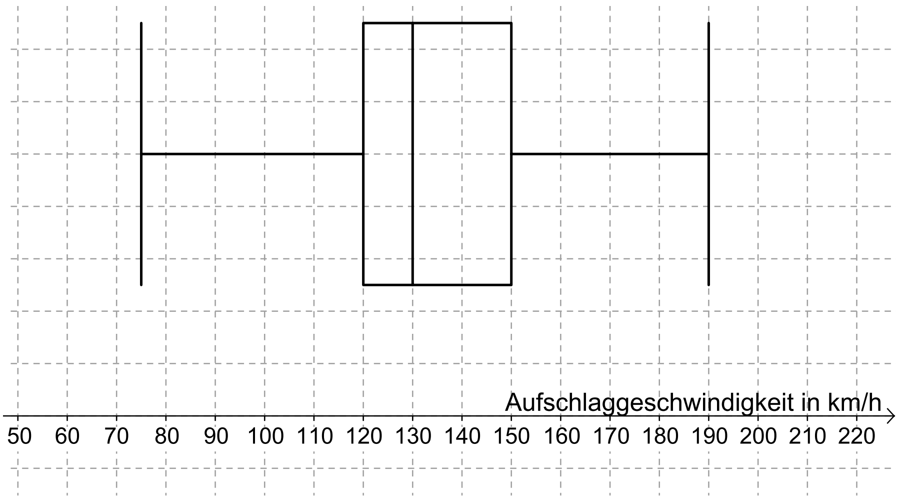
c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „°C/Jahr" nicht angegeben sein muss.
c2) Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Tennis

Aufgabennummer: 2_087	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.5, WS 1.1	

Im Rahmen der Nachwuchsförderung wurden die Leistungen der Teilnehmer eines Tennisturniers genauer beobachtet.

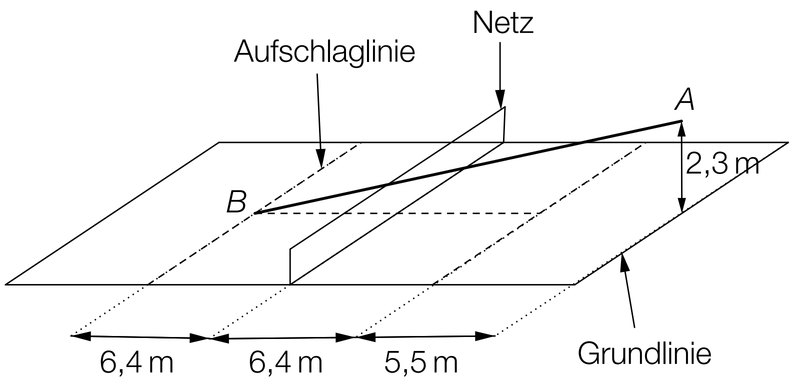
a) Für die Auswertung der Daten der Aufschlaggeschwindigkeit der Teilnehmer wurde der nachstehende Boxplot erstellt.



1) Lesen Sie diejenige Aufschlaggeschwindigkeit ab, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde.

2) Lesen Sie den Quartilsabstand ab.

b) Ein Spieler trifft beim Aufschlag den Ball in einer Höhe von 2,3 m im Punkt A genau über der Mitte der Grundlinie. Er visiert den Punkt B (Mitte der Aufschlaglinie) an. Um nicht ins Netz zu gehen, muss der Ball das Netz in einer Höhe von mindestens 1 Meter (über dem Boden) überqueren.
Die Flugbahn des Tennisballs beim Aufschlag kann modellhaft mittels einer Gerade beschrieben werden.



1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Aufschlag über das Netz geht.

c) Mithilfe einer Videoanalyse wird ein Grundlinienschlag modelliert.
Die Flugbahn zwischen dem Abschlagpunkt und dem Punkt, in dem der Ball auf dem Boden aufkommt, kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x + \frac{21}{50} \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung zum Abschlagpunkt in Metern (m)
$f(x)$ ... Höhe des Balles an der Stelle x über dem Boden in m

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der obigen Zahl $\frac{21}{50}$ für die Flugbahn.

Lösungserwartung

a1) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde:
120 km/h

a2) Quartilsabstand: 30 km/h

b1) Argumentation mit ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots \text{ m} \approx 0{,}8 \text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

Eine Argumentation mit einer linearen Funktion oder mit Steigungswinkeln ist ebenfalls möglich.

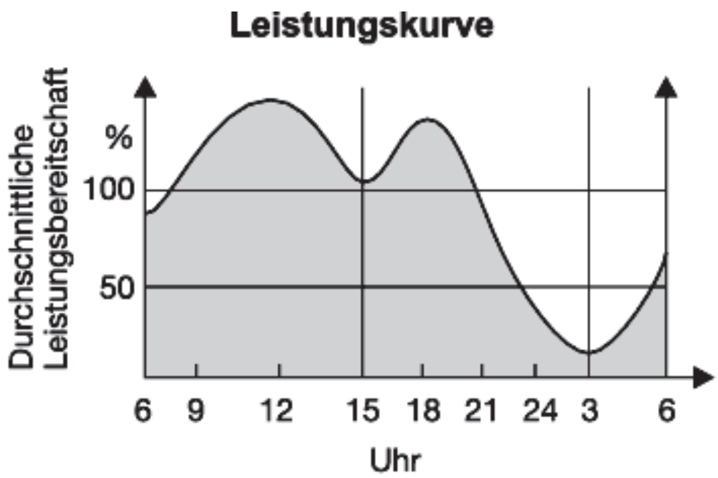
c1) Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Leistungskurve

Aufgabennummer: 2_094	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.5, AN 1.3, AN 2.1	

Die *Leistungskurve*, auch *Arbeitskurve* genannt, ist die Darstellung der Arbeitsleistung einer Arbeitnehmerin/eines Arbeitnehmers in Abhängigkeit von der Tageszeit unter Berücksichtigung seiner Durchschnittsleistung (100 Prozent). Auf einer Webseite findet man folgende Grafik:



Quelle: http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/85252/leistungskurve-v9.html [30.05.2014].

a) 1) Lesen Sie ab, in welchen Zeitintervallen die Leistungsbereitschaft abnimmt.

b) Um 9 Uhr beträgt die Leistungsbereitschaft einer Arbeitnehmerin 110 %. Um 12 Uhr beträgt sie 140 %. Im Zeitintervall von 12 Uhr bis 14 Uhr beträgt die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft –12 % pro Stunde.

1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft im Zeitintervall von 9 Uhr bis 12 Uhr.

2) Berechnen Sie die Leistungsbereitschaft um 14 Uhr.

c) Die Leistungsbereitschaft eines Arbeitnehmers kann im Zeitintervall von 0 Uhr bis 6 Uhr durch die Funktion f beschrieben werden. Dabei gilt:

$$f(t) = \frac{10}{3} \cdot t^2 - 20 \cdot t + 40$$

t ... Zeit in Stunden, $0 \leq t \leq 6$
$f(t)$ ... Leistungsbereitschaft zur Zeit t in Prozent

1) Berechnen Sie die 1. Ableitung der Leistungsbereitschaft um 2:30 Uhr.

Lösungserwartung

a1) Eine Abnahme der Leistungsbereitschaft liegt im Zeitintervall von ca. 12 Uhr bis ca. 15 Uhr sowie im Zeitintervall von ca. 18 Uhr bis ca. 3 Uhr vor.

Toleranzintervall: $\pm 0{,}5\ h$

b1) mittlere Änderungsrate: $\frac{140 - 110}{12 - 9} = 10 \rightarrow +\ 10\ \%$ pro Stunde

b2) Leistungsbereitschaft um 14 Uhr: $140 - 2 \cdot 12 = 116 \rightarrow 116\ \%$

c1) $f'(t) = \frac{20}{3} \cdot t - 20$

$f'(2{,}5) = -\frac{10}{3} \approx -3{,}33$

Sicherheitskontrolle*

Aufgabennummer: 2_096	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: WS 2.3, WS 3.1, WS 3.2, FA 1.5, AN 4.3

Beim Einlass in ein bestimmtes Stadion findet bei einer Veranstaltung eine maximal dreistufige Sicherheitskontrolle bei Personen statt, um mitgeführte Gegenstände zu kontrollieren und unzulässige Gegenstände zu erfassen. Liefert die erste Stufe dieser Sicherheitskontrolle kein eindeutiges Ergebnis, dann wird die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle durchgeführt. Liegt dann noch immer kein eindeutiges Ergebnis vor, kommt die dritte Stufe der Sicherheitskontrolle zum Einsatz.

Die erste und die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle dauern jeweils 15 s, die dritte Stufe dauert 300 s. Ein eindeutiges Ergebnis liefert dabei die erste Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, die zweite Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.

Aufgabenstellung:

a) Die Zufallsvariable X beschreibt die Dauer d (in s) der Sicherheitskontrolle bei einer Person. Wartezeiten, die eventuell auftreten können, werden nicht berücksichtigt.

1) Ergänzen Sie in der nachstehenden Tabelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X.

d			
$P(X = d)$			

2) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

b) Der Wert p gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person einen unzulässigen Gegenstand mit sich führt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen beide einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen, beträgt 10 %.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen mindestens 5 Personen einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert), Maturatermin: 16. September 2020

c) Die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion kann mithilfe der Funktion A mit $A(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $0 \leq t \leq 90$ in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden, wobei zum Zeitpunkt $t = 0$ der Einlass ins Stadion beginnt (t in Minuten, $A(t)$ in Personen pro Minute).

Zu Beginn des Einlasses ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion gleich 0.
45 min nach Beginn des Einlasses ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion maximal. Zu diesem Zeitpunkt beträgt sie 15 Personen pro Minute.

1) Berechnen Sie die Werte von a, b und c.

2) Geben Sie die Anzahl der Personen an, die insgesamt bis zum Zeitpunkt $t = 90$ ins Stadion gekommen sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1)

d	15	30	330
$P(X = d)$	0,9	$0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06$	$0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$

a2) $E(X) = 15 \cdot 0{,}9 + 30 \cdot 0{,}06 + 330 \cdot 0{,}04 = 28{,}5$

b) Lösungserwartung:

b1) $p^2 = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}31622... \approx 0{,}3162$

b2) Y ... Anzahl der Personen, die einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen
Y ist binomialverteilt mit $n = 10$, $p = 0{,}31622...$
$P(Y \geq 5) = 0{,}1794... \approx 0{,}179$

c) Lösungserwartung:

c1) $A(0) = 0,\ A(45) = 15,\ A'(45) = 0$

$a = -\frac{1}{135},\ b = \frac{2}{3},\ c = 0$

c2) $\int_0^{90} A(t)\,\mathrm{d}t = 900$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Ergänzung der richtigen Werte in der Tabelle.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für die Angabe der drei richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_041	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 1.2, FA 1.5, FA 4.3, AN 2.1, AN 3.3, AN 4.3	

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + t \cdot x$. Für den Parameter t gilt: $t \in \mathbb{R}$ und $t \neq 0$.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie die lokalen Extremstellen von f_t in Abhängigkeit von t an!

An der Stelle $x = t$ gelten für die Funktion f_t die Gleichungen $f_t(t) = 0$, $f_t'(t) = 0$ und $f_t''(t) = 2$.
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f_t bei $x = t$!

b) Geben Sie diejenige Stelle x_0 in Abhängigkeit von t an, an der sich das Krümmungsverhalten von f_t ändert!

Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Krümmungsverhalten des Graphen von f_t an der Stelle $x = 0$ unabhängig von der Wahl des Parameters t ist!

c) Die Funktion A beschreibt in Abhängigkeit von t mit $t > 0$ den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion f_t und von der x-Achse im Intervall $[0; t]$ begrenzt wird. Die Funktion $A: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $t \mapsto A(t)$, ist eine Polynomfunktion.

Geben Sie den Funktionsterm und den Grad von A an!

Geben Sie das Verhältnis $A(t) : A(2 \cdot t)$ an!

d) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f_{-1}(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt!

Erläutern Sie, wie der Graph der Funktion f_{-1} aus dem Graphen der Funktion f_1 hervorgeht!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

a) Mögliche Vorgehensweise:

$f_t'(x) = \frac{3}{t} \cdot x^2 - 4 \cdot x + t$

$3 \cdot x^2 - 4 \cdot t \cdot x + t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{t}{3};\ x_2 = t$

Mögliche Beschreibung:

An der Stelle $x = t$ hat f_t eine Nullstelle und ein lokales Minimum.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(x) = \frac{6}{t} \cdot x - 4$

$f_t''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{2}{3} \cdot t$

Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(0) = \frac{6}{t} \cdot 0 - 4 = -4$

Die zweite Ableitungsfunktion hat an der Stelle $x = 0$ den Wert -4 und ist somit unabhängig vom Parameter t.

c) Mögliche Vorgehensweise:

$A(t) = \int_0^t f_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t^3}{4} - \frac{2 \cdot t^3}{3} + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$

Die Funktion A ist eine Funktion dritten Grades.

$A(t) : A(2 \cdot t) = 1 : 8$

d) Mögliche Vorgehensweise:

$f_{-1}(x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x$

$f_1(-x) = (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x \quad \Rightarrow \quad f_{-1}(x) = f_1(-x)$

Mögliche Erläuterung:

Wird der Graph der Funktion f_1 an der senkrechten Achse gespiegelt, so erhält man den Graphen der Funktion f_{-1}.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

c) – Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm und die Angabe des richtigen Grades von A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für ein richtiges Verhältnis.

d) – Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.
– Ein Punkt für eine korrekte Erläuterung.

Quadratische Funktion*

Aufgabennummer: 2_037	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.5, FA 1.5, AN 3.2, AN 3.3	

Der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades schneidet die positive senkrechte Achse im Punkt $A = (0|y_A)$ und hat mit der positiven x-Achse den Punkt $B = (x_B|0)$ gemeinsam, wobei B ein Extrempunkt von f ist.
Die Funktion f ist von der Form $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie an, ob c größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Geben Sie an, ob b größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

b) Gegeben ist folgende Aussage: „Der Punkt B ist ein Schnittpunkt der Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f'." Geben Sie an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Es gibt für alle Werte von b genau eine Stelle x_t mit folgender Eigenschaft: An der Stelle x_t haben f und f' die gleiche Steigung. Geben Sie diese Stelle x_t in Abhängigkeit von b an!

c) Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen b und c bestehen muss, damit die Extremstelle x_B von f auch Nullstelle von f ist!

Geben Sie die Koeffizienten b und c der Funktion f in Abhängigkeit von x_B an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

a) $c > 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt $A = (0|y_A)$ liegt auf der positiven senkrechten Achse, daher ist $y_A = f(0) > 0$.
Da $c = f(0)$ ist, muss $c > 0$ sein.

oder:

Der Parameter c legt fest, in welchem Punkt der Graph von f die senkrechte Achse schneidet. Da dieser Schnittpunkt auf der positiven senkrechten Achse liegt, muss $c > 0$ gelten.

$b < 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt B ist ein Extrempunkt von f. Da B auf der positiven x-Achse liegt, muss seine x-Koordinate x_B positiv sein. Die Extremstelle $x_\mathrm{E} = x_B$ der Funktion f ergibt sich aus dem Ansatz: $f'(x_\mathrm{E}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_\mathrm{E} = -2 \cdot b$.
Wegen $x_\mathrm{E} = -2 \cdot b > 0$ muss $b < 0$ gelten.

oder:

Da aus $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b$ folgt, dass $f'(0) = b$ ist, und da f für $(-\infty; x_\mathrm{E})$ mit $x_\mathrm{E} > 0$ streng monoton fallend ist, folgt $f'(0) < 0$ und somit gilt: $f'(0) = b < 0$.

oder:

Angenommen, es würde $b \geq 0$ gelten. Wegen $c > 0$ ergibt sich: $\frac{1}{4} \cdot x^2 + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit würde für alle $x > 0$ auch $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ gelten. Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass ein Berührpunkt mit der positiven x-Achse existiert. Folglich muss $b < 0$ gelten.

b) Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:
Da $B = (x_B|0)$ ein Extrempunkt von f ist, gilt $f'(x_B) = 0$. Weil auch $f(x_B) = 0$ ist, ist der Punkt B ein Schnittpunkt der Graphen von f und f'.

oder:

An einer Stelle, wo die Funktion f eine Extremstelle hat, weist f' eine Nullstelle auf. Da die Extremstelle von f im gegebenen Fall eine Nullstelle ist, haben f und f' die gleiche Nullstelle und somit im Punkt B einen Schnittpunkt.

Mögliche Vorgehensweise:
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad$ Die Steigung der Ableitungsfunktion f' ist $\frac{1}{2}$.

$f'(x_t) = \frac{1}{2} \cdot x_t + b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_t = 1 - 2 \cdot b$

c) Mögliche Vorgehensweise:
Wenn die Extremstelle von f auch Nullstelle von f ist, hat die Gleichung $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ genau eine Lösung.

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot c}}{0{,}5} \quad \Rightarrow \quad c = b^2$

Mögliche Vorgehensweise:
$f'(x_B) = \frac{1}{2} \cdot x_B + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-x_B}{2}$

Aus $c = b^2$ folgt: $c = \frac{x_B^2}{4}$.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe von $c > 0$ und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die Angabe von $b < 0$ und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage wahr ist, und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen b und c. Andere korrekte Zusammenhänge sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die korrekte Angabe der Koeffizienten b und c in Abhängigkeit von x_B.

Kettenlinie

Aufgabennummer: 2_030	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.7, FA 3.2	

Hängt man ein Seil (oder beispielsweise eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden.
Der Wert der Konstanten *a* hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.
Der vertikale Abstand zwischen dem tiefsten Punkt des Seils und seinen Aufhängepunkten wird als Durchhang bezeichnet.
Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion *f* der obigen Form mit $a = 4$ beschrieben werden (*x* und *f*(*x*) in Metern). Die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Höhe und ihr Abstand beträgt $d = 6$ m.

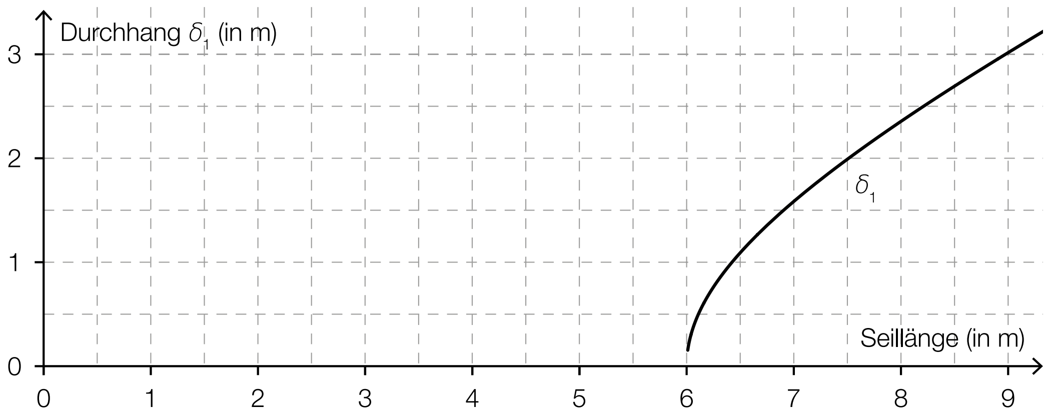
Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Stelle mit dem maximalen Durchhang des durch *f* beschriebenen Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Stelle!

Geben Sie eine Funktionsgleichung f_1 an, mit der ein Seil modelliert werden kann, welches an jeweils 1 m tieferen Aufhängepunkten montiert ist und denselben Durchhang wie das durch *f* beschriebene Seil aufweist!

b) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Durchhang δ des durch f modellierten Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Durchhang!

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion δ_1, der die Abhängigkeit des Durchhangs von der Länge des Seils zwischen den Aufhängepunkten P_1 und P_2 beschreibt.



Geben Sie mithilfe der oben dargestellten Abbildung die Länge des in der Einleitung beschriebenen Seils an! Ermitteln Sie weiters, um wie viele Meter der Durchhang zunimmt, wenn das Seil durch ein zwei Meter längeres Seil (gleicher Beschaffenheit) ersetzt wird, das an denselben Aufhängepunkten montiert ist!

c) Der Graph der Funktion f kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion g mit $g(x) = b \cdot x^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ angenähert werden. Der Graph von g verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f.

Geben Sie alle Gleichungen an, die für die Berechnung von b und c notwendig sind, und ermitteln Sie die Werte dieser Parameter!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der größte vertikale Abstand von f und g zwischen den beiden Aufhängepunkten berechnet werden kann!

d) Der Graph der Funktion f kann auch durch den Graphen einer Polynomfunktion h vierten Grades angenähert werden. Für den Graphen von h gelten folgende Bedingungen:
Er verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f und hat in den beiden Aufhängepunkten dieselbe Steigung wie der Graph von f.

Drücken Sie alle gegebenen Bedingungen mithilfe von Gleichungen aus!

Ermitteln Sie anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von h!

Möglicher Lösungsweg

a) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f_1(x) = f(x) - 1 = \frac{4}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) - 1$

b) $\delta = f(3) - f(0)$
$\delta \approx 1{,}2$ m

Die Seillänge beträgt ca. 6,6 m.
$\delta_1(8{,}6) \approx 2{,}8 \Rightarrow$ Der Durchhang nimmt um ca. 1,6 m zu.

c) $g(0) = 4 = c$

$g(3) = f(3) \approx 5{,}18 = 9 \cdot b + 4 \Rightarrow b \approx 0{,}13$

größter vertikaler Abstand:
$(g(x) - f(x))' = 0$

d) $h(-3) = f(-3)$
$h(0) = f(0)$
$h(3) = f(3)$
$h'(-3) = f'(-3)$
$h'(3) = f'(3)$

$h(x) \approx 0{,}0007 \cdot x^4 + 0{,}125 \cdot x^2 + 4$

Aufnahme einer Substanz ins Blut

Aufgabennummer: 2_026	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 2.1, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5, FA 1.7	

Wenn bei einer medizinischen Behandlung eine Substanz verabreicht wird, kann die Konzentration der Substanz im Blut (kurz: Blutkonzentration) in Abhängigkeit von der Zeit t in manchen Fällen durch eine sogenannte Bateman-Funktion $c(t) = d \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$ mit den personenbezogenen Parametern $a, b, d > 0, a < b$ modelliert werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen, $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Verabreichung der Substanz.

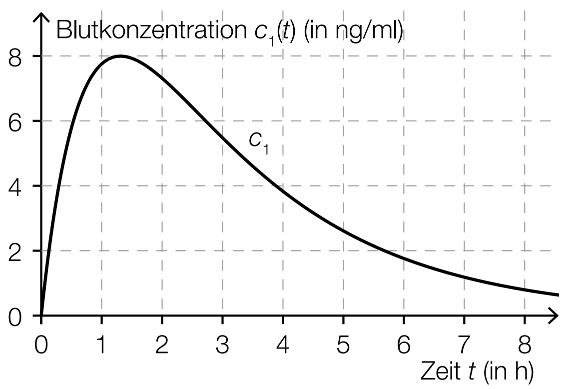
Die Bioverfügbarkeit f gibt den Anteil der verabreichten Substanz an, der unverändert in den Blutkreislauf gelangt. Bei einer intravenösen Verabreichung (d. h. einer direkten Verabreichung in eine Vene) beträgt der Wert der Bioverfügbarkeit 1.

Das Verteilungsvolumen V beschreibt, in welchem Ausmaß sich die Substanz aus dem Blut in das Gewebe verteilt.

Der Parameter d ist direkt proportional zur verabreichten Dosis D und zur Bioverfügbarkeit f, außerdem ist d indirekt proportional zum Verteilungsvolumen V.

Die nachstehende Abbildung zeigt exemplarisch den zeitlichen Verlauf der Blutkonzentration in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) für den Fall der Einnahme einer bestimmten Dosis der Substanz Lysergsäurediethylamid und kann mit der Bateman-Funktion c_1 mit den Parametern $d = 19{,}5$, $a = 0{,}4$ und $b = 1{,}3$ beschrieben werden.

Der Graph der Bateman-Funktion weist für große Zeiten t einen asymptotischen Verlauf gegen die Zeitachse auf.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration für die in der Einleitung beschriebene Bateman-Funktion c_1 berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Begründen Sie allgemein, warum der Wert des Parameters d in der Bateman-Funktion c nur die Größe der maximalen Blutkonzentration beeinflusst, aber nicht den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird!

b) Die Werte der Parameter a, b und d der Bateman-Funktion variieren von Patient zu Patient. Es wird im Folgenden angenommen, dass der Wert des Parameters d für drei untersuchte Patienten P_1, P_2, P_3 identisch ist.

Für den Patienten P_1 gelten die Parameter aus der Einleitung. Bei Patient P_2 ist der Wert des Parameters a etwas größer als bei Patient P_1.
Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Bateman-Funktion verändert, wenn der Wert des Parameters a erhöht wird, der Parameter b unverändert bleibt und $a < b$ gilt! Interpretieren Sie diese Veränderung im gegebenen Kontext!

Patient P_3 erreicht (bei gleicher verabreichter Dosis) die maximale Blutkonzentration zeitgleich mit Patient P_1, die maximale Blutkonzentration von Patient P_3 ist aber größer.
Ermitteln Sie, wie sich die Werte von a und b bei der Bateman-Funktion für Patient P_3 von jenen von Patient P_1 unterscheiden!

c) Kreuzen Sie diejenige Formel an, die den Zusammenhang zwischen dem Parameter d der Bateman-Funktion und den in der Einleitung beschriebenen Größen V, D und f korrekt beschreibt! Der Parameter λ ist dabei ein allgemeiner Proportionalitätsfaktor.

$d = \lambda \cdot \frac{D}{V \cdot f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot V}{f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{V \cdot f}{D}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{V}{D \cdot f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{f}{V \cdot D}$	☐

Bei einem konstanten Wert des Parameters d und der Bioverfügbarkeit f kann man die verabreichte Dosis $D(V)$ als Funktion D in Abhängigkeit vom Verteilungsvolumen V auffassen. Beziehen Sie sich auf die von Ihnen angekreuzte Formel und geben Sie für die Parameterwerte der in der Einleitung dargestellten Bateman-Funktion und für den Fall einer intravenösen Verabreichung die Funktionsgleichung $D(V)$ an! Geben Sie weiters an, um welchen Funktionstyp es sich bei D handelt!

Möglicher Lösungsweg

a) $c_1(t) = 19{,}5 \cdot (e^{-0{,}4 \cdot t} - e^{-1{,}3 \cdot t})$
$c_1'(t) = 19{,}5 \cdot (-0{,}4 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}) = 0$

$t \approx 1{,}31$ Stunden

$c_1''(1{,}31) \approx -4{,}15 < 0$

Mögliche Begründungen:

Für die Berechnung des Zeitpunkts der (lokalen) maximalen Blutkonzentration muss die Gleichung $c'(t) = 0$ nach t gelöst werden. Der Parameter d fällt bei dieser Berechnung weg und beeinflusst somit nur die Höhe der maximalen Blutkonzentration zum ermittelten Zeitpunkt.

oder:

$c'(t) = d \cdot (-a \cdot e^{-a \cdot t} + b \cdot e^{-b \cdot t}) = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{a - b} \;\Rightarrow$ Der Parameter d tritt in dieser Formel nicht auf. Der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration t ist somit von d unabhängig.

b) Bei einer Erhöhung des Wertes von a verschiebt sich das lokale Maximum der Funktion bei einem niedrigeren Funktionswert „nach links". Das bedeutet, dass die maximale Blutkonzentration früher erreicht wird und geringer ist.

Bei Patient P_3 ist (bei der Bateman-Funktion) der Wert von a kleiner und der Wert von b größer als bei (der Bateman-Funktion von) Patient P_1.

c)

$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☒

Die Funktionsgleichung lautet $D(V) = \frac{19{,}5}{\lambda} \cdot V$.
Es handelt sich um eine lineare Funktion.

Treibstoffverbrauch

Aufgabennummer: 2_015	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 1.5, FA 2.3, FA 2.5

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Fast vier Fünftel aller Güter werden zumindest auf einem Teil ihres Weges vom Erzeuger zum Konsumenten mit dem Schiff transportiert.

In der Schifffahrt werden Entfernungen in Seemeilen (1 sm = 1,852 km) und Geschwindigkeiten in Knoten (1 K = 1 sm/h) angegeben.

Der stündliche Treibstoffverbrauch y (in Tonnen pro Stunde) des Schiffs *Ozeanexpress* kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x (in Knoten) durch die Gleichung $y = 0{,}00002x^4 + 0{,}6$ beschrieben werden. Dieses Schiff hat noch einen Treibstoffvorrat von 600 Tonnen.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Formel für die Zeit t (in Stunden) an, die das Schiff mit einer konstanten Geschwindigkeit x unterwegs sein kann, bis dieser Treibstoffvorrat aufgebraucht ist.

Die Funktion f soll den Weg $f(x)$ beschreiben, den das Schiff mit diesem Treibstoffvorrat bei einer konstanten Geschwindigkeit x zurücklegen kann. Geben Sie den Term der Funktion f an!

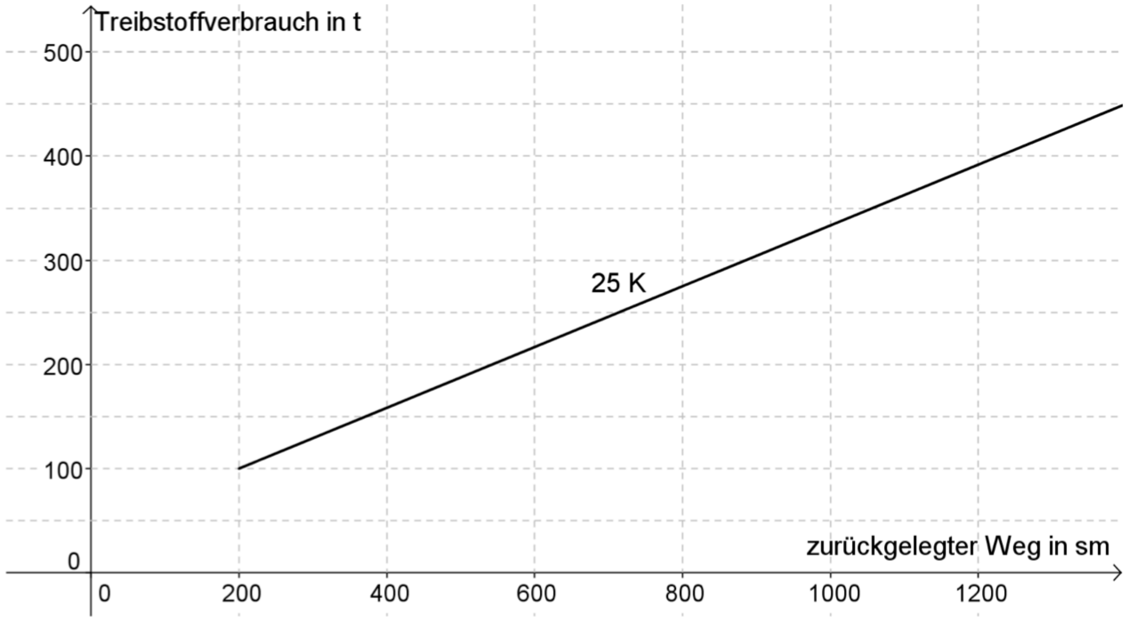
Die Funktion f hat in H (10|7 500) ein Maximum. Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punktes im vorliegenden Kontext!

b) Der Chef eines Schifffahrtsunternehmens stellte fest, dass sich der Treibstoffverbrauch um rund 50 % verringert, wenn Schiffe statt mit 25 nur noch mit 20 Knoten unterwegs sind.

In der nachstehenden Grafik wird der Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg bei einer Geschwindigkeit von 25 Knoten dargestellt.

Überlegen Sie, wie sich diese Grafik ändert, wenn die Geschwindigkeit nur 20 Knoten beträgt, und zeichnen Sie den entsprechenden Graphen ein!

Interpretieren Sie, was die 50%ige Treibstoffreduktion für die Steigung der Geraden bedeutet!



c) Eine Reederei hat den Auftrag erhalten, in einem vorgegebenen Zeitraum eine bestimmte Warenmenge zu transportieren. Ursprünglich plante sie, dafür acht Schiffe einzusetzen.

Geben Sie an, wie viele zusätzliche Schiffe gleichen Typs bei einer Drosselung der Geschwindigkeit von 25 auf 20 Knoten erforderlich sind, damit der Auftrag zeitgerecht ausgeführt werden kann! (Die Stehzeiten der Schiffe sind dabei zu vernachlässigen.)

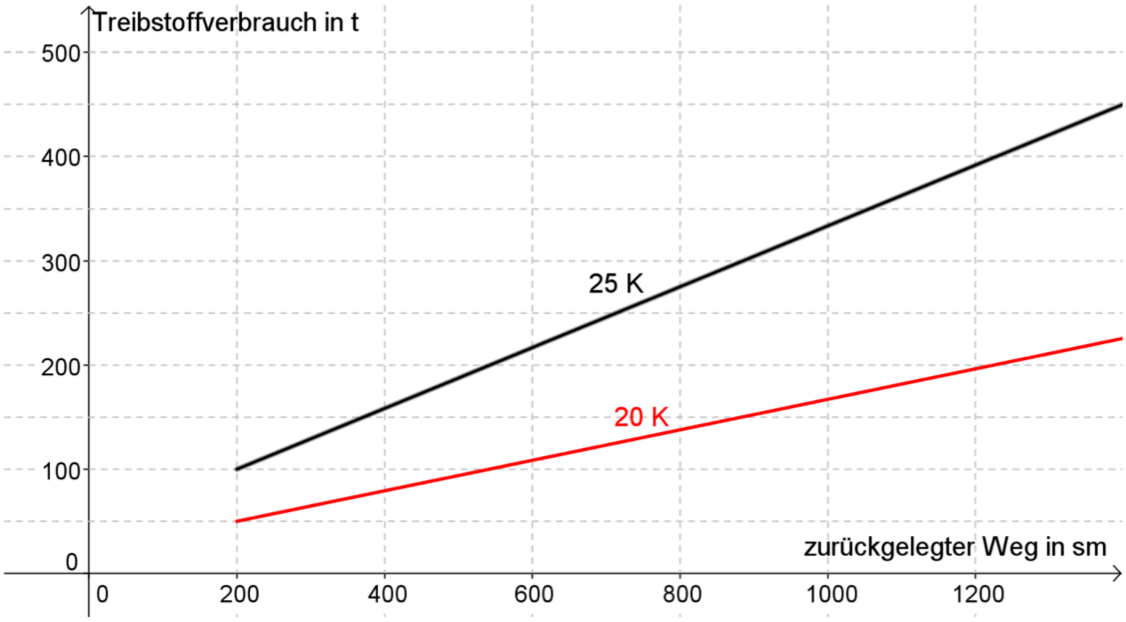
Geben Sie eine Formel an, mit der die erforderliche Anzahl der Schiffe in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x ermittelt werden kann!

Möglicher Lösungsweg

a) $t = \frac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6}$; $f(x) = \frac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6} \cdot x$

Bei einer Geschwindigkeit von 10 Knoten kann mit dem vorhandenen Treibstoff die längste Strecke, nämlich 7 500 Seemeilen, zurückgelegt werden.

b)



Die Steigung der Geraden wird halbiert, wenn die Treibstoffverbrauch um 50 % reduziert wird.

c) Es müssen zwei weitere Schiffe eingesetzt werden.

Anzahl der Schiffe $= \frac{200}{x}$

Gewinnfunktion

Aufgabennummer: 2_009	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

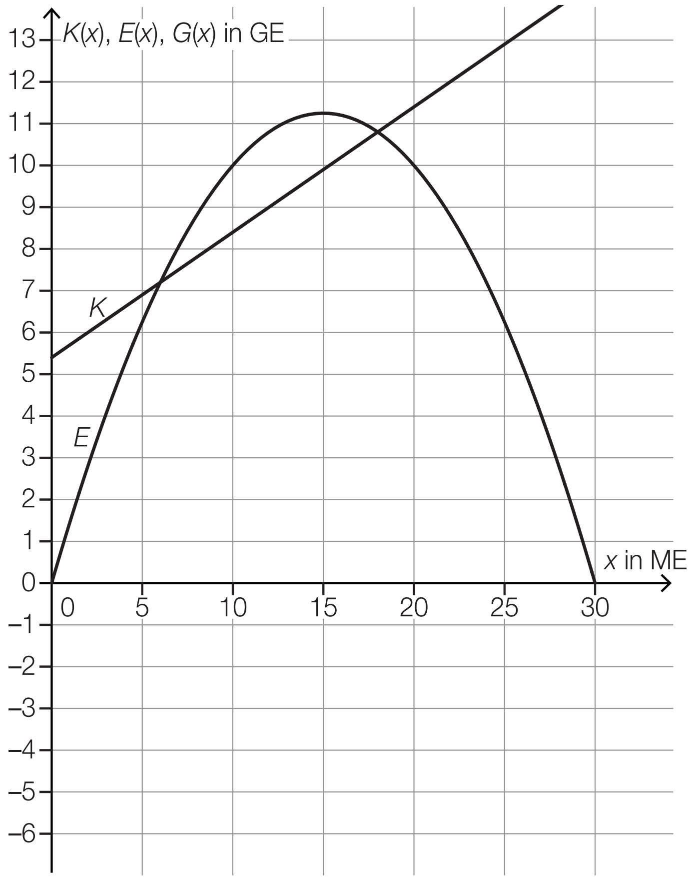
In einem bestimmten Unternehmen werden die Entwicklungen der Kosten K und des Erlöses E in Abhängigkeit von der produzierten Menge x eines bestimmten Produkts beobachtet.
Die Erlösfunktion E mit $E(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x$ und die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$ beschreiben modellhaft diese Entwicklungen (x in Mengeneinheiten ME und $E(x)$, $K(x)$ in Geldeinheiten GE). Alle produzierten Mengeneinheiten werden vom Unternehmen verkauft.

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von E und K.

2) Interpretieren Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte im Hinblick auf den Gewinn des Unternehmens.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der Erlösfunktion E und der Kostenfunktion K.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion G ein.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, wie hoch der Gewinn bei maximalem Erlös ist.

Gewinn bei maximalem Erlös: rund ______________________ GE

c) 1) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn, wenn 13 ME produziert und verkauft werden.

Die Gewinnzone entspricht dem Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion.

2) Argumentieren Sie, dass eine Senkung der Fixkosten eine breitere Gewinnzone bewirkt.

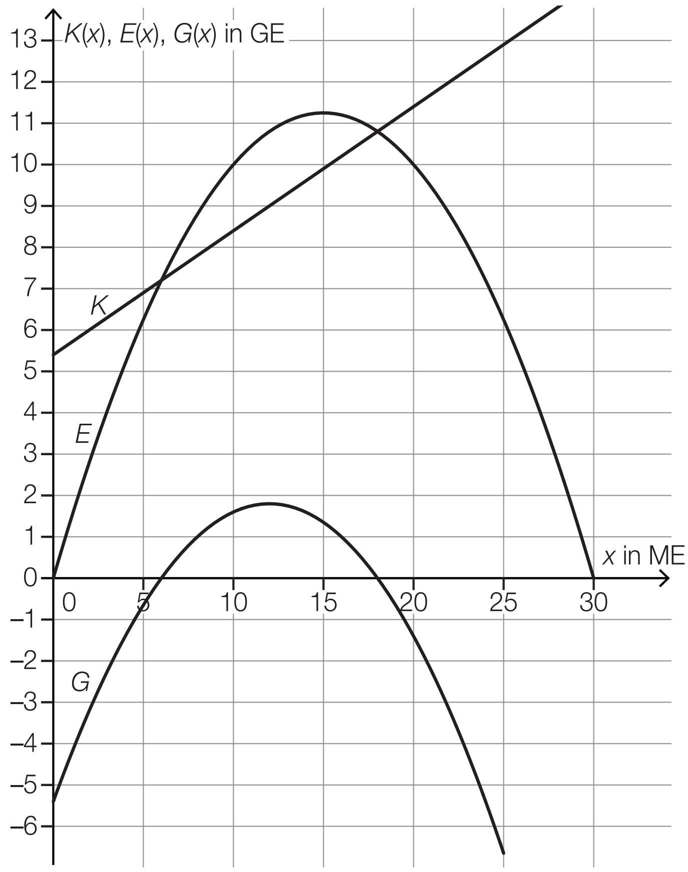
3) Erklären Sie, warum eine Veränderung der Fixkosten keine Auswirkung auf diejenige Stückzahl hat, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.

Lösungserwartung

a1) $E(x) = K(x)$
$\Rightarrow \quad S_1 = (6|7{,}2),\ S_2 = (18|10{,}8)$

a2) Bei 6 ME und einem Erlös von 7,2 GE bzw. bei 18 ME und einem Erlös von 10,8 GE macht dieses Unternehmen keinen Gewinn.

b1)



b2) Gewinn bei maximalem Erlös: rund 1,3 GE

c1) $G(13) = 1{,}75$ GE

c2) Eine Senkung der Fixkosten bewirkt einen höheren Gewinn für jede Stückzahl. Dadurch verschiebt sich die Gewinnfunktion senkrecht „nach oben“, was einen größeren Abstand der Nullstellen und damit eine breitere Gewinnzone zur Folge hat.

c3) Eine Veränderung der Fixkosten bewirkt eine senkrechte Verschiebung der Gewinnfunktion. Dies verändert jedoch nicht die Stelle, an der der Gewinn maximal ist.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koordinaten.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.
b2) Ein Punkt ffür das richtige Ablesen.
Toleranzintervall: [1,2; 1,5]

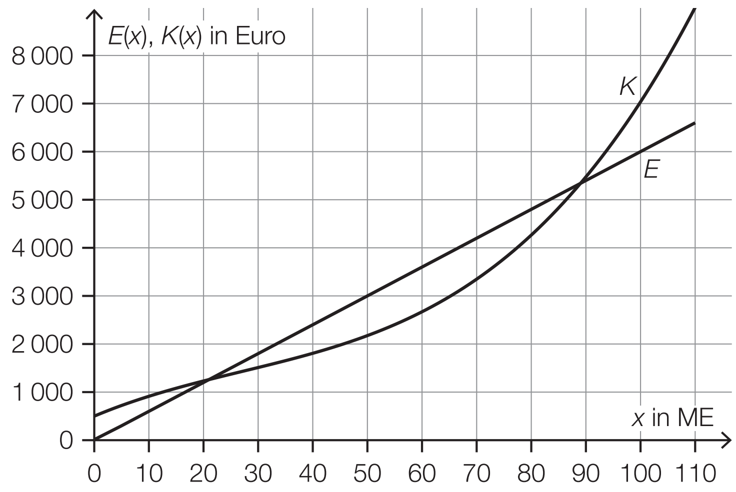
c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
c2) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
c3) Ein Punkt für das richtige Erklären.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Produktionskosten

Aufgabennummer: 2_016	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E eines bestimmten Betriebes. Mit x wird die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag eines bestimmten Produkts bezeichnet. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.



Aufgabenstellung:

a) 1) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich.

2) Erklären Sie anhand der Funktionsgraphen, warum sich durch eine Senkung des Verkaufspreises der Gewinnbereich verkleinert.

b) 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME ab.

Fixkosten: __________ Euro

Verkaufspreis pro ME: __________ Euro

Der Verkaufspreis wird um 25 % verringert.

2) Berechnen Sie den Erlös für 110 ME.

c) Zwei der nachstehenden Aussagen treffen auf die in der obigen Abbildung dargestellten Produktionskosten zu.

1) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

$K''(10) > K''(70)$	☐
$K''(60) > 0$	☐
Der Kostenzuwachs ist bei $x = 80$ maximal.	☐
Für alle $x \in [0; 110]$ gilt: $K'(x) > 0$.	☐
Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.	☐

d) 1) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung diejenige Produktionsmenge x_1, für die $K'(x_1) = E'(x_1)$ gilt.

x_1 = ____ ME

2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am höchsten ist.

Lösungserwartung

a1) Gewinnbereich: [21; 89]

a2) Eine Senkung des Verkaufspreises bewirkt eine geringere Steigung des Graphen der Erlösfunktion. Dadurch schieben sich die Grenzen des Gewinnbereichs näher zusammen.

b1) Fixkosten: 500 Euro
Verkaufspreis pro ME: 60 Euro

b2) $110 \cdot 60 \cdot \frac{3}{4} = 4\,950$
Der Erlös für 110 ME beträgt 4.950 Euro.

c1)

$K''(60) > 0$	☒
Für alle $x \in [0; 110]$ gilt: $K'(x) > 0$.	☒

d1) $x_1 = 63$ ME

d2) An der gesuchten Stelle muss gelten: $G'(x_1) = 0$.
Aus $G(x) = E(x) - K(x)$ folgt $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.
Da $E'(x_1) = K'(x_1)$, folgt $G'(x_1) = 0$.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Gewinnbereichs, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.
Toleranzintervall untere Grenze: [20; 22]
Toleranzintervall obere Grenze: [88; 90]

a2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

b1) Ein Punkt für das Ablesen der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.
Toleranzintervall Fixkosten: [400; 600]
Toleranzintervall Verkaufspreis pro ME: [55; 65]

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erlöses.

c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

d1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Produktionsmenge.
Toleranzintervall: [60; 66]

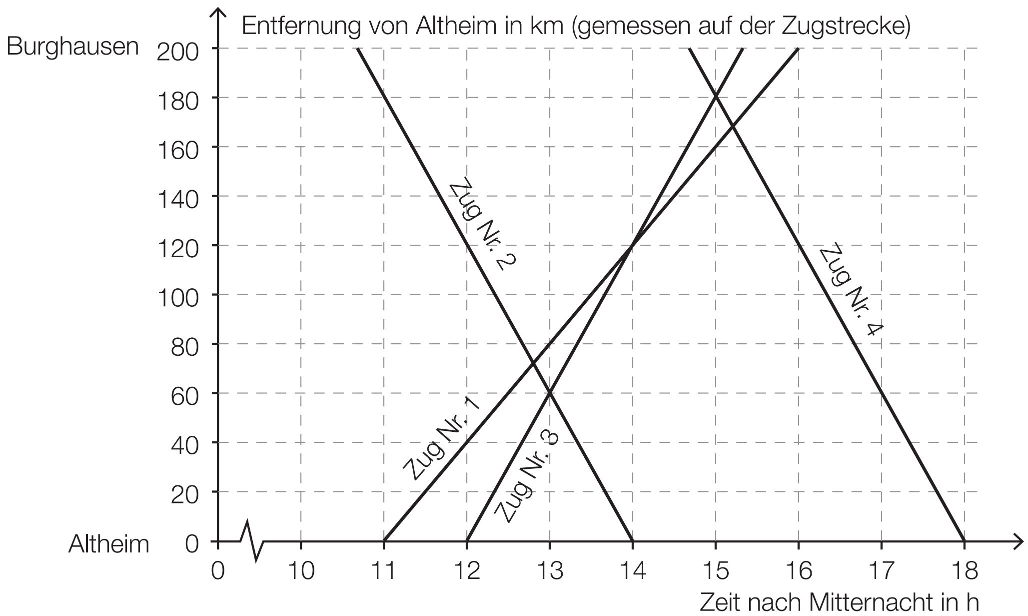
d2) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Eisenbahn

Aufgabennummer: 2_069	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.6, FA 1.7, FA 2.2, FA 2.3	

In der nachstehenden Abbildung ist ein sogenannter Bildfahrplan für Züge zwischen Altheim und Burghausen dargestellt. Die Züge fahren dabei – vereinfacht betrachtet – mit konstanter Geschwindigkeit.



a) Zug Nr. 3 fährt um 12:00 Uhr in Altheim ab.
Zug Nr. 4 fährt um 14:40 Uhr in Burghausen ab.
Auf der Fahrt zu ihren Zielbahnhöfen begegnen die beiden Züge einander.

1) Lesen Sie aus dem obigen Bildfahrplan ab, wann und wie weit von Burghausen entfernt die beiden Züge einander begegnen.

b) 1) Argumentieren Sie, dass die Züge Nr. 2 und Nr. 4 mit der gleichen Geschwindigkeit fahren.

c) Die Fahrt eines Zuges Nr. 5 wird durch die Funktion s beschrieben. Es gilt:

$s(t) = -80 \cdot t + 1\,160$

t ... Zeit nach Mitternacht in h
$s(t)$ ... Entfernung von Altheim zur Zeit t in km

1) Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der Zug Nr. 5 in Burghausen abfährt.

d) Eine Eisenbahnstrecke hat eine Länge von 200 km. Nach einer Sanierung der Gleise können die Züge mit einer um 10 km/h höheren Geschwindigkeit fahren. Die Fahrzeit wird dadurch um eine halbe Stunde vermindert.
Zur Verdeutlichung sind die Angaben in der nachstehenden Tabelle dargestellt.
t ist dabei die Fahrzeit vor der Sanierung in Stunden.

	Streckenlänge in km	Geschwindigkeit in km/h	Fahrzeit in h
nach der Sanierung	200	$\left(\frac{200}{t} + 10\right)$	$\left(t - \frac{1}{2}\right)$

1) Berechnen Sie t.

Lösungserwartung

a1) Die beiden Züge begegnen einander um 15:00 Uhr, 20 km von Burghausen entfernt.

b1) Die beiden Züge benötigen für die Strecke Burghausen – Altheim gleich lang, sie fahren also mit der gleichen Geschwindigkeit.

oder:

Die zugehörigen Geraden im Bildfahrplan haben die gleiche Steigung.

c1) $s(t) = 200$

oder:

$-80 \cdot t + 1\,160 = 200$

$t = \frac{200 - 1\,160}{-80} = 12$

Zug Nr. 5 fährt um 12 Uhr in Burghausen ab.

d1) $200 = \left(\frac{200}{t} + 10\right) \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$

$t_1 = 3{,}422...$

$(t_2 = -2{,}922...)$

Die Fahrzeit vor der Sanierung betrug etwa 3,42 h.

Angebot und Nachfrage*

Aufgabennummer: 2_056	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.6, AN 1.3, AN 3.3	

Ein Aufeinandertreffen von Anbietern und Nachfragern wird in der Wirtschaftswissenschaft als *Markt* bezeichnet. Gibt es auf einem Markt genau einen Anbieter für eine Ware, so ist dieser in der Lage, den Preis der Ware zu bestimmen, wobei die nachgefragte und damit absetzbare Menge der Ware vom Preis abhängt. Um bei gewissen Problemstellungen mit der Kosten-, Erlös- und/oder Gewinnfunktion arbeiten zu können, wird häufig der Preis als sogenannte Preisfunktion der Nachfrage p_N in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge x der Ware angegeben.

Die nachstehenden Aufgaben sind für die Preisfunktion der Nachfrage p_N mit $p_N(x) = 36 - x^2$ zu bearbeiten. Dabei wird x in Mengeneinheiten (ME) und $p_N(x)$ in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) angegeben.

Aufgabenstellung:

a) Alle $x \in \mathbb{R}_0^+$, für die $p_N(x) \geq 0$ gilt, liegen im Intervall $[x_0; x_n]$.

1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion p_N in diesem Intervall $[x_0; x_n]$ und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf den Verkaufspreis.

2) Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass für alle x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$ aus dem Intervall $(x_0; x_n)$ die Ungleichung $p_N(x_1) > p_N(x_2)$ gilt.

b) Der Erlös durch die verkaufte Menge der Ware wird durch die Funktion E mit $E(x) = x \cdot p_N(x)$ beschrieben. Der Grenzerlös $E'(x)$ bei einer bestimmten Absatzmenge x beschreibt näherungsweise die Änderung des Erlöses bezogen auf eine zusätzlich abgesetzte Mengeneinheit.

1) Ermitteln Sie diejenige Menge x_E, bei der der Erlös maximal ist.

2) Begründen Sie, warum der Grenzerlös für jede verkaufte Menge x mit $0 < x < x_E$ positiv ist.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

c) Gibt es auf einem Markt viele Anbieter einer Ware, dann werden diese in der Regel bei steigendem Preis auch eine größere Menge der Ware anbieten. Dieser Zusammenhang kann als Preisfunktion des Angebots p_A in Abhängigkeit von der angebotenen Menge x beschrieben werden (mit x in ME und $p_A(x)$ in GE/ME).
Diejenige Menge der Ware, bei der der Preis für die angebotene Menge und der Preis für die nachgefragte Menge gleich groß sind, nennt man Gleichgewichtsmenge x_G. Den zugehörigen Preis nennt man Gleichgewichtspreis.

1) Ermitteln Sie für die gegebene Funktion p_N und die Funktion p_A mit $p_A(x) = 4 \cdot x + 4$ die Gleichgewichtsmenge x_G und den zugehörigen Gleichgewichtspreis.

Für eine Ware wird ein Preis p_M festgelegt, der um 2 GE/ME größer als der ermittelte Gleichgewichtspreis ist.

2) Bestimmen Sie die angebotene und die nachgefragte Menge für diesen Preis p_M und vergleichen Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die verkaufte Menge der Ware.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

a1) Intervall: $x_0 = 0$ ME, $x_n = 6$ ME $\Rightarrow$ [0 ME; 6 ME]

mittlere Änderungsrate: $\frac{p_N(6) - p_N(0)}{6 - 0} = \frac{0 - 36}{6} = -6$

mögliche Deutung:

Pro zusätzlicher Mengeneinheit, die verkauft werden soll, nimmt der Verkaufspreis im Intervall [0; 6] durchschnittlich um 6 GE/ME ab.

a2) mögliche Vorgehensweise:

Die angegebene Ungleichung besagt, dass die Funktion p_N im angegebenen Definitionsbereich streng monoton fallend ist. Das ist sicher dann der Fall, wenn $p_N'(x)$ negativ (oder für einzelne Stellen null) für alle $x \in (0; 6)$ ist.
Überprüfung: $p_N'(x) = -2 \cdot x$ und es gilt: $-2 \cdot x < 0$ für alle $x \in (0; 6)$

b1) $E(x) = x \cdot p_N(x) = -x^3 + 36 \cdot x$

$E'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 \cdot x^2 + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{12} \quad (x_2 = -\sqrt{12}) \quad \Rightarrow \quad x_E \approx 3{,}46$ ME

b2) mögliche Begründung:

Die Funktion E' ist eine nach unten offene Parabel, die an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert $E'(0) = 36$ hat und an der Stelle $x_E = \sqrt{12}$ eine Nullstelle hat. Also sind sämtliche Funktionswerte von E' (und damit der Grenzerlös für jede verkaufte Menge x) im Intervall $(0; x_E)$ positiv.

c1) $p_A(x) = p_N(x) \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot x + 4 = -x^2 + 36 \quad \Rightarrow \quad x_G = 4$ ME
Gleichgewichtspreis $= p_A(4) = p_N(4) = 20$

Bei der Gleichgewichtsmenge von $x_G = 4$ ME beträgt der zugehörige Gleichgewichtspreis 20 GE/ME.

c2) $p_M = 22$ GE/ME

angebotene Menge: $22 = 4 \cdot x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4{,}5$ ME
nachgefragte Menge: $22 = -x^2 + 36 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{14} \quad (x_2 = -\sqrt{14}) \quad \Rightarrow \quad x \approx 3{,}74$ ME

möglicher Vergleich:

Die nachgefragte Menge ist kleiner als die angebotene Menge, d. h., die Ware wird nicht zur Gänze verkauft.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Deutung.
a2) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis mithilfe der Differenzialrechnung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
b2) Ein Punkt für eine richtige Begründung. Andere richtige Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte, wobei die entsprechenden Einheiten nicht angeführt sein müssen.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
c2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte, wobei die entsprechenden Einheiten nicht angeführt sein müssen, und für einen richtigen Vergleich.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Lachsbestand*

Aufgabennummer: 2_039	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.4, FA 1.6, AN 3.3, WS 1.1

Der kanadische Wissenschaftler W. E. Ricker untersuchte die Nachkommenanzahl von Fischen in Flüssen Nordamerikas in Abhängigkeit von der Anzahl der Fische der Elterngeneration. Er veröffentlichte 1954 das nach ihm benannte Ricker-Modell.
Der zu erwartende Bestand $R(n)$ einer Nachfolgegeneration kann näherungsweise anhand der sogenannten Reproduktionsfunktion R mit $R(n) = a \cdot n \cdot e^{-b \cdot n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ aus dem Bestand n der jeweiligen Elterngeneration ermittelt werden.
Lachse kehren spätestens vier Jahre nach dem Schlüpfen aus dem Meer an ihren „Geburtsort" zurück, um dort zu laichen, d.h., die Fischeier abzulegen. Nach dem Laichen stirbt der Großteil der Lachse.
Ricker untersuchte unter anderem die Rotlachspopulation im Skeena River in Kanada. Die nachstehende Tabelle gibt die dortigen Lachsbestände in den Jahren von 1908 bis 1923 an, wobei die angeführten Bestände Mittelwerte der beobachteten Bestände jeweils vier aufeinanderfolgender Jahre sind.

Zeitraum	beobachteter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1908–31.12.1911	1 098
01.01.1912–31.12.1915	740
01.01.1916–31.12.1919	714
01.01.1920–31.12.1923	615

Datenquelle: http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/s00/math121/lectures/product_rule/product.html [01.02.2018] (adaptiert).

Anhand dieser Daten für den Lachsbestand im Skeena River wurden für die Reproduktionsfunktion R die Parameterwerte $a = 1{,}535$ und $b = 0{,}000783$ ermittelt ($R(n)$ und n in tausend Lachsen).

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie für die Lachspopulation im Skeena River für $n > 0$ mithilfe der Reproduktionsfunktion die Lösung n_0 der Gleichung $R(n) = n$ in tausend Lachsen!

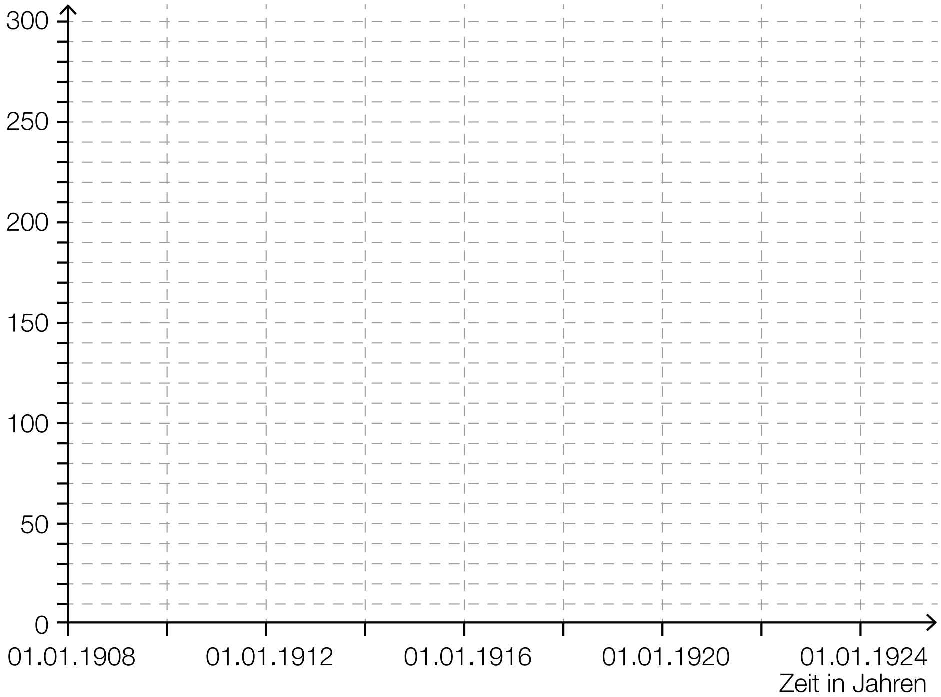
Interpretieren Sie n_0 im gegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extrempunkts $E = (n_E | R(n_E))$ der Reproduktionsfunktion R in Abhängigkeit von a und b und zeigen Sie, dass n_E für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ eine Stelle eines lokalen Maximums ist!

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a der Bestand $R(n_E)$ der Nachfolgegeneration stets größer als der vorherige Bestand n_E ist!

c) Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle der beobachteten Lachsbestände (in tausend Lachsen) durch ein Histogramm dar, wobei die absoluten Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken abgebildet werden sollen!



Das von Ricker entwickelte Modell zählt zu den Standardmodellen zur Beschreibung von Populationsentwicklungen. Dennoch können die mithilfe der Reproduktionsfunktion berechneten Werte mehr oder weniger stark von den beobachteten Werten abweichen.

Nehmen Sie den beobachteten durchschnittlichen Lachsbestand von 1 098 (im Zeitraum von 1908 bis 1911) als Ausgangswert, berechnen Sie damit für die jeweils vierjährigen Zeiträume von 1912 bis 1923 die laut Reproduktionsfunktion zu erwartenden durchschnittlichen Lachsbestände im Skeena River und tragen Sie die Werte in die nachstehende Tabelle ein!

Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	
01.01.1916–31.12.1919	
01.01.1920–31.12.1923	

Lösungserwartung

a) $n_0 \approx 547$

Mögliche Interpretation:
Im gegebenen Kontext gibt n_0 denjenigen Lachsbestand an, bei dem die Anzahl der Lachse der Nachfolgegeneration unverändert bleibt.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$R'(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad n_E = \frac{1}{b}$

$R\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b \cdot e}$

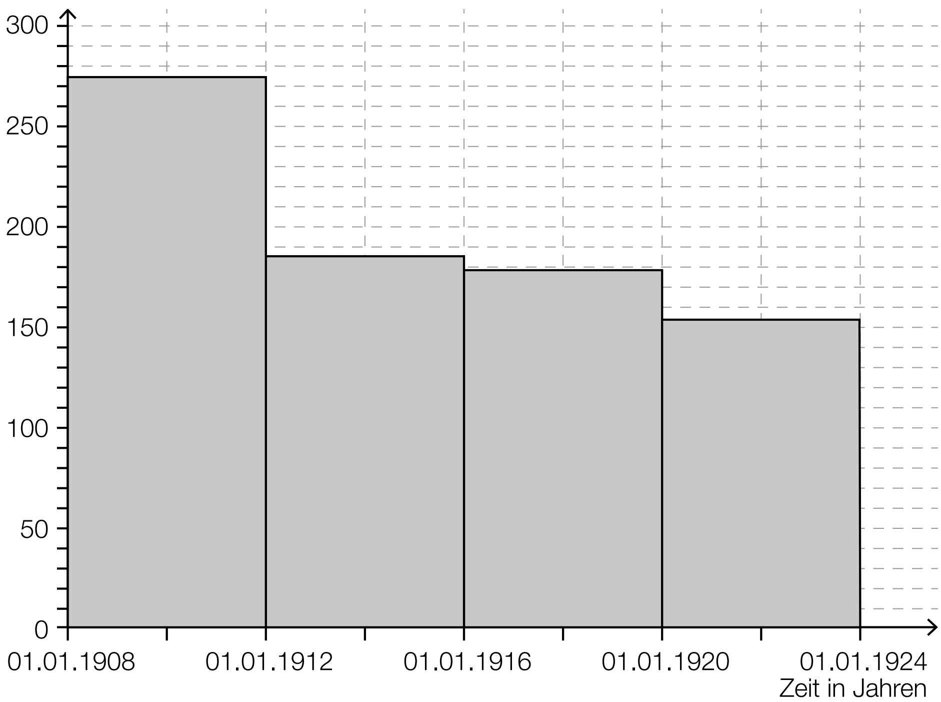
$\Rightarrow \quad E = \left(\frac{1}{b} \middle| \frac{a}{b \cdot e}\right)$

Möglicher Nachweis:

$R''\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{a \cdot b}{e} < 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad$ Maximumstelle

$\frac{a}{b \cdot e} > \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a > e$

c)



Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	713
01.01.1916–31.12.1919	626
01.01.1920–31.12.1923	589

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
   Toleranzintervall für den Lachsbestand: [547; 548]
   – Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von *E* und einen korrekten Nachweis.
   – Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) – Ein Punkt für ein korrektes Histogramm.
   – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte in der Tabelle.

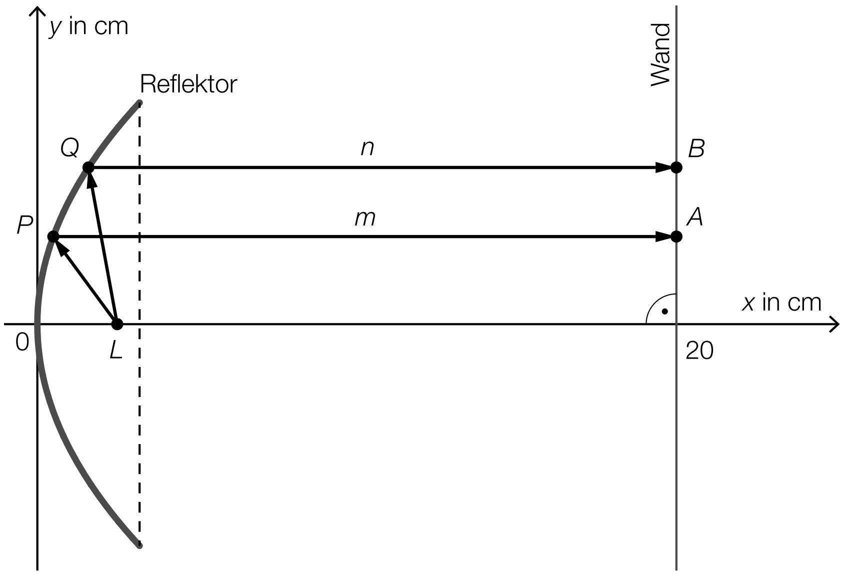
Taschenlampen

Ein Betrieb produziert und verkauft Taschenlampen.

Aufgabenstellung:

a) Der vordere Teil einer bestimmten Taschenlampe besteht aus der punktförmigen Lichtquelle L und einem Reflektor, der die Lichtquelle umgibt.

Der Querschnitt des vorderen Teiles dieser Taschenlampe ist in der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung in einem Koordinatensystem modellhaft dargestellt.



Zwei geradlinige Lichtstrahlen gehen von der Lichtquelle L aus und werden in den Punkten P und Q vom Reflektor parallel zur x-Achse auf eine Wand umgelenkt. Dort treffen sie in den Punkten A und B auf.

$L = (2{,}5\,|\,0)$
$\overline{LP} = 3$ cm und $\overline{LQ} = 4{,}1$ cm
$A = (20\,|\,y_A)$ und $B = (20\,|\,y_B)$
$m = 19{,}5$ cm

Es gilt: $\overline{LP} + m = \overline{LQ} + n$

1) Berechnen Sie y_B. *[0/1 P.]*

b) Bei der Kontrolle einer Lieferung werden Taschenlampen auf die Fehler F_1, F_2 und F_3 hin überprüft. Diese 3 Fehler treten unabhängig voneinander auf.

In der nachstehenden Tabelle sind diese Fehler und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten angegeben.

Fehler	Beschreibung	Wahrscheinlichkeit
F_1	Die Taschenlampe ist defekt.	p_1
F_2	Die Taschenlampe hat die falsche Farbe.	0,02
F_3	Die Taschenlampe hat keine Aufbewahrungstasche.	0,01

Eine Taschenlampe wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt und überprüft.

1) Ordnen Sie den vier Ereignissen jeweils die auf jeden Fall zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis F zu. *[0/½/1 P.]*

Die Taschenlampe ist defekt und hat die falsche Farbe.	☐
Die Taschenlampe hat die richtige Farbe.	☐
Die Taschenlampe ist nicht defekt, sie hat die richtige Farbe und sie hat keine Aufbewahrungstasche.	☐
Die Taschenlampe weist mindestens 1 dieser 3 Fehler auf.	☐

A	0,98
B	$1 - (1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99$
C	$p_1 \cdot 0{,}02$
D	$1 - p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
E	$p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
F	$(1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}01$

c) Die Gesamtkosten für die Herstellung der Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x können durch die differenzierbare Kostenfunktion K modelliert werden.

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' hat die Funktionsgleichung
$K'(x) = 0{,}33 \cdot x^2 - 1{,}8 \cdot x + 3$.

Es gilt: $K(1) = 44{,}21$

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

$K(x) =$ ____________________________________ *[0/1 P.]*

Im Folgenden wird angenommen, dass jede produzierte Taschenlampe auch verkauft wird.

Der Erlös aus dem Verkauf dieser Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x kann durch die Funktion E modelliert werden.

$E(x) = a \cdot x$

x ... Produktionsmenge in ME
$E(x)$ ... Erlös bei der Produktionsmenge x in GE
a ... Preis in GE/ME

Der Gewinn wird durch die Gewinnfunktion G modelliert (x in ME, $G(x)$ in GE).

Das Betriebsziel ist, bei einer Produktion und einem Verkauf von 5 ME Taschenlampen einen Gewinn von mindestens 100 GE zu erzielen.

2) Berechnen Sie den kleinstmöglichen Preis, mit dem dieses Betriebsziel erreicht wird.
[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $3 + 19{,}5 = 4{,}1 + n$
$n = 18{,}4$
$y_B = \sqrt{4{,}1^2 - (18{,}4 - 17{,}5)^2} = 4$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von y_B.

b1)

Die Taschenlampe ist defekt und hat die falsche Farbe.	C
Die Taschenlampe hat die richtige Farbe.	A
Die Taschenlampe ist nicht defekt, sie hat die richtige Farbe und sie hat keine Aufbewahrungstasche.	F
Die Taschenlampe weist mindestens 1 dieser 3 Fehler auf.	B

A	$0{,}98$
B	$1 - (1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99$
C	$p_1 \cdot 0{,}02$
D	$1 - p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
E	$p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
F	$(1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}01$

b1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

c1) $K(x) = 0{,}11 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 42$

c2) $G(x) = a \cdot x - (0{,}11 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 42)$
$G(5) \geq 100$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a \geq 29{,}65$

Der kleinstmögliche Preis beträgt 29,65 GE/ME.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von K.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

Bungee-Jumping

Bungee-Jumping ist eine Extremsportart, bei der man von einer Absprungplattform in großer Höhe an einem elastischen Seil befestigt in die Tiefe springt.

Aufgabenstellung:

a) Sabine unternimmt einen Bungeesprung. Dabei schwingt sie am Seil mehrmals auf und ab.

Ihre Höhe über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t wird modellhaft durch die Funktion $h\colon\ \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ beschrieben.

$$h(t) = a \cdot \left(e^{-0{,}03 \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + 1\right)$$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$h(t)$ ... Höhe über dem Boden zum Zeitpunkt t in m
a ... positiver Parameter

Zum Zeitpunkt $t = 0$ springt Sabine von der Absprungplattform in 90 m Höhe über dem Boden in die Tiefe.

1) Berechnen Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

Die gesamte Zeitdauer, in der sich Sabine während des Bungeesprungs in einer Höhe von mehr als 70 m über dem Boden befindet, wird mit d bezeichnet.

2) Ermitteln Sie d in Sekunden. *[0/1 P.]*

Nach Erreichen des tiefsten Punktes wird Sabine vom Seil wieder nach oben gezogen, bevor sie erneut fällt.

3) Berechnen Sie, wie viele Meter Sabine dabei nach oben gezogen wird. *[0/1 P.]*

Zum Zeitpunkt t_1 ist Sabines (vertikale) Fallgeschwindigkeit maximal.

4) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Für den Zeitpunkt t_1 gilt ______①______;
die Fallgeschwindigkeit kann mit ______②______ berechnet werden.

①	
$h''(t_1) > 0$	☐
$h''(t_1) < 0$	☐
$h''(t_1) = 0$	☐

②	
$h(t_1)$	☐
$\lvert h'(t_1) \rvert$	☐
$\int_0^{t_1} h(t)\,\mathrm{d}t$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $h(0) = a \cdot \left(e^{-0{,}03 \cdot 0} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{6}\right) + 1\right) = 90$

$2 \cdot a = 90$
$a = 45$

a2) $h(t) = 70$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 1{,}803...\quad t_2 = 10{,}663...\quad t_3 = 13{,}149...$
$d = t_1 + (t_3 - t_2) = 4{,}289...$

a3) $h'(t) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

lokales Minimum: $T_1 = (5{,}890...|7{,}351...)$
lokales Maximum: $H_1 = (11{,}890...|76{,}446...)$
$76{,}446... - 7{,}351... = 69{,}095...$

Sabine wird rund 69,1 m nach oben gezogen, bevor sie erneut fällt.

a4)

①	
$h''(t_1) = 0$	☒

②	
$\lvert h'(t_1)\rvert$	☒

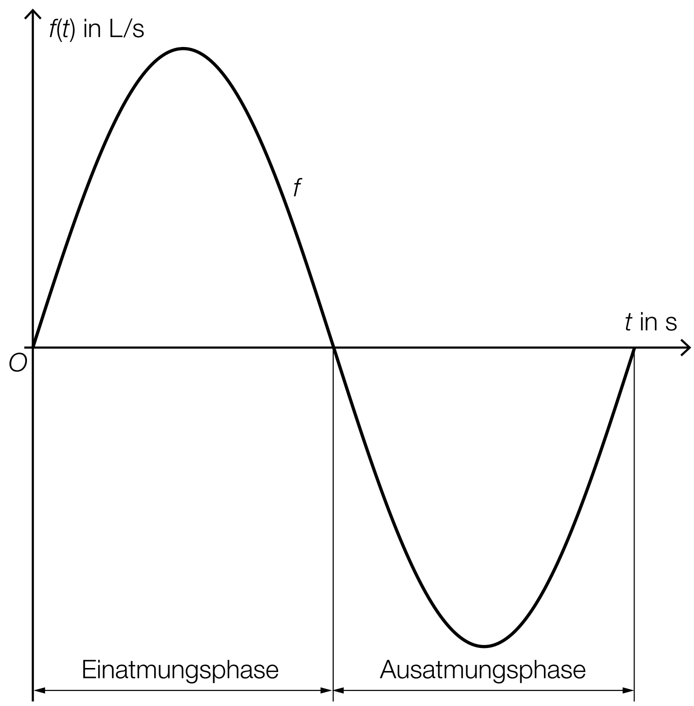
a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *a*.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von *d*.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen.
a4) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

Atemstromstärke

Unter *Atemstromstärke* versteht man die pro Zeiteinheit ein- bzw. ausgeatmete Luftmenge. Sie wird modellhaft durch die Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben (t in s, $f(t)$ in L/s).

Für die Atemstromstärke von Mathias gilt modellhaft:
$f(t) = 0{,}5 \cdot \sin(1{,}25 \cdot t)$

Ein Atemzyklus besteht aus einer vollständigen Einatmungsphase und einer vollständigen Ausatmungsphase. Die Beobachtung beginnt bei $t = 0$.
In der nachstehenden Abbildung ist ein Atemzyklus dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) In der Ausatmungsphase des betrachteten Atemzyklus von Mathias hat die Funktion f an der Stelle t_1 eine Extremstelle.

1) Ermitteln Sie t_1 (in s).

t_1 = ____ s *[0/1 P.]*

Im betrachteten Atemzyklus gibt t_2 mit $t_2 > 0$ denjenigen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge von Mathias erstmals nach Beginn des Atemzyklus minimal ist.

2) Ermitteln Sie t_2 (in s).

t_2 = ____ s *[0/1 P.]*

b) Zu Beginn einer Einatmungsphase befinden sich 3,5 Liter Luft in der Lunge von Mathias.

1) Interpretieren Sie die nachstehende Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$\int_0^{2,5} f(t)\,\mathrm{d}t + 3{,}5 \approx 4{,}29$ *[0/1 P.]*

Die Funktion V beschreibt das Volumen $V(t)$ der eingeatmeten Luft von Mathias während einer Einatmungsphase in Abhängigkeit von der Zeit t (Beginn der Einatmungsphase bei $t = 0$ und $V(0) = 0$, t in s, $V(t)$ in L).

2) Ergänzen Sie die beiden fehlenden Zahlen in der nachstehenden Funktionsgleichung von V.

$V(t) = -0{,}4 \cdot \cos(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot t) + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ *[0/½/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $t_1 = \frac{6 \cdot \pi}{5} = 3{,}76...$

$t_1 = 3{,}76...\ \text{s}$

a2) $t_2 = \frac{8 \cdot \pi}{5} = 5{,}02...$

$t_2 = 5{,}02...\ \text{s}$

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_2.

b1) 2,5 s nach Beginn der Einatmungsphase befinden sich rund 4,29 Liter Luft in der Lunge von Mathias.

b2) $V(t) = -0{,}4 \cdot \cos(1{,}25 \cdot t) + 0{,}4$

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das Ergänzen der beiden richtigen Zahlen, ein halber Punkt für nur eine richtige Zahl.

Kostenfunktion

Aufgabennummer: 2_012	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Bei einem bestimmten Unternehmen werden die Produktionskosten untersucht. Im ersten Jahr gilt modellhaft für dieses Unternehmen:

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 350 \cdot x + 20\,000$

x … Produktionsmenge in ME ($x \in \mathbb{R}_0^+$)
$K(x)$ … Produktionskosten in GE

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie, um wie viel sich die Grenzkosten bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten (das heißt bei Erhöhung des Produktionsumfangs von 50 ME auf 51 ME) bei diesem Unternehmen unterscheidet.

Für $K(x)$ gilt die Aussage: „Die Grenzkosten sind stets positiv.“

2) Begründen Sie, warum diese Aussage richtig ist.

b) Für die Festlegung des Produktionsplans ist es erforderlich, die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME in Abhängigkeit von der Produktionsmenge zu kennen. Die Stückkostenfunktion gibt die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME an.

1) Stellen Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$ dieses Unternehmens auf.

2) Berechnen Sie, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Stückkosten für dieses Unternehmen am geringsten sind.

c) Im zweiten Jahr können die Produktionskosten dieses Unternehmens durch eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + 100 \cdot x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, x \in \mathbb{R}_0^+$ modellhaft beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie alle Werte für a so, dass ein progressiver Verlauf der Produktionskosten vorliegt.

Für diese Produktionskosten gilt:

- Die Fixkosten der Produktion betragen 15 000 GE.
- Die Produktionskosten für 100 ME betragen 30 000 GE.

2) Bestimmen Sie die Werte von a und c.

a = ____________________

c = ____________________

Lösungserwartung

a1) $K'(50) = 125$
$K(51) - K(50) = 123{,}51$
Unterschied: 1,49 GE

a2) $K(x)$ ist im angegebenen Bereich monoton steigend, deshalb ist $K'(x)$ stets positiv.

b1) $\overline{K}(x) = 0{,}01 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 350 + \frac{20\,000}{x}$

b2) $\overline{K}'(x) = 0$
$\Rightarrow \quad x = 180{,}64\ldots$

Bei einer Produktion von rund 181 ME sind die durchschnittlichen Stückkosten am geringsten.

c1) $a > 0$

c2) $a = 0{,}5$
$c = 15\,000$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Unterschieds.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Stückkostenfunktion.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Produktionsmenge.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Werte.
c2) Ein Punkt für das Bestimmen der beiden richtigen Werte.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Höhe der Schneedecke

Aufgabennummer: 2_FT001	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die Höhe einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit ab. Bei gleichbleibender Temperatur kann die Höhe einer Schneedecke bis zur vollständigen Schneeschmelze durch die Funktion h modellhaft beschrieben werden. Dabei gilt:

$h(t) = h_0 - a \cdot t^2$ mit $a > 0,\ t \geq 0$

t … Zeit in Tagen seit Beginn der Messung
h_0 … Höhe der Schneedecke zu Beginn der Messung in cm
$h(t)$ … Höhe der Schneedecke nach t Tagen in cm

Aufgabenstellung:

a) Eine 20 cm hohe Schneedecke ist nach einem halben Tag nur mehr 18 cm hoch.

1) Berechnen Sie, wie viele Tage nach Beginn der Messung die Schneedecke vollständig geschmolzen ist.

2) Beschreiben Sie, wie sich eine Erhöhung des Parameters a auf $h(t)$ auswirkt.

b) In einem Alpendorf gilt für die Höhe der Schneedecke in einem bestimmten Zeitraum $h_0 = 40$ und $a = 5$.

1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Höhe der Schneedecke in diesem Alpendorf innerhalb der ersten beiden Tage nach Beginn der Messung.

2) Interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

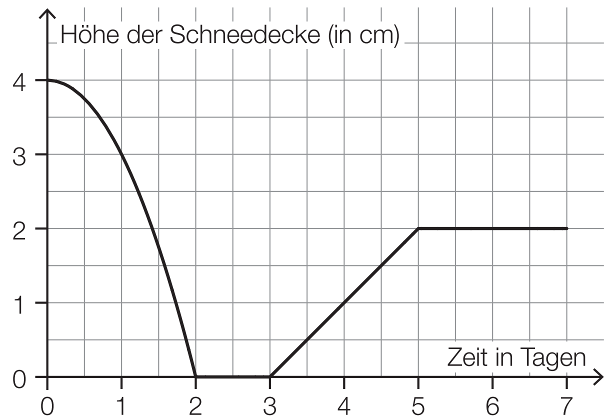
Die Berechnung der Höhe der Schneedecke ist nur in einem bestimmten Zeitintervall sinnvoll.

3) Ergänzen Sie die obere Intervallgrenze für dieses Zeitintervall.

Zeitintervall: [0; __________]

4) Interpretieren Sie $h'(0{,}5)$ im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe des konkreten Wertes.

c) Nachstehend ist modellhaft die Entwicklung der Höhe der Schneedecke in Zentimetern innerhalb einer Woche in einer bestimmten Stadt abgebildet.



Gerhard behauptet, dass es sich beim Verlauf der Höhe der Schneedecke nicht um den Graphen einer Funktion handelt.

1) Begründen Sie, warum seine Behauptung <u>nicht</u> richtig ist.

Der Graph kann im Intervall [3; 5] durch eine Funktion f mit $f(t) = k \cdot t + d$ beschrieben werden.

2) Geben Sie k und d an.

k = ______________________________

d = ______________________________

3) Beschreiben Sie unter Angabe konkreter Werte die Entwicklung der Höhe der Schneedecke im Intervall [3; 7].

Lösungserwartung

a1) $18 = 20 - a \cdot 0{,}5^2 \quad \Rightarrow \quad a = 8$
$20 - 8 \cdot t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1{,}58\ldots$ Tage

a2) Eine Erhöhung des Parameters a bewirkt, dass die Höhe der Schneedecke schneller abnimmt.

b1) $h(t) = 40 - 5 \cdot t^2$
$\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{20 - 40}{2} = -10$
Die mittlere Änderungsrate innerhalb der ersten beiden Tage beträgt –10 cm pro Tag.

b2) In den ersten beiden Tagen nimmt die Höhe der Schneedecke durchschnittlich um 10 cm pro Tag ab.

b3) Zeitintervall: $[0; \sqrt{8}]$

b4) $h'(0{,}5) = -5$
Zum Zeitpunkt $t = 0{,}5$ nimmt die Höhe der Schneedecke um 5 cm pro Tag ab.

c1) Der Graph beschreibt den Graphen einer Funktion, da jedem Zeitpunkt t eindeutig eine Schneehöhe $h(t)$ zugeordnet wird.

c2) $k = 1$
$d = -3$

c3) Im Zeitintervall [3; 5] nimmt die Höhe der Schneedecke von 0 cm auf 2 cm zu. Diese Höhe bleibt im Zeitintervall [5; 7] konstant.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
b3) Ein Punkt für das richtige Ergänzen.
b4) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe des richtigen Wertes.

c1) Ein Punkt für das richtige Erklären.
c2) Ein Punkt für das richtige Angeben der beiden Werte, ein halber Punkt für nur eine richtige Angabe.
c3) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Entwicklung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

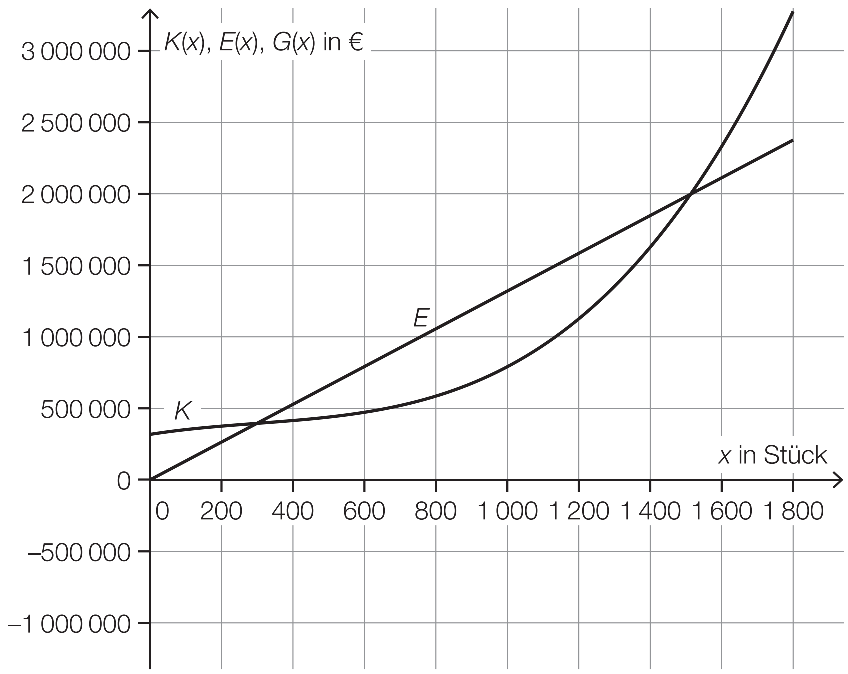
Erlös und Gewinn

Aufgabennummer: 2_011	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Ein bestimmter Betrieb produziert hochwertige Kameras. Die Produktionskosten K können in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x durch die nachstehende Funktionsgleichung modellhaft beschrieben werden.

$K(x) = 0{,}00077 \cdot x^3 - 0{,}693 \cdot x^2 + 396 \cdot x + 317\,900$

Es können monatlich maximal 1 800 Kameras produziert werden und es wird angenommen, dass alle produzierten Kameras auch verkauft werden.
Die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion G ein.

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Um den Break-even-Point bei einer geringeren Stückzahl zu erreichen, muss der Stückpreis _____①_____ und der Gewinnbereich wird _____②_____.

①	
kleiner werden	☐
größer werden	☐
gleich bleiben	☐

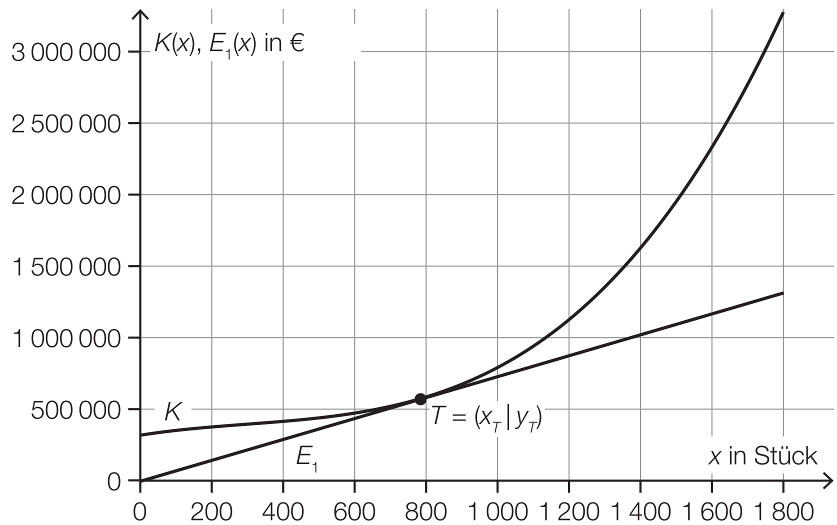
②	
kleiner	☐
größer	☐
nicht verändert	☐

b) Der Verkaufspreis einer Kamera soll € 1.320 betragen.

1) Stellen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G auf.

2) Berechnen Sie diejenige Stückzahl, bei der der Gewinn maximal wird.

c) In der nachstehenden Abbildung wurde die Erlösfunktion so geändert, dass die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E_1 einander im Punkt T berühren.



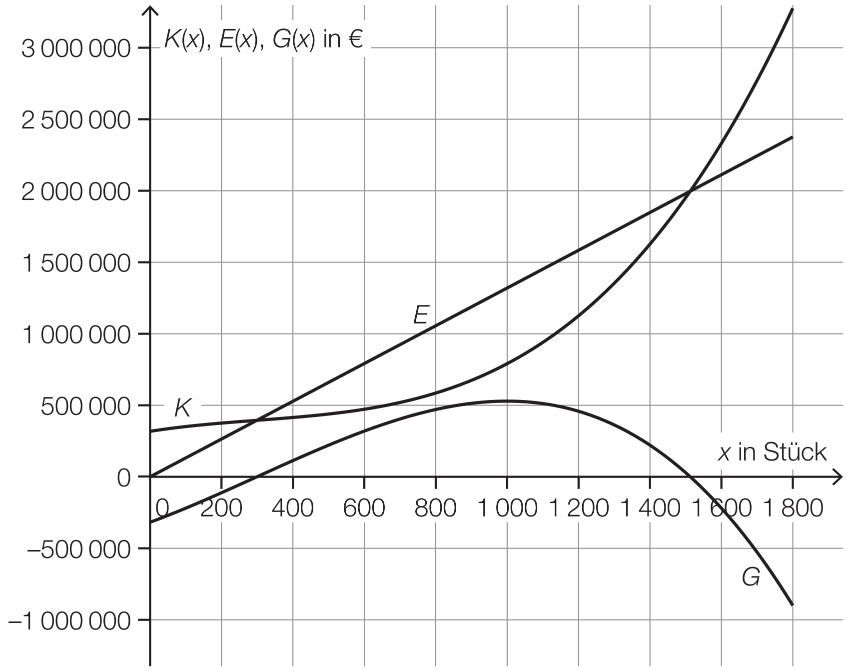
1) Interpretieren Sie die Koordinaten des Punktes T im Hinblick auf den Gewinn.

2) Stellen Sie die geänderte Erlösfunktion E_1 mithilfe der Koordinaten des Punktes T auf.

$E_1(x) =$ ____________________________________

Lösungserwartung

a1)



a2)

①	
größer werden	☒

②	
größer	☒

b1) $G(x) = 1\,320 \cdot x - (0{,}00077 \cdot x^3 - 0{,}693 \cdot x^2 + 396 \cdot x + 317\,900)$
$G(x) = -0{,}00077 \cdot x^3 + 0{,}693 \cdot x^2 + 924 \cdot x - 317\,900$

b2) $G'(x) = 0$
$x_1 = 1\,000 \quad (x_2 = -400)$
Der maximale Gewinn wird bei einer Stückzahl von 1 000 erreicht.

c1) Bei einer Produktionsmenge von x_T Stück wird kostendeckend produziert. Kosten und Erlös betragen je € y_T. Es ist nicht möglich, mit Gewinn zu produzieren.

c2) $E_1(x) = \frac{y_T}{x_T} \cdot x$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.
a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

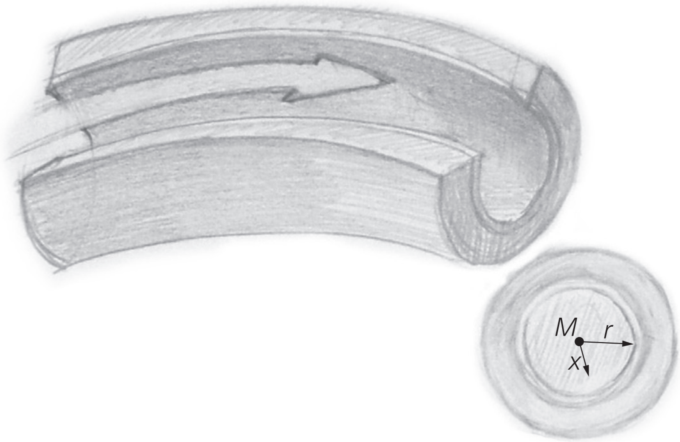
b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Stückzahl.

c1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Erlösfunktion.

Blutgefäß

Aufgabennummer: 2_FT002	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Ein Blutgefäß kann wie in der nachstehenden schematischen Darstellung mit kreisförmiger Querschnittsfläche angenommen werden.



Bildquelle: http://www.gefaesschirurgie-klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php [05.06.2013] (adaptiert).

Die Funktion v mit $v(x) = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v des Blutteilchens und seinem Abstand x zum Mittelpunkt M der Querschnittsfläche des Blutgefäßes.

Dabei gilt:

M … Mittelpunkt der Querschnittsfläche des Blutgefäßes
r … Innenradius der Querschnittsfläche des Blutgefäßes (in mm)
v_m … maximale Geschwindigkeit des Blutteilchens in M (in cm/s)
x … Abstand des Blutteilchens von M (in mm)
$v(x)$ … Geschwindigkeit des Blutteilchens bei x (in cm/s)

Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für v an.

$D = [$__________ ; __________$)$

b) Bei einem bestimmten Abstand x_1 des Blutteilchens von M beträgt seine Geschwindigkeit 75 % von v_m.

1) Berechnen Sie x_1.

c) 1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für $x(v)$ auf.

$x(v) =$ ____ mit $v \in (0; v_m]$

2) Berechnen Sie in Abhängigkeit von r denjenigen Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes, bei dem die Geschwindigkeit des Blutteilchens auf die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit abnimmt.

d) 1) Geben Sie die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit v beim Abstand x an.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Vorzeichens der momentanen Änderungsrate von $v(x)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a1) $D = [0; r)$

b1) $\frac{3}{4} \cdot v_\text{m} = v_\text{m} \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{r}{2}$

c1) $x(v) = r \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{v_\text{m}}}$ mit $v \in (0; v_\text{m}]$

c2) $x\left(\frac{v_\text{m}}{2}\right) = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2}$

d1) $v'(x) = -v_\text{m} \cdot \frac{2 \cdot x}{r^2}$

d2) Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeit des Blutteilchens bei steigendem Abstand vom Mittelpunkt abnimmt.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Definitionsbereichs.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung.
c2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

d1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen momentanen Änderungsrate.
d2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung des Vorzeichens.

Münzen

Aufgabennummer: 2_067	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, WS 2.3, WS 3.2	

Susi und Markus spielen mit fairen Münzen. Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf“ und „Zahl“ jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Susi hat eine Schachtel mit 3 Ein-Euro-Münzen und 5 Zwei-Euro-Münzen.
Markus hat eine Schachtel mit 2 Ein-Euro-Münzen und 3 Zwei-Euro-Münzen.
Beide ziehen aus ihrer Schachtel zufällig jeweils 1 Münze.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass durch die beiden Ziehungen ein Gesamtwert von € 3 erzielt wird.

b) Markus will eine Zwei-Euro-Münze 10-mal werfen.
Susi stellt die Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir mindestens 3-mal ‚Zahl‘?“

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen mindestens 3-mal „Zahl“ geworfen wird.

c) Susi und Markus beschäftigen sich mit der Wahrscheinlichkeit, mit der „Zahl“ beim wiederholten Werfen einer Münze auftritt. Dabei stoßen sie auf folgende Gleichung:

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}5^n = 0{,}9375$

X ... Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Zahl“

1) Berechnen Sie n.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes n in diesem Zusammenhang.

Lösungserwartung

a1) $P(S = 1 \text{ und } M = 2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}$

$P(S = 2 \text{ und } M = 1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist die gesuchte Lösung:

$\frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40} = 47{,}5\ \%$

b1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung: $n = 10$ und $p = 0{,}5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9453... \approx 94{,}5\ \%$

c1) $n = \frac{\ln(0{,}0625)}{\ln(0{,}5)} = 4$

c2) Der Wert n gibt an, wie oft man die Münze werfen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 93,75 % mindestens 1-mal „Zahl" geworfen wird.

Gold

Aufgabennummer: 2_090	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1	

Das Edelmetall Gold gilt als besonders wertvoll, weil es selten vorkommt, leicht zu Schmuck verarbeitet werden kann und sehr beständig ist.

a) Der *World Gold Council*, eine globale Lobby-Organisation der Goldminenindustrie, schätzt die bis zum Jahr 2012 weltweit geförderte Goldmenge auf rund $1{,}713 \cdot 10^8$ Kilogramm (kg).
Gold hat eine Dichte von 19,3 Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm^3). Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

Stellen Sie sich vor, dass die gesamte weltweit geförderte Goldmenge in einen Würfel gegossen wird.

1) Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels in Metern.

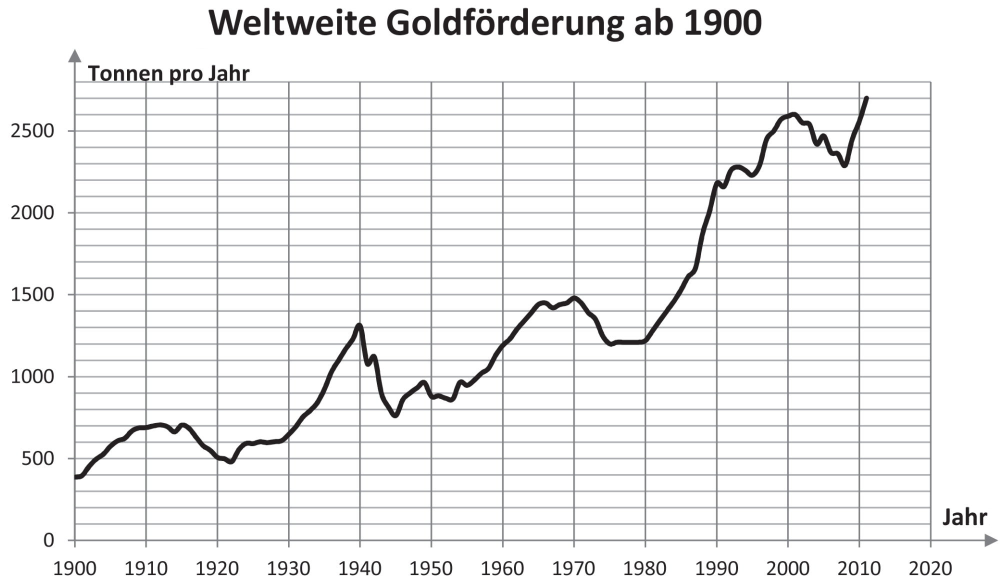
b) Gold kommt in der Natur auch in der Form von Nuggets (Goldklumpen) vor. Es wird in der Einheit *Feinunze* (oz. tr.) gehandelt, die einer Masse von 31,1035 Gramm (g) reinen Goldes entspricht.

Gesucht ist der Wert W eines Nuggets in Euro, wenn folgende Größen bekannt sind:

m ... Masse des Nuggets in Gramm (g)
p ... Preis in Euro für eine Feinunze Gold

1) Erstellen Sie eine Formel für W.

c) Die nachstehende Grafik zeigt die weltweite jährliche Förderung von Gold ab dem Jahr 1900 in Tonnen.



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldfoerderung.png [29.08.2013] (adaptiert).

1) Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, in welchem Jahrzehnt die weltweite Förderung absolut am stärksten gestiegen ist.

d) In einer Zeitung wird folgende Analyse veröffentlicht: „Der Wert der Ein-Unzen-Krugerrand-Goldmünze ist im Jahr 2010 um 20 % gestiegen. Im Jahr 2011 stieg der Wert nochmals um 10 %. Also ist der Wert der Münze in diesen beiden Jahren insgesamt um 30 % gestiegen."

1) Begründen Sie, warum diese Aussage über die Wertentwicklung nicht richtig ist.

Lösungserwartung

a1) Kantenlänge des Würfels: $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{1{,}713 \cdot 10^{11}\ \text{g}}{19{,}3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 2070{,}4...\ \text{cm}$

Der Würfel hat eine Kantenlänge von rund 20,7 Metern.

b1) $W = \frac{m \cdot p}{31{,}1035}$

c1) Die weltweite jährliche Förderung ist zwischen 1980 und 1990 absolut am stärksten gestiegen.

d1) Die angegebenen Prozentsätze dürfen nicht addiert werden, weil sie sich nicht auf denselben Grundwert beziehen.
Der Wert der Goldmünze ist um den Faktor $1{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}32$ gestiegen, also um 32 %.

Erfassen der Geschwindigkeit

Aufgabennummer: 2_077	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 1.7, AN 3.2, AN 3.3

Auf einer Teststrecke werden Messungen durchgeführt.

a) Die Teststrecke beginnt bei einem Stoppschild. Die Messergebnisse für ein Auto auf dieser Strecke sind in folgender Tabelle angegeben:

	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2
Zeit t in min	0	1	2,5
zurückgelegter Weg $s_1(t)$ in km	0	1	3

Der zurückgelegte Weg soll in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall [0; 2,5] durch eine Polynomfunktion s_1 mit $s_1(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

1) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion s_1.

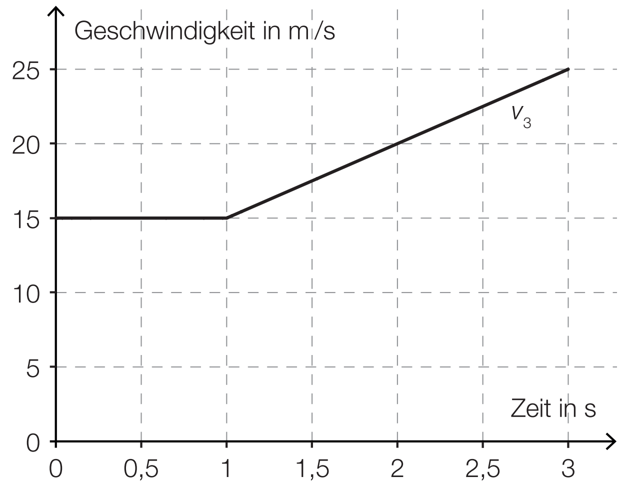
b) Der zurückgelegte Weg eines anderen Autos kann näherungsweise durch die Funktion s_2 beschrieben werden:

$s_2(t) = -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t$ mit $0 \leq t \leq 3$

t ... Zeit in min
$s_2(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in km

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob die Geschwindigkeit dieses Autos zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls null ist.
2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung des Autos im angegebenen Zeitintervall null ist.

c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos kann im Zeitintervall [0; 3] näherungsweise durch die Funktion v_3 beschrieben werden. Der Graph dieser Funktion v_3 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s_3 im Zeitintervall [1; 3] mit $s_3(1) = 15$.

Lösungserwartung

a1) $s_1(0) = 0$
$s_1(1) = 1$
$s_1(2,5) = 3$

oder:

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$3 = a \cdot 2,5^2 + b \cdot 2,5 + c$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{15}$
$b = \frac{13}{15}$
$c = 0$

b1) $v_2(t) = s_2'(t) = -t^2 + 4 \cdot t + \frac{1}{3}$
$v_2(0) = \frac{1}{3} \neq 0$
Das Auto hatte zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls eine Geschwindigkeit ungleich 0.

b2) $a_2(t) = s_2''(t) = -2 \cdot t + 4$

$a_2(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2$

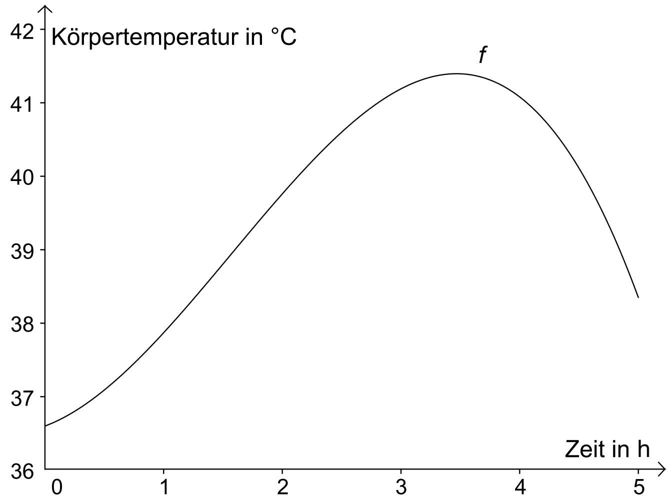
c1) $v_3(t) = 5 \cdot t + 10$ mit $1 \leq t \leq 3$
Integrieren ergibt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + C$
Wegen $s_3(1) = 15$ gilt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + \frac{5}{2}$ mit $1 \leq t \leq 3$
t ... Zeit in s
$s_3(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Ganzkörperhyperthermie

Aufgabennummer: 2_092	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 1.7, FA 4.4, AN 3.3, AN 4.2

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.



Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C

a) 1) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur 37 °C beträgt.

b) 1) Dokumentieren Sie, wie die maximale Körpertemperatur im angegebenen Zeitintervall mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann.

2) Begründen Sie, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

c) Die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ während der 5 Stunden andauernden Behandlung soll ermittelt werden.

Die mittlere Körpertemperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist:

$$\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ im Zeitintervall [0; 5].

Lösungserwartung

a1) $-0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6 = 37$

$t = 0{,}429... \quad \Rightarrow \quad t \approx 0{,}43$ h

b1) Dazu muss das Maximum der Funktion f ermittelt werden: Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung f'. Dann berechnet man die Funktionswerte an diesen Stellen und den Randstellen. Die größte dieser Zahlen ist der maximale Funktionswert.

b2) Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann der Graph der Polynomfunktion 3. Grades nur höchstens 2 Extrempunkte haben.

c1) $\overline{f} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 39{,}55... \approx 39{,}6$

Die mittlere Körpertemperatur beträgt rund 39,6 °C.

Fallschirmsprung*

Aufgabennummer: 2_061	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, AN 1.1, AN 1.3, AN 4.3	

Bei einem Fallschirmsprung aus einer Höhe von 4000 m über Grund wird 30 s nach dem Absprung der Fallschirm geöffnet.

Für $t \in [0; 30]$ gibt die Funktion v_1 mit $v_1(t) = 56 - 56 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$ (unter Berücksichtigung des Luftwiderstands) die Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers zum Zeitpunkt t an (t in s nach dem Absprung, $v_1(t)$ in m/s).

Für $t \geq 30$ gibt die Funktion v_2 mit $v_2(t) = \frac{51}{(t-29)^2} + 5 - 56 \cdot e^{-7{,}5}$ die Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers zum Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt der Landung an (t in s nach dem Absprung, $v_2(t)$ in m/s).

Modellhaft wird angenommen, dass der Fallschirmsprung lotrecht ist.

Aufgabenstellung:

a) 1) Deuten Sie $w = \frac{v_1(10) - v_1(5)}{10 - 5}$ im gegebenen Kontext.

Für ein $t_1 \in [0; 30]$ gilt: $v_1'(t_1) = w$.

2) Deuten Sie t_1 im gegebenen Kontext.

b) 1) Berechnen Sie mithilfe der Funktion v_1, in welcher Höhe der Fallschirm geöffnet wird.

2) Berechnen Sie die Zeitdauer des gesamten Fallschirmsprungs vom Absprung bis zur Landung.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

c) Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands hätte der Fallschirmspringer eine Anfangsgeschwindigkeit von 0 m/s und im Zeitintervall [0; 30] eine konstante Beschleunigung von 9,81 m/s². Die Fallgeschwindigkeit 9 s nach dem Absprung beträgt dann v^*.

1) Berechnen Sie, um wie viel $v_1(9)$ kleiner ist als v^*.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent 9 s nach dem Absprung die Beschleunigung des Fallschirmspringers geringer ist als bei einem Sprung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Deutungen:

Im Zeitintervall [5; 10] nimmt die Fallgeschwindigkeit (in m/s) des Fallschirmspringers pro Sekunde durchschnittlich um w zu.

oder:

Die mittlere Beschleunigung des Fallschirmspringers im Zeitintervall [5; 10] beträgt w (in m/s^2).

a2) mögliche Deutung:

Zum Zeitpunkt t_1 ist die Momentanbeschleunigung genauso hoch wie die mittlere Beschleunigung im Zeitintervall [5; 10].

b) **Lösungserwartung:**

b1) $4000 - \int_0^{30} v_1(t)\,\mathrm{d}t = 2543{,}8... \approx 2544$

Der Fallschirm wird in einer Höhe von ca. 2544 m geöffnet.

b2) $\int_{30}^{x} v_2(t)\,\mathrm{d}t = 2543{,}8...$

$x = 531{,}7... \approx 532$

Die Zeitdauer des gesamten Fallschirmsprungs beträgt ca. 532 s.

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:

$9{,}81 \cdot 9 - v_1(9) = 38{,}192... \approx 38{,}19$

$v_1(9)$ ist um ca. 38,19 m/s kleiner als v^*.

c2) mögliche Vorgehensweise:

$\frac{9{,}81 - v_1'(9)}{9{,}81} = 0{,}84958... \approx 0{,}8496$

Die Beschleunigung unter Berücksichtigung des Luftwiderstands ist um ca. 84,96 % geringer als jene ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine richtige Deutung.
a2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s“ nicht angegeben sein muss.

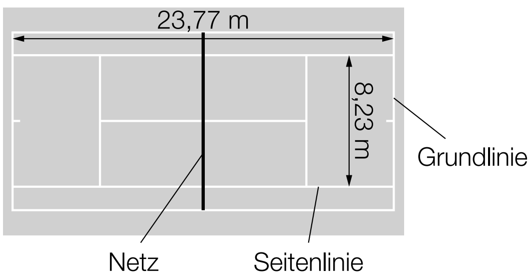
c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s“ nicht angegeben sein muss.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Tennis*

Aufgabennummer: 2_058	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 4.3, WS 1.1	

Tennis ist ein Rückschlagspiel zwischen zwei oder vier Personen, bei dem ein Tennisball über ein Netz geschlagen werden muss. Das Spielfeld ist rechteckig und wird durch ein Netz in zwei Hälften geteilt (siehe Abbildung 1). Für ein Spiel zwischen zwei Personen ist der Platz 23,77 m lang und 8,23 m breit. Das Spielfeld wird durch die Grundlinien und die Seitenlinien begrenzt. Das Netz weist eine maximale Höhe von 1,07 m auf.

Abbildung 1:



Aufgabenstellung:

a) Die Funktion $f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -0{,}0007 \cdot x^3 + 0{,}005 \cdot x^2 + 0{,}2 \cdot x + 0{,}4$ beschreibt eine Bahnkurve eines Tennisballs bis zu derjenigen Stelle, an der der Tennisball erstmals den Boden berührt. Dabei gibt x die waagrechte Entfernung des Tennisballs vom Abschlagpunkt und $f(x)$ die Flughöhe des Tennisballs über dem Boden an (x und $f(x)$ in m). Die Flugbahn des Tennisballs startet zwischen den Seitenlinien an der Grundlinie und die Ebene, in der die Flugbahn liegt, verläuft parallel zur Seitenlinie des Tennisfelds.

1) Geben Sie an, in welcher waagrechten Entfernung vom Abschlagpunkt der Tennisball seine maximale Höhe erreicht.

   waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ____________________ m

2) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Tennisball im gegnerischen Spielfeld oder hinter der Grundlinie landet.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

b) Fällt ein Tennisball lotrecht (ohne Drehung) auf den Boden, so springt er wieder lotrecht zurück. Der Restitutionskoeffizient r ist ein Maß für die Sprungfähigkeit des Tennisballs.

Es gilt: $r = \frac{v_2}{v_1}$, wobei v_1 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs vor und v_2 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs nach dem Aufprall ist.

Die Differenz der vertikalen Geschwindigkeiten unmittelbar vor und nach dem Aufprall ist aufgrund der unterschiedlichen Bewegungsrichtungen des Tennisballs definiert durch: $\Delta v = v_2 - (-v_1)$.

1) Geben Sie Δv in Abhängigkeit von v_1 und r an.

Δv = ____

Ein Tennisball trifft mit $v_1 = 4{,}4$ m/s lotrecht auf dem Boden auf. Der Restitutionskoeffizient beträgt für diesen Tennisball $r = 0{,}6$. Die Kontaktzeit mit dem Boden beträgt 0,01 s.

2) Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung a (in m/s^2) des Tennisballs in vertikaler Richtung beim Aufprall (während der Kontaktzeit).

a = ____ m/s^2

c) Bei einem Fünf-Satz-Tennismatch gewinnt ein Spieler, sobald er drei Sätze gewonnen hat. Für einen Satzgewinn müssen in der Regel sechs Games gewonnen werden, wobei es für jedes gewonnene Game einen Punkt gibt.

Für unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p für ein gewonnenes Game wurden die daraus resultierenden Wahrscheinlichkeiten m für einen Matchgewinn bei einem Fünf-Satz-Match ermittelt. In der nachstehenden Tabelle sind diese Wahrscheinlichkeiten angeführt.

p	m
0,5	0,5
0,51	0,6302
0,55	0,9512
0,6	0,9995
0,7	1,000

Für ein bestimmtes Fünf-Satz-Match gilt:
Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Game gewinnt, ist um 2 Prozentpunkte höher als die Wahrscheinlichkeit, dass sein Gegenspieler B ein Game gewinnt.

1) Geben Sie an, um wie viel Prozentpunkte die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A dieses Fünf-Satz-Match gewinnt, höher ist als jene für seinen Gegenspieler B.

Gegenüber einem anderen, schwächeren Gegenspieler C hat Spieler A einen Vorteil von 10 Prozentpunkten, ein Game zu gewinnen.

2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Fünf-Satz-Match gegen Gegenspieler C gewinnt, um 50,94 Prozent höher ist als beim Fünf-Satz-Match gegen B.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = 0$

$-0{,}0021 \cdot x^2 + 0{,}01 \cdot x + 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 12{,}42\ldots \quad (x_2 = -7{,}66\ldots)$

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ca. 12,4 m

a2) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 21{,}597\ldots \quad (x_2 = -2{,}15\ldots,\ x_3 = -12{,}30\ldots)$

Die einzige positive Nullstelle von f ist $x_1 \approx 21{,}6$.

Da das Spielfeld 23,77 m lang ist, landet der Tennisball im gegnerischen Spielfeld.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $\Delta v = r \cdot v_1 + v_1$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$\Delta v = v_1 \cdot (1 + r) = 4{,}4 \cdot (1 + 0{,}6) = 7{,}04$

$a = 7{,}04 : 0{,}01 = 704$

$a = 704\ \text{m/s}^2$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $0{,}6302 - 0{,}3698 = 0{,}2604$

Diese Wahrscheinlichkeit ist um ca. 26 Prozentpunkte höher.

c2) Wahrscheinlichkeit, dass Spieler *A* das Fünf-Satz-Match gegen Spieler *C* gewinnt: 0,9512

Wahrscheinlichkeit, dass Spieler *A* das Fünf-Satz-Match gegen Spieler *B* gewinnt: 0,6302

$\frac{0{,}9512}{0{,}6302} = 1{,}50936\ldots \approx 1{,}5094$

$\Rightarrow$ 0,9512 ist um ca. 50,94 Prozent höher als 0,6302.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [12,4 m; 12,5 m]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
a2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für a: [700 m/s^2; 710 m/s^2]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

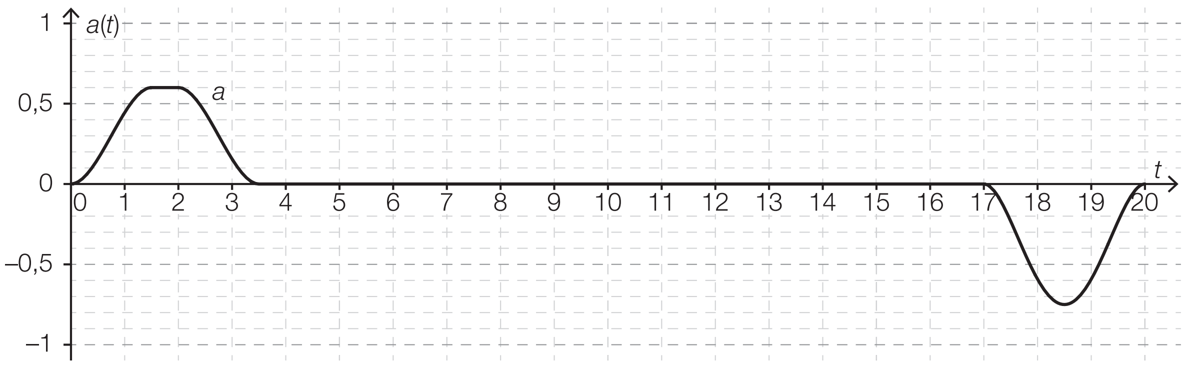
c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [26; 26,1]
c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufzugsfahrt*

Aufgabennummer: 2_059	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, AN 1.3, AN 4.3	

Die Geschwindigkeiten von Personenaufzügen können sich je nach Bauart und Gebäudehöhe sehr stark unterscheiden.

Die nachstehende Abbildung zeigt das Zeit-Beschleunigung-Diagramm für eine 20 s dauernde Aufzugsfahrt. Zu Beginn und am Ende der Fahrt steht der Aufzug still. Die Zeit t wird in Sekunden, die Beschleunigung $a(t)$ in m/s² angegeben. Die Beschleunigungswerte wurden mithilfe eines Sensors ermittelt und der Verlauf der Beschleunigung wurde mit einer differenzierbaren Funktion a modelliert.



Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie für jeden im Folgenden genannten Abschnitt der dargestellten Aufzugsfahrt das entsprechende Zeitintervall an.

Aufzug bremst ab: ____________________________

Aufzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit: ____________________________

Kim behauptet, dass die Geschwindigkeit des Aufzugs im Zeitintervall [1,5 s; 2 s] konstant bleibt.

2) Geben Sie an, ob Kim recht hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

b) 1) Ermitteln Sie anhand der gegebenen Abbildung näherungsweise die Höchstgeschwindigkeit v_{max} während der dargestellten Aufzugsfahrt.

Der Graph der Funktion a schließt mit der t-Achse in den Zeitintervallen [0; 3,5] und [17; 20] jeweils ein Flächenstück ein.

2) Begründen Sie, warum im gegebenen Kontext die Inhalte dieser beiden Flächenstücke gleich groß sein müssen.

c) Ein Produzent von Aufzugsanlagen plant die Herstellung eines neuen Aufzugs.
Die Beschleunigung dieses Aufzugs wird in den ersten 3 Sekunden durch die differenzierbare Funktion $a_1\colon [0; 3] \to \mathbb{R}$ mit

$$a_1(t) = \begin{cases} 0{,}6 \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t) & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0{,}6 & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 0{,}6 \cdot (t - 3)^2 \cdot (2 \cdot t - 3) & \text{für } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

beschrieben (t in s, $a_1(t)$ in m/s²).

1) Berechnen Sie die Geschwindigkeitszunahme dieses Aufzugs im Zeitintervall [0; 3].

Für den Verlauf der Fahrt müssen bestimmte Bedingungen für die Beschleunigung eingehalten werden. Der sogenannte *Ruck*, die momentane Änderungsrate der Beschleunigung, soll bei einer Fahrt mit einem Aufzug Werte zwischen –1 m/s³ und 1 m/s³ annehmen.

2) Überprüfen Sie, ob dieser Aufzug bei $t = 1$ die angeführten Bedingungen für den Ruck einhält.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) Aufzug bremst ab: [17 s; 20 s]

Aufzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit: [3,5 s; 17 s]

a2) Kim hat nicht recht, da die Beschleunigung in diesem Zeitintervall konstant und positiv ist und somit die Geschwindigkeit gleichmäßig (linear) zunimmt.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $\frac{3{,}5 + 0{,}5}{2} \cdot 0{,}6 = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad v_{max} \approx 1{,}2$ m/s

b2) Die Inhalte der beiden Flächenstücke müssen gleich groß sein, da die Geschwindigkeitszunahme während der Beschleunigungsphase gleich groß wie die Geschwindigkeitsabnahme während des Abbremsvorgangs sein muss.

c) **Lösungserwartung:**

c1) $\int_0^1 0{,}6 \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 0{,}6\,\mathrm{d}t + \int_2^3 0{,}6 \cdot (t - 3)^2 \cdot (2 \cdot t - 3)\,\mathrm{d}t = 1{,}2$

Im Zeitintervall [0; 3] beträgt die Geschwindigkeitszunahme 1,2 m/s.

c2) mögliche Vorgehensweise:

$a_1'(t) = 0$ für alle $t \in [1; 2) \quad \Rightarrow \quad a_1'(1) = 0$

Zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt die momentane Änderungsrate der Beschleunigung 0 m/s³. Die angeführten Bedingungen sind bei $t = 1$ eingehalten.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Zeitintervalle.
Abweichungen von bis zu ±0,3 s bei den Intervallgrenzen sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [1 m/s; 1,4 m/s]
b2) Ein Punkt für eine richtige Begründung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [1,1; 1,3]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

Zuverlässigkeit eines Systems*

Aufgabennummer: 2_045	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1, AN 3.3, WS 2.3	

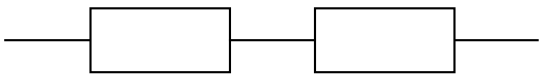
Ein System ist im Folgenden eine Maschine, die aus mehreren Bauteilen besteht. Jedes Bauteil dieses Systems kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit korrekt funktionieren oder ausfallen. Wenn einzelne Bauteile eines Systems ausfallen, hängt es von der Bauart des Systems ab, ob das gesamte System weiter funktioniert oder ob es ausfällt.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Bauteils* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. Das gilt jeweils für eine bestimmte Zeitdauer und unter bestimmten Bedingungen.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Systems* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. (Es wird modellhaft angenommen, dass Ausfälle von Bauteilen voneinander unabhängig sind.) Die entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit heißt Ausfallwahrscheinlichkeit.

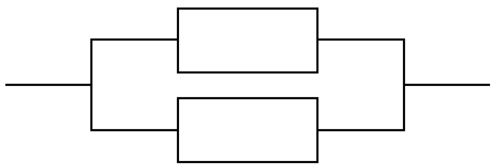
Man unterscheidet zwei einfache Typen von Systemen:

- Seriensysteme:



  Ein Seriensystem funktioniert genau dann, wenn alle Bauteile funktionieren.

- Parallelsysteme:

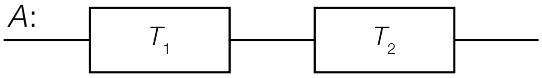


  Ein Parallelsystem funktioniert genau dann, wenn mindestens ein Bauteil funktioniert.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist das System A:



Das Bauteil T_1 hat die Zuverlässigkeit p_1 und das Bauteil T_2 hat die Zuverlässigkeit p_2.

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems A als Funktion z_A von p_1 und p_2.

Geben Sie $z_A(p_1, p_2)$ an!

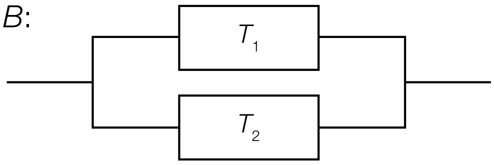
$z_A(p_1, p_2) =$ ____

Bei einem anderen System gleicher Bauart haben die Bauteile jeweils die gleiche Zuverlässigkeit $p_1 = p_2 = 0{,}7$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit dieses Systems soll auf ein Viertel der aktuellen Ausfallwahrscheinlichkeit gesenkt werden.

Geben Sie an, welchen Wert die Zuverlässigkeit p_{neu} (für jedes der beiden Bauteile) annehmen muss!

$p_{neu} =$ ____

b) Gegeben ist das System B:



Die beiden Bauteile T_1 und T_2 haben jeweils die gleiche Zuverlässigkeit p.

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems B als Funktion z_B von p.

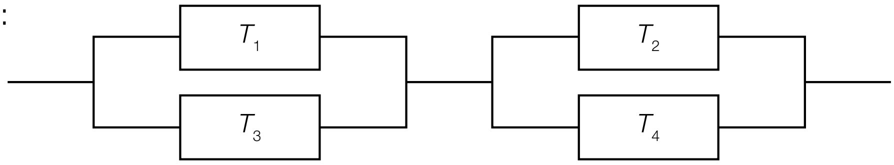
Geben Sie $z_B(p)$ an!

$z_B(p) =$ ____

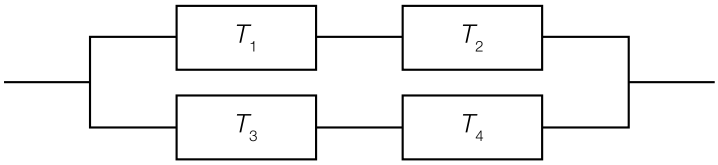
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion z_B auf dem Intervall (0; 1) streng monoton steigend ist!

c) Gegeben sind die Systeme C und D:

System C:



System D:



Jedes der Bauteile T_1, T_2, T_3 und T_4 hat die gleiche Zuverlässigkeit p.

Die Zuverlässigkeit z_C des Systems C ist eine Funktion von p und wird durch die Funktionsgleichung $z_C(p) = p^4 - 4 \cdot p^3 + 4 \cdot p^2$ beschrieben.

Ermitteln Sie den Quotienten $\frac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)}$ und interpretieren Sie diesen Wert für das System C!

Die Zuverlässigkeit z_D des Systems D ist eine Funktion von p.

Begründen Sie, warum $z_C(p) > z_D(p)$ für alle $p \in (0; 1)$ gilt!
Verwenden Sie dazu entweder eine Funktionsgleichung von z_D oder begründen Sie anhand der Bauart der Systeme C und D.

Lösungserwartung

a) $z_A(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2$

möglliche Vorgehensweise:

$1 - p_{neu}^2 = \frac{1 - 0{,}7^2}{4}$

$p_{neu} = \sqrt{0{,}8725} \approx 0{,}934$

b) $z_B(p) = 1 - (1 - p)^2$

mögliche Vorgehensweisen:

Der Funktionsterm $1 - (1 - p)^2 = -(p - 1)^2 + 1$ ist dahingehend zu deuten, dass die durch $f(x) = x^2$ beschriebene Grundparabel durch Einsetzen von $x = (p - 1)$ um eine Einheit nach rechts verschoben wird, wegen des Minus vor der Klammer an der horizontalen Achse gespiegelt und durch die Addition von 1 um eine Einheit nach oben geschoben wird.
Damit liegt der Scheitelpunkt bei $(1|1)$ und z_B ist im Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend.

oder:

$z_B'(p) = 2 \cdot (1 - p) > 0$ für alle $p \in (0; 1)$

oder:

$z_B = 1 - (1 - p)^2$
$(1 - p)$ ist für $p \in (0; 1)$ positiv und streng monoton fallend, daher auch $(1 - p)^2$.
Damit ist $1 - (1 - p)^2$ für $p \in (0; 1)$ streng monoton steigend.

c) $\frac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)} \approx 0{,}254$

mögliche Interpretation:
Bei Erhöhung der Zuverlässigkeit der Bauteile von 0,8 auf 0,9 sinkt die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems auf etwa ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

mögliche Begründungen:
$z_D(p) = 2 \cdot p^2 \cdot (1 - p^2) + p^4$
$z_D(p) = 2 \cdot p^2 - p^4$

Der Graph der Funktion z_C verläuft für alle $p \in (0; 1)$ oberhalb des Graphen der Funktion z_D.

oder:

Bei allen Kombinationen, bei denen System D funktioniert, funktioniert auch System C. Außerdem funktioniert System C auch dann, wenn nur T_1 und T_4 bzw. nur T_2 und T_3 funktionieren.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen richtigen Term für z_A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,93; 0,94] bzw. [93 %; 94 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für einen richtigen Nachweis. Andere richtige Nachweise (z.B. grafische Nachweise) sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für den richtigen Wert des Quotienten und eine richtige Interpretation.
Toleranzintervall: [0,25; 0,26] bzw. [25 %; 26 %]
– Ein Punkt für eine richtige Begründung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

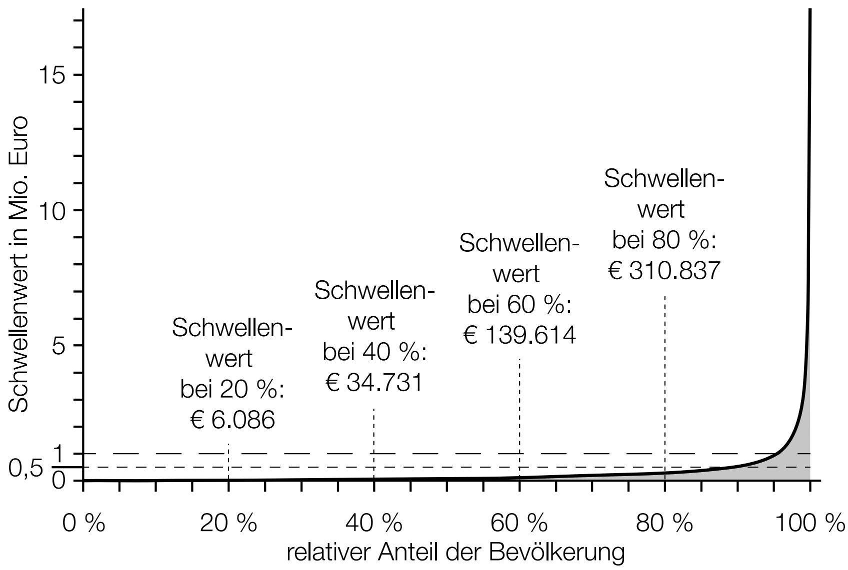
Vermögensverteilung*

Aufgabennummer: 2_043	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 4.3, WS 1.1	

Das gesamte Vermögen eines Landes ist häufig sehr ungleich auf die Bevölkerung verteilt. Eine im Jahr 2012 durchgeführte Erhebung der Europäischen Zentralbank (EZB) lieferte Daten für eine Abschätzung, welcher Anteil der österreichischen Bevölkerung über welches Vermögen (in Millionen Euro) verfügt. Die Ergebnisse der darauf basierenden Studie sind in Abbildung 1 dargestellt. Beispielsweise bedeutet der Schwellenwert bei 20 %, dass die vermögensschwächsten 20 % der österreichischen Bevölkerung ein Vermögen von maximal € 6.086 besitzen.
Im Jahr 2012 betrug die Bevölkerungszahl von Österreich ca. 8,45 Millionen Einwohner/innen.

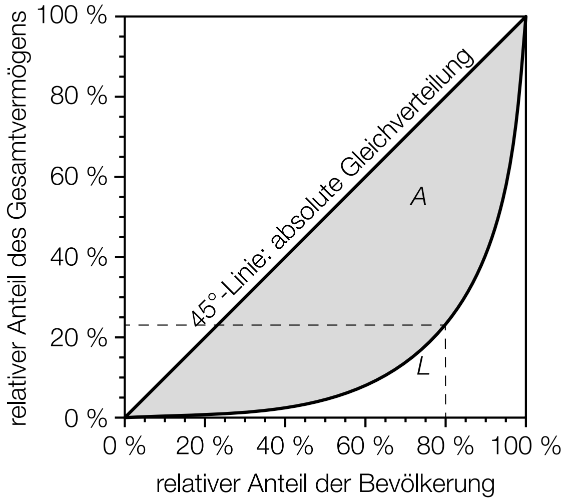
Die sogenannte *Lorenz-Kurve L* (vgl. Abbildung 2) veranschaulicht, welcher relative Anteil der Bevölkerung welchen relativen Anteil des Gesamtvermögens besitzt. So besitzen laut der EZB-Studie die vermögensschwächsten 80 % der österreichischen Bevölkerung nur ca. 23 % des gesamten Vermögens.

Abbildung 1:



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Abbildung 2:



Quelle: Eckerstorfer, Paul, Johannes Halak et al.: *Vermögen in Österreich. Bericht zum Forschungsprojekt „Reichtum im Wandel“.* Linz: Johannes-Kepler-Universität Linz 2013, S. 12–13. http://media.arbeiterkammer.at/PDF/Vermoegen_in_Oesterreich.pdf [17.10.2014] (adaptiert).

Der Gini-Koeffizient ist ein Maß für die Ungleichverteilung des Vermögens in einem Land. Er entspricht dem Quotienten aus dem Inhalt der markierten Fläche *A* (zwischen der 45°-Linie und der Lorenz-Kurve *L*) und dem Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, das durch die Eckpunkte (0 %|0 %), (100 %|0 %) und (100 %|100 %) festgelegt ist.
Laut EZB-Studie hatte der Gini-Koeffizient für Österreich für das Jahr 2012 den Wert 0,76.

Aufgabenstellung:

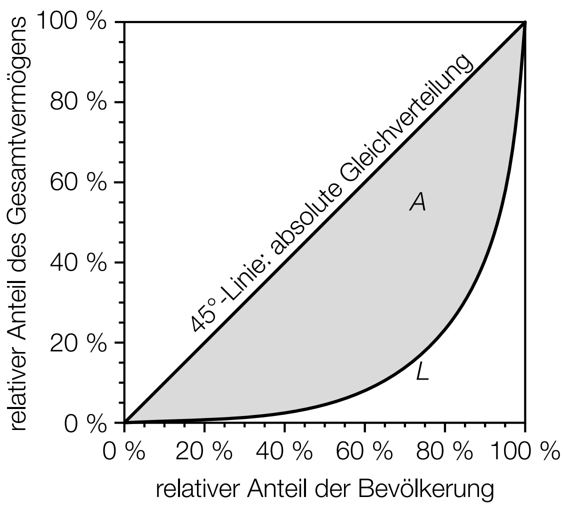
a) Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1, wie viele Personen in Österreich im Jahr 2012 ein Vermögen von mindestens einer Million Euro besaßen!

Berechnen Sie unter der vereinfachenden Annahme, dass die Schwellenwerte im Intervall [20 %; 40 %] annähernd linear zunehmen, einen Näherungswert des Schwellenwerts bei 25 %!

b) Ermitteln Sie, welchen relativen Anteil am Gesamtvermögen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen!

Laut einer Studie der Universität Linz aus dem Jahr 2013 besitzen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung einen deutlich größeren relativen Anteil am Gesamtvermögen, als es in der EZB-Studie behauptet wurde.

Unter Berücksichtigung der Studie der Universität Linz erhält man eine andere Lorenz-Kurve L^* als die abgebildete Lorenz-Kurve L. Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung einen möglichen Verlauf einer solchen Lorenz-Kurve L^*!



c) Die Lorenz-Kurve wird im Intervall [0; 1] durch eine reelle Funktion in Abhängigkeit von x modelliert, wobei x den relativen Anteil der Bevölkerung angibt.

Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten für ein Land S, dessen Lorenz-Kurve für das Jahr 2012 durch die Funktion L_1 mit $L_1(x) = 0{,}9 \cdot x^5 + 0{,}08 \cdot x^2 + 0{,}02 \cdot x$ im Intervall [0; 1] beschrieben werden kann!

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Gini-Koeffizienten für Österreich für das Jahr 2012 und geben Sie an, ob das Gesamtvermögen in diesem Jahr in Österreich oder im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war!

Lösungserwartung

a) Im Jahr 2012 hatten in Österreich ca. 422 500 Personen (laut Abbildung 1: ca. 5 % der Bevölkerung) ein Vermögen von mindestens einer Million Euro.

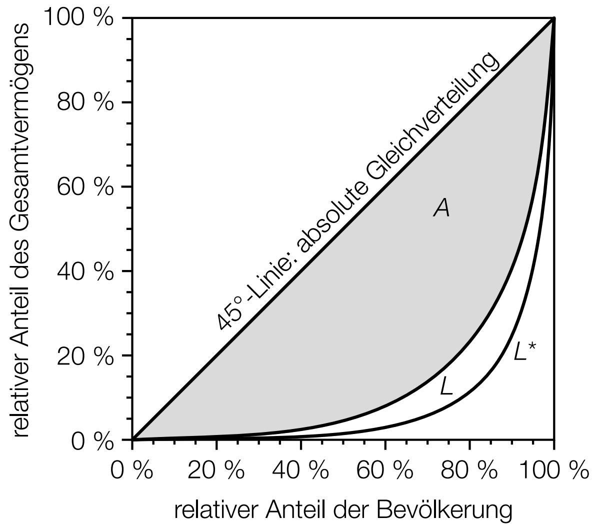
Mögliche Vorgehensweise:

$6\,086 + \frac{34\,731 - 6\,086}{4} = 13\,247{,}25$

Der Näherungswert für den Schwellenwert bei 25 % liegt bei ca. € 13.247.

b) Die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen ca. 60 % des Vermögens.

Möglicher Verlauf von L^*:



c) Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}5 - \int_0^1 L_1(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}31\dot{3}$

$\frac{0{,}31\dot{3}}{0{,}5} \approx 0{,}63$

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 hatte für das Land *S* etwa den Wert 0,63.

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 war für das Land *S* niedriger als jener für Österreich. Das bedeutet, dass in diesem Jahr das Gesamtvermögen im Land *S* gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war als in Österreich.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch die Angabe des richtigen relativen Anteils als richtig zu werten ist.
Toleranzintervalle: [338 000; 507 000] bzw. [4 %; 6 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [€ 13.200; € 13.325]

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [58 %; 62 %]
– Ein Punkt für einen richtig eingezeichneten Verlauf einer möglichen Lorenz-Kurve L^*, wobei der Funktionswert an der Stelle 90 % kleiner als 42 % sein muss und die Funktion monoton steigend sein muss.

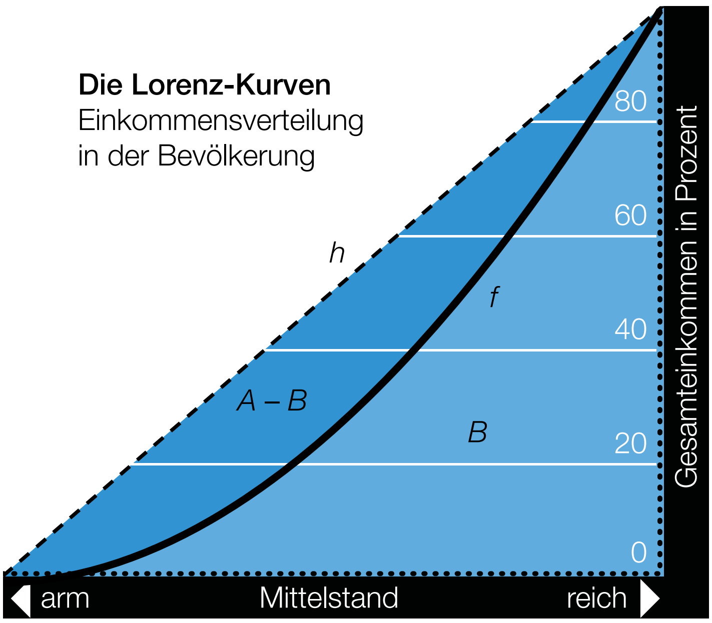
c) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,62; 0,63]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für einen korrekten Vergleich und eine (sinngemäß) richtige Deutung.

Einkommensverteilung

Aufgabennummer: 2_031	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.4, AN 4.2, AN 4.3, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.2, FA 4.1, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2	

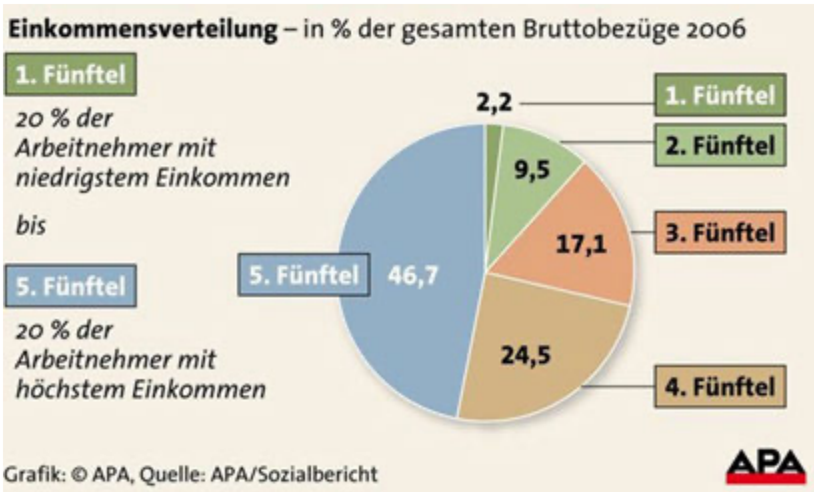
Der Statistiker Max Lorenz beschrieb bereits im Jahr 1905 statistische Verteilungen mithilfe der nach ihm benannten Lorenz-Kurve. Eine Lorenz-Kurve f kann z. B. zur Beschreibung der Einkommensverteilung in einem Staat herangezogen werden. Je ausgeprägter ihr „Bauch" ist, desto größer ist der Einkommensunterschied zwischen niedrigem und hohem Einkommen. Die Lorenz-Kurve der Einkommensverteilung eines Staates, in dem alle Personen bis auf eine Person nichts verdienen und diese eine Person alles bekommt, wird in der nachstehenden Grafik durch die punktierten Linien (Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks) dargestellt. Das andere Extrem ist ein Staat, in dem alle Personen gleich viel verdienen. In diesem Fall wird die Lorenz-Kurve zu einer Geraden h, welche durch die strichlierte Linie dargestellt ist. Zwischen den beiden Extremen verläuft die Lorenz-Kurve f eines Staates.

Jeder Punkt $P = (x \mid f(x))$ auf der Kurve f steht für folgende Aussage: „Die einkommensschwächsten x % aller Haushalte beziehen $f(x)$ % des Gesamteinkommens."



Der Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks wird mit A bezeichnet. Der Graph der Lorenz-Kurve f schließt mit den beiden Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks eine Fläche mit Inhalt B ein. Setzt man den Inhalt der Fläche zwischen der Lorenz-Kurve f und der Geraden h mit der Dreiecksfläche A in Bezug, erhält man den Gini-Ungleichheitskoeffizienten $GUK = \frac{A - B}{A}$, eine Zahl zwischen null und eins. Je kleiner der GUK ist, desto gleichmäßiger ist das Gesamteinkommen auf die Bevölkerung verteilt.

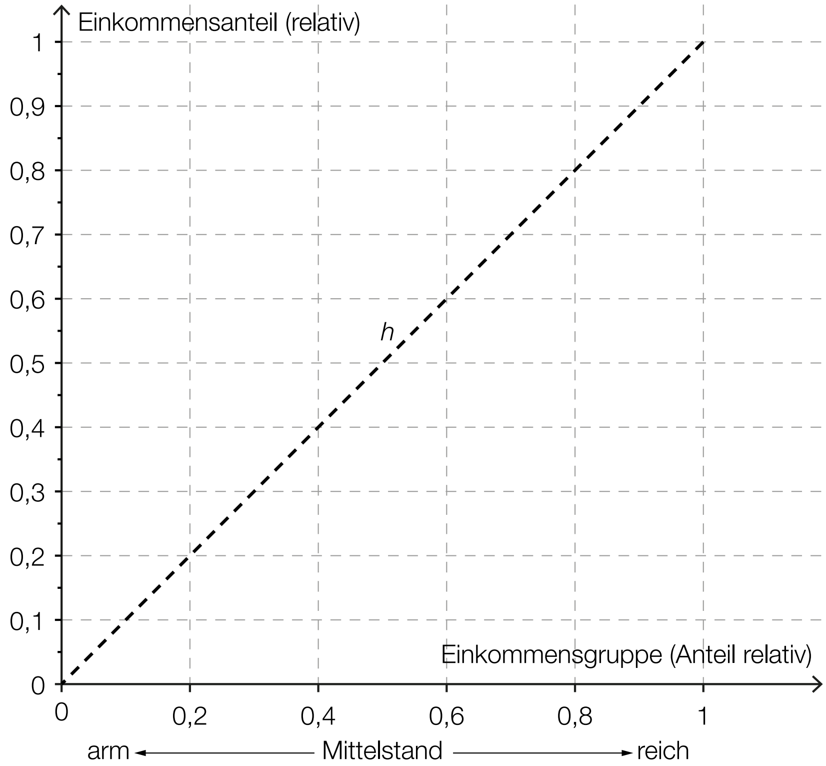
In der nachstehenden Grafik ist die Einkommensverteilung in Österreich in Prozent der gesamten Bruttobezüge im Jahre 2006 dargestellt. Daraus ist z. B. abzulesen, dass jene 20 % der Bevölkerung mit den niedrigsten Bruttoeinkommen nur 2,2 % des Gesamtbruttoeinkommens erhalten haben.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [04.05.2017].

Aufgabenstellung:

a) Zeichnen Sie die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung der Bruttobezüge in Österreich im Jahr 2006 in der nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!



Berechnen Sie mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttobezüge in Österreich für das Jahr 2006!

b) Die Verteilung der Bruttoeinkommen in Österreich im Jahre 2006 soll durch eine Polynomfunktion p so modelliert werden, dass alle Daten, die aus dem Kreisdiagramm aus der Einleitung abgelesen werden können, mit Funktionswerten dieser Polynomfunktion übereinstimmen.

Begründen Sie, welchen Grad die Polynomfunktion p bei konkreter Berechnung (maximal) hat!

Begründen Sie, warum eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$) nicht für die Modellierung einer Lorenz-Kurve geeignet ist!

c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}245 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2 + 0{,}155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen GUK!

Geben Sie mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" und die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen" im Vergleich zu den Bruttobezügen im Jahr 2006 in Österreich ändern würden!

d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

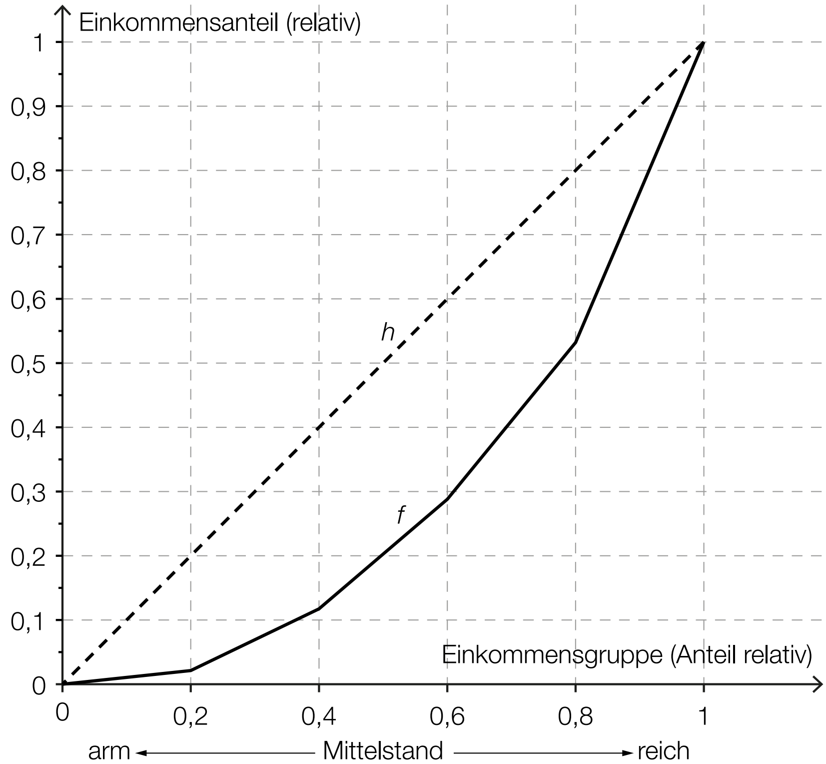
Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Geben Sie an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründen Sie Ihre Wahl!

Geben Sie eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermitteln Sie für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Inhalt der Fläche zwischen dem Polygonzug f und der Strecke h beträgt 0,208 Flächeneinheiten (die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen der waagrechten Achse und dem Streckenzug kann z. B. aus zwei Dreiecksflächen und drei Trapezflächen erfolgen).

$\Rightarrow \; GUK = \dfrac{0{,}208}{0{,}5} = 0{,}416$

b) Aus den Daten des Kreisdiagramms ergeben sich (für die Argumente $x = 0$, $x = 0{,}2$, $x = 0{,}4$, $x = 0{,}6$, $x = 0{,}8$, $x = 1$) sechs Funktionswerte von p und somit sechs „Bedingungen“ für die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Eine Polynomfunktion fünften Grades hat sechs Koeffizienten und ist daher geeignet.
(Anmerkung: Bei „besonderer“ Lage der Punkte kann auch ein Grad kleiner als fünf ausreichend sein.)

Jede Lorenz-Kurve verläuft durch den Punkt $(0|0)$. Da eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, ist sie nicht für die Modellierung geeignet.

c) $GUK = \frac{0{,}5 - \int_0^1 \left(0{,}245x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}155x\right) \mathrm{d}x}{0{,}5} = 0{,}3225$

$g(0{,}2) \approx 0{,}057$
$g(0{,}8) \approx 0{,}633$

Der Einkommensanteil der „20 % mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" würde (um ca. 3,5 Prozentpunkte) von 2,2 % auf ca. 5,7 % steigen.

Der Einkommensanteil der „20 % mit den höchsten Bruttoeinkommen" würde (um ca. 10 Prozentpunkte) von 46,7 % auf 36,7 % sinken.

d) $b = 0$, da der Graph durch den Punkt $(0|0)$ verlaufen muss
$a = 1$, da der Graph durch den Punkt $(1|1)$ verlaufen muss

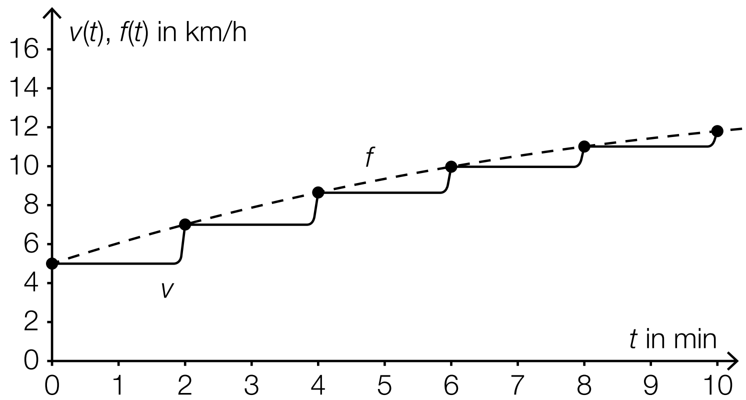
$\frac{0{,}5 - \int_0^1 x^z \,\mathrm{d}x}{0{,}5} < 0{,}26$

$z \in \left(1; \frac{63}{37}\right)$

Laufband

Aufgabennummer: 2_029	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3	

Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können.
Bei einem individuell erstellten, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbandgeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbandgeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit
$f(t) = 0{,}0008 \cdot t^3 - 0{,}05 \cdot t^2 + 1{,}1 \cdot t + 5$.
Die Laufbandgeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnungen wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.
Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbandgeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

Begründen Sie, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht!
Berechnen Sie unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

b) Geben Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

v_{min} = ______________________________ km/h

v_{max} = ______________________________ km/h

Begründen Sie, warum zu den Zeitpunkten t_{min} und t_{max}, zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minütigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{min}) \neq 0$ und $f'(t_{max}) \neq 0$ gilt!

c) Geben Sie den Wert von $v'(1)$ an und interpretieren Sie diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$v'(1)$ = ______________________________

Beschreiben Sie anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall [0; 30] verlaufen müsste!

d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.
Berechnen Sie diesen Näherungswert und erläutern Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Geben Sie die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).
Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h .

	t = 15 min	t = 30 min	t = 45 min	t = 60 min
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeigen Sie anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k!

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo“ in min/km umschrieben.
Berechnen Sie für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + \ldots + f(28)) \approx 11{,}57$

Das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h.

Das arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), \ldots, v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: 0,5 h · 11,57 km/h = 5,785 km

b) $v_{min} = 5$ km/h
$v_{max} = 14{,}16$ km/h

t_{min} und t_{max} sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f, weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

c) $v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt 0 m/s^2.

oder:

Das Laufband (die Läuferin / der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt $t = 1$ min gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen ($t = 2$, $t = 4$, $t = 6$, ...) sehr hohe Werte annehmen.

d) $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 1{,}506$

zurückgelegte Weglänge: ca. 1,51 km

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind (1 h = 60 min).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:
$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1{,}388$ km

⇒ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. 118 m vom exakten Wert ab.

e) $194 = k \cdot 80 \cdot 2{,}5$
$k = 0{,}97$

Bei der doppelten/dreifachen/vierfachen Laufzeit wird die doppelte/dreifache/vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt/dreimal/viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8

Standseilbahnen

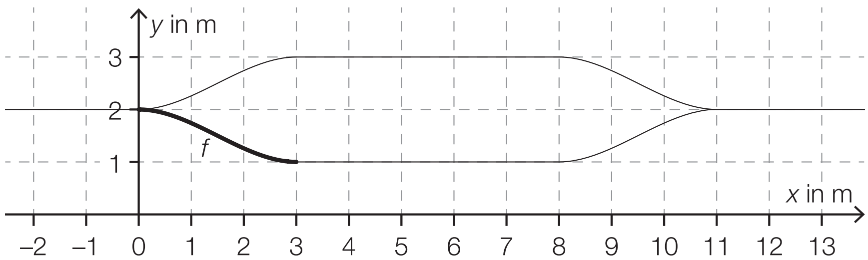
Aufgabennummer: 2_080	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 1.8, FA 4.3	

Die Wägen von Standseilbahnen fahren auf Schienen und können große Steigungen bewältigen.

a) Eine bestimmte Standseilbahn hat eine konstante Steigung von 40 %.

1) Berechnen Sie, welchen Höhenunterschied ein Wagen dieser Bahn überwindet, wenn er von der Talstation bis zur Bergstation eine Fahrstrecke von 180 m zurücklegt.

b) Bei den meisten Standseilbahnen gibt es in der Mitte der Strecke eine Ausweichstelle, bei der der talwärts fahrende Wagen dem bergwärts fahrenden Wagen ausweichen kann.
In der nachstehenden Abbildung ist eine solche Ausweichstelle modellhaft dargestellt.



Der Funktionsgraph von f schließt an den Stellen 0 und 3 knickfrei an die eingezeichneten Geradenstücke an. „Knickfrei" bedeutet, dass die Funktionen an denjenigen Stellen, an denen ihre Graphen aneinander anschließen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Für die Funktion f gilt:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$x, f(x)$ … Koordinaten in m

Die Koeffizienten a, b, c und d können mithilfe eines linearen Gleichungssystems berechnet werden. Der Ansatz für zwei der benötigten Gleichungen lautet:

$27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{}$

$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{}$

1) Vervollständigen Sie mithilfe der obigen Abbildung die beiden Gleichungen, indem Sie jeweils die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen schreiben.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert des Koeffizienten d ab.

c) Der Umsatz des Weltmarktführers im Seilbahnbau betrug im Geschäftsjahr 2015/16 rund 834 Millionen Euro und lag somit um 5,04 % über dem Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15.

1) Berechnen Sie den Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 in Millionen Euro.

Lösungserwartung

a1) $\tan(\alpha) = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 21{,}801...°$

Höhenunterschied $h = 180 \cdot \sin(\alpha) = 66{,}850...$

Der Wagen überwindet einen Höhenunterschied von rund 66,85 m.

b1) $27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{1}$

$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{0}$

b2) $d = 2$

c1) $\frac{834}{1{,}0504} = 793{,}9...$

Der Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 betrug rund 794 Millionen Euro.
Die Angabe des Zusatzes „Millionen Euro“ ist nicht erforderlich.

Hohlspiegel

Aufgabennummer: 2_023	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: a) AG 2.1, FA 1.8 b) FA 1.7, FA 1.8 c) AG 2.1, FA 1.2	

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In der Physik spricht man von einem kugelförmigen Hohlspiegel, wenn er Teil einer innenverspiegelten Kugel ist. Charakteristische Punkte beim Hohlspiegel sind der Mittelpunkt M der Kugel, der Scheitelpunkt S und der Brennpunkt F des Spiegels.

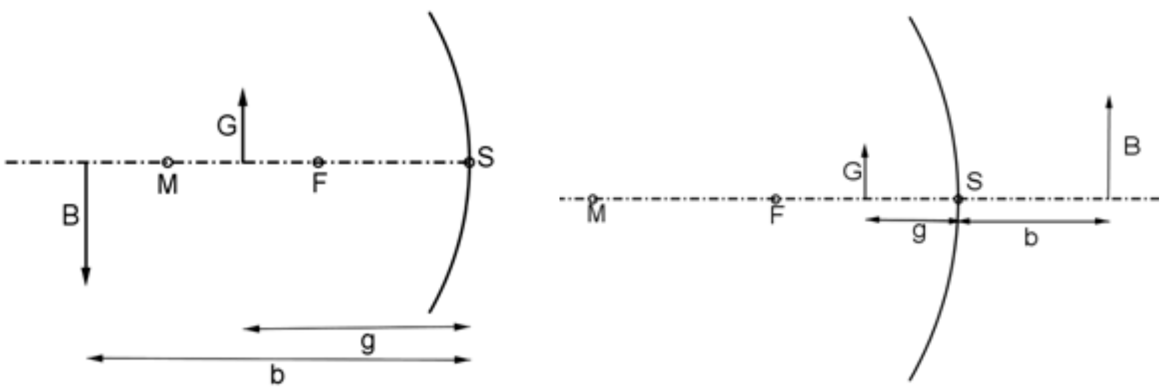
Es gelten folgende Relationen (siehe untenstehende Abbildungen):

Brennweite f des Spiegels: $f = \overline{FS} = \frac{\overline{MS}}{2}$ $(f > 0)$
Radius der Kugel: $\overline{MS} = 2 \cdot f$

Die Entfernung eines Gegenstands G (mit der Höhe G) vom Scheitelpunkt S wird mit g $(g > 0)$ bezeichnet, die Entfernung des nach Reflexion der Strahlen am Spiegel entstehenden Bildes B (mit der Höhe B) vom Scheitel S mit b.

Das Vorzeichen von b hat dabei die folgenden Bedeutungen:
- $b > 0$: Es entsteht ein reelles Bild „vor" dem Spiegel, das auf einem Schirm aufgefangen werden kann.
- $b < 0$: Es entsteht ein virtuelles Bild „hinter" dem Spiegel.

Skizzen des Querschnitts:
- linke Grafik: reelles Bild B eines Gegenstandes G $(b > 0)$
- rechte Grafik: virtuelles Bild B eines Gegenstandes G $(b < 0)$



Aufgrund physikalischer Überlegungen gelten unter bestimmten Bedingungen die Beziehungen $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$ und $\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f}$. Daraus ergibt sich der Zusammenhang $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Der Quotient $\frac{B}{G}$ bestimmt den Vergrößerungsfaktor; er ist bei einem reellen Bild positiv ($g > 0$ und $b > 0$) und bei einem virtuellen Bild negativ ($g > 0$ und $b < 0$).

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie den Vergrößerungsfaktor $\frac{B}{G}$ für $f = 40$ cm und $g = 50$ cm an!

Geben Sie ein Intervall für die Gegenstandsweite g an, damit ein virtuelles Bild entsteht!

Begründen Sie Ihre Antwort durch eine mathematische Argumentation!

b) Stellen Sie die Bildweite b als Funktion der Gegenstandsweite g bei konstanter Brennweite f dar! Betrachten Sie die Fälle $g = 2f$ sowie $g = f$ und geben Sie die jeweilige Auswirkung für b an!

Was kann mithilfe dieser Funktion über den Grenzwert von b ausgesagt werden, wenn $g > f$ ist und sich g der Brennweite f annähert? Tätigen Sie eine entsprechende Aussage und begründen Sie diese durch Betrachtung von Zähler und Nenner!

c) Leiten Sie aus den gegebenen Beziehungen $\frac{G}{B}$ die oben angeführte Formel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ her! Geben Sie die notwendigen Umformungsschritte an!

Der Ausdruck $\frac{1}{b}$ kann als Funktion in Abhängigkeit von g der Form $\frac{1}{b}(g) = a \cdot g^k + c$ betrachtet werden. Geben Sie die Werte der Parameter a und c sowie des Exponenten k für diesen Fall an!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{1}{b} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{1}{200}$ → Bildweite 200 cm = 2 m

$\frac{B}{G} = \frac{200}{50} = 4$ → vierfache Vergrößerung

Bildweite negativ:

Intervall für g: $(0; f)$ bzw. Angabe des Intervalls durch: $0 < g < f$

Akzeptiert wird auch der Bezug zur ersten Fragestellung mit $f = 40$.

Intervall für g: $(0; 40)$ bzw. $0 < g < 40$

Begründung 1: Aus $b = \frac{g \cdot f}{g - f} < 0$ folgt $g < f$.

Begründung 2: Aus $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ folgt $g < f$, da der Kehrwert von b dann größer ist als der Kehrwert von f.

b) Funktion: $b(g) = \frac{f \cdot g}{g - f}$

$b(2f) = 2f$; Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich groß und entsprechen dem Radius der Kugel. Erweiterung: Auch G und B sind gleich groß. $b(f)$ existiert nicht; der Nenner hat den Wert 0.

(Auch die Form $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ ist als richtig zu werten.)

Annäherung von g an f mit $g > f$:
Der Ausdruck $\frac{f \cdot g}{g - f}$ ist positiv; der Zähler ist eine positive Zahl (auch: nähert sich dem Wert f^2), der Nenner ist positiv und nähert sich dem Wert 0, daher wird b immer größer (der Grenzwert ist unendlich – oder ähnliche Aussagen).

Anmerkungen: Wenn die Form $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ verwendet wird, sind auch umgangssprachliche Formulierungen wie „oben steht die positive Zahl 1, unten steht etwas Positives, das gegen 0 geht, daher ist der Grenzwert +1" als richtig zu werten. Auch Argumente, bei denen teilweise oder immer „oben" statt „Zähler" und „unten" statt „Nenner" (oder Ähnliches) verwendet wird, sind als richtig zu werten.

c) Zwei mögliche Umformungen werden angeführt:

Variante 1:

$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f}$

$\frac{g}{b} = \frac{g}{f} - 1 \quad \Big| : g$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

Variante 2:

$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f} \quad \Big| \cdot (b \cdot f)$

$g \cdot f = b \cdot g - f \cdot b \quad \Big| : (b \cdot g \cdot f)$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

Daraus ergibt sich direkt der angegebene Zusammenhang.

$\frac{1}{b}(g) = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \;\Rightarrow\; a = -1,\ k = -1,\ c = \frac{1}{f}$

Pelletsheizung

In Österreichs Haushalten werden verschiedene Heizungsarten wie zum Beispiel die Ölheizung (mit Heizöl als Brennmaterial) oder die Pelletsheizung (mit Pellets – kleine gepresste Holzspäne – als Brennmaterial) eingesetzt.

In der nachstehenden Tabelle sind die Jahresdurchschnittspreise für das Heizen mit Heizöl bzw. mit Pellets für die Jahre 2006 und 2019 in Cent pro Kilowattstunde (Cent/kWh) angegeben.

	2006	2019
Heizöl	6,80	7,95
Pellets	4,40	4,84

Datenquelle: https://www.propellets.at/haeufige-fragen-und-antworten-zu-pellets [13.10.2021].

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Jahresdurchschnittspreise für Pellets (in Cent/kWh pro Jahr) für den Zeitraum von 2006 bis 2019. *[0/1 P.]*

b) Familie Buchner lebt in einem Einfamilienhaus und heizt mit Heizöl. Die Familie überlegt, auf eine Pelletsheizung umzusteigen.
Für die geschätzten Gesamtkosten für das Heizen mit Heizöl oder mit Pellets ab dem Jahr 2019 trifft Familie Buchner folgende Annahmen:

- Familie Buchner verbraucht pro Jahr rund 15 000 kWh Energie für das Beheizen ihres Hauses.
- Der Jahresdurchschnittspreis für das Heizen mit Heizöl (0,0795 €/kWh) und jener für das Heizen mit Pellets (0,0484 €/kWh) bleiben ab dem Jahr 2019 gleich.
- Der Umstieg von der Ölheizung zu einer Pelletsheizung kostet einmalig 10.000 €.

t ... Zeit seit Beginn des Jahres 2019 in Jahren
$K_{Öl}(t)$ ... geschätzte Gesamtkosten für das Heizen mit Heizöl bis zur Zeit t in €
$K_{Pellets}(t)$ ... geschätzte Gesamtkosten für das Heizen mit Pellets bis zur Zeit t in €

1) Stellen Sie auf Basis dieser Annahmen jeweils eine Funktionsgleichung von $K_{Öl}$ bzw. von $K_{Pellets}$ auf.

$K_{Öl}(t) =$ ____

$K_{Pellets}(t) =$ ____ *[0/½/1 P.]*

2) Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem die geschätzten Gesamtkosten für Familie Buchner für das Heizen mit Pellets gleich groß sind wie die geschätzten Gesamtkosten für das Heizen mit Heizöl. *[0/1 P.]*

c) Die Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich kann für den Zeitraum von 1997 bis 2019 modellhaft durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden.

$$A(t) = \frac{147\,130}{1 + 31 \cdot e^{-0{,}28 \cdot t}}$$

t ... Zeit seit Beginn des Jahres 1997 in Jahren
$A(t)$ ... Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich zur Zeit t in 1 000 Stück

1) Ermitteln Sie für den Zeitraum von 1997 bis 2019 dasjenige Jahr, in dem gemäß diesem Modell die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich am größten war. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{4{,}84 - 4{,}4}{13} = 0{,}033...$

Die mittlere Änderungsrate der Jahresdurchschnittspreise für Pellets beträgt rund 0,03 Cent/kWh pro Jahr.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der mittleren Änderungsrate.

b1) $K_{Öl}(t) = 15\,000 \cdot 0{,}0795 \cdot t = 1\,192{,}5 \cdot t$

$K_{Pellets}(t) = 15\,000 \cdot 0{,}0484 \cdot t + 10\,000 = 726 \cdot t + 10\,000$

b2) $1\,192{,}5 \cdot t_1 = 726 \cdot t_1 + 10\,000$

$t_1 = 21{,}4...$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Funktionsgleichungen $K_{Öl}$ und $K_{Pellets}$, ein halber Punkt für nur eine richtige Funktionsgleichung.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.

c1) $A''(t) = 0$

$t = 12{,}2...$

Im Jahr 2009 war die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich am größten.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Jahreszahl.

Krankenstände

Die durchschnittliche Dauer der Krankenstände von Angestellten in einem bestimmten Betrieb ist in den letzten Jahren gesunken.

Aufgabenstellung:

a) In der nachstehenden Tabelle ist für das Jahr 2000 und für das Jahr 2015 jeweils die durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Tagen angegeben.

Jahr	durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Tagen
2000	12,6
2015	9,9

Mithilfe dieser Daten soll eine lineare Funktion K erstellt werden, die die durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Abhängigkeit von der Zeit t ab dem Jahr 2000 beschreibt.

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion K auf. *[0/1 P.]*

$K(t) =$ ____________________________

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2000
$K(t)$ ... durchschnittliche Dauer der Krankenstände zur Zeit t in Tagen

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{9{,}9 - 12{,}6}{12{,}6} \approx -0{,}214$$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass im Winter der Angestellte A mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % und der Angestellte B mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % erkrankt.

Dabei wird modellhaft angenommen, dass alle Erkrankungen unabhängig voneinander erfolgen.

1) Beschreiben Sie ein im gegebenen Sachzusammenhang mögliches Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$P(E) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}7$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Angestellte A in höchstens 1 von 5 Wintern erkrankt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $K(t) = -0{,}18 \cdot t + 12{,}6$

a2) Die durchschnittliche Dauer der Krankenstände hat im Zeitraum von 2000 bis 2015 um rund 21,4 % abgenommen.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion *K*.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) *E* ... „mindestens 1 der beiden Angestellten erkrankt in einem Winter"

b2) *X* ... Anzahl der Winter mit Erkrankungen des Angestellten *A*
X ist binomialverteilt mit $n = 5$, $p = 0{,}2$.

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}8^5 + 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}73728$

b1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben von *E* im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Kugelstoßen

Aufgabennummer: 2_070	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 2.1, FA 4.3	

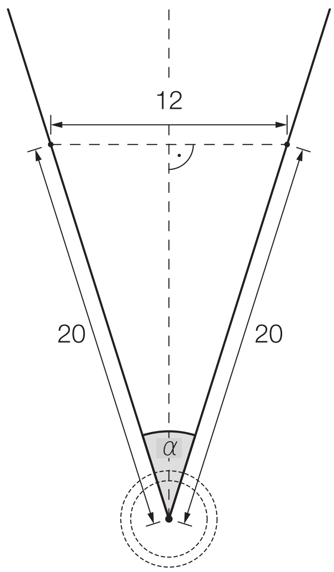
Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen.
Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden.

a) Im Jahr 1948 wurde bei den Männern ein neuer Weltrekord mit der Weite 17,68 m aufgestellt.

Eine Faustregel besagt, dass sich seit 1948 der Weltrekord bei den Männern alle 2,5 Jahre um 34 cm verbessert hat. Die Weltrekordweite (in Metern) soll gemäß dieser Faustregel in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) durch eine lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1948.

b) Der Aufschlagbereich ist in der nachstehenden Abbildung in der Ansicht von oben dargestellt (alle Angaben in Metern).



1) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung markierten Winkel α.

c) Die Bahnkurve einer gestoßenen Kugel lässt sich näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion h beschreiben:

$h(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung der Kugel von der Abstoßstelle in m
$h(x)$ ... Höhe der Kugel über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung von der Abstoßstelle die Kugel auf dem Boden aufschlägt.

d) Für die bei den Männern verwendeten Kugeln gelten folgende Vorgaben:
- Die Masse beträgt 7 257 g.
- Der Durchmesser der Kugel liegt zwischen 11 cm und 13 cm.

Eine Messing-Eisen-Legierung hat eine Dichte von 8,2 g/cm³.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ϱ, also $m = V \cdot \varrho$.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob man aus dieser Messing-Eisen-Legierung eine Kugel herstellen kann, die diese Vorgaben erfüllt.

Lösungserwartung

a1) Steigung k der linearen Funktion f: $k = \frac{0,34}{2,5} = 0,136$

$f(t) = 0,136 \cdot t + 17,68$

t ... Zeit in Jahren
$f(t)$ ... Weltrekordweite zur Zeit t in m

b1) $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{6}{20}\right) = 34,915...° \approx 34,92°$

c1) $h(x) = 0$

oder:

$-0,05 \cdot x^2 + 0,75 \cdot x + 2 = 0$

$x_1 = 17,310...$
$(x_2 = -2,310...)$
Die Kugel schlägt in einer horizontalen Entfernung von rund 17,31 m auf dem Boden auf.

d1) $7\,257 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot 8,2$

$r = \sqrt[3]{\frac{7\,257 \cdot 3}{8,2 \cdot 4 \cdot \pi}} = 5,95...$

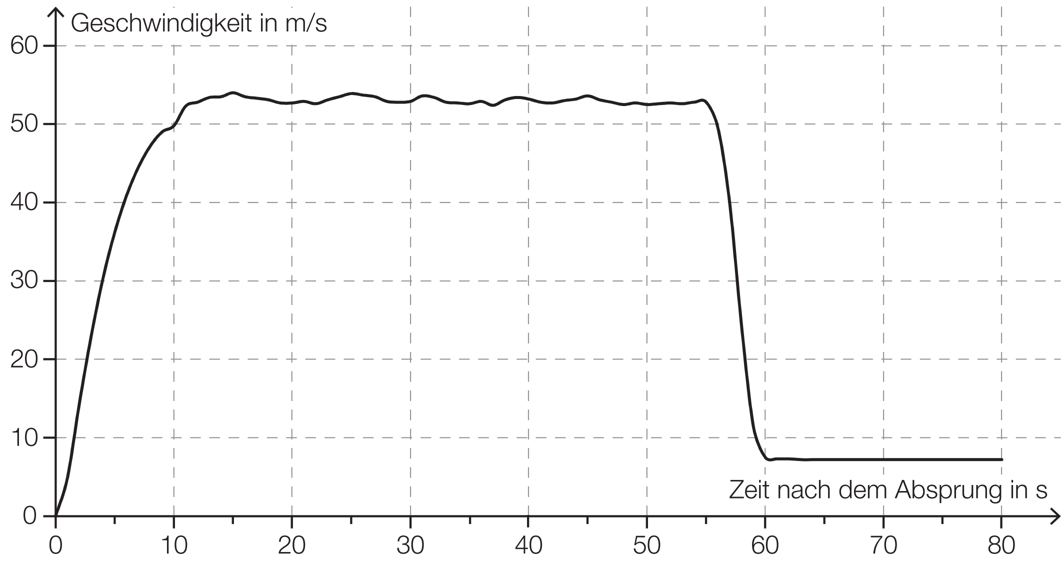
$d = 2 \cdot r = 11,91...$
Der Durchmesser einer derartigen Kugel beträgt rund 11,9 cm und liegt im angegebenen Bereich.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fallschirmsprung

Aufgabennummer: 2_072	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.1, AN 3.3, AN 4.2, AN 4.3	

Bei einem Fallschirmsprung wurde der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers aufgezeichnet. Im nachstehenden Diagramm wird diese Geschwindigkeit für die ersten 80 Sekunden nach dem Absprung veranschaulicht.



a) In den ersten Sekunden nach dem Absprung gilt für den Fallschirmspringer annähernd das Fallgesetz:

$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$s(t)$ ... Fallstrecke zur Zeit t in m
g ... Erdbeschleunigung, $g = 9{,}81$ m/s^2

1) Berechnen Sie mithilfe des Fallgesetzes die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers 1,5 Sekunden nach dem Absprung.

b) 55 Sekunden nach dem Absprung zieht der Fallschirmspringer die Reißleine, der Fallschirm öffnet sich.

1) Schätzen Sie den Flächeninhalt zwischen der Geschwindigkeitskurve und der Zeitachse im Intervall [0 s; 55 s] ab.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

c) Der Höhenmesser des Fallschirmspringers zeigt 60 Sekunden nach dem Absprung eine Meereshöhe von 1300 Metern an. Ab dieser Meereshöhe sinkt der Fallschirmspringer jeweils 100 Meter in 14 Sekunden.
Dabei soll die Meereshöhe des Fallschirmspringers (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) durch eine Funktion h beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt 60 Sekunden nach dem Absprung.

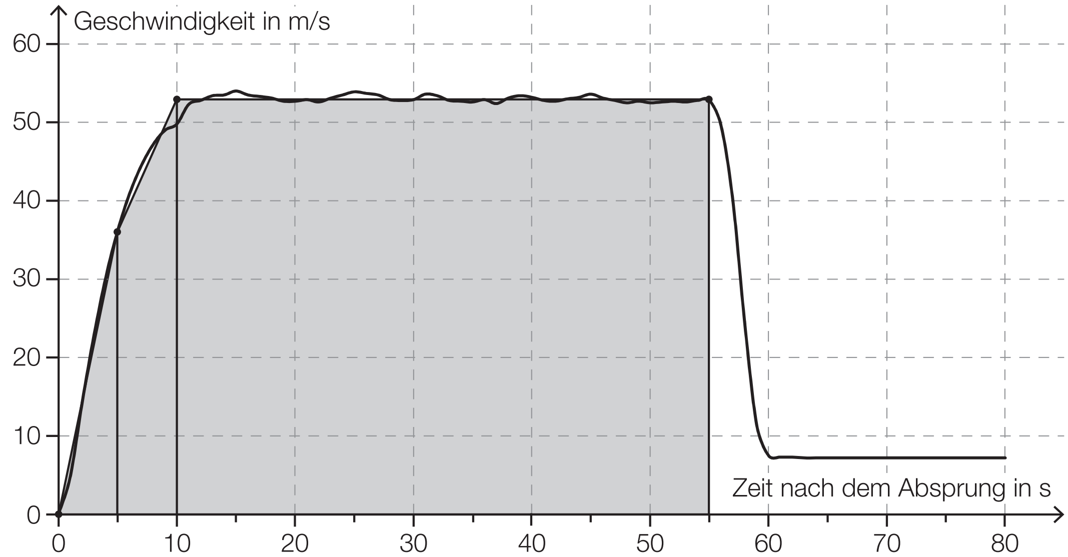
Lösungserwartung

a1) $s'(t) = v(t) = g \cdot t$

$v(1,5) = 9,81 \cdot 1,5 = 14,715$

Gemäß dem Fallgesetz beträgt die Geschwindigkeit 1,5 Sekunden nach dem Absprung rund 14,72 m/s.

b1) Näherungsweises Ermitteln des Flächeninhalts durch Dreiecke und Vierecke:



$$A \approx \frac{36 \cdot 5}{2} + \frac{(53 + 36) \cdot 5}{2} + 53 \cdot 45 = 2\,697{,}5$$

Toleranzintervall: [2 400; 2 900]

b2) Der Flächeninhalt entspricht der Fallstrecke in den ersten 55 Sekunden in Metern.

c1) $h(t) = 1\,300 - \frac{100}{14} \cdot t$

t ... Zeit in s

$h(t)$ ... Meereshöhe des Fallschirmspringers zur Zeit t in m

Benzinverbrauch*

Aufgabennummer: 2_075	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 1.1, AN 3.3	

Der Benzinverbrauch eines bestimmten Kleinwagens kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit modellhaft durch die Funktion B beschrieben werden.

$B(v) = 0{,}000483 \cdot v^2 - 0{,}0326 \cdot v + 2{,}1714 + \frac{66}{v}$ mit $20 < v < 150$

v ... Geschwindigkeit in km/h
$B(v)$ ... Benzinverbrauch in Litern pro 100 km (L/100 km) bei der Geschwindigkeit v

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h höher als bei einer Geschwindigkeit von 70 km/h ist.

______________________________ %

Der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 40 km/h ist um 25 % geringer als der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit v_1 mit $20 < v_1 < 40$.

2) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v_1.

v_1 = ______________________________ km/h

b) Für hohe Geschwindigkeiten soll die Funktion B durch eine lineare Funktion f mit $f(v) = k \cdot v + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ angenähert werden, sodass gilt:
$f(100) = B(100)$
$f(130) = B(130)$

1) $\boxed{\text{A}}$ Ermitteln Sie einen Funktionsterm der Funktion f.

$f(v)$ = ______________________________

Diese Näherung kann verwendet werden, wenn die Abweichung zwischen den Funktionswerten von f und B höchstens 0,3 L/100 km beträgt.

2) Geben Sie das größtmögliche Intervall für die Geschwindigkeit an, in dem die Funktion f als Näherung verwendet werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

c) 1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion B diejenige Geschwindigkeit v_{min}, bei der der Benzinverbrauch am geringsten ist, sowie den zugehörigen Benzinverbrauch B_{min}.

v_{min} = ____________________ km/h

B_{min} = ____________________ L/100 km

Der Benzinverbrauch hängt auch vom Reifendruck ab.
Die Funktion g beschreibt den Benzinverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck.
Dabei gilt: $g(v) = 1{,}02 \cdot B(v)$

2) Berechnen Sie mithilfe der Funktion g, bei welchen beiden Geschwindigkeiten der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{min} ist.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $\frac{B(90) - B(70)}{B(70)} = 0{,}2138... \approx 21{,}4~\%$

a2) $B(v_1) \cdot 0{,}75 = B(40)$

$v_1 = 24{,}24...$ km/h

b) **Lösungserwartung:**

b1) mögliche Vorgehensweise:

$f(100) = B(100) = 4{,}40...$

$f(130) = B(130) = 6{,}60...$

$f(v) = 0{,}0734... \cdot v - 2{,}9399...$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$D(v) = B(v) - f(v)$

$D(v) = 0{,}3$

$(v_1 = -10{,}94...)$

$v_2 = 87{,}08...$

$v_3 = 143{,}34...$

Da die Funktion D an der Stelle $v = 114{,}91...$ km/h eine Minimumstelle mit dem Funktionswert $-0{,}1 > -0{,}3$ hat, erhält man das Intervall [87,1 km/h; 143,3 km/h].

c) **Lösungserwartung:**

c1) $v_{min} = 55{,}73...$ km/h

$B_{min} = 3{,}03...$ L/100 km

c2) $g(v) = B_{min} + 2$

$v_1 = 20{,}41...$ km/h

$v_2 = 108{,}67...$ km/h

Bei Geschwindigkeiten von ca. 20,4 km/h und ca. 108,7 km/h ist der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{min}.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm. Äquivalente Funktionsterme sind als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für das richtige Intervall, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

c1) Ein Punkt für die beiden richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die beiden richtigen Geschwindigkeiten, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

Kondensator*

Aufgabennummer: 2_042	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.1, FA 1.5, AN 4.3	

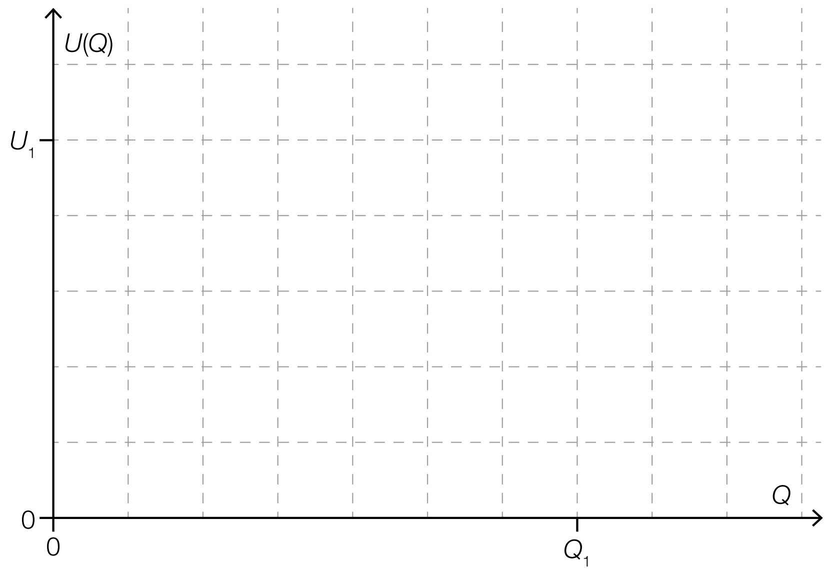
Ein Kondensator ist ein elektrisches Bauelement, mit dem elektrische Ladung und die daraus resultierende elektrische Energie gespeichert werden kann.
Eine einfache Form des Kondensators ist der sogenannte *Plattenkondensator*. Er besteht aus zwei einander gegenüberliegenden elektrisch leitfähigen Flächen, die als *Kondensatorplatten* bezeichnet werden.

Das Verhältnis zwischen der gespeicherten Ladung Q und der an die Kondensatorplatten angelegten (Gleich-)Spannung U wird als Kapazität C bezeichnet.

Es gilt $C = \frac{Q}{U}$, wobei C in der Einheit Farad angegeben wird.

Aufgabenstellung:

a) Ein Kondensator mit einer bestimmten Kapazität C wird bis zur Ladungsmenge Q_1 aufgeladen, die gemessene Spannung $U(Q_1)$ hat dann den Wert U_1.
Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung die Spannung U beim Ladevorgang am Kondensator in Abhängigkeit von der Ladung Q!



Die in diesem Kondensator gespeicherte Energie W kann mithilfe der Formel
$W = \int_0^{Q_1} U(Q)\,dQ$ berechnet werden.
Geben Sie eine Formel für die gespeicherte Energie W in Abhängigkeit von U_1 und C an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

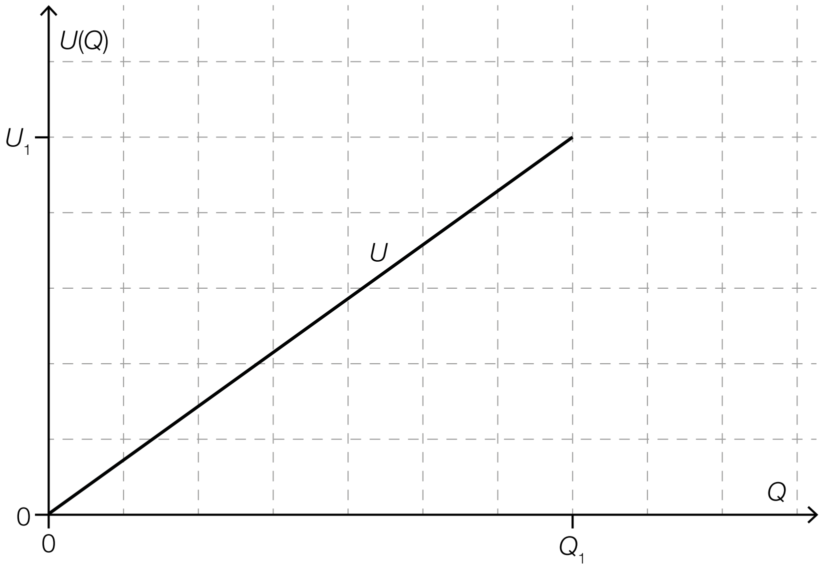
b) Bei einem Ladevorgang kann die Spannung zwischen den Kondensatorplatten als Funktion U in Abhängigkeit von der Zeit t durch $U(t) = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ beschrieben werden. Dabei ist $U^* > 0$ die an den Kondensator angelegte Spannung und $\tau > 0$ eine für den Ladevorgang charakteristische Konstante. Der Ladevorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Zeit, nach der die Spannung $U(t)$ zwischen den Kondensatorplatten 99 % der angelegten Spannung U^* beträgt, wird als *Ladezeit* bezeichnet.
Bestimmen Sie die Ladezeit eines Kondensators in Abhängigkeit von τ!

Geben Sie eine Formel für die momentane Änderungsrate der Spannung zwischen den Kondensatorplatten in Abhängigkeit von t an und zeigen Sie mithilfe dieser Formel, dass die Spannung während des Ladevorgangs ständig steigt!

Lösungserwartung

a)



$$W = \int_0^{Q_1} U(Q)\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{2} \cdot U_1 \cdot Q_1 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_1^2$$

b) Mögliche Vorgehensweise:

$$0{,}99 \cdot U^* = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$0{,}01 = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ladezeit: $t = -\tau \cdot \ln(0{,}01)$ bzw. $t = \tau \cdot \ln(100)$

Mögliche Vorgehensweise:

$$U'(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot U^*}{\tau}$$

Es gilt: $U^* > 0$, $\tau > 0$, $e^{-\frac{t}{\tau}} > 0 \quad \Rightarrow \quad U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.
Da $U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, ist U während des Ladevorgangs streng monoton steigend.

Lösungsschlüssel

a)
- Ein Punkt für eine richtige Skizze.
- Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

b)
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen der Lösung sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine richtige Formel und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

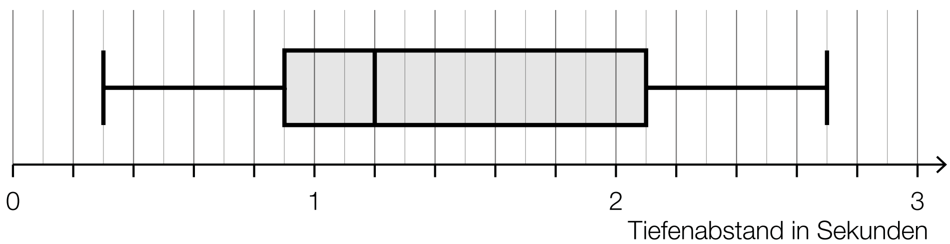
Abstandsmessung*

Aufgabennummer: 2_035	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, FA 2.1, WS 1.1, WS 1.3, WS 1.4, WS 3.2	

Im Rahmen der polizeilichen Kontrollmaßnahmen des öffentlichen Verkehrs werden Abstandsmessungen vorgenommen. Im Folgenden beschreibt der Begriff *Abstand* eine Streckenlänge und der Begriff *Tiefenabstand* eine Zeitspanne.

Beträgt der Abstand zwischen dem hinteren Ende des voranfahrenden Fahrzeugs und dem vorderen Ende des nachfahrenden Fahrzeugs Δs Meter, so versteht man unter dem Tiefenabstand diejenige Zeit t in Sekunden, in der das nachfahrende Fahrzeug die Strecke der Länge Δs zurücklegt.

Nachstehend sind Tiefenabstände, die im Rahmen einer Schwerpunktkontrolle von 1 000 Fahrzeugen ermittelt wurden, in einem Kastenschaubild (Boxplot) dargestellt. Alle kontrollierten Fahrzeuge waren mit einer Geschwindigkeit von ca. 130 km/h unterwegs.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie das erste Quartil q_1 und das dritte Quartil q_3 der Tiefenabstände an und deuten Sie den Bereich von q_1 bis q_3 im gegebenen Kontext!

Nach den Erfahrungswerten eines österreichischen Autofahrerclubs halten ungefähr drei Viertel der Kraftfahrer/innen bei einer mittleren Fahrgeschwindigkeit von ca. 130 km/h einen Abstand von mindestens 30 Metern zum voranfahrenden Fahrzeug ein. Geben Sie an, ob die im Kastenschaubild dargestellten Daten in etwa diese Erfahrungswerte bestätigen oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

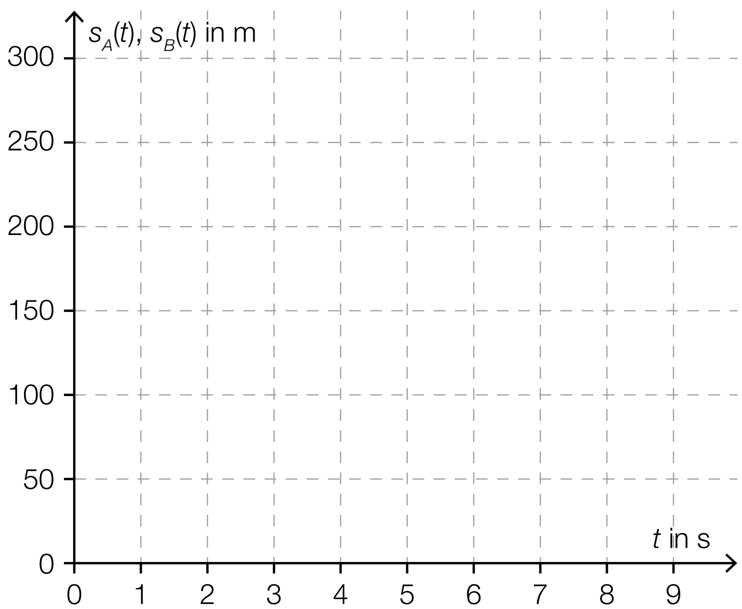
b) Einer üblichen Faustregel zufolge wird auf Autobahnen generell ein Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden empfohlen. Jemand behauptet, dass aus dem dargestellten Kastenschaubild ablesbar ist, dass mindestens 20 % der Kraftfahrer/innen diesen Tiefenabstand eingehalten haben. Geben Sie einen größeren Prozentsatz an, der aus dem Kastenschaubild mit Sicherheit abgelesen werden kann, und begründen Sie Ihre Wahl!

Nehmen Sie den von Ihnen ermittelten Prozentsatz als Wahrscheinlichkeit an, dass der empfohlene Tiefenabstand eingehalten wird.
Geben Sie an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zehn zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Messungen dieser Schwerpunktkontrolle zumindest sechs Mal der empfohlene Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden eingehalten wurde!

c) Bei einer anderen Abstandsmessung wird ein kontrolliertes Fahrzeug auf den letzten 300 Metern vor der Messung zusätzlich gefilmt, damit die Messung nicht verfälscht wird, wenn sich ein anderes Fahrzeug vor das kontrollierte Fahrzeug drängt.

Fahrzeug *A* fährt während des Messvorgangs mit konstanter Geschwindigkeit und benötigt für die gefilmten 300 Meter eine Zeit von neun Sekunden. Stellen Sie den zurückgelegten Weg $s_A(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t im unten stehenden Zeit-Weg-Diagramm dar ($s_A(t)$ in Metern, t in Sekunden) und geben Sie an, mit welcher Geschwindigkeit in km/h das Fahrzeug unterwegs ist!

Ein Fahrzeug *B* legt die 300 Meter ebenfalls in neun Sekunden zurück, verringert dabei aber kontinuierlich seine Geschwindigkeit. Skizzieren Sie ausgehend vom Ursprung einen möglichen Graphen der entsprechenden Zeit-Weg-Funktion s_B in das unten stehende Zeit-Weg-Diagramm!



Lösungserwartung

a) $q_1 = 0{,}9$
$q_3 = 2{,}1$
Etwa die Hälfte der kontrollierten Fahrzeuge halten einen Tiefenabstand von mindestens 0,9 Sekunden und höchstens 2,1 Sekunden ein.

Die im Kastenschaubild dargestellten Daten bestätigen in etwa diese Erfahrungswerte.

Mögliche Begründung:
130 km/h = $36{,}\dot{1}$ m/s
$36{,}\dot{1}$ m/s · 0,9 s = 32,5 m $\Rightarrow$ Mindestens drei Viertel der Kraftfahrer/innen halten einen Abstand von 30 m und mehr ein.

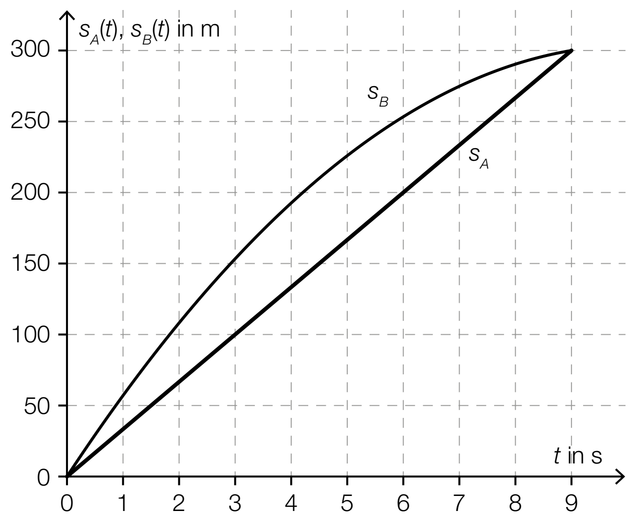
b) ein möglicher größerer Prozentsatz: 25 %

Mögliche Begründung:
Der Tiefenabstand von zwei Sekunden liegt zwischen dem Median und dem dritten Quartil.

Mögliche Vorgehensweise:
Zufallsvariable X = Anzahl der Kraftfahrlenker/innen, die den empfohlenen Mindestabstand eingehalten haben

$p = 0{,}25$ ... Wahrscheinlichkeit, dass der empfohlene Mindestabstand eingehalten wurde
$n = 10$ ... Anzahl der ausgewählten Messungen
$P(X \geq 6) \approx 0{,}0197$

c) Fahrzeug A fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.



Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
– Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Wertes und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: (20 %; 25 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung für den von der Kandidatin/vom Kandidaten gewählten Wert richtig sein muss. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Darstellung von s_A.
– Ein Punkt für eine korrekte Skizze eines möglichen Graphen von s_B.

Stratosphärensprung

Aufgabennummer: 2_028	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 2.2	

Am 14.10.2012 sprang der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner aus einer Höhe von 38 969 m über dem Meeresspiegel aus einer Raumkapsel. Er erreichte nach 50 s in der nahezu luftleeren Stratosphäre eine Höchstgeschwindigkeit von 1 357,6 km/h (≈ 377,1 m/s) und überschritt dabei als erster Mensch im freien Fall die Schallgeschwindigkeit, die bei 20 °C ca. 1 236 km/h (≈ 343,3 m/s) beträgt, in der Stratosphäre wegen der niedrigen Lufttemperaturen aber deutlich geringer ist.

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft hängt bei Windstille nur von der Lufttemperatur T ab. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) werden nachstehend zwei Formeln angegeben, die – bis auf einen (gerundeten) Faktor – äquivalent sind. Die Lufttemperatur T wird in beiden Formeln in °C angegeben.

$$v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)}$$

$$v_2 = 331{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}}$$

Aufgabenstellung:

a) Die Fallbeschleunigung a eines Körpers im Schwerefeld der Erde ist abhängig vom Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt. Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche auf Meeresniveau, d. h. bei einer Entfernung von $r = 6\,371\,000$ m vom Erdmittelpunkt, beträgt bei vernachlässigbarem Luftwiderstand ca. 9,81 m/s^2.
Für die Fallbeschleunigung a gilt: $a(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und r der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt ist. Es gilt:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2};\ M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Berechnen Sie den Wert der Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner beim Absprung aus der Raumkapsel wirkte!

$a =$ ________ m/s^2

Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung, die auf Felix Baumgartner bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit wirkte!

b) Als Felix Baumgartner seine Höchstgeschwindigkeit erreichte, bewegte er sich um 25 % schneller als der Schall in dieser Höhe.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der unter Verwendung einer der beiden in der Einleitung genannten Formeln die Lufttemperatur, die zu diesem Zeitpunkt geherrscht hat, berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Lufttemperatur!

Untersuchen Sie mithilfe der beiden Formeln den Quotienten der Schallgeschwindigkeiten im Lufttemperaturintervall [–60 °C; 20 °C] in Schritten von 10 °C und geben Sie eine Formel an, die in diesem Lufttemperaturintervall den Zusammenhang zwischen v_1 und v_2 beschreibt!

c) Zeigen Sie mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die beiden Formeln für die Schallgeschwindigkeit in der Einleitung bis auf einen (gerundeten) Faktor äquivalent sind! Gehen Sie dabei von der Formel für v_1 aus!

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit v_1 von der Lufttemperatur T kann im Lufttemperaturintervall [–20 °C; 40 °C] in guter Näherung durch eine lineare Funktion f mit $f(T) = k \cdot T + d$ modelliert werden.
Ermitteln Sie die Werte der Parameter k und d und interpretieren Sie diese Werte im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $r_1 = 6\,371\,000 + 38\,969 = 6\,409\,969$ m

$$a(r_1) = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6\,409\,969^2} = 9{,}69 \text{ m/s}^2$$

mittlere Beschleunigung: $a = \frac{377{,}1}{50} = 7{,}54$ m/s^2

b) $\frac{377{,}1}{1{,}25} \approx 301{,}7$ m/s

$v_1(T) = 301{,}7 \Rightarrow T \approx -46{,}7$ °C

bzw. $v_2(T) = 301{,}7 \Rightarrow T \approx -46{,}9$ °C

T in °C	v_1 in m/s	v_2 in m/s	$\frac{v_2}{v_1}$
–60	292,67	292,84	1,00055
–50	299,46	299,63	1,00055
–40	306,10	306,27	1,00055
–30	312,59	312,77	1,00055
–20	318,96	319,13	1,00055
–10	325,20	325,38	1,00055
0	331,32	331,50	1,00055
10	337,33	337,51	1,00055
20	343,23	343,42	1,00055

$v_2 \approx 1{,}00055 \cdot v_1$ bzw. $v_1 \approx 0{,}99945 \cdot v_2$

c) $$v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)} = \sqrt{401{,}87 \cdot 273{,}15 \cdot \left(\frac{T}{273{,}15} + 1\right)} \approx$$
$$\approx \sqrt{109\,770{,}8 \cdot \left(\frac{T}{273{,}15} + 1\right)} \approx 331{,}3 \cdot \sqrt{\frac{T}{273{,}15} + 1}$$

Der Faktor 331,3 unterscheidet sich nur geringfügig vom Faktor 331,5 in der Formel für v_2.

$k = \frac{v_1(40) - v_1(-20)}{60} \approx 0{,}6$ ... pro 1 °C nimmt die Schallgeschwindigkeit um ca. 0,6 m/s zu
$d = v_1(0) \approx 331{,}3$ ... Schallgeschwindigkeit bei 0 °C

Saturn-V-Rakete

Aufgabennummer: 2_025	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 2.1, FA 4.3, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie erforderlich

Eine Mehrstufenrakete besteht aus mehreren, oft übereinander montierten „Raketenstufen“. Jede Raketenstufe ist eine separate Rakete mit Treibstoffvorrat und Raketentriebwerk. Leere Treibstofftanks und nicht mehr benötigte Triebwerke werden abgeworfen. Auf diese Weise werden höhere Geschwindigkeiten und somit höhere Umlaufbahnen als mit einstufigen Raketen erreicht.
Die Familie der Saturn-Raketen gehört zu den leistungsstärksten Trägersystemen der Raumfahrt, die jemals gebaut wurden. Sie wurden im Rahmen des Apollo-Programms für die US-amerikanische Raumfahrtbehörde NASA entwickelt. Die Saturn V ist die größte jemals gebaute Rakete. Mithilfe dieser dreistufigen Rakete konnten in den Jahren 1969 bis 1972 insgesamt 12 Personen auf den Mond gebracht werden. 1973 beförderte eine Saturn V die US-amerikanische Raumstation Skylab in eine Erdumlaufbahn in 435 km Höhe.
Eine Saturn V hatte die Startmasse $m_0 = 2{,}9 \cdot 10^6$ kg. Innerhalb von 160 s nach dem Start wurden die $2{,}24 \cdot 10^6$ kg Treibstoff der ersten Stufe gleichmäßig verbrannt. Diese ersten 160 s werden als Brenndauer der ersten Stufe bezeichnet. Die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) einer Saturn V kann t Sekunden nach dem Start während der Brenndauer der ersten Stufe näherungsweise durch die Funktion v mit

$$v(t) = 0{,}0000000283 \cdot t^5 - 0{,}00000734 \cdot t^4 + 0{,}000872 \cdot t^3 - 0{,}00275 \cdot t^2 + 2{,}27 \cdot t$$

beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Beschleunigung einer Saturn V beim Start und am Ende der Brenndauer der ersten Stufe!

Geben Sie an, ob die Beschleunigung der Rakete nach der halben Brenndauer der ersten Stufe kleiner oder größer als die mittlere Beschleunigung (= mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) während der ersten 160 Sekunden des Flugs ist! Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion!

b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den eine Saturn V 160 s nach dem Start zurückgelegt hat!

Begründen Sie, warum in dieser Aufgabenstellung der zurückgelegte Weg nicht mit der Formel „Weg = Geschwindigkeit mal Zeit“ berechnet werden kann!

c) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt t_1, für den gilt: $v(t_1) = \frac{v(0) + v(160)}{2}$.
Interpretieren Sie t_1 und $v(t_1)$ im gegebenen Kontext!

d) Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Treibstoffmasse m_T (in Tonnen) der Saturn V von der Flugzeit t während der Brenndauer der ersten Stufe durch eine Funktionsgleichung!

Geben Sie die prozentuelle Abnahme der Gesamtmasse einer Saturn V für diesen Zeitraum an!

e) Nach dem Gravitationsgesetz wirkt auf eine im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindliche Masse m die Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde ist.

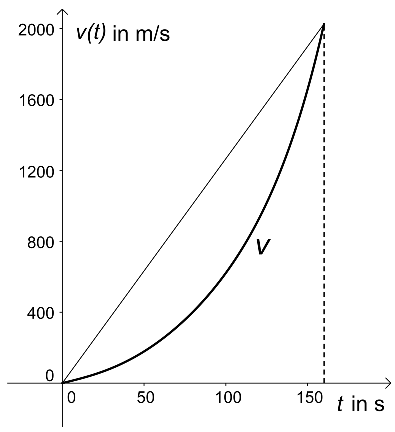
Deuten Sie das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ im Hinblick auf die Beförderung der Raumstation Skylab in die Erdumlaufbahn und beschreiben Sie, welche Werte dabei für die Grenzen r_1 und r_2 einzusetzen sind!

Begründen Sie anhand der Formel für die Gravitationskraft, um welchen Faktor sich das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ ändert, wenn ein Objekt mit einem Zehntel der Masse von Skylab in eine Umlaufbahn derselben Höhe gebracht wird!

Möglicher Lösungsweg

a) $a(0) = v'(0) = 2{,}27\ \text{m/s}^2$
$a(160) = v'(160) = 40{,}83\ \text{m/s}^2$

Bestimmt man die zur Sekante parallele Tangente, so liegt die Stelle des zugehörigen Berührpunktes rechts von $t = 80$. Aus der Linkskrümmung der Funktion v folgt daher, dass die Beschleunigung nach 80 Sekunden kleiner als die mittlere Beschleunigung im Intervall [0 s; 160 s] ist.



Weitere mögliche Begründung:
Die mittlere Beschleunigung (= Steigung der Sekante) in [0; 160] ist größer als die Momentanbeschleunigung (= Steigung der Tangente) bei $t = 80$.

b) $s(160) = \int_0^{160} v(t)\,\mathrm{d}t \approx 93\,371$

zurückgelegter Weg nach 160 s: 93 371 m

$s = v \cdot t$ gilt nur bei konstanter Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Saturn V ändert sich allerdings mit der Zeit.

c) $v(0) = 0\ \text{m/s}$; $v(160) \approx 2\,022\ \text{m/s}$
$v(t_1) = 1\,011 \quad \Rightarrow \quad t_1 \approx 125\ \text{s}$

Die Geschwindigkeit ist nach 125 s halb so groß wie nach 160 s.

d) $m_T(t) = 2\,240 - 14 \cdot t$
$\frac{2{,}24}{2{,}9} \approx 0{,}77$
Die Gesamtmasse hat um 77 % abgenommen.

e) Das Ergebnis gibt die Arbeit an, die nötig ist, um die Raumstation Skylab in die entsprechende Erdumlaufbahn zu bringen.
r_1 ist der Erdradius, r_2 ist die Summe aus Erdradius und Höhe der Umlaufbahn.

Die Gravitationskraft und somit auch die Arbeit sind direkt proportional zur Masse des Objekts. Die erforderliche Arbeit ist daher nur ein Zehntel des Vergleichswertes.

Lösungsschlüssel

a) Ein Punkt für die richtige Berechnung der beiden Beschleunigungswerte.
Toleranzintervall für $a(0)$: [2,2 m/s²; 2,3 m/s²]
Toleranzintervall für $a(160)$: [40 m/s²; 42 m/s²]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

b) Ein Punkt für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges.
Toleranzintervall: [93 000 m; 94 000 m]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

c) Ein Punkt für die richtige Berechnung des Zeitpunkts t_1.
Toleranzintervall: [124 s; 126 s]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Deutung der beiden Werte laut Lösungserwartung.

d) Ein Punkt für die Angabe einer richtigen Funktionsgleichung.
Äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.
Ein Punkt für die Angabe des richtigen Prozentsatzes.
Toleranzintervall: [77 %; 78 %]

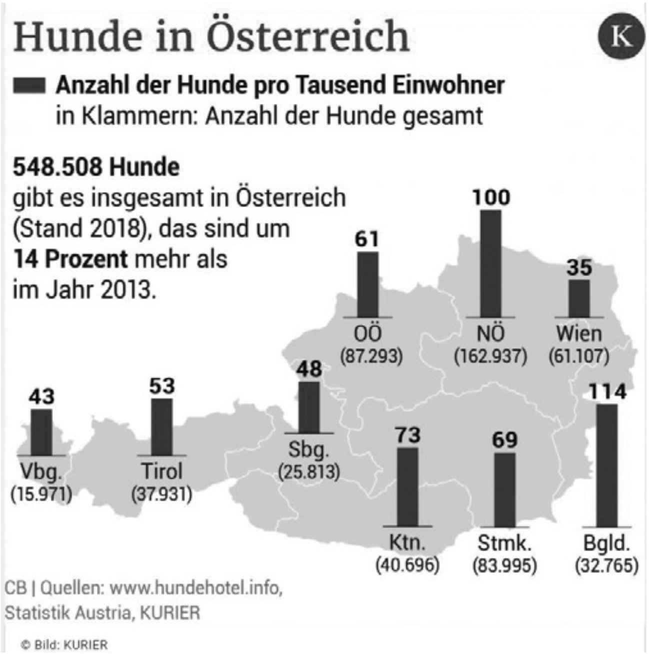
e) Ein Punkt für die richtige Deutung des bestimmten Integrals und die richtige Beschreibung der Werte der beiden Grenzen.
Ein Punkt für eine richtige Begründung, um welchen Faktor sich das Ergebnis ändert.
Die direkte Proportionalität zwischen Masse und Gravitationskraft muss dabei sinngemäß erwähnt werden.

Hunde in Österreich

Hunde sind in Österreich als Haustiere sehr beliebt.

Aufgabenstellung:

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Verteilung der Anzahl der Hunde in Österreich im Jahr 2018 nach Bundesländern.

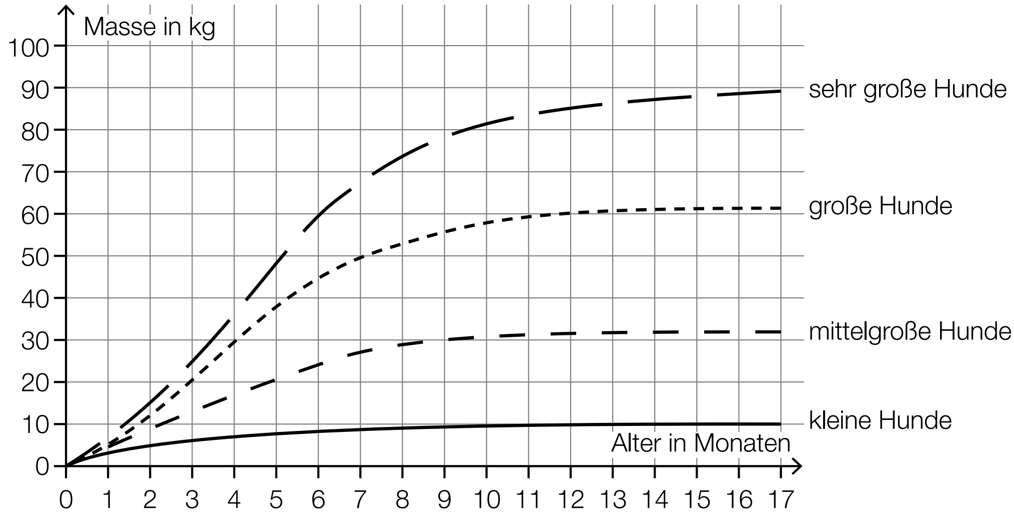


Bildquelle: https://kurier.at/chronik/oesterreich/plus-14-prozent-hunde-liegen-voll-im-trend/400573877 [16.03.2021].

Der Median der Anzahl der Hunde pro tausend Einwohner/innen in den 9 Bundesländern ist gleich der Anzahl der Hunde pro tausend Einwohner/innen in einem bestimmten Bundesland.

1) Ermitteln Sie dieses Bundesland. *[0/1 P.]*

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Entwicklung der Masse von Hunden verschiedener Größe in den ersten 17 Lebensmonaten.



Quelle: https://www.dasgesundetier.de/magazin/artikel/welpenerziehung-teil-2 [15.03.2021] (adaptiert).

1) Vervollständigen Sie die zwei nachstehenden Sätze mithilfe der Daten aus der obigen Abbildung so, dass richtige Aussagen entstehen. *[0/½/1 P.]*

„Große Hunde" haben im Alter von 4 Monaten eine Masse von rund __________ kg.

„Sehr große Hunde" haben im Alter von rund __________ Monaten eine Masse von 80 kg.

c) Der *Labrador* ist eine Hunderasse.

Als *minimale Masse* wird die Masse bezeichnet, die eine gesunde Labradorhündin abhängig von ihrem Alter mindestens haben soll.

Die nachstehende Tabelle zeigt die minimale Masse von Labradorhündinnen in Abhängigkeit vom Alter.

Alter in Monaten	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
minimale Masse in kg	10	13	16	18	20	22	22	23	24	24

Datenquelle: https://tierpal.de/labrador-wachstum/ [06.09.2022].

Es wird angenommen, dass sich die minimale Masse von Labradorhündinnen im Alter von 1 bis 5 Monaten linear entwickelt.

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die minimale Masse von Labradorhündinnen im Alter von 2 bis 3 Monaten zunimmt. *[0/1 P.]*

Die minimale Masse von Labradorhündinnen kann für das Alter von 7 bis 15 Monaten durch die Funktion $m\colon [7; 15] \to \mathbb{R}^+$ modelliert werden.

$m(t) = 25 - 24{,}7 \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$

t ... Alter in Monaten
$m(t)$ ... minimale Masse im Alter t in kg

Für das Alter von 7 Monaten stimmt der Wert der Funktion m mit dem entsprechenden Wert in der Tabelle überein.

Für das Alter von 12 Monaten weicht der Wert der Funktion m vom entsprechenden Wert in der Tabelle ab.

2) Berechnen Sie diese Abweichung in kg. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Oberösterreich

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Bundeslands.

b1) „Große Hunde“ haben im Alter von 4 Monaten eine Masse von rund 30 kg.
Toleranzintervall: [28 kg; 31 kg]

„Sehr große Hunde“ haben im Alter von rund 9,5 Monaten eine Masse von 80 kg.
Toleranzintervall: [9 Monate; 10 Monate]

b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der beiden Sätze, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

c1) minimale Masse im Alter von 2 Monaten: 7 kg
$\frac{3}{7} = 0{,}428... = 42{,}8...\ \%$
Die minimale Masse von Labradorhündinnen im Alter von 2 bis 3 Monaten nimmt um rund 43 % zu.

c2) $m(7) = 20$
$k = 0{,}228...$
$m(12) = 23{,}40...$
$24 - m(12) = 0{,}59...$

Die Abweichung beträgt rund 0,6 kg.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Abweichung, wobei –0,6 ebenfalls richtig ist.

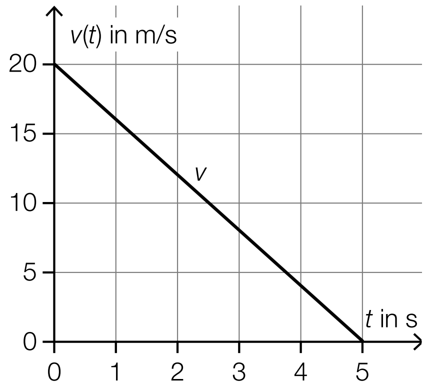
Bremsvorgänge

Durch das Einwirken einer Bremskraft und der damit verbundenen negativen Beschleunigung verringert sich die Geschwindigkeit eines fahrenden Fahrzeugs.

Aufgabenstellung:

a) Ein bestimmtes Fahrzeug wird durch eine Vollbremsung bis zum Stillstand abgebremst. Der Weg, den ein Fahrzeug während der Vollbremsung zurücklegt, wird als *Bremsweg* bezeichnet.

In der nachstehenden Abbildung ist das Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm für eine 5 s dauernde Vollbremsung dargestellt.



Für die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v gilt:

$v(t) = -4 \cdot t + 20 \quad \text{mit} \quad t \in [0; 5]$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s

1) Interpretieren Sie die Koeffizienten –4 und 20 aus der obigen Funktionsgleichung von v im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/½/1 P.]*

Die Länge des Bremswegs des Fahrzeugs bei dieser Vollbremsung wird mit s_B bezeichnet. Wird die Anfangsgeschwindigkeit halbiert, so beträgt bei gleichbleibender negativer Beschleunigung die Länge des Bremswegs $k \cdot s_B$ mit $k \in \mathbb{R}$.

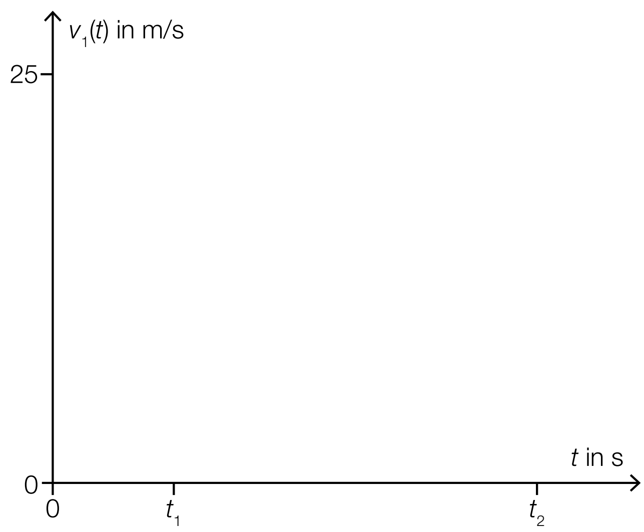
2) Ermitteln Sie k. *[0/1 P.]*

b) Ein Fahrzeug fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 25 m/s. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sieht der Fahrzeuglenker ein Hindernis auf der Straße.

Es gilt:

- Der Fahrzeuglenker benötigt eine bestimmte Zeit, um zu reagieren. Während dieser Zeit fährt das Fahrzeug mit der konstanten Geschwindigkeit von 25 m/s weiter.
- Der Bremsvorgang beginnt zum Zeitpunkt t_1 mit einer konstanten Bremsverzögerung (negative Beschleunigung).
- Zum Zeitpunkt t_2 kommt das Fahrzeug zum Stillstand.

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm den Geschwindigkeitsverlauf für den beschriebenen Vorgang ein (t in s, $v_1(t)$ in m/s). *[0/1 P.]*



Der Weg, den das Fahrzeug im Zeitintervall $[0; t_2]$ zurücklegt, wird *Anhalteweg* s_A genannt (s_A in m).

2) Stellen Sie unter Verwendung von t_1 und t_2 eine Formel zur Berechnung von s_A auf.

$s_A =$ ______________________ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Geschwindigkeit nimmt pro Sekunde um 4 m/s ab.

Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt 20 m/s.

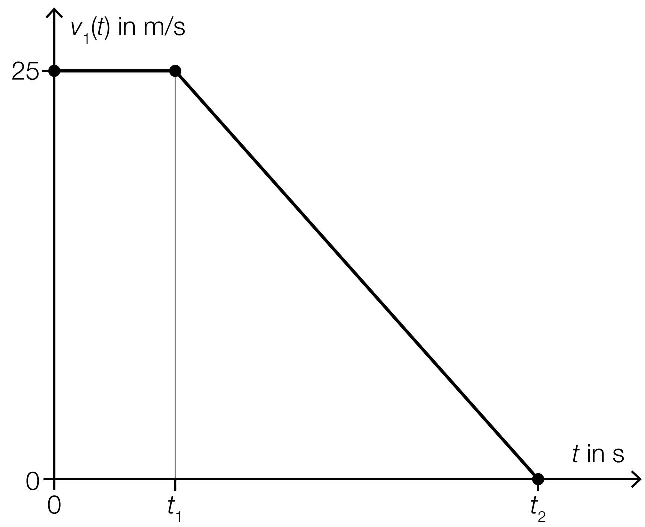
a2) Für eine Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s gilt: $s_B = \frac{5 \cdot 20}{2} = 50$

Bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s beträgt die Zeit bis zum Stillstand 2,5 s.
Es gilt: $k \cdot s_B = \frac{2{,}5 \cdot 10}{2} = 12{,}5$

$k = \frac{1}{4}$

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren beider Koeffizienten im gegebenen Sachzusammenhang, ein halber Punkt für das richtige Interpretieren nur eines Koeffizienten.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von k.

b1)



b2) $s_A = 25 \cdot t_1 + \frac{25}{2} \cdot (t_2 - t_1)$

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Geschwindigkeitsverlaufs, wobei der Übergang zwischen den beiden linearen Funktionen im Punkt $(t_1 | 25)$ klar erkennbar sein muss.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Exponentialfunktion und lineare Funktion*

Aufgabennummer: 2_049	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 2.3, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.2, AN 4.3	

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$.

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist eine lineare Funktion $g_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_1(x) = k \cdot x + 2$ und $k \in \mathbb{R}$.

Geben Sie alle $k \in \mathbb{R}$ an, für die die Graphen von f und g_1 einander in genau zwei Punkten schneiden!

Für ein solches k beschreibt die Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = g_1(x) - f(x)$ die Differenz von g_1 und f. Für eine Stelle x_0 zwischen den beiden Schnittpunkten der Graphen gilt die Beziehung $h'(x_0) = 0$.

Bestimmen Sie x_0 in Abhängigkeit von k!

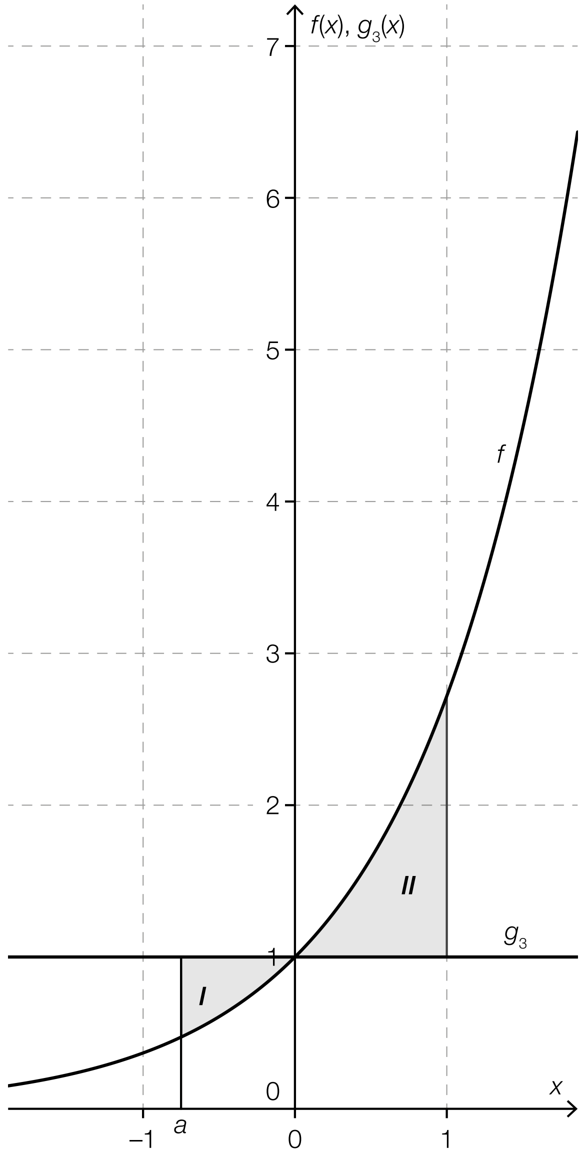
b) Der Graph einer linearen Funktion $g_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_2(x) = 4 \cdot x + d$ und $d \in \mathbb{R}$ ist eine Tangente an den Graphen von f.

Geben Sie die Koordinaten des Berührpunkts B der beiden Graphen an!

Geben Sie den Wert von d an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

c) Gegeben ist die Funktion $g_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_3(x) = 1$.
Die von den beiden Graphen von g_3 und f im Intervall $[a; 0]$ (mit $a \in \mathbb{R}$ und $a < 0$) eingeschlossene Fläche ***I*** hat den Flächeninhalt A_1. Die von den beiden Graphen von f und g_3 im Intervall $[0; 1]$ eingeschlossene Fläche ***II*** hat den Flächeninhalt A_2.



Berechnen Sie den Flächeninhalt A_2!

Drücken Sie das bestimmte Integral $\int_a^1 (f(x) - g_3(x))\,dx$ durch die Flächeninhalte A_1 und A_2 aus!

Lösungserwartung

a) $k \in \mathbb{R}^+$

möglicher Vorgehensweise:

$h(x) = g_1(x) - f(x) = k \cdot x + 2 - e^x$

$h'(x) = k - e^x$

$h'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad k - e^{x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \ln(k)$

b) mögliche Vorgehensweise:

$B = (x_B \mid f(x_B))$

$f'(x_B) = 4$

$e^{x_B} = 4 \quad \Rightarrow \quad x_B = \ln(4)$

$f(x_B) = e^{\ln(4)} = 4$

$B = (\ln(4) \mid 4)$

$4 = 4 \cdot \ln(4) + d \quad \Rightarrow \quad d = 4 - 4 \cdot \ln(4) \approx -1{,}545$

c) $A_3 = \int_0^1 (e^x - 1)\,\mathrm{d}x = e - 2$

$\int_a^1 (f(x) - g_3(x))\,\mathrm{d}x = A_2 - A_1$

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Koordinaten.
Toleranzintervall für x_B: [1,3; 1,4]
Toleranzintervall für $f(x_B)$: [3,6; 4,1]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für d: [–2,0; –1,1]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei bereits die Angabe $\int_0^1 (e^x - 1)\,dx$ als richtig zu werten ist.
Toleranzintervall: [0,70; 0,72]
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Hopfen*

Aufgabennummer: 2_034	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.2, AN 3.2, AN 3.3, FA 1.5, FA 1.7, FA 2.2

Hopfen ist eine schnell wachsende Kletterpflanze. Die Modellfunktion $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}^-$ gibt näherungsweise die Pflanzenhöhe einer bestimmten Hopfensorte zum Zeitpunkt t an, wobei $h(t)$ in Metern und t in Wochen angegeben wird.

In der nachstehenden Tabelle sind die gemessenen Höhen einer Hopfenpflanze ab Anfang April ($t = 0$) zusammengefasst.

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Anhand dieser Messwerte wurden für die Modellfunktion h die Parameterwerte $a = 8$, $b = 15$ und $k = -0{,}46$ ermittelt.

Aufgabenstellung:

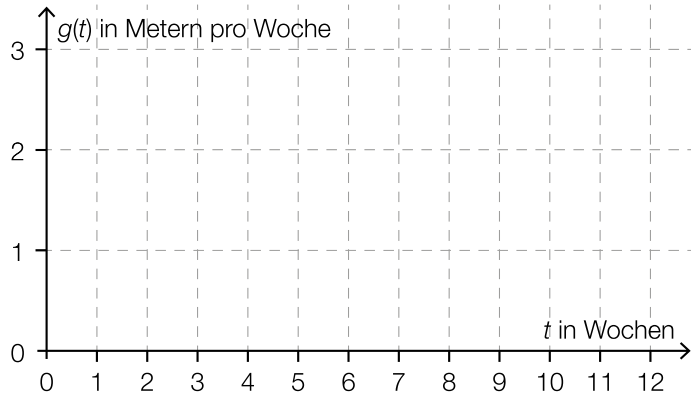
a) Geben Sie unter Verwendung der Modellfunktion h einen Ausdruck an, mit dem berechnet werden kann, um wie viele Meter die Hopfenpflanze im Zeitintervall $[0; t_1]$ gewachsen ist!

Berechnen Sie unter Verwendung der Modellfunktion h mithilfe Ihres Ausdrucks, wie viele Meter die Pflanze in den ersten 10 Wochen gewachsen ist, und geben Sie die prozentuelle Abweichung vom tatsächlich gemessenen Wert an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

b) Wird das Wachstum der Pflanze mithilfe der Funktion h modelliert, gibt es einen Zeitpunkt t_2, zu dem sie am schnellsten wächst. Geben Sie eine Gleichung an, mit der dieser Zeitpunkt berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Berechnen Sie die zugehörige maximale Wachstumsgeschwindigkeit und skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem unter Berücksichtigung des von Ihnen ermittelten Maximums den Verlauf des Graphen derjenigen Funktion g, die basierend auf der Modellfunktion h die Wachstumsgeschwindigkeit der Hopfenpflanze in Abhängigkeit von t beschreibt!



c) Ermitteln Sie eine lineare Funktion h_1, deren Werte bei $t = 0$ und $t = 12$ mit den gemessenen Höhen aus der angegebenen Tabelle übereinstimmen, und interpretieren Sie die Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Kontext!

$h_1(t) =$ ____

Begründen Sie anhand des Verlaufs der Graphen von h und h_1, warum es mindestens zwei Zeitpunkte gibt, in denen die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze denselben Wert hat wie die Steigung von h_1!

d) Für größer werdende t nähert sich $h(t)$ einem Wert an, der als h_{max} bezeichnet wird. Weisen Sie anhand der gegebenen Funktionsgleichung der Modellfunktion h rechnerisch nach, dass der Parameter k (mit $k < 0$) keinen Einfluss auf h_{max} hat, und geben Sie h_{max} an!

Günstige Witterungsverhältnisse können dazu führen, dass die Hopfenpflanze schneller und höher wächst, d. h., dass sie sich früher einem größeren Wert von h_{max} annähert. Geben Sie für ein derartiges Pflanzenwachstum an, wie a und k verändert werden müssen!

Lösungserwartung

a) möglicher Ausdruck: $h(t_1) - h(0)$

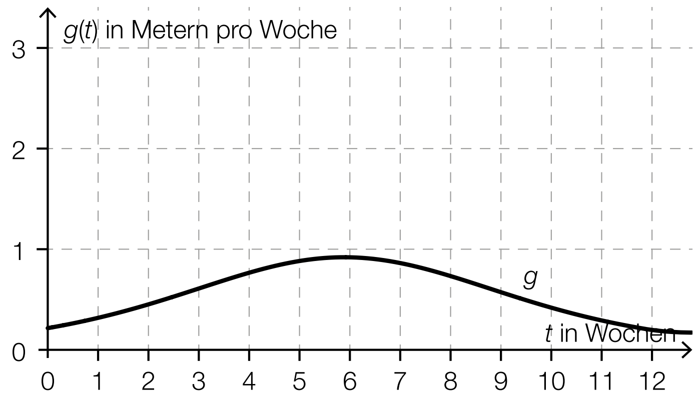
$h(10) - h(0) \approx 6{,}45$
Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.
Die mit der Modellfunktion h berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall $[0; 10]$ ist um ca. 0,8 % größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m).

b) Mögliche Gleichung:

$h''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2$

$t_2 \approx 5{,}9$ Wochen

$h'(t_2) \approx 0{,}92$
Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche.



c) Mögliche Funktionsgleichung von h_1:
$h_1(t) = 0{,}58\dot{3} \cdot t + 0{,}6$

Mögliche Interpretation:

Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche.

Mögliche Begründung:

Die Steigung von h ist anfangs kleiner als jene von h_1, dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

d) Möglicher Nachweis:

Für alle $k < 0$ gilt: $\lim\limits_{t \to \infty} e^{k \cdot t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t \to \infty} h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot 0} = a$, also ist h_{max} unabhängig von k.

$h_{max} = a$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss a vergrößert und k verkleinert werden.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen korrekten Ausdruck. Andere korrekte Ausdrücke sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Angabe des richtigen Wertes und der richtigen prozentuellen Abweichung.
Toleranzintervall für den Wert: [6,4 m; 6,5 m]

b) – Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die Angabe des richtigen Zeitpunkts, wobei die Einheit „Wochen" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [5,4 Wochen; 6,3 Wochen]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Meter pro Woche" nicht angeführt sein muss, und eine korrekte Skizze des Graphen von g.
Toleranzintervall: [0,90 Meter pro Woche; 1 Meter pro Woche]

c) – Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung und eine korrekte Interpretation unter Verwendung korrekter Einheiten. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die Steigung: [0,58; 0,59]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

d) – Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis und die richtige Lösung. Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung der Veränderung der beiden Werte von a und k.

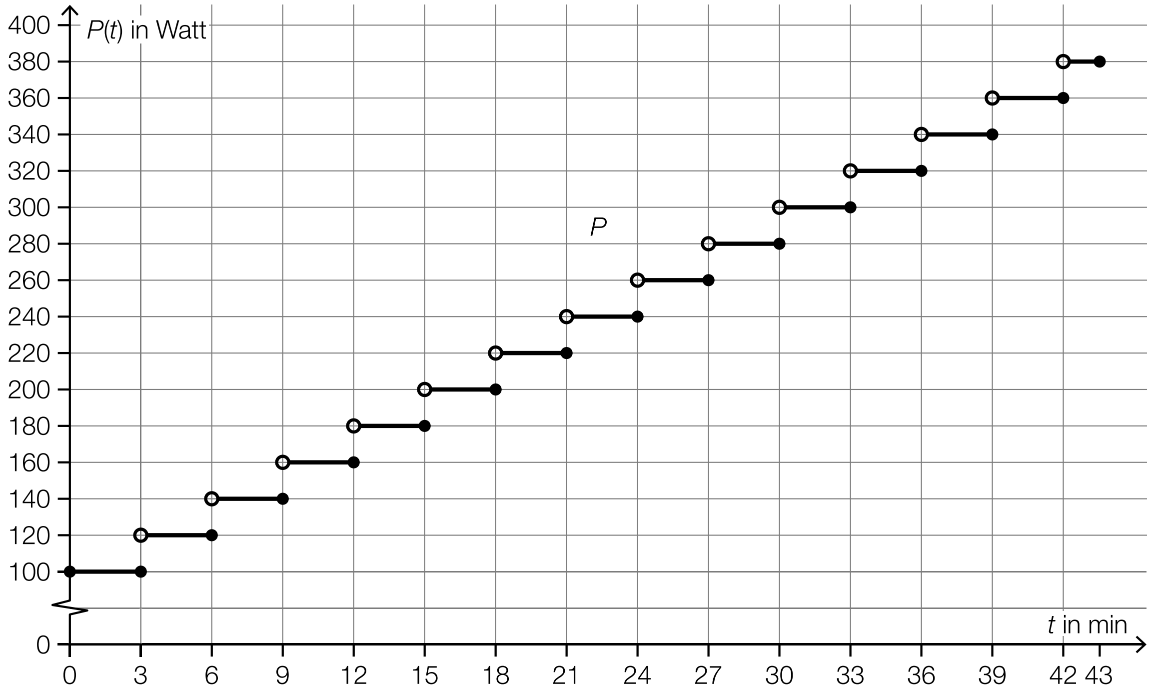
Belastungstests

Laktat ist ein Stoffwechselprodukt. Bei zunehmender körperlicher Belastung wird mehr Laktat im Körper produziert.
Bei Belastungstests werden unter anderem die Herzfrequenz und die Laktatkonzentration im Blut (in mmol/L) gemessen.

Aufgabenstellung:

a) Katharina unterzieht sich einem Belastungstest. Die Belastung wird bei diesem Test schrittweise erhöht, bis Katharina den Test nach 43 min abbricht.

Die Funktion $P\colon [0; 43] \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto P(t)$ beschreibt modellhaft die von Katharina erbrachte Leistung in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $P(t)$ in Watt). Der Graph von P ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Für die im Zeitintervall $[t_A; t_B]$ (in min) verrichtete Arbeit W (in Joule) gilt:

$$W = 60 \cdot \int_{t_A}^{t_B} P(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Berechnen Sie die von Katharina im Zeitintervall [30; 43] verrichtete Arbeit in Joule.

[0/1 P.]

Im Rahmen dieses Belastungstests wird die Laktatkonzentration in Katharinas Blut gemessen.
Die Funktion $c_1\colon [0; 43] \to \mathbb{R}^+$ mit $c_1(t) = 1{,}13 + 4 \cdot 10^{-8} \cdot t^5$ beschreibt modellhaft die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $c_1(t)$ in mmol/L).

2) Ermitteln Sie diejenige Leistung (in Watt) während dieses Belastungstests, bei der eine Laktatkonzentration von 1,95 mmol/L erreicht wird. *[0/1 P.]*

Bei diesem Belastungstest wird auch Katharinas Herzfrequenz gemessen.
Die Funktion $H\colon [0; 43] \to \mathbb{R}^+$ mit $H(t) = 2 \cdot t + 85$ beschreibt modellhaft die Herzfrequenz in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $H(t)$ in Schlägen/min).

3) Beschreiben Sie die Bedeutung der Zahlen 2 und 85 im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei jeweils die zugehörigen Einheiten an.

Bedeutung der Zahl 2:

____

Bedeutung der Zahl 85:

____

[0/½/1 P.]

b) Katharina unterzieht sich einem anderen Belastungstest. Dabei wird die Laktatkonzentration in ihrem Blut zu Beginn, während und nach einer intensiven Belastung gemessen.

Die Funktion $c_2\colon [0; 30] \to \mathbb{R}^+$ mit $c_2(t) = 31{,}2 \cdot (e^{-0{,}066 \cdot t} - e^{-0{,}325 \cdot t}) + 1{,}13$ beschreibt modellhaft die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $c_2(t)$ in mmol/L).

Zum Zeitpunkt t_1 ist die Laktatkonzentration wieder auf die Hälfte des maximal erreichten Wertes abgesunken.

1) Ermitteln Sie t_1. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $60 \cdot [3 \cdot (300 + 320 + 340 + 360) + 380] = 260\,400$

Die von Katharina im Zeitintervall [30; 43] verrichtete Arbeit beträgt 260 400 J.

a2) $c_1(t) = 1{,}95$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 28{,}9...$
$P(28{,}9...) = 280$

Die Leistung bei einer Laktatkonzentration von 1,95 mmol/L beträgt 280 Watt.

a3) Bedeutung der Zahl 2: Die Herzfrequenz nimmt pro Minute um 2 Schläge/min zu.
Bedeutung der Zahl 85: Die Herzfrequenz zu Beginn des Belastungstests beträgt 85 Schläge/min.

Das Angeben der Zahlen 2 und 85 ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der verrichteten Arbeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Leistung.
a3) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung der beiden Zahlen, ein halber Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung von nur einer Zahl, jeweils unter Angabe der zugehörigen Einheiten.

b1) t_{max} ... Zeitpunkt des maximal erreichten Wertes der Laktatkonzentration

$c_2'(t_{max}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

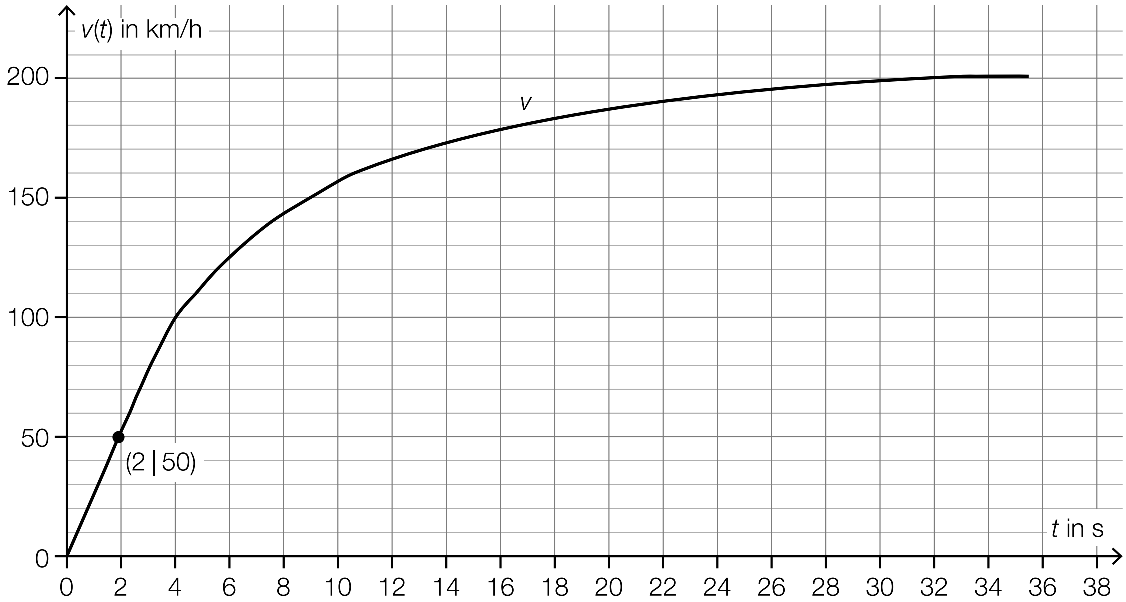
$t_{max} = 6{,}155...$
$c_2(6{,}155...) = 17{,}69...$
$\frac{17{,}69...}{2} = c_2(t_1)$
$t_1 = 21{,}1...$ min

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.

Beschleunigungstest

Bei einem Beschleunigungstest wird ein Fahrzeug aus dem Stillstand (Anfangsgeschwindigkeit = 0 km/h) beschleunigt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v für einen Beschleunigungstest mit einem Sportwagen dargestellt. Dabei bewegt sich der Sportwagen t Sekunden nach Beginn des Beschleunigungsvorgangs mit der Geschwindigkeit $v(t)$ in km/h.



Aufgabenstellung:

a) Es wird angenommen, dass die Geschwindigkeit v_1 des Sportwagens im Zeitintervall [0; 2] direkt proportional zur Zeit t ist (t in s, $v_1(t)$ in km/h).

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von v_1 auf.

$v_1(t) =$ ____________________ *[0/1 P.]*

b) Bei einer anderen Modellierung kann die Geschwindigkeit des Sportwagens im Zeitintervall [0; 20] in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion v_2 beschrieben werden.

$v_2(t) = -0{,}001 \cdot t^4 + 0{,}078 \cdot t^3 - 2{,}23 \cdot t^2 + 32 \cdot t$

t ... Zeit in s
$v_2(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in km/h

1) Berechnen Sie mithilfe von v_2 den Zeitpunkt $t_2 \in [0; 20]$, zu dem die Geschwindigkeit des Sportwagens 130 km/h beträgt. *[0/1 P.]*

c) Die Geschwindigkeit-Beschleunigung-Funktion a ordnet jeder Geschwindigkeit $v \in [80; 160]$ des Sportwagens näherungsweise die entsprechende Beschleunigung $a(v)$ zu.

$a(v) = 0{,}0003 \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$

v ... Geschwindigkeit in km/h
$a(v)$ ... Beschleunigung bei der Geschwindigkeit v in m/s²

In der nachstehenden Tabelle sind zwei Beschleunigungswerte angeführt.

v in km/h	80	160
$a(v)$ in m/s²	6,7	1,4

1) Ermitteln Sie b und c. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion a und der Abbildung im Einleitungstext den Zeitpunkt t_3, zu dem die Beschleunigung 3,7 m/s² beträgt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $v_1(t) = 25 \cdot t$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von v_1.

b1) $v_2(t_2) = 130$

$t_2 = 6{,}21...\text{ s}$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von t_2.

c1) $a(80) = 6{,}7$
$a(160) = 1{,}4$
$b = -0{,}13825$ und $c = 15{,}84$

c2) $a(v_3) = 3{,}7$
$v_3 = 118{,}054...$
Aus der Abbildung folgt: $t_3 \approx 5{,}5$ s.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_3.
Toleranzintervall für t_3: [4; 6]

Hurrikans – tropische Wirbelstürme

Die *Saffir-Simpson-Hurrikan-Skala* teilt Hurrikans anhand ihrer Windgeschwindigkeit in fünf Kategorien – von Kategorie 1 (schwach) bis Kategorie 5 (verwüstend) – ein.

Aufgabenstellung:

a) Den einzelnen Hurrikan-Kategorien dieser Skala sind unterschiedliche Schadenspotenziale zugeordnet, die den verursachten Schaden beschreiben:

Hurrikan-Kategorie	1	2	3	4	5
Schadenspotenzial	1	10	50	250	500

Datenquelle: Pielke Jr., Roger A. und Christopher W. Landsea: Normalized Hurricane Damages in the United States: 1925–95. In: *Weather and Forecasting* 13(3) (1998), S. 621–631.

1) Weisen Sie unter Verwendung der Werte aus der Tabelle nach, dass der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial nicht linear und auch nicht exponentiell ist. *[0/½/1 P.]*

b) Im 45-jährigen Zeitraum von 1972 bis 2016 traten 110 *Große Hurrikans* auf (das sind Hurrikans, die auf der Saffir-Simpson-Hurrikan-Skala in eine der Kategorien 3, 4 und 5 fallen).

Für den Zeitraum von 1972 bis 2016 wird die Anzahl aller Hurrikans pro Jahr untersucht.

$\bar{x}$ ... arithmetisches Mittel der Anzahl aller Hurrikans pro Jahr
h ... relativer Anteil der Großen Hurrikans an der Gesamtzahl aller Hurrikans von 1972 bis 2016

1) Stellen Sie unter Verwendung von $\bar{x}$ eine Formel zur Berechnung von h auf.

$h =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick über die Anzahl aller Hurrikans pro Jahr für den Zeitraum von 1972 bis 2016.

Anzahl aller Hurrikans pro Jahr	Anzahl der Jahre
0 bis 2	2
3 bis 5	20
6 bis 8	14
9 bis 11	7
12 bis 14	1
15 bis 17	1

Datenquelle: Landsea, Christopher W., Gabriel A. Vecchi et al.: Impact of Duration Thresholds on Atlantic Tropical Cyclone Counts. In: *Journal of Climate* 23(10) (2010), S. 2508–2519.

Eine exakte Berechnung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ der Anzahl aller Hurrikans pro Jahr ist anhand der in der obigen Tabelle zusammengefassten Daten nicht möglich. Mithilfe der Klassenmitten aus der linken Spalte kann jedoch ein Näherungswert für $\bar{x}$ berechnet werden. Dabei wird z. B. für „9 bis 11“ als Klassenmitte der Wert 10 verwendet.

2) Berechnen Sie diesen Näherungswert für $\bar{x}$.

Näherungswert für $\bar{x}$: ______________________________ *[0/1 P.]*

c) Windgeschwindigkeiten werden oft in Kilometern pro Stunde (km/h) oder Knoten (kn) angegeben.
Es gilt:
1 kn = 1,852 km/h

Zwischen der Windgeschwindigkeit v (in km/h) und der Windgeschwindigkeit v_k (in kn) besteht ein direkt proportionaler Zusammenhang.

1) Stellen Sie eine Gleichung auf, die diesen Zusammenhang beschreibt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) S_i ... Schadenspotenzial bei der Hurrikan-Kategorie i
$S_2 = S_1 + 9,\ \ S_3 = S_2 + 40$
Die absolute Änderung des Schadenspotenzials für zwei aufeinanderfolgende Kategorien ist nicht konstant.
Der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial ist nicht linear.

$S_2 = S_1 \cdot 10,\ \ S_3 = S_2 \cdot 5$
Die relative Änderung des Schadenspotenzials für zwei aufeinanderfolgende Kategorien ist nicht konstant.
Der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial ist nicht exponentiell.

a1) Ein Punkt für das richtige Nachweisen bei beiden Zusammenhängen, ein halber Punkt bei nur einem richtig nachgewiesenen Zusammenhang.

b1) $h = \frac{110}{45 \cdot \bar{x}}$

b2) Näherungswert für $\bar{x}$: $\frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 20 + 7 \cdot 14 + 10 \cdot 7 + 13 \cdot 1 + 16 \cdot 1}{45} = 6{,}2$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Näherungswerts für $\bar{x}$.

c1) $v = 1{,}852 \cdot v_k$

oder:

$v_k = 0{,}539... \cdot v$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

Bienenhaltung in Österreich

Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über die Anzahl der Imker/innen und ihrer Bienenvölker in Österreich im Zeitraum von 2015 bis 2019.

Jahr	Anzahl der Imker/innen	Anzahl der Bienenvölker
2015	26063	347128
2016	26609	354080
2017	27580	353267
2018	28432	373412
2019	30237	390607

Quelle: https://www.biene-oesterreich.at/daten-und-zahlen+2500++1000247 [10.08.2020].

Aufgabenstellung:

a) Maja führt mit Werten aus der obigen Tabelle die folgende Berechnung durch:

$$\frac{353\,267}{27\,580} \approx 13$$

1) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

[0/1 P.]

b) Die Anzahl der Imker/innen in Österreich wird in Abhängigkeit von der Zeit t durch die quadratische Funktion f der Form $f(t) = c \cdot t^2 + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ modelliert (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2015).
Die entsprechenden Funktionswerte von f stimmen für die Jahre 2015 und 2019 mit den Werten aus der obigen Tabelle überein.

1) Berechnen Sie c und d. *[0/1 P.]*

c) Niedrige Temperaturen führen zu einer Wintersterblichkeit von Bienenvölkern. Die Anzahl der Bienenvölker würde ohne eine erneute Aufzucht durch die Imker/innen jährlich um durchschnittlich 16 % abnehmen.

Die Anzahl der Bienenvölker in Österreich, die es ohne eine erneute Aufzucht geben würde, wird durch die Exponentialfunktion g beschrieben.

Es gilt:

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2015
$g(t)$ ... Anzahl der Bienenvölker in Österreich zur Zeit t

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von g auf.

$g(t) =$ ____ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeitdauer sich die Anzahl der Bienenvölker in Österreich gemäß der Exponentialfunktion g halbiert. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Im Jahr 2017 betrug die durchschnittliche Anzahl der Bienenvölker pro Imker/in (in Österreich) rund 13.

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) I: $f(0) = 26\,063 = d$
II: $f(4) = 30\,237$

$16 \cdot c + 26\,063 = 30\,237$
$c = 260{,}875$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von c und d.

c1) $g(t) = 347\,128 \cdot 0{,}84^t$

c2) $0{,}5 = 0{,}84^t$
$t = 3{,}9...$

Die Zeitdauer beträgt rund 4 Jahre.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von g.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

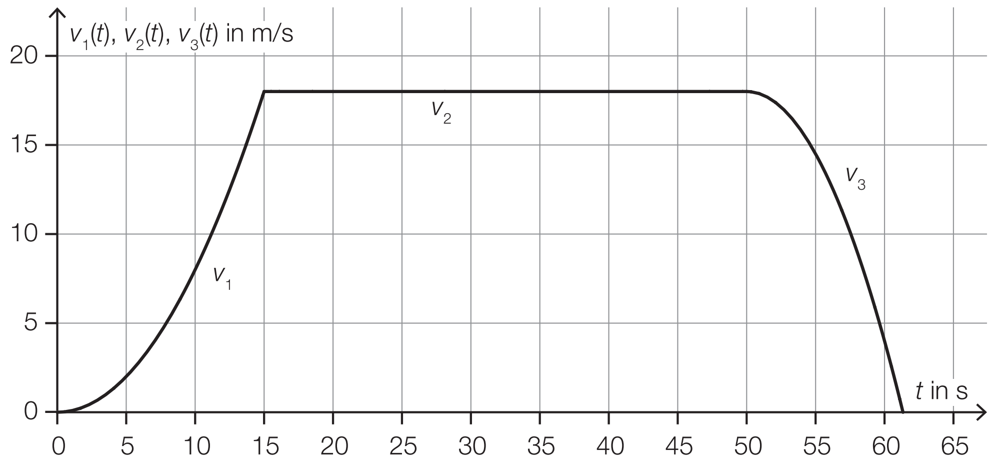
Wiener U-Bahn

Aufgabennummer: 2_018	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die Wiener U-Bahn-Linie U2 verkehrt zwischen den Stationen *Karlsplatz* und *Seestadt* und überquert dabei die Donau. Zwischen den beiden Stationen *Donaumarina* und *Donaustadtbrücke* verläuft die Strecke nahezu geradlinig und die U-Bahn benötigt für diese rund eine Minute.
Die Geschwindigkeit einer U-Bahn zwischen diesen beiden Stationen lässt sich modellhaft durch drei (abschnittsweise definierte) Funktionen beschreiben.

- $v_1(t) = 0{,}08 \cdot t^2$ $\quad$ [0; 15)
- $v_2(t) = 18$ $\quad$ [15; 50)
- $v_3(t) = -0{,}14 \cdot (t - 50)^2 + 18$ $\quad$ [50; 61,34]

Die Zeit t ist dabei in Sekunden, die Geschwindigkeit v in m/s angegeben. Die Graphen dieser Funktionen sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie die Länge derjenigen Strecke, die die U-Bahn im Zeitintervall [15; 50] zurücklegt.

Die Funktion v_3 modelliert den Bremsweg.

2) Erklären Sie, wie eine Änderung des Wertes –0,14 auf –0,2 den Bremsvorgang beeinflusst.

b) 1) Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung der U-Bahn vom Losfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit.

2) Erklären Sie, warum der Verlauf des Graphen im Intervall [14; 16] meist nicht der Realität entspricht.

Lösungserwartung

a1) $35 \cdot 18 = 630$

Im Zeitintervall [15; 50] legt die U-Bahn 630 m zurück.

a2) Der Bremsvorgang würde „stärker" erfolgen, die U-Bahn würde also schneller zum Stillstand kommen.

b1) $\frac{v_1(15) - v_1(0)}{15 - 0} = \frac{18}{15} = 1{,}2$

Die mittlere Beschleunigung beträgt 1,2 m/s^2.

b2) Der Knick beim Übergang von v_1 auf v_2 bewirkt, dass die Fahrgäste einen starken „Ruck" (eine sprunghafte Änderung der Beschleunigung) verspüren, der meist nicht der Realität entspricht.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge.
a2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der mittleren Beschleunigung.
b2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

Teich

In einem künstlich angelegten Teich befinden sich 129 m^3 Wasser.

Aufgabenstellung:

a) Der Teich kann über zwei Abflüsse vollständig entleert werden.

Wird nur der eine Abfluss geöffnet, so dauert die vollständige Entleerung 10 h.
Wird nur der andere Abfluss geöffnet, so dauert die vollständige Entleerung 6 h.
Die jeweilige Abflussgeschwindigkeit ist dabei im gesamten Zeitraum konstant.
Die Zeitdauer, die zur vollständigen Entleerung benötigt wird, wenn beide Abflüsse gleichzeitig geöffnet sind, wird mit T bezeichnet.

1) Berechnen Sie T. *[0/1 P.]*

b) Der vollständig entleerte Teich wird wieder mit 129 m^3 Wasser befüllt.

Die Funktion $d\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gibt die Fülldauer $d(z)$ in Abhängigkeit von der konstanten Zuflussgeschwindigkeit z an (z in m^3/h, $d(z)$ in h).

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von d auf.

$d(z) =$ ____ *[0/1 P.]*

Die Funktion h beschreibt in Abhängigkeit von der Zeit t die Höhe der Wasseroberfläche über dem tiefsten Punkt des Teiches bei der konstanten Zuflussgeschwindigkeit $z = 6$ m^3/h (t in h, $h(t)$ in m).

Für die momentane Änderungsrate der Höhe der Wasseroberfläche gilt:

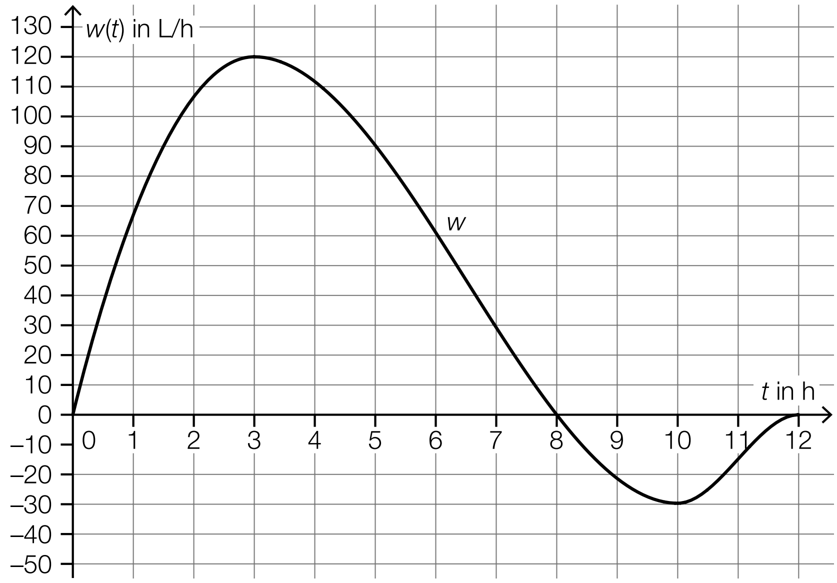
$$h'(t) = \frac{15}{\sqrt{2738 \cdot \pi \cdot t}} \quad \text{mit} \quad t > 0$$

2) Ermitteln Sie, um wie viele Meter die Höhe der Wasseroberfläche in den letzten 10 h der Befüllung ansteigt. *[0/1 P.]*

c) Durch Regen und Verdunstung ändert sich die Wassermenge im Teich.

Die Funktion w: $[0;12] \to \mathbb{R}$ beschreibt näherungsweise die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $w(t)$ in L/h).

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph von w dargestellt.



1) Ordnen Sie den vier Aussagen jeweils das passende größtmögliche Zeitintervall aus A bis F zu. *[0/½/1 P.]*

Die Wassermenge im Teich nimmt ab.	
Die Wassermenge im Teich nimmt immer schneller zu.	
Die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich nimmt ab.	
Die Wassermenge im Teich nimmt zu.	

A	(0; 3)
B	(3; 10)
C	(8; 12)
D	(3; 12)
E	(8; 10)
F	(0; 8)

Möglicher Lösungsweg

a1) $\left(\frac{129}{10} + \frac{129}{6}\right) \cdot T = 129$
$T = 3{,}75$ h

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von T.

b1) $d(z) = \frac{129}{z}$

b2) $d(6) = 21{,}5$
$\int_{11{,}5}^{21{,}5} h'(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}40...$
Die Höhe der Wasseroberfläche steigt in den letzten 10 h der Befüllung um rund 0,4 m an.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von d.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Anstiegs der Höhe der Wasseroberfläche.

c1)

Die Wassermenge im Teich nimmt ab.	C
Die Wassermenge im Teich nimmt immer schneller zu.	A
Die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich nimmt ab.	B
Die Wassermenge im Teich nimmt zu.	F

A	(0; 3)
B	(3; 10)
C	(8; 12)
D	(3; 12)
E	(8; 10)
F	(0; 8)

c1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Speichermedien*

Aufgabennummer: 2_108	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

In den letzten Jahrzehnten wurden verschiedene Speichermedien, wie zum Beispiel Speicherkarten, USB-Sticks oder DVDs, für die Sicherung von Daten verwendet.

Aufgabenstellung:

a) Die Speicherkapazität eines Speichermediums kann unter anderem in Kilobyte, Megabyte bzw. Gigabyte angegeben werden. Die Vorsilben *Kilo-*, *Mega-*, *Giga-* werden dabei wie folgt verwendet:
1 Megabyte = 1 024 Kilobyte
1 Gigabyte = 1 024 Megabyte

Eine bestimmte Speicherkarte mit einer Speicherkapazität von 16 Gigabyte wird zum Speichern von Fotos verwendet. Modellhaft wird angenommen, dass alle gespeicherten Fotos den gleichen Bedarf an Speicherplatz haben.
Die Funktion $N: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ordnet dem Bedarf an Speicherplatz F für ein Foto die größtmögliche Anzahl $N(F)$ der auf dieser Speicherkarte speicherbaren Fotos zu (F in Kilobyte).

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von N auf.

$N(F) =$ ____

b) Michael hat 4 USB-Sticks mit den Bezeichnungen A, B, C und D.

- Auf USB-Stick A speichert er alle seine Fotos ab.
- Auf den 3 anderen USB-Sticks, B, C und D, speichert er zur Sicherung jeweils genau ein Drittel seiner Fotos so ab, dass jedes Foto zusätzlich auf genau 1 dieser 3 USB-Sticks gespeichert ist.

Für jeden der 4 USB-Sticks ist (jeweils unabhängig voneinander) die Wahrscheinlichkeit 75 %, dass er 5 Jahre lang funktionstüchtig bleibt.

Es wird vereinfacht angenommen, dass ein USB-Stick entweder vollständig funktionstüchtig ist oder gar nicht funktioniert.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach 5 Jahren noch jedes von Michaels Fotos auf mindestens 1 USB-Stick verfügbar ist.

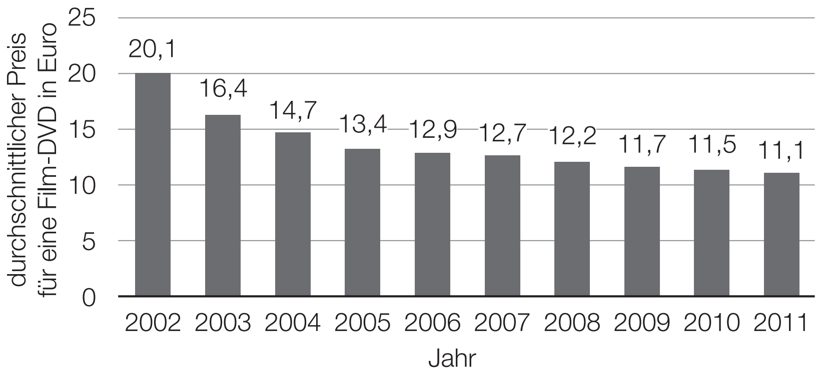
* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Michael stellt nach 5 Jahren fest, dass USB-Stick *A* nicht mehr funktionstüchtig ist.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest 2 der 3 USB-Sticks *B*, *C* und *D* funktionstüchtig sind.

c) Ein beliebtes Speichermedium für Filme ist die DVD.

Seit Anfang des 21. Jahrhunderts hat der durchschnittliche Preis für Film-DVDs abgenommen, wie das nachstehende Diagramm zeigt.



Datenquelle: https://www.mkdiscpress.de/ratgeber/chronik-der-speichermedien/ [20.11.2019].

Der durchschnittliche Preis für eine Film-DVD wird durch die Funktion *P* in Abhängigkeit von der Zeit *t* modelliert.

$P(t) = a \cdot b^t + 11$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2002
$P(t)$ ... durchschnittlicher Preis für eine Film-DVD zur Zeit t in Euro

1) Ermitteln Sie *a* und *b* so, dass *P* für die Jahre 2002 und 2011 den durchschnittlichen Preis für eine Film-DVD im jeweiligen Jahr laut obigem Diagramm ergibt.

a = ______________________________

b = ______________________________

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $N(F) = \frac{16 \cdot 1\,024 \cdot 1\,024}{F} = \frac{16\,777\,216}{F}$

b) Lösungserwartung:

b1) $0{,}75 + 0{,}25 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}855...$

b2) $0{,}75^3 + 3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}843...$

c) Lösungserwartung:

c1) $P(0) = 20{,}1 \quad \Rightarrow \quad a + 11 = 20{,}1$
$P(9) = 11{,}1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b^9 + 11 = 11{,}1$
$a = 9{,}1$
$b = \sqrt[9]{\frac{0{,}1}{9{,}1}} = 0{,}60579...$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von N, wobei auch jeder Hinweis auf das Abrunden von $N(F)$ auf die nächstkleinere ganze Zahl als richtig zu werten ist.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Ozonmessungen*

Aufgabennummer: 2_064	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.2, FA 3.4, FA 4.3, AN 4.3	

Das Gas Ozon hat Auswirkungen auf unsere Gesundheit. Aus diesem Grund werden in Messstationen und mithilfe von Wetterballons die jeweiligen Ozonkonzentrationen in unterschiedlichen Atmosphärenschichten gemessen.

Aufgabenstellung:

a) Auf der Hohen Warte in Wien befindet sich in 220 m Seehöhe eine Wetterstation. Hier wird für eine Messreihe ein Wetterballon mit einem Ozonmessgerät gestartet. Das Ozonmessgerät beginnt mit seinen Aufzeichnungen, wenn der Wetterballon eine Seehöhe von 2 km erreicht hat.

Nehmen Sie an, dass der Wetterballon (mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s) lotrecht in die Höhe steigt und dabei gleichmäßig mit 0,125 m/s^2 beschleunigt, bis er zu einem Zeitpunkt t_1 eine Geschwindigkeit von 6 m/s erreicht. Die Zeit wird dabei in Sekunden und die Seehöhe in Metern gemessen.

1) Ermitteln Sie die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1.

Ab dem Zeitpunkt t_1 steigt der Wetterballon mit der konstanten Geschwindigkeit von 6 m/s lotrecht weiter.

2) Ermitteln Sie, wie viele Sekunden nach dem Start das Messgerät mit seinen Aufzeichnungen beginnt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

b) Ein Wetterballon hat bei einem Luftdruck von 1013,25 hPa ein Volumen von 6,3 m^3. Durch die Abnahme des Luftdrucks während des Aufstiegs dehnt sich der Wetterballon immer weiter aus und wird näherungsweise kugelförmig. Bei einem Durchmesser von *d* Metern zerplatzt er.

Der Luftdruck kann in Abhängigkeit von der Seehöhe *h* durch eine Funktion *p* modelliert werden. Dabei ordnet die Funktion *p* der Seehöhe *h* den Luftdruck *p*(*h*) zu.

Es gilt: $p(h) = 1\,013{,}25 \cdot \left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}$ mit *h* in m, *p*(*h*) in hPa

Gehen Sie davon aus, dass der Luftdruck *p*(*h*) und das Volumen *V*(*h*) des Wetterballons indirekt proportional zueinander sind. Dabei ist *V*(*h*) das Volumen des Wetterballons in der Seehöhe *h*.

1) Drücken Sie das Volumen *V*(*h*) durch die Seehöhe *h* aus.

   V(*h*) = ____ mit *h* in m, *V*(*h*) in m^3

Der Wetterballon zerplatzt in einer Seehöhe von *h* = 27873,6 m.

2) Berechnen Sie den Durchmesser *d* des Wetterballons in Metern, bei dem dieser zerplatzt.

c) Das sogenannte *Gesamtozon* ist ein Maß für die Dicke der Ozonschicht und wird in sogenannten *Dobson-Einheiten* (DU) angegeben.

Die von einem Wetterballon aufgezeichneten Messdaten können modellhaft durch eine quadratische Funktion f beschrieben werden. Dabei ordnet f der Höhe h die Gesamtozondichte $f(h)$ zu (h in km, $f(h)$ in DU/km).

Der höchste Wert von 36 DU/km wird in einer Seehöhe von 22 km gemessen. In einer Seehöhe von 37 km beträgt der gemessene Wert 1 DU/km.

1) Ermitteln Sie $f(h)$.

$f(h) =$ ____________________

In der Erdatmosphäre entspricht 1 DU einer 0,01 mm dicken Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche. Die Dicke derjenigen Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche, die dem Gesamtozon zwischen 7 km und 37 km Seehöhe entspricht, ist $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h$.

2) Berechnen Sie die Dicke dieser Schicht.

Dicke dieser Schicht: ____________________ mm

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$v(t) = 0{,}125 \cdot t$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Wetterballons in m/s zum Zeitpunkt t

$v(t_1) = 6 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{6}{0{,}125} = 48$

$\int_0^{48} v(t)\,\mathrm{d}t = 144$

Die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1 beträgt 144 m.

a2) mögliche Vorgehensweise:

verbleibende senkrechte Strecke bis zum Start der Messung:
$2\,000 - 220 - 144 = 1\,636$

$\frac{1\,636}{6} + 48 = 320{,}\dot{6}$

Das Messgerät beginnt seine Aufzeichnungen ca. 321 s nach dem Start.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $V(h) = \dfrac{6{,}3}{\left(1 - \dfrac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}}$ mit h in m, $V(h)$ in m³

b2) mögliche Vorgehensweise:

$V(27\,873{,}6) = 1\,150{,}351...$

$\dfrac{4 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \pi}{3} = 1\,150{,}351... \quad \Rightarrow \quad d = 13{,}0... \approx 13$

Der Durchmesser des Wetterballons, bei dem dieser zerplatzt, beträgt ca. 13 m.

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:

$f(h) = a \cdot h^2 + b \cdot h + c$

$f(37) = 1$

$f(22) = 36$

$f'(22) = 0$

$f(h) = -\frac{7}{45} \cdot h^2 + \frac{308}{45} \cdot h - \frac{1768}{45}$

c2) $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h = 730$

$730 \cdot 0{,}01 = 7{,}3$

Dicke dieser Schicht: 7,3 mm

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angegeben sein muss.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angegeben sein muss.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

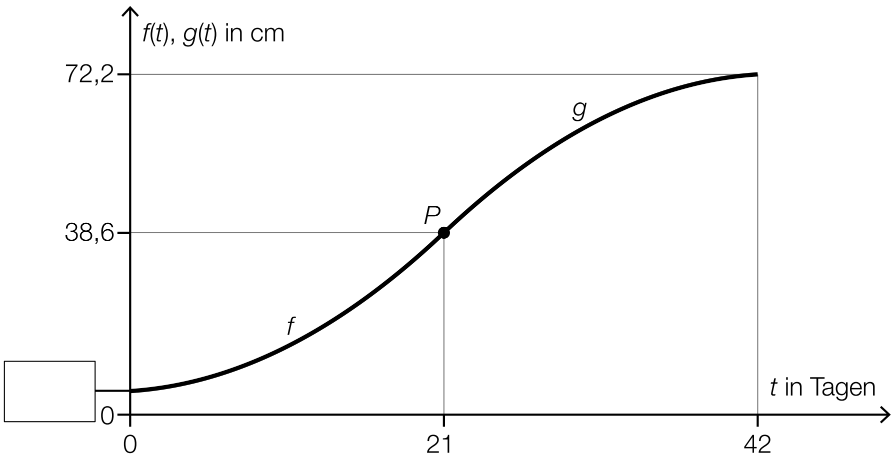
Sonnenblumen

Aufgabenstellung:

a) Die Höhe einer bestimmten Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch die zwei quadratischen Funktionen f und g beschreiben. Die Graphen dieser beiden Funktionen gehen im Punkt P mit gleicher Steigung ineinander über. (Siehe unten stehende Abbildung.)

$f(t) = \frac{1}{15} \cdot t^2 + 0{,}2 \cdot t + 5 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 21$
$g(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \quad \text{mit} \quad 21 \leq t \leq 42$

$t \in [0; 42]$ ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$f(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt t in cm
$g(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt t in cm



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung den fehlenden Wert der Achsenbeschriftung in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c der Funktion g. *[0/½/1 P.]*

3) Interpretieren Sie den nachstehenden Term im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Es gilt: $t_1 = 2$ Tage, $t_2 = 42$ Tage

$\frac{g(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ *[0/1 P.]*

b) Die Höhe einer anderen Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t in einem bestimmten Zeitintervall näherungsweise durch die Funktion h beschreiben.

$h(t) = 6{,}2 \cdot a^t$

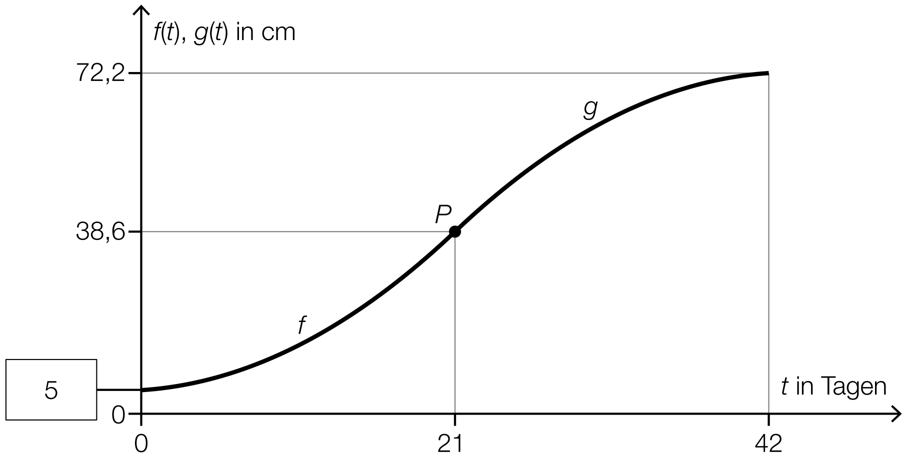
t ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$h(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt t in cm

Zum Zeitpunkt $t = 17$ beträgt die Höhe dieser Sonnenblume 38,6 cm.

1) Berechnen Sie a. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f'(t) = \frac{2}{15} \cdot t + 0{,}2$
$g'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$

I: $g(21) = 38{,}6$
II: $g(42) = 72{,}2$
III: $f'(21) = g'(21)$

oder:

I: $21^2 \cdot a + 21 \cdot b + c = 38{,}6$
II: $42^2 \cdot a + 42 \cdot b + c = 72{,}2$
III: $42 \cdot a + b = 3$

a3) Der Term beschreibt die mittlere Änderungsrate der Höhe dieser Sonnenblume im Zeitintervall [2; 42] in cm/Tag.

oder:

Der Term beschreibt das durchschnittliche Wachstum dieser Sonnenblume im Zeitintervall [2; 42] in cm/Tag.

a1) Ein Punkt für das Eintragen des richtigen Wertes.
a2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems mit drei Gleichungen, ein halber Punkt für nur zwei richtige Gleichungen.
a3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

b1) $38{,}6 = 6{,}2 \cdot a^{17}$

$$a = \sqrt[17]{\frac{38{,}6}{6{,}2}} = 1{,}1135...$$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kostenfunktion*

Aufgabennummer: 2_052	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.6, FA 4.1, FA 4.3, AN 3.3	

Ein Hersteller interessiert sich für die monatlich anfallenden Kosten bei der Produktion eines bestimmten Produkts. Die Produktionskosten für dieses Produkt lassen sich in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten, ME) durch eine Polynomfunktion dritten Grades K mit $K(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 0{,}2405 \cdot x + 42$ modellieren ($K(x)$ in Geldeinheiten, GE).

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie für dieses Produkt den durchschnittlichen Kostenanstieg pro zusätzlich produzierter Mengeneinheit im Intervall [100 ME; 200 ME].

2) Ermitteln Sie, ab welcher Produktionsmenge die Grenzkosten steigen.

b) Die Produktionsmenge x_{opt}, für die die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ mit $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ minimal ist, heißt Betriebsoptimum zur Kostenfunktion K.

1) Ermitteln Sie das Betriebsoptimum x_{opt}.

Der Hersteller berechnet die Produktionskosten für die Produktionsmenge x_{opt}. Dabei stellt er fest, dass diese Kosten 65 % seines für die Produktion dieses Produkts verfügbaren Kapitals ausmachen.

2) Berechnen Sie das dem Hersteller für die Produktion dieses Produkts zur Verfügung stehende Kapital.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

c) Für den Verkaufspreis p kann der Erlös in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x durch eine lineare Funktion E mit $E(x) = p \cdot x$ beschrieben werden ($E(x)$ in GE, x in ME, p in GE/ME). Dabei wird vorausgesetzt, dass gleich viele Mengeneinheiten verkauft wie produziert werden.

1) Bestimmen Sie p so, dass der maximale Gewinn bei einem Verkauf von 600 ME erzielt wird.

Die maximal mögliche Produktionsmenge beträgt 650 ME.

2) Bestimmen Sie den Gewinnbereich (also denjenigen Produktionsbereich, in dem der Hersteller Gewinn erzielt).

d) Für ein weiteres Produkt dieses Herstellers sind in der nachstehenden Tabelle die Produktionskosten (in GE) für verschiedene Produktionsmengen (in ME) dargestellt.

Produktionsmenge (in ME)	50	100	250		500
Produktionskosten (in GE)	197	253	308	380	700

Diese Produktionskosten können durch eine Polynomfunktion dritten Grades K_1 mit $K_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ modelliert werden.

1) Bestimmen Sie die Werte von a, b, c und d.

2) Berechnen Sie die in der obigen Tabelle fehlende Produktionsmenge.

Lösungserwartung

a1) $\frac{K(200) - K(100)}{200 - 100} = \frac{66{,}5 - 59{,}35}{100} = 0{,}0715$ GE/ME

a2) mögliche Vorgehensweise:

$K''(x) = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot x - 1{,}5 \cdot 10^{-3}$

$K''(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 312{,}5$ ME

Ab der Produktionsmenge von 312,5 ME steigen die Grenzkosten.

b1) mögliche Vorgehensweise:

$\overline{K}(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0{,}2405 + \frac{42}{x}$

$\overline{K}'(x) = 16 \cdot 10^{-7} \cdot x - 7{,}5 \cdot 10^{-4} - \frac{42}{x^2}$

$\overline{K}'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{opt} \approx 554{,}2$ ME

($\overline{K}''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Es liegt ein Minimum vor.)

b2) mögliche Vorgehensweise:

$K(554{,}2) \approx 81{,}1$ GE $\quad \Rightarrow \quad 81{,}1 : 0{,}65 \approx 125$

Dem Hersteller stehen für die Produktion dieses Produkts ca. 125 GE zur Verfügung.

c1) mögliche Vorgehensweise:

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G'(x) = p - K'(x)$

$G'(600) = p - K'(600) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}2045$ GE/ME

c2) mögliche Vorgehensweise:

$G(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 335 \quad (x_2 \approx 799, \quad x_3 \approx -196)$

Gewinnbereich: [335 ME; 650 ME]

d1) $a \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}$

$b \approx -9{,}8 \cdot 10^{-3}$

$c \approx 2{,}324$

$d \approx 103$

d2) $K_1(x) = 380 \quad \Rightarrow \quad x \approx 365$ ME

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,05 GE/ME; 0,10 GE/ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [312 ME; 313 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss und eine Überprüfung, dass es sich um ein Minimum handelt, nicht durchgeführt werden muss.
Toleranzintervall: [554 ME; 555 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [120 GE; 130 GE]

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,20; 0,21]

c2) Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Gewinnbereichs, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall für x_1: [325; 345]

d1) Ein Punkt für die richtigen Werte von a, b, c und d.
Toleranzintervall für a: $[1 \cdot 10^{-5}; 2 \cdot 10^{-5}]$
Toleranzintervall für b: $[-1 \cdot 10^{-2}; -9 \cdot 10^{-3}]$
Toleranzintervall für c: [2; 2,5]
Toleranzintervall für d: [100; 105]

d2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung je nach Rundung der Koeffizienten a, b, c und d variieren kann.

Körper mit rechteckigen Querschnittsflächen*

Aufgabennummer: 2_050	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, FA 2.1, FA 4.1, FA 4.3, AN 1.3, AN 4.3	

Die nachstehenden Abbildungen 1 und 2 stellen einen Körper mit ebenen Seitenflächen im Schrägriss bzw. eine Schnittfläche dar.

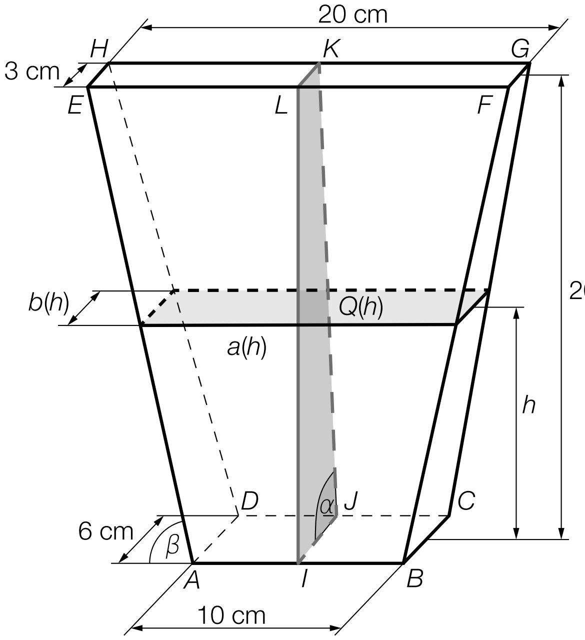


Abbildung 1: Schrägriss des Körpers

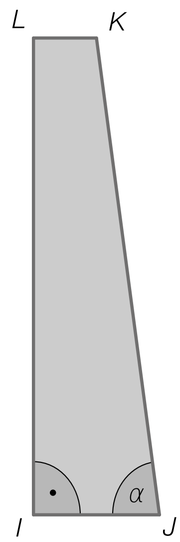


Abbildung 2: Schnittfläche *IJKL*

Die vordere Seitenfläche *ABFE* steht normal auf die horizontale Grundfläche *ABCD* und auf die horizontale Deckfläche *EFGH*, während die hintere Seitenfläche *DCGH* zur Grundfläche unter dem Winkel α ($0° < \alpha < 90°$) geneigt ist.

Die beiden Seitenflächen *ADHE* und *BCGF* weisen gegenüber der Grundfläche den gleichen Neigungswinkel β (mit $\beta \approx 76°$) auf.

Die horizontalen Querschnittsflächen des Körpers sind in jeder Höhe rechteckig. Die Längen $a(h)$ und die Breiten $b(h)$ dieser Rechtecke ändern sich linear in Abhängigkeit von der Höhe h. Die Grundfläche hat eine Länge von 10 cm und eine Breite von 6 cm, die Deckfläche hat eine Länge von 20 cm und eine Breite von 3 cm. Die Höhe des Körpers beträgt 20 cm.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Die Funktion $Q: [0; 20] \to \mathbb{R}$ beschreibt die Größe der Querschnittsfläche $Q(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h (mit $Q(h)$ in cm², h in cm).

Es gilt: $Q(h) = s \cdot h^2 + 1{,}5 \cdot h + t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Werte von s und t!

Berechnen Sie das Volumen des Körpers und geben Sie das Ergebnis inklusive Einheit an!

b) Die lokale Änderungsrate der Breite $b(h)$ nimmt für jedes $h \in [0; 20]$ einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ an.

Berechnen Sie c!

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen c und α mithilfe einer Gleichung!

c) Die Funktion a beschreibt die Länge $a(h)$ in der Höhe h mit $a(h)$ und h in cm.

Geben Sie eine Funktionsgleichung von a an!

Ändert man den Winkel β auf 45° und lässt die Länge der Grundlinie AB und die Körperhöhe unverändert, so erhält man eine neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1, bei der die Funktion a_1 mit $a_1(h) = 2 \cdot h + 10$ die Länge $a_1(h)$ in der Höhe h beschreibt ($a_1(h)$ und h in cm).

Geben Sie das Verhältnis $\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h : \int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h$ an und interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1 und die ursprüngliche vordere Seitenfläche $ABFE$!

Lösungserwartung

a) mögliche Vorgehensweise:

$Q(0) = 60 \quad \Rightarrow \quad t = 60$

$Q(20) = 60 \quad \Rightarrow \quad 60 = 400 \cdot s + 90 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{3}{40}$

$V = \int_0^{20} Q(h)\,\mathrm{d}h = -\frac{1}{40} \cdot 20^3 + 0{,}75 \cdot 20^2 + 60 \cdot 20 = 1\,300 \text{ cm}^3$

b) $c = \frac{3-6}{20} = -\frac{3}{20}$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{c}$

c) mögliche Vorgehensweise:

$a(h) = \frac{a(20) - a(0)}{20} \cdot h + a(0)$

$a(h) = \frac{1}{2} \cdot h + 10$

mögliche Vorgehensweise:

$\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^{20} (2 \cdot h + 10)\,\mathrm{d}h = 600$

$\int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^{20} \left(\frac{1}{2} \cdot h + 10\right)\mathrm{d}h = 300$

$\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h : \int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h = 600 : 300 = 2 : 1$

Das Verhältnis des Flächeninhalts der neuen Seitenwand ABF_1E_1 zum Flächeninhalt der ursprünglichen Seitenwand $ABFE$ ist 2 : 1.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für *s*: [–0,08; –0,07]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung unter Angabe einer richtigen Einheit.
Toleranzintervall: [1 280 cm^3; 1 320 cm^3]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [–0,2; –0,1]
– Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Interpretation.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_033	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.3, AN 1.3, AN 4.2, AN 4.3, FA 4.3	

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sind.

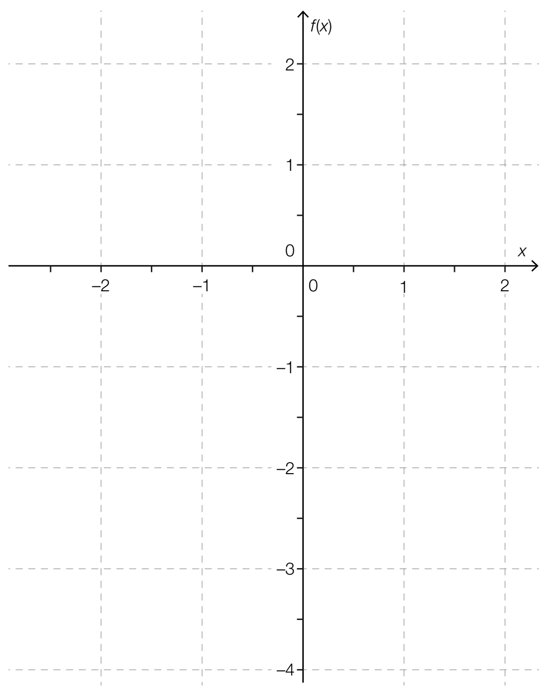
Aufgabenstellung:

a) Begründen Sie, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!

Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b. Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b an, sodass $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$ hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

a) Mögliche Begründung:

Berechnung der Nullstellen: $a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$
Eine Nullstelle ist daher $x_1 = 0$.

Berechnung weiterer Nullstellen: $a \cdot x^2 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{b}{a}$

Wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt: $-\frac{b}{a} > 0$.
Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion f hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x entspricht dem Wert $f'(x)$.
$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \quad \Rightarrow \quad f'(0) = b$

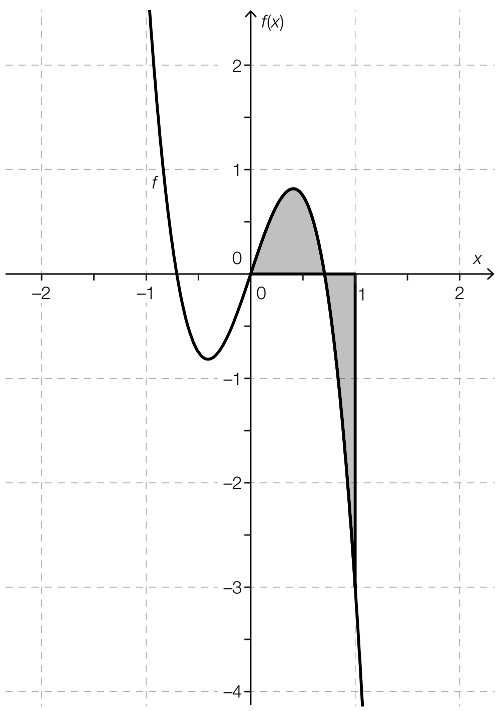
b) Mögliche Vorgehensweise:

$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x)\,\mathrm{d}x = \left(a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \cdot b$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von f und von der x-Achse begrenzt werden. Hätte f keine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$, dann würde der Graph von f in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der x-Achse (mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0; 1)$) oder zur Gänze unterhalb der x-Achse (mit $f(x) < 0$ für alle $x \in (0; 1)$) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von f im Intervall $(0; 1)$ entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Möglicher Graph von f:



Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für eine korrekte Beziehung zwischen a und b.
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung und eine Skizze eines möglichen Graphen von f. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Abkühlungsprozesse

Aufgabennummer: 2_032	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 2.1, AN 4.3, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.7	

Wird eine Tasse mit heißem Kaffee am Frühstückstisch abgestellt, kühlt der Kaffee anfangs rasch ab, bleibt aber relativ lange warm.

Die Temperatur einer Flüssigkeit während des Abkühlens kann nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz durch eine Funktion der Form $t \mapsto T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ beschrieben werden. Dabei gibt T_0 die Anfangstemperatur der Flüssigkeit (in °C) zum Zeitpunkt $t = 0$ an, T_U ist die konstante Umgebungstemperatur (in °C) und $k \in \mathbb{R}^+$ (in s^{-1}) ist eine von den Eigenschaften der Flüssigkeit und des Gefäßes abhängige Konstante.

Ein zu untersuchender Abkühlungsprozess wird durch eine Funktion T der obigen Form beschrieben. Dabei beträgt die Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C und die Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C. Die Abkühlungskonstante hat den Wert $k = 0{,}002$. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen, die Temperatur $T(t)$ in °C.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten der Funktion T im Intervall [0 s; 300 s] und interpretieren Sie den berechneten Wert im Hinblick auf den beschriebenen Abkühlungsprozess!

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von T für große Werte von t und interpretieren Sie den Verlauf im gegebenen Kontext!

b) Der Wert $T'(t)$ kann als „Abkühlungsgeschwindigkeit" der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t gedeutet werden.

Geben Sie für den zu untersuchenden Abkühlungsprozess eine Funktionsgleichung für T' an!
Geben Sie weiters denjenigen Zeitpunkt an, zu dem der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit am größten ist!

Der Graph von T' und die t-Achse schließen im Intervall [0 s; 600 s] eine Fläche von ca. 49 Flächeneinheiten ein.
Interpretieren Sie diesen Wert unter Verwendung der entsprechenden Einheit im gegebenen Kontext!

c) Eine zweite Flüssigkeit in einem anderen Gefäß hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von 95 °C. Nach einer Minute ist die Temperatur auf 83,4 °C gesunken, die Umgebungstemperatur beträgt $T_U = 20$ °C. Die Funktion T_2 beschreibt den Abkühlungsprozess dieser Flüssigkeit.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Abkühlungskonstante k_2 für diesen Abkühlungsprozess berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

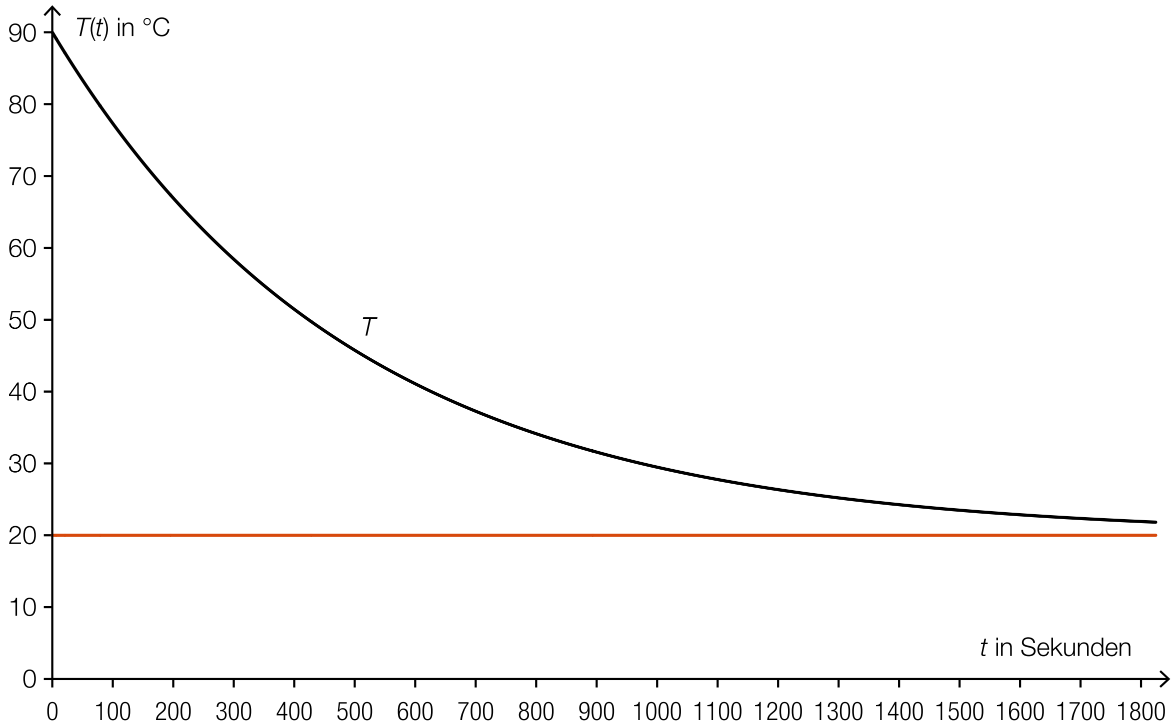
Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen T und T_2 und interpretieren Sie die Koordinaten des Schnittpunkts im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{T(300) - T(0)}{300} \approx -0{,}1053$

In den ersten fünf Minuten kühlt die Flüssigkeit durchschnittlich um ca. 0,1 °C pro Sekunde ab.

Der Graph von T nähert sich im Laufe der Zeit der Umgebungstemperatur (20 °C) an.



b) $T'(t) = -0{,}14 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t}$

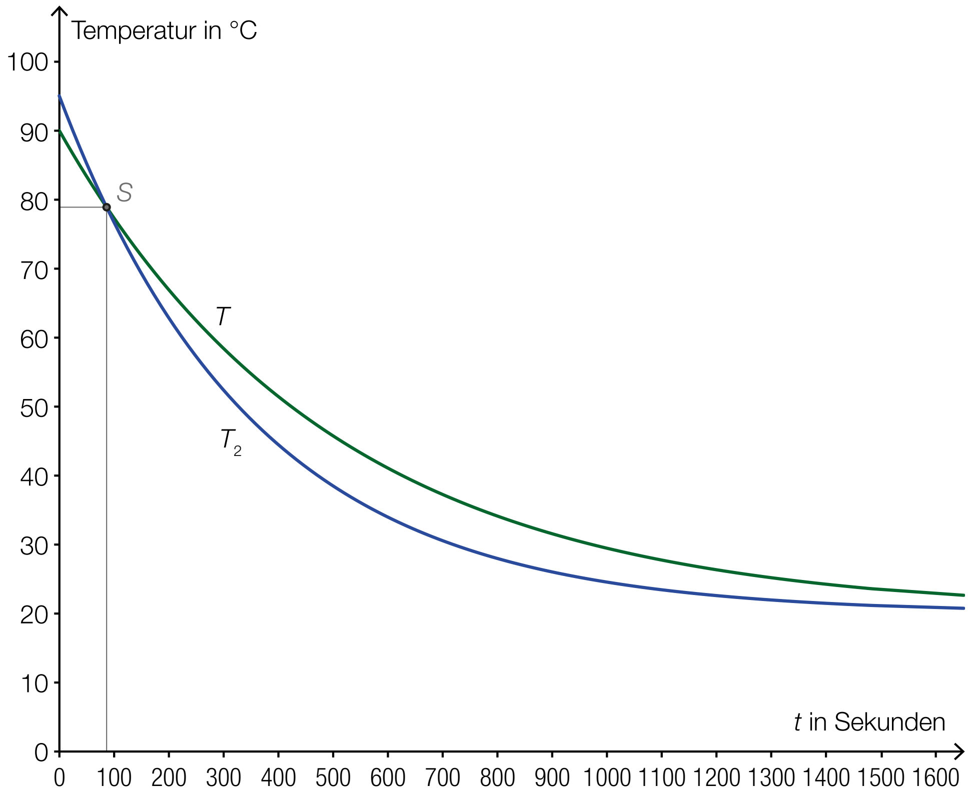
Der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 0$ am größten.

Die Flüssigkeit kühlt in den ersten zehn Minuten insgesamt um ca. 49 °C ab.

c) $T_2(t) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot t} \Rightarrow$

$T_2(60) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot 60} = 83{,}4$

$k_2 \approx 0{,}0028 \text{ s}^{-1}$

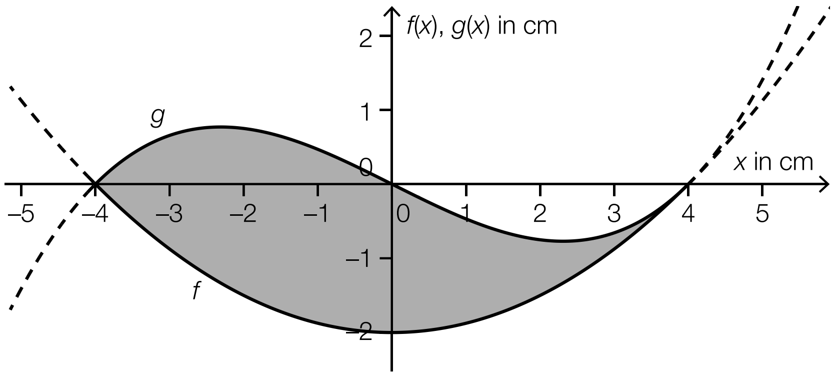


Schnittpunkt: $S \approx (86{,}2 \mid 78{,}9)$
Nach ca. 86,2 Sekunden haben beide Flüssigkeiten eine Temperatur von ca. 78,9 °C.

Firmenlogos

Aufgabenstellung:

a) In der nachstehenden Abbildung ist ein Firmenlogo grau markiert dargestellt.



Die untere Begrenzungslinie wird durch einen Teil des Graphen der Funktion f beschrieben:
$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 - 2$

Die obere Begrenzungslinie wird durch einen Teil des Graphen der Funktion g beschrieben:
$g(x) = a \cdot (x^3 - 16 \cdot x) \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$

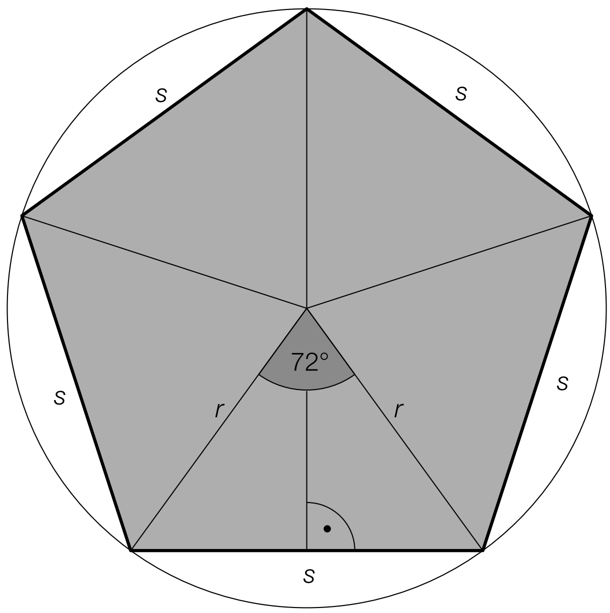
An der Stelle $x = 4$ haben f und g die gleiche Steigung.

1) Berechnen Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

Der Punkt $(0|0)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von g.

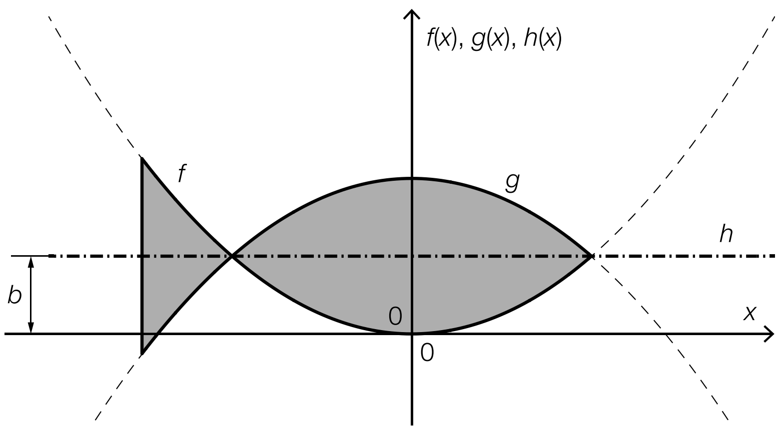
2) Begründen Sie, warum der Graph der Funktion g keinen weiteren Wendepunkt haben kann. *[0/1 P.]*

b) Das Logo eines Autoherstellers hat die Form eines regelmäßigen Fünfecks (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



1) Berechnen Sie für $r = 3$ cm den Umfang u dieses regelmäßigen Fünfecks. *[0/1 P.]*

c) Im nachstehenden Koordinatensystem ist das Logo eines Fischrestaurants grau markiert dargestellt.



Das Logo ist symmetrisch bezüglich des Graphen der konstanten Funktion h mit $h(x) = b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$. Die Begrenzungslinien des Logos sind Teile der Graphen der Funktionen f und g (siehe obige Abbildung).

Für die Funktion f gilt:

$f(x) = a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

1) Stellen Sie unter Verwendung von a und b eine Funktionsgleichung von g auf. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $f'(x) = \frac{x}{4}$

$f'(4) = 1$

$g'(x) = a \cdot (3 \cdot x^2 - 16)$

$g'(4) = 32 \cdot a$

$32 \cdot a = 1$

$a = \frac{1}{32}$

a2) Die Funktion g ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

oder:

Die Funktion g'' ist linear und hat nur 1 Nullstelle.
(Die Funktion g kann also nur 1 Wendepunkt haben.)

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) $u = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin(36°) = 17{,}63...$

$u = 17{,}6$ cm

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Umfangs u.

c1) $g(x) = -a \cdot x^2 + 2 \cdot b$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von g.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Vergnügungspark

Aufgabennummer: 2_088	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.3, AG 4.1, FA 4.4, AN 4.2	

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region.

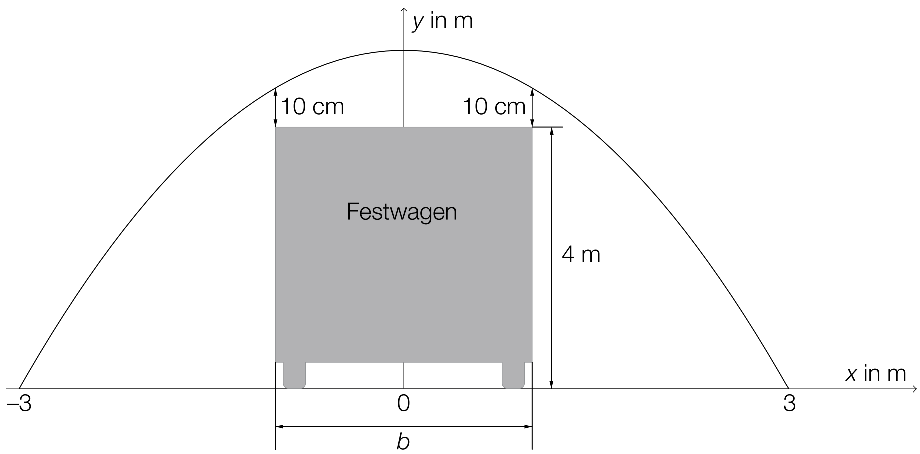
a) Beim Eingang zum Vergnügungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$

x, y ... Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.

Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden. Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).

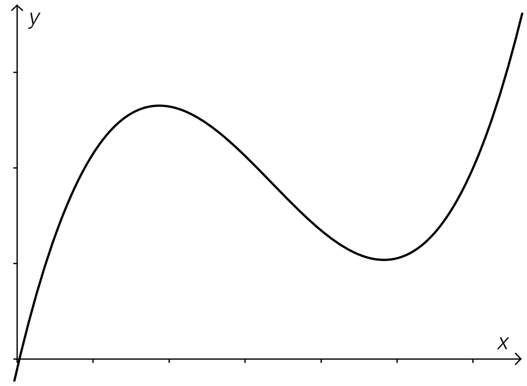


1) Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf.

Vor der Parade wird der Torbogen mit einer Folie verschlossen.

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt der dazu benötigten Folie.

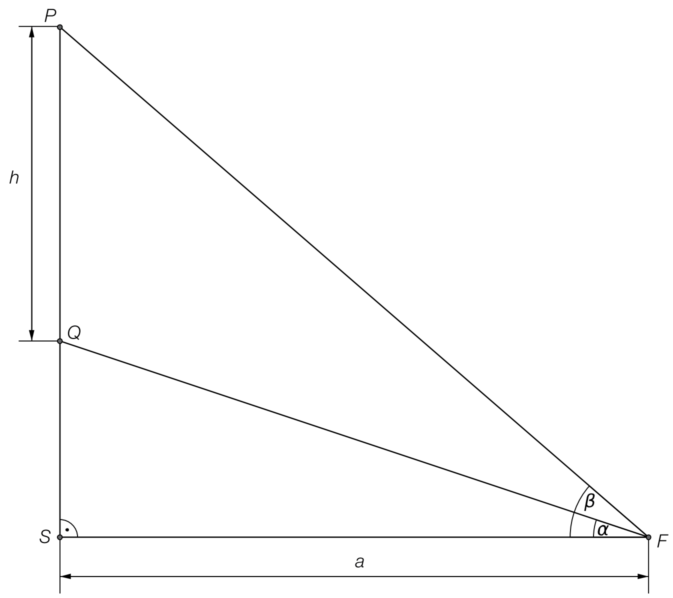
b) Eine der Hauptattraktionen ist die Hochschaubahn. Ein Teilstück kann durch die Polynomfunktion modelliert werden, deren Graph in der folgenden Abbildung zu sehen ist:



1) Erklären Sie, welchen Grad diese Polynomfunktion mindestens haben muss.

c) Im Vergnügungspark gibt es ein Kino.

Fiona sitzt a Meter von der Leinwand entfernt (Punkt F). Der Höhenwinkel zum unteren Ende der Leinwand (Punkt Q) wird mit α bezeichnet, der Höhenwinkel zum oberen Ende der Leinwand (Punkt P) wird mit β bezeichnet.



1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Höhe h der Leinwand aus a, α und β.

h = ____________________

Lösungserwartung

a1) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

a2) $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m^2.

b1) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur *x*-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c1) rechtwinkeliges Dreieck *FPS*: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck *FQS*: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Flugreisen

An den österreichischen Flughäfen werden die Anzahl der Flüge, die Anzahl der Fluggäste sowie die Flugstrecken der Reisenden erfasst.

Datenquelle: https://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/verkehr/luftfahrt/personenverkehr/index.html [19.12.2020].

Aufgabenstellung:

a) Die jährliche Anzahl aller Fluggäste in Österreich ist von 0,14 Millionen im Jahr 1955 auf 28,95 Millionen im Jahr 2017 gestiegen.

Diese zeitliche Entwicklung der Anzahl der Fluggäste in Österreich kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion $N\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $N(t) = a \cdot b^t$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1955, $N(t)$ in Millionen Fluggästen).

1) Berechnen Sie a und b. *[0/1 P.]*

Im Jahr 2018 gab es in Österreich 31,73 Millionen Fluggäste.

2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die mit N ermittelte Anzahl der Fluggäste für das Jahr 2018 um weniger als 1 % von der tatsächlichen Anzahl der Fluggäste abweicht. *[0/1 P.]*

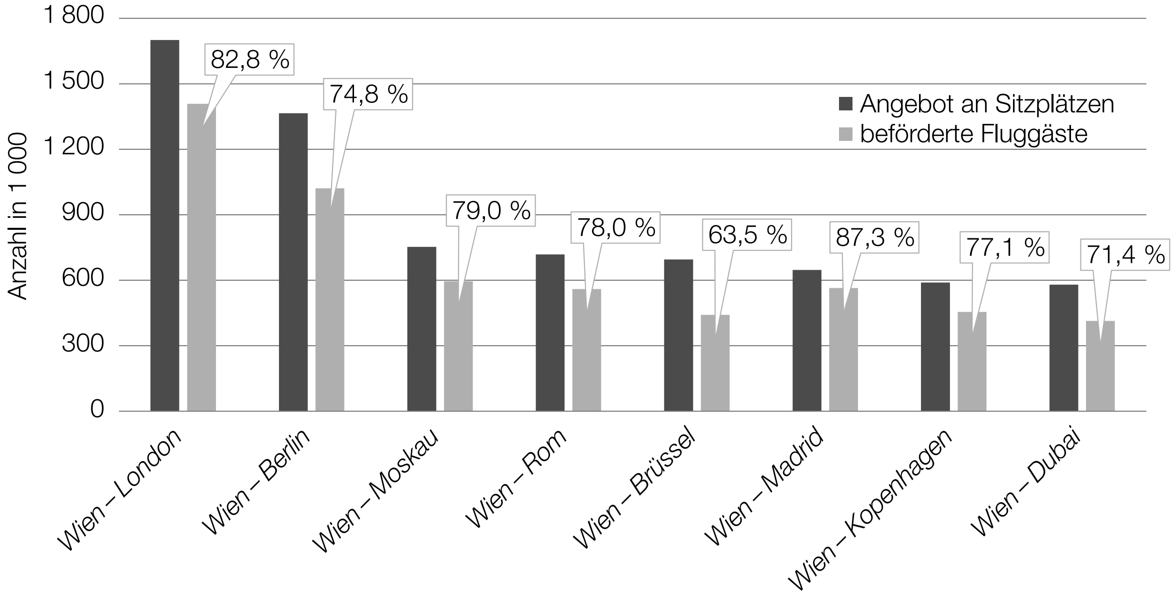
b) Die Anzahl der Flüge bzw. Fluggäste in Österreich ist für die Jahre 2018 und 2019 in der nachstehenden Tabelle angegeben.

	Anzahl der Flüge	Anzahl der Fluggäste
2018	296 852	31 725 019
2019	319 945	36 206 642

Die durchschnittliche Anzahl der Fluggäste pro Flug ist von 2018 auf 2019 um n gestiegen.

1) Berechnen Sie n. *[0/1 P.]*

c) Die unten stehende Abbildung zeigt für das Jahr 2019 die Anzahl der angebotenen Sitzplätze sowie die Anzahl der Fluggäste für Flüge von bzw. nach Wien. Die Prozentsätze geben jeweils den relativen Anteil der durch die Fluggäste besetzten Sitzplätze an.



1) Ordnen Sie den vier Aussagen für das Jahr 2019 jeweils die passende Flugstrecke aus A bis F zu. *[0 / ½ / 1 P.]*

Auf dieser Flugstrecke wurden mehr als doppelt so viele Fluggäste befördert wie auf der Flugstrecke *Wien – Moskau*.	
Auf dieser Flugstrecke war die Anzahl der unbesetzten Sitzplätze am kleinsten.	
Auf dieser Flugstrecke war die Anzahl der beförderten Fluggäste größer als 650 000 und kleiner als 1,1 Millionen.	
Auf dieser Flugstrecke war mehr als ein Drittel der angebotenen Sitzplätze unbesetzt.	

A	*Wien – Berlin*
B	*Wien – Madrid*
C	*Wien – Brüssel*
D	*Wien – Kopenhagen*
E	*Wien – London*
F	*Wien – Rom*

Möglicher Lösungsweg

a1) $a = 0{,}14$

$b = \sqrt[62]{\frac{28{,}95}{0{,}14}} = 1{,}089...$

a2) $\frac{31{,}73 - N(63)}{31{,}73} = 0{,}0056... = 0{,}56...\ \%$

Die mit N ermittelte Anzahl der Fluggäste für das Jahr 2018 weicht um weniger als 1 % von der tatsächlichen Anzahl der Fluggäste ab.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *a* und *b*.
a2) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.

b1) $n = \frac{36\,206\,642}{319\,945} - \frac{31\,725\,019}{296\,852} = 6{,}29...$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *n*.

c1)

Auf dieser Flugstrecke wurden mehr als doppelt so viele Fluggäste befördert wie auf der Flugstrecke *Wien–Moskau*.	E
Auf dieser Flugstrecke war die Anzahl der unbesetzten Sitzplätze am kleinsten.	B
Auf dieser Flugstrecke war die Anzahl der beförderten Fluggäste größer als 650 000 und kleiner als 1,1 Millionen.	A
Auf dieser Flugstrecke war mehr als ein Drittel der angebotenen Sitzplätze unbesetzt.	C

A	*Wien–Berlin*
B	*Wien–Madrid*
C	*Wien–Brüssel*
D	*Wien–Kopenhagen*
E	*Wien–London*
F	*Wien–Rom*

c1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Baumwachstum

Aufgabennummer: 2_010	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die nachstehende Tabelle enthält Messwerte des Umfangs eines bestimmten Baumstamms in Abhängigkeit von seinem Alter.

Alter t (in Jahren)	25	50	75	100
Umfang u (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370

Dieser Zusammenhang kann durch eine Wachstumsfunktion u modelliert werden, wobei der Wert $u(t)$ den Umfang zum Zeitpunkt t angibt.

Aufgabenstellung:

a) Für die ersten 50 Jahre soll die Zunahme des Umfangs mit einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden.

1) Geben Sie a und b so an, dass f mit den in der obigen Tabelle angegebenen Werten für ein Alter von 25 und 50 Jahren übereinstimmt.

a = ______________________________

b = ______________________________

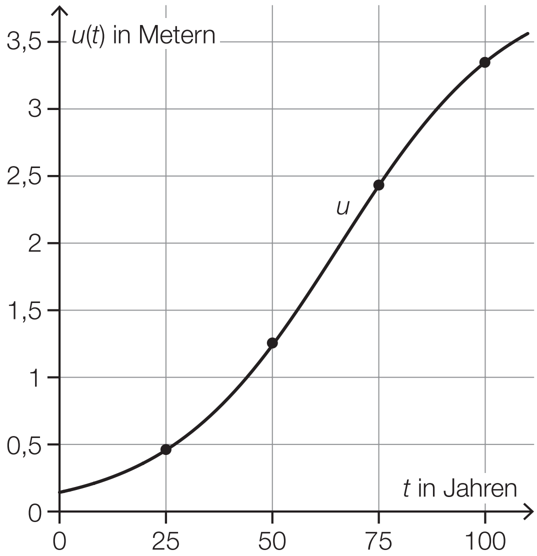
2) Begründen Sie rechnerisch, warum dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht angemessen ist.

b) 1) Interpretieren Sie den Differenzenquotient von u im Zeitraum von 50 bis 75 Jahren unter Angabe des konkreten Wertes im gegebenen Sachzusammenhang.

Es gilt: $u'(50) = 0{,}043$.

2) Interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Abbildung sind die Messwerte und der Graph der Wachstumsfunktion u veranschaulicht.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung denjenigen Zeitpunkt t_0 ab, zu dem der Umfang des Baumes am schnellsten zugenommen hat.

t_0 = ______________________________ Jahre

2) Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der dieser Zeitpunkt rechnerisch ermittelt werden kann, wenn die Wachstumsfunktion u bekannt ist.

d) Für die Wachstumsfunktion u gilt: $u(t) = \frac{3{,}95}{1 + 26{,}65 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}}$.
Der Umfang des Baumstamms nähert sich entsprechend dieser Wachstumsfunktion einem bestimmten Wert u_{max}.

1) Geben Sie u_{max} an.

u_{max} = ______________________________ Meter

Lösungserwartung

a1) $0{,}462 = a \cdot b^{25}$
$1{,}256 = a \cdot b^{50}$

$\Rightarrow \quad a = 0{,}1699\ldots$
$\quad\quad b = 1{,}0408\ldots$

a2) $f(75) = 0{,}1699\ldots \cdot 1{,}0408\ldots^{75} = 3{,}4145\ldots$

Der Funktionswert weicht stark vom Wert in der Tabelle ab. Aus diesem Grund ist dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht angemessen.

b1) $\frac{u(75) - u(50)}{75 - 50} = \frac{2{,}465 - 1{,}256}{25} = 0{,}048\ldots$
Die durchschnittliche Zunahme zwischen 50 und 75 Jahren beträgt rund 0,05 m pro Jahr.

b2) Die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 50$ beträgt 0,043 m pro Jahr.

c1) $t_0 = 65$ Jahre

c2) $u''(t) = 0$

d1) $u_{max} = 3{,}95$ Meter

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

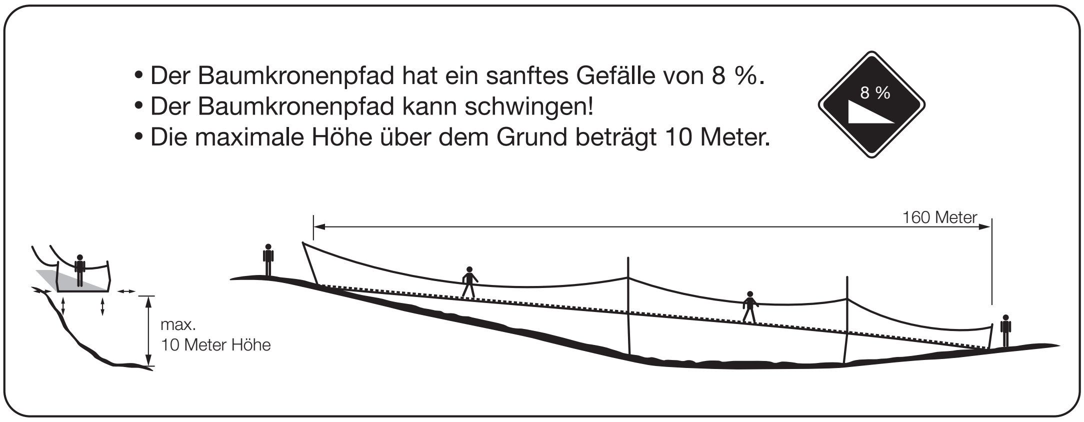
c1) Ein Punkt für das richtige Ablesen.
Toleranzintervall: [55; 75]
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

d1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

Baumkronenpfad

Aufgabennummer: 2_076	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 5.1, FA 5.3	

Der *Baumkronenpfad* ist eine Brückenstrecke durch einen Teil des Schönbrunner Tiergartens.



a) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen:
„Der Baumkronenpfad hat ein sanftes Gefälle von 8 %.“

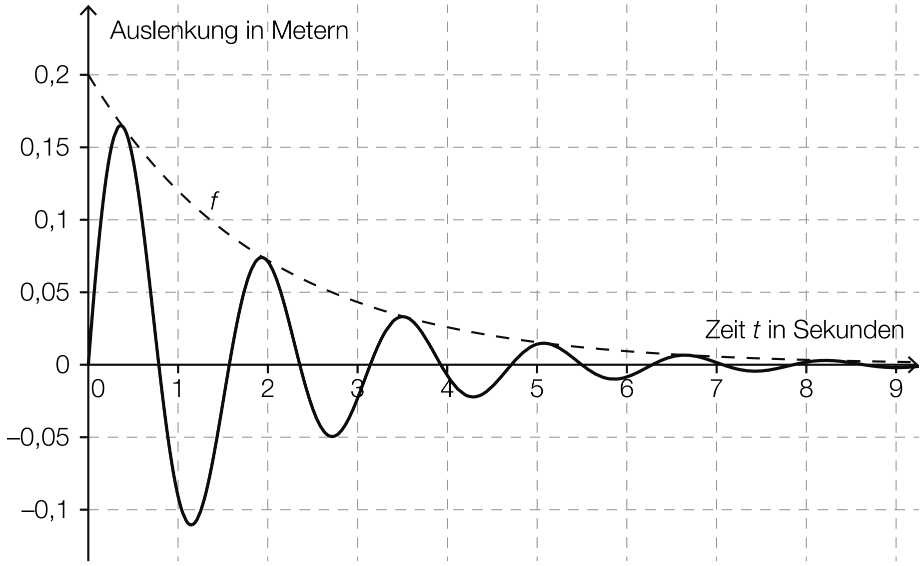
Dabei wird der Baumkronenpfad vereinfacht als geradlinig angenommen. Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.

1) Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen Startpunkt und Endpunkt.

2) Berechnen Sie den Neigungswinkel des Baumkronenpfads.

b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!“

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende“ strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^t$.

1) Lesen Sie aus der Grafik den Parameter c ab.
2) Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter a dieser Funktion f gilt: $0 < a < 1$.

Lösungserwartung

a1) Höhenunterschied in Metern: $160 \cdot 0{,}08 = 12{,}8$

a2) $\tan(\alpha) = 0{,}08 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4{,}57\ldots°$

Auch $\alpha = -4{,}57\ldots°$ ist als richtig zu werten.
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

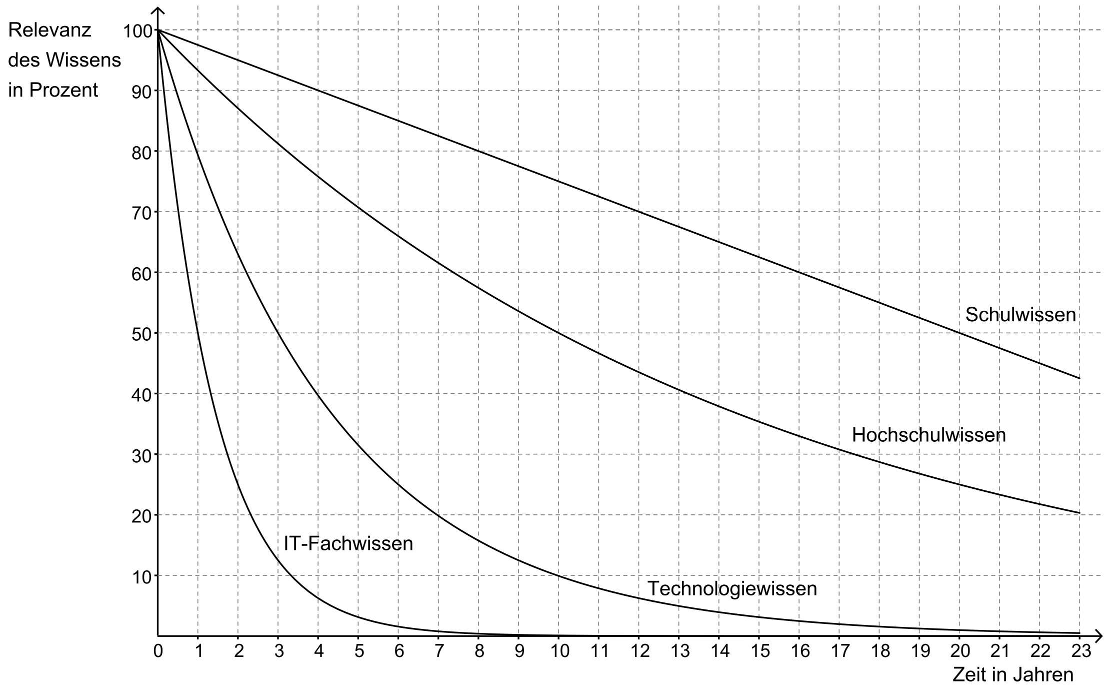
b1) $c = f(0) = 0{,}2$

b2) Da die gegebene Exponentialfunktion streng monoton fallend ist, gilt für den Parameter a: $0 < a < 1$.

Halbwertszeit des Wissens

Aufgabennummer: 2_093	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 5.1, FA 5.2	

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz“). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



a) Man geht davon aus, dass die Relevanz des beruflichen Fachwissens exponentiell abfällt und eine Halbwertszeit von 5 Jahren hat.

1) Zeichnen Sie in die Abbildung der Angabe den Verlauf der Relevanz des beruflichen Fachwissens im Intervall [0; 15] ein.

b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.

1) Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens

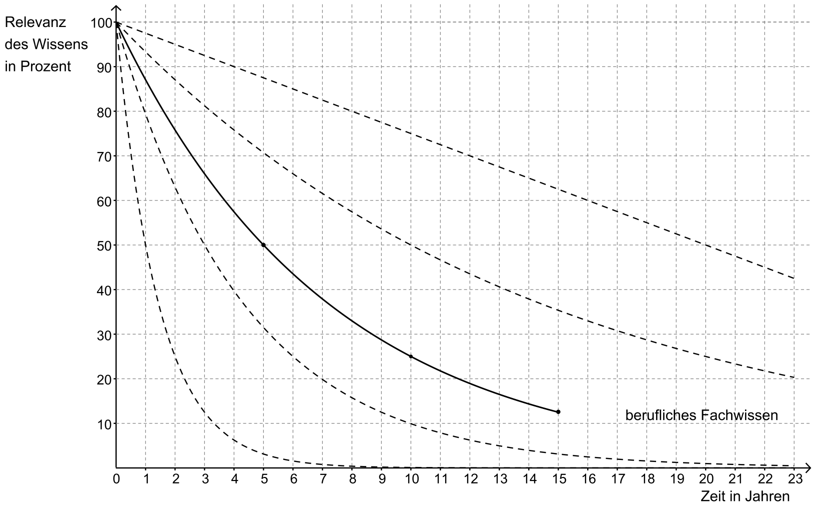
1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat.

d) Die Relevanz des Schulwissens kann in den ersten Jahrzehnten durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Lesen Sie aus der Abbildung in der Angabe die Steigung dieser linearen Funktion ab.

Lösungserwartung

a1)



Die Werte nach 5, 10 bzw. 15 Jahren müssen klar als 50 %, 25 % bzw. 12,5 % erkennbar sein.

b1) Aufstellen der Exponentialfunktion:

$T(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$

t ... Zeit in Jahren
$T(t)$ ... Relevanz des Technologiewissens zur Zeit t in Prozent der anfänglichen Relevanz des Wissens

c1) $100 - N(7) = 100 - 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 7} = 38{,}4... \approx 38$

Die Relevanz des Hochschulwissens hat um rund 38 % abgenommen.

d1) $k = -\frac{5}{2}$

Wachstum von Holzbeständen

Aufgabennummer: 2_089	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 5.1, FA 5.2	

a) Bauer Waldner weiß, dass sich der Holzbestand seines Waldes um ca. 2,7 % pro Jahr bezogen auf das jeweilige Vorjahr vermehrt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Holzbestand 36 000 m³.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für diejenige Funktion *f* auf, die den Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren angibt.

b) Der Holzbestand eines anderen Waldes kann näherungsweise mithilfe der Funktion *g* beschrieben werden:

$g(t) = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

t ... Zeit in Jahren
$g(t)$ ... Holzbestand zum Zeitpunkt t in Kubikmetern (m³)

Wenn der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist, wird so viel geschlägert, dass wieder der Holzbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegt.

Für den Verkauf dieses geschlägerten Holzes betragen die Einnahmen € 96.000.

1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Verkaufspreis für 1 m³ Holz.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist.

c) Ein Student behauptet: „Um die relative Änderung *r* des Holzbestandes von einem Zeitpunkt t_1 bis zu einem späteren Zeitpunkt t_2 zu berechnen, subtrahiere ich vom Holzbestand zum Zeitpunkt t_2 den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 und dividiere die Differenz durch den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1."

1) Übersetzen Sie die Rechenanleitung des Studenten in eine Formel.

Lösungserwartung

a1) $f(t) = 36\,000 \cdot 1{,}027^t$

t … Zeit in Jahren
$f(t)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t in m^3

b1) Verkauft wurden 1 200 m^3, daher betrug der durchschnittliche Preis pro Kubikmeter € 80.

b2) $33\,000 = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

$$t = \frac{\ln(33\,000) - \ln(31\,800)}{\ln(1{,}025)} = 1{,}50\ldots$$

Nach etwa 1,5 Jahren beträgt der Holzbestand 33 000 m^3.

c1) $r = \frac{h(t_2) - h(t_1)}{h(t_1)}$

r … relative Änderung
t_1, t_2 … Zeitpunkte
$h(t_1)$, $h(t_2)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 bzw. t_2

Bevölkerungswachstum in Afrika*

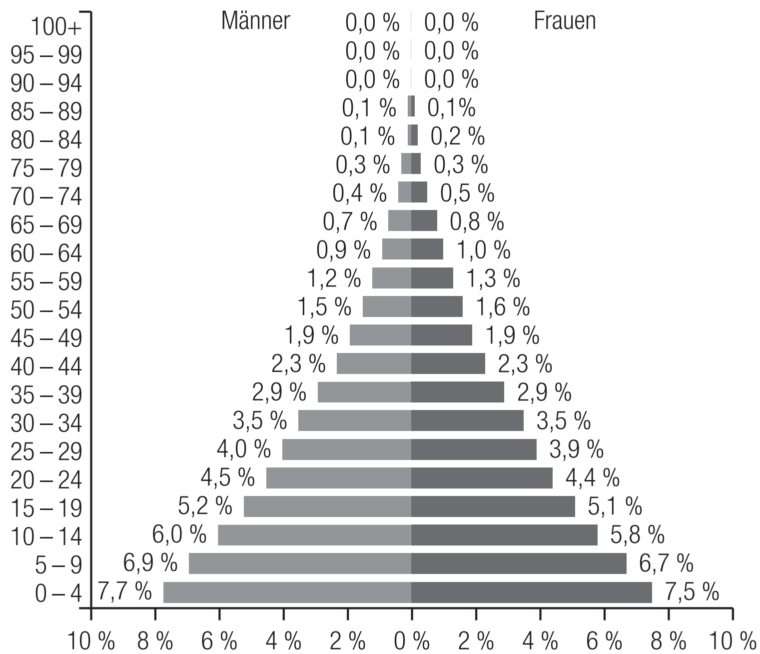
Aufgabennummer: 2_083	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 5.1, FA 5.5, AN 1.1, AN 1.3, WS 1.1, WS 1.3	

Afrika hatte Ende 2018 eine Bevölkerung von ca. 1,3 Milliarden Menschen und verzeichnet derzeit das stärkste Bevölkerungswachstum aller Kontinente.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Aufgabenstellung:

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Alterspyramide der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018.
Der Alterspyramide ist z. B. zu entnehmen, dass im Kalenderjahr 2018 galt: 4,5 % der afrikanischen Bevölkerung sind Männer mit einem Lebensalter von 20 bis 24 Jahren und 4,4 % der afrikanischen Bevölkerung sind Frauen mit einem Lebensalter von 20 bis 24 Jahren. Unter *Lebensalter* versteht man die Anzahl vollendeter Lebensjahre.



Datenquelle: https://www.populationpyramid.net/de/afrika/2018 [10.05.2019].

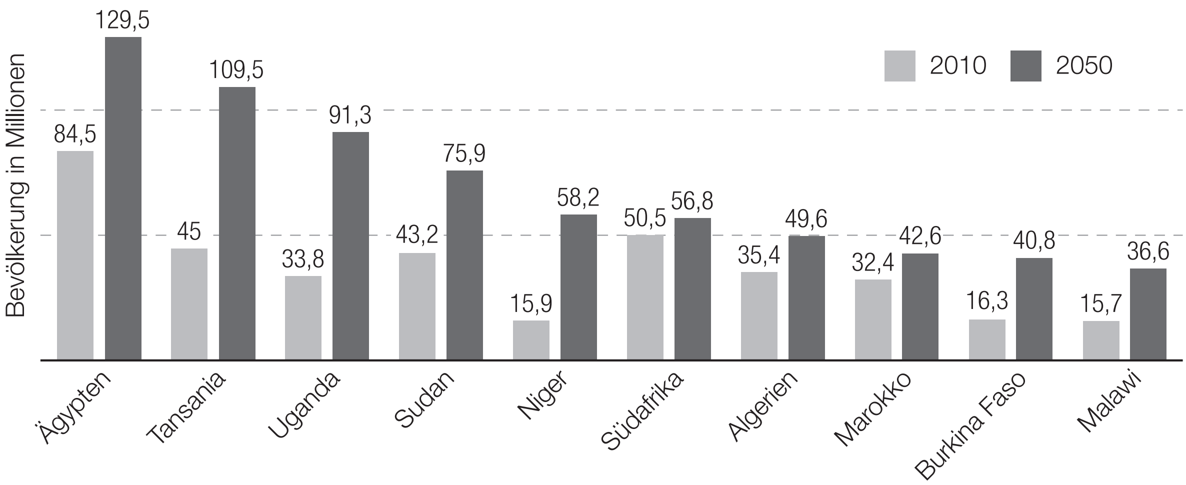
Nehmen Sie modellhaft an, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten.

1) Bestimmen Sie anhand der Alterspyramide den Median m des Lebensalters der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018.

m = ____ Jahre

2) Geben Sie die Anzahl an Afrikanerinnen und Afrikanern an, die im Kalenderjahr 2018 jünger als m Jahre waren.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die prognostizierte Bevölkerungsentwicklung (Angaben in Millionen) im Zeitraum von 2010 bis 2050 in ausgewählten afrikanischen Ländern.



Datenquelle: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/159204/umfrage/prognose-zur-bevoelkerungsentwicklung-in-afrika-bis-2050/ [10.05.2019].

1) Geben Sie von den zehn angeführten Ländern dasjenige Land an, das laut Prognose im Zeitraum von 2010 bis 2050 am stärksten zum absoluten Bevölkerungswachstum in Afrika beitragen wird.

2) Geben Sie von den zehn angeführten Ländern dasjenige Land an, in dem laut Prognose im Zeitraum von 2010 bis 2050 das stärkste relative Bevölkerungswachstum erfolgt.

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung in Nigeria im Zeitraum von 1980 bis 2010.

Kalenderjahr	1980	1990	2000	2010
Bevölkerungszahl in Millionen	73,5	95,3	122,4	158,6

1) Zeigen Sie anhand der Tabelle, dass die Bevölkerungszahl im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd exponentiell zugenommen hat.

Nehmen Sie an, dass die Bevölkerungszahl von Nigeria weiterhin in dieser Art exponentiell wachsen wird.

2) Geben Sie unter Verwendung der Daten aus den beiden Kalenderjahren 2000 und 2010 an, in welchem Kalenderjahr die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen wird.

d) Die nachstehende Tabelle zeigt, wie sich die durchschnittliche Lebenserwartung der afrikanischen Bevölkerung seit 1953 entwickelt hat.

Kalenderjahr	durchschnittliche Lebenserwartung in Jahren
1953	37,5
1958	40,0
1963	42,3
1968	44,4
1973	46,6
1978	48,7
1983	50,5
1988	51,7
1993	51,7
1998	52,3
2003	53,7
2008	57,0
2013	60,2
2018	62,4

1) Berechnen Sie die mittlere jährliche Zunahme k der durchschnittlichen Lebenserwartung im Zeitraum von 1953 bis 2018.

Es wird angenommen, dass die durchschnittliche Lebenserwartung in Afrika nach dem Kalenderjahr 2018 konstant pro Jahr um den berechneten Wert k zunimmt.
Im Kalenderjahr 2018 betrug die durchschnittliche Lebenserwartung in Europa 78,5 Jahre.

2) Geben Sie an, in welchem Kalenderjahr die durchschnittliche Lebenserwartung in Afrika unter dieser Annahme den Wert für Europa im Kalenderjahr 2018 erreichen würde.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $m = 19$ Jahre

a2) Aufgrund der Annahme, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten, sind 4,16 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Männer im Alter von 15 bis 18 Jahren und 4,08 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Frauen im Alter von 15 bis 18 Jahren.
7,7 % + 7,5 % + 6,9 % + 6,7 % + 6,0 % + 5,8 % + 4,16 % + 4,08 % = 48,84 %
$1{,}3 \cdot 10^9 \cdot 0{,}4884 = 6{,}3492 \cdot 10^8 \approx 635$ Millionen Menschen

b) **Lösungserwartung:**

b1) Tansania

b2) Niger

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Begründungen:

Die (mittleren) jährlichen Wachstumsraten sind im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd konstant:
1980 bis 1990: ca. 2,6 %
1990 bis 2000: ca. 2,5 %
2000 bis 2010: ca. 2,6 %

oder:

Die prozentuellen Wachstumsraten sind in den 10-Jahres-Zeiträumen von 1980 bis 2010 annähernd konstant:
1980 bis 1990: ca. 30 %
1990 bis 2000: ca. 28 %
2000 bis 2010: ca. 30 %

oder:

Die gegebenen Daten können gut mit einer Exponentialfunktion N mit der Gleichung $N(t) = N_0 \cdot 1{,}026^t$ beschrieben werden. Die Funktionswerte weichen nur geringfügig von den Tabellenwerten ab.

c2) $360 = 122{,}4 \cdot 1{,}0262...^t \quad \Rightarrow \quad t = 41{,}6... \approx 42$

Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2042 die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen.

d) Lösungserwartung:

d1) $k = \frac{62{,}4 - 37{,}5}{65} = 0{,}3830... \quad \Rightarrow \quad k \approx 0{,}383$ Lebensjahre pro Kalenderjahr

d2) $62{,}4 + t \cdot 0{,}3830... = 78{,}5$
$t = 42{,}028... \approx 42{,}03$
Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2060 in Afrika die durchschnittliche Lebenserwartung den Wert 78,5 Jahre erreichen.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.
b2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.

c1) Ein Punkt für eine richtige Begründung.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch das Kalenderjahr 2041 als richtig zu werten ist.

d1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Lebensjahre pro Kalenderjahr“ nicht angegeben sein muss.
d2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Kalenderjahrs, wobei auch die Kalenderjahre 2058, 2059 und 2061 als richtig zu werten sind.

Fahrradtour

Aufgabenstellung:

a) Bettina macht eine 2-stündige Fahrradtour. Ihre Geschwindigkeit kann dabei näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -0{,}08 \cdot t^2 + 16 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2$

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn der Fahrradtour
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in km/h

1) Berechnen Sie die Zeitdauer, die Bettina für die ersten 10 km dieser Fahrradtour benötigt. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 1$. Geben Sie auch die zugehörige Einheit an. *[0/½/1 P.]*

b) Der empfohlene Reifendruck eines Fahrradreifens sinkt mit zunehmender Breite des Reifens. Für einen empfohlenen Reifendruck von 2 bar bis 9 bar kann der empfohlene Reifendruck näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden.

$p(x) = 19{,}1 \cdot e^{-0{,}0376 \cdot x}$

x ... Breite des Reifens in mm
$p(x)$ ... empfohlener Reifendruck bei der Breite x in bar

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall für die Breite des Reifens, für das sich ein empfohlener Reifendruck von 2 bar bis 9 bar ergibt. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung unter Angabe der zugehörigen Einheiten im gegebenen Sachzusammenhang.

$p(30) - p(20) \approx -2{,}8$ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 0{,}62...$
Bettina benötigt für die ersten 10 km rund 0,6 h.

a2) $a(t) = v'(t) = -0{,}16 \cdot t$
$v'(1) = -0{,}16$

Die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt $-0{,}16$ km/h².

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.
a2) Ein halber Punkt für das richtige Berechnen der Beschleunigung, ein halber Punkt für das Angeben der richtigen Einheit.

b1) $p(x) = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 20{,}0...$
$p(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 60{,}0...$

größtmögliches Intervall: [20,0...; 60,0...]

b2) Der für einen 30 mm breiten Reifen empfohlene Reifendruck ist um rund 2,8 bar geringer als der für einen 20 mm breiten Reifen empfohlene Reifendruck.

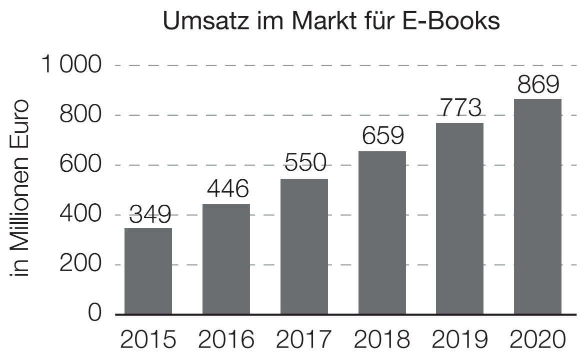
b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des größtmöglichen Intervalls.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe der zugehörigen Einheiten im gegebenen Sachzusammenhang.

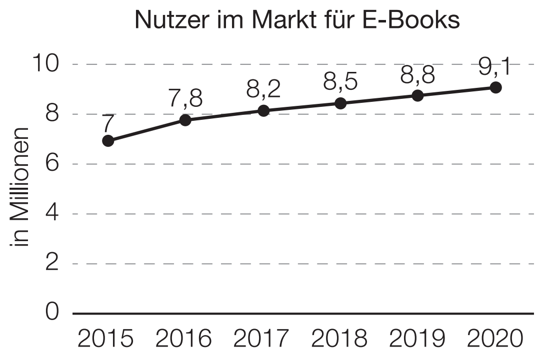
E-Book*

Aufgabennummer: 2_060	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 5.2, WS 2.2, WS 3.2	

Ein Buch in digitaler Form wird als *E-Book* (von engl. *electronic book*) bezeichnet.

Die beiden folgenden auf Deutschland bezogenen Grafiken stellen Schätzwerte für die Entwicklung des Markts für E-Books dar:





Quelle: http://www.e-book-news.de/20-prozent-wachstum-pro-jahr-statista-sieht-deutschen-e-book-markt-im-aufwind/ [19.06.2019] (adaptiert).

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie für den geschätzten Umsatz pro Nutzer in Deutschland die absolute und die relative Änderung für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

absolute Änderung: € ____

relative Änderung: ____

2) Berechnen Sie den Differenzenquotienten des geschätzten Umsatzes pro Nutzer in Deutschland für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

b) Die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wird in der oben angeführten Quelle wie folgt beschrieben:

„20 Prozent Wachstum pro Jahr“

1) Geben Sie an, wie die Umsatzschätzung $U(2017)$ für das Jahr 2017 hätte lauten müssen, wenn der Umsatz ausgehend vom Schätzwert von 2015 tatsächlich jährlich um 20 % zugenommen hätte.

$U(2017) =$ ____ Millionen Euro

Jemand beschreibt die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wie folgt:

„a Millionen Euro Wachstum pro Jahr“

2) Berechnen Sie a.

c) Im Jahr 2015 betrug die Einwohnerzahl von Deutschland ungefähr 82,18 Millionen, jene von Österreich ungefähr 8,58 Millionen. Jemand stellt sich die folgende Frage: „Wie groß ist die Anzahl der Personen aus Österreich, die im Jahr 2015 schon E-Book-Nutzer waren?“

1) Beantworten Sie diese Frage unter der Annahme, dass Österreich im Jahr 2015 den gleichen (geschätzten) Anteil an E-Book-Nutzern wie Deutschland hatte.

Anzahl: ____ Personen

Im Jahr 2020 werden 500 Personen aus Österreich zufällig ausgewählt.
Die als binomialverteilt angenommene Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Personen aus dieser Auswahl an, die E-Book-Nutzer sind. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person E-Book-Nutzer ist, mit 12 % angenommen.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 50 E-Book-Nutzer in dieser Auswahl sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) Umsatz pro Nutzer 2015: rund € 49,86
Umsatz pro Nutzer 2020: rund € 95,49

absolute Änderung: € 45,63
relative Änderung: 0,9155

a2) Differenzenquotient für das Intervall [2015; 2020]: rund € 9,13 pro Jahr

b) Lösungserwartung:

b1) $U(2017) = U(2015) \cdot 1{,}2^2$
$U(2017) = 502{,}56$ Millionen Euro

b2) $a = \frac{869 - 349}{5} = 104$

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:
$8{,}58 \cdot \frac{7}{82{,}18} = 0{,}7308347... \approx 0{,}730835$
Anzahl: 730835 Personen

c2) mögliche Vorgehensweise:
$n = 500;\ p = 0{,}12$
$P(X \geq 50) = 0{,}9287... \approx 0{,}929$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte. Andere Schreibweisen der Lösungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die absolute Änderung: [44; 47]
Toleranzintervall für die relative Änderung: [0,88; 0,95]

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [8,90; 9,40]

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [502 Millionen Euro; 503 Millionen Euro]

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [720 000; 780 000]

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,90; 0,95]

Weltbevölkerung

In der nachstehenden Tabelle ist für bestimmte Kalenderjahre die Schätzung der Weltbevölkerung (jeweils zur Jahresmitte) angegeben.

Kalenderjahr	Weltbevölkerung in Milliarden
1850	1,260
1900	1,650
1950	2,536
1960	3,030
1970	3,700
1990	5,327
2000	6,140
2010	6,957
2020	7,790

Datenquellen: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1694/umfrage/entwicklung-der-weltbevoelkerungszahl/, https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bevoelkerung/internationale_uebersich/036446.html [17.05.2020].

Aufgabenstellung:

a) Im Zeitraum von 1850 bis 1950 hat sich die Weltbevölkerung annähernd verdoppelt.
Nehmen Sie für diesen Zeitraum an, dass die Weltbevölkerung jährlich um den gleichen Prozentsatz gewachsen ist.

1) Berechnen Sie diesen Prozentsatz. *[0/1 P.]*

b) Ab 1970 kann die Entwicklung der Weltbevölkerung näherungsweise durch eine lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Werte für die Weltbevölkerung der Kalenderjahre 1970 und 2000 eine Funktionsgleichung von f in Abhängigkeit von der Zeit t auf (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1970, $f(t)$ in Milliarden). *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der mithilfe von f ermittelte Wert für das Kalenderjahr 2020 vom in der obigen Tabelle angegebenen Wert abweicht. *[0/1 P.]*

c) In einem anderen Modell wird die Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1970 durch die Funktion g modelliert.

$g(t) = 3{,}7 \cdot e^{-0{,}0001 \cdot t^2 + 0{,}02 \cdot t}$

t ... Zeit ab 1970 in Jahren
$g(t)$ ... Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden

Gemäß diesem Modell wird die Weltbevölkerung zunächst zunehmen und in weiterer Folge abnehmen.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion g das Maximum der Weltbevölkerung und das Kalenderjahr, in dem dies gemäß dem Modell eintreten soll.

Maximum der Weltbevölkerung: rund ____________________ Milliarden

Kalenderjahr: ____________________ *[0/½/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\sqrt[100]{\frac{2{,}536}{1{,}260}} = 1{,}00701...$

oder:

$\sqrt[100]{2} = 1{,}00695...$

Prozentsatz: rund 0,70 %

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

b1) $f(t) = k \cdot t + d$

$k = \frac{6{,}140 - 3{,}700}{30} = 0{,}081\dot{3}$

$d = f(0) = 3{,}700$

$f(t) = 0{,}081\dot{3} \cdot t + 3{,}700$

b2) $f(50) = 7{,}7\dot{6}$

$\frac{7{,}7\dot{6} - 7{,}790}{7{,}790} = -0{,}0029...$

Abweichung: rund –0,3 %

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *f*.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Abweichung in %. Auch die Angabe von 0,3 % ist richtig.

c1) Maximum der Weltbevölkerung: rund 10,1 Milliarden

Kalenderjahr: 2070

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Sonnenaufgang

Aufgabennummer: 2_066	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 3.3, FA 5.1, FA 5.3	

a) Während der Morgendämmerung wird es kontinuierlich heller. Die Beleuchtungsstärke bei klarem Himmel kann an einem bestimmten Ort in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch folgende Exponentialfunktion E beschrieben werden:

$E(t) = 80 \cdot a^t$ mit $-60 \leq t \leq 30$

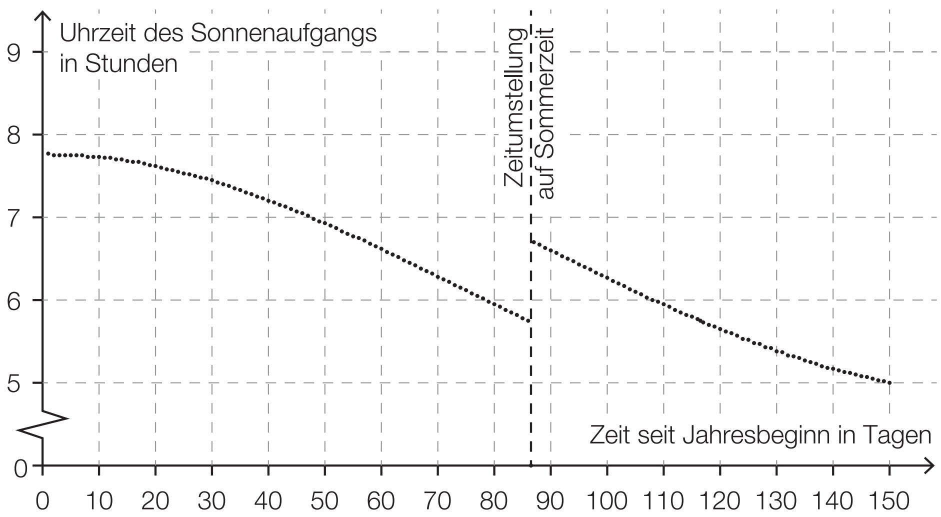
t ... Zeit in min, wobei $t = 0$ der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs ist
$E(t)$ ... Beleuchtungsstärke zur Zeit t in Lux
a ... Parameter

1) Interpretieren Sie die Zahl 80 in der Funktionsgleichung von E im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Beleuchtungsstärke verdoppelt sich alle 5 min.

2) Berechnen Sie den Parameter a.

b) In der nachstehenden Grafik ist die jeweilige Uhrzeit des Sonnenaufgangs in Wien für die ersten 150 Tage eines Jahres dargestellt.



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Grafik, wie viele Tage nach der Zeitumstellung der Sonnenaufgang erstmals zu einer früheren Uhrzeit als unmittelbar vor der Zeitumstellung stattfindet.

Im Zeitintervall [0; 40] kann die Uhrzeit des Sonnenaufgangs näherungsweise durch eine quadratische Funktion f modelliert werden.

$$f(t) = a \cdot t^2 + c$$

t … Zeit seit Jahresbeginn in Tagen
$f(t)$ … Uhrzeit des Sonnenaufgangs am Tag t in Stunden

2) Argumentieren Sie anhand der obigen Grafik, dass der Parameter a dabei negativ sein muss.

Lösungserwartung

a1) Die Beleuchtungsstärke bei Sonnenaufgang beträgt 80 Lux.

a2) $a^5 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[5]{2} = 1{,}148...$

b1) 31 Tage
Toleranzintervall: [26 Tage; 34 Tage]

b2) Die Datenpunkte im Zeitintervall [0; 40] können durch eine nach unten offene (negativ gekrümmte) Parabel angenähert werden. Daher ist der Parameter *a* der zugehörigen quadratischen Funktion negativ.

Wings for Life World Run*

Aufgabennummer: 2_048	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 5.3, AN 1.1, AN 4.3, WS 1.1

Der *Wings for Life World Run* ist ein in vielen Ländern zur gleichen Zeit stattfindender Volkslauf. Eine Besonderheit dieses Laufs ist, dass keine vorgegebene Distanz zurückgelegt werden muss.

Es starten alle Läufer/innen weltweit gleichzeitig um 11:00 UTC (koordinierte Weltzeit). Vom jeweiligen Startpunkt startet 30 Minuten später ein Auto, das sogenannte *Catcher-Car*, und fährt die Strecke ab. Dabei erhöht sich die Geschwindigkeit des Autos nach einem vorgegebenen Zeitplan. Für jede teilnehmende Person endet der Lauf, wenn sie vom Catcher-Car überholt wird. Das Ergebnis für eine teilnehmende Person ist die Länge derjenigen Strecke, die diese Person bis zum Zeitpunkt des Überholens durch das Catcher-Car zurückgelegt hat.

Für die Geschwindigkeiten des Catcher-Cars wurden bis zum Jahr 2018 folgende Werte vorgegeben (diese dienen modellhaft als Grundlage für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenstellungen):

Uhrzeit	Geschwindigkeit
von 11:30 bis 12:30	15 km/h
von 12:30 bis 13:30	16 km/h
von 13:30 bis 14:30	17 km/h
von 14:30 bis 15:30	20 km/h
von 15:30 bis 16:30	20 km/h
ab 16:30	35 km/h

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Eine Person läuft mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie vom Catcher-Car überholt wird. Diese Person wird während der 15-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Die Laufzeit t der Person hängt von der Geschwindigkeit v der Person ab.

Geben Sie einen Term an, mit dem t bei Kenntnis von v berechnet werden kann (mit t in h und v in km/h)!

$t =$ ____

Im Jahr 2016 betrug die (konstante) Geschwindigkeit einer Person bei diesem Lauf 9 km/h. Ein Jahr später war ihre (konstante) Geschwindigkeit bei diesem Lauf um 10 % höher.

Geben Sie an, um wie viel Prozent sich dadurch die Streckenlänge erhöhte, die diese Person zurücklegte, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde!

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. _______________ %.

b) Eine bestimmte gut trainierte Person läuft während der ersten Stunde mit einer konstanten Geschwindigkeit und benötigt dabei pro Kilometer 5 Minuten. Anschließend wird sie langsamer. Ab diesem Zeitpunkt (also für $t \geq 1$) kann ihre Geschwindigkeit mithilfe der Funktion v in Abhängigkeit von der gelaufenen Zeit modelliert werden. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ gilt:

$v(t) = 12 \cdot 0{,}7^{t-1}$ mit t in h und $v(t)$ in km/h

Deuten Sie den Ausdruck $12 + \int_1^b v(t)\,\mathrm{d}t$ mit $b \geq 1$ im gegebenen Kontext!

Diese Person wird während der 16-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der das Catcher-Car diese Person überholt!

Uhrzeit: __ __ : __ __ UTC

c) Ein Läufer wird während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Juri schließt aus dieser Information, dass dieser Läufer nicht weniger als 40 km und nicht mehr als 88 km zurückgelegt hat, bis er vom Catcher-Car überholt wurde. Leo meint zu dieser Behauptung: „Deine Aussage ist wahr, aber ich könnte ein kleineres Intervall nennen, das ebenso zutrifft."

Geben Sie an, ob die Behauptung von Leo stimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

In Wien legte 2017 die schnellste Teilnehmerin eine Strecke von 51,72 km zurück, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde.

Berechnen Sie ihre durchschnittliche Geschwindigkeit $\overline{v}$!

$\overline{v}$ = ____ km/h

Lösungserwartung

a) möglicher Term:

$v \cdot t = 15 \cdot (t - 0{,}5) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7{,}5}{15 - v}$

mögliche Vorgehensweise:

$s = v \cdot t$

$s = v \cdot \frac{7{,}5}{15 - v}$

$v = 9$ km/h: $s = 11{,}25$ km

$v = 9{,}9$ km/h: $s \approx 14{,}559$ km

$\frac{14{,}559}{11{,}25} \approx 1{,}294$

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. 29,4 %.

b) mögliche Deutung:

Der Ausdruck beschreibt die Streckenlänge, die die Person bis zum Zeitpunkt $t = b$ zurücklegt.

mögliche Vorgehensweise:

$12 + \int_1^b v(t)\,\mathrm{d}t = 15 + 16 \cdot (b - 1{,}5) \quad \Rightarrow \quad b \approx 1{,}878$

Die Laufzeit der Person bis zum Zeitpunkt des Überholens beträgt ca. 1 h 53 min.
Uhrzeit: 12:53 UTC

c) Die Behauptung von Leo stimmt.

mögliche Begründung:

Das Catcher-Car legt bis zum Beginn der 20-km/h-Phase 48 km zurück, daher muss der Läufer zumindest 48 km zurückgelegt haben. Das Catcher-Car legt innerhalb der 20-km/h-Phase weitere 40 km zurück, bevor es die 35-km/h-Phase startet. Daher legt der Läufer höchstens 88 km zurück, wenn er in dieser Phase überholt wird. Somit ist es Leo möglich, ein kleineres Intervall anzugeben. (Das kleinstmögliche Intervall beträgt [48 km; 88 km].)

Die Teilnehmerin wurde während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

$t = 3{,}5 + \frac{3{,}72}{20} = 3{,}686$ h

$\bar{v} = \frac{51{,}72}{3{,}686} \approx 14{,}03$ km/h

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [29 %; 30 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für eine richtige Deutung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch 12:52 UTC als richtig zu werten ist.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Behauptung von Leo stimmt, und eine richtige Begründung. Die Begründung ist ausreichend, wenn aus ihr klar hervorgeht, dass die Breite des Intervalls durch Vergrößerung der linken Intervallgrenze verringert werden kann, die Angabe eines konkreten Intervalls ist dafür nicht erforderlich.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [13,5; 14,5]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Wachstum von Tierpopulationen

Aufgabenstellung:

a) Die Populationsgröße (Anzahl der Individuen) einer bestimmten Tierart kann modellhaft durch die Funktion $N\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

Dabei gilt:

$$N(t) = \frac{500}{1 + 4 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen
$N(t)$ ... Populationsgröße zum Zeitpunkt t

Zum Zeitpunkt t_v ist die Population auf das Doppelte ihrer Größe zum Zeitpunkt $t = 0$ angewachsen.

1) Berechnen Sie t_v. *[0/1 P.]*

b) Die Wachstumsgeschwindigkeit einer anderen Tierpopulation lässt sich durch die Polynomfunktion f mit $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ modellieren. Dabei gibt $f(t)$ die momentane Änderungsrate der Anzahl der Individuen in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Wochen, $f(t)$ in Individuen pro Woche).

Die Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt 15 Individuen pro Woche und erreicht nach 7 Wochen ihr Maximum. Nach 35 Wochen beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit 0 Individuen pro Woche.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf.

$f(t) =$ ____ *[0/1 P.]*

Es wird angenommen, dass die Tierpopulation zu Beginn der Beobachtungen aus 50 Individuen besteht.

2) Interpretieren Sie $50 + \int_0^7 f(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Einer der nachstehenden Ausdrücke beschreibt die mittlere Änderungsrate der Größe der Tierpopulation im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ mit $t_1 < t_2$.

3) Kreuzen Sie den jedenfalls zutreffenden Ausdruck an. *[1 aus 6]* *[0/1 P.]*

$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$	☐
$\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$	☐
$\int_0^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$	☐
$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2}$	☐
$f(t_2) - f(t_1)$	☐
$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{f(t_1)}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $N(0) = 100$
$N(t_v) = 2 \cdot N(0)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_v = 4{,}9...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von t_v.

b1) $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$
$f(0) = 15,\ f(35) = 0,\ f'(7) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = -\frac{1}{49} \cdot t^2 + \frac{2}{7} \cdot t + 15$

b2) Der Ausdruck gibt die Größe der Tierpopulation (Anzahl der Individuen) nach 7 Wochen an.

b3)

$\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von f.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Einsatz von Antibiotika*

Aufgabennummer: 2_057	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.4, FA 3.4, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3	

Die Entwicklung einer Bakterienpopulation kann durch die Zufuhr von Antibiotika beeinflusst werden, was letztlich durch die Giftwirkung von Antibiotika zum Aussterben der Bakterienpopulation führen soll.

In bestimmten Fällen kann diese Entwicklung näherungsweise durch eine Funktion $B\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ beschrieben werden:

$B(t) = b \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2}$ mit $b, c, k \in \mathbb{R}^+$

t ... Zeit in Stunden
$B(t)$ ... Anzahl der Bakterien in Millionen zum Zeitpunkt t
b ... Anzahl der Bakterien in Millionen zum Zeitpunkt $t = 0$
k ... Konstante
c ... Parameter für die Giftwirkung

Aufgabenstellung:

a) Die Funktion B hat genau eine positive Extremstelle t_1.

1) Bestimmen Sie t_1 in Abhängigkeit von k und c.

2) Geben Sie an, welche Auswirkungen eine Vergrößerung von c bei gegebenem k auf die Lage der Extremstelle t_1 der Funktion B hat.

b) Die Funktion $B_1\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $B_1(t) = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$ beschreibt die Anzahl der Bakterien einer bestimmten Bakterienpopulation in Millionen in Abhängigkeit von der Zeit t.

Zum Zeitpunkt $t_2 \neq 0$ erreicht die Bakterienpopulation ihre ursprüngliche Anzahl von 20 Millionen.

1) Geben Sie t_2 an.

2) Deuten Sie $B_1'(t_2)$ im vorliegenden Kontext unter Verwendung der entsprechenden Einheit.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

c) Die Funktion B_2: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $B_2(t) = 5 \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$ beschreibt die Anzahl der Bakterien einer anderen Bakterienpopulation in Millionen, die zum Zeitpunkt $t = 4$ ihr Maximum aufweist.

1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t_3, zu dem die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation stattfindet.

2) Geben Sie an, wie viel Prozent der maximalen Anzahl an Bakterien zum Zeitpunkt t_3 noch vorhanden sind.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$B'(t) = b \cdot (k - c \cdot t) \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2}$

$B'(t_1) = 0$

$k - c \cdot t_1 = 0$

$t_1 = \frac{k}{c}$

a2) mögliche Beschreibung:

Die Extremstelle t_1 wird zu einem früheren Zeitpunkt erreicht.

b) **Lösungserwartung:**

b1) mögliche Vorgehensweise:

$20 = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$

$1 = e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$

$0 = 2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 4{,}\dot{4}\text{ h}$

b2) mögliche Deutung:

$B_1'(t_2)$ gibt die (momentane) Abnahmegeschwindigkeit in Millionen Bakterien pro Stunde zum Zeitpunkt t_2 an.

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:

$B_2''(t) = 5 \cdot (t^2 - 8 \cdot t + 15) \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$

$t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3;\ t_2 = 5$

Es gilt:

$B_2'(3) > 0$

und

$B_2'(5) < 0$

(und $B_2'''(5) \neq 0$)

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ findet die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation statt.

c2) $\frac{B_2(5)}{B_2(4)} = 0{,}60653... \approx 0{,}6065$

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ sind noch ca. 60,65 % der maximalen Anzahl an Bakterien vorhanden.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [4,4 h; 4,5 h]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h" nicht angeführt sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,60; 0,61]

Tee*

Aufgabennummer: 2_097	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, FA 2.1, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.6	

Tee ist weltweit eines der meistkonsumierten Getränke.

Aufgabenstellung:

a) Modellhaft wird angenommen, dass der Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich jedes Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr um den gleichen Prozentsatz steigt.

Unter dieser Annahme gibt die Funktion f den jährlichen Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich ab 2016 in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Jahren, $f(t)$ in Litern).

1) Geben Sie an, um welchen Funktionstyp es sich bei f handelt.

Der jährliche Pro-Kopf-Verbrauch von Tee lag in Österreich im Jahr 2016 bei 33 L. Der Anteil des Tees, der in Österreich im Jahr 2016 mittels Teebeuteln zubereitet wurde, beträgt 95 %.

Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Der Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich steigt seit dem Jahr 2016 jedes Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr um 2 %.
- Der Anteil des Tees, der in Österreich jedes Jahr mittels Teebeuteln zubereitet wird, bleibt gleich.

2) Geben Sie an, wie viele Liter Tee im Jahr 2026 unter den oben angeführten Annahmen pro Kopf in Österreich mittels Teebeuteln zubereitet werden.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

b) Der weltweit größte Teeproduzent ist China. Die nachstehende Tabelle gibt die Menge des in China produzierten Tees in Millionen Tonnen für einige Jahre im Zeitraum von 2011 bis 2017 an.

Jahr	2011	2013	2015	2017
Menge des in China produzierten Tees in Millionen Tonnen	1,55	1,85	2,23	2,55

Quelle: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/29847/umfrage/produktion-von-tee-nach-erzeugerlaendern-seit-2006/ [28.08.2018].

Die Menge des in China produzierten Tees soll in Abhängigkeit von der Zeit t ab dem Jahr 2011 näherungsweise durch eine lineare Funktion g beschrieben werden (t in Jahren ab dem Jahr 2011, $g(t)$ in Millionen Tonnen).

1) Geben Sie unter Verwendung der Daten aus den Jahren 2011 und 2017 eine Funktionsgleichung für g an.

$g(t) =$ ____

In den Jahren 2013 und 2015 gibt es jeweils eine Abweichung zwischen den Funktionswerten von g und den Werten aus der obigen Tabelle.

2) Geben Sie an, in welchem der Jahre 2013 und 2015 der Betrag der absoluten Abweichung zwischen dem Funktionswert von g und dem zugehörigen Wert aus der obigen Tabelle größer ist. Ermitteln Sie für das angegebene Jahr ebenso den Betrag der absoluten Abweichung.

Jahr: ______________________

Betrag der absoluten Abweichung: ______________________ Millionen Tonnen

c) Heißer Tee kühlt bei niedrigerer Umgebungstemperatur ab.

Die Temperatur $T(t)$ des Tees t Minuten nach Beginn des Abkühlungsprozesses kann bei einer Anfangstemperatur T_0 und einer konstanten Umgebungstemperatur T_U durch die nachstehende Funktionsgleichung näherungsweise beschrieben werden.

$T(t) = (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ (t in Minuten, T_U in °C, T_0 in °C, $T(t)$ in °C)

Eine Tasse mit Tee mit der Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C wird in einen Raum mit einer konstanten Umgebungstemperatur von $T_U = 20$ °C gestellt. Der Tee ist nach 10 Minuten auf eine Temperatur von 65 °C abgekühlt.

1) Ermitteln Sie k.

Nehmen Sie an, dass der ermittelte Wert von k sowohl für den Abkühlungsprozess eines Tees mit einer Anfangstemperatur von 90 °C als auch für den Abkühlungsprozess eines anderen Tees mit einer Anfangstemperatur von 70 °C gilt.

2) Geben Sie an, bei welcher Umgebungstemperatur T_U beide Tees in der gleichen Zeit auf die Hälfte des Wertes ihrer jeweiligen Anfangstemperatur (in °C) abkühlen.

$T_U =$ ____________________ °C

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) Exponentialfunktion

a2) $33 \cdot 1{,}02^{10} \cdot 0{,}95 = 38{,}21...$
In Österreich werden im Jahr 2026 pro Kopf ca. 38,2 L Tee mittels Teebeuteln zubereitet.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $g(0) = 1{,}55$, $g(6) = 2{,}55$
$g(t) = \frac{1}{6} \cdot t + 1{,}55$

b2) Jahr: 2013
Betrag der absoluten Abweichung: $0{,}0\dot{3}$ Millionen Tonnen

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:

$$65 = 70 \cdot e^{-k \cdot 10} + 20$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{45}{70}\right)}{-10} = 0{,}0441...$$

$$k \approx 0{,}044 \text{ min}^{-1}$$

c2) mögliche Vorgehensweise:

$$45 = (90 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$$
$$35 = (70 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$$
$$\Rightarrow \quad \frac{45 - T_U}{90 - T_U} = \frac{35 - T_U}{70 - T_U}$$
$$\Rightarrow \quad T_U = 0\ °C$$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Funktionstyps.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „L“ nicht angegeben sein muss.

b1) Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Jahres und der richtigen Lösung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „min^{-1}“ nicht angegeben sein muss.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Überlagerung von Schwingungen*

Aufgabennummer: 2_038	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.1, FA 6.2, FA 6.3, FA 6.4, AN 4.2	

Ein Ton in der Musik kann im einfachsten Fall durch eine Sinusfunktion s mit $s(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Bei einer derartigen Sinusschwingung wird der maximale Funktionswert als Amplitude bezeichnet. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde wird als Frequenz f bezeichnet und in Hertz (Hz) angegeben.
Für die Frequenz f gilt: $f = \frac{1}{T}$ (mit T in Sekunden), wobei T die (kleinste) Periodenlänge der jeweiligen Sinusschwingung ist ($T \in \mathbb{R}^+$).

Drei bestimmte Töne werden mithilfe der nachstehenden Funktionen h_1, h_2 und h_3 beschrieben.
Die Zeit t ($t \geq 0$) wird dabei in Millisekunden (ms) gemessen.

$h_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$
$h_2(t) = \sin(2{,}5 \cdot \pi \cdot t)$
$h_3(t) = \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$

Die Überlagerung mehrerer Töne bezeichnet man als Klang.
Die Funktion h mit $h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$ beschreibt einen Klang.

Der Schalldruck eines Tons ist zeitabhängig und kann durch die Funktion p mit $p(t) = \overline{p} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschrieben werden. Dabei sind $\overline{p}$ und ω Konstanten.
Der Schalldruck wird in der Einheit Pascal (Pa) angegeben.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie für einen Ton, der mithilfe der Funktion g mit $g(t) = \sin(c \cdot \pi \cdot t)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und t in ms beschrieben wird, eine Formel für die Periodenlänge T (in ms) in Abhängigkeit von c an!

Der Effektivwert p_{eff} des Schalldrucks einer Sinusschwingung mit der Periodenlänge T (in ms) kann mit der Formel $p_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t)\,\mathrm{d}t}$ berechnet werden.

Berechnen Sie den Effektivwert des Schalldrucks eines Tons, wenn $\overline{p} = 1$ und $\omega = 2 \cdot \pi$ gilt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

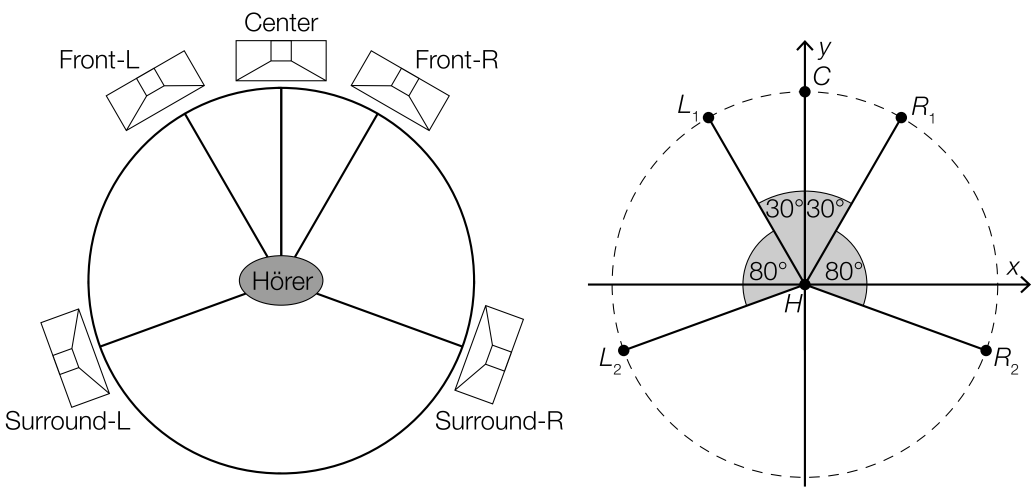
b) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die (kleinste) Periodenlänge T (in ms) der Funktion h an!

Geben Sie die Frequenz f der Funktion h in Hertz an!

c) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die Amplitude der Funktion h und denjenigen Zeitpunkt $t \geq 0$ (in ms) an, zu dem die Amplitude erstmals erreicht wird!

Begründen Sie, warum die Amplitude von h nicht gleich der Summe der drei Amplituden der Funktionen h_1, h_2 und h_3 ist!

d) Für ein angenehmes Raumklangerlebnis (z. B. in einem Heimkino) ist es günstig, wenn die fünf Lautsprecher eines Fünf-Kanal-Tonsystems wie in nachstehender linker Skizze dargestellt angeordnet sind (Ansicht von oben). Vereinfacht kann die Anordnung wie in nachstehender rechter Skizze in einem kartesischen Koordinatensystem (Einheit in Metern) dargestellt werden:



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/5.1 [23.04.2018] (adaptiert).

Jeder der fünf Lautsprecher (C, L_1, L_2, R_1, R_2) ist in diesem Fall 2 m vom Hörer (H) entfernt. Der Punkt H liegt im Koordinatenursprung.

Geben Sie die kartesischen Koordinaten von R_1 an!

Geben Sie die Entfernung zwischen L_2 und R_2 an!

Lösungserwartung

a) $T = \frac{2 \cdot \pi}{c \cdot \pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{c}$

Mögliche Vorgehensweise:

$T = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$

$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{1}\int_0^1 \sin^2(2\pi \cdot t)\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p_{\text{eff}} \approx 0{,}71 \text{ Pa}$

b) $T = 4$ ms

Frequenz von h: $\frac{1}{0{,}004} = 250$ Hz

c) Amplitude von h: ca. 2,9 nach ca. 0,2 ms

Mögliche Begründung:

Die Amplitude von h ist nicht gleich der Summe der Amplituden von h_1, h_2 und h_3, da die drei Funktionen ihre maximalen Funktionswerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreichen.

d) $R_1 = (1\,|\,\sqrt{3})$

Mögliche Vorgehensweise:

$x(R_1) = 2 \cdot \cos(60°) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$y(R_1) = 2 \cdot \sin(60°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Mögliche Vorgehensweise:

Entfernung zwischen L_2 und $R_2 = 2 \cdot x(R_2) = 2 \cdot 2 \cdot \cos(20°) \approx 3{,}76$ m

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Berechnung des richtigen Effektivwerts des Schalldrucks, wobei die Einheit „Pa" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,7 Pa; 0,71 Pa]

b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Periodenlänge von h, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,9 ms; 4,1 ms]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Amplitude und den richtigen Zeitpunkt, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervalle: [2,85; 2,95] bzw. [0,19 ms; 0,21 ms]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung.

d) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von R_1.
Toleranzintervall für die y-Koordinate: [1,7; 1,75]
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Lösung.
Toleranzintervall: [3,7 m; 3,8 m]

Baumhaus

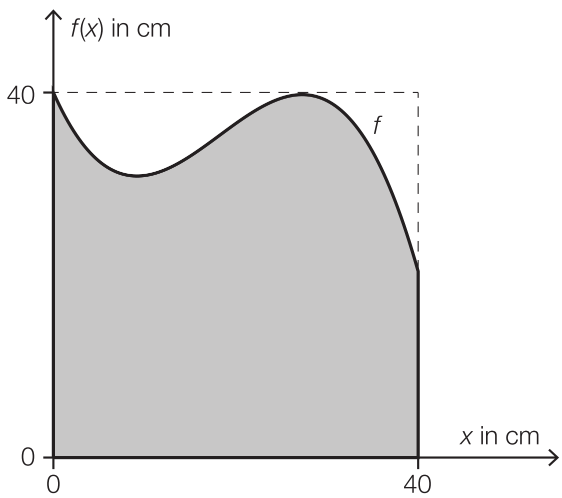
Aufgabennummer: 2_095	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.4, AN 4.2	

Eine Familie plant, ein Baumhaus aus Holz zu errichten. Der Baum dafür steht in einem horizontalen Teil des Gartens.

a) Eine 3,2 m lange Leiter wird angelehnt und reicht dann vom Boden genau bis zum Einstieg ins Baumhaus in einer Höhe von 2,8 m.

1) Berechnen Sie denjenigen Winkel, unter dem die Leiter gegenüber dem horizontalen Boden geneigt ist.

b) Die Fenster des Baumhauses sollen eine spezielle Form haben (siehe grau markierte Fläche in der nachstehenden Abbildung).



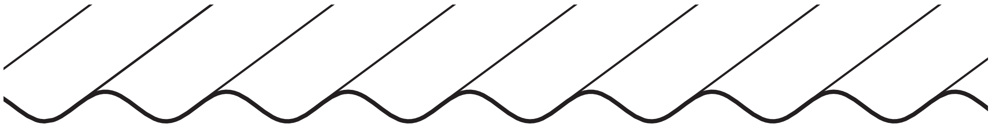
Die obere Begrenzungslinie des Fensters kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion *f* beschrieben werden.

$f(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}164 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 40$ mit $0 \leq x \leq 40$

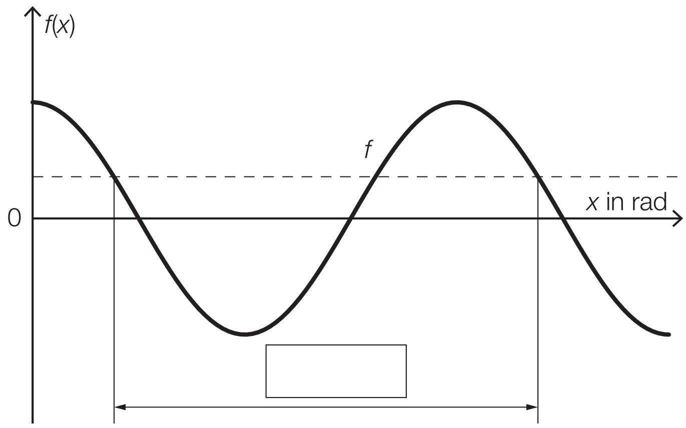
x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Fensterfläche in der dargestellten Form kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm ist.

c) Das Baumhaus wird mit gewellten Kunststoffplatten überdacht.

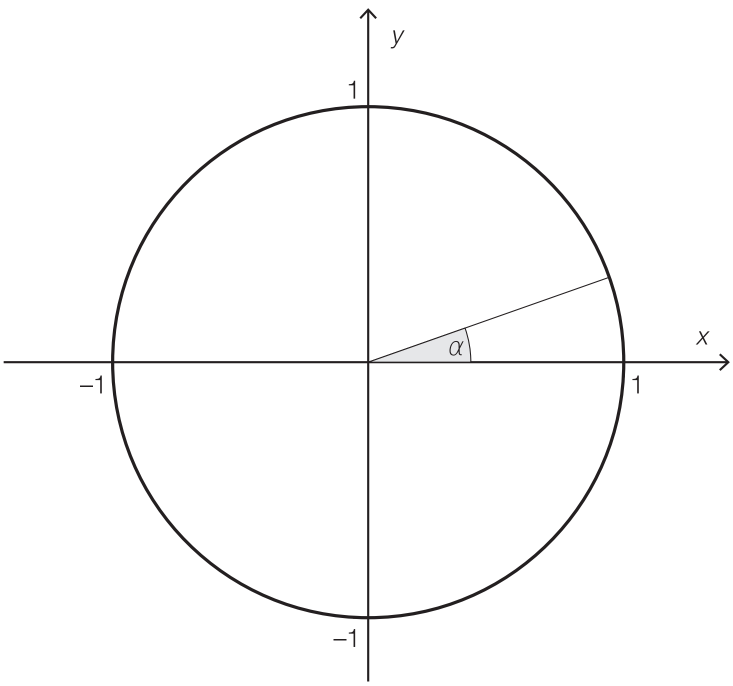


Dem Querschnitt liegt der Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ zugrunde. Dieser ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.



2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel β ein, für den gilt: $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$.

Lösungserwartung

a1) $\arcsin\left(\frac{2{,}8}{3{,}2}\right) = 61{,}0...°$

Der Winkel beträgt rund 61°.

b1) Flächeninhalt zwischen den Achsen und dem Graphen der Funktion in cm²:

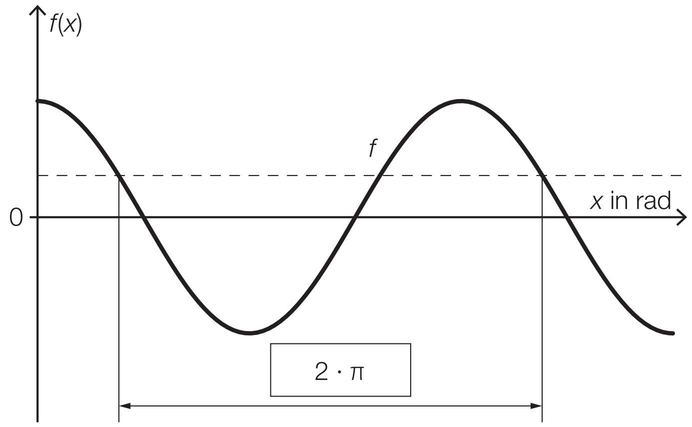
$\int_0^{40} f(x)\,dx = 1\,378{,}66...$

Flächeninhalt des Quadrats in cm²: $A = 1\,600$

prozentueller Unterschied: $\frac{1\,378{,}66... - 1\,600}{1\,600} = -0{,}1383...$

Die Fensterfläche ist um rund 13,8 % kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm.

c1)



c2)