CO_2-Emissionen

Die nachstehende Tabelle zeigt die Höhe der CO_2-Emissionen in Österreich für ausgewählte Jahre.

Jahr	1990	2005	2017	2018
CO_2-Emissionen in Millionen Tonnen	78,5	92,5	82,0	79,0

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Werte der nachstehend angegebenen Größen.

absolute Änderung der CO_2-Emissionen von 2017 auf 2018: ______________ Millionen Tonnen

relative Änderung der CO_2-Emissionen von 1990 auf 2005: ______________

[0 / ½ / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

absolute Änderung der CO_2-Emissionen von 2017 auf 2018: –3 Millionen Tonnen

relative Änderung der CO_2-Emissionen von 1990 auf 2005: 0,178... (= 17,8... %)

Die Angabe des Wertes 3 *für die absolute Änderung ist nicht als richtig zu werten.*

Ein Punkt für das richtige Berechnen beider Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Staffelmarathon

Alljährlich treten Teams zu je vier Personen beim Staffelmarathon in Linz an. Dabei wird in auf vier aufeinanderfolgenden Streckenabschnitten insgesamt ein Marathon (ca. 42,2 km) absolviert.

Ein bestimmtes Team besteht aus den Personen *A*, *B*, *C* und *D*. Die nachstehende Tabelle zeigt die erreichten Laufzeiten in den Jahren 2017 und 2018 für die jeweiligen Streckenabschnitte.

	1. Streckenabschnitt	2. Streckenabschnitt	3. Streckenabschnitt	4. Streckenabschnitt
Jahr	Person *A*	Person *B*	Person *C*	Person *D*
2017	43 min	1 h 4 min	41 min	1 h 8 min
2018	41 min	58 min	42 min	1 h 2 min

Aufgabenstellung:

Geben Sie diejenige Person an, deren Laufzeit sich prozentuell am meisten verändert hat, und berechnen Sie diese prozentuelle Änderung.

Person: __________

prozentuelle Änderung: __________ %

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Person: *B*

prozentuelle Änderung: –9,375 %

Ein halber Punkt für das Angeben der richtigen Person und ein halber Punkt für das richtige Berechnen der prozentuellen Änderung.

Bitcoin

Bitcoin ist eine digitale Kunstwährung. Am 17.12.2017 betrug der Wechselkurs € 16.198,60 pro Bitcoin.
Die nachstehende Tabelle zeigt den Wechselkurs pro Bitcoin im Laufe eines Jahres.

Datum	Wechselkurs pro Bitcoin
17.12.2017	€ 16.198,60
17.03.2018	€ 6.422,98
17.06.2018	€ 5.571,62
17.09.2018	€ 5.362,46
17.12.2018	€ 3.145,20

In einem der dreimonatigen Zeitintervalle ist der Betrag der absoluten Änderung des Wechselkurses am größten.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die relative Änderung des Wechselkurses von Bitcoin in diesem Zeitintervall.

relative Änderung: ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

relative Änderung: –0,6034...   (≈ –60,3 %)

Ein Punkt für das richtige Berechnen der relativen Änderung.

Bevölkerungsentwicklung

In einem bestimmten Land hat die Bevölkerungszahl seit 1960 stark zugenommen.
Mit $B(t)$ wird die Bevölkerungszahl dieses Landes im Jahr t bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie $\frac{B(2017) - B(1960)}{B(1960)} = 3{,}23$ im gegebenen Sachzusammenhang.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

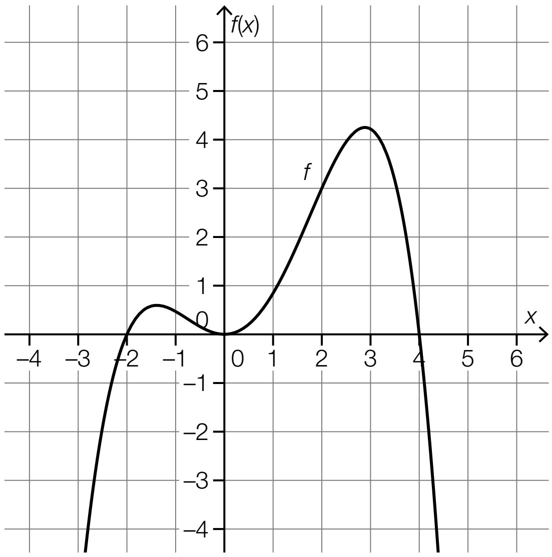
Die Bevölkerungszahl dieses Landes hat im Zeitraum von 1960 bis 2017 um 323 % zugenommen.

Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Grundkompetenz: AN 1.1

Relative Anderung einer Polynomfunktion

Gegeben ist der Graph der Polynomfunktion *f*.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die relative Änderung von *f* im Intervall [2; 4].

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\frac{-3}{3} = -1$

Ein Punkt für das richtige Berechnen der relativen Änderung.
Toleranzintervall: [–1,1; –0,9]

Grundkompetenz: AN 1.1

Körpermasse eines Babys

Die Körpermasse von Babys in den ersten 6 Lebenswochen kann näherungsweise mithilfe der Funktion $G: [0; 6] \to \mathbb{R}$ mit $G(t) = G_0 + 190 \cdot t$ modelliert werden.

t ... Zeit nach der Geburt in Wochen
$G(t)$ ... Körpermasse eines Babys zur Zeit t in g
G_0 ... Körpermasse eines Babys bei der Geburt in g

Nora hat bei ihrer Geburt eine Körpermasse von 3200 g.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie mithilfe der Funktion G die relative Änderung der Körpermasse von Nora von der Geburt bis 6 Wochen nach der Geburt in Prozent.

____________________ %

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

35,625 %

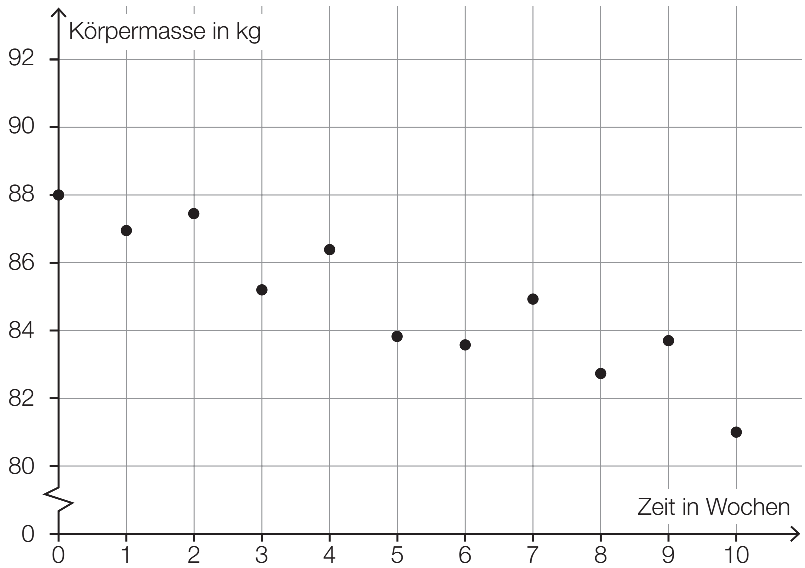
Ein Punkt für das richtige Berechnen der relativen Änderung in %.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Diät*

Aufgabennummer: 1_842	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Hannes machte eine zehnwöchige Diät und notierte dabei am Beginn jeder Woche und am Ende der Diät seine Körpermasse (in kg). Diese Werte sind im nachstehenden Diagramm dargestellt.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die absolute Änderung (in kg) und die relative Änderung (in %) der Körpermasse von Hannes vom Beginn bis zum Ende der zehnwöchigen Diät an.

absolute Änderung: ________________________ kg

relative Änderung: ________________________ %

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

absolute Änderung: –7 kg
relative Änderung: rund –8 %

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert. Das Vorzeichen „–“ muss nicht angegeben sein.
Toleranzintervall für die absolute Änderung: [–7,25 kg; –6,75 kg]
Toleranzintervall für die relative Änderung: [–8,3 %; –7,6 %]

Absolute und relative Änderung einer Funktion*

Aufgabennummer: 1_770	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.1

Die absolute Änderung einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Intervall $[a; b]$ wird mit A bezeichnet, die relative Änderung von f im Intervall $[a; b]$ wird mit R bezeichnet.
Dabei gilt: $f(a) \neq 0$ und $a < b$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen A und R beschreibt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$A = R \cdot f(a)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Kriminalstatistik 2010–2011*

Aufgabennummer: 1_698	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.1

Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viele Kriminalfälle in jedem Bundesland in Österreich in den Jahren 2010 und 2011 angezeigt wurden.

Bundesland	angezeigte Kriminalfälle 2010	angezeigte Kriminalfälle 2011
Burgenland	9306	10391
Kärnten	30192	29710
Niederösterreich	73146	78634
Oberösterreich	66141	67477
Salzburg	29382	30948
Steiermark	55167	55472
Tirol	44185	45944
Vorarlberg	20662	20611
Wien	207564	200820

Quelle: http://www.bmi.gv.at/cms/BK/publikationen/krim_statistik/files/2011/KrimStat_Entwicklung_2011.pdf [24.10.2016].

Aufgabenstellung:

Geben Sie für das Burgenland die relative Änderung der angezeigten Kriminalfälle im Jahr 2011 im Vergleich zum Jahr 2010 an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$\frac{10\,391 - 9\,306}{9\,306} \approx 0{,}117$

Die relative Änderung beträgt ca. 0,117.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Toleranzintervall: [0,11; 0,12] bzw. [11 %; 12 %]

Nächtigungen in österreichischen Jugendherbergen*

Aufgabennummer: 1_674	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.1

Der Wert N_{12} gibt die Anzahl der Nächtigungen in österreichischen Jugendherbergen im Jahr 2012 an, der Wert N_{13} jene im Jahr 2013.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung der Gleichung $\frac{N_{13}}{N_{12}} = 1{,}012$ für die Veränderung der Anzahl der Nächtigungen in österreichischen Jugendherbergen an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Mögliche Deutung:

Im Jahr 2013 gab es um 1,2 % mehr Nächtigungen in österreichischen Jugendherbergen als im Jahr 2012.

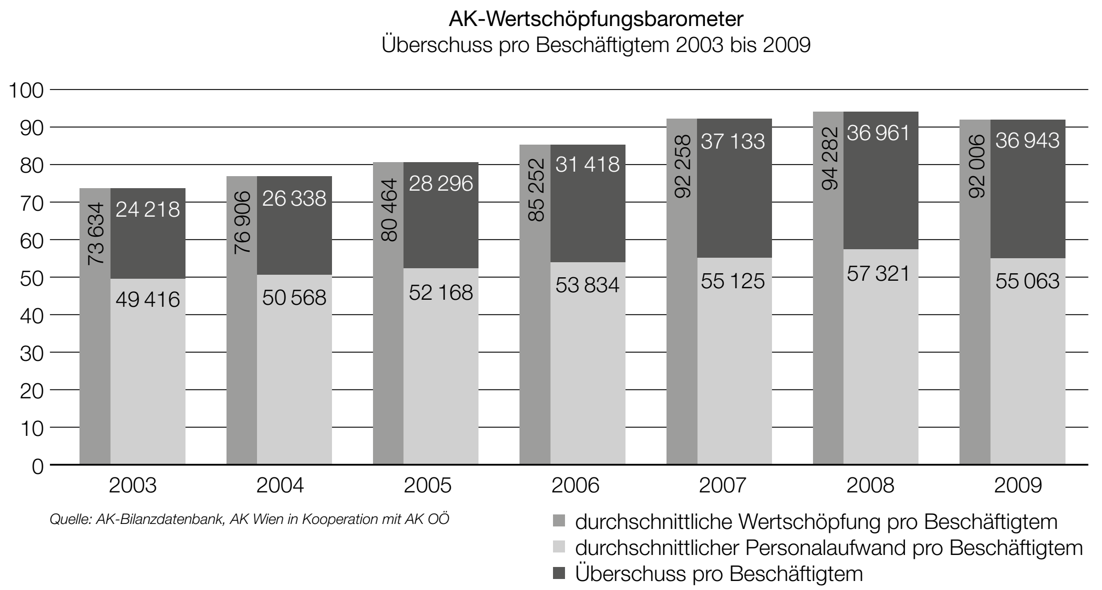
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Deutung. Andere korrekte Deutungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Wertschöpfung*

Aufgabennummer: 1_626	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.1



Datenquelle: Arbeiterkammer Oberösterreich (Hrsg.): *AK Wertschöpfungsbarometer: Trotz Krise: Eigentümer profitierten*, April 2011, S. 3. https://media.arbeiterkammer.at/ooe/betriebsraete/PKU_2011_Wertschoepfungsbarometer.pdf [12.09.2017].

Der AK-Wertschöpfungsbarometer zeigt die Entwicklung desjenigen Wertes auf, den österreichische Mittel- und Großbetriebe im Durchschnitt an jeder Mitarbeiterin/jedem Mitarbeiter pro Jahr verdienen.

Konkret ermittelt wird dabei der Überschuss pro Beschäftigtem, also die Differenz zwischen der durchschnittlichen Wertschöpfung pro Beschäftigtem und dem durchschnittlichen Personalaufwand pro Beschäftigtem.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie für das Jahr 2007 den Anteil dieses Überschusses (in Prozent) gemessen an der Pro-Kopf-Wertschöpfung!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Anteil des Überschusses im Jahr 2007: $\frac{37\,133}{92\,258} \approx 0{,}4025 = 40{,}25\ \%$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [40 %; 41 %] bzw. [0,40; 0,41]

Radioaktiver Zerfall*

Aufgabennummer: 1_602	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AN 1.1

Der Wert $m(t)$ bezeichnet die nach t Tagen vorhandene Menge eines radioaktiven Stoffes.

Aufgabenstellung:

Einer der nachstehend angeführten Ausdrücke beschreibt die relative Änderung der Menge des radioaktiven Stoffes innerhalb der ersten drei Tage.
Kreuzen Sie den zutreffenden Ausdruck an!

$m(3) - m(0)$	☐
$\frac{m(3) - m(0)}{3}$	☐
$\frac{m(0)}{m(3)}$	☐
$\frac{m(3) - m(0)}{m(0)}$	☐
$\frac{m(3) - m(0)}{m(0) - m(3)}$	☐
$m'(3)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

$\frac{m(3) - m(0)}{m(0)}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Ausdruck angekreuzt ist.

Angestelltengehalt*

Aufgabennummer: 1_578	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.1

Das Bruttogehalt eines bestimmten Angestellten betrug im Jahr 2008 monatlich € 2.160.

In den folgenden sechs Jahren ist sein monatliches Bruttogehalt durchschnittlich um € 225 pro Jahr gestiegen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die prozentuelle Änderung des monatlichen Bruttogehalts im gesamten betrachteten Zeitraum von 2008 bis 2014 an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$2\,160 + 6 \cdot 225 = 3\,510$

$\frac{3\,510 - 2\,160}{2\,160} = 0{,}625$

Das Bruttogehalt des Angestellten ist im gesamten betrachteten Zeitraum um 62,5 % gestiegen.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [62 %; 63 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Leistungsverbesserung*

Aufgabennummer: 1_553	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 1.1

Drei Personen A, B und C absolvieren jeweils vor und nach einem Spezialtraining denselben Koordinationstest. In der nachstehenden Tabelle sind die dabei erreichten Punkte angeführt.

	Person A	Person B	Person C
erreichte Punkte vor dem Spezialtraining	5	15	20
erreichte Punkte nach dem Spezialtraining	8	19	35

Gute Leistungen sind durch hohe Punktezahlen gekennzeichnet. Wie aus der Tabelle ersichtlich ist, erreichen alle drei Personen nach dem Spezialtraining mehr Punkte als vorher.

Aufgabenstellung:

Wählen Sie aus den Personen A, B und C die beiden aus, die die nachstehenden Bedingungen erfüllen!

- Bei der ersten Person ist die absolute Änderung der Punktezahl größer als bei der zweiten.
- Bei der zweiten Person ist die relative Änderung der Punktezahl größer als bei der ersten Person.

erste Person: ____________________

zweite Person: ____________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung
erste Person: Person *B* zweite Person: Person *A*

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für die korrekte Auswahl.

Fertilität*

Aufgabennummer: 1_529	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 1.1

Auf der Website der Statistik Austria findet man unter dem Begriff *Fertilität* (Fruchtbarkeit) folgende Information:

„Die Gesamtfertilitätsrate lag 2014 bei 1,46 Kindern je Frau, d. h., dass bei zukünftiger Konstanz der altersspezifischen Fertilitätsraten eine heute 15-jährige Frau in Österreich bis zu ihrem 50. Geburtstag statistisch gesehen 1,46 Kinder zur Welt bringen wird. Dieser Mittelwert liegt damit deutlich unter dem „Bestanderhaltungsniveau" von etwa 2 Kindern pro Frau."

Quelle: http://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bevoelkerung/demographische_indikatoren/index.html [23.02.2016].

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie, um welchen Prozentsatz die für das Jahr 2014 gültige Gesamtfertilitätsrate von 1,46 Kindern je Frau ansteigen müsste, um das „Bestanderhaltungsniveau" zu erreichen!

prozentuelle Zunahme: ____________ %

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

prozentuelle Zunahme: ≈ 36,99 %

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [36 %; 37 %]

Preisänderungen*

Aufgabennummer: 1_409	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 1.1

Ein Fernsehgerät wurde im Jahr 2012 zum Preis P_0 verkauft, das gleiche Gerät wurde im Jahr 2014 zum Preis P_2 verkauft.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Der Term ___①___ gibt die absolute Preisänderung von 2012 auf 2014 an, der Term ___②___ die relative Preisänderung von 2012 auf 2014.

①	
$\frac{P_0}{P_2}$	☐
$P_2 - P_0$	☐
$\frac{P_2 - P_0}{2}$	☐

②	
$\frac{P_2}{P_0}$	☐
$\frac{P_0 - P_2}{2}$	☐
$\frac{P_2 - P_0}{P_0}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

①	
$P_2 - P_0$	☒

②	
$\frac{P_2 - P_0}{P_0}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Elektrische Spannung*	
Aufgabennummer: 1_385	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.1

Die Funktion U beschreibt die elektrische Spannung während eines physikalischen Experiments in Abhängigkeit von der Zeit t ($U(t)$ in Volt, t in Sekunden).

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie den Wert des Terms $\frac{U(t_2) - U(t_1)}{U(t_1)}$ in diesem Zusammenhang!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

Der Term gibt die relative Änderung der Spannung im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ an.

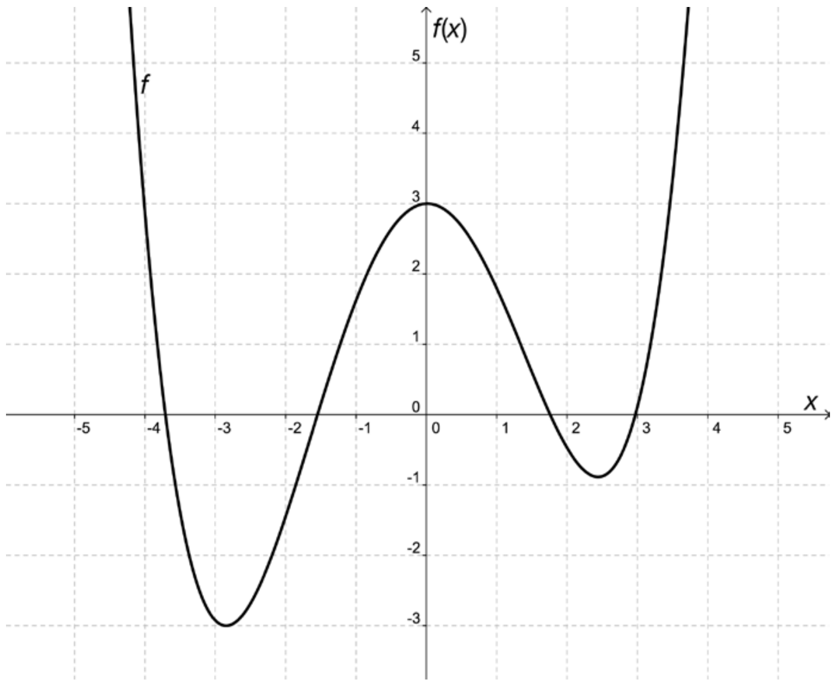
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Differenzenquotient – Differenzialquotient*

Aufgabennummer: 1_361	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.1

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f:



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$\frac{f(3) - f(-3)}{6} = 0$	☐
$\frac{f(3) - f(0)}{3} < 0$	☐
$f'(3) = 0$	☐
$f'(-2) > 0$	☐
$f'(-1) = f'(1)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

$\frac{f(3) - f(0)}{3} < 0$	☒
$f'(-2) > 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Prozente*

Aufgabennummer: 1_337	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.1

Zahlenangaben in Prozent (%) machen Anteile unterschiedlicher Größen vergleichbar.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Peters monatliches Taschengeld wurde von € 80 auf € 100 erhöht. Somit bekommt er jetzt um 20 % mehr als vorher.	☐
Ein Preis ist im Laufe der letzten fünf Jahre um 10 % gestiegen. Das bedeutet in jedem Jahr eine Steigerung von 2 % gegenüber dem Vorjahr.	☐
Wenn die Inflationsrate in den letzten Monaten von 2 % auf 1,5 % gesunken ist, bedeutet das eine relative Abnahme der Inflationsrate um 25 %.	☐
Wenn ein Preis zunächst um 20 % gesenkt und kurze Zeit darauf wieder um 5 % erhöht wurde, dann ist er jetzt um 15 % niedriger als ursprünglich.	☐
Eine Zunahme um 200 % bedeutet eine Steigerung auf das Dreifache.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

Wenn die Inflationsrate in den letzten Monaten von 2 % auf 1,5 % gesunken ist, bedeutet das eine relative Abnahme der Inflationsrate um 25 %.	☒
Eine Zunahme um 200 % bedeutet eine Steigerung auf das Dreifache.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Bewegung eines Radfahrers

Die Polynomfunktion s beschreibt näherungsweise den zurückgelegten Weg eines Radfahrers in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $s(t)$ in km).

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Der Ausdruck $\lim\limits_{t \to 2} \frac{s'(t) - s'(2)}{t - 2}$ beschreibt ___①___ und der Ausdruck $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ beschreibt ___②___.

①	
die momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 2$	☐
die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2$	☐
den bis zum Zeitpunkt $t = 2$ zurückgelegten Weg	☐

②	
die durchschnittliche Beschleunigung im Zeitintervall $[t_1; t_2]$	☐
die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2]$	☐
den im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ zurückgelegten Weg	☐

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

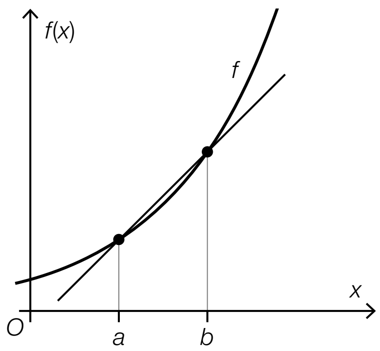
①	
die momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 2$	☒

②	
die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2]$	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

Graph und Sekante

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der differenzierbaren Funktion f sowie die Sekante durch die Punkte $(a\,|\,f(a))$ und $(b\,|\,f(b))$ dargestellt.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Der Ausdruck $\lim\limits_{a \to b} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ist ___①___ und entspricht der ___②___.

①	
der Differenzenquotient im Intervall $[a; b]$	☐
der Differenzialquotient an der Stelle b	☐
die mittlere Änderungsrate im Intervall $[a; b]$	☐

②	
Sekantensteigung im Intervall $[a; b]$	☐
Tangentensteigung in $(a\,|\,f(a))$	☐
Tangentensteigung in $(b\,|\,f(b))$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

①	
der Differenzialquotient an der Stelle b	☒

②	
Tangentensteigung in $(b \mid f(b))$	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Tangentensteigung

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Polynomfunktion vom Grad n mit $n \geq 2$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Grenzwerte an, die jedenfalls gleich der Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle $x = 5$ sind. *[2 aus 5]*

$\lim\limits_{x_1 \to 5} \frac{f(x_1) - f(5)}{5 - x_1}$	☐
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{5 + h}$	☐
$\lim\limits_{h \to 5} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h}$	☐
$\lim\limits_{x_1 \to 5} \frac{f(x_1) - f(5)}{x_1 - 5}$	☐
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h}$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\lim\limits_{x_1 \to 5} \frac{f(x_1) - f(5)}{x_1 - 5}$	☒
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(5 + h) - f(5)}{h}$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Messung der Geschwindigkeit*

Aufgabennummer: 1_818	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.2

Die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t wird durch eine differenzierbare Funktion v modelliert (t in s, $v(t)$ in m/s). Die Messung der Geschwindigkeit $v(t)$ beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

Betrachtet wird der Grenzwert $\lim\limits_{t \to 3} \frac{v(t) - v(3)}{t - 3}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die den betrachteten Grenzwert richtig beschreiben.

Der Grenzwert gibt die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit des Körpers 3 Sekunden nach Beginn der Messung an.	☐
Der Grenzwert gibt die durchschnittliche Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall [0; 3] an.	☐
Der Grenzwert gibt die momentane Beschleunigung des Körpers 3 Sekunden nach Beginn der Messung an.	☐
Der Grenzwert gibt die relative Änderung der Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall [0; 3] an.	☐
Der Grenzwert gibt den vom Körper in den ersten 3 Sekunden zurückgelegten Weg an.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

Der Grenzwert gibt die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit des Körpers 3 Sekunden nach Beginn der Messung an.	☒
Der Grenzwert gibt die momentane Beschleunigung des Körpers 3 Sekunden nach Beginn der Messung an.	☒

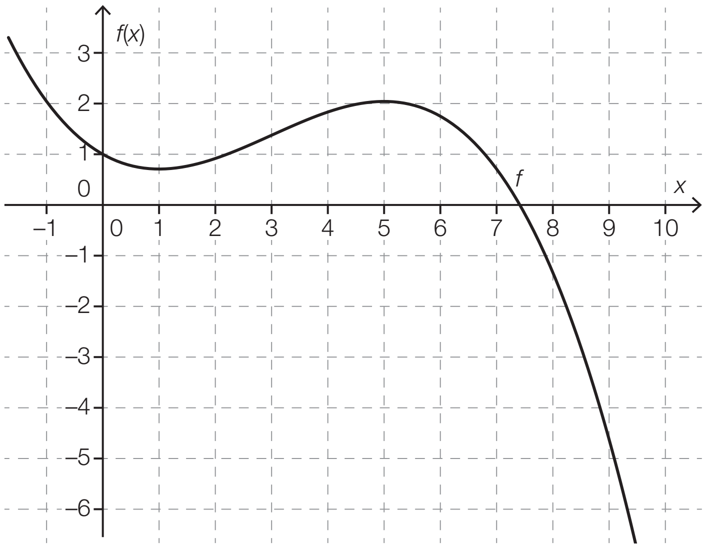
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Differenzenquotient und Differenzialquotient*

Aufgabennummer: 1_794	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.2

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades f dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Im Intervall (0; 2) gibt es eine Stelle a, sodass gilt: $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(0)$	☐
Im Intervall (4; 6) gibt es eine Stelle a, sodass gilt: $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = f'(0)$	☐
Für alle $a \in (0; 1)$ gilt: Je kleiner a ist, desto weniger unterscheidet sich $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0}$ von $f'(0)$.	☐
Für alle $a \in (2; 5)$ gilt: Je größer a ist, desto weniger unterscheidet sich $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0}$ von $f'(0)$.	☐
Für alle $a \in (2; 3)$ gilt: $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} > f'(0)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

Für alle $a \in (0; 1)$ gilt: Je kleiner a ist, desto weniger unterscheidet sich $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0}$ von $f'(0)$.	☒
Für alle $a \in (2; 3)$ gilt: $\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} > f'(0)$	☒

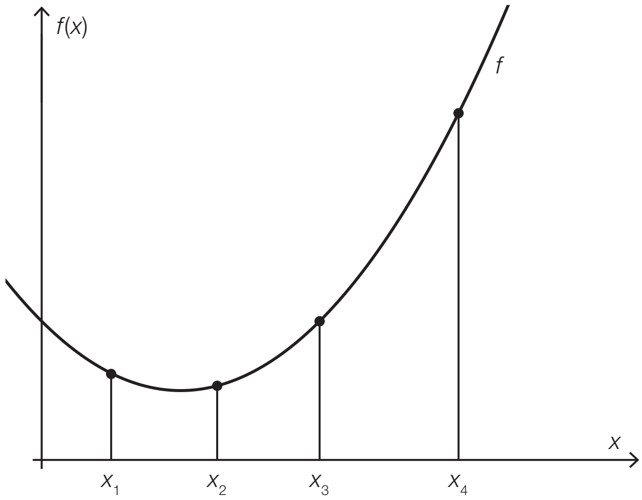
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Differenzenquotient und Differenzialquotient*

Aufgabennummer: 1_746	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.2

Nachstehend ist der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades abgebildet. Zusätzlich sind vier Punkte auf dem Graphen mit den x-Koordinaten x_1, x_2, x_3 und x_4 eingezeichnet.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden auf die Funktion f zutreffenden Aussagen an.

Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_2]$ ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_1.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_3]$ ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_3.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_4]$ ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_2.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_2; x_4]$ ist größer als der Differenzialquotient an der Stelle x_2.	☐
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_3; x_4]$ ist größer als der Differenzialquotient an der Stelle x_4.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_1; x_3]$ ist kleiner als der Differenzialquotient an der Stelle x_3.	☒
Der Differenzenquotient für das Intervall $[x_2; x_4]$ ist größer als der Differenzialquotient an der Stelle x_2.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wasserstand eines Flusses*

Aufgabennummer: 1_650	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.2

Die Funktion $W: [0; 24] \to \mathbb{R}_0^+$ ordnet jedem Zeitpunkt t den Wasserstand $W(t)$ eines Flusses an einer bestimmten Messstelle zu. Dabei wird t in Stunden und $W(t)$ in Metern angegeben.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie den nachstehenden Ausdruck im Hinblick auf den Wasserstand $W(t)$ des Flusses!

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{W(6 + \Delta t) - W(6)}{\Delta t}$$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

Mögliche Interpretation:

Der Ausdruck beschreibt die momentane Änderungsrate (in m/h) des Wasserstands $W(t)$ zum Zeitpunkt $t = 6$ an dieser Messstelle des Flusses.

Lösungsschlüssel

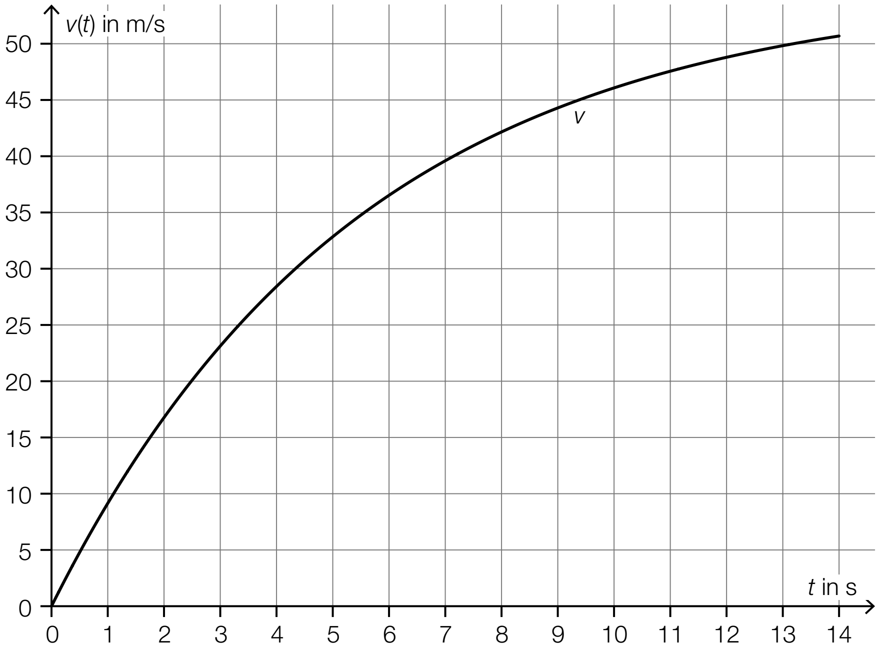
Ein Punkt für eine korrekte Interpretation, wobei die Einheit „m/h“ nicht angeführt sein muss.

Fallschirmsprung

Die Geschwindigkeit einer Fallschirmspringerin bei einem bestimmten Fallschirmsprung in Abhängigkeit von der Zeit t lässt sich für das Intervall [0; 14] durch die differenzierbare Funktion v modellieren (t in s, $v(t)$ in m/s). Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen von v.

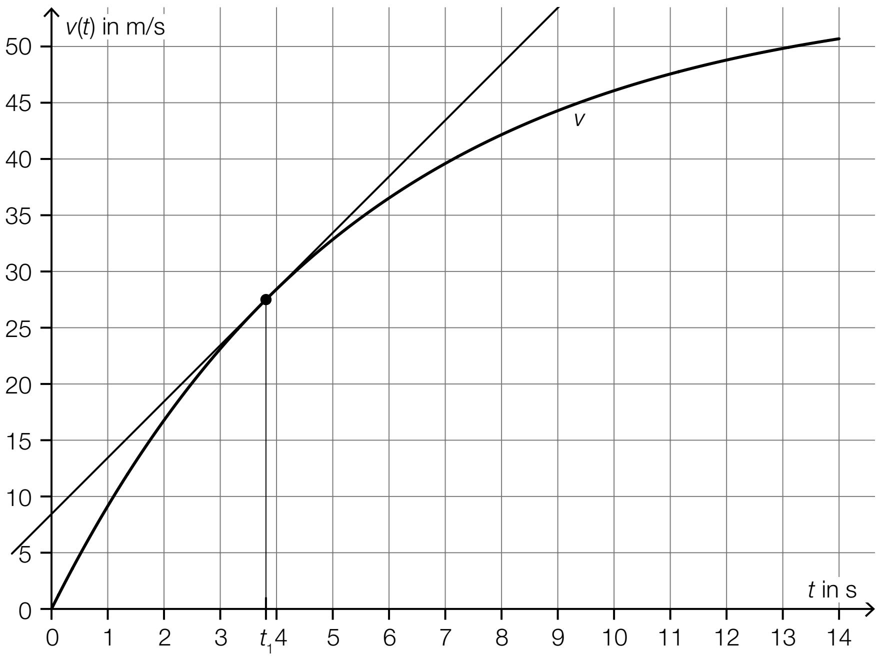
Aufgabenstellung:

Kennzeichnen Sie in der Abbildung den Zeitpunkt t_1, zu dem die Beschleunigung der Fallschirmspringerin 5 m/s^2 beträgt.



[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg



Toleranzbereich: [3,0; 4,5]

Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Zeitpunkts t_1, wobei auch das Kennzeichnen des richtigen Punktes auf dem Graphen von v als richtig zu werten ist.

Luftdruck

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Seehöhe ab.

Die Funktion $p: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ beschreibt modellhaft den Luftdruck p in Abhängigkeit von der Seehöhe h (h in m, $p(h)$ in Hektopascal (hPa)).
Es gilt: $h_1 = 300$ m und $h_2 = 500$ m

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{p(h_2) - p(h_1)}{h_2 - h_1}$ im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Der Ausdruck beschreibt die durchschnittliche Änderung des Luftdrucks in hPa/m bei einer Änderung der Seehöhe von 300 m auf 500 m.

Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Grundkompetenz: AN 1.3

Mittlere Geschwindigkeit

Die Bewegung eines bestimmten Körpers wird durch die Zeit-Weg-Funktion s mit $s(t) = d \cdot t^2$ modelliert (t in s, $s(t)$ in m).
Die mittlere Geschwindigkeit dieses Körpers im Zeitintervall [0 s; 2 s] beträgt 10 m/s.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie d.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$\frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = 10$$

$$\frac{d \cdot 4}{2} = 10$$

$$d = 5$$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln von d.

Grundkompetenz: AN 1.3

Radfahrerin

Die differenzierbare Funktion $v: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, t \mapsto v(t)$ beschreibt modellhaft die Geschwindigkeit einer Radfahrerin auf ihrer Fahrt zur Schule in Abhängigkeit von der Zeit (t in s, $v(t)$ in m/s).

Für alle $t \in [0; 6]$ gilt: $v'(t) > 0$

Aufgabenstellung:

Beschreiben Sie die Bedeutung der angegebenen Ungleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Geschwindigkeit der Radfahrerin nimmt (zu jedem Zeitpunkt) im Zeitintervall [0; 6] zu.

oder:

Die Beschleunigung/momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit der Radfahrerin ist (zu jedem Zeitpunkt) im Zeitintervall [0; 6] positiv.

Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung im gegebenen Sachzusammenhang.

Grundkompetenz: AN 1.3

Treibstoffverbrauch

Die Funktion V beschreibt die Treibstoffmenge im Tank eines Autos in Abhängigkeit von der zurückgelegten Wegstrecke x. Nach x Kilometern Fahrt befinden sich $V(x)$ Liter Treibstoff im Tank.

Das Auto hat eine Wegstrecke von 180 km ohne Tanken zurückgelegt.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie unter Verwendung der Funktion V einen Term zur Berechnung des mittleren Treibstoffverbrauchs (in Litern pro Kilometer) für diese Wegstrecke auf.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$\frac{V(0) - V(180)}{180}$$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen des Terms.

Grundkompetenz: AN 1.3

Rückgang einer Population

Die Anzahl $f(t)$ der Individuen einer Population wird während eines Beobachtungszeitraums von 100 Wochen durch eine Funktion f modelliert. Die Zeit t wird dabei in Wochen angegeben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die die Beziehung $\frac{f(100) - f(0)}{100} = -35$ im gegebenen Sachzusammenhang auf jeden Fall richtig beschreibt. *[1 aus 6]*

Die Anzahl der Individuen ist im Beobachtungszeitraum pro Woche um 35 gesunken.	☐
Zu Beginn des Beobachtungszeitraums waren um 35 % mehr Individuen als am Ende dieses Zeitraums vorhanden.	☐
Die Anzahl der Individuen ist im Beobachtungszeitraum pro Woche um durchschnittlich 35 gesunken.	☐
Die Anzahl der Individuen ist im Beobachtungszeitraum auf 35 % des Anfangsbestands gesunken.	☐
Die Anzahl der Individuen ist im Beobachtungszeitraum pro Woche um 35 % gesunken.	☐
Die Anzahl der Individuen ist im Beobachtungszeitraum um insgesamt 35 gesunken.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Anzahl der Individuen ist im Beobachtungszeitraum pro Woche um durchschnittlich 35 gesunken.	☒

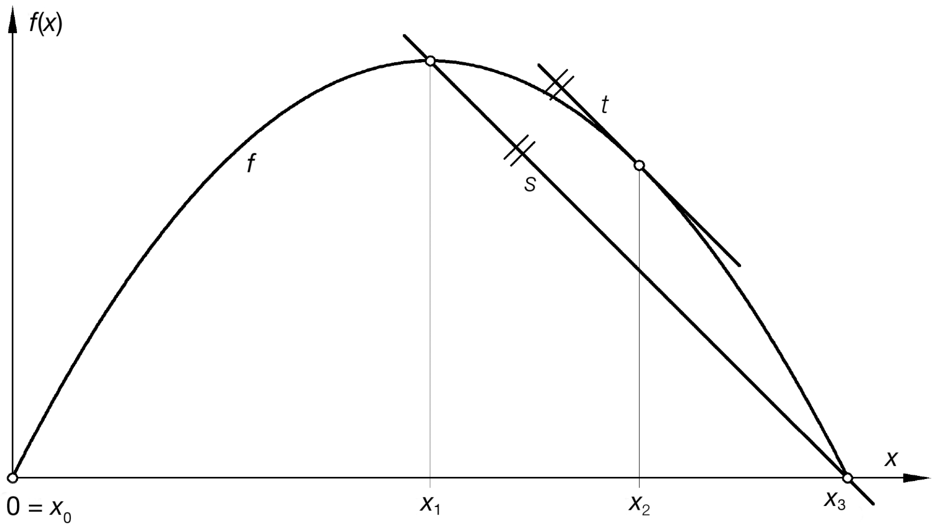
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Differenzen- und Differenzialquotient*

Aufgabennummer: 1_433	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.3

Gegeben ist eine Polynomfunktion f zweiten Grades. In der nachstehenden Abbildung sind der Graph dieser Funktion im Intervall $[0; x_3]$ sowie eine Sekante s und eine Tangente t dargestellt. Die Stellen x_0 und x_3 sind Nullstellen, x_1 ist eine lokale Extremstelle von f. Weiters ist die Tangente t im Punkt $(x_2|f(x_2))$ parallel zur eingezeichneten Sekante s.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen sind für die in der Abbildung dargestellte Funktion f richtig? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$f'(x_0) = f'(x_3)$	☐
$f'(x_1) = 0$	☐
$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(x_2)$	☐
$f'(x_0) = 0$	☐
$\frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3} > 0$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

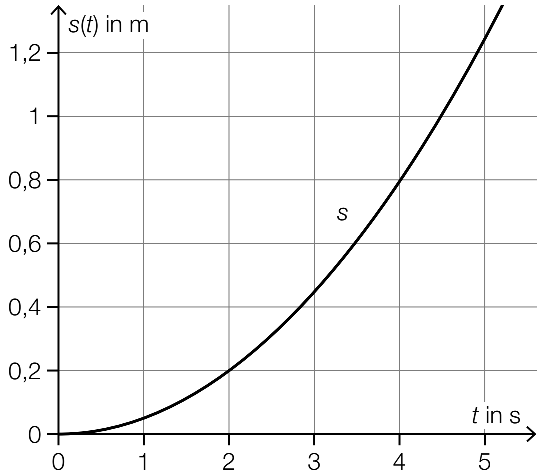
$f'(x_1) = 0$	☒
$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(x_2)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Mittlere Geschwindigkeit

Gegeben ist der Graph der Zeit-Weg-Funktion s eines bewegten Körpers. Die Zeit t wird in Sekunden und der Weg $s(t)$ in Metern angegeben.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_1 so, dass die mittlere Geschwindigkeit des Körpers in den Intervallen [0; 4] und [1; t_1] jeweils gleich hoch ist.

t_1 = ____________________ Sekunden

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

t_1 = 3 Sekunden

Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.
Toleranzintervall für t_1: [2,8 s; 3,2 s]

Intervallgrenze

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -x^2 + 3 \cdot x + 2$.

Im Intervall $[0; b]$ (mit $b > 0$) ist die mittlere Änderungsrate von f gleich null.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Intervallgrenze b.

b = ____

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$b = 3$

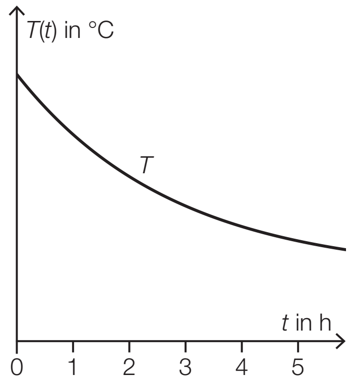
Ein Punkt für das richtige Ermitteln von b.

Abkühlung*

Aufgabennummer: 1_866	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Die differenzierbare Funktion T ordnet der Zeit $t \geq 0$ die Temperatur $T(t)$ eines Körpers zu (t in h, $T(t)$ in °C).

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen dieser Funktion T.



Es gilt: $T'(1) = -15$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Zum Zeitpunkt $t = 2$ ist die momentane Änderungsrate der Temperatur des Körpers kleiner als –15 °C/h.	☐
Die Temperatur des Körpers ist eine Stunde nach Beginn des Abkühlungsprozesses um 15 °C niedriger als zum Zeitpunkt $t = 0$.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt die momentane Änderungsrate der Temperatur des Körpers –15 °C/h.	☐
Es gilt: $\frac{T(3) - T(1)}{2} > -15$.	☐
Im Verlauf der ersten Stunde beträgt die durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers 15 °C/h.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

Zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt die momentane Änderungsrate der Temperatur des Körpers –15 °C/h.	☒
Es gilt: $\frac{T(3) - T(1)}{2} > -15$.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

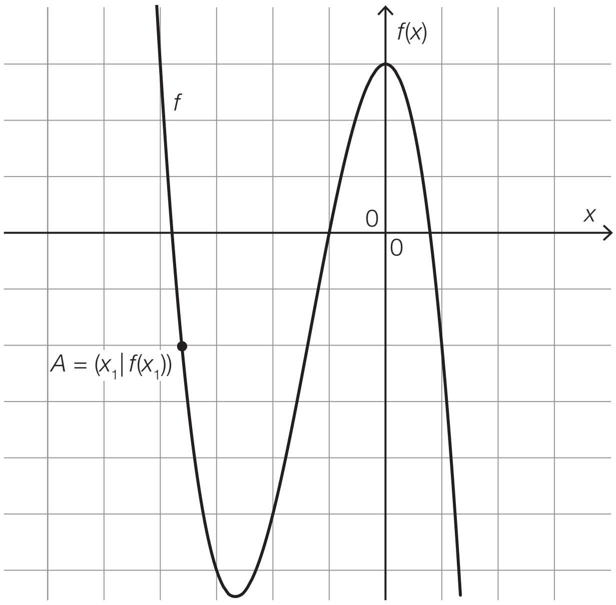
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Änderungsraten einer Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_843	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	

Änderungsraten einer Polynomfunktion

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph der Polynomfunktion f und der Punkt $A = (x_1 | f(x_1))$ des Graphen von f dargestellt.



Für eine Stelle x_2 in der obigen Abbildung mit $x_2 > x_1$ gelten folgende Bedingungen:

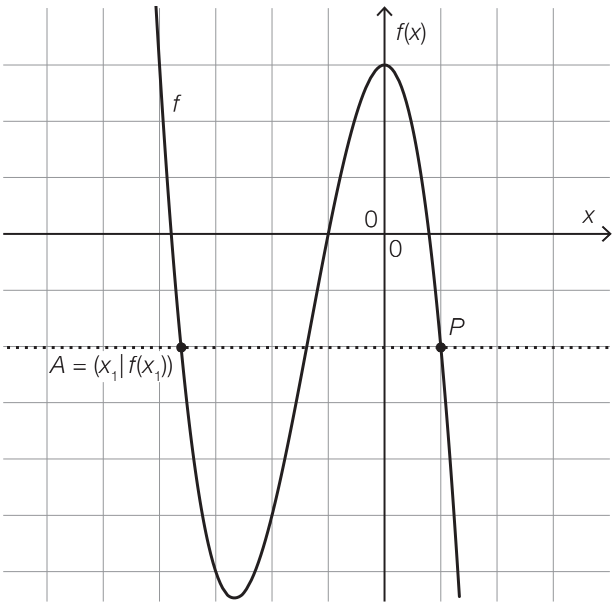
- Der Differenzialquotient von f an der Stelle x_2 ist negativ.
- Der Differenzenquotient von f im Intervall $[x_1; x_2]$ ist null.

Aufgabenstellung:

Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Punkt $P = (x_2 | f(x_2))$, bei dem beide oben genannten Bedingungen erfüllt sind.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

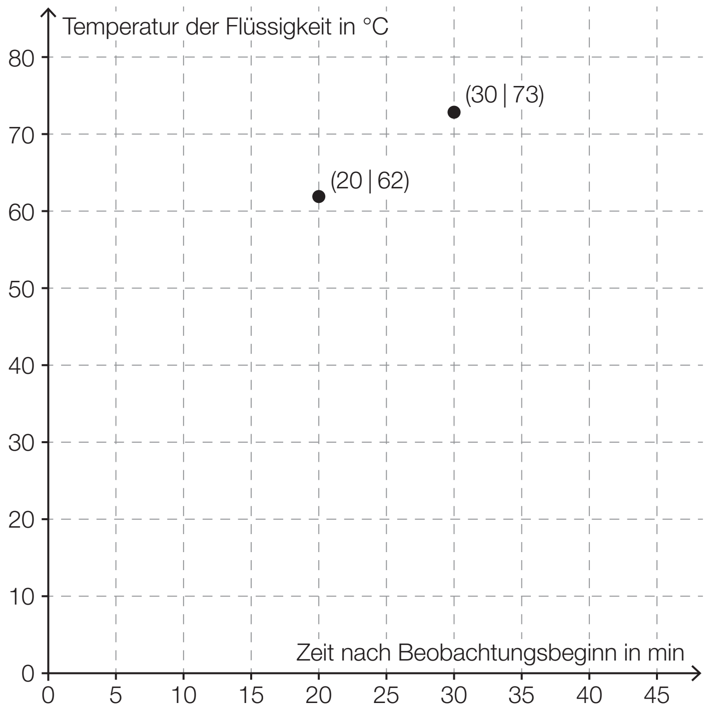
Ein Punkt für das Kennzeichnen des richtigen Punktes *P*. Das Kennzeichnen der Stelle x_2 ist ebenso als richtig zu werten.

Grundkompetenz: AN 1.3

Experiment*

Aufgabennummer: 1_819	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Bei einem Experiment wurde die Temperatur einer bestimmten Flüssigkeit (in °C) zu verschiedenen Zeitpunkten gemessen.
Die nachstehende Abbildung zeigt das jeweilige Messergebnis 20 min bzw. 30 min nach Beobachtungsbeginn.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur der Flüssigkeit im Zeitintervall [20 min; 30 min].

mittlere Änderungsrate: ____________________ °C/min

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

mittlere Änderungsrate: 1,1 °C/min

Lösungsschlüssel

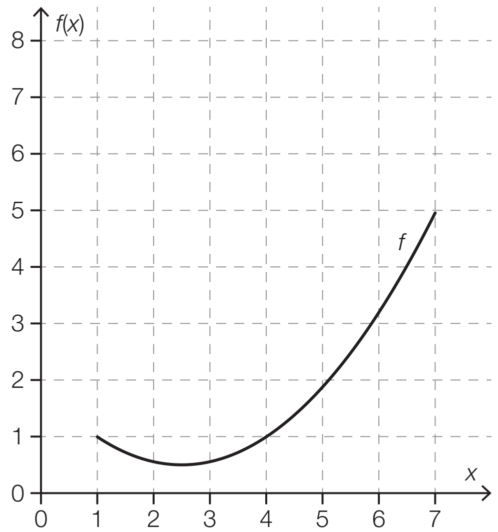
Ein Punkt für die richtige Lösung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Änderungsraten*

Aufgabennummer: 1_795	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 1.3

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f im Intervall $[1; 7]$ dargestellt.

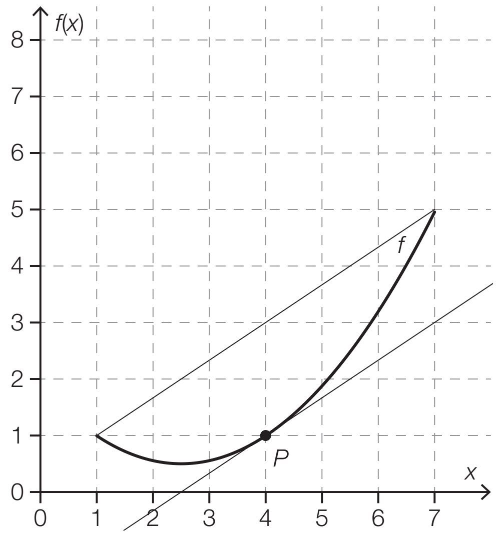


Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Punkt P des Graphen von f ein, in dem für die Funktion f der Differenzialquotient dem Differenzenquotienten im Intervall $[1; 7]$ entspricht.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung



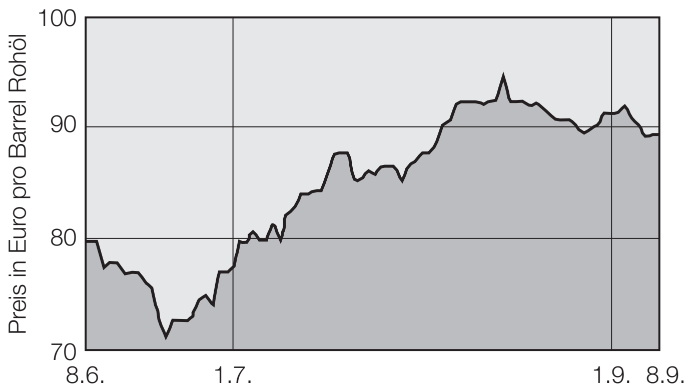
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Ergänzung von P, wobei P ein Punkt auf dem Graphen von f und die x-Koordinate von P im Intervall [3,5; 4,5] sein muss.

Ölpreis*

Aufgabennummer: 1_771	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Die nachstehende Grafik zeigt die Preisentwicklung für Rohöl im Zeitraum vom 8.6.2012 bis 8.9.2012.



Datenquelle: http://www.heizoel24.at/charts/rohoel [14.12.2012] (adaptiert).

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate für den Preis pro Barrel Rohöl pro Monat im Zeitraum vom 1.7.2012 bis 1.9.2012.

mittlere Änderungsrate: ______________________ Euro pro Barrel Rohöl pro Monat

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

mittlere Änderungsrate: 7 Euro pro Barrel Rohöl pro Monat

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [6; 8]

Bewegung*

Aufgabennummer: 1_747	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Ein Körper startet seine geradlinige Bewegung zum Zeitpunkt $t = 0$.
Die Funktion v ordnet jedem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v(t)$ des Körpers zum Zeitpunkt t zu (t in s, $v(t)$ in m/s).

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Gleichung $v'(3) = 1$ im gegebenen Kontext unter Verwendung der entsprechenden Einheit.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

mögliche Interpretation:

Zum Zeitpunkt $t = 3$ beträgt die Beschleunigung des Körpers 1 m/s².

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Interpretation unter Verwendung der richtigen Einheit.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Differenzenquotient*

Aufgabennummer: 1_722	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Der Graph einer Funktion f verläuft durch die Punkte $P = (-1 \mid 2)$ und $Q = (3 \mid f(3))$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie $f(3)$ so, dass der Differenzenquotient von f im Intervall $[-1; 3]$ den Wert 1 hat.

$f(3) =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$f(3) = 6$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

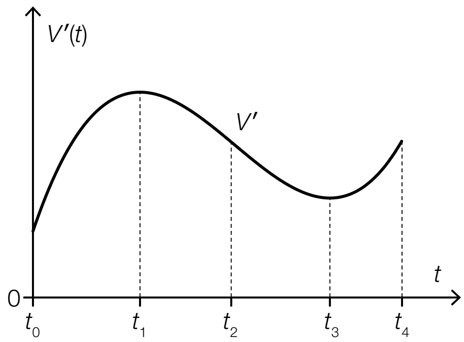
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Veränderung eines Flüssigkeitsvolumens*

Aufgabennummer: 1_675	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.3

Das in einem Gefäß enthaltene Flüssigkeitsvolumen V ändert sich im Laufe der Zeit t im Zeitintervall $[t_0; t_4]$.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion V', die die momentane Änderungsrate des im Gefäß enthaltenen Flüssigkeitsvolumens in diesem Zeitintervall angibt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß nimmt im Zeitintervall $[t_1; t_3]$ ab.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt t_2 kleiner als zum Zeitpunkt t_3.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß weist zum Zeitpunkt t_3 die niedrigste momentane Änderungsrate auf.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt t_4 am größten.	☐
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zu den Zeitpunkten t_2 und t_4 gleich groß.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt t_2 kleiner als zum Zeitpunkt t_3.	☒
Das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß ist zum Zeitpunkt t_4 am größten.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Mittlere Änderungsrate*

Aufgabennummer: 1_651	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Von einer Funktion f ist die folgende Wertetabelle gegeben:

x	$f(x)$
–3	42
–2	24
–1	10
0	0
1	–6
2	–8
3	–6
4	0
5	10
6	24

Aufgabenstellung:

Die mittlere Änderungsrate der Funktion f ist im Intervall $[-1; b]$ für genau ein $b \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ gleich null.
Geben Sie b an!

$b =$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

$b = 5$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Abkühlungsprozess*

Aufgabennummer: 1_627	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Eine Flüssigkeit wird abgekühlt. Die Funktion T beschreibt modellhaft den Temperaturverlauf. Dabei gibt $T(t)$ die Temperatur der Flüssigkeit zum Zeitpunkt $t \geq 0$ an ($T(t)$ in °C, t in Minuten). Der Abkühlungsprozess startet zum Zeitpunkt $t = 0$.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Gleichung $T'(20) = -0{,}97$ im gegebenen Kontext unter Angabe der korrekten Einheiten!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Mögliche Interpretation:

Die momentane Abnahme der Temperatur der Flüssigkeit beträgt 20 Minuten nach dem Start des Abkühlungsprozesses 0,97 °C pro Minute.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Interpretation unter Angabe der korrekten Einheiten.

Schwimmbad*

Aufgabennummer: 1_579	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

In ein Schwimmbad wird ab dem Zeitpunkt $t = 0$ Wasser eingelassen.

Die Funktion h beschreibt die Höhe des Wasserspiegels zum Zeitpunkt t. Die Höhe $h(t)$ wird dabei in dm gemessen, die Zeit t in Stunden.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie das Ergebnis der folgenden Berechnung im gegebenen Kontext!

$$\frac{h(5) - h(2)}{5 - 2} = 4$$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

Die Wasserhöhe nimmt im Zeitintervall [2; 5] um durchschnittlich 4 dm pro Stunde zu.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Finanzschulden*

Aufgabennummer: 1_552	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Die Finanzschulden Österreichs haben im Zeitraum 2000 bis 2010 zugenommen. Im Jahr 2000 betrugen die Finanzschulden Österreichs F_0, zehn Jahre später betrugen sie F_1 (jeweils in Milliarden Euro).

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie den Ausdruck $\frac{F_1 - F_0}{10}$ im Hinblick auf die Entwicklung der Finanzschulden Österreichs!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

Der Ausdruck beschreibt die durchschnittliche jährliche Zunahme (durchschnittliche jährliche Änderung) der Finanzschulden Österreichs (in Milliarden Euro im angegebenen Zeitraum).

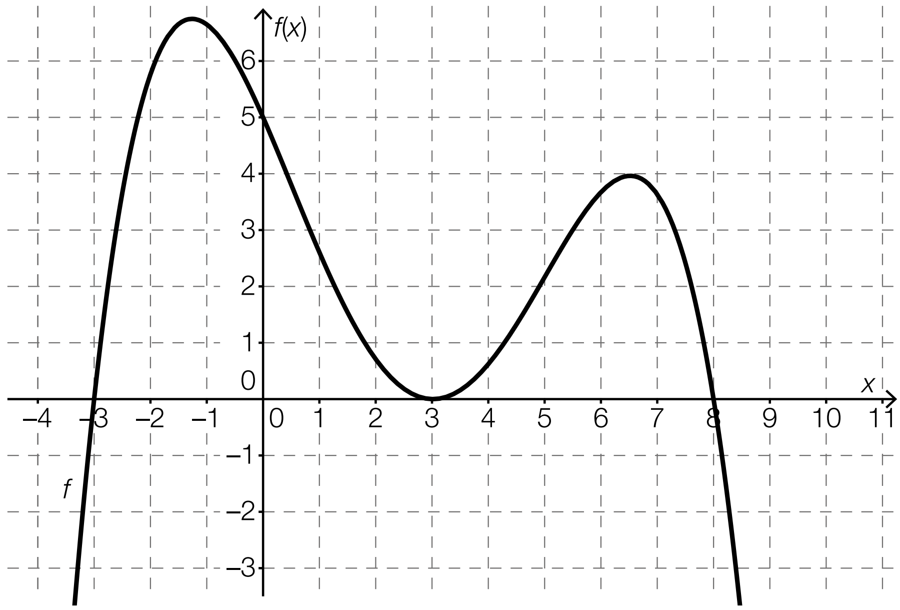
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Änderungsraten einer Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_528	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.3

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion *f*.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Der Differenzialquotient an der Stelle $x = 6$ ist größer als der Differenzialquotient an der Stelle $x = -3$.	☐
Der Differenzialquotient an der Stelle $x = 1$ ist negativ.	☐
Der Differenzenquotient im Intervall $[-3; 0]$ ist 1.	☐
Die mittlere Änderungsrate ist in keinem Intervall gleich 0.	☐
Der Differenzenquotient im Intervall $[3; 6]$ ist positiv.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

Der Differenzialquotient an der Stelle $x = 1$ ist negativ.	☒
Der Differenzenquotient im Intervall [3; 6] ist positiv.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aktienkurs*

Aufgabennummer: 1_505	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ wird der Kurs einer Aktie (in Euro) beobachtet und dokumentiert. $A(t)$ beschreibt den Kurs der Aktie nach t Tagen.

Aufgabenstellung:

Es wird folgender Wert berechnet:

$$\frac{A(10) - A(0)}{10} = 2$$

Geben Sie an, was dieser Wert im Hinblick auf die Entwicklung des Aktienkurses aussagt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Der Kurs der Aktie ist in den (ersten) 10 Tagen um durchschnittlich 2 Euro pro Tag gestiegen.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Mittlere Änderungsrate interpretieren*

Aufgabennummer: 1_481	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 1.3

Gegeben ist eine Polynomfunktion f dritten Grades. Die mittlere Änderungsrate von f hat im Intervall $[x_1; x_2]$ den Wert 5.

Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Aussagen können über die Funktion f sicher getroffen werden? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es mindestens eine Stelle x mit $f(x) = 5$.	☐
$f(x_2) > f(x_1)$	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[x_1; x_2]$ monoton steigend.	☐
$f'(x) = 5$ für alle $x \in [x_1; x_2]$	☐
$f(x_2) - f(x_1) = 5 \cdot (x_2 - x_1)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

$f(x_2) > f(x_1)$	☒
$f(x_2) - f(x_1) = 5 \cdot (x_2 - x_1)$	☒

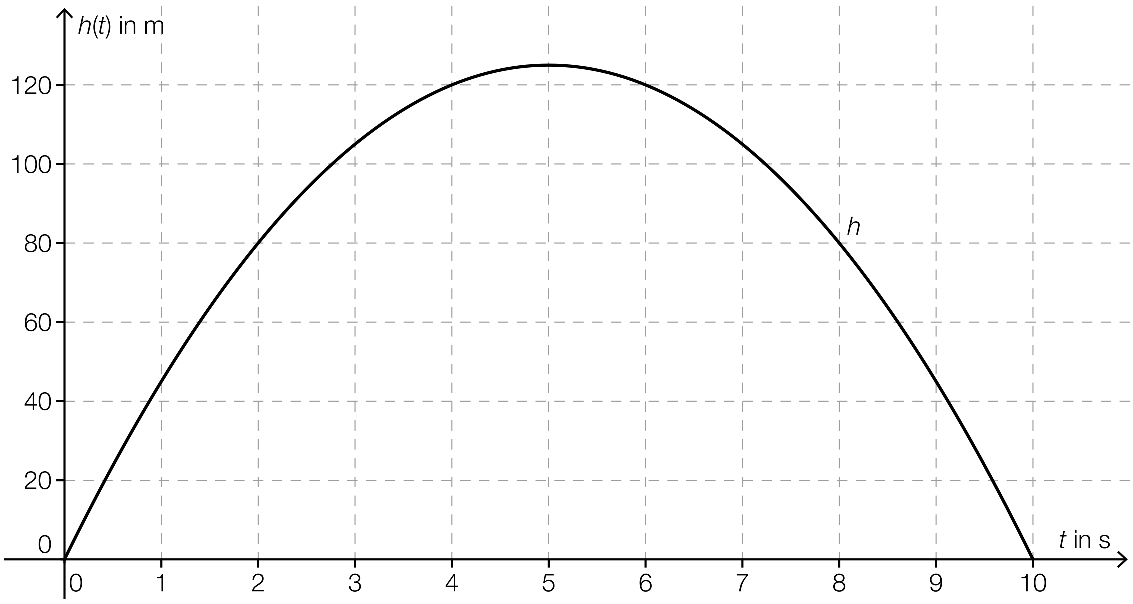
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Mittlere Geschwindigkeit*

Aufgabennummer: 1_457	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Die Funktion h, deren Graph in der nachstehenden Abbildung dargestellt ist, beschreibt näherungsweise die Höhe $h(t)$ eines senkrecht nach oben geschossenen Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden, $h(t)$ in Metern).



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie anhand des Graphen die mittlere Geschwindigkeit des Körpers in Metern pro Sekunde im Zeitintervall [2 s; 4 s]!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

Die mittlere Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall [2 s; 4 s] beträgt ca. 20 m/s.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [19 m/s; 21 m/s]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Mittlere Änderungsrate der Temperatur*

Aufgabennummer: 1_408	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Ein bestimmter Temperaturverlauf wird modellhaft durch eine Funktion T beschrieben.
Die Funktion T: $[0; 60] \to \mathbb{R}$ ordnet jedem Zeitpunkt t eine Temperatur $T(t)$ zu. Dabei wird t in Minuten und $T(t)$ in Grad Celsius angegeben.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie die mittlere Änderungsrate D der Temperatur im Zeitintervall [20; 30] durch einen Term dar!

D = ____ °C/min

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

$D = \frac{T(30) - T(20)}{10}$ °C/min

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Angabe des Terms. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten. Die Angabe des Terms nur in allgemeiner Form wie z. B. $\frac{T(b) - T(a)}{b - a}$ genügt nicht.

Freier Fall*

Aufgabennummer: 1_384	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Der Weg, den ein Stein im freien Fall zurücklegt, kann näherungsweise durch den funktionalen Zusammenhang $s(t) = 5 \cdot t^2$ beschrieben werden. Dabei wird die Fallzeit t in Sekunden und der in dieser Zeit zurückgelegte Weg $s(t)$ in Metern gemessen.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Geschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s), die der Stein nach einer Fallzeit von $t = 2$ Sekunden hat!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$s'(t) = v(t) = 10 \cdot t$
$v(2) = 20$ m/s

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Die Angabe der Einheit ist dabei nicht erforderlich.

Beschleunigungsfunktion bestimmen*

Aufgabennummer: 1_360	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Der Weg $s(t)$, den ein Körper in der Zeit t zurücklegt, wird in einem bestimmten Zeitintervall durch

$$s(t) = \frac{t^3}{6} + 5 \cdot t^2 + 5 \cdot t$$

beschrieben ($s(t)$ in Metern, t in Sekunden).

Aufgabenstellung:

Geben Sie diejenige Funktion a an, die die Beschleunigung dieses Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt!

$a(t) =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

$a(t) = t + 10$

Lösungsschlüssel

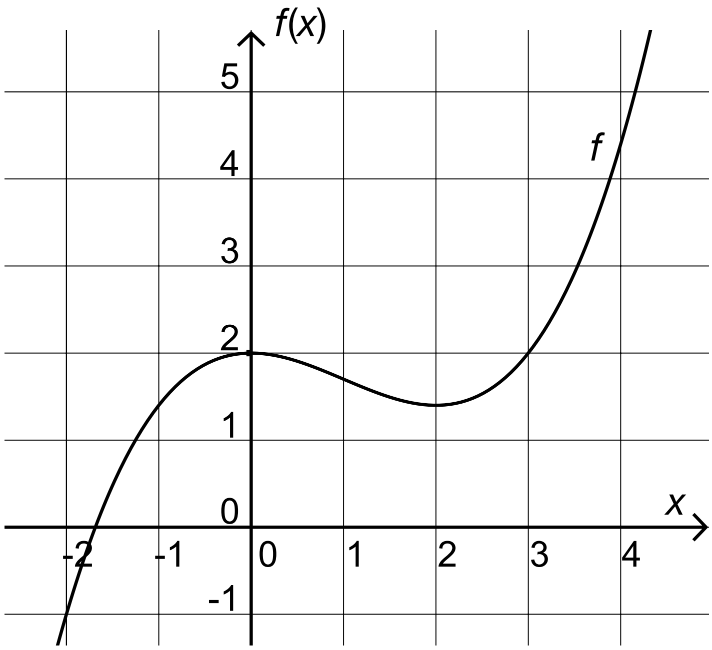
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn eine richtige Gleichung der Funktion *a* angegeben ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Ableitungswerte ordnen*

Aufgabennummer: 1_336	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 1.3

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie die Werte $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(3)$ und $f'(4)$ der Größe nach, beginnend mit dem kleinsten Wert! (Die konkreten Werte von $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(3)$ und $f'(4)$ sind dabei nicht anzugeben.)

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

$f'(1) < f'(0) < f'(3) < f'(4)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Die Lösung gilt als richtig, wenn alle Werte in der richtigen Reihenfolge angeordnet werden.
Auch die Ordnung der Werte in der Form $f'(1)$, $f'(0)$, $f'(3)$, $f'(4)$ gilt als richtig.

Stammfunktion einer Sinusfunktion

Die Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = -1{,}25 \cdot \cos(b \cdot x)$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2 \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie b.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$F'(x) = 1{,}25 \cdot b \cdot \sin(b \cdot x) = 2 \cdot \sin(b \cdot x)$
$1{,}25 \cdot b = 2$
$b = 1{,}6$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln von b.

Grundkompetenz: AN 2.1

Ableitungsregeln

Gegeben sind die zwei differenzierbaren Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jeden Fall zutreffen. *[2 aus 5]*

Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) - h(x)$ gilt: $f'(x) = g'(x) - h'(x)$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = h(k \cdot x)$ gilt: $f'(x) = h'(k \cdot x)$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = k \cdot g(x)$ gilt: $f'(x) = k \cdot g'(x)$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) + k$ gilt: $f'(x) = g'(x) + k \cdot x$	☐
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) + h(x)$ gilt: $f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Für die reelle Funktion f mit $f(x) = g(x) - h(x)$ gilt: $f'(x) = g'(x) - h'(x)$	☒
Für die reelle Funktion f mit $f(x) = k \cdot g(x)$ gilt: $f'(x) = k \cdot g'(x)$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Erste Ableitung

Gegeben ist die differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.
Es gilt: $f'(0) = 2$

Für die zwei Zahlen $a, k \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = a \cdot f(k \cdot x)$ gegeben.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie mithilfe von a und k eine Formel zur Berechnung von $g'(0)$ auf.

$g'(0) =$ ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$g'(0) = 2 \cdot a \cdot k$

oder:

$g'(0) = f'(0) \cdot a \cdot k$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Regeln des Differenzierens

Gegeben sind die zwei differenzierbaren Funktionen f und g und die positive reelle Zahl a.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Funktionen an, die auf jeden Fall mit $(a^2 \cdot (f + g))'$ übereinstimmen.
[2 aus 5]

$2 \cdot a \cdot f' + 2 \cdot a \cdot g'$	☐
$a^2 \cdot f' + a^2 \cdot g'$	☐
$2 \cdot a \cdot (f + g)'$	☐
$a^2 \cdot (f + g)'$	☐
$f' + g'$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$a^2 \cdot f' + a^2 \cdot g'$	☒
$a^2 \cdot (f + g)'$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Werte einer Ableitungsfunktion*

Aufgabennummer: 1_700	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 2.1

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot e^x$.

Aufgabenstellung:

Die nachstehenden Aussagen beziehen sich auf Eigenschaften der Funktion f bzw. deren Ableitungsfunktion f'.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es gibt eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 2$.	☐
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) > f'(x + 1)$.	☐
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) = 3 \cdot f(x)$.	☐
Es gibt eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 0$.	☐
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) \geq 0$.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

Es gibt eine Stelle $x \in \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 2$.	☒
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) \geq 0$.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Ableitung*

Aufgabennummer: 1_603	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AN 2.1

Gegeben sind sechs Funktionsgleichungen mit einem Parameter k, wobei $k \in \mathbb{Z}$ und $k \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Für welche der gegebenen Funktionsgleichungen gilt der Zusammenhang $f'(x) = k \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?
Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung an!

$f(x) = k$	☐
$f(x) = \frac{k}{x}$	☐
$f(x) = k \cdot x$	☐
$f(x) = x^k$	☐
$f(x) = e^{k \cdot x}$	☐
$f(x) = \sin(k \cdot x)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

$f(x) = e^{k \cdot x}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Funktionsgleichung angekreuzt ist.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Sinusfunktion und Cosinusfunktion*

Aufgabennummer: 1_580	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AN 2.1

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \sin(a \cdot x)$ und g mit $g(x) = a \cdot \cos(a \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Welche Beziehung besteht zwischen den Funktionen f und g und deren Ableitungsfunktionen?
Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt!

$a \cdot f'(x) = g(x)$	☐
$g'(x) = f(x)$	☐
$a \cdot g(x) = f'(x)$	☐
$f(x) = a \cdot g'(x)$	☐
$f'(x) = g(x)$	☐
$g'(x) = a \cdot f(x)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$f'(x) = g(x)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Gleichung angekreuzt ist.

Ableitungsregeln*

Aufgabennummer: 1_504	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AN 2.1

Über zwei Polynomfunktionen f und g ist bekannt, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$g(x) = 3 \cdot f(x) - 2$

Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Aussagen ist jedenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ wahr? Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

$g'(x) = f'(x)$	☐
$g'(x) = f'(x) - 2$	☐
$g'(x) = 3 \cdot f'(x)$	☐
$g'(x) = 3 \cdot f'(x) - 2$	☐
$g'(x) = 3 \cdot f'(x) - 2 \cdot x$	☐
$g'(x) = -2 \cdot f'(x)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

$g'(x) = 3 \cdot f'(x)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Aussage angekreuzt ist.

Reelle Funktion*

Aufgabennummer: 1_456	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 2.1

Eine reelle Funktion f ist durch die Funktionsgleichung $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ gegeben.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion f' der Funktion f an!

$f'(x) =$ ________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$f'(x) = 12x^2 - 4x + 5$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion f'. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Ableitung einer Winkelfunktion*

Aufgabennummer: 1_432	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 2.1

Eine Gleichung einer Funktion f lautet:

$f(x) = 5 \cdot \cos(x) + \sin(3 \cdot x)$

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung der Ableitungsfunktion f' der Funktion f an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung
$f'(x) = -5 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \cos(3 \cdot x)$

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.

Ableitung einer Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_359	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 2.1

Gegeben sind eine reelle Polynomfunktion f und deren Ableitungsfunktion f'.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Für die 1. Ableitung der Funktion f mit $f(x) =$ ___①___ gilt: $f'(x) =$ ___②___ .

①	
$3x^3 - 4x^2 + 7x - 3$	☐
$6x^2 - 4x + 7$	☐
$3x^2 - 4x + 7$	☐

②	
$x^3 - 2x^2 + 7x$	☐
$6x - 4$	☐
$6x^2 - 4$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

①	
$3x^2 - 4x + 7$	☒

②	
$6x - 4$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Wert eines bestimmten Integrals

Die Funktion g ist eine Stammfunktion der Polynomfunktion f. Von der Funktion g sind einige Wertepaare gegeben:

x	$g(x)$
–2	3
–1	0
0	–1
1	0
2	3
3	8
4	15

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des nachstehenden Integrals an.

$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ______________________________

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 9$$

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

Produktionskosten

Die monatlichen Fixkosten eines Betriebs für die Produktion von Erfrischungsgetränken betragen € 200.000.
Die Funktion K beschreibt modellhaft die monatlichen Gesamtkosten für diese Produktion (in Euro) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x.
Die Grenzkosten für diese Produktion werden durch die Funktion K' beschrieben.

$K'(x) = 0{,}003 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3500$

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in Euro pro Mengeneinheit

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

$K(x) =$ ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 3\,500 \cdot x + 200\,000$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von K.

Überholvorgang

Die Beschleunigung eines bestimmten Fahrzeugs während eines Überholvorgangs wird durch die Funktion a beschrieben.

Es gilt:
$a(t) = -t^3 + 3 \cdot t^2$ mit $0 \leq t \leq 3$

t ... Zeit ab Beginn des Überholvorgangs in s
$a(t)$ ... Beschleunigung des Fahrzeugs zur Zeit t in m/s²

Die Funktion v ordnet dabei jeder Zeit t die Geschwindigkeit des Fahrzeugs $v(t)$ (in m/s) zu.

Zu Beginn des Überholvorgangs hat das Fahrzeug die Geschwindigkeit $v(0) = 20$ m/s.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Funktionsgleichung von v auf.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$v(t) = -\frac{1}{4} \cdot t^4 + t^3 + 20$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von v.

Grundkompetenz: AN 3.1

Traubensaft

Ein bestimmter Behälter wird mit Traubensaft befüllt. Die Funktion f beschreibt den Füllstand des Traubensafts im Behälter in Abhängigkeit von der Zeit t. Dabei gilt:

- Der Füllvorgang erfolgt ohne Unterbrechung.
- Die Zunahme des Füllstands nimmt laufend (d. h. streng monoton) ab.

t ... Zeit seit Beginn des Füllvorgangs in s
$f(t)$ ... Füllstand des Traubensafts im Behälter zur Zeit t in cm
t_1, t_2 ... zwei bestimmte Zeitpunkte während des Füllvorgangs mit $t_1 < t_2$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 einen positiven Wert.	☐
Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_2 einen negativen Wert.	☐
Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 den gleichen Wert wie die 1. Ableitung von f an der Stelle t_2.	☐
Die 2. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 einen positiven Wert.	☐
Die 2. Ableitung von f hat an der Stelle t_2 einen negativen Wert.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die 1. Ableitung von f hat an der Stelle t_1 einen positiven Wert.	☒
Die 2. Ableitung von f hat an der Stelle t_2 einen negativen Wert.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Ableitungsfunktion und Stammfunktion*

Aufgabennummer: 1_868	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Die Polynomfunktion f hat die Ableitungsfunktion f' und die Stammfunktion F.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jeden Fall zutreffen. *[2 aus 5]*

Der Ausdruck $F(a)$ gibt die Steigung von f an der Stelle a für alle $a \in \mathbb{R}$ an.	☐
Die Stammfunktion F ist eindeutig bestimmt. Es gibt somit keine weitere Stammfunktion von f.	☐
Die Ableitungsfunktion f' ist eindeutig bestimmt. Es gibt somit keine weitere Ableitungsfunktion von f.	☐
Der Ausdruck $F'(0)$ gibt die Steigung der Funktion f an der Stelle 0 an.	☐
Es gilt: $F'(a) = f(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

Die Ableitungsfunktion f' ist eindeutig bestimmt. Es gibt somit keine weitere Ableitungsfunktion von f.	☒
Es gilt: $F'(a) = f(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Stammfunktionen*

Aufgabennummer: 1_821	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.1

Gegeben ist eine Stammfunktion F einer Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Zwei der nachstehenden Funktionen G_1 bis G_5 sind für alle $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ jedenfalls auch Stammfunktionen von f.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Funktionen an.

$G_1 = c \cdot F$	☐
$G_2 = c + F$	☐
$G_3 = F - c$	☐
$G_4 = c - F$	☐
$G_5 = \frac{F}{c}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

$G_2 = c + F$	☒
$G_3 = F - c$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Funktionen angekreuzt sind.

Stammfunktion*

Aufgabennummer: 1_797	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.1

Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.
Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g(x)$ ist eine Stammfunktion von f.
Für eine Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x)$ und $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt: $h(x) = g(x) + c$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob h ebenfalls eine Stammfunktion von f ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

Ja, h ist ebenfalls eine Stammfunktion von f.

mögliche Begründungen:

Zwei differenzierbare Funktionen, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, haben die gleiche Ableitung.

oder:

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $h'(x) = g'(x) = f(x)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Entscheidung und eine richtige Begründung.

Wachstum einer Pflanze*

Aufgabennummer: 1_773	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 3.1

Zu Beginn eines dreiwöchigen Beobachtungszeitraums ist eine bestimmte Pflanze 15 cm hoch. Die momentane Änderungsrate der Höhe dieser Pflanze wird durch die Funktion v in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben.
Dabei gilt:
$v(t) = 3 - 0{,}3 \cdot t^2$ mit $t \in [0; 3]$ in Wochen und $v(t)$ in cm/Woche

Die Funktion h ordnet jedem Zeitpunkt $t \in [0; 3]$ die Höhe $h(t)$ der Pflanze zu (t in Wochen, $h(t)$ in cm).

Aufgabenstellung:

Geben Sie $h(t)$ an.

$h(t) =$ ______________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$h(t) = -0{,}1 \cdot t^3 + 3 \cdot t + 15$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Ableitungsfunktion und Stammfunktion*

Aufgabennummer: 1_723	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.1

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion.

Aufgabenstellung:

Zwei der folgenden Aussagen über die Funktion f treffen auf jeden Fall zu.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Die Funktion f hat genau eine Stammfunktion F.	☐
Die Funktion f hat genau eine Ableitungsfunktion f'.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $f' = F$.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $F'' = f'$.	☐
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0)$.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

Die Funktion f hat genau eine Ableitungsfunktion f'.	☒
Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt: $F'' = f'$.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Stammfunktion*

Aufgabennummer: 1_701	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 3.1

Gegeben ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^3$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie a so, dass die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = 5 \cdot x^4 - 2$ eine Stammfunktion von f ist!

a = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$f(x) = F'(x) = 20 \cdot x^3$

$a = 20$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zusammenhang zwischen Funktion und Stammfunktionen*

Aufgabennummer: 1_676	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.1

Die Funktionen g und h sind unterschiedliche Stammfunktionen einer Polynomfunktion f vom Grad $n \geq 1$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$g'(x) = h'(x)$	☐
$g(x) + h(x) = c, \ c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$	☐
$\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = f(2) - f(0)$	☐
$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = h(2) - h(0)$	☐
$g(x) = c \cdot h(x), \ c \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

$g'(x) = h'(x)$	☒
$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = h(2) - h(0)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Beziehungen zwischen Funktion, Ableitungs- und Stammfunktion*

Aufgabennummer: 1_629	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 3.1

Es sei f eine Polynomfunktion dritten Grades, f' ihre Ableitungsfunktion und F eine der Stammfunktionen von f.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die zweite Ableitungsfunktion der Funktion ___①___ ist die Funktion ___②___.

①	
f	☐
f'	☐
F	☐

②	
f	☐
f'	☐
F	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

①	
F	☒

②	
f'	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Ableitungs- und Stammfunktion*

Aufgabennummer: 1_527	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.1

Es sei f eine Polynomfunktion und F eine ihrer Stammfunktionen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Eine Funktion F heißt Stammfunktion der Funktion f, wenn gilt: $f(x) = F(x) + c$ $(c \in \mathbb{R})$.	☐
Eine Funktion f' heißt Ableitungsfunktion von f, wenn gilt: $\int f(x)\mathrm{d}x = f'(x)$.	☐
Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 definiert ist, gibt $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle an.	☐
Die Funktion f hat unendlich viele Stammfunktionen, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.	☐
Wenn man die Stammfunktion F einmal integriert, dann erhält man die Funktion f.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

Wenn die Funktion f an der Stelle x_0 definiert ist, gibt $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f an dieser Stelle an.	☒
Die Funktion f hat unendlich viele Stammfunktionen, die sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden.	☒

Lösungsschlüssel

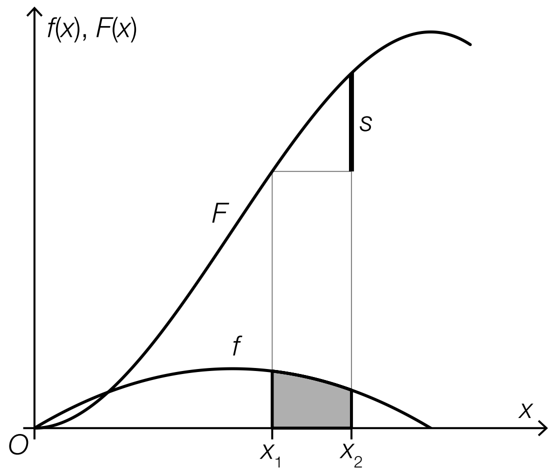
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Funktion und Stammfunktion

In der unten stehenden Abbildung sind der Graph der Funktion f und der Graph einer ihrer Stammfunktionen F dargestellt.

Im Intervall $[x_1; x_2]$ ist unter dem Graphen der Funktion f ein Flächenstück grau gekennzeichnet.

Unter dem Graphen von F ist die Strecke mit der Länge s gekennzeichnet.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen s und dem Inhalt des grau gekennzeichneten Flächenstücks richtig beschreibt. *[1 aus 6]*

$s = F(x_1) - F(x_2)$	☐
$s = f(x_2) - f(x_1)$	☐
$s = \frac{F(x_1) + F(x_2)}{2}$	☐
$s = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$s = \int_{x_2}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$s = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x$	☐

[0 / 1 P.]

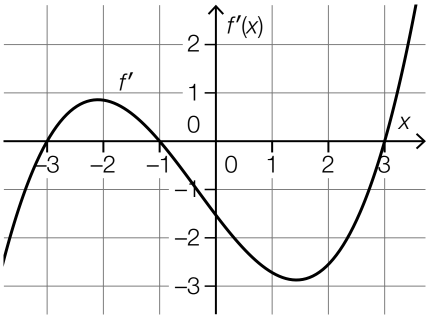
Möglicher Lösungsweg

$s = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Graph einer Ableitungsfunktion

Nachstehend ist der Graph der Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f dargestellt. Die Ableitungsfunktion f' ist eine Polynomfunktion 3. Grades und hat 3 ganzzahlige Nullstellen.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf die Polynomfunktion f jedenfalls zutreffen. *[2 aus 5]*

f ist im Intervall [2; 3] streng monoton steigend.	☐
f ist im Intervall [2; 3] linksgekrümmt (positiv gekrümmt).	☐
Es gilt: $f(-3) \leq f(3)$	☐
f hat genau 2 Wendestellen.	☐
f hat genau 2 lokale Maximumstellen.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

f ist im Intervall [2; 3] linksgekrümmt (positiv gekrümmt).	☒
f hat genau 2 Wendestellen.	☒

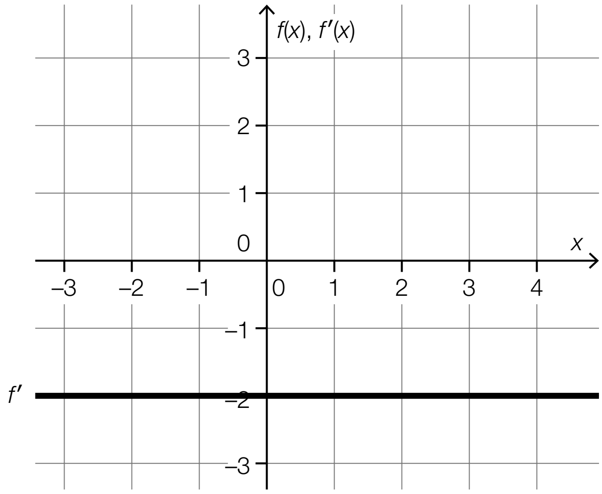
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Ableitungsfunktion

In der unten stehenden Abbildung ist der Graph der konstanten Ableitungsfunktion f' einer Funktion f dargestellt. Für die Funktion f gilt: $f(0) = 2$

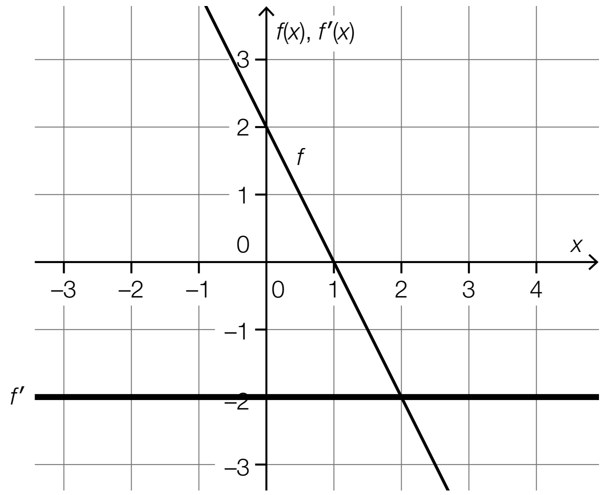
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Funktion f ein.



[0/1 P.]

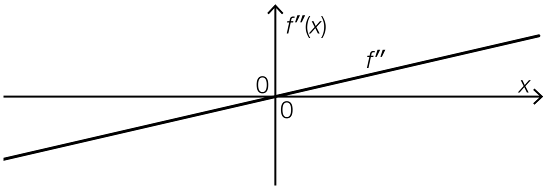
Möglicher Lösungsweg



Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen von *f*.

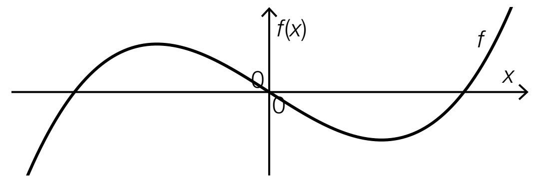
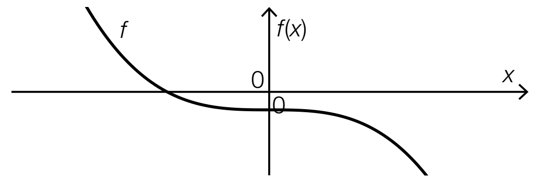
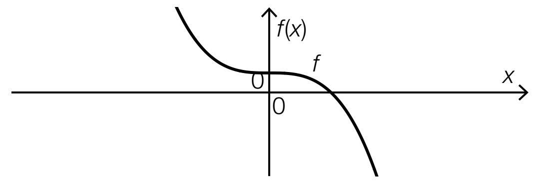
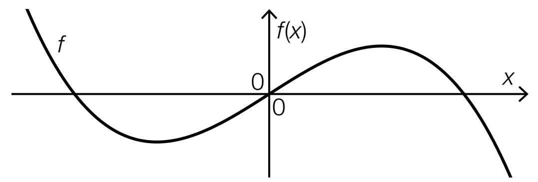
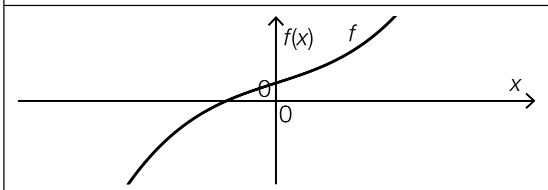
Zweite Ableitung

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen der 2. Ableitung f'' einer Polynomfunktion 3. Grades f. Der Graph von f'' ist eine Gerade, die durch den Koordinatenursprung verläuft.



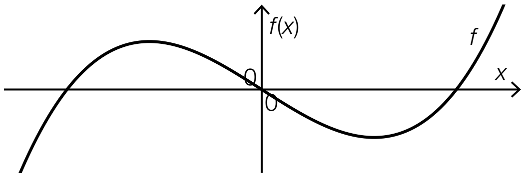
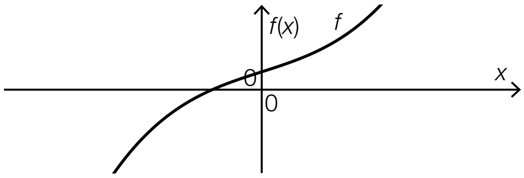
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Abbildungen an, die den Graphen einer solchen Polynomfunktion *f* darstellen können. *[2 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

[0/1 P.]

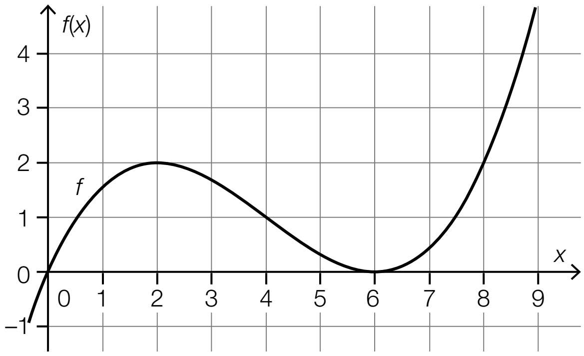
Möglicher Lösungsweg

	☒
	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Ableitungs- und Stammfunktion

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Polynomfunktion 3. Grades *f* dargestellt. Alle lokalen Extremstellen und die Wendestelle von *f* sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Der Graph der 1. Ableitung von *f* ______①______ und die Graphen aller Stammfunktionen von *f* ______②______ .

①	
schneidet die *x*-Achse an der Stelle $x = 4$	☐
ist im Intervall $(-\infty; 4)$ streng monoton fallend	☐
ist im Intervall $(-\infty; 4)$ rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt)	☐

②	
haben an der Stelle $x = 6$ eine Wendestelle mit waagrechter Tangente	☐
schneiden die *x*-Achse an der Stelle $x = 6$	☐
sind im Intervall $(2; 6)$ streng monoton fallend	☐

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

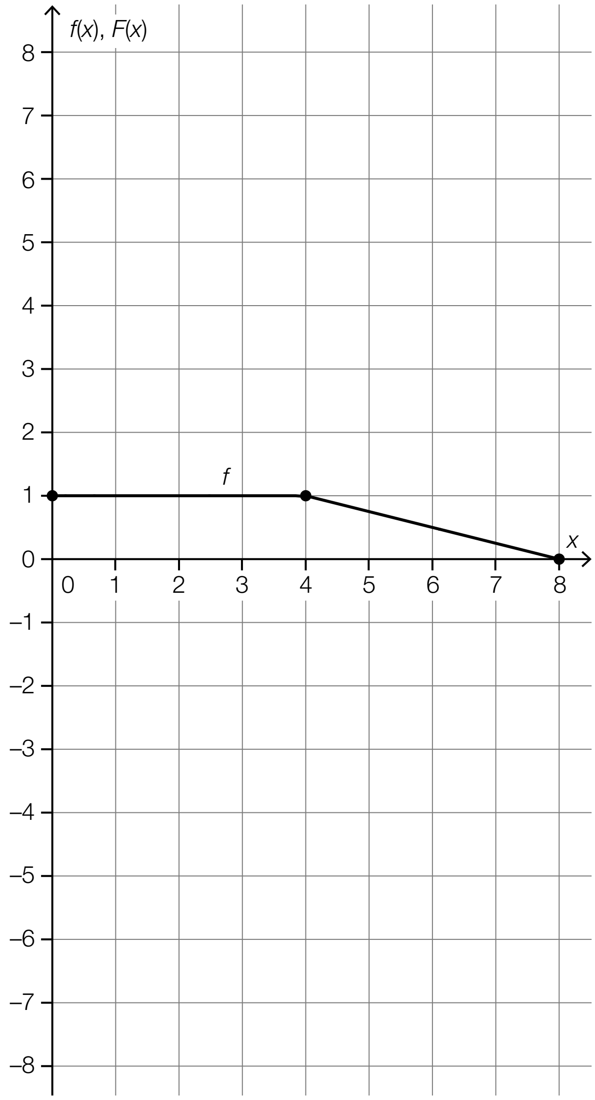
①	
ist im Intervall $(-\infty; 4)$ streng monoton fallend	☒

②	
haben an der Stelle $x = 6$ eine Wendestelle mit waagrechter Tangente	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

Stammfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der reellen Funktion $f\colon [0; 8] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$.
Die Funktion F mit $F(0) = 0$ ist eine Stammfunktion von f. Die gekennzeichneten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.

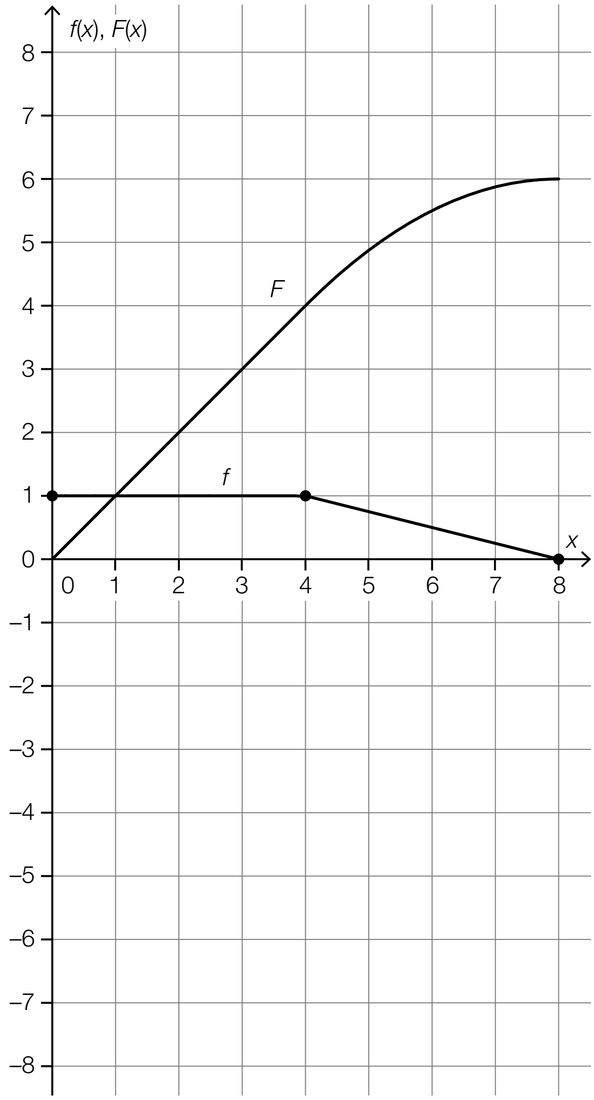


Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen von F im Intervall $[0; 8]$ unter Verwendung der Funktionswerte $F(0)$, $F(4)$ und $F(8)$.

[0 / ½ / 1 P.]

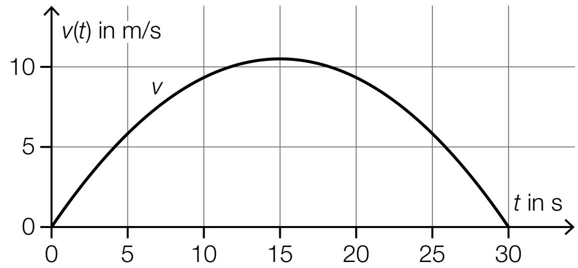
Möglicher Lösungsweg



Ein halber Punkt für das richtige Skizzieren des Funktionsgraphen von *F* im Intervall [0; 4] (linearer Verlauf von (0|0) bis (4|4)).
Ein halber Punkt für das richtige Skizzieren des Funktionsgraphen von *F* im Intervall [4; 8] (rechtsgekrümmter Verlauf von (4|4) bis (8|6), wobei nicht erkennbar sein muss, dass die Steigung des Funktionsgraphen von *F* an der Stelle 8 den Wert 0 hat).

Zeit-Geschwindigkeit-Funktion

Für die Bewegung eines bestimmten Körpers gibt $v(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an (t in s, $v(t)$ in m/s). Der Graph von v ist im Zeitintervall [0; 30] in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Unten stehend sind Aussagen über die Zeit-Weg-Funktion s und die Zeit-Beschleunigung-Funktion a für diese Bewegung angeführt (t in s, $s(t)$ in m, $a(t)$ in m/s^2).

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Es gilt: $s(10) < 10$.	☐
Es gibt einen Zeitpunkt $t_0 \in [0; 30]$ mit $a(t_0) = 0$.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 15$ ist die Beschleunigung maximal.	☐
Es gilt: $s(30) - s(0) > 300$.	☐
Für alle $t_1, t_2 \in [0; 30]$ mit $t_2 > t_1$ gilt: $s(t_2) > s(t_1)$.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Es gibt einen Zeitpunkt $t_0 \in [0; 30]$ mit $a(t_0) = 0$.	☒
Für alle $t_1, t_2 \in [0; 30]$ mit $t_2 > t_1$ gilt: $s(t_2) > s(t_1)$.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bestimmtes Integral*

Aufgabennummer: 1_845	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	

Die Funktion F ist eine Stammfunktion der Polynomfunktion f.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie denjenigen Ausdruck an, der in jedem Fall mit $\int_2^5 f(x)\,dx$ übereinstimmt. *[1 aus 6]*

$\frac{F(5) - F(2)}{5 - 2}$	☐
$\frac{F(5) - F(2)}{F(2)}$	☐
$F(5) - F(2)$	☐
$F(5) + F(2)$	☐
$\frac{F(2) + F(5)}{2}$	☐
$\frac{F(5)}{F(2)}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$F(5) - F(2)$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

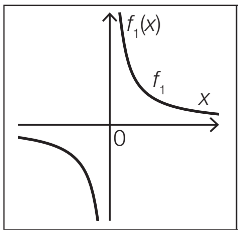
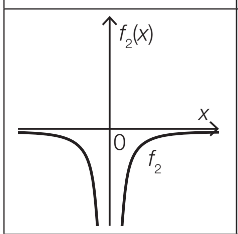
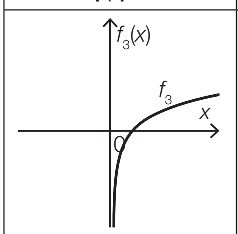
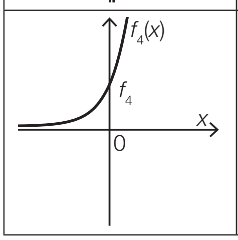
Graphen von Ableitungsfunktionen*

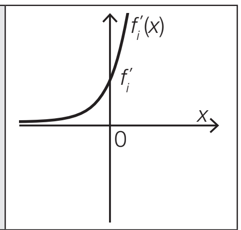
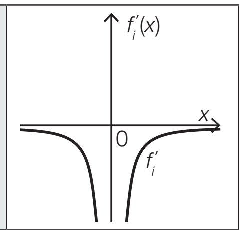
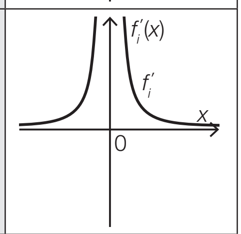
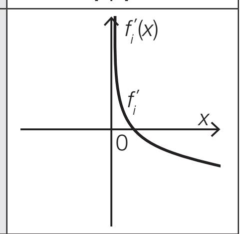
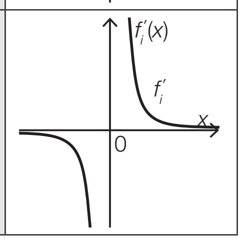
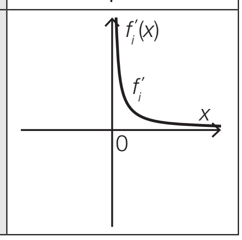
Aufgabennummer: 1_749	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

Unten stehend sind die vier Graphen der Funktionen f_1 bis f_4 sowie die Graphen von sechs Funktionen (A bis F) abgebildet.

Aufgabenstellung:

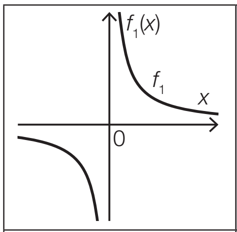
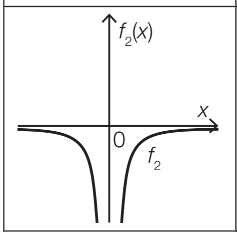
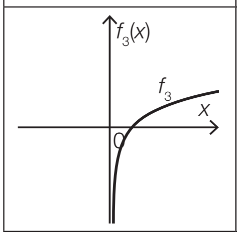
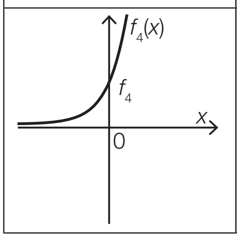
Ordnen Sie den vier Graphen der Funktionen f_1 bis f_4 jeweils denjenigen Graphen (aus A bis F) zu, der die Ableitung dieser Funktion darstellt.

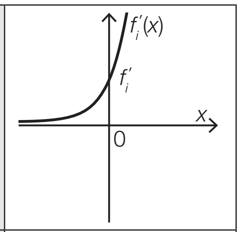
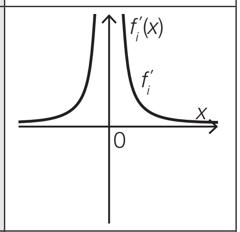
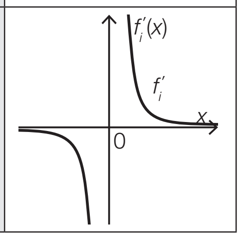
	
	
	
	

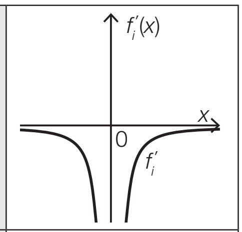
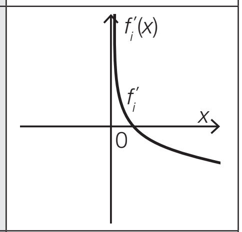
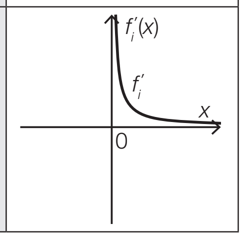
A		D	
B		E	
C		F	

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

	D
	C
	F
	A

A	
B	
C	

D	
E	
F	

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Funktionsgraphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist. Bei zwei oder drei richtigen Zuordnungen ist ein halber Punkt zu geben.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

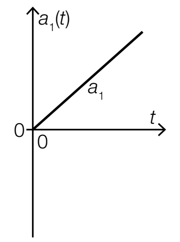
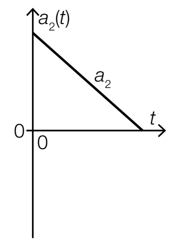
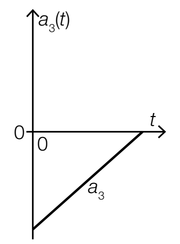
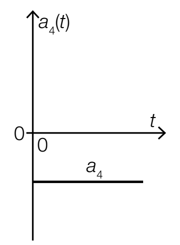
Geschwindigkeit und Beschleunigung*

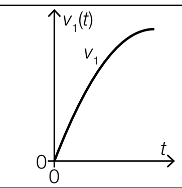
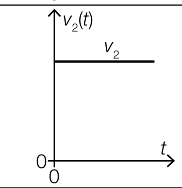
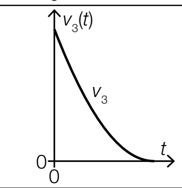
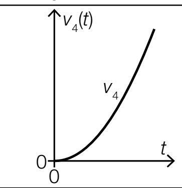
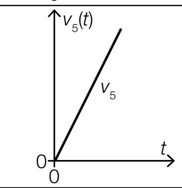
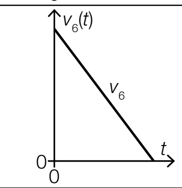
Aufgabennummer: 1_724	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Graphen von vier Beschleunigungsfunktionen (a_1, a_2, a_3, a_4) und von sechs Geschwindigkeitsfunktionen (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) in Abhängigkeit von der Zeit t.

Aufgabenstellung:

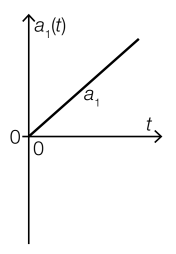
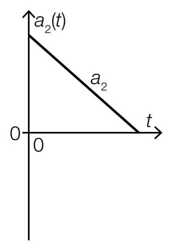
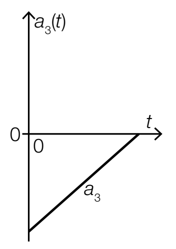
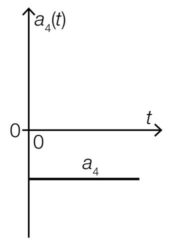
Ordnen Sie den vier Graphen von a_1 bis a_4 jeweils den zugehörigen Graphen von v_1 bis v_6 (aus A bis F) zu.

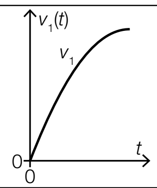
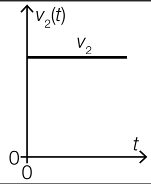
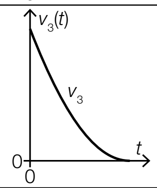
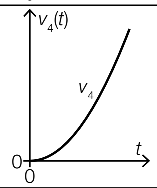
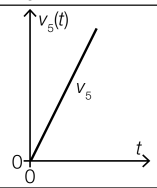
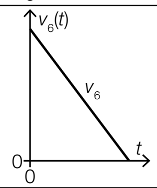
	
	
	
	

A	
B	
C	
D	
E	
F	

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

	D
	A
	C
	F

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungsschlüssel

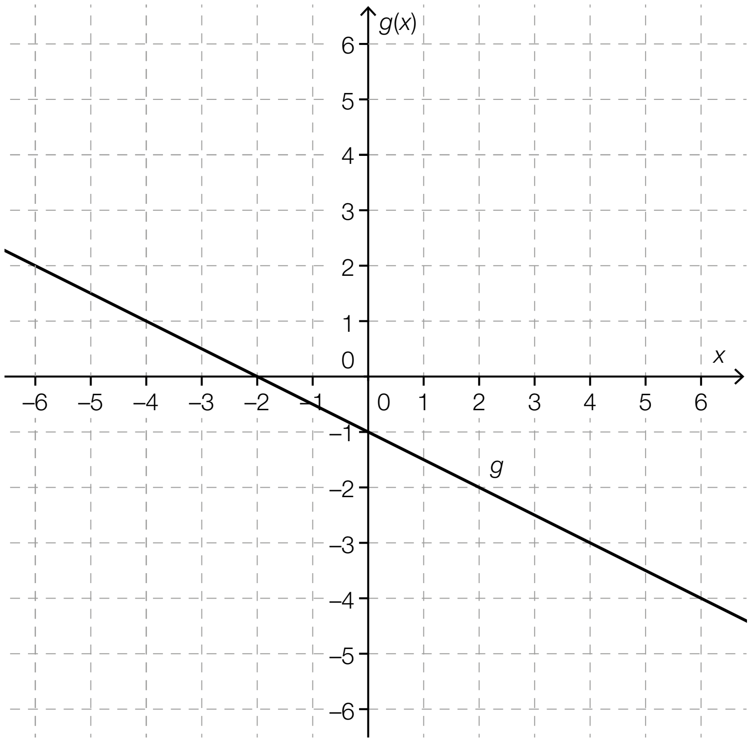
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen a_1 bis a_4 ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist. Bei zwei oder drei richtigen Zuordnungen ist ein halber Punkt zu geben.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Eigenschaften von Stammfunktionen*

Aufgabennummer: 1_652	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.2

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer linearen Funktion g dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für die Funktion g zutreffenden Aussagen an!

Jede Stammfunktion von g ist eine Polynomfunktion zweiten Grades.	☐
Jede Stammfunktion von g hat an der Stelle $x = -2$ ein lokales Minimum.	☐
Jede Stammfunktion von g ist im Intervall $(0; 2)$ streng monoton fallend.	☐
Die Funktion G mit $G(x) = -0{,}5$ ist eine Stammfunktion von g.	☐
Jede Stammfunktion von g hat mindestens eine Nullstelle.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

Jede Stammfunktion von g ist eine Polynomfunktion zweiten Grades.	☒
Jede Stammfunktion von g ist im Intervall $(0; 2)$ streng monoton fallend.	☒

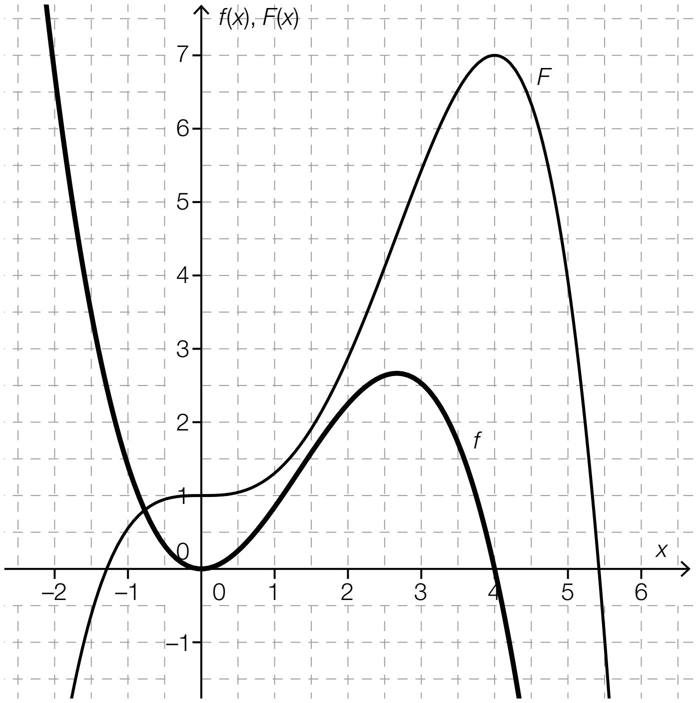
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Flächeninhalt*

Aufgabennummer: 1_604	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.2

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph einer Polynomfunktion *f* dritten Grades und der Graph einer ihrer Stammfunktionen *F* dargestellt.



Aufgabenstellung:

Der Graph von *f* und die positive *x*-Achse begrenzen im Intervall [0; 4] ein endliches Flächenstück. Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstücks!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$F(4) - F(0) = 7 - 1 = 6$

Flächeninhalt dieses Flächenstücks: 6 FE

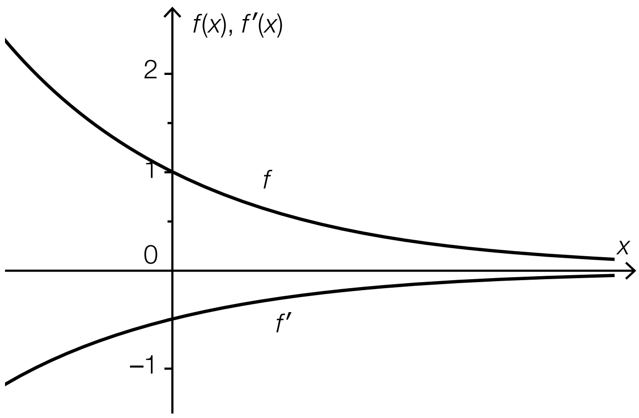
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Maßeinheit „FE" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [5,8; 6,2]

Differenzieren einer Exponentialfunktion*

Aufgabennummer: 1_581	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 3.2

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = e^{\lambda \cdot x}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f'.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Parameters λ an!

λ = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$\lambda = -0{,}5$

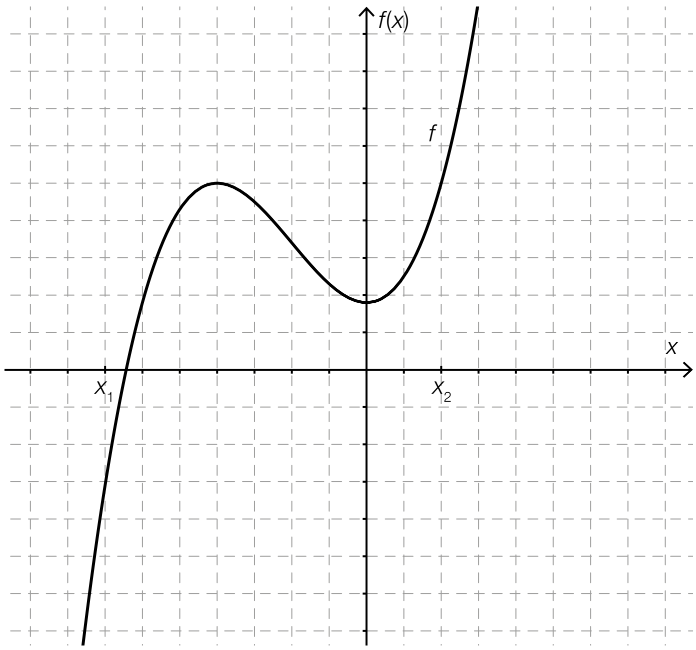
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: $[-0{,}55; -0{,}45]$

Grafisch differenzieren*

Aufgabennummer: 1_549	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades *f*.

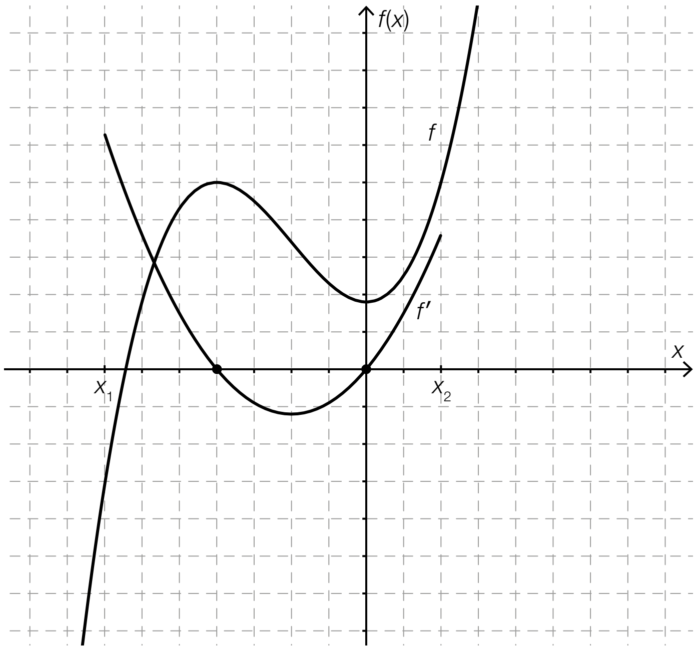


Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie in der gegebenen Grafik den Graphen der Ableitungsfunktion f' im Intervall $[x_1; x_2]$ und markieren Sie gegebenenfalls die Nullstellen!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Darstellung der Ableitungsfunktion f'. Der Graph der Funktion f' muss erkennbar die Form einer nach oben offenen Parabel haben und die x-Achse an den beiden Stellen schneiden, bei denen die Funktion f die Extremstellen hat. Der Graph einer entsprechenden Funktion f', der über das Intervall $[x_1; x_2]$ hinaus gezeichnet ist, ist ebenfalls als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

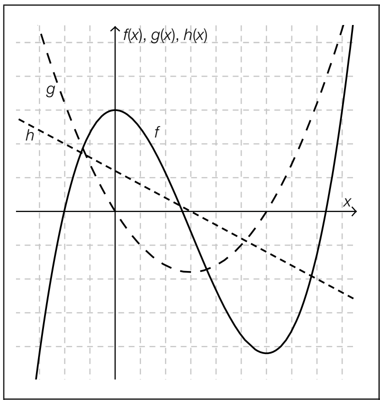
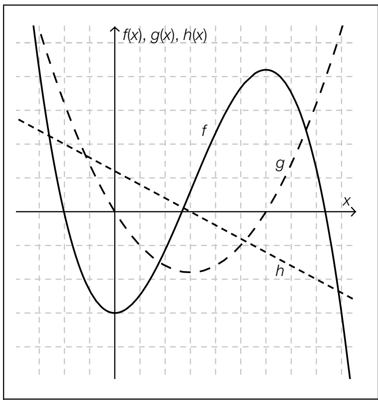
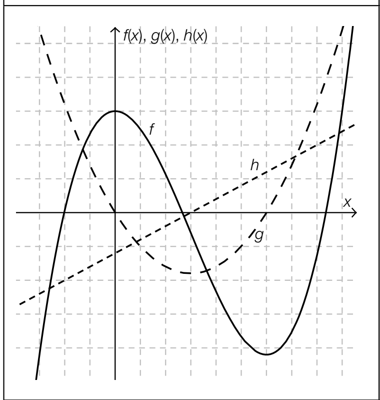
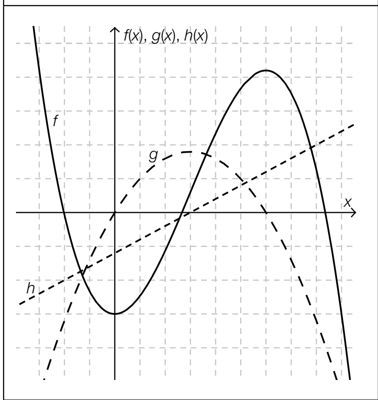
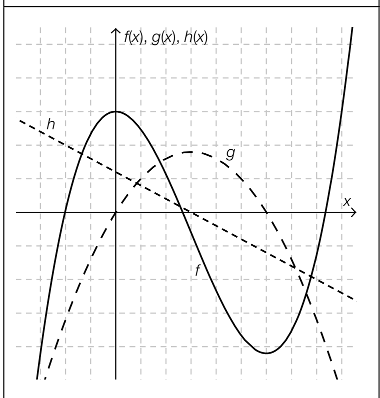
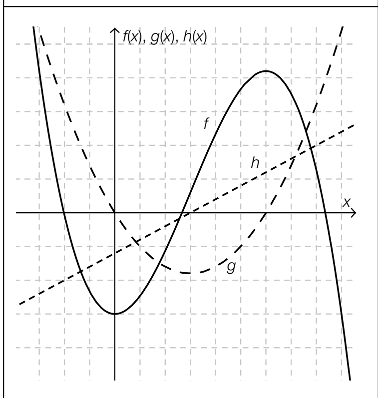
Graphen von Ableitungsfunktionen*

Aufgabennummer: 1_503	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AN 3.2

In den unten stehenden Abbildungen sind jeweils die Graphen der Funktionen *f*, *g* und *h* dargestellt.

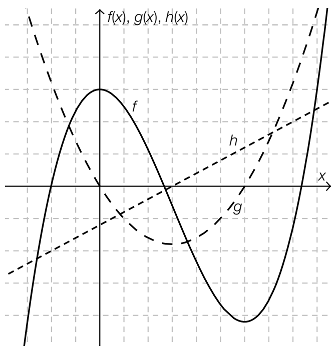
Aufgabenstellung:

In einer der sechs Abbildungen ist *g* die erste Ableitung von *f* und *h* die zweite Ableitung von *f*. Kreuzen Sie diese Abbildung an!

	☐		☐
	☐		☐
	☐		☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

	⊠		

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Abbildung angekreuzt ist.

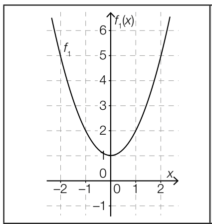
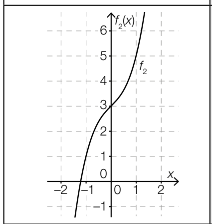
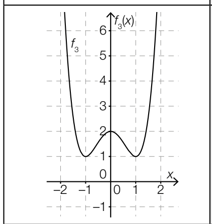
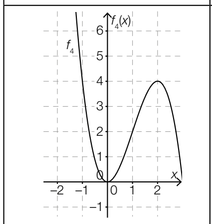
Funktionen und Ableitungsfunktionen*

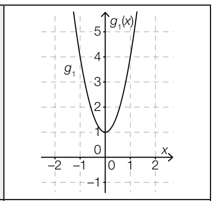
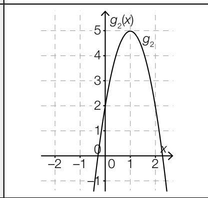
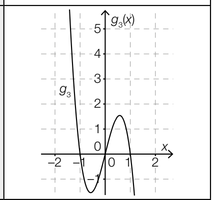
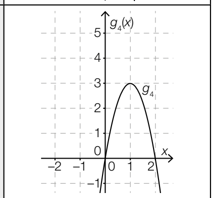
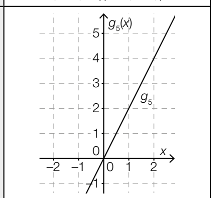
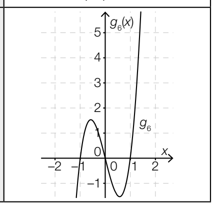
Aufgabennummer: 1_479	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

Links sind die Graphen von vier Polynomfunktionen (f_1, f_2, f_3, f_4) abgebildet, rechts die Graphen sechs weiterer Funktionen (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6).

Aufgabenstellung:

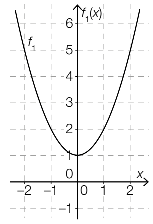
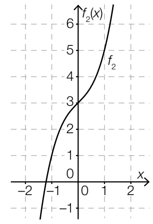
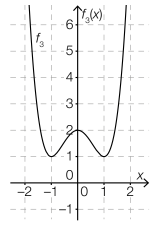
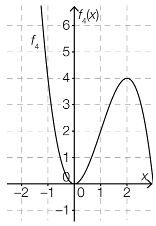
Ordnen Sie den Polynomfunktionen f_1 bis f_4 ihre jeweilige Ableitungsfunktion aus den Funktionen g_1 bis g_6 (aus A bis F) zu!

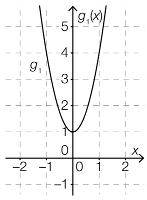
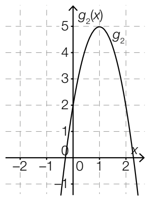
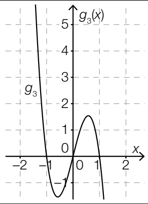
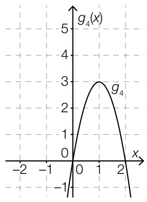
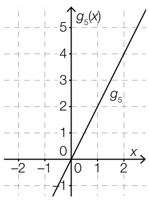
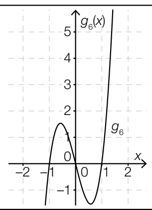
	
	
	
	

A	
B	
C	
D	
E	
F	

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

	E
	A
	F
	D

A	
B	
C	
D	
E	
F	

Lösungsschlüssel

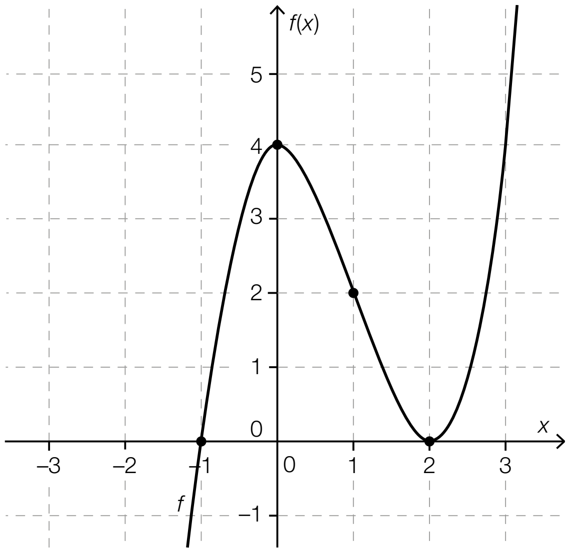
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Graphen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Eigenschaften der Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion 3. Grades*

Aufgabennummer: 1_455	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.2

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades. Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen treffen auf die Ableitungsfunktion f' der Funktion f zu? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktionswerte der Funktion f' sind im Intervall (0; 2) negativ.	☐
Die Funktion f' ist im Intervall (–1; 0) streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 2$ eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum.	☐
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

Die Funktionswerte der Funktion f' sind im Intervall $(0; 2)$ negativ.	☒
Die Funktion f' hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle.	☒

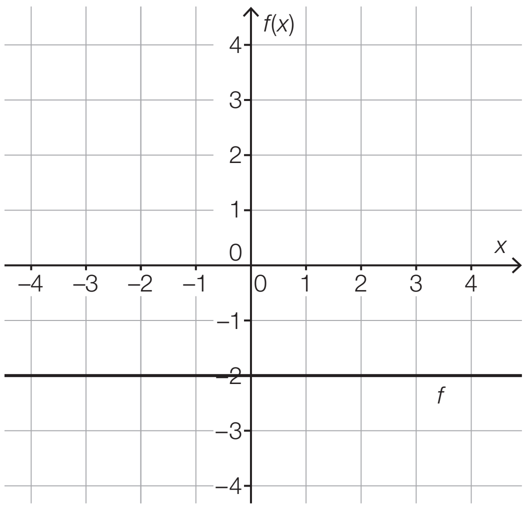
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Stammfunktion einer konstanten Funktion*

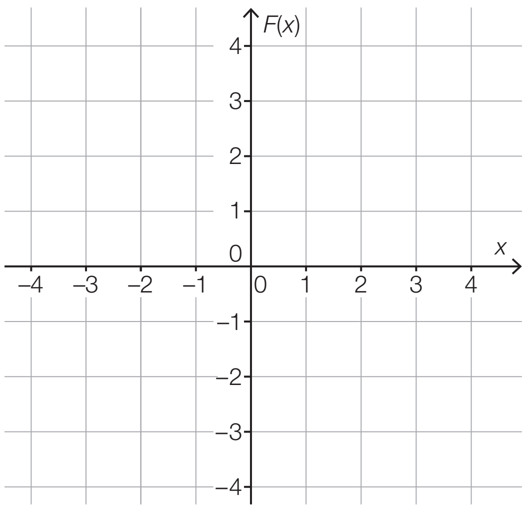
Aufgabennummer: 1_431	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer konstanten Funktion f dargestellt.



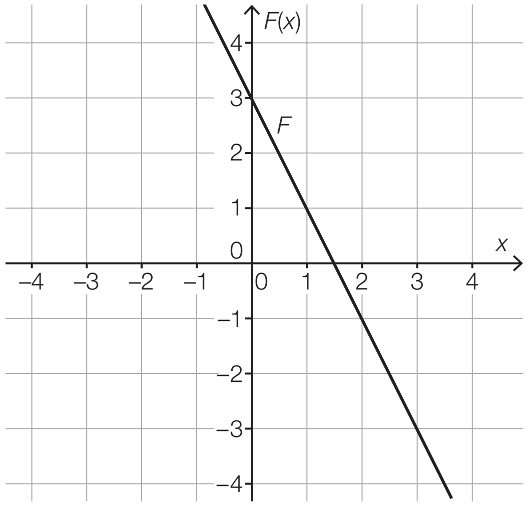
Aufgabenstellung:

Der Graph einer Stammfunktion F von f verläuft durch den Punkt $P = (1|1)$.
Zeichnen Sie den Graphen der Stammfunktion F im nachstehenden Koordinatensystem ein!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung



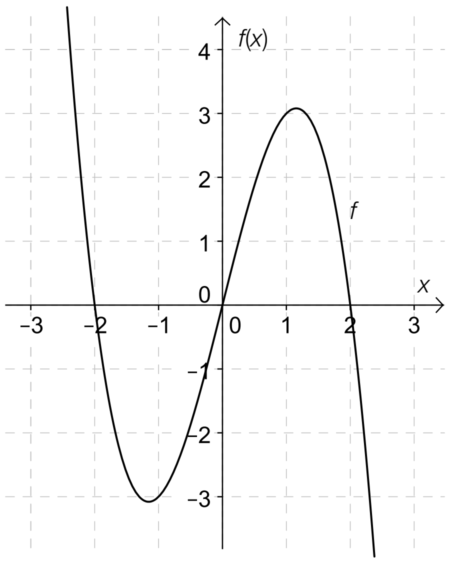
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn die lineare Stammfunktion F durch den Punkt $P = (1|1)$ verläuft und die Steigung –2 hat.

Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion*

Aufgabennummer: 1_406	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 3.2

In der folgenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion f dargestellt:



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die erste Ableitung der Funktion f ist ___①___, und daraus folgt: ___②___.

①	
im Intervall $[-1; 1]$ negativ	☐
im Intervall $[-1; 1]$ gleich null	☐
im Intervall $[-1; 1]$ positiv	☐

②	
f hat im Intervall $[-1; 1]$ eine Nullstelle	☐
f ist im Intervall $[-1; 1]$ streng monoton steigend	☐
f hat im Intervall $[-1; 1]$ eine Wendestelle	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

①	
im Intervall [–1; 1] positiv	☒

②	
f ist im Intervall [–1; 1] streng monoton steigend	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

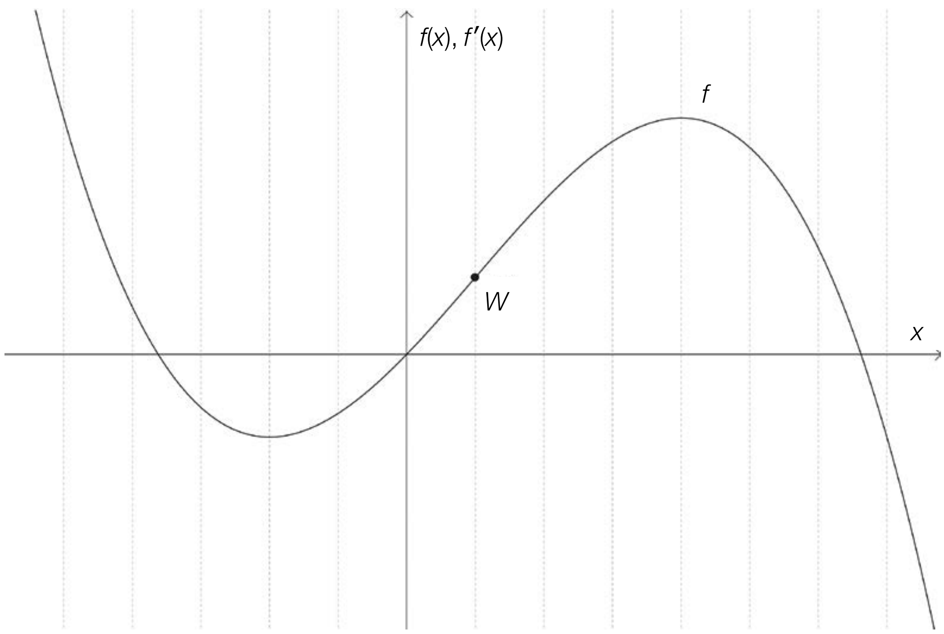
Graph einer Ableitungsfunktion*

Aufgabennummer: 1_383	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 3.2

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen einer Polynomfunktion f dritten Grades, die den Wendepunkt W besitzt.

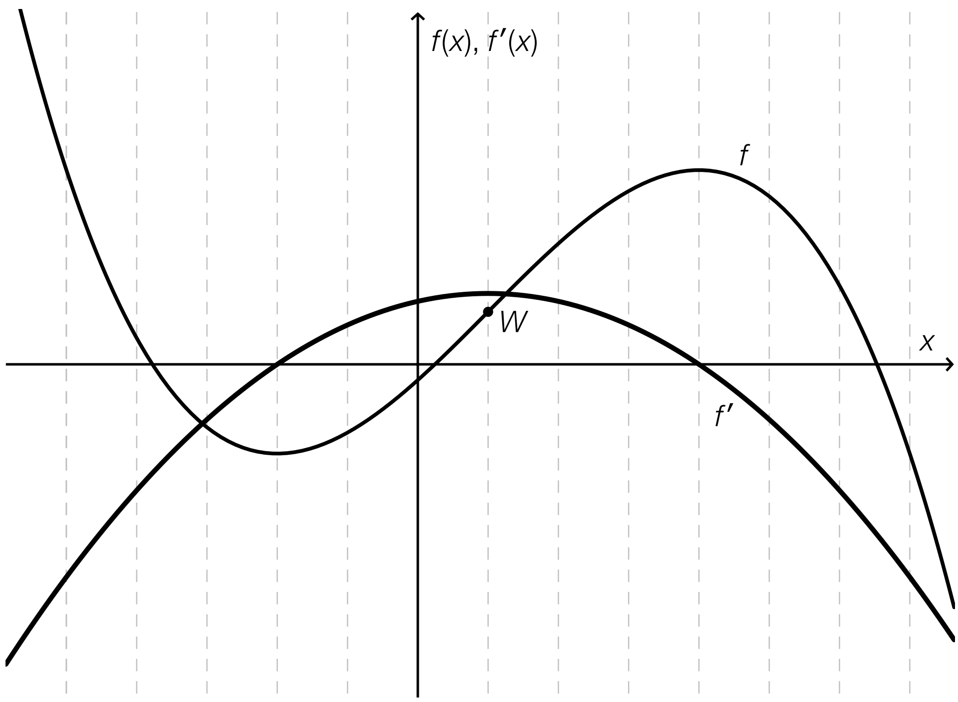
Aufgabenstellung:

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' in das Koordinatensystem!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung



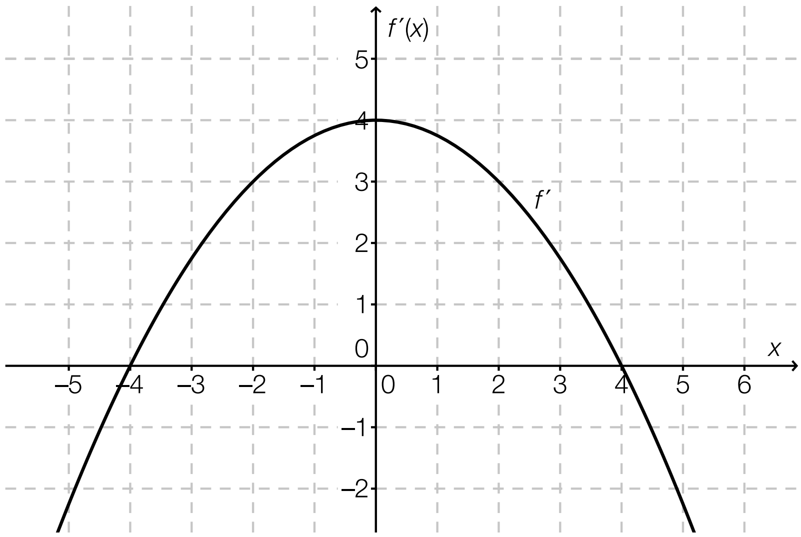
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Kriterien für die Richtigkeit des Graphen: Die Nullstellen von f' müssen bei den Extremstellen von f liegen und die x-Koordinate des Scheitels von f' bei der Wendestelle von f.
Der Graph muss zumindest annähernd einer Parabel entsprechen.

Ableitung*

Aufgabennummer: 1_358	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.2

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der 1. Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f dargestellt.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie, an welchen Stellen die Funktion f im Intervall $(–5; 5)$ jedenfalls lokale Extrema hat! Die für die Bestimmung relevanten Punkte mit ganzzahligen Koordinaten können der Abbildung entnommen werden.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

An den Stellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$ hat f lokale Extrema.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn beide Stellen richtig angegeben sind. Eine Schreibweise wie z. B. $x = \pm 4$ ist auch zulässig.
Die Aufgabe ist falsch gelöst, wenn nur eine der beiden lokalen Extremstellen angegeben ist.

Eigenschaften von quadratischen Funktionen

Gegeben sind zwei quadratische Funktionen f und h.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) = h'(x)$ und $f(x), h(x) > 0$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden auf jeden Fall zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $h''(x) < 0$	☐
h' ist streng monoton fallend.	☐
Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) - h(x) = c$	☐
h' ist eine lineare Funktion, deren Graph durch den Punkt $(0\|0)$ verläuft.	☐
f' hat eine Nullstelle.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) - h(x) = c$	☒
f' hat eine Nullstelle.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Polynomfunktion dritten Grades

Gegeben ist eine Polynomfunktion 3. Grades f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ und $d \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Stelle $x = 0$ ist für $b = 0$ und $c \neq 0$ jedenfalls eine ___①___ und für $c = 0$ und $b \neq 0$ jedenfalls eine ___②___.

①	
Nullstelle	☐
Extremstelle	☐
Wendestelle	☐

②	
Nullstelle	☐
Extremstelle	☐
Wendestelle	☐

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

①	
Wendestelle	☒

②	
Extremstelle	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

Eigenschaften einer Polynomfunktion

Eine Polynomfunktion 4. Grades f hat an den Stellen $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ jeweils ein lokales Maximum. Unten stehend sind sechs Aussagen zu $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ angeführt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Aussage an, die jedenfalls zutrifft. *[1 aus 6]*

Es gibt genau ein c, für das $f'(c) = 0$ gilt.	☐
Es gibt genau ein c, für das $f''(c) = 0$ gilt.	☐
Es gibt kein c, für das $f(c) = 0$ gilt.	☐
Es gibt kein c, für das $f'(c) = 0$ gilt.	☐
Es gibt genau ein c, für das $f(c) = 0$ gilt.	☐
Es gibt kein c, für das $f''(c) = 0$ gilt.	☐

[0/1 P.]

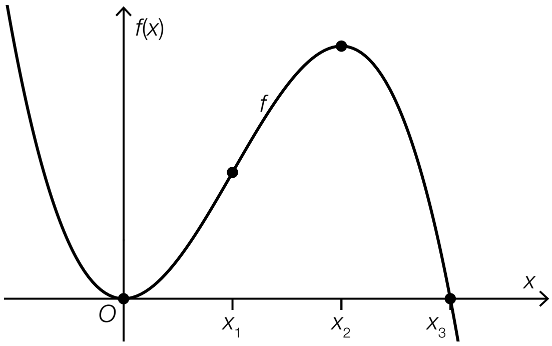
Möglicher Lösungsweg

Es gibt genau ein c, für das $f'(c) = 0$ gilt.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Punkte auf einem Graphen

Nachstehend ist der Graph der Polynomfunktion 3. Grades f dargestellt. Zusätzlich sind vier Punkte mit den x-Koordinaten 0, x_1, x_2 und x_3 eingezeichnet. Diese vier Punkte sind charakteristische Punkte des Graphen (Schnittpunkte mit den Achsen, Extrempunkte, Wendepunkt).



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Stellen 0, x_1, x_2 und x_3 jeweils die zutreffende Aussage aus A bis F zu.

0	
x_1	
x_2	
x_3	

A	An dieser Stelle ist die erste Ableitung gleich null und die zweite Ableitung negativ.
B	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung negativ.
C	An dieser Stelle ist die erste Ableitung gleich null und die zweite Ableitung positiv.
D	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung positiv.
E	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung gleich null.
F	An dieser Stelle ist die erste Ableitung positiv und die zweite Ableitung gleich null.

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

0	C
x_1	F
x_2	A
x_3	B

A	An dieser Stelle ist die erste Ableitung gleich null und die zweite Ableitung negativ.
B	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung negativ.
C	An dieser Stelle ist die erste Ableitung gleich null und die zweite Ableitung positiv.
D	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung positiv.
E	An dieser Stelle sind die erste und die zweite Ableitung gleich null.
F	An dieser Stelle ist die erste Ableitung positiv und die zweite Ableitung gleich null.

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Ableitungsfunktion einer Polynomfunktion dritten Grades

Eine Polynomfunktion 3. Grades f hat an der Stelle $x_1 = -2$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x_2 = 2$ ein lokales Minimum.
Die Funktion hat die 1. Ableitungsfunktion f'.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

f' ist im gesamten Intervall $(-2; 2)$ positiv.	☐
f' hat an der Stelle x_1 den gleichen Wert wie an der Stelle x_2.	☐
f' ist im gesamten Intervall $(-3; -2)$ negativ.	☐
f' hat an der Stelle $x = 4$ einen positiven Wert.	☐
f' hat an der Stelle $x = 0$ den Wert 0.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

f' hat an der Stelle x_1 den gleichen Wert wie an der Stelle x_2.	☒
f' hat an der Stelle $x = 4$ einen positiven Wert.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Polynomfunktion dritten Grades

Vom Graphen einer Polynomfunktion dritten Grades f sind der Tiefpunkt $T = (-1 | 2)$ sowie der Hochpunkt $H = (1 | 4)$ bekannt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Die Funktion f ist im Intervall (1; 3) streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f weist im Intervall (–1; 1) einen Monotoniewechsel auf.	☐
Die Funktion f ist im Intervall (–3; 1) streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall (–1; 1) durchgehend rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt).	☐
Die Funktion f weist im Intervall (0; 2) einen Monotoniewechsel auf.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Funktion *f* ist im Intervall (1; 3) streng monoton fallend.	☒
Die Funktion *f* weist im Intervall (0; 2) einen Monotoniewechsel auf.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Monotonie- und Krümmungsverhalten

Gegeben sind eine Polynomfunktion f und zwei Stellen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$.
Für die 1. Ableitung f' von f gilt:
$f'(x_1) < 0$ und $f'(x_2) > 0$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jeden Fall zutreffen. *[2 aus 5]*

Im Intervall $(x_1; x_2)$ gibt es mindestens eine Stelle x_0, für die $f'(x_0) = 0$ gilt.	☐
Die Funktion f hat im Intervall $(x_1; x_2)$ eine lokale Maximumstelle.	☐
Die Funktion f hat im Intervall $(x_1; x_2)$ eine Wendestelle.	☐
Im Intervall $(x_1; x_2)$ schneidet der Graph von f mindestens einmal die x-Achse.	☐
Im Intervall $(x_1; x_2)$ ändert sich das Monotonieverhalten von f.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Im Intervall $(x_1; x_2)$ gibt es mindestens eine Stelle x_0, für die $f'(x_0) = 0$ gilt.	☒
Im Intervall $(x_1; x_2)$ ändert sich das Monotonieverhalten von f.	☒

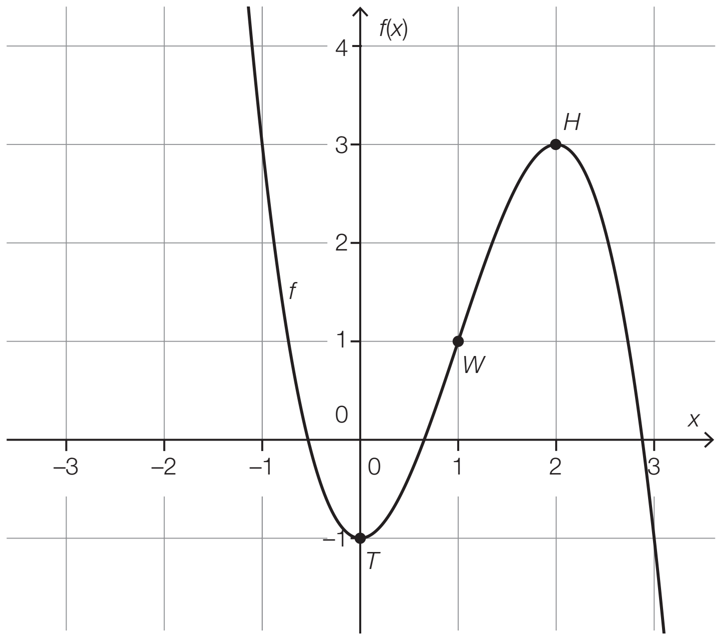
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Ableitungen*

Aufgabennummer: 1_869	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)

Gegeben ist der Graph der Polynomfunktion 3. Grades *f*. Die Koordinaten der eingezeichneten Punkte (Tiefpunkt *T*, Wendepunkt *W* und Hochpunkt *H*) sind ganzzahlig.



Unten stehend sind verschiedene Aussagen zur 1. bzw. 2. Ableitung von *f* gegeben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$f'(0) > 0$	☐
$f''(0) > 0$	☐
$f'(1) > 0$	☐
$f'(2) > 0$	☐
$f''(2) > 0$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$f''(0) > 0$	☒
$f'(1) > 0$	☒

Lösungsschlüssel

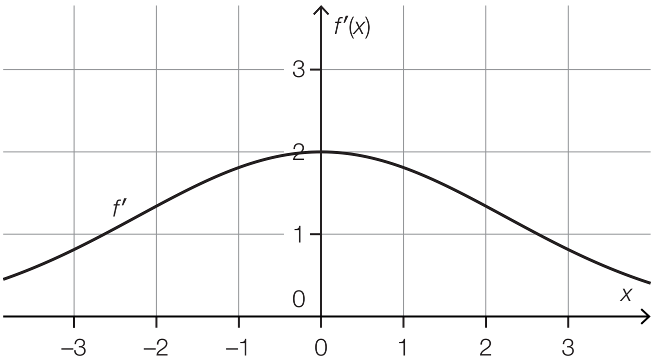
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Funktionseigenschaften*

Aufgabennummer: 1_846	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der 1. Ableitungsfunktion f' einer Polynomfunktion f dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf die Funktion f auf jeden Fall zutreffen. *[2 aus 5]*

Im Intervall [–3; 3] ist die Funktion f streng monoton steigend.	☐
Der Graph von f ist im Intervall [–3; 3] symmetrisch zur senkrechten Achse.	☐
Die Funktion f hat im Intervall [–3; 3] mindestens eine Wendestelle.	☐
Im Intervall [–3; 3] sind alle Funktionswerte von f positiv.	☐
Die Funktion f hat im Intervall [–3; 3] mindestens eine lokale Extremstelle.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

Im Intervall [–3; 3] ist die Funktion *f* streng monoton steigend.	☒
Die Funktion *f* hat im Intervall [–3; 3] mindestens eine Wendestelle.	☒

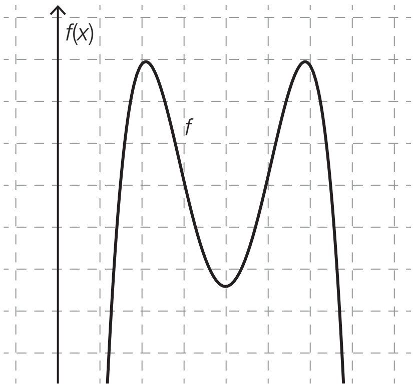
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_798	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades $f: x \mapsto f(x)$ dargestellt. Die x-Achse ist nicht eingezeichnet.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die für die dargestellte Polynomfunktion f bei jeder Lage der x-Achse zutreffen.

Es gibt genau zwei Stellen x_1 und x_2 mit $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = 0$.	☐
Es gibt genau zwei Stellen x_1 und x_2 mit $f'(x_1) = 0$ und $f'(x_2) = 0$.	☐
Es gibt genau eine Stelle x_1 mit $f''(x_1) = 0$.	☐
Es gibt genau eine Stelle x_1 mit $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$.	☐
Es gibt genau eine Stelle x_1 mit $f'(x_1) > 0$ und $f''(x_1) = 0$.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

Es gibt genau eine Stelle x_1 mit $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$.	☒
Es gibt genau eine Stelle x_1 mit $f'(x_1) > 0$ und $f''(x_1) = 0$.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

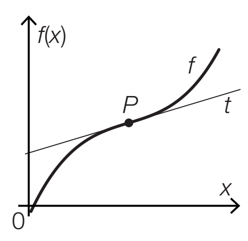
Kurvenverlauf*

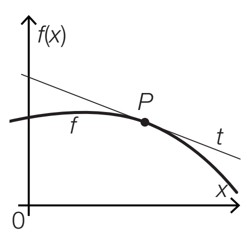
Aufgabennummer: 1_774	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AN 3.3

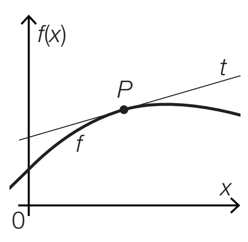
Die unten links stehenden Abbildungen zeigen jeweils die Tangente t in einem Punkt $P = (x_P|f(x_P))$ des Graphen einer Polynomfunktion f. Dabei ist P der einzige gemeinsame Punkt des Graphen von f und der Tangente t. In der unten rechts stehenden Tabelle sind Aussagen über $f'(x_P)$ und $f''(x_P)$ gegeben.

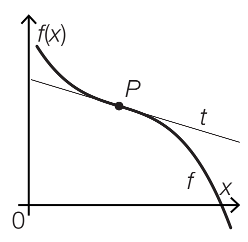
Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Abbildungen jeweils die zutreffende Aussage (aus A bis F) zu.





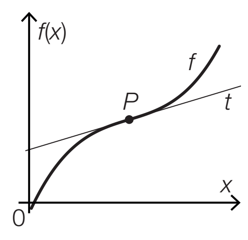
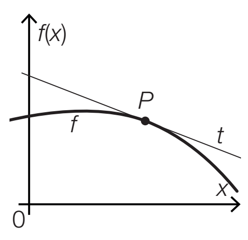
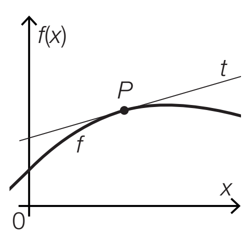
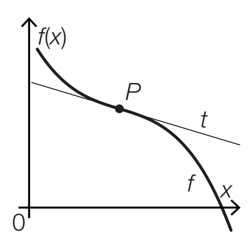




A	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) > 0$
B	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) < 0$
C	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) > 0$
D	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) < 0$
E	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) = 0$
F	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) = 0$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

	E
	D
	B
	F

A	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) > 0$
B	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) < 0$
C	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) > 0$
D	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) < 0$
E	$f'(x_P) > 0$ und $f''(x_P) = 0$
F	$f'(x_P) < 0$ und $f''(x_P) = 0$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Abbildungen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist. Bei zwei oder drei richtigen Zuordnungen ist ein halber Punkt zu geben.

Eigenschaften einer Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_750	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AN 3.3

Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass jedenfalls eine korrekte Aussage entsteht.

Wenn für alle $x \in (a; b)$ ___①___ gilt, dann ist die Funktion f im Intervall $(a; b)$ ___②___.

①	
$f(x) > 0$	☐
$f'(x) < 0$	☐
$f''(x) > 0$	☐

②	
streng monoton fallend	☐
rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt)	☐
streng monoton steigend	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

①	
$f'(x) < 0$	☒

②	
streng monoton fallend	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 1_725	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

Gegeben ist eine Polynomfunktion f dritten Grades. An den beiden Stellen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ gelten folgende Bedingungen:

$$f'(x_1) = 0 \text{ und } f''(x_1) < 0$$
$$f'(x_2) = 0 \text{ und } f''(x_2) > 0$$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die für die Funktion f auf jeden Fall zutreffen.

$f(x_1) > f(x_2)$	☐
Es gibt eine weitere Stelle x_3 mit $f'(x_3) = 0$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f(x_3) > f(x_1)$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f''(x_3) = 0$.	☐
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f'(x_3) > 0$.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$f(x_1) > f(x_2)$	☒
Im Intervall $[x_1; x_2]$ gibt es eine Stelle x_3 mit $f''(x_3) = 0$.	☒

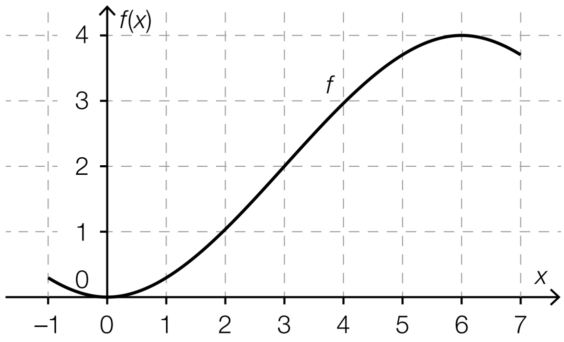
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Polynomfunktion*

Aufgabennummer: 1_702	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad 3 im Intervall $[-1; 7]$ dargestellt. Alle lokalen Extremstellen sowie die Wendestelle von f im Intervall $[-1; 7]$ sind ganzzahlig und können aus der Abbildung abgelesen werden.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden auf die Funktion f zutreffenden Aussagen an!

$f''(3) = 0$	☐
$f'(1) > f'(3)$	☐
$f''(1) = f''(5)$	☐
$f''(1) > f''(4)$	☐
$f'(3) = 0$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

$f''(3) = 0$	☒
$f''(1) > f''(4)$	☒

Lösungsschlüssel

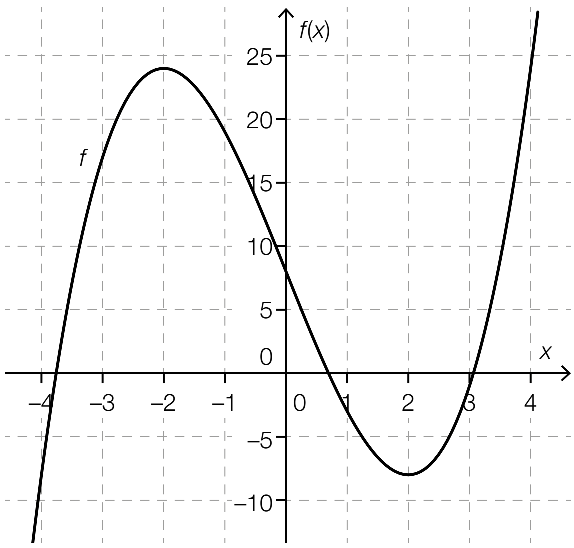
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 1_677	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades f. Die Stellen $x = -2$ und $x = 2$ sind Extremstellen von f.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$f'(0) = 0$	☐
$f''(1) > 0$	☐
$f'(-3) < 0$	☐
$f'(2) = 0$	☐
$f''(-2) > 0$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

$f''(1) > 0$	☒
$f'(2) = 0$	☒

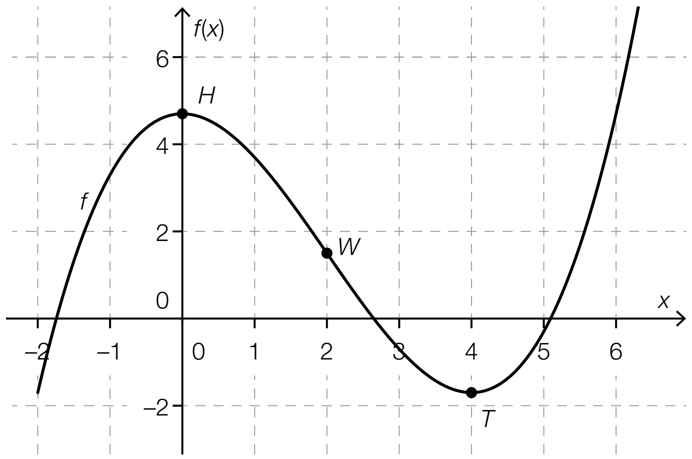
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Zweite Ableitung*

Aufgabennummer: 1_653	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

Gegeben ist der Graph einer Polynomfunktion f dritten Grades.



Die eingezeichneten Punkte sind der Hochpunkt $H = (0|f(0))$, der Wendepunkt $W = (2|f(2))$ und der Tiefpunkt $T = (4|f(4))$ des Graphen.

Aufgabenstellung:

Nachstehend sind fünf Aussagen über die zweite Ableitung von f gegeben.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Für alle x aus dem Intervall $[-1; 1]$ gilt: $f''(x) < 0$.	☐
Für alle x aus dem Intervall $[1; 3]$ gilt: $f''(x) < 0$.	☐
Für alle x aus dem Intervall $[3; 5]$ gilt: $f''(x) < 0$.	☐
$f''(0) = f''(4)$	☐
$f''(2) = 0$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

Für alle x aus dem Intervall $[-1; 1]$ gilt: $f''(x) < 0$.	☒
$f''(2) = 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Bundesinstitut bifie Wien | Zentrum für Innovation & Qualitätsentwicklung

Steigung einer Funktion

Aufgabennummer: 1_036	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.3

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + 5$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Wert der Steigung der Funktion f an der Stelle $x = 2$!

Möglicher Lösungsweg

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 4$

$f'(2) = \frac{3}{4} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = 13$

Der Wert der Steigung der Funktion f an der Stelle $x = 2$ ist 13.

Lösungsschlüssel

Die Aufgabe gilt nur dann als gelöst, wenn der Wert der Steigung (13) richtig berechnet ist.

Wendestelle*

Aufgabennummer: 1_605	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.3

Eine Polynomfunktion dritten Grades f hat die Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = 12 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 8$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, ob die Funktion f an der Stelle $x = 6$ eine Wendestelle hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

Die Funktion f hat an der Stelle $x = 6$ keine Wendestelle.

Mögliche Begründung:

$f''(x) = 24 \cdot x - 4$
$f''(6) = 140 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Die Funktion f kann an der Stelle $x = 6$ keine Wendestelle haben.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe, dass die Funktion f an der Stelle $x = 6$ keine Wendestelle hat, und eine korrekte Begründung.

Zeit-Weg-Funktion*

Aufgabennummer: 1_582	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

Die geradlinige Bewegung eines Autos wird mithilfe der Zeit-Weg-Funktion s beschrieben. Innerhalb des Beobachtungszeitraums ist die Funktion s streng monoton wachsend und rechtsgekrümmt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für diesen Beobachtungszeitraum zutreffenden Aussagen an!

Die Geschwindigkeit des Autos wird immer größer.	☐
Die Funktionswerte von s' sind negativ.	☐
Die Funktionswerte von s'' sind negativ.	☐
Der Wert des Differenzenquotienten von s im Beobachtungszeitraum ist negativ.	☐
Der Wert des Differenzialquotienten von s wird immer kleiner.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

Die Funktionswerte von s'' sind negativ.	☒
Der Wert des Differenzialquotienten von s wird immer kleiner.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

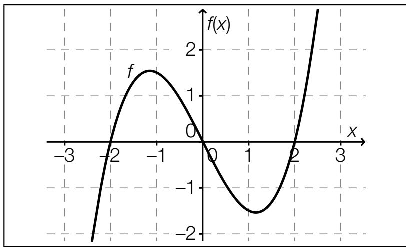
Eigenschaften der zweiten Ableitung*

Aufgabennummer: 1_526	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

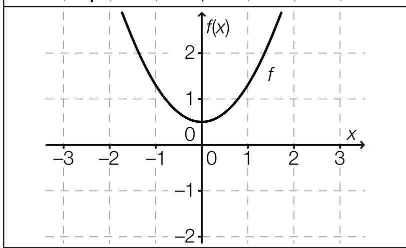
Gegeben sind die Graphen von fünf reellen Funktionen.

Aufgabenstellung:

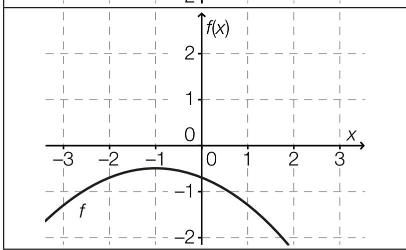
Für welche der angegebenen Funktionen gilt $f''(x) > 0$ im Intervall $[-1; 1]$?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Graphen an!



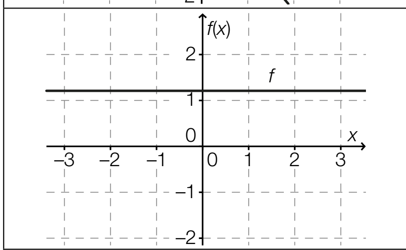
☐



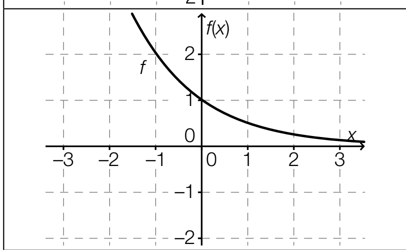
☐



☐



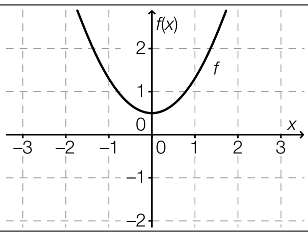
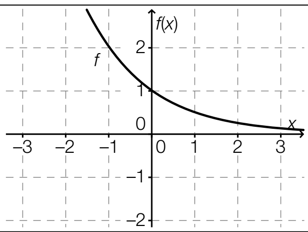
☐



☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

	☒
	☒

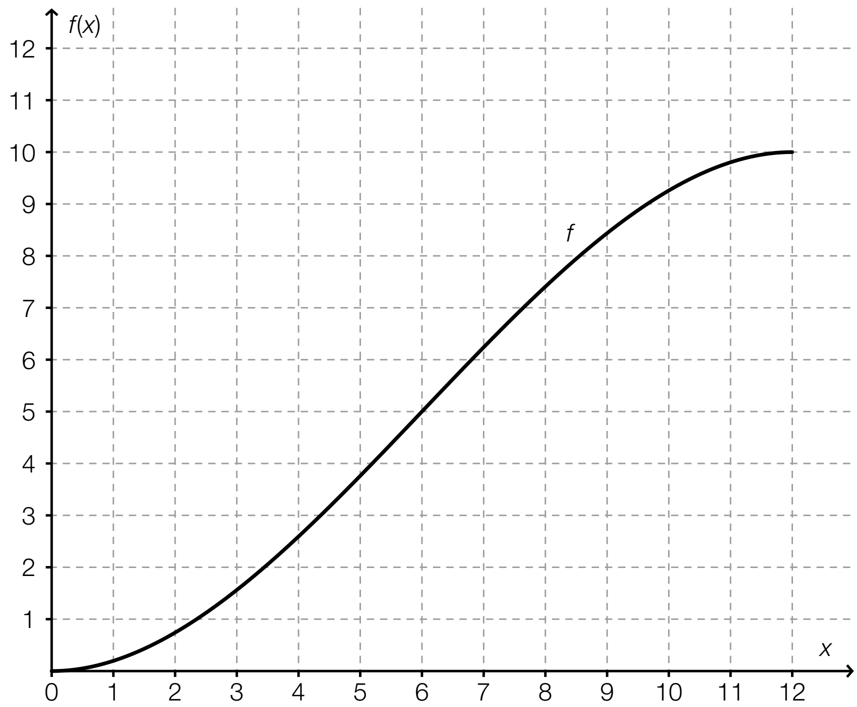
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Graphen angekreuzt sind.

Differenzierbare Funktion*

Aufgabennummer: 1_502	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

Die nachstehende Abbildung zeigt den Ausschnitt eines Graphen einer Polynomfunktion f.
Die Tangentensteigung an der Stelle $x = 6$ ist maximal.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden für die gegebene Funktion f zutreffenden Aussagen an!

$f''(6) = 0$	☐
$f''(11) < 0$	☐
$f''(2) < f''(10)$	☐
$f'(6) = 0$	☐
$f'(7) < f'(10)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

$f''(6) = 0$	☒
$f''(11) < 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Nachweis eines lokalen Minimums*

Aufgabennummer: 1_478	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.3

Gegeben ist eine Polynomfunktion p mit $p(x) = x^3 - 3 \cdot x + 2$. Die erste Ableitung p' mit $p'(x) = 3 \cdot x^2 - 3$ hat an der Stelle $x = 1$ den Wert null.

Aufgabenstellung:

Zeigen Sie rechnerisch, dass p an dieser Stelle ein lokales Minimum (d. h. ihr Graph dort einen Tiefpunkt) hat!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

Möglicher rechnerischer Nachweis:

$p''(x) = 6x$
$p''(1) = 6 > 0 \;\Rightarrow\;$ An der Stelle 1 liegt ein lokales Minimum vor.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis. Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lokale Extremstellen*

Aufgabennummer: 1_454	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 3.3

In der nachstehenden Tabelle sind Funktionswerte einer Polynomfunktion f dritten Grades sowie ihrer Ableitungsfunktionen f' und f'' angegeben.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	–2	2	0	–2	2
$f'(x)$	9	0	–3	0	9
$f''(x)$	–12	–6	0	6	12

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, an welchen Stellen des Intervalls (0; 4) die Funktion f jedenfalls lokale Extremstellen hat!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

Die Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ sind lokale Extremstellen der Funktion *f*.

Lösungsschlüssel

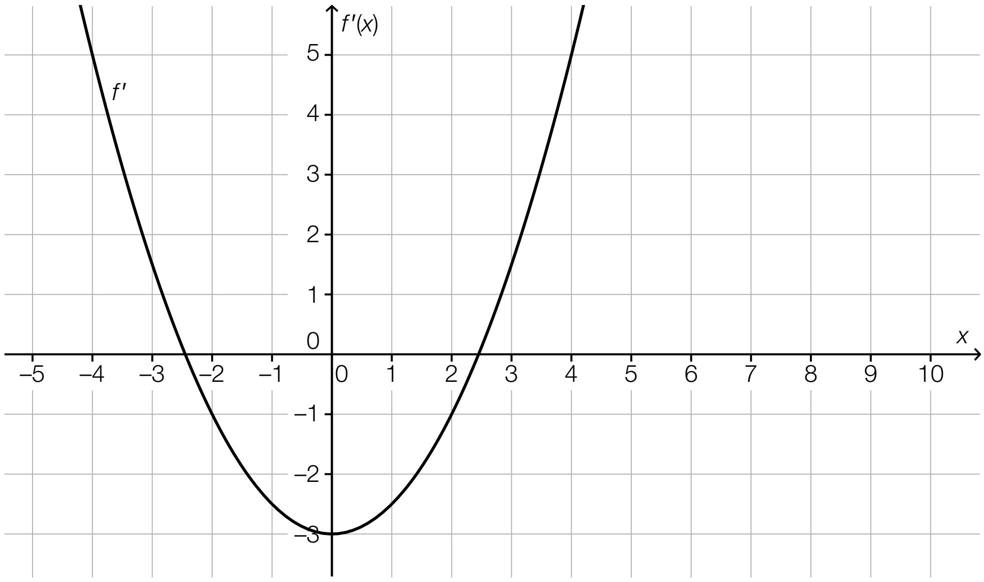
Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Stellen.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Graph einer Ableitungsfunktion*

Aufgabennummer: 1_430	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Die Funktion f' ist eine Polynomfunktion zweiten Grades.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion dritten Grades.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [0; 4] streng monoton steigend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [–4; –3] streng monoton fallend.	☐
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle.	☐
Die Funktion f ist im Intervall [–4; 4] linksgekrümmt.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

Die Funktion f ist eine Polynomfunktion dritten Grades.	☒
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle.	☒

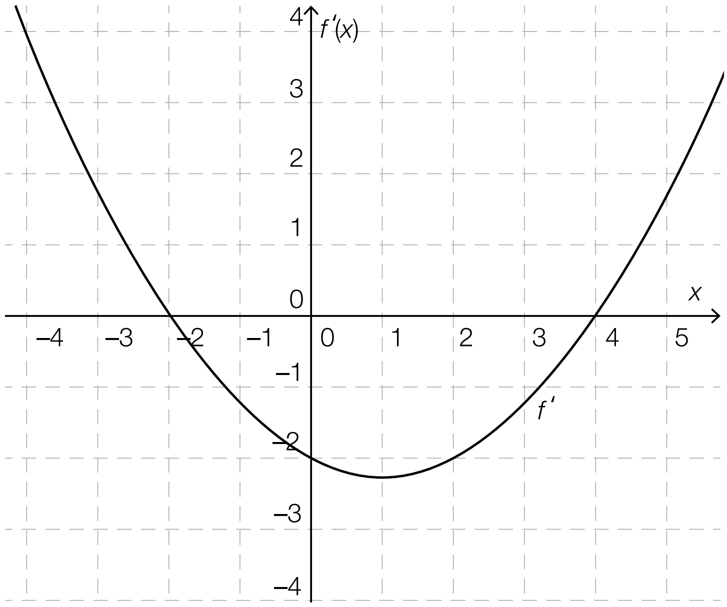
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Graph einer Ableitungsfunktion*

Aufgabennummer: 1_405	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - 2$ einer Polynomfunktion f.



Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Aussagen über die Funktion f sind richtig?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Funktion f hat im Intervall $[-4; 5]$ zwei lokale Extremstellen.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[1; 2]$ monoton steigend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[-4; -2]$ monoton fallend.	☐
Die Funktion f ist im Intervall $[-4; 0]$ linksgekrümmt (d. h. $f''(x) > 0$ für alle $x \in [-4; 0]$).	☐
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 1$ eine Wendestelle.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

Die Funktion f hat im Intervall $[-4; 5]$ zwei lokale Extremstellen.	☒
Die Funktion f hat an der Stelle $x = 1$ eine Wendestelle.	☒

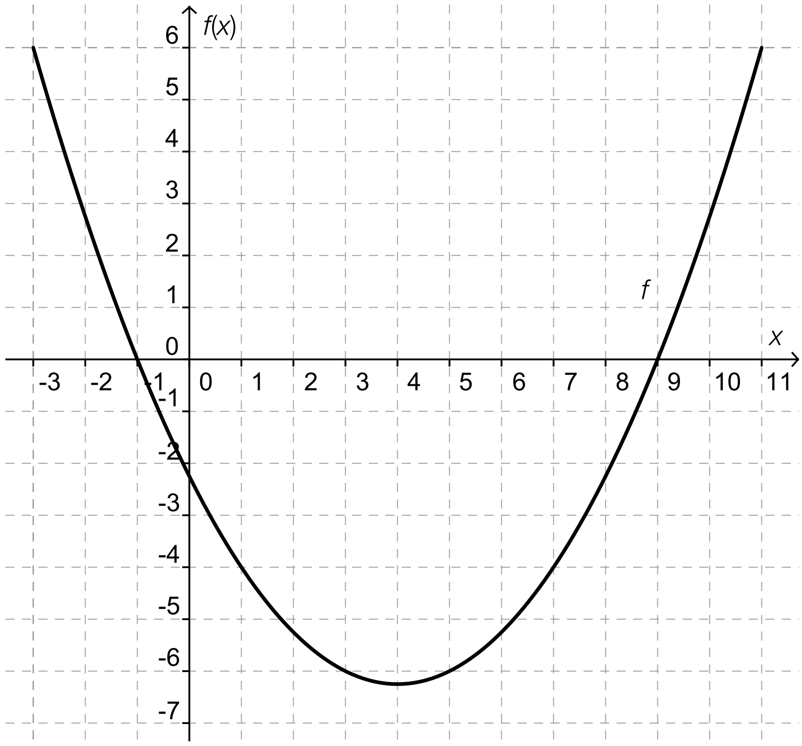
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Negative erste Ableitung*

Aufgabennummer: 1_382	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 3.3

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer Funktion f im Intervall $[-3; 11]$ dargestellt. An der Stelle $x = 4$ hat die Funktion ein lokales Minimum.



Aufgabenstellung:

Geben Sie das Intervall I für diejenigen Stellen $x \in [-3; 11]$ an, für die gilt: $f'(x) < 0$!

I = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$I = (-3; 4)$

oder:

$I = [-3; 4)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Lösung ist nur dann als richtig zu werten, wenn das Lösungsintervall bei 4 offen ist.

Extremstelle*

Aufgabennummer: 1_357	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

Die Ermittlung lokaler Extremstellen einer Polynomfunktion f erfolgt häufig mithilfe der Differenzialrechnung.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die stets zutreffend sind!

Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann wechselt die Funktion an der Stelle x_0 das Krümmungsverhalten.	☐
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f''(x_0) = 0$.	☐
Wenn die Funktion f bei x_0 das Monotonieverhalten ändert, dann liegt bei x_0 eine lokale Extremstelle von f.	☐
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.	☐
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x)$ für $x < x_0$ immer negativ und für $x > x_0$ immer positiv.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

Wenn die Funktion f bei x_0 das Monotonieverhalten ändert, dann liegt bei x_0 eine lokale Extremstelle von f.	☒
Wenn x_0 eine lokale Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.	☒

Lösungsschlüssel

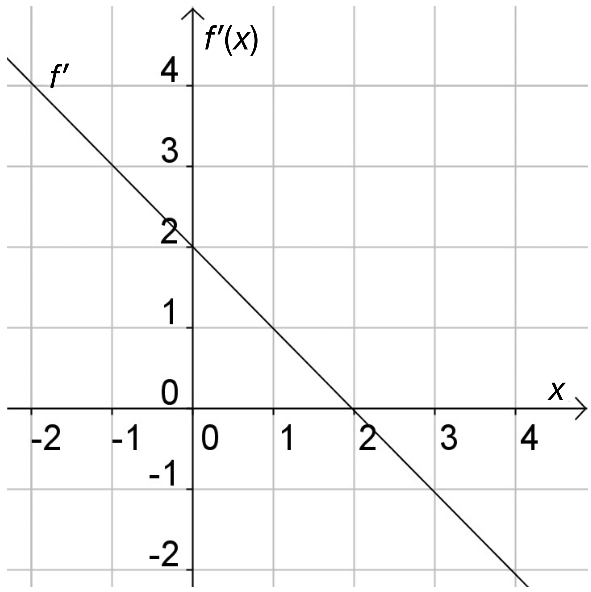
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Eigenschaften einer Funktion*

Aufgabennummer: 1_334	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 3.3

Von einer reellen Polynomfunktion f sind der Graph und die Funktionsgleichung der Ableitungsfunktion f' gegeben: $f'(x) = -x + 2$.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Stelle $x_1 = 0$ ist eine Wendestelle von f.	☐
Im Intervall [0; 1] ist f streng monoton fallend.	☐
Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(0 \mid f(0))$ hat die Steigung 2.	☐
Die Stelle $x_2 = 2$ ist eine lokale Maximumstelle von f.	☐
Der Graph der Funktion f weist im Intervall [2; 3] eine Linkskrümmung (positive Krümmung) auf.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

Die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(0\|f(0))$ hat die Steigung 2.	☒
Die Stelle $x_2 = 2$ ist eine lokale Maximumstelle von f.	☒

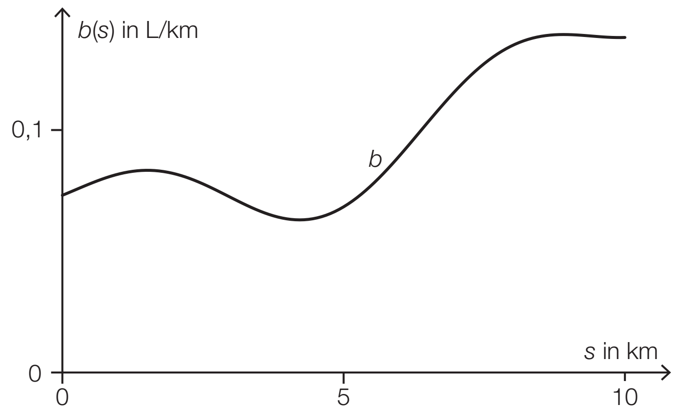
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Benzinverbrauch bei der Fahrt auf einer Landstraße*

Aufgabennummer: 1_870	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	

Maria fährt mit ihrem Auto auf einer Landstraße eine Strecke von 10 km.
Die Funktion *b* gibt den momentanen Benzinverbrauch $b(s)$ (in L/km) in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke *s* (in km) seit Beginn der Fahrt an (siehe nachstehende Abbildung).



Der Ausdruck *V* hat die Einheit L/km und wird mithilfe der nachstehenden Formel berechnet.

$V = \frac{1}{10} \cdot \int_0^{10} b(s)\,ds$

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie *V* im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

Der Ausdruck V gibt den durchschnittlichen Benzinverbrauch (in L/km) während der (10 km langen) Fahrt auf dieser Landstraße an.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

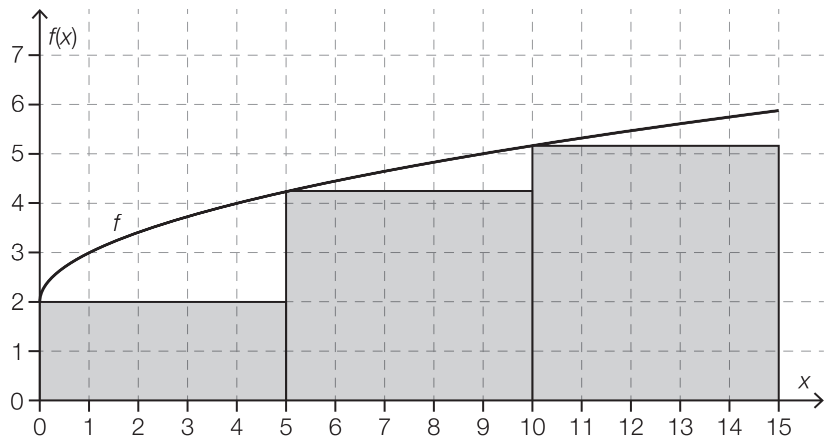
Fläche zwischen Graph und x-Achse*

Aufgabennummer: 1_822	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.1

Gegeben ist eine Potenzfunktion $f\colon [0; 15] \to \mathbb{R}^+$.
Der Inhalt A derjenigen Fläche, die vom Graphen von f, von der x-Achse und von den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 15$ begrenzt wird, kann durch den nachstehenden Ausdruck U näherungsweise berechnet werden.

$U = 5 \cdot (f(0) + f(5) + f(10))$

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph von f und – grau markiert – die Fläche, deren Inhalt durch den Ausdruck U berechnet wird, dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, mit denen der Flächeninhalt A besser als mit dem Ausdruck U angenähert werden kann.

$5 \cdot (f(0) + f(5) + f(10) + f(15))$	☐
$2{,}5 \cdot (f(0) + f(2{,}5) + f(5) + f(7{,}5) + f(10) + f(12{,}5))$	☐
$\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$f(0) \cdot 15$	☐
$f(15) \cdot 5$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

$2{,}5 \cdot (f(0) + f(2{,}5) + f(5) + f(7{,}5) + f(10) + f(12{,}5))$	☒
$\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Ausdrücke angekreuzt sind.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Untersumme und Obersumme*

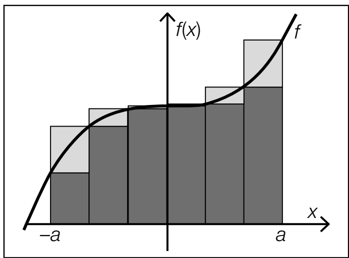
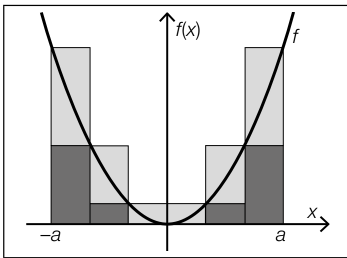
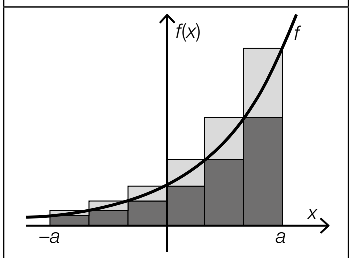
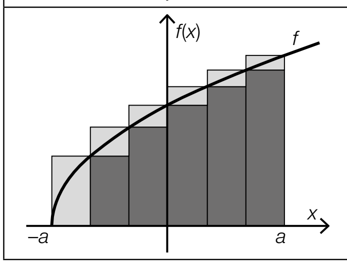
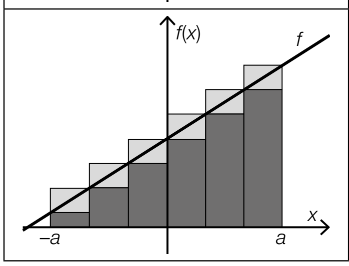
Aufgabennummer: 1_678	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.1

In den nachstehenden Abbildungen sind jeweils der Graph einer Funktion *f* sowie eine Untersumme *U* (= Summe der Flächeninhalte der dunkel markierten, gleich breiten Rechtecke) und eine Obersumme *O* (= Summe der Flächeninhalte der dunkel und hell markierten, gleich breiten Rechtecke) im Intervall [–*a*; *a*] dargestellt.

Aufgabenstellung:

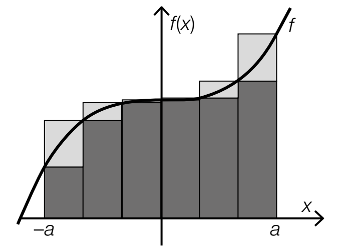
Für zwei Funktionen, deren Graph nachstehend abgebildet ist, gilt bei konstanter Rechteckbreite im Intervall [–*a*; *a*] die Beziehung $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{O+U}{2}$.

Kreuzen Sie die beiden Abbildungen an, bei denen die gegebene Beziehung erfüllt ist!

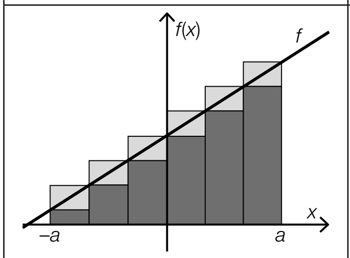
	☐		☐
	☐		☐
	☐		

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung



☒



☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Funktionsgraphen angekreuzt sind.

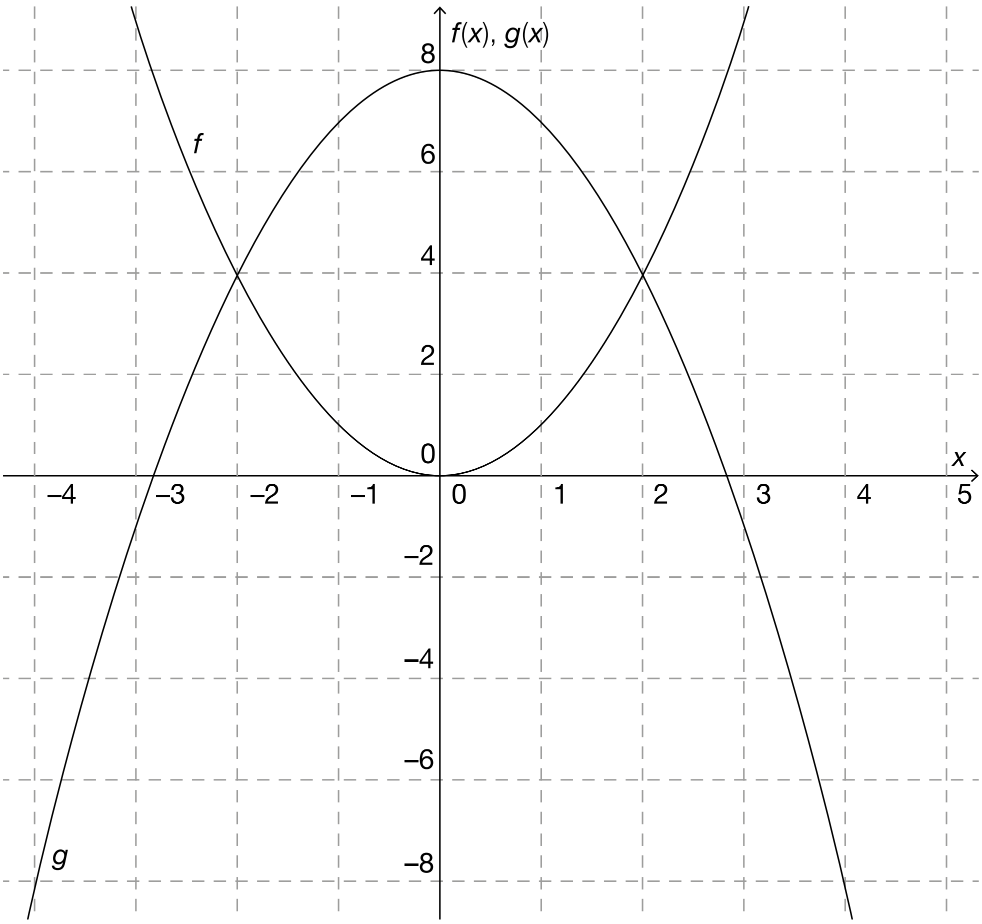
Schnitt zweier Funktionen*

Aufgabennummer: 1_333	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AN 4.1

Gegeben sind die beiden reellen Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x) = x^2$ und $g(x) = -x^2 + 8$.

Aufgabenstellung:

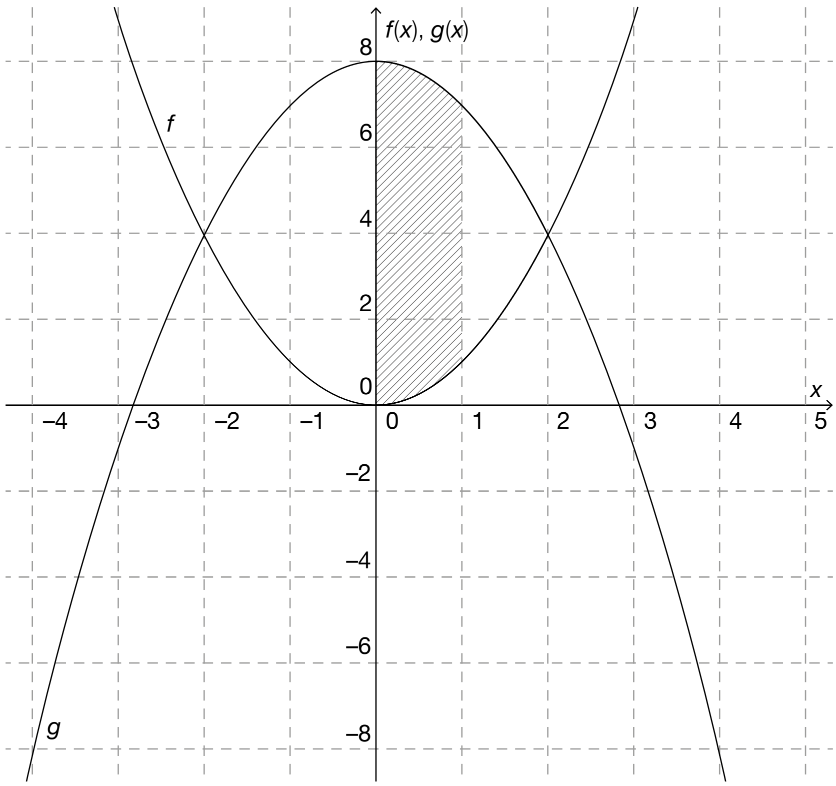
Im nachstehenden Koordinatensystem sind die Graphen der beiden Funktionen f und g dargestellt. Schraffieren Sie diejenige Fläche, deren Größe A mit $A = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet werden kann!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

Zu schraffieren ist das Flächenstück zwischen den Graphen *f* und *g*, der Geraden $x = 1$ sowie der senkrechten Koordinatenachse.



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn die gesuchte Fläche klar ersichtlich und korrekt schraffiert ist.

Bestimmtes Integral

Die Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat eine bestimmte Stammfunktion F. Von dieser Stammfunktion F sind nachstehend einige Wertepaare gegeben.

x	$F(x)$
0	0
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15

Weiters ist die Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) + 2$ gegeben.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie $\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x$.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\int_1^4 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^4 (f(x) + 2)\,\mathrm{d}x = (F(x) + 2 \cdot x)\Big|_1^4 = F(4) + 8 - (F(1) + 2) = 15$

Ein Punkt für das richtige Berechnen des Integrals.

Grundkompetenz: AN 4.2

Arbeit bei der Dehnung einer Schraubenfeder*

Aufgabennummer: 1_823	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.2

Eine Schraubenfeder mit der Federkonstanten $k = 40$ N/m wird aus der Gleichgewichtslage $s_0 = 0$ m um $h = 0{,}08$ m gedehnt.
Die dabei verrichtete Arbeit W (in Joule) wird mithilfe des nachstehenden Ausdrucks berechnet.

$$W = \int_{s_0}^{s_0+h} k \cdot s \, \mathrm{d}s$$

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die bei der oben beschriebenen Dehnung verrichtete Arbeit.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$W = \int_0^{0,08} 40 \cdot s\,\mathrm{d}s = 20 \cdot s^2 \,\Big|_0^{0,08} = 0{,}128$

$\Rightarrow \quad W = 0{,}128$ Joule

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Joule" nicht angegeben sein muss.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bestimmen eines Koeffizienten*

Aufgabennummer: 1_726	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.2

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2 + 2$ mit $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Koeffizienten a so an, dass die Gleichung $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ erfüllt ist.

a = ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$a = -3$

Lösungsschlüssel

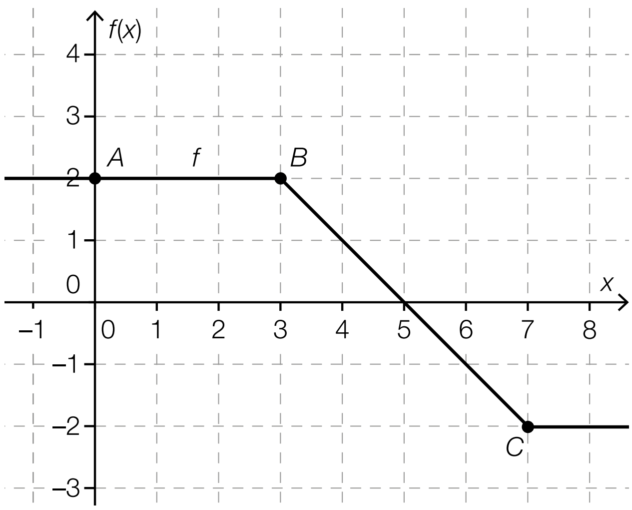
Ein Punkt für die richtige Lösung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bestimmtes Integral*

Aufgabennummer: 1_654	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.2

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer abschnittsweise linearen Funktion f dargestellt. Die Koordinaten der Punkte A, B und C des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x$!

$\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

$\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$

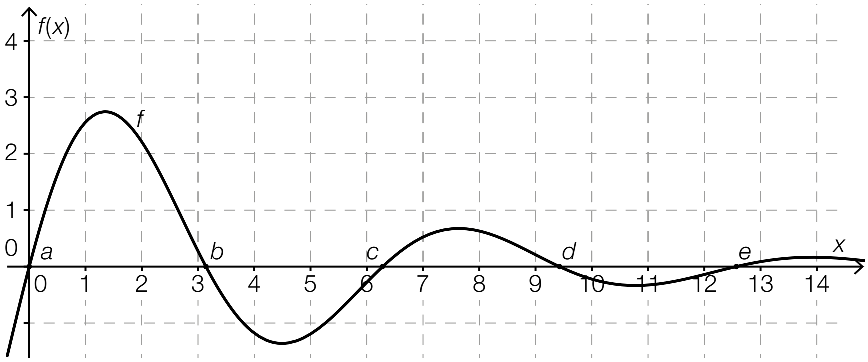
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Bestimmtes Integral*

Aufgabennummer: 1_606	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.2

Der Graph einer Funktion f schneidet die x-Achse in einem gewissen Bereich an den Stellen a, b, c, d und e.



Aufgabenstellung:

Welche der nachstehend angeführten bestimmten Integrale haben einen Wert, der größer als 0 ist?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden bestimmten Integrale an!

$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_b^d f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$	☒
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	☒

Lösungsschlüssel

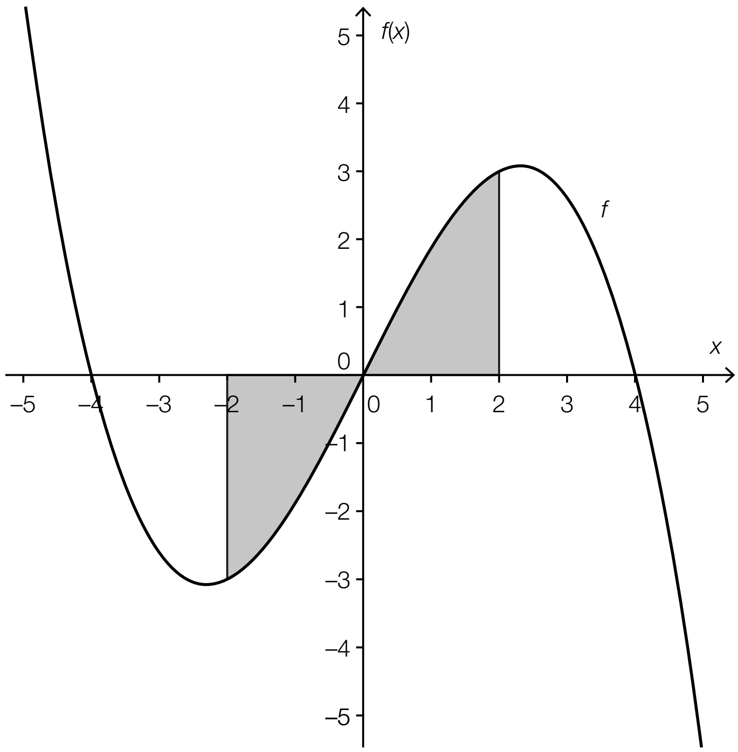
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen bestimmten Integrale angekreuzt sind.

Flächeninhalt*

Aufgabennummer: 1_525	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.2

Abgebildet ist ein Ausschnitt des Graphen der Polynomfunktion f mit $f(x) = -\frac{x^3}{8} + 2 \cdot x$.

Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall [–2; 2] ist grau markiert.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Inhalt der grau markierten Fläche!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$2 \cdot \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Integral*

Aufgabennummer: 1_501	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.2

Gegeben ist das bestimmte Integral $I = \int_0^a (25 \cdot x^2 + 3)\,\mathrm{d}x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, die für alle $a > 0$ denselben Wert wie I haben!

$25 \cdot \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^a 3\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_0^a 25\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^a 3\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_0^a 25 \cdot x^2\,\mathrm{d}x + 3$	☐
$\frac{25 \cdot a^3}{3} + 3 \cdot a$	☐
$50 \cdot a$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

$25 \cdot \int_0^a x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^a 3\,\mathrm{d}x$	☒
$\frac{25 \cdot a^3}{3} + 3 \cdot a$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Ausdrücke angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

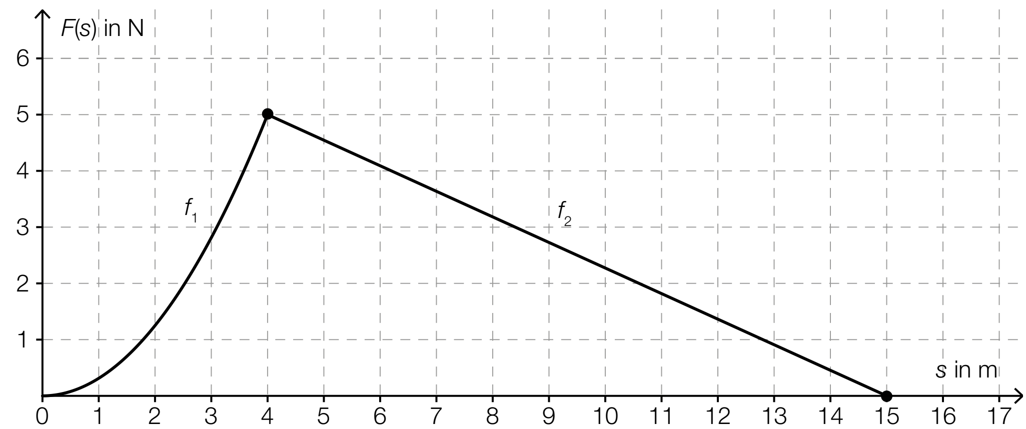
Arbeit beim Verschieben eines Massestücks*

Aufgabennummer: 1_477	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.2

Ein Massestück wird durch die Einwirkung einer Kraft geradlinig bewegt. Die dazu erforderliche Kraftkomponente in Wegrichtung ist als Funktion des zurückgelegten Weges in der nachstehenden Abbildung dargestellt. Der Weg s wird in Metern (m), die Kraft $F(s)$ in Newton (N) gemessen.

Im ersten Wegabschnitt wird $F(s)$ durch f_1 mit $f_1(s) = \frac{5}{16} \cdot s^2$ beschrieben. Im zweiten Abschnitt (f_2) nimmt sie linear auf den Wert null ab.

Die Koordinaten der hervorgehobenen Punkte des Graphen der Funktion sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Arbeit W in Joule (J), die diese Kraft an dem Massestück verrichtet, wenn es von $s = 0$ m bis zu $s = 15$ m bewegt wird!

W = ___________ J

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

$W = \int_0^4 \frac{5}{16} \cdot s^2 \, \mathrm{d}s + \frac{5 \cdot 11}{2}$

$W \approx 34{,}17$ J

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [34 J; 35 J]

Stammfunktion

Aufgabennummer: 1_453	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AN 4.2

Gegeben ist eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = e^{2 \cdot x}$.

Aufgabenstellung:

Welche von den unten durch ihre Funktionsgleichungen angegebenen Funktionen F ist Stammfunktion von f und verläuft durch den Punkt $P = (0|1)$?
Kreuzen Sie die zutreffende Antwort an!

$F(x) = e^{2 \cdot x} + \frac{1}{2}$	☐
$F(x) = 2 \cdot e^{2 \cdot x} - 1$	☐
$F(x) = 2 \cdot e^{2 \cdot x}$	☐
$F(x) = \frac{e^{2 \cdot x}}{2} + \frac{1}{2}$	☐
$F(x) = e^{2 \cdot x}$	☐
$F(x) = \frac{e^{2 \cdot x}}{2}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$F(x) = \frac{e^{2 \cdot x}}{2} + \frac{1}{2}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Antwortmöglichkeit angekreuzt ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Integrationsregeln*

Aufgabennummer: 1_429	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.2

Zwei der nachstehend angeführten Gleichungen sind für alle Polynomfunktionen f und bei beliebiger Wahl der Integrationsgrenzen a und b (mit $a < b$) richtig.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$\int_a^b (f(x) + x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b x\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_a^b f(2 \cdot x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_a^b (1 - f(x))\,\mathrm{d}x = x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_a^b (f(x) + 2)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2$	☐
$\int_a^b (3 \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

$\int_a^b (f(x) + x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b x\,\mathrm{d}x$	$\boxtimes$
$\int_a^b (3 \cdot f(x))\,\mathrm{d}x = 3 \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	$\boxtimes$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

Bundesministerium für Bildung

Funktionsgleichungen*	
Aufgabennummer: 1_381	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.2

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3x^2 + 2$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Funktionsgleichungen von zwei verschiedenen Funktionen F_1 und F_2 an, deren Ableitungsfunktion die Funktion f ist!

$F_1(x) =$ ____

$F_2(x) =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$F_1(x) = x^3 + 2x$

$F_2(x) = x^3 + 2x + 1$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe von zwei verschiedenen korrekten Funktionsgleichungen, wobei alle Funktionen in der Form $F(x) = x^3 + 2x + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ als richtig zu werten sind.

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen

In Abbildung 1 sind die Graphen der quadratischen Funktion f und der linearen Funktion g dargestellt.
In Abbildung 2 sind die Graphen der Funktionen F und G dargestellt.

Es gilt:
F ist eine Stammfunktion von f.
G ist eine Stammfunktion von g.

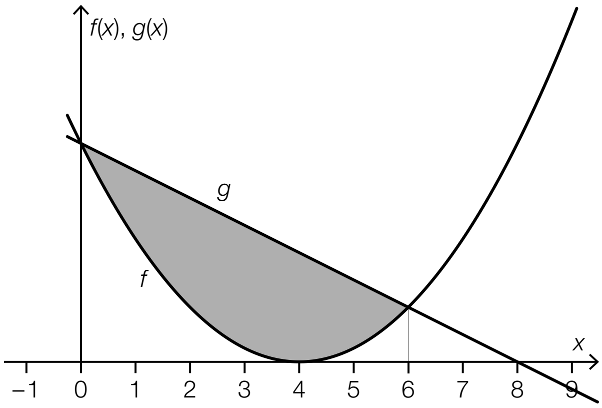


Abbildung 1

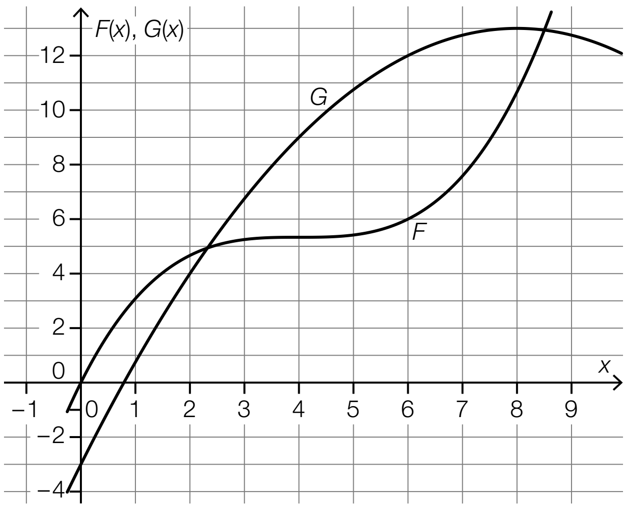


Abbildung 2

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildungen den Flächeninhalt A der grau markierten Fläche.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$A = \int_0^6 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = G(6) - G(0) - (F(6) - F(0)) = 12 - (-3) - (6 - 0)$
$A = 9$

Toleranzbereich: [8,5; 9,5]

Ein Punkt für das richtige Ermitteln von A.

Grundkompetenz: AN 4.3

Grenzkosten und Gesamtkosten

Die Grenzkosten für die Produktion eines bestimmten Produkts werden durch die Funktion K' modelliert. Es gilt:

$$K'(x) = \frac{1}{100} \cdot \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + 4\right)$$

x ... Produktionsmenge in Stück
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei der Produktionsmenge x in Euro pro Stück

Die Gesamtkosten werden in Euro angegeben.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie denjenigen Betrag, um den die Gesamtkosten steigen, wenn man von diesem Produkt 110 Stück statt 100 Stück produziert.

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$K(110) - K(100) = \int_{100}^{110} K'(x)\,\mathrm{d}x = 115\,505{,}233\ldots$

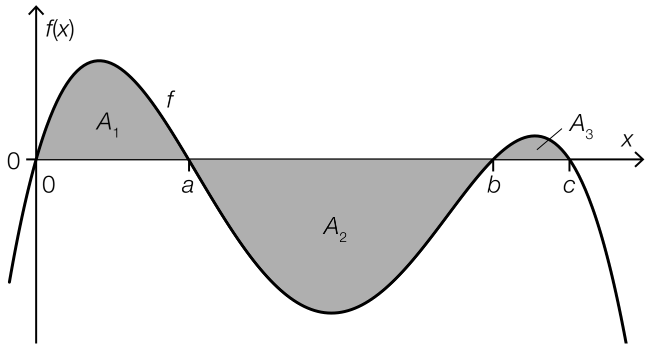
Die Gesamtkosten steigen um € 115.505,23.

Ein Punkt für das richtige Berechnen.

Grundkompetenz: AN 4.3

Integral und Flächeninhalt

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f, der die x-Achse an den Stellen 0, a, b und c schneidet.
Der Graph von f schließt mit der x-Achse drei Bereiche mit den Flächeninhalten $A_1 = 17$, $A_2 = 50$ sowie $A_3 = 2$ ein.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Ausdrücken jeweils den zugehörigen Wert aus A bis F zu.

$\int_0^c f(x)\,dx$	
$\int_0^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$	
$\int_0^a f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$	
$\int_a^c f(x)\,dx + 100$	

A	–31
B	69
C	–33
D	52
E	67
F	152

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

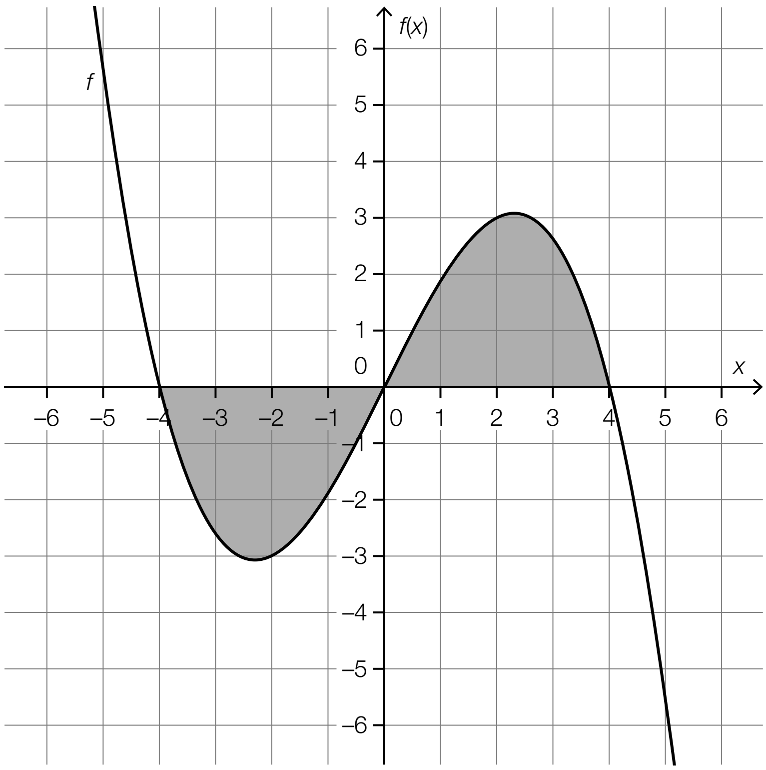
$\int_0^c f(x)\,\mathrm{d}x$	A
$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	C
$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$	B
$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + 100$	D

A	–31
B	69
C	–33
D	52
E	67
F	152

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Flächeninhalt

Nachstehend ist der Graph der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit ganzzahligen Nullstellen dargestellt.



Die Flächeninhalte der beiden grau markierten Bereiche sind gleich groß.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, mit denen der Flächeninhalt des gesamten grau markierten Bereichs berechnet werden kann. *[2 aus 5]*

$2 \cdot \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-4}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$2 \cdot \int_{-4}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\int_{-4}^0 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$\left\lvert \int_{-4}^4 f(x)\,\mathrm{d}x \right\rvert$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$2 \cdot \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$	☒
$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-4}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$	☒

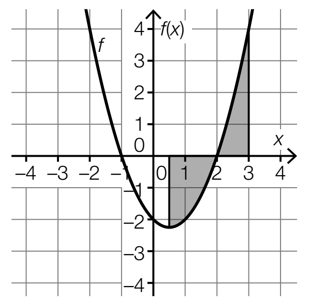
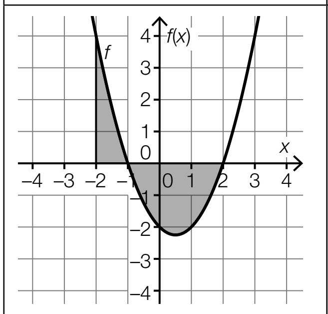
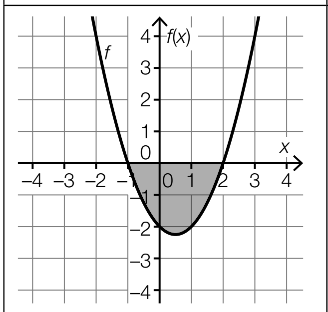
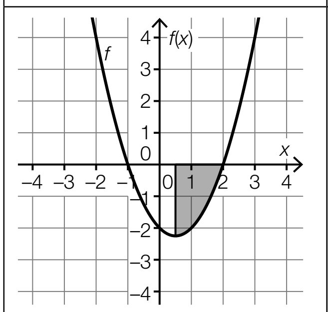
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bestimmte Integrale

Die vier unten stehenden Abbildungen zeigen jeweils den Graphen der quadratischen Funktion *f*. Der Graph von *f* schneidet die *x*-Achse an den Stellen $x = -1$ und $x = 2$. Die lokale Minimumstelle von *f* liegt bei $x = 0{,}5$.

Aufgabenstellung:

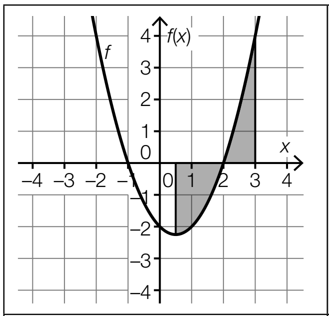
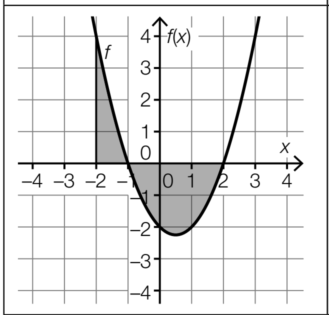
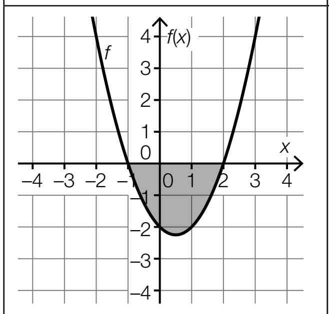
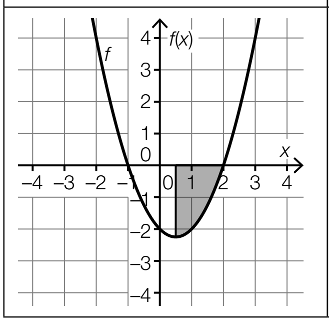
Ordnen Sie den grau markierten Flächen in den vier Abbildungen jeweils den entsprechenden Ausdruck zur Berechnung ihres Flächeninhalts aus A bis F zu.

A	$-\int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
B	$-\int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$
C	$\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
D	$\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
E	$\int_{-2}^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$
F	$-2 \cdot \int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

	B
	D
	F
	A

A	$-\int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
B	$-\int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$
C	$\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
D	$\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
E	$\int_{-2}^{0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$
F	$-2 \cdot \int_{0,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Pilzsporen

Pilze vermehren sich mithilfe von Sporen.

Bei einem Experiment bedecken zum Zeitpunkt $t = 0$ die Sporen eines bestimmten Pilzes eine Fläche mit einem Inhalt von 5 µm².

Die Funktion f modelliert die Geschwindigkeit, mit der sich die bedeckte Fläche vergrößert, in Abhängigkeit von der Zeit t.

t ... Zeit in h
$f(t)$ ... Geschwindigkeit, mit der sich die bedeckte Fläche vergrößert, zum Zeitpunkt t in µm²/h

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie $5 + \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang.

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Der Ausdruck beschreibt den Inhalt der Fläche, die von den Sporen dieses Pilzes 3 h nach Beginn der Beobachtung bedeckt wird (in μm^2).

Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

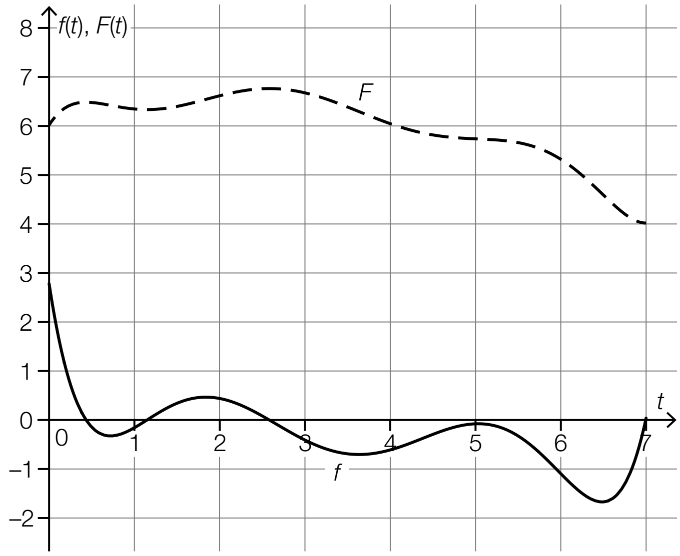
Grundkompetenz: AN 4.3

Gartenteich

Die Funktion *f* beschreibt modellhaft die momentane Änderungsrate des Wasserstands eines bestimmten Gartenteichs in Abhängigkeit von der Zeit *t*.

t ... Zeit in Tagen
f(*t*) ... momentane Änderungsrate des Wasserstands zum Zeitpunkt *t* in mm/Tag

Die Funktion *F* ist eine Stammfunktion von *f*.



Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Das Integral $\int_0^7 f(t)\,dt$ hat den Wert _____①_____ und beschreibt die _____②_____ des Wasserstands im Zeitintervall [0; 7].

①	
2	☐
–2	☐
0	☐

②	
mittlere Änderungsrate	☐
relative Änderung	☐
absolute Änderung	☐

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Gartenteich

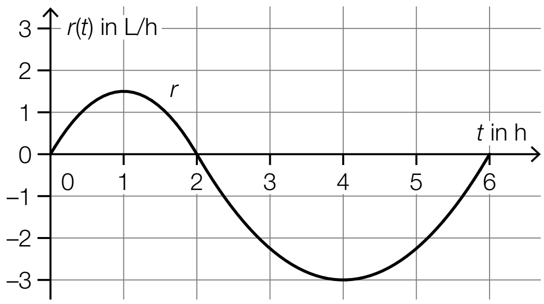
①	
−2	☒

②	
absolute Änderung	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

Zufluss und Abfluss

Die Flüssigkeitsmenge in einem bestimmten Gefäß ändert sich durch Zufluss und Abfluss.
Die reelle Funktion r ordnet jedem Zeitpunkt $t \in [0; 6]$ die momentane Änderungsrate $r(t)$ der Flüssigkeitsmenge in diesem Gefäß zu (t in h, $r(t)$ in L/h).



Dabei gilt:
$\int_0^2 r(t)\,\mathrm{d}t = 2$ und $\int_2^6 r(t)\,\mathrm{d}t = -8$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Es ist möglich, dass sich zum Zeitpunkt $t = 0$ genau 5 L Flüssigkeit im Gefäß befinden.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 2$ befinden sich genau 2 L Flüssigkeit im Gefäß.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 2$ ist die Flüssigkeitsmenge im Gefäß am größten.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 4$ befindet sich weniger Flüssigkeit im Gefäß als zum Zeitpunkt $t = 6$.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 6$ befindet sich um 6 L weniger Flüssigkeit im Gefäß als zum Zeitpunkt $t = 0$.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

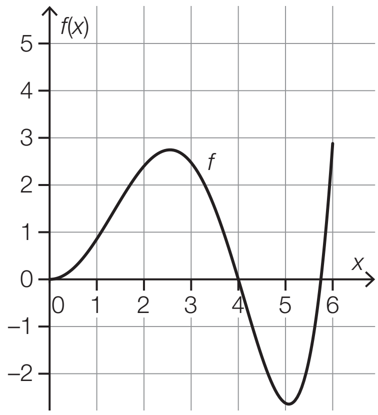
Zum Zeitpunkt $t = 2$ ist die Flüssigkeitsmenge im Gefäß am größten.	☒
Zum Zeitpunkt $t = 6$ befindet sich um 6 L weniger Flüssigkeit im Gefäß als zum Zeitpunkt $t = 0$.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Aussagen über bestimmte Integrale*

Aufgabennummer: 1_871	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion *f* im Intervall [0; 6] dargestellt.



Unten stehend sind einige Aussagen über bestimmte Integrale der Funktion *f* gegeben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$\int_0^4 f(x)\,dx > \int_0^5 f(x)\,dx$	☐
$\int_3^4 f(x)\,dx > \int_4^5 f(x)\,dx$	☐
$\int_0^6 f(x)\,dx > \int_0^4 f(x)\,dx$	☐
$\int_0^4 f(x)\,dx = 0$	☐
$\int_4^6 f(x)\,dx > 0$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x > \int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$	☒
$\int_3^4 f(x)\,\mathrm{d}x > \int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

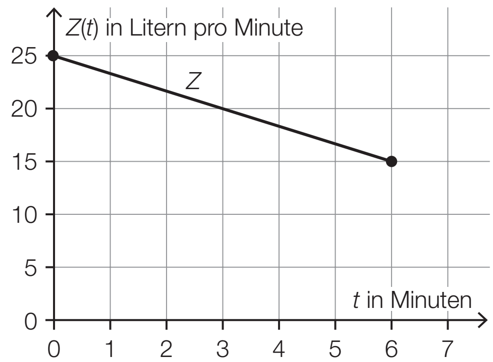
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wasserzufluss*

Aufgabennummer: 1_847	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Ein Behälter wird innerhalb von 6 Minuten mit Wasser befüllt.
Die Zuflussrate gibt an, wie viel Liter Wasser pro Minute in den Behälter zufließen. Dabei nimmt die Zuflussrate $Z(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t linear ab.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion Z dargestellt (t in Minuten, $Z(t)$ in Litern pro Minute). Die gekennzeichneten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie, wie viele Liter Wasser in diesen 6 Minuten in den Behälter zufließen.

____ Liter

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

120 Liter

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Berechnen.

Geschwindigkeitsfunktion*

Aufgabennummer: 1_799	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Die Funktion v mit $v(t) = 0{,}5 \cdot t + 2$ ordnet für einen Körper jedem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v(t)$ zu (t in s, $v(t)$ in m/s).

Folgende Berechnung wird durchgeführt:

$$\int_1^5 (0{,}5 \cdot t + 2)\,\mathrm{d}t = 14$$

Aufgabenstellung:

Formulieren Sie mit Bezug auf die Bewegung des Körpers eine Fragestellung, die mit der durchgeführten Berechnung beantwortet werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

mögliche Fragestellung:

Welche Wegstrecke legt der Körper im Zeitintervall von $t_1 = 1$ s bis $t_2 = 5$ s zurück?

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine entsprechende Fragestellung, wobei der Bezug auf die Bewegung des Körpers gegeben sein muss.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

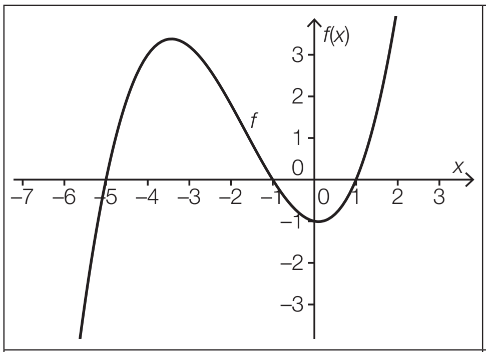
Vergleich bestimmter Integrale*

Aufgabennummer: 1_775	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

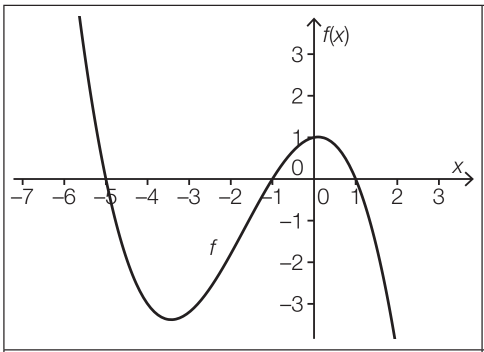
Gegeben sind fünf Abbildungen mit Graphen von Polynomfunktionen.

Aufgabenstellung:

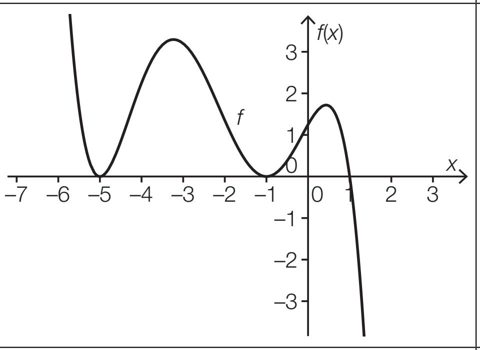
Kreuzen Sie die beiden Abbildungen an, für die gilt: $\int_{-5}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x > \int_{-5}^{+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.



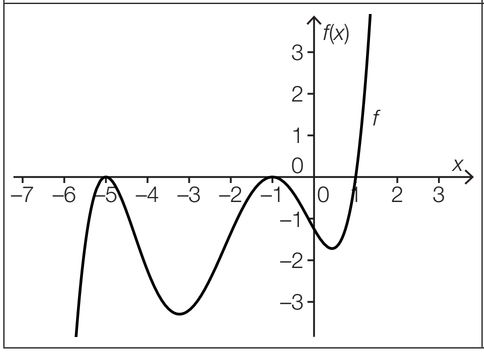
☐



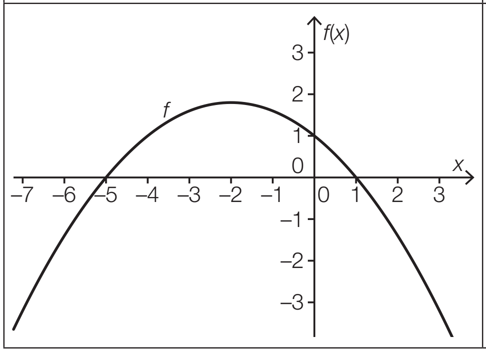
☐



☐



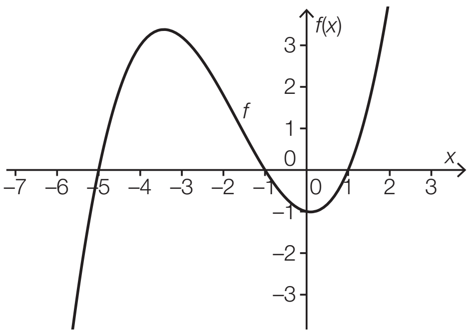
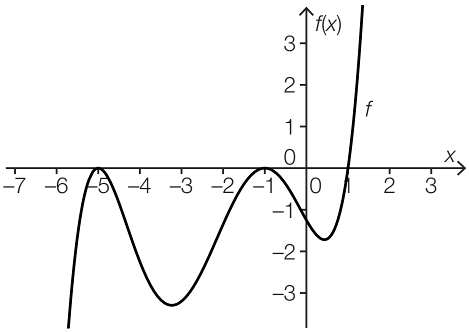
☐



☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

	☒		
			☒

Lösungsschlüssel

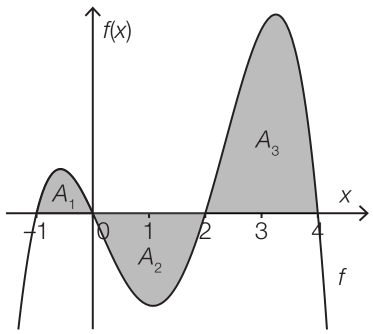
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Abbildungen angekreuzt sind.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bestimmte Integrale*

Aufgabennummer: 1_751	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

Nachstehend ist der Graph einer Polynomfunktion f mit den Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 4$ dargestellt.
Für die mit A_1, A_2 und A_3 gekennzeichneten Flächeninhalte gilt:
$A_1 = 0{,}4$, $A_2 = 1{,}5$ und $A_3 = 3{,}2$.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Gleichungen an, die wahre Aussagen sind.

$\int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1{,}9$	☐
$\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 1{,}7$	☐
$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 5{,}1$	☐
$\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1{,}5$	☐
$\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 3{,}2$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 1{,}7$	☒
$\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 3{,}2$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

Wurfhöhe eines Körpers*

Aufgabennummer: 1_727	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Ein Körper wird aus einer Höhe von 1 m über dem Erdboden senkrecht nach oben geworfen. Die Geschwindigkeit des Körpers nach t Sekunden wird modellhaft durch die Funktion v mit $v(t) = 15 - 10 \cdot t$ beschrieben ($v(t)$ in Metern pro Sekunde, t in Sekunden).

Aufgabenstellung:

Geben Sie diejenige Höhe (in Metern) über dem Erdboden an, in der sich der Körper nach 2 s befindet.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$v(t) = 15 - 10 \cdot t$
$s(t) = 15 \cdot t - 5 \cdot t^2 + h_0$
$s(0) = 1 = h_0$
$s(t) = 15 \cdot t - 5 \cdot t^2 + 1$
$s(2) = 30 - 20 + 1 = 11$

Der Körper befindet sich nach 2 s in einer Höhe von 11 m über dem Erdboden.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angeführt sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

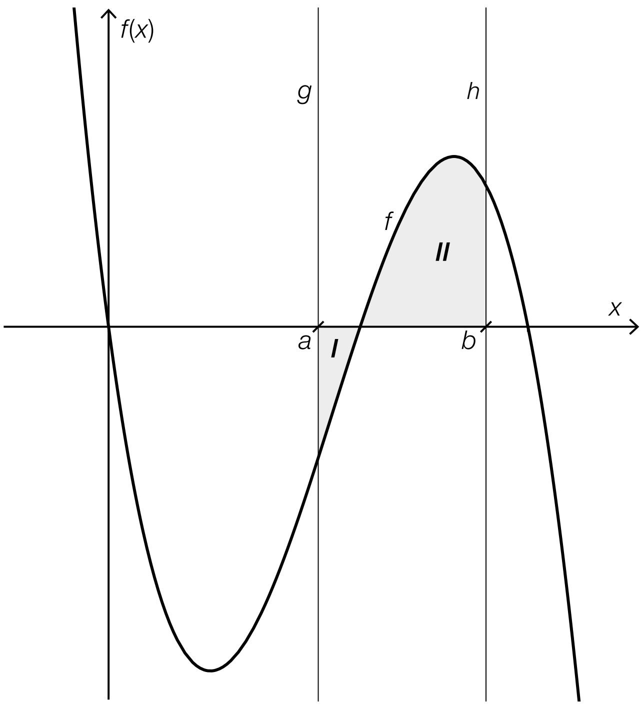
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Flächeninhalte*

Aufgabennummer: 1_703	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und zwei markierte Flächenstücke.

Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade g mit der Gleichung $x = a$ schließen das Flächenstück ***I*** mit dem Inhalt A_1 ein.
Der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade h mit der Gleichung $x = b$ schließen das Flächenstück ***II*** mit dem Inhalt A_2 ein.



Aufgabenstellung:

Geben Sie das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe der Flächeninhalte A_1 und A_2 an!

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$ ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_2 - A_1$

Lösungsschlüssel

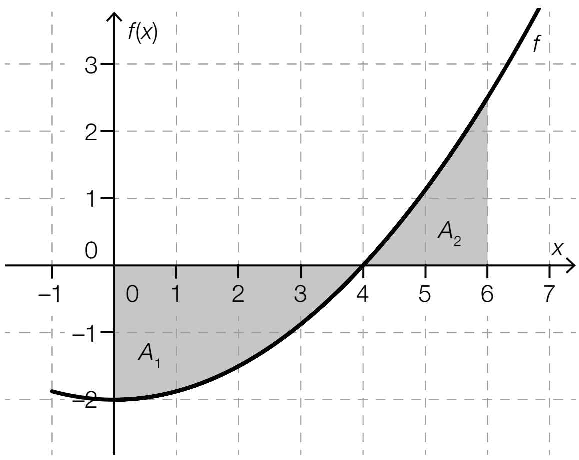
Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wert eines bestimmten Integrals*

Aufgabennummer: 1_679	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Nachstehend ist der Graph einer Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dargestellt. Zusätzlich sind zwei Flächen gekennzeichnet.
Die Fläche A_1 wird vom Graphen der Funktion f und von der x-Achse im Intervall $[0; 4]$ begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{16}{3}$ Flächeneinheiten.
Die Fläche A_2 wird vom Graphen der Funktion f und von der x-Achse im Intervall $[4; 6]$ begrenzt und hat einen Flächeninhalt von $\frac{7}{3}$ Flächeneinheiten.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$ an!

$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ____________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

$\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Beschleunigung*

Aufgabennummer: 1_655	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AN 4.3

Die Funktion *a* beschreibt die Beschleunigung eines sich in Bewegung befindlichen Objekts in Abhängigkeit von der Zeit *t* im Zeitintervall $[t_1; t_1 + 4]$. Die Beschleunigung $a(t)$ wird in m/s², die Zeit *t* in s angegeben.

Es gilt:

$$\int_{t_1}^{t_1+4} a(t)\,\mathrm{d}t = 2$$

Aufgabenstellung:

Eine der nachstehenden Aussagen interpretiert das angegebene bestimmte Integral korrekt.
Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an!

Das Objekt legt im gegebenen Zeitintervall 2 m zurück.	☐
Die Geschwindigkeit des Objekts am Ende des gegebenen Zeitintervalls beträgt 2 m/s.	☐
Die Beschleunigung des Objekts ist am Ende des gegebenen Zeitintervalls um 2 m/s² höher als am Anfang des Intervalls.	☐
Die Geschwindigkeit des Objekts hat in diesem Zeitintervall um 2 m/s zugenommen.	☐
Im Mittel erhöht sich die Geschwindigkeit des Objekts im gegebenen Zeitintervall pro Sekunde um 2 m/s.	☐
Im gegebenen Zeitintervall erhöht sich die Beschleunigung des Objekts pro Sekunde um $\frac{2}{4}$ m/s².	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

Die Geschwindigkeit des Objekts hat in diesem Zeitintervall um 2 m/s zugenommen.	☒

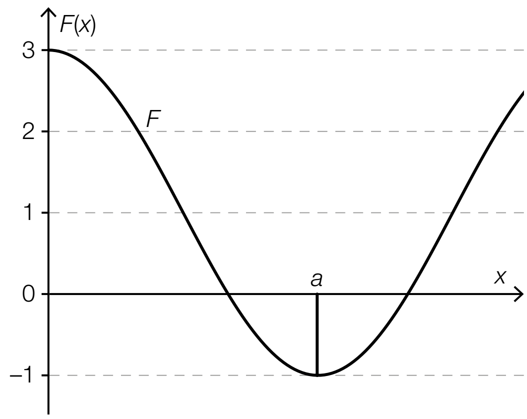
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Aussage angekreuzt ist.

Wert eines bestimmten Integrals*

Aufgabennummer: 1_631	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Von einer reellen Funktion *f* ist der Graph einer Stammfunktion *F* abgebildet.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $I = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ an!

I = ________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

$I = -4$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Schadstoffausstoß*

Aufgabennummer: 1_607	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

An einem Wintertag wird der Schadstoffausstoß eines Kamins gemessen.
Die Funktion $A: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ beschreibt in Abhängigkeit von der Zeit t den momentanen Schadstoffausstoß $A(t)$, wobei $A(t)$ in Gramm pro Stunde und t in Stunden ($t = 0$ entspricht 0 Uhr) gemessen wird.

Aufgabenstellung:

Deuten Sie den Ausdruck $\int_7^{15} A(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

Der Ausdruck gibt den gesamten Schadstoffausstoß (in Gramm) von 7 Uhr bis 15 Uhr an.

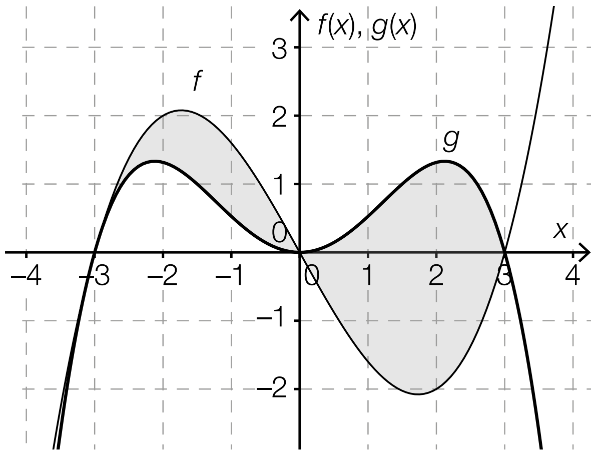
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung, wobei die Einheit „Gramm“ nicht angeführt sein muss.

Flächeninhaltsberechnung*

Aufgabennummer: 1_583	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

In der nachstehenden Abbildung sind die Graphen der Polynomfunktionen f und g dargestellt. Diese schneiden einander an den Stellen –3, 0 und 3 und begrenzen die beiden grau markierten Flächenstücke.



Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Gleichungen geben den Inhalt A der (gesamten) grau markierten Fläche an? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$A = \left\lvert \int_{-3}^{3} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right\rvert$	☐
$A = 2 \cdot \int_{0}^{3} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$A = \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$A = \left\lvert \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right\rvert + \int_{0}^{3} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$	☐
$A = \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \left\lvert \int_{0}^{3} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \right\rvert$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$A = \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{3} (g(x) - f(x))\,dx$	☒
$A = \int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \left\lvert \int_{0}^{3} (f(x) - g(x))\,dx \right\rvert$	☒

Lösungsschlüssel

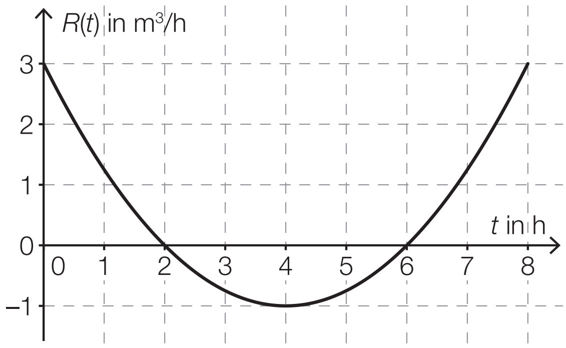
Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Wassermenge in einem Behälter*

Aufgabennummer: 1_548	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

In der nachstehenden Abbildung ist die momentane Änderungsrate R der Wassermenge in einem Behälter (in m³/h) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen über die Wassermenge im Behälter an!

Zum Zeitpunkt $t = 6$ befindet sich weniger Wasser im Behälter als zum Zeitpunkt $t = 2$.	☐
Im Zeitintervall (6; 8) nimmt die Wassermenge im Behälter zu.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 2$ befindet sich kein Wasser im Behälter.	☐
Im Zeitintervall (0; 2) nimmt die Wassermenge im Behälter ab.	☐
Zum Zeitpunkt $t = 4$ befindet sich am wenigsten Wasser im Behälter.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

Zum Zeitpunkt $t = 6$ befindet sich weniger Wasser im Behälter als zum Zeitpunkt $t = 2$.	☒
Im Zeitintervall (6; 8) nimmt die Wassermenge im Behälter zu.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Tachograph*

Aufgabennummer: 1_524	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Mithilfe eines Tachographen kann die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs in Abhängigkeit von der Zeit aufgezeichnet werden. Es sei $v(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.
Die Zeit wird in Stunden (h) angegeben, die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde (km/h).

Ein Fahrzeug startet zum Zeitpunkt $t = 0$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung der Gleichung $\int_0^{0,5} v(t)\,\mathrm{d}t = 40$ unter Verwendung der korrekten Einheiten im gegebenen Kontext an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

Diese Gleichung sagt aus, dass das Fahrzeug in der ersten halben Stunde (bzw. im Zeitintervall [0 h; 0,5 h]) 40 km zurückgelegt hat.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung der Gleichung unter Verwendung der korrekten Einheiten.

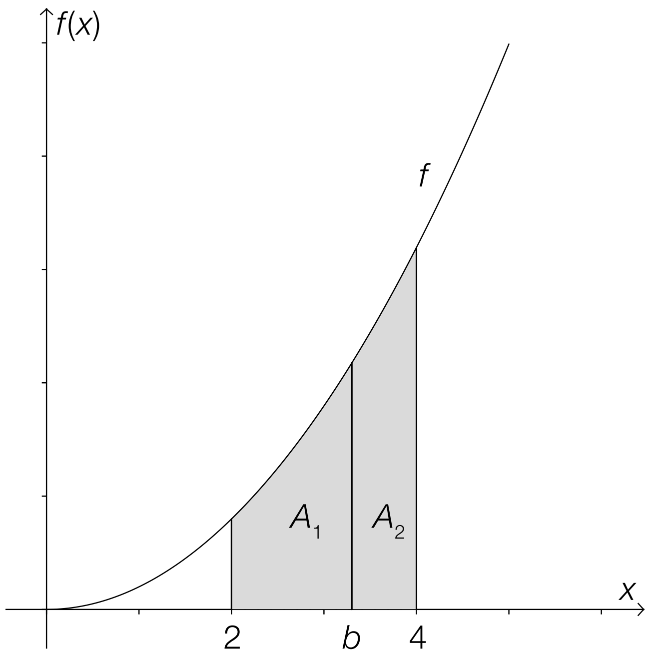
Halbierung einer Fläche*

Aufgabennummer: 1_500	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Stelle b so, dass die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion f im Intervall [2; 4] in zwei gleich große Flächen A_1 und A_2 geteilt wird (siehe Abbildung)!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$$\int_2^b x^2\,\mathrm{d}x = \int_b^4 x^2\,\mathrm{d}x \;\;\Rightarrow\;\; \frac{b^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{4^3}{3} - \frac{b^3}{3}$$

$b = \sqrt[3]{36}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [3,29; 3,31]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Integral*

Aufgabennummer: 1_476	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Gegeben ist die Potenzfunktion f mit $f(x) = x^3$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Bedingung für die Integrationsgrenzen b und c ($b \neq c$) so an, dass $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

$b = -c$

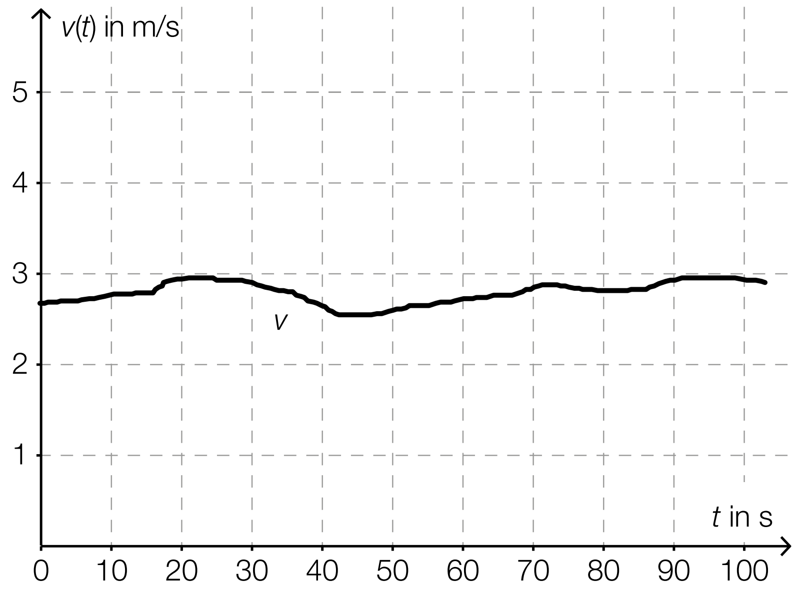
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Relation zwischen b und c. Äquivalente Relationen sind als richtig zu werten, ebenso konkrete Beispiele wie $b = -5$ und $c = 5$.

Wasserversorgung*

Aufgabennummer: 1_452	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Wasser fließt durch eine Wasserleitung, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Wassers zum Zeitpunkt t ist. Die Geschwindigkeit $v(t)$ wird in m/s, die Zeit t in s gemessen, der Inhalt der Querschnittsfläche Q des Rohres wird in m² gemessen. Im nachstehenden Diagramm ist die Abhängigkeit der Geschwindigkeit $v(t)$ von der Zeit t dargestellt.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, welche Größe durch den Ausdruck $Q \cdot \int_{10}^{40} v(t)\,\mathrm{d}t$ in diesem Zusammenhang berechnet werden kann!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

Der Ausdruck gibt die Wassermenge (in m^3) an, die vom Zeitpunkt $t = 10$ bis zum Zeitpunkt $t = 40$ durch die Leitung fließt.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation des Ausdrucks.

Durchflussrate*

Aufgabennummer: 1_428	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

In einem Wasserrohr wird durch einen Sensor die Durchflussrate (= Durchflussmenge pro Zeiteinheit) gemessen. Die Funktion D ordnet jedem Zeitpunkt t die Durchflussrate $D(t)$ zu. Dabei wird t in Minuten und $D(t)$ in Litern pro Minute angegeben.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung der Zahl $\int_{60}^{120} D(t)\,dt$ im vorliegenden Kontext an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

Der Ausdruck beschreibt die durch das Rohr geflossene Wassermenge (in Litern) vom Zeitpunkt $t = 60$ bis zum Zeitpunkt $t = 120$.

Lösungsschlüssel

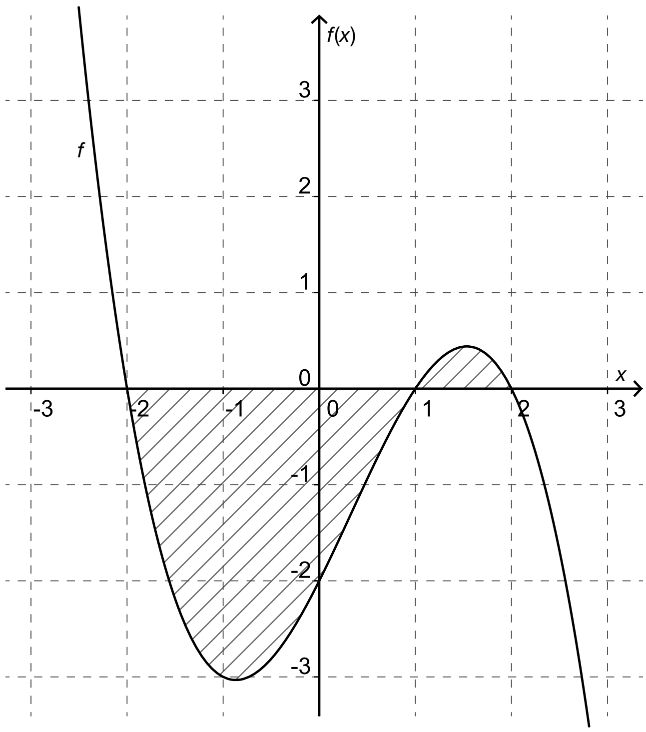
Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Integral einer Funktion f*

Aufgabennummer: 1_404	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Polynomfunktion f. Alle Nullstellen sind ganzzahlig. Die Fläche, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse begrenzt wird, ist schraffiert dargestellt. A bezeichnet die Summe der beiden schraffierten Flächeninhalte.



Aufgabenstellung:

Geben Sie einen korrekten Ausdruck für A mithilfe der Integralschreibweise an!

A = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

$A = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

oder:

$A = \int_{-2}^2 \left| f(x) \right| \mathrm{d}x$

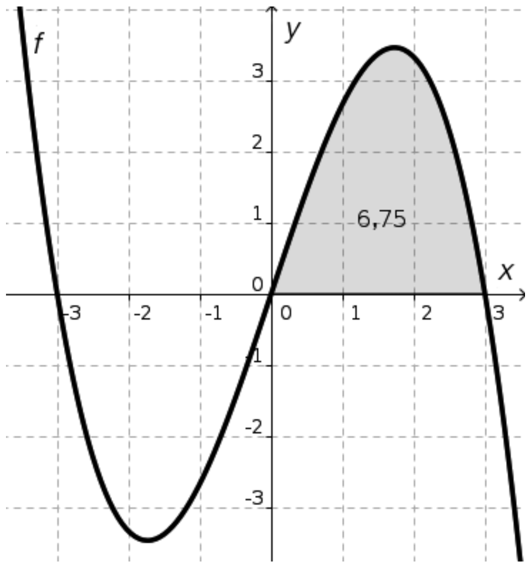
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen korrekten Ausdruck für A, wobei äquivalente Darstellungen sowie Schreibweisen wie $\int_1^2 f\,\mathrm{d}x - \int_{-2}^1 f\,\mathrm{d}x$ und Schreibweisen ohne „dx" (wie etwa $\int_1^2 f - \int_{-2}^1 f$) ebenfalls als richtig zu werten sind.

Integral*

Aufgabennummer: 1_380	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AN 4.3

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph einer punktsymmetrischen Funktion f (das bedeutet: $f(-x) = -f(x)$) dargestellt. Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall [0; 3] ist grau unterlegt. Ihre Maßzahl beträgt 6,75.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6{,}75$	☐
$\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 13{,}5$	☐
$\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -13{,}5$	☐
$\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$	☐
$\int_{-3}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = 6{,}75$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6{,}75$	☒
$\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$	☒

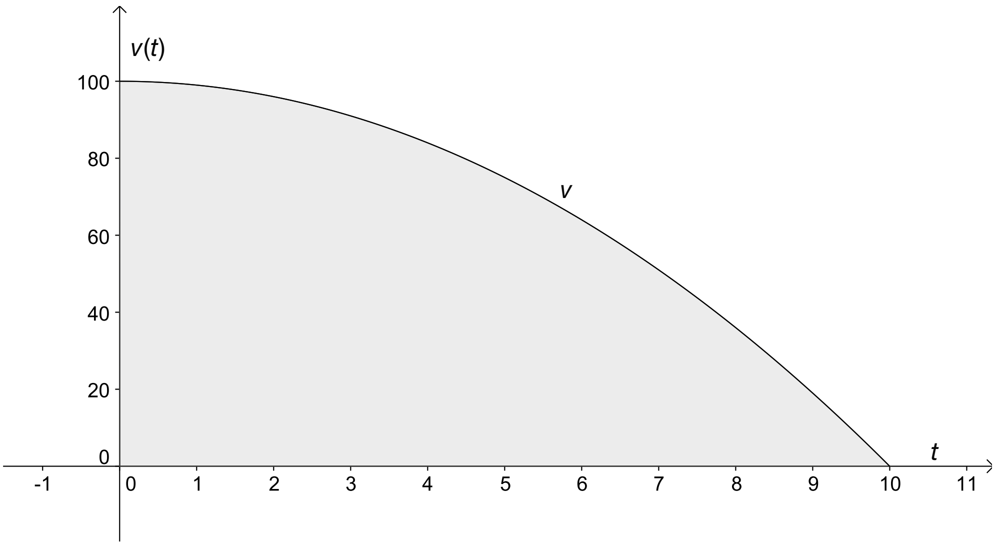
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

Geschwindigkeitsfunktion*

Aufgabennummer: 1_356	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion v, die die Geschwindigkeit $v(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Sekunden) modelliert.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, was die Aussage $\int_0^5 v(t)\,\mathrm{d}t > \int_5^{10} v(t)\,\mathrm{d}t$ im vorliegenden Kontext bedeutet!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

Die zurückgelegte Wegstrecke ist in den ersten 5 Sekunden größer als in den zweiten 5 Sekunden.

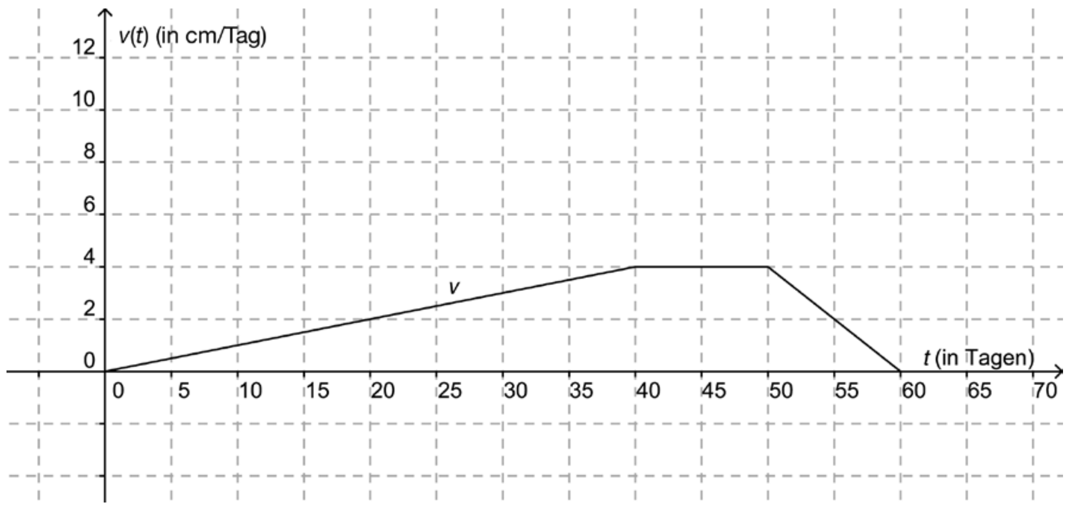
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (singemäß) korrekte Deutung.

Pflanzenwachstum*

Aufgabennummer: 1_332	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AN 4.3

Die unten stehende Abbildung beschreibt näherungsweise das Wachstum einer schnellwüchsigen Pflanze. Sie zeigt die Wachstumsgeschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Zeit t während eines Zeitraums von 60 Tagen.



Aufgabenstellung:

Geben Sie an, um wie viel cm die Pflanze in diesem Zeitraum insgesamt gewachsen ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

$$\frac{40 \cdot 4}{2} + 10 \cdot 4 + \frac{10 \cdot 4}{2} = 140$$

Die Pflanze wächst in diesen 60 Tagen 140 cm.

Ein weiterer (sehr aufwendiger) Lösungsweg wäre die Berechnung der Funktionsgleichungen in den einzelnen Wachstumsabschnitten sowie die Berechnung der entsprechenden bestimmten Integrale.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Weder die Rechnung noch ein Antwortsatz müssen angegeben werden. Die Angabe des richtigen Zahlenwertes ist ausreichend.

Flugreisen

Aufgabenstellung:

a) In Österreich waren im Jahr 2018 die Parkgebühren in der Nähe der unten angeführten Flughäfen unterschiedlich hoch.

Flughafen	Parkgebühren pro Woche in Euro
Klagenfurt	K
Salzburg	54
Linz	L
Graz	G
Wien-Schwechat	W
Innsbruck	147

Quelle: https://www.derstandard.at/story/2000079383984/ranking-wo-das-parken-teurer-ist-als-der-flug [09.08.2022].

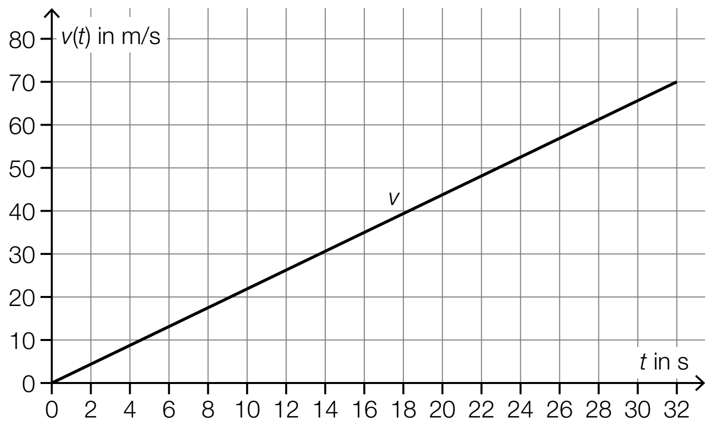
1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Parkgebühren pro Woche am Flughafen Innsbruck höher als am Flughafen Salzburg waren. *[0/1 P.]*

Das arithmetische Mittel dieser 6 Parkgebühren beträgt D (in Euro).

2) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Parkgebühren G am Flughafen Graz auf. Verwenden Sie dabei D und die Einträge der obigen Tabelle.

G = ________________________________ *[0/1 P.]*

b) Ein Flugzeug beschleunigt auf der Startbahn und hebt nach 32 s ab. Die Geschwindigkeit des Flugzeugs wird als lineare Funktion v in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion v dargestellt.



1) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den das Flugzeug bis zum Abheben zurücklegt, in Metern. *[0/1 P.]*

c) Für einen bestimmten Flug haben 124 Personen jeweils einen Platz gebucht.

Modellhaft wird angenommen: Die für einen Flug gebuchten Plätze werden unabhängig voneinander jeweils mit der Wahrscheinlichkeit p in Anspruch genommen.

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E gilt:

$$P(E) = 1 - \binom{124}{123} \cdot p^{123} \cdot (1 - p) - \binom{124}{124} \cdot p^{124}$$

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass jedenfalls eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Das Ereignis E ist: „Es werden ___①___ ___②___ der gebuchten Plätze in Anspruch genommen."

①	
höchstens	☐
genau	☐
mindestens	☐

②	
122	☐
123	☐
124	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{147-54}{54} = 1{,}7\dot{2}$

Die Parkgebühren am Flughafen Innsbruck waren um rund 172 % höher als die Parkgebühren am Flughafen Salzburg.

a2) $G = 6 \cdot D - K - 54 - L - W - 147$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
a2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel für G.

b1) $32 \cdot \frac{70}{2} = 1\,120$

Die Länge des bis zum Abheben zurückgelegten Weges beträgt 1 120 m.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge des zurückgelegten Weges.

c1)

①	
höchstens	☒

②	
122	☒

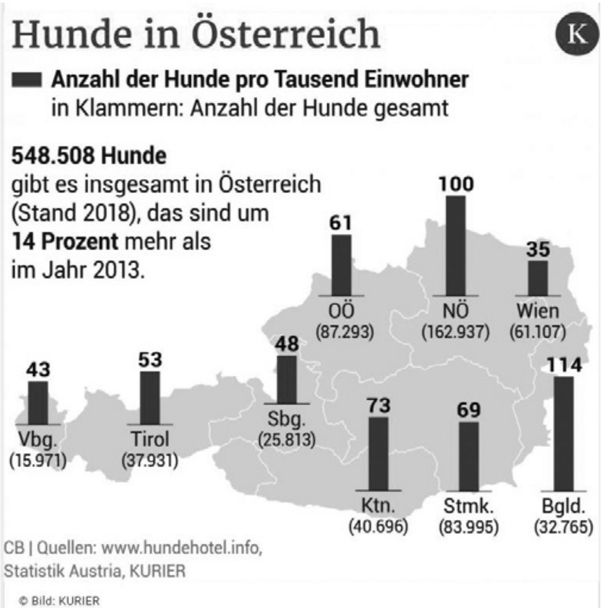
c1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Hunde in Österreich

Hunde sind in Österreich als Haustiere sehr beliebt.

Aufgabenstellung:

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Verteilung der Anzahl der Hunde in Österreich im Jahr 2018 nach Bundesländern.

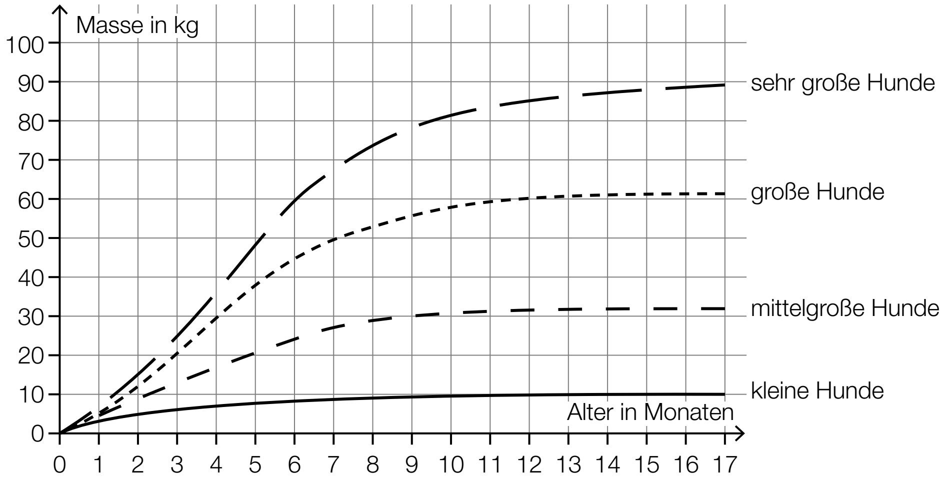


Bildquelle: https://kurier.at/chronik/oesterreich/plus-14-prozent-hunde-liegen-voll-im-trend/400573877 [16.03.2021].

Der Median der Anzahl der Hunde pro tausend Einwohner/innen in den 9 Bundesländern ist gleich der Anzahl der Hunde pro tausend Einwohner/innen in einem bestimmten Bundesland.

1) Ermitteln Sie dieses Bundesland. *[0/1 P.]*

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Entwicklung der Masse von Hunden verschiedener Größe in den ersten 17 Lebensmonaten.



Quelle: https://www.dasgesundetier.de/magazin/artikel/welpenerziehung-teil-2 [15.03.2021] (adaptiert).

1) Vervollständigen Sie die zwei nachstehenden Sätze mithilfe der Daten aus der obigen Abbildung so, dass richtige Aussagen entstehen. *[0/½/1 P.]*

„Große Hunde" haben im Alter von 4 Monaten eine Masse von rund __________ kg.

„Sehr große Hunde" haben im Alter von rund __________ Monaten eine Masse von 80 kg.

c) Der *Labrador* ist eine Hunderasse.

Als *minimale Masse* wird die Masse bezeichnet, die eine gesunde Labradorhündin abhängig von ihrem Alter mindestens haben soll.

Die nachstehende Tabelle zeigt die minimale Masse von Labradorhündinnen in Abhängigkeit vom Alter.

Alter in Monaten	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
minimale Masse in kg	10	13	16	18	20	22	22	23	24	24

Datenquelle: https://tierpal.de/labrador-wachstum/ [06.09.2022].

Es wird angenommen, dass sich die minimale Masse von Labradorhündinnen im Alter von 1 bis 5 Monaten linear entwickelt.

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die minimale Masse von Labradorhündinnen im Alter von 2 bis 3 Monaten zunimmt. *[0/1 P.]*

Die minimale Masse von Labradorhündinnen kann für das Alter von 7 bis 15 Monaten durch die Funktion $m\colon [7; 15] \to \mathbb{R}^+$ modelliert werden.

$m(t) = 25 - 24{,}7 \cdot e^{-k \cdot t}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$

t ... Alter in Monaten
$m(t)$ ... minimale Masse im Alter t in kg

Für das Alter von 7 Monaten stimmt der Wert der Funktion m mit dem entsprechenden Wert in der Tabelle überein.

Für das Alter von 12 Monaten weicht der Wert der Funktion m vom entsprechenden Wert in der Tabelle ab.

2) Berechnen Sie diese Abweichung in kg. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Oberösterreich

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Bundeslands.

b1) „Große Hunde" haben im Alter von 4 Monaten eine Masse von rund 30 kg.
Toleranzintervall: [28 kg; 31 kg]

„Sehr große Hunde" haben im Alter von rund 9,5 Monaten eine Masse von 80 kg.
Toleranzintervall: [9 Monate; 10 Monate]

b1) Ein Punkt für das richtige Vervollständigen der beiden Sätze, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

c1) minimale Masse im Alter von 2 Monaten: 7 kg
$\frac{3}{7} = 0{,}428... = 42{,}8...\ \%$
Die minimale Masse von Labradorhündinnen im Alter von 2 bis 3 Monaten nimmt um rund 43 % zu.

c2) $m(7) = 20$
$k = 0{,}228...$
$m(12) = 23{,}40...$
$24 - m(12) = 0{,}59...$
Die Abweichung beträgt rund 0,6 kg.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Abweichung, wobei –0,6 ebenfalls richtig ist.

Auslastung von Flügen

Für Fluggesellschaften ist eine hohe Auslastung ihrer Flüge wichtig.

Aufgabenstellung:

a) Häufig werden bei Flügen nicht alle verkauften Tickets in Anspruch genommen. Daher werden üblicherweise mehr Tickets verkauft, als Plätze zur Verfügung stehen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person (unabhängig von den anderen Personen) ihr Ticket in Anspruch nimmt, beträgt 90 %.
Für einen bestimmten Flug werden 6 % mehr Tickets verkauft, als Plätze zur Verfügung stehen.

Es stehen m Plätze zur Verfügung.
Es werden n Tickets verkauft.
Bei n verkauften Tickets beträgt der Erwartungswert für die in Anspruch genommenen Tickets 477.

1) Berechnen Sie n und m.

$n =$ ______________________________

$m =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Folgendes Ereignis E wird betrachtet:
E ... „für mindestens 1 Person, die ihr Ticket in Anspruch nehmen möchte, steht kein Platz zur Verfügung"

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E)$. *[0/1 P.]*

b) Für einen bestimmten Flug eines voll besetzten Flugzeugs kann der Zusammenhang zwischen der Flugdistanz s und dem Treibstoffverbrauch $V(s)$ näherungsweise durch die Funktion $V\colon [2\,000; 10\,000] \to \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

$$V(s) = 4 + \left(\frac{s}{128\,000} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{s}{1\,000} \cdot e^{-\frac{s}{4\,000}} \quad \text{mit} \quad 2\,000 \leq s \leq 10\,000$$

s ... Flugdistanz in km
$V(s)$ ... Treibstoffverbrauch bei der Flugdistanz s in Litern pro Fluggast pro 100 km

1) Ermitteln Sie die Flugdistanz d (in km), bei der der Treibstoffverbrauch am geringsten ist. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Menge an Treibstoff (in L), die dieses Flugzeug für die Flugdistanz d benötigt, wenn es mit 271 Fluggästen voll besetzt ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $n = \frac{477}{0,9} = 530$

$m = \frac{530}{1,06} = 500$

a2) X ... Anzahl der Personen, die ihr Ticket in Anspruch nehmen
Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 530$ und $p = 0,9$.

$P(X \geq 501) = 0,00012...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n und m.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) $V'(d) = 0$
$d = 3\,507,5...$ km
$(V''(3\,507,5...) > 0)$

b2) $V(3\,507,5...) = 3,67...$
$3,67... \cdot 271 \cdot 35,0... = 34\,934,1...$

Die benötigte Menge an Treibstoff beträgt rund 34 934 L.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Flugdistanz d.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Menge an Treibstoff.

Krankenstände

Die durchschnittliche Dauer der Krankenstände von Angestellten in einem bestimmten Betrieb ist in den letzten Jahren gesunken.

Aufgabenstellung:

a) In der nachstehenden Tabelle ist für das Jahr 2000 und für das Jahr 2015 jeweils die durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Tagen angegeben.

Jahr	durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Tagen
2000	12,6
2015	9,9

Mithilfe dieser Daten soll eine lineare Funktion K erstellt werden, die die durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Abhängigkeit von der Zeit t ab dem Jahr 2000 beschreibt.

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion K auf. *[0/1 P.]*

$K(t) =$ ____________________________________

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2000
$K(t)$ ... durchschnittliche Dauer der Krankenstände zur Zeit t in Tagen

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{9{,}9 - 12{,}6}{12{,}6} \approx -0{,}214$$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass im Winter der Angestellte A mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % und der Angestellte B mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % erkrankt.

Dabei wird modellhaft angenommen, dass alle Erkrankungen unabhängig voneinander erfolgen.

1) Beschreiben Sie ein im gegebenen Sachzusammenhang mögliches Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$P(E) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}7$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Angestellte A in höchstens 1 von 5 Wintern erkrankt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $K(t) = -0{,}18 \cdot t + 12{,}6$

a2) Die durchschnittliche Dauer der Krankenstände hat im Zeitraum von 2000 bis 2015 um rund 21,4 % abgenommen.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion *K*.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) *E* ... „mindestens 1 der beiden Angestellten erkrankt in einem Winter“

b2) *X* ... Anzahl der Winter mit Erkrankungen des Angestellten *A*
X ist binomialverteilt mit $n = 5$, $p = 0{,}2$.

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}8^5 + 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}73728$

b1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben von *E* im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Müsliriegel*

Aufgabennummer: 2_100	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.2, AN 1.1, WS 3.1, WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3	

Ein neuer Müsliriegel steht vor der Markteinführung. Der Hersteller dieses Müsliriegels produziert 100 000 Stück davon.

Auf allen Verpackungen der Müsliriegel wird die Möglichkeit von Sofortgewinnen angekündigt. Die jeweilige Höhe des Sofortgewinns kann man nach dem Öffnen der Verpackung auf deren Innenseite ablesen. Der Hersteller des Müsliriegels gibt an:

Es werden

- 9 000 Sofortgewinne zu je € 2
- 900 Sofortgewinne zu je € 5
- 100 Sofortgewinne zu je € 65

ausgezahlt.

Alle produzierten Müsliriegel werden an Geschäfte geliefert. Die Verteilung der Müsliriegel erfolgt nach dem Zufallsprinzip.

Aufgabenstellung:

a) Unter Berücksichtigung aller Produktionskosten kostet jeder der 100 000 Müsliriegel in der Produktion durchschnittlich € 1.

Der Verkaufspreis eines Müsliriegels soll so festgelegt werden, dass für den Hersteller ein Gewinn von mindestens € 80.000 erzielt wird, wenn nach dem Verkauf aller Müsliriegel alle Sofortgewinne ausgezahlt werden müssen.
Alle Müsliriegel haben den gleichen Verkaufspreis.

1) Ermitteln Sie den unter diesen Voraussetzungen kleinstmöglichen Verkaufspreis p des Müsliriegels.

2) Geben Sie an, um wie viel Prozent der kleinstmögliche Verkaufspreis p gesenkt werden kann, wenn man die Müsliriegel ohne Gewinnspiel verkauft und der Gewinn trotzdem mindestens € 80.000 ausmachen soll.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

b) Die Zufallsvariable X beschreibt die Höhe des ausgezahlten Sofortgewinns pro gekauften Müsliriegel.

1) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Ein Kunde kauft 4 Müsliriegel.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Kunde mindestens einen Sofortgewinn erzielt.

c) Aus Erfahrung weiß man, dass 95 % der Müsliriegel eine vorgegebene Mindestmasse haben.

Eine Zufallsstichprobe von 1 000 Müsliriegeln wird ausgewählt. Die binomialverteilte Zufallsvariable Y beschreibt dabei die Anzahl der Müsliriegel in dieser Zufallsstichprobe, die die vorgegebene Mindestmasse haben.

1) Ermitteln Sie die Standardabweichung $\sigma(Y)$ der Zufallsvariablen Y.

$\sigma(Y)$ = ____

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Kontext.

$P(Y \geq 933) \approx 0{,}99$

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$G(x)$ ... Gewinn bei einer Produktion von x Müsliriegeln

$G(100\,000) = p \cdot 100\,000 - 100\,000 - (9\,000 \cdot 2 + 900 \cdot 5 + 100 \cdot 65)$

$G(100\,000) = 80\,000 \quad \Rightarrow \quad p = € \ 2{,}09$

a2) $p_1 \cdot 100\,000 - 100\,000 = 80\,000 \quad \Rightarrow \quad p_1 = € \ 1{,}80$

$\frac{0{,}29}{2{,}09} = 0{,}1387... \approx 13{,}9\ \%$

b) **Lösungserwartung:**

b1) $E(X) = 0{,}09 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot 5 + 0{,}001 \cdot 65$

$E(X) = € \ 0{,}29$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$1 - \frac{90\,000}{100\,000} \cdot \frac{89\,999}{99\,999} \cdot \frac{89\,998}{99\,998} \cdot \frac{89\,997}{99\,997} = 0{,}3439...$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $\sigma(Y) = \sqrt{1\,000 \cdot 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}95)} = 6{,}892...$

c2) mögliche Interpretation:

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 933 Müsliriegel die vorgegebene Mindestmasse haben, beträgt ca. 99 %.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die näherungsweise Berechnung mit $1 - 0{,}9^4$ ebenfalls als richtig zu werten ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
c2) Ein Punkt für eine richtige Interpretation..

Altenpflege

Aufgabennummer: 2_073	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3	

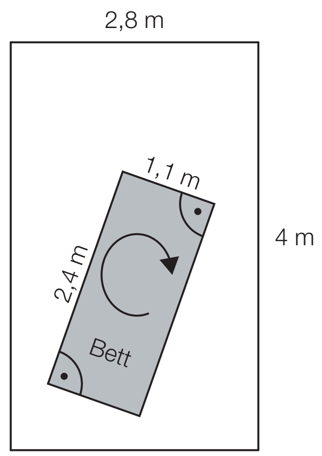
a) Katharina und Georg arbeiten als Pflegekräfte in einem Heim. Sie bekommen das gleiche monatliche Grundgehalt. Im Februar lag in diesem Heim ein besonderer Arbeitsbedarf vor. Georg leistete 14 Überstunden, Katharina leistete 46 Überstunden. Ihr jeweiliges Gesamtentgelt setzt sich aus dem Grundgehalt und der Abgeltung für die geleisteten Überstunden zusammen. Jede Überstunde wird dabei gleich abgegolten.

Das Gesamtentgelt von Georg betrug im Februar € 2.617, jenes von Katharina betrug € 3.433.

1) Ermitteln Sie das Grundgehalt und die Abgeltung für eine Überstunde.

b) Der Aufzug eines Pflegeheims hat eine rechteckige Grundfläche mit einer Länge von 4 m und einer Breite von 2,8 m. Ein Pflegebett fährt auf beweglichen Rollen und hat die Außenmaße 2,4 m × 1,1 m (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).

Aufzug-Innenraum von oben gesehen



1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Aufzug breit genug ist, damit das Bett – wie oben skizziert – um 180° gedreht werden kann.

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr durch mobile Dienste im Rahmen der Altenpflege in Oberösterreich sowie deren prozentuellen Anstieg jeweils im Vergleich zur Anzahl 2 Jahre davor.

Jahr	Anzahl der Hausbesuche pro Jahr	prozentueller Anstieg (gerundet)
1994	498 086	
1996	589 168	18,3 %
1998	802 146	36,1 %
2000	1 017 793	26,9 %
2002	1 176 665	15,6 %
2004	1 360 543	15,6 %

Der prozentuelle Anstieg der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr betrug sowohl von 2000 auf 2002 als auch von 2002 auf 2004 jeweils rund 15,6 %.

1) Erklären Sie in Worten, warum sich die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr von 2000 auf 2002 von jener von 2002 auf 2004 unterscheidet, obwohl die prozentuellen Anstiege in den jeweiligen Zeitintervallen gleich sind.
2) Interpretieren Sie das Ergebnis der Berechnung $\frac{1\,360\,543 - 498\,086}{2004 - 1994} \approx 86\,246$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a1) x ... Grundgehalt in €
y ... Abgeltung für eine Überstunde in €

$x + 14 \cdot y = 2617$
$x + 46 \cdot y = 3433$

$x = 2260$, $y = 25{,}50$

Das Grundgehalt beträgt € 2.260, die Abgeltung für eine Überstunde € 25,50.

b1) Länge der Diagonalen des Bettes d:
$d = \sqrt{1{,}1^2 + 2{,}4^2} = 2{,}640...$

Die Länge der Diagonalen beträgt rund 2,64 m. Da die Diagonale kürzer als die Liftbreite ist, kann das Bett im Lift um 180° gedreht werden.

c1) Die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr unterscheidet sich, da verschiedene Grundwerte für die Berechnung der prozentuellen Anstiege herangezogen werden.

c2) Die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr ist im Zeitintervall von 1994 bis 2004 durchschnittlich um rund 86246 pro Jahr gestiegen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Section-Control

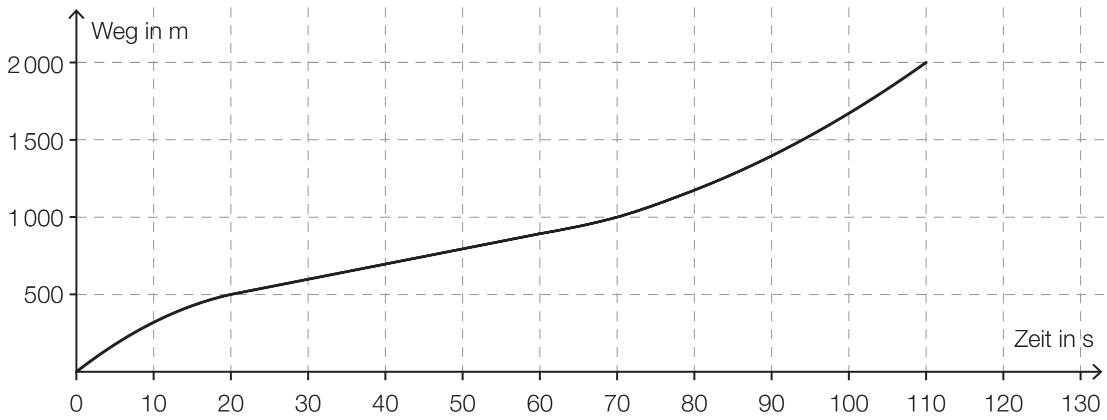
Aufgabennummer: 2_086	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 1.1, AN 1.3	

Section-Control **bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.**

a) In einem 6 km langen Baustellenbereich wird eine Section-Control errichtet.
Es gilt eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 60 km/h.
Jemand behauptet: „Wenn ich die zulässige Höchstgeschwindigkeit im gesamten Baustellenbereich um 10 % überschreite, dann verkürzt sich meine Fahrzeit im Baustellenbereich um 10 %."

1) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

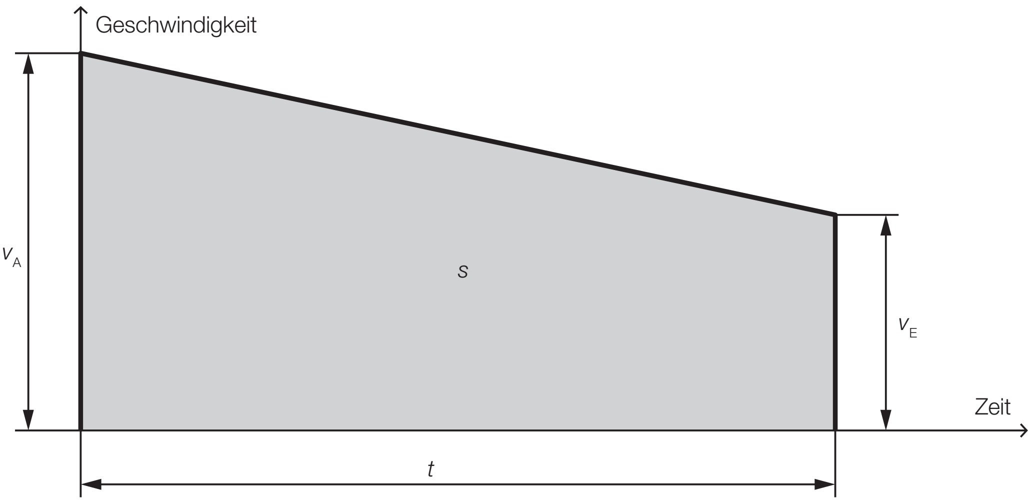
b) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeugs in einem überprüften Bereich dargestellt.



1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte.

2) Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist.

c) Ein Fahrzeug fährt durch einen Bereich, der durch eine Section-Control überwacht wird. Seine Geschwindigkeit nimmt auf diesem Streckenabschnitt linear ab.



Die Endgeschwindigkeit v_E, die Fahrzeit t und der zurückgelegte Weg s sind bekannt.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit v_A des Fahrzeugs.

v_A = ______________________________

Lösungserwartung

a1) $s = 6$ km

$v_1 = 60$ km/h: $t_1 = \frac{s}{v_1} = 0{,}1$ h

$v_2 = 66$ km/h: $t_2 = \frac{s}{v_2} = 0{,}\overline{09}$ h

90 % von 0,1 h sind exakt 0,09 h. Das ist weniger als t_2.

b1) $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1\,000 \text{ m}}{70 \text{ s}} = 14{,}285\ldots \text{ m/s} \approx 14{,}29 \text{ m/s}$

b2) Die Fahrzeit für die erste Weghälfte beträgt 70 Sekunden. Die Fahrzeit für die zweite Weghälfte beträgt nur 40 Sekunden. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte geringer.

c1) Der Flächeninhalt des Trapezes entspricht dem zurückgelegten Weg: $s = \frac{v_A + v_E}{2} \cdot t$.

$v_A = 2 \cdot \frac{s}{t} - v_E$

Gold

Aufgabennummer: 2_090	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1	

Das Edelmetall Gold gilt als besonders wertvoll, weil es selten vorkommt, leicht zu Schmuck verarbeitet werden kann und sehr beständig ist.

a) Der *World Gold Council*, eine globale Lobby-Organisation der Goldminenindustrie, schätzt die bis zum Jahr 2012 weltweit geförderte Goldmenge auf rund $1{,}713 \cdot 10^8$ Kilogramm (kg).
Gold hat eine Dichte von 19,3 Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm³). Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

Stellen Sie sich vor, dass die gesamte weltweit geförderte Goldmenge in einen Würfel gegossen wird.

1) Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels in Metern.

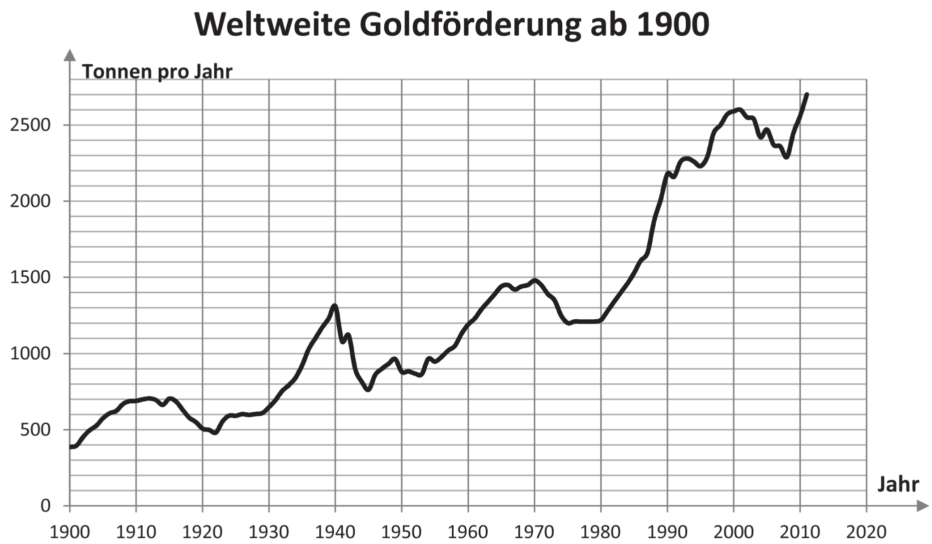
b) Gold kommt in der Natur auch in der Form von Nuggets (Goldklumpen) vor. Es wird in der Einheit *Feinunze* (oz. tr.) gehandelt, die einer Masse von 31,1035 Gramm (g) reinen Goldes entspricht.

Gesucht ist der Wert W eines Nuggets in Euro, wenn folgende Größen bekannt sind:

m ... Masse des Nuggets in Gramm (g)
p ... Preis in Euro für eine Feinunze Gold

1) Erstellen Sie eine Formel für W.

c) Die nachstehende Grafik zeigt die weltweite jährliche Förderung von Gold ab dem Jahr 1900 in Tonnen.



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldfoerderung.png [29.08.2013] (adaptiert).

1) Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, in welchem Jahrzehnt die weltweite Förderung absolut am stärksten gestiegen ist.

d) In einer Zeitung wird folgende Analyse veröffentlicht: „Der Wert der Ein-Unzen-Krugerrand-Goldmünze ist im Jahr 2010 um 20 % gestiegen. Im Jahr 2011 stieg der Wert nochmals um 10 %. Also ist der Wert der Münze in diesen beiden Jahren insgesamt um 30 % gestiegen."

1) Begründen Sie, warum diese Aussage über die Wertentwicklung nicht richtig ist.

Lösungserwartung

a1) Kantenlänge des Würfels: $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{1{,}713 \cdot 10^{11}\ \text{g}}{19{,}3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 2\,070{,}4...\ \text{cm}$

Der Würfel hat eine Kantenlänge von rund 20,7 Metern.

b1) $W = \frac{m \cdot p}{31{,}1035}$

c1) Die weltweite jährliche Förderung ist zwischen 1980 und 1990 absolut am stärksten gestiegen.

d1) Die angegebenen Prozentsätze dürfen nicht addiert werden, weil sie sich nicht auf denselben Grundwert beziehen.
Der Wert der Goldmünze ist um den Faktor $1{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}32$ gestiegen, also um 32 %.

Benzinverbrauch*

Aufgabennummer: 2_075	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 1.1, AN 3.3	

Der Benzinverbrauch eines bestimmten Kleinwagens kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit modellhaft durch die Funktion B beschrieben werden.

$B(v) = 0{,}000483 \cdot v^2 - 0{,}0326 \cdot v + 2{,}1714 + \frac{66}{v}$ mit $20 < v < 150$

v ... Geschwindigkeit in km/h
$B(v)$ ... Benzinverbrauch in Litern pro 100 km (L/100 km) bei der Geschwindigkeit v

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h höher als bei einer Geschwindigkeit von 70 km/h ist.

_______________________________________ %

Der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 40 km/h ist um 25 % geringer als der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit v_1 mit $20 < v_1 < 40$.

2) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v_1.

v_1 = _______________________________________ km/h

b) Für hohe Geschwindigkeiten soll die Funktion B durch eine lineare Funktion f mit $f(v) = k \cdot v + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ angenähert werden, sodass gilt:
$f(100) = B(100)$
$f(130) = B(130)$

1) $\boxed{\text{A}}$ Ermitteln Sie einen Funktionsterm der Funktion f.

$f(v)$ = _______________________________________

Diese Näherung kann verwendet werden, wenn die Abweichung zwischen den Funktionswerten von f und B höchstens 0,3 L/100 km beträgt.

2) Geben Sie das größtmögliche Intervall für die Geschwindigkeit an, in dem die Funktion f als Näherung verwendet werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

c) 1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion B diejenige Geschwindigkeit v_{min}, bei der der Benzinverbrauch am geringsten ist, sowie den zugehörigen Benzinverbrauch B_{min}.

v_{min} = ____________________ km/h

B_{min} = ____________________ L/100 km

Der Benzinverbrauch hängt auch vom Reifendruck ab.
Die Funktion g beschreibt den Benzinverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck.
Dabei gilt: $g(v) = 1{,}02 \cdot B(v)$

2) Berechnen Sie mithilfe der Funktion g, bei welchen beiden Geschwindigkeiten der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{min} ist.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $\frac{B(90) - B(70)}{B(70)} = 0{,}2138... \approx 21{,}4\ \%$

a2) $B(v_1) \cdot 0{,}75 = B(40)$

$v_1 = 24{,}24...$ km/h

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:

$f(100) = B(100) = 4{,}40...$

$f(130) = B(130) = 6{,}60...$

$f(v) = 0{,}0734... \cdot v - 2{,}9399...$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$D(v) = B(v) - f(v)$

$D(v) = 0{,}3$

$(v_1 = -10{,}94...)$

$v_2 = 87{,}08...$

$v_3 = 143{,}34...$

Da die Funktion D an der Stelle $v = 114{,}91...$ km/h eine Minimumstelle mit dem Funktionswert $-0{,}1 > -0{,}3$ hat, erhält man das Intervall [87,1 km/h; 143,3 km/h].

c) Lösungserwartung:

c1) $v_{min} = 55{,}73...$ km/h

$B_{min} = 3{,}03...$ L/100 km

c2) $g(v) = B_{min} + 2$

$v_1 = 20{,}41...$ km/h

$v_2 = 108{,}67...$ km/h

Bei Geschwindigkeiten von ca. 20,4 km/h und ca. 108,7 km/h ist der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{min}.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm. Äquivalente Funktionsterme sind als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für das richtige Intervall, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

c1) Ein Punkt für die beiden richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die beiden richtigen Geschwindigkeiten, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

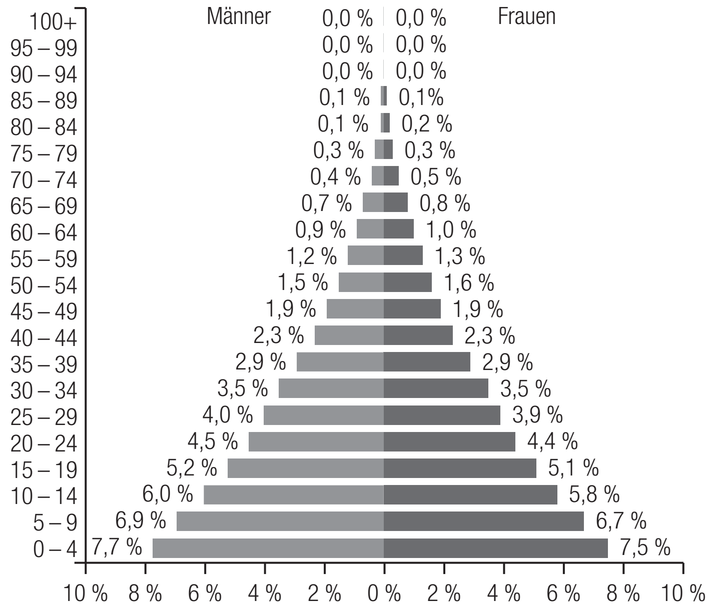
Bevölkerungswachstum in Afrika*

Aufgabennummer: 2_083	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 5.1, FA 5.5, AN 1.1, AN 1.3, WS 1.1, WS 1.3	
Afrika hatte Ende 2018 eine Bevölkerung von ca. 1,3 Milliarden Menschen und verzeichnet derzeit das stärkste Bevölkerungswachstum aller Kontinente.	

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Aufgabenstellung:

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Alterspyramide der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018.
Der Alterspyramide ist z. B. zu entnehmen, dass im Kalenderjahr 2018 galt: 4,5 % der afrikanischen Bevölkerung sind Männer mit einem Lebensalter von 20 bis 24 Jahren und 4,4 % der afrikanischen Bevölkerung sind Frauen mit einem Lebensalter von 20 bis 24 Jahren. Unter *Lebensalter* versteht man die Anzahl vollendeter Lebensjahre.



Datenquelle: https://www.populationpyramid.net/de/afrika/2018 [10.05.2019].

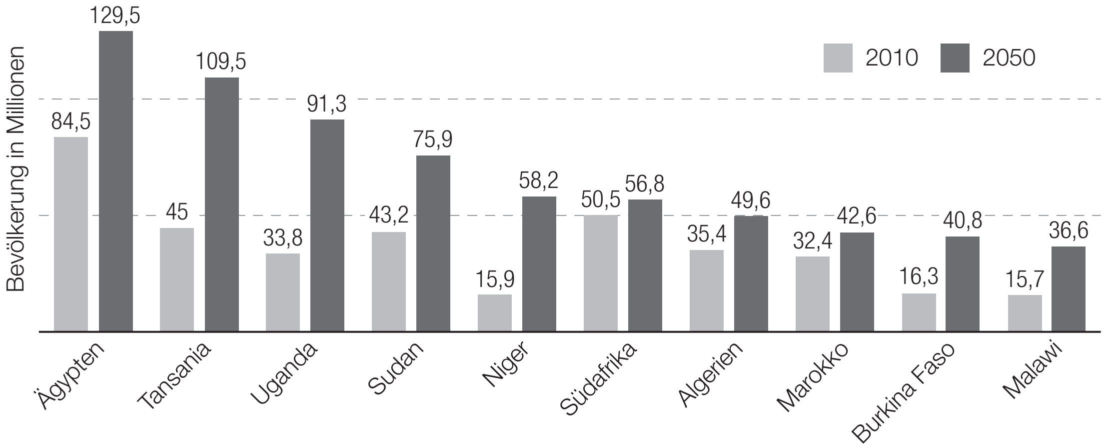
Nehmen Sie modellhaft an, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten.

1) Bestimmen Sie anhand der Alterspyramide den Median m des Lebensalters der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018.

   m = ____ Jahre

2) Geben Sie die Anzahl an Afrikanerinnen und Afrikanern an, die im Kalenderjahr 2018 jünger als m Jahre waren.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die prognostizierte Bevölkerungsentwicklung (Angaben in Millionen) im Zeitraum von 2010 bis 2050 in ausgewählten afrikanischen Ländern.



Datenquelle: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/159204/umfrage/prognose-zur-bevoelkerungsentwicklung-in-afrika-bis-2050/ [10.05.2019].

1) Geben Sie von den zehn angeführten Ländern dasjenige Land an, das laut Prognose im Zeitraum von 2010 bis 2050 am stärksten zum absoluten Bevölkerungswachstum in Afrika beitragen wird.

2) Geben Sie von den zehn angeführten Ländern dasjenige Land an, in dem laut Prognose im Zeitraum von 2010 bis 2050 das stärkste relative Bevölkerungswachstum erfolgt.

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung in Nigeria im Zeitraum von 1980 bis 2010.

Kalenderjahr	1980	1990	2000	2010
Bevölkerungszahl in Millionen	73,5	95,3	122,4	158,6

1) Zeigen Sie anhand der Tabelle, dass die Bevölkerungszahl im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd exponentiell zugenommen hat.

Nehmen Sie an, dass die Bevölkerungszahl von Nigeria weiterhin in dieser Art exponentiell wachsen wird.

2) Geben Sie unter Verwendung der Daten aus den beiden Kalenderjahren 2000 und 2010 an, in welchem Kalenderjahr die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen wird.

d) Die nachstehende Tabelle zeigt, wie sich die durchschnittliche Lebenserwartung der afrikanischen Bevölkerung seit 1953 entwickelt hat.

Kalenderjahr	durchschnittliche Lebenserwartung in Jahren
1953	37,5
1958	40,0
1963	42,3
1968	44,4
1973	46,6
1978	48,7
1983	50,5
1988	51,7
1993	51,7
1998	52,3
2003	53,7
2008	57,0
2013	60,2
2018	62,4

1) Berechnen Sie die mittlere jährliche Zunahme k der durchschnittlichen Lebenserwartung im Zeitraum von 1953 bis 2018.

Es wird angenommen, dass die durchschnittliche Lebenserwartung in Afrika nach dem Kalenderjahr 2018 konstant pro Jahr um den berechneten Wert k zunimmt.
Im Kalenderjahr 2018 betrug die durchschnittliche Lebenserwartung in Europa 78,5 Jahre.

2) Geben Sie an, in welchem Kalenderjahr die durchschnittliche Lebenserwartung in Afrika unter dieser Annahme den Wert für Europa im Kalenderjahr 2018 erreichen würde.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) m = 19 Jahre

a2) Aufgrund der Annahme, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten, sind 4,16 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Männer im Alter von 15 bis 18 Jahren und 4,08 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Frauen im Alter von 15 bis 18 Jahren.
$7{,}7\,\% + 7{,}5\,\% + 6{,}9\,\% + 6{,}7\,\% + 6{,}0\,\% + 5{,}8\,\% + 4{,}16\,\% + 4{,}08\,\% = 48{,}84\,\%$
$1{,}3 \cdot 10^9 \cdot 0{,}4884 = 6{,}3492 \cdot 10^8 \approx$ 635 Millionen Menschen

b) **Lösungserwartung:**

b1) Tansania

b2) Niger

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Begründungen:
Die (mittleren) jährlichen Wachstumsraten sind im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd konstant:
1980 bis 1990: ca. 2,6 %
1990 bis 2000: ca. 2,5 %
2000 bis 2010: ca. 2,6 %

oder:

Die prozentuellen Wachstumsraten sind in den 10-Jahres-Zeiträumen von 1980 bis 2010 annähernd konstant:
1980 bis 1990: ca. 30 %
1990 bis 2000: ca. 28 %
2000 bis 2010: ca. 30 %

oder:

Die gegebenen Daten können gut mit einer Exponentialfunktion N mit der Gleichung $N(t) = N_0 \cdot 1{,}026^t$ beschrieben werden. Die Funktionswerte weichen nur geringfügig von den Tabellenwerten ab.

c2) $360 = 122{,}4 \cdot 1{,}0262...^t \quad \Rightarrow \quad t = 41{,}6... \approx 42$
Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2042 die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen.

d) **Lösungserwartung:**

d1) $k = \frac{62{,}4 - 37{,}5}{65} = 0{,}3830...$ $\Rightarrow$ $k \approx 0{,}383$ Lebensjahre pro Kalenderjahr

d2) $62{,}4 + t \cdot 0{,}3830... = 78{,}5$
$t = 42{,}028... \approx 42{,}03$
Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2060 in Afrika die durchschnittliche Lebenserwartung den Wert 78,5 Jahre erreichen.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.
b2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.

c1) Ein Punkt für eine richtige Begründung.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch das Kalenderjahr 2041 als richtig zu werten ist.

d1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Lebensjahre pro Kalenderjahr“ nicht angegeben sein muss.
d2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Kalenderjahrs, wobei auch die Kalenderjahre 2058, 2059 und 2061 als richtig zu werten sind.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

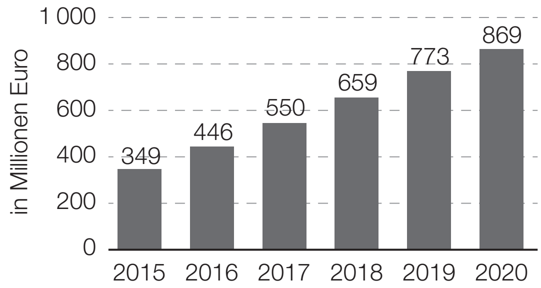
E-Book*

Aufgabennummer: 2_060	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 5.2, WS 2.2, WS 3.2	

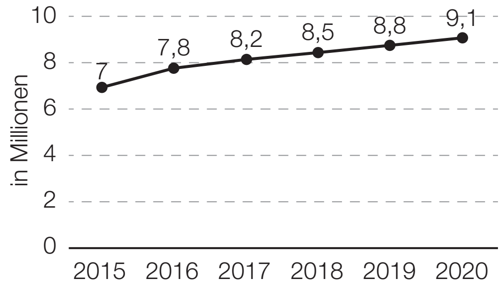
Ein Buch in digitaler Form wird als *E-Book* (von engl. *electronic book*) bezeichnet.

Die beiden folgenden auf Deutschland bezogenen Grafiken stellen Schätzwerte für die Entwicklung des Markts für E-Books dar:

Umsatz im Markt für E-Books



Nutzer im Markt für E-Books



Quelle: http://www.e-book-news.de/20-prozent-wachstum-pro-jahr-statista-sieht-deutschen-e-book-markt-im-aufwind/ [19.06.2019] (adaptiert).

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie für den geschätzten Umsatz pro Nutzer in Deutschland die absolute und die relative Änderung für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

absolute Änderung: € ____

relative Änderung: ____

2) Berechnen Sie den Differenzenquotienten des geschätzten Umsatzes pro Nutzer in Deutschland für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

b) Die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wird in der oben angeführten Quelle wie folgt beschrieben:

„20 Prozent Wachstum pro Jahr"

1) Geben Sie an, wie die Umsatzschätzung $U(2017)$ für das Jahr 2017 hätte lauten müssen, wenn der Umsatz ausgehend vom Schätzwert von 2015 tatsächlich jährlich um 20 % zugenommen hätte.

$U(2017)$ = ____ Millionen Euro

Jemand beschreibt die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wie folgt:

„*a* Millionen Euro Wachstum pro Jahr"

2) Berechnen Sie *a*.

c) Im Jahr 2015 betrug die Einwohnerzahl von Deutschland ungefähr 82,18 Millionen, jene von Österreich ungefähr 8,58 Millionen. Jemand stellt sich die folgende Frage: „Wie groß ist die Anzahl der Personen aus Österreich, die im Jahr 2015 schon E-Book-Nutzer waren?"

1) Beantworten Sie diese Frage unter der Annahme, dass Österreich im Jahr 2015 den gleichen (geschätzten) Anteil an E-Book-Nutzern wie Deutschland hatte.

Anzahl: ____ Personen

Im Jahr 2020 werden 500 Personen aus Österreich zufällig ausgewählt.
Die als binomialverteilt angenommene Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Personen aus dieser Auswahl an, die E-Book-Nutzer sind. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person E-Book-Nutzer ist, mit 12 % angenommen.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 50 E-Book-Nutzer in dieser Auswahl sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) Umsatz pro Nutzer 2015: rund € 49,86
Umsatz pro Nutzer 2020: rund € 95,49

absolute Änderung: € 45,63
relative Änderung: 0,9155

a2) Differenzenquotient für das Intervall [2015; 2020]: rund € 9,13 pro Jahr

b) Lösungserwartung:

b1) $U(2017) = U(2015) \cdot 1{,}2^2$
$U(2017) = 502{,}56$ Millionen Euro

b2) $a = \frac{869 - 349}{5} = 104$

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:
$8{,}58 \cdot \frac{7}{82{,}18} = 0{,}7308347... \approx 0{,}730835$
Anzahl: 730 835 Personen

c2) mögliche Vorgehensweise:
$n = 500;\ p = 0{,}12$
$P(X \geq 50) = 0{,}9287... \approx 0{,}929$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte. Andere Schreibweisen der Lösungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die absolute Änderung: [44; 47]
Toleranzintervall für die relative Änderung: [0,88; 0,95]

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [8,90; 9,40]

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [502 Millionen Euro; 503 Millionen Euro]

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [720 000; 780 000]

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,90; 0,95]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zuverlässigkeit eines Systems*

Aufgabennummer: 2_045	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1, AN 3.3, WS 2.3	

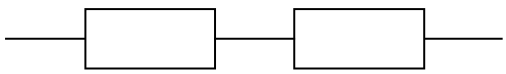
Ein System ist im Folgenden eine Maschine, die aus mehreren Bauteilen besteht. Jedes Bauteil dieses Systems kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit korrekt funktionieren oder ausfallen. Wenn einzelne Bauteile eines Systems ausfallen, hängt es von der Bauart des Systems ab, ob das gesamte System weiter funktioniert oder ob es ausfällt.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Bauteils* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. Das gilt jeweils für eine bestimmte Zeitdauer und unter bestimmten Bedingungen.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Systems* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. (Es wird modellhaft angenommen, dass Ausfälle von Bauteilen voneinander unabhängig sind.) Die entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit heißt Ausfallwahrscheinlichkeit.

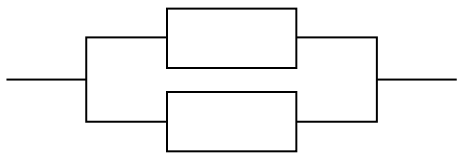
Man unterscheidet zwei einfache Typen von Systemen:

- Seriensysteme:



Ein Seriensystem funktioniert genau dann, wenn alle Bauteile funktionieren.

- Parallelsysteme:

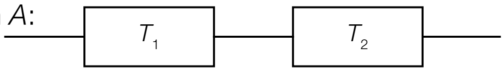


Ein Parallelsystem funktioniert genau dann, wenn mindestens ein Bauteil funktioniert.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist das System A:



Das Bauteil T_1 hat die Zuverlässigkeit p_1 und das Bauteil T_2 hat die Zuverlässigkeit p_2.

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems A als Funktion z_A von p_1 und p_2.

Geben Sie $z_A(p_1, p_2)$ an!

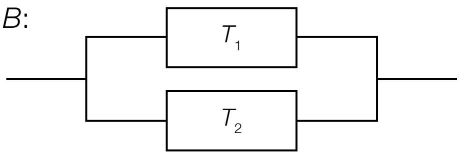
$z_A(p_1, p_2) =$ ____

Bei einem anderen System gleicher Bauart haben die Bauteile jeweils die gleiche Zuverlässigkeit $p_1 = p_2 = 0{,}7$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit dieses Systems soll auf ein Viertel der aktuellen Ausfallwahrscheinlichkeit gesenkt werden.

Geben Sie an, welchen Wert die Zuverlässigkeit p_{neu} (für jedes der beiden Bauteile) annehmen muss!

$p_{neu} =$ ____

b) Gegeben ist das System B:



Die beiden Bauteile T_1 und T_2 haben jeweils die gleiche Zuverlässigkeit p.

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems B als Funktion z_B von p.

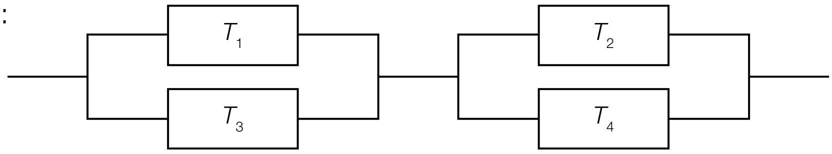
Geben Sie $z_B(p)$ an!

$z_B(p) =$ ____

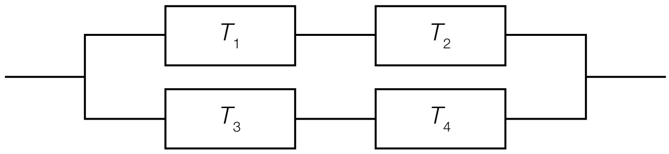
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion z_B auf dem Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend ist!

c) Gegeben sind die Systeme C und D:

System C:



System D:



Jedes der Bauteile T_1, T_2, T_3 und T_4 hat die gleiche Zuverlässigkeit p.

Die Zuverlässigkeit z_C des Systems C ist eine Funktion von p und wird durch die Funktionsgleichung $z_C(p) = p^4 - 4 \cdot p^3 + 4 \cdot p^2$ beschrieben.

Ermitteln Sie den Quotienten $\frac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)}$ und interpretieren Sie diesen Wert für das System C!

Die Zuverlässigkeit z_D des Systems D ist eine Funktion von p.

Begründen Sie, warum $z_C(p) > z_D(p)$ für alle $p \in (0;\ 1)$ gilt!
Verwenden Sie dazu entweder eine Funktionsgleichung von z_D oder begründen Sie anhand der Bauart der Systeme C und D.

Lösungserwartung

a) $z_A(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2$

mögliche Vorgehensweise:

$1 - p_{neu}^2 = \frac{1 - 0{,}7^2}{4}$

$p_{neu} = \sqrt{0{,}8725} \approx 0{,}934$

b) $z_B(p) = 1 - (1 - p)^2$

mögliche Vorgehensweisen:

Der Funktionsterm $1 - (1 - p)^2 = -(p - 1)^2 + 1$ ist dahingehend zu deuten, dass die durch $f(x) = x^2$ beschriebene Grundparabel durch Einsetzen von $x = (p - 1)$ um eine Einheit nach rechts verschoben wird, wegen des Minus vor der Klammer an der horizontalen Achse gespiegelt und durch die Addition von 1 um eine Einheit nach oben geschoben wird.
Damit liegt der Scheitelpunkt bei $(1|1)$ und z_B ist im Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend.

oder:

$z_B'(p) = 2 \cdot (1 - p) > 0$ für alle $p \in (0; 1)$

oder:

$z_B = 1 - (1 - p)^2$
$(1 - p)$ ist für $p \in (0; 1)$ positiv und streng monoton fallend, daher auch $(1 - p)^2$.
Damit ist $1 - (1 - p)^2$ für $p \in (0; 1)$ streng monoton steigend.

c) $\frac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)} \approx 0{,}254$

mögliche Interpretation:
Bei Erhöhung der Zuverlässigkeit der Bauteile von 0,8 auf 0,9 sinkt die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems auf etwa ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

mögliche Begründungen:

$z_D(p) = 2 \cdot p^2 \cdot (1 - p^2) + p^4$
$z_D(p) = 2 \cdot p^2 - p^4$

Der Graph der Funktion z_C verläuft für alle $p \in (0; 1)$ oberhalb des Graphen der Funktion z_D.

oder:

Bei allen Kombinationen, bei denen System *D* funktioniert, funktioniert auch System *C*. Außerdem funktioniert System *C* auch dann, wenn nur T_1 und T_4 bzw. nur T_2 und T_3 funktionieren.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen richtigen Term für z_A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,93; 0,94] bzw. [93 %; 94 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für einen richtigen Nachweis. Andere richtige Nachweise (z. B. grafische Nachweise) sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für den richtigen Wert des Quotienten und eine richtige Interpretation.
Toleranzintervall: [0,25; 0,26] bzw. [25 %; 26 %]
– Ein Punkt für eine richtige Begründung.

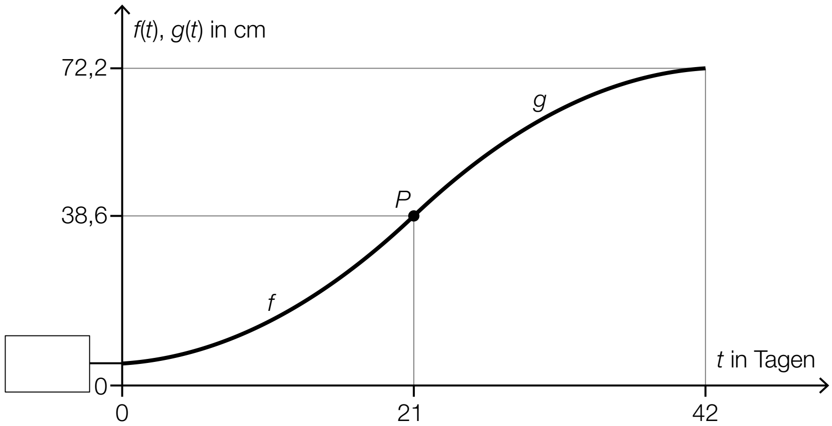
Sonnenblumen

Aufgabenstellung:

a) Die Höhe einer bestimmten Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch die zwei quadratischen Funktionen f und g beschreiben. Die Graphen dieser beiden Funktionen gehen im Punkt P mit gleicher Steigung ineinander über. (Siehe unten stehende Abbildung.)

$f(t) = \frac{1}{15} \cdot t^2 + 0{,}2 \cdot t + 5 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 21$
$g(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \quad \text{mit} \quad 21 \leq t \leq 42$

$t \in [0; 42]$ ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$f(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt t in cm
$g(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt t in cm



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung den fehlenden Wert der Achsenbeschriftung in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c der Funktion g. *[0/½/1 P.]*

3) Interpretieren Sie den nachstehenden Term im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Es gilt: $t_1 = 2$ Tage, $t_2 = 42$ Tage

$\frac{g(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ *[0/1 P.]*

b) Die Höhe einer anderen Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t in einem bestimmten Zeitintervall näherungsweise durch die Funktion h beschreiben.

$h(t) = 6{,}2 \cdot a^t$

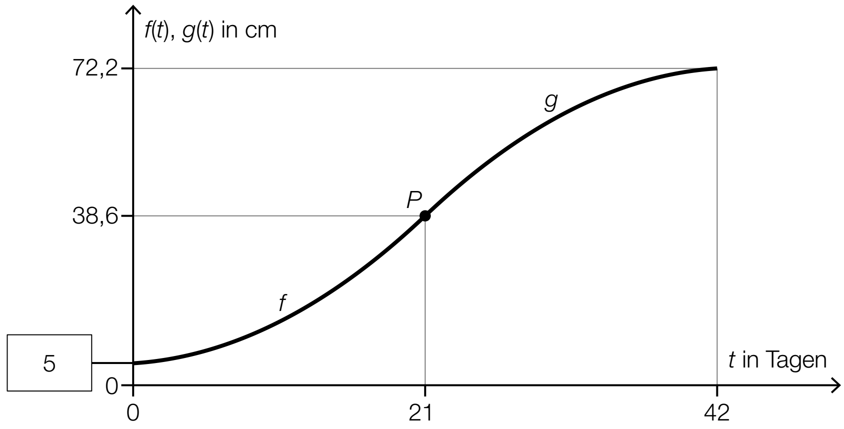
t ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$h(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt t in cm

Zum Zeitpunkt $t = 17$ beträgt die Höhe dieser Sonnenblume 38,6 cm.

1) Berechnen Sie a. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f'(t) = \frac{2}{15} \cdot t + 0{,}2$

$g'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$

I: $g(21) = 38{,}6$
II: $g(42) = 72{,}2$
III: $f'(21) = g'(21)$

oder:

I: $21^2 \cdot a + 21 \cdot b + c = 38{,}6$
II: $42^2 \cdot a + 42 \cdot b + c = 72{,}2$
III: $42 \cdot a + b = 3$

a3) Der Term beschreibt die mittlere Änderungsrate der Höhe dieser Sonnenblume im Zeitintervall [2; 42] in cm/Tag.

oder:

Der Term beschreibt das durchschnittliche Wachstum dieser Sonnenblume im Zeitintervall [2; 42] in cm/Tag.

a1) Ein Punkt für das Eintragen des richtigen Wertes.
a2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems mit drei Gleichungen, ein halber Punkt für nur zwei richtige Gleichungen.
a3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

b1) $38{,}6 = 6{,}2 \cdot a^{17}$

$a = \sqrt[17]{\frac{38{,}6}{6{,}2}} = 1{,}1135...$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a.

Pelletsheizung

In Österreichs Haushalten werden verschiedene Heizungsarten wie zum Beispiel die Ölheizung (mit Heizöl als Brennmaterial) oder die Pelletsheizung (mit Pellets – kleine gepresste Holzspäne – als Brennmaterial) eingesetzt.

In der nachstehenden Tabelle sind die Jahresdurchschnittspreise für das Heizen mit Heizöl bzw. mit Pellets für die Jahre 2006 und 2019 in Cent pro Kilowattstunde (Cent/kWh) angegeben.

	2006	2019
Heizöl	6,80	7,95
Pellets	4,40	4,84

Datenquelle: https://www.propellets.at/haeufige-fragen-und-antworten-zu-pellets [13.10.2021].

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Jahresdurchschnittspreise für Pellets (in Cent/kWh pro Jahr) für den Zeitraum von 2006 bis 2019. *[0/1 P.]*

b) Familie Buchner lebt in einem Einfamilienhaus und heizt mit Heizöl. Die Familie überlegt, auf eine Pelletsheizung umzusteigen.
Für die geschätzten Gesamtkosten für das Heizen mit Heizöl oder mit Pellets ab dem Jahr 2019 trifft Familie Buchner folgende Annahmen:

- Familie Buchner verbraucht pro Jahr rund 15000 kWh Energie für das Beheizen ihres Hauses.
- Der Jahresdurchschnittspreis für das Heizen mit Heizöl (0,0795 €/kWh) und jener für das Heizen mit Pellets (0,0484 €/kWh) bleiben ab dem Jahr 2019 gleich.
- Der Umstieg von der Ölheizung zu einer Pelletsheizung kostet einmalig 10.000 €.

t ... Zeit seit Beginn des Jahres 2019 in Jahren
$K_{Öl}(t)$ ... geschätzte Gesamtkosten für das Heizen mit Heizöl bis zur Zeit t in €
$K_{Pellets}(t)$ ... geschätzte Gesamtkosten für das Heizen mit Pellets bis zur Zeit t in €

1) Stellen Sie auf Basis dieser Annahmen jeweils eine Funktionsgleichung von $K_{Öl}$ bzw. von $K_{Pellets}$ auf.

$K_{Öl}(t) =$ ____

$K_{Pellets}(t) =$ ____ *[0/½/1 P.]*

2) Ermitteln Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem die geschätzten Gesamtkosten für Familie Buchner für das Heizen mit Pellets gleich groß sind wie die geschätzten Gesamtkosten für das Heizen mit Heizöl. *[0/1 P.]*

c) Die Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich kann für den Zeitraum von 1997 bis 2019 modellhaft durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden.

$$A(t) = \frac{147\,130}{1 + 31 \cdot e^{-0{,}28 \cdot t}}$$

t ... Zeit seit Beginn des Jahres 1997 in Jahren
$A(t)$ ... Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich zur Zeit t in 1 000 Stück

1) Ermitteln Sie für den Zeitraum von 1997 bis 2019 dasjenige Jahr, in dem gemäß diesem Modell die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich am größten war. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\frac{4{,}84 - 4{,}4}{13} = 0{,}033...$
Die mittlere Änderungsrate der Jahresdurchschnittspreise für Pellets beträgt rund 0,03 Cent/kWh pro Jahr.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der mittleren Änderungsrate.

b1) $K_{\text{Öl}}(t) = 15\,000 \cdot 0{,}0795 \cdot t = 1\,192{,}5 \cdot t$
$K_{\text{Pellets}}(t) = 15\,000 \cdot 0{,}0484 \cdot t + 10\,000 = 726 \cdot t + 10\,000$

b2) $1\,192{,}5 \cdot t_1 = 726 \cdot t_1 + 10\,000$
$t_1 = 21{,}4...$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der beiden Funktionsgleichungen $K_{\text{Öl}}$ und K_{Pellets}, ein halber Punkt für nur eine richtige Funktionsgleichung.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.

c1) $A''(t) = 0$
$t = 12{,}2...$

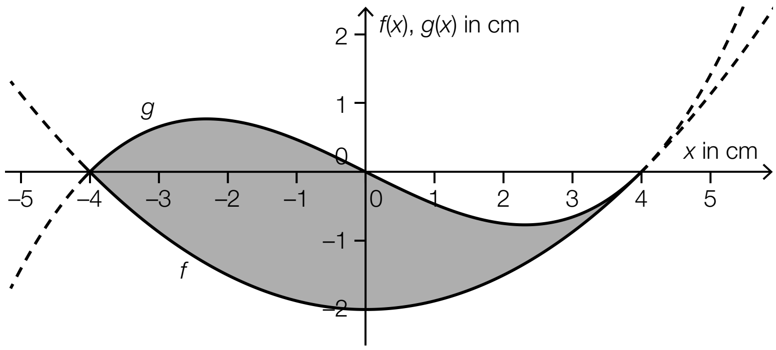
Im Jahr 2009 war die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich am größten.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Jahreszahl.

Firmenlogos

Aufgabenstellung:

a) In der nachstehenden Abbildung ist ein Firmenlogo grau markiert dargestellt.



Die untere Begrenzungslinie wird durch einen Teil des Graphen der Funktion f beschrieben:
$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 - 2$

Die obere Begrenzungslinie wird durch einen Teil des Graphen der Funktion g beschrieben:
$g(x) = a \cdot (x^3 - 16 \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$

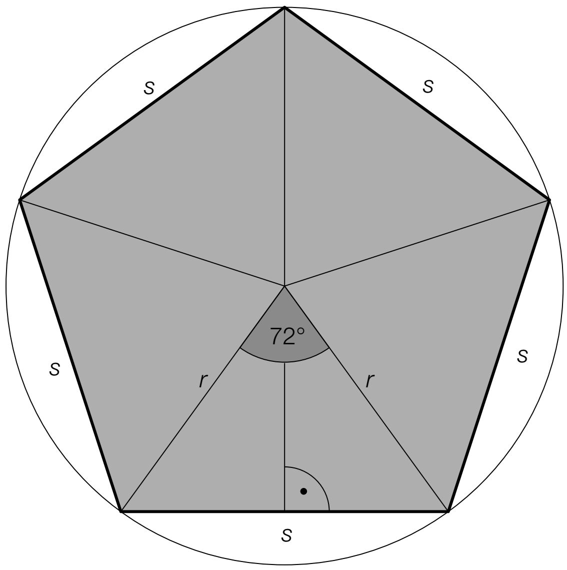
An der Stelle $x = 4$ haben f und g die gleiche Steigung.

1) Berechnen Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

Der Punkt $(0|0)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von g.

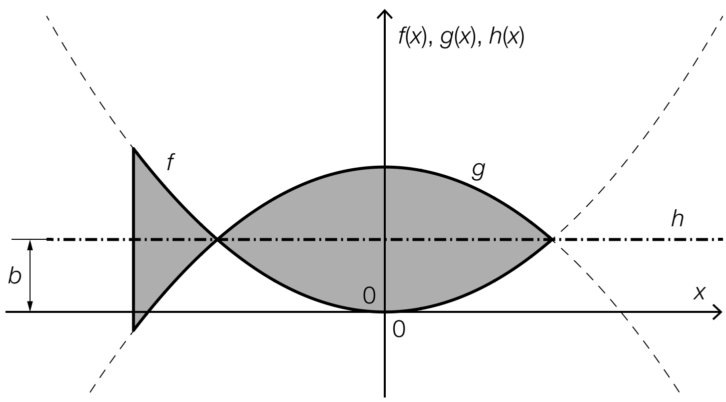
2) Begründen Sie, warum der Graph der Funktion g keinen weiteren Wendepunkt haben kann. *[0/1 P.]*

b) Das Logo eines Autoherstellers hat die Form eines regelmäßigen Fünfecks (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



1) Berechnen Sie für $r = 3$ cm den Umfang u dieses regelmäßigen Fünfecks. *[0/1 P.]*

c) Im nachstehenden Koordinatensystem ist das Logo eines Fischrestaurants grau markiert dargestellt.



Das Logo ist symmetrisch bezüglich des Graphen der konstanten Funktion h mit $h(x) = b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$. Die Begrenzungslinien des Logos sind Teile der Graphen der Funktionen f und g (siehe obige Abbildung).

Für die Funktion f gilt:

$f(x) = a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

1) Stellen Sie unter Verwendung von a und b eine Funktionsgleichung von g auf. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $f'(x) = \frac{x}{4}$
$f'(4) = 1$
$g'(x) = a \cdot (3 \cdot x^2 - 16)$
$g'(4) = 32 \cdot a$
$32 \cdot a = 1$
$a = \frac{1}{32}$

a2) Die Funktion g ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

oder:

Die Funktion g'' ist linear und hat nur 1 Nullstelle.
(Die Funktion g kann also nur 1 Wendepunkt haben.)

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) $u = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin(36°) = 17{,}63...$

$u = 17{,}6$ cm

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Umfangs u.

c1) $g(x) = -a \cdot x^2 + 2 \cdot b$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von g.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Baumwachstum

Aufgabennummer: 2_010 | Typ 1 ☐ | Typ 2 ☒ | technologiefrei ☐

Die nachstehende Tabelle enthält Messwerte des Umfangs eines bestimmten Baumstamms in Abhängigkeit von seinem Alter.

Alter t (in Jahren)	25	50	75	100
Umfang u (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370

Dieser Zusammenhang kann durch eine Wachstumsfunktion u modelliert werden, wobei der Wert $u(t)$ den Umfang zum Zeitpunkt t angibt.

Aufgabenstellung:

a) Für die ersten 50 Jahre soll die Zunahme des Umfangs mit einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden.

1) Geben Sie a und b so an, dass f mit den in der obigen Tabelle angegebenen Werten für ein Alter von 25 und 50 Jahren übereinstimmt.

$a =$ ________________________________

$b =$ ________________________________

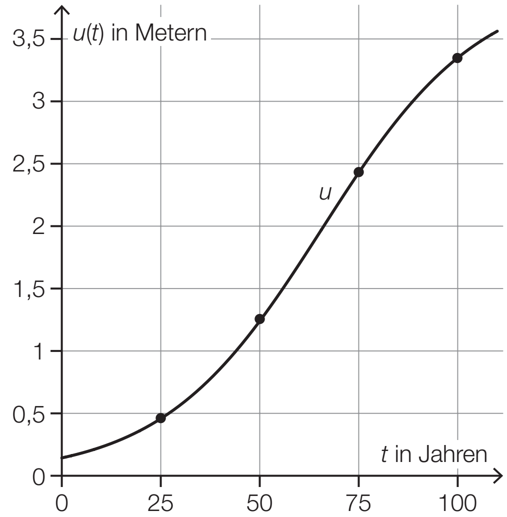
2) Begründen Sie rechnerisch, warum dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht angemessen ist.

b) 1) Interpretieren Sie den Differenzenquotient von u im Zeitraum von 50 bis 75 Jahren unter Angabe des konkreten Wertes im gegebenen Sachzusammenhang.

Es gilt: $u'(50) = 0{,}043$.

2) Interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Abbildung sind die Messwerte und der Graph der Wachstumsfunktion u veranschaulicht.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung denjenigen Zeitpunkt t_0 ab, zu dem der Umfang des Baumes am schnellsten zugenommen hat.

t_0 = ______________________________ Jahre

2) Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der dieser Zeitpunkt rechnerisch ermittelt werden kann, wenn die Wachstumsfunktion u bekannt ist.

d) Für die Wachstumsfunktion u gilt: $u(t) = \frac{3{,}95}{1 + 26{,}65 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}}$.
Der Umfang des Baumstamms nähert sich entsprechend dieser Wachstumsfunktion einem bestimmten Wert u_{max}.

1) Geben Sie u_{max} an.

u_{max} = ______________________________ Meter

Lösungserwartung

a1) $0{,}462 = a \cdot b^{25}$
$1{,}256 = a \cdot b^{50}$

$\Rightarrow \quad a = 0{,}1699\ldots$
$b = 1{,}0408\ldots$

a2) $f(75) = 0{,}1699\ldots \cdot 1{,}0408\ldots^{75} = 3{,}4145\ldots$

Der Funktionswert weicht stark vom Wert in der Tabelle ab. Aus diesem Grund ist dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht angemessen.

b1) $\frac{u(75) - u(50)}{75 - 50} = \frac{2{,}465 - 1{,}256}{25} = 0{,}048\ldots$
Die durchschnittliche Zunahme zwischen 50 und 75 Jahren beträgt rund 0,05 m pro Jahr.

b2) Die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 50$ beträgt 0,043 m pro Jahr.

c1) $t_0 = 65$ Jahre

c2) $u''(t) = 0$

d1) $u_{max} = 3{,}95$ Meter

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

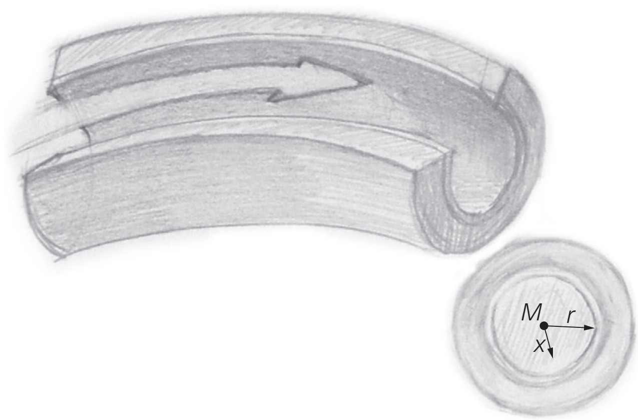
c1) Ein Punkt für das richtige Ablesen.
Toleranzintervall: [55; 75]
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

d1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

Blutgefäß

Aufgabennummer: 2_FT002	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Ein Blutgefäß kann wie in der nachstehenden schematischen Darstellung mit kreisförmiger Querschnittsfläche angenommen werden.



Bildquelle: http://www.gefaesschirurgie-klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php [05.06.2013] (adaptiert).

Die Funktion v mit $v(x) = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v des Blutteilchens und seinem Abstand x zum Mittelpunkt M der Querschnittsfläche des Blutgefäßes.

Dabei gilt:

M … Mittelpunkt der Querschnittsfläche des Blutgefäßes
r … Innenradius der Querschnittsfläche des Blutgefäßes (in mm)
v_m … maximale Geschwindigkeit des Blutteilchens in M (in cm/s)
x … Abstand des Blutteilchens von M (in mm)
$v(x)$ … Geschwindigkeit des Blutteilchens bei x (in cm/s)

Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für v an.

$D = [$__________ ; __________$)$

b) Bei einem bestimmten Abstand x_1 des Blutteilchens von M beträgt seine Geschwindigkeit 75 % von v_m.

1) Berechnen Sie x_1.

c) 1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für $x(v)$ auf.

$x(v) =$ ______________________________ mit $v \in (0; v_m]$

2) Berechnen Sie in Abhängigkeit von r denjenigen Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes, bei dem die Geschwindigkeit des Blutteilchens auf die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit abnimmt.

d) 1) Geben Sie die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit v beim Abstand x an.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Vorzeichens der momentanen Änderungsrate von $v(x)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a1) $D = [0; r)$

b1) $\frac{3}{4} \cdot v_m = v_m \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{r}{2}$

c1) $x(v) = r \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{v_m}}$ mit $v \in (0; v_m]$

c2) $x\left(\frac{v_m}{2}\right) = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2}$

d1) $v'(x) = -v_m \cdot \frac{2 \cdot x}{r^2}$

d2) Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeit des Blutteilchens bei steigendem Abstand vom Mittelpunkt abnimmt.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Definitionsbereichs.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung.
c2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

d1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen momentanen Änderungsrate.
d2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung des Vorzeichens.

Wachstum einer Pflanze

Aufgabennummer: 2_004	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Das Wachstum einer Pflanze wurde über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe gemessen. Die Höhe dieser Pflanze kann in Abhängigkeit von der Zeit *t* durch eine Funktion *h* mit $h(t) = \frac{1}{24} \cdot (-t^3 + 27 \cdot t^2 + 120)$ modelliert werden (*t* in Wochen seit Beobachtungsbeginn, $h(t)$ in cm).

Aufgabenstellung:

a) 1) Interpretieren Sie $\frac{h(13) - h(9)}{4} = 9{,}47\ldots$ im gegebenen Sachzusammenhang.

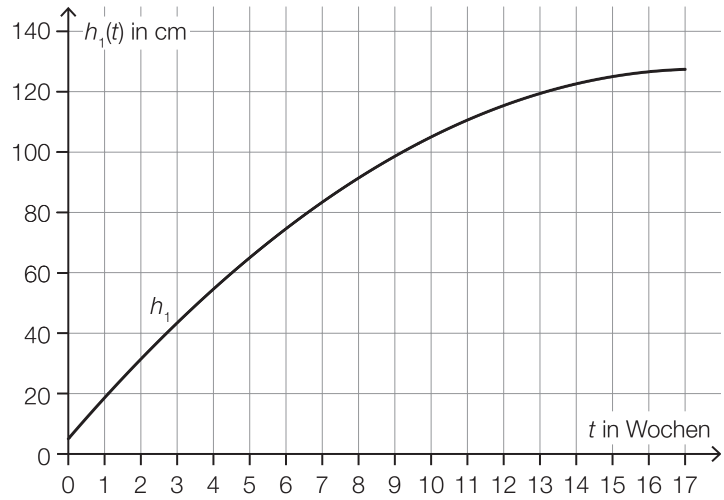
2) Interpretieren Sie $h'(9)$ unter Angabe des konkreten Wertes im gegebenen Sachzusammenhang.

b) 1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion *h* im Beobachtungszeitraum kein lokales Maximum hat.

c) Für ein schnelleres Wachstum wird die Pflanze gedüngt. Zwei Wochen später erreicht sie ihr stärkstes Wachstum.

1) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Pflanze gedüngt wurde.

d) Im selben Zeitraum wurde das Wachstum einer anderen Pflanze beobachtet und modelliert. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der entsprechenden Funktion h_1.



1) Interpretieren Sie das Krümmungsverhalten von h_1 im Intervall [0; 17] im Hinblick auf das Wachstum dieser Pflanze.

Lösungserwartung

a1) Die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze im Zeitintervall [9; 13] beträgt durchschnittlich 9,47… cm pro Woche.

a2) $h'(9) = 10{,}125$
Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze zum Zeitpunkt $t = 9$ beträgt rund 10,1 cm pro Woche.

b1) $h'(t) = 0$
$t_1 = 0$, $t_2 = 18$
An der Stelle $t_1 = 0$ hat die Funktion ein lokales Minimum. Die Stelle $t_2 = 18$ befindet sich außerhalb des Beobachtungszeitraums. D. h., die Funktion hat im Beobachtungszeitraum kein lokales Maximum.

c1) Zeitpunkt des stärksten Wachstums: $h''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 9$
Die Pflanze wurde zum Zeitpunkt $t = 7$ gedüngt.

d1) Die Wachstumsgeschwindigkeit dieser Pflanze nimmt im Beobachtungszeitraum ab, d. h., sie wächst immer langsamer.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe des richtigen Wertes.

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Zeitpunkts.

d1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Höhe der Schneedecke

Aufgabennummer: 2_FT001	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die Höhe einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit ab. Bei gleichbleibender Temperatur kann die Höhe einer Schneedecke bis zur vollständigen Schneeschmelze durch die Funktion h modellhaft beschrieben werden. Dabei gilt:

$h(t) = h_0 - a \cdot t^2 \quad \text{mit} \quad a > 0,\ t \geq 0$

t … Zeit in Tagen seit Beginn der Messung
h_0 … Höhe der Schneedecke zu Beginn der Messung in cm
$h(t)$ … Höhe der Schneedecke nach t Tagen in cm

Aufgabenstellung:

a) Eine 20 cm hohe Schneedecke ist nach einem halben Tag nur mehr 18 cm hoch.

1) Berechnen Sie, wie viele Tage nach Beginn der Messung die Schneedecke vollständig geschmolzen ist.

2) Beschreiben Sie, wie sich eine Erhöhung des Parameters a auf $h(t)$ auswirkt.

b) In einem Alpendorf gilt für die Höhe der Schneedecke in einem bestimmten Zeitraum $h_0 = 40$ und $a = 5$.

1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Höhe der Schneedecke in diesem Alpendorf innerhalb der ersten beiden Tage nach Beginn der Messung.

2) Interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

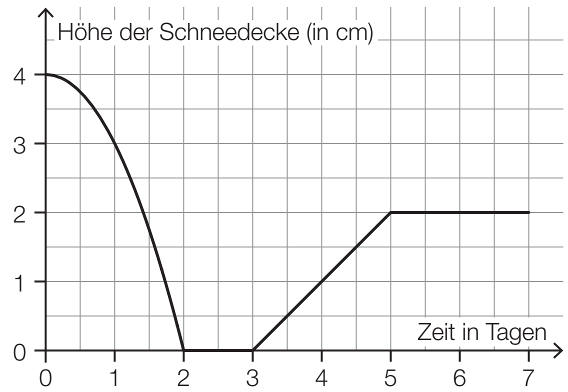
Die Berechnung der Höhe der Schneedecke ist nur in einem bestimmten Zeitintervall sinnvoll.

3) Ergänzen Sie die obere Intervallgrenze für dieses Zeitintervall.

Zeitintervall: [0; __________]

4) Interpretieren Sie $h'(0{,}5)$ im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe des konkreten Wertes.

c) Nachstehend ist modellhaft die Entwicklung der Höhe der Schneedecke in Zentimetern innerhalb einer Woche in einer bestimmten Stadt abgebildet.



Gerhard behauptet, dass es sich beim Verlauf der Höhe der Schneedecke nicht um den Graphen einer Funktion handelt.

1) Begründen Sie, warum seine Behauptung <u>nicht</u> richtig ist.

Der Graph kann im Intervall [3; 5] durch eine Funktion f mit $f(t) = k \cdot t + d$ beschrieben werden.

2) Geben Sie k und d an.

k = ____________________

d = ____________________

3) Beschreiben Sie unter Angabe konkreter Werte die Entwicklung der Höhe der Schneedecke im Intervall [3; 7].

Lösungserwartung

a1) $18 = 20 - a \cdot 0{,}5^2 \quad \Rightarrow \quad a = 8$
$20 - 8 \cdot t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1{,}58\ldots$ Tage

a2) Eine Erhöhung des Parameters a bewirkt, dass die Höhe der Schneedecke schneller abnimmt.

b1) $h(t) = 40 - 5 \cdot t^2$
$\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{20 - 40}{2} = -10$
Die mittlere Änderungsrate innerhalb der ersten beiden Tage beträgt –10 cm pro Tag.

b2) In den ersten beiden Tagen nimmt die Höhe der Schneedecke durchschnittlich um 10 cm pro Tag ab.

b3) Zeitintervall: $[0; \sqrt{8}]$

b4) $h'(0{,}5) = -5$
Zum Zeitpunkt $t = 0{,}5$ nimmt die Höhe der Schneedecke um 5 cm pro Tag ab.

c1) Der Graph beschreibt den Graphen einer Funktion, da jedem Zeitpunkt t eindeutig eine Schneehöhe $h(t)$ zugeordnet wird.

c2) $k = 1$
$d = -3$

c3) Im Zeitintervall [3; 5] nimmt die Höhe der Schneedecke von 0 cm auf 2 cm zu. Diese Höhe bleibt im Zeitintervall [5; 7] konstant.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
b3) Ein Punkt für das richtige Ergänzen.
b4) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe des richtigen Wertes.

c1) Ein Punkt für das richtige Erklären.
c2) Ein Punkt für das richtige Angeben der beiden Werte, ein halber Punkt für nur eine richtige Angabe.
c3) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Entwicklung.

Zehnkampf

Aufgabennummer: 2_FT003	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Beim Zehnkampf der Männer in der Leichtathletik erhält jeder Athlet in jeder der zehn Disziplinen Punkte, die jeweils nach einer eigenen Formel berechnet werden.
Für den Weitsprung gilt:

$$P = 0{,}14354 \cdot (x - 220)^{1{,}4}$$

x … Sprungweite in cm
P … Punkte

Für die Punktevergabe wird P nach der Berechnung auf Ganze gerundet.

Aufgabenstellung:

a) Der Weltrekord im Zehnkampf wurde vom Franzosen Kevin Mayer 2018 aufgestellt und liegt bei 9126 Punkten. Seine Weitsprungleistung betrug 780 cm.

1) Berechnen Sie, wie viele Punkte Kevin Mayer mehr erhalten hätte, wenn er die Weltrekordweite von 895 cm gesprungen wäre.

2) Geben Sie an, welche Sprungweite ein Athlet übertreffen muss, um Punkte zu bekommen.

Die Sprungweite muss größer als ______________________ cm sein.

b) Steigt die Sprungweite um 115 cm, so ist der durchschnittliche Punktezuwachs nicht für jeden Ausgangswert gleich.

1) Weisen Sie diese Aussage für die beiden Intervalle [500 cm; 615 cm] und [780 cm; 895 cm] rechnerisch nach.

Steigt die Sprungweite um den gleichen Wert, so ist der Punktezuwachs umso höher, je größer die Sprungweite ist, von der man ausgeht.

2) Begründen Sie diese Aussage.

c) Bei einem Zehnkampf sind 3 Sprünge erlaubt. Der weiteste fehlerfreie Sprung wird gewertet. Erfahrungsgemäß ist 1 von 20 Sprüngen ein Fehlversuch, weil er nicht korrekt durchgeführt wird.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet bei einem Zehnkampf keinen Fehlversuch im Weitsprung hat.

Lösungserwartung

a1) $0{,}14354 \cdot (780 - 220)^{1{,}4} = 1\,010{,}2\ldots \approx 1\,010$
$0{,}14354 \cdot (895 - 220)^{1{,}4} = 1\,312{,}1\ldots \approx 1\,312$

Kevin Mayer hätte 302 Punkte mehr erzielt.

a2) Die Sprungweite muss größer als 220 cm sein.

b1) Intervall [500 cm; 615 cm]: $\frac{620 - 383}{615 - 500} = 2{,}06\ldots$

Intervall [780 cm; 895 cm]: $\frac{1\,312 - 1\,010}{895 - 780} = 2{,}62\ldots$

b2) *P* kann als Funktion in Abhängigkeit von der Sprungweite *x* modelliert werden. Diese verläuft streng monoton wachsend und linksgekrümmt (positiv gekrümmt). Dadurch ist der Punktezuwachs umso höher, je größer die Sprungweite ist, von der man ausgeht.

c1) $\left(\frac{19}{20}\right)^3 = 0{,}8573\ldots \approx 85{,}7\ \%$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
a2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.
b2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

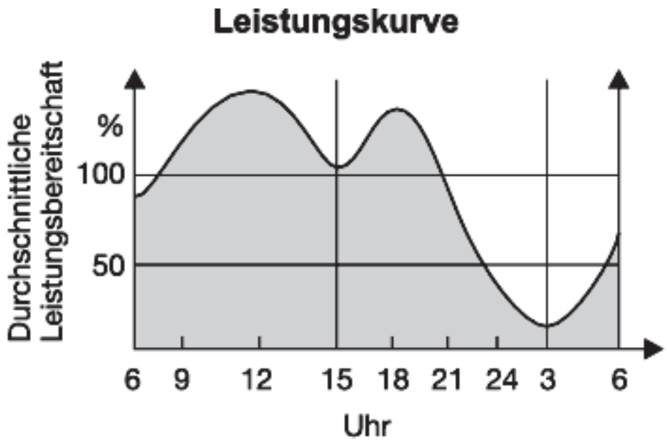
c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Leistungskurve

Aufgabennummer: 2_094	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.5, AN 1.3, AN 2.1	

Die *Leistungskurve*, auch *Arbeitskurve* genannt, ist die Darstellung der Arbeitsleistung einer Arbeitnehmerin/eines Arbeitnehmers in Abhängigkeit von der Tageszeit unter Berücksichtigung seiner Durchschnittsleistung (100 Prozent). Auf einer Webseite findet man folgende Grafik:



Quelle: http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/85252/leistungskurve-v9.html [30.05.2014].

a) 1) Lesen Sie ab, in welchen Zeitintervallen die Leistungsbereitschaft abnimmt.

b) Um 9 Uhr beträgt die Leistungsbereitschaft einer Arbeitnehmerin 110 %. Um 12 Uhr beträgt sie 140 %. Im Zeitintervall von 12 Uhr bis 14 Uhr beträgt die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft –12 % pro Stunde.

1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft im Zeitintervall von 9 Uhr bis 12 Uhr.

2) Berechnen Sie die Leistungsbereitschaft um 14 Uhr.

c) Die Leistungsbereitschaft eines Arbeitnehmers kann im Zeitintervall von 0 Uhr bis 6 Uhr durch die Funktion f beschrieben werden. Dabei gilt:

$$f(t) = \frac{10}{3} \cdot t^2 - 20 \cdot t + 40$$

t ... Zeit in Stunden, $0 \leq t \leq 6$
$f(t)$ ... Leistungsbereitschaft zur Zeit t in Prozent

1) Berechnen Sie die 1. Ableitung der Leistungsbereitschaft um 2:30 Uhr.

Lösungserwartung

a1) Eine Abnahme der Leistungsbereitschaft liegt im Zeitintervall von ca. 12 Uhr bis ca. 15 Uhr sowie im Zeitintervall von ca. 18 Uhr bis ca. 3 Uhr vor.

Toleranzintervall: $\pm 0{,}5\ h$

b1) mittlere Änderungsrate: $\frac{140 - 110}{12 - 9} = 10 \rightarrow +\ 10\ \%$ pro Stunde

b2) Leistungsbereitschaft um 14 Uhr: $140 - 2 \cdot 12 = 116 \rightarrow 116\ \%$

c1) $f'(t) = \frac{20}{3} \cdot t - 20$

$f'(2{,}5) = -\frac{10}{3} \approx -3{,}33$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fallschirmsprung*

Aufgabennummer: 2_061	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, AN 1.1, AN 1.3, AN 4.3	

Bei einem Fallschirmsprung aus einer Höhe von 4000 m über Grund wird 30 s nach dem Absprung der Fallschirm geöffnet.

Für $t \in [0; 30]$ gibt die Funktion v_1 mit $v_1(t) = 56 - 56 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$ (unter Berücksichtigung des Luftwiderstands) die Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers zum Zeitpunkt t an (t in s nach dem Absprung, $v_1(t)$ in m/s).

Für $t \geq 30$ gibt die Funktion v_2 mit $v_2(t) = \frac{51}{(t-29)^2} + 5 - 56 \cdot e^{-7{,}5}$ die Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers zum Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt der Landung an (t in s nach dem Absprung, $v_2(t)$ in m/s).

Modellhaft wird angenommen, dass der Fallschirmsprung lotrecht ist.

Aufgabenstellung:

a) 1) Deuten Sie $w = \frac{v_1(10) - v_1(5)}{10 - 5}$ im gegebenen Kontext.

Für ein $t_1 \in [0; 30]$ gilt: $v_1'(t_1) = w$.

2) Deuten Sie t_1 im gegebenen Kontext.

b) 1) Berechnen Sie mithilfe der Funktion v_1, in welcher Höhe der Fallschirm geöffnet wird.

2) Berechnen Sie die Zeitdauer des gesamten Fallschirmsprungs vom Absprung bis zur Landung.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

c) Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands hätte der Fallschirmspringer eine Anfangsgeschwindigkeit von 0 m/s und im Zeitintervall [0; 30] eine konstante Beschleunigung von 9,81 m/s². Die Fallgeschwindigkeit 9 s nach dem Absprung beträgt dann v^*.

1) Berechnen Sie, um wie viel $v_1(9)$ kleiner ist als v^*.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent 9 s nach dem Absprung die Beschleunigung des Fallschirmspringers geringer ist als bei einem Sprung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Deutungen:

Im Zeitintervall [5; 10] nimmt die Fallgeschwindigkeit (in m/s) des Fallschirmspringers pro Sekunde durchschnittlich um w zu.

oder:

Die mittlere Beschleunigung des Fallschirmspringers im Zeitintervall [5; 10] beträgt w (in m/s²).

a2) mögliche Deutung:

Zum Zeitpunkt t_1 ist die Momentanbeschleunigung genauso hoch wie die mittlere Beschleunigung im Zeitintervall [5; 10].

b) Lösungserwartung:

b1) $4000 - \int_0^{30} v_1(t)\,\mathrm{d}t = 2543{,}8... \approx 2544$

Der Fallschirm wird in einer Höhe von ca. 2544 m geöffnet.

b2) $\int_{30}^{x} v_2(t)\,\mathrm{d}t = 2543{,}8...$

$x = 531{,}7... \approx 532$

Die Zeitdauer des gesamten Fallschirmsprungs beträgt ca. 532 s.

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:

$9{,}81 \cdot 9 - v_1(9) = 38{,}192... \approx 38{,}19$

$v_1(9)$ ist um ca. 38,19 m/s kleiner als v^*.

c2) mögliche Vorgehensweise:

$\frac{9{,}81 - v_1'(9)}{9{,}81} = 0{,}84958... \approx 0{,}8496$

Die Beschleunigung unter Berücksichtigung des Luftwiderstands ist um ca. 84,96 % geringer als jene ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine richtige Deutung.
a2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s“ nicht angegeben sein muss.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s“ nicht angegeben sein muss.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Angebot und Nachfrage*

Aufgabennummer: 2_056	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.6, AN 1.3, AN 3.3	

Ein Aufeinandertreffen von Anbietern und Nachfragern wird in der Wirtschaftswissenschaft als *Markt* bezeichnet. Gibt es auf einem Markt genau einen Anbieter für eine Ware, so ist dieser in der Lage, den Preis der Ware zu bestimmen, wobei die nachgefragte und damit absetzbare Menge der Ware vom Preis abhängt. Um bei gewissen Problemstellungen mit der Kosten-, Erlös- und/oder Gewinnfunktion arbeiten zu können, wird häufig der Preis als sogenannte Preisfunktion der Nachfrage p_N in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge x der Ware angegeben.

Die nachstehenden Aufgaben sind für die Preisfunktion der Nachfrage p_N mit $p_N(x) = 36 - x^2$ zu bearbeiten. Dabei wird x in Mengeneinheiten (ME) und $p_N(x)$ in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) angegeben.

Aufgabenstellung:

a) Alle $x \in \mathbb{R}_0^+$, für die $p_N(x) \geq 0$ gilt, liegen im Intervall $[x_0; x_n]$.

   1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion p_N in diesem Intervall $[x_0; x_n]$ und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf den Verkaufspreis.

   2) Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass für alle x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$ aus dem Intervall $(x_0; x_n)$ die Ungleichung $p_N(x_1) > p_N(x_2)$ gilt.

b) Der Erlös durch die verkaufte Menge der Ware wird durch die Funktion E mit $E(x) = x \cdot p_N(x)$ beschrieben. Der Grenzerlös $E'(x)$ bei einer bestimmten Absatzmenge x beschreibt näherungsweise die Änderung des Erlöses bezogen auf eine zusätzlich abgesetzte Mengeneinheit.

   1) Ermitteln Sie diejenige Menge x_E, bei der der Erlös maximal ist.

   2) Begründen Sie, warum der Grenzerlös für jede verkaufte Menge x mit $0 < x < x_E$ positiv ist.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

c) Gibt es auf einem Markt viele Anbieter einer Ware, dann werden diese in der Regel bei steigendem Preis auch eine größere Menge der Ware anbieten. Dieser Zusammenhang kann als Preisfunktion des Angebots p_A in Abhängigkeit von der angebotenen Menge x beschrieben werden (mit x in ME und $p_A(x)$ in GE/ME).
Diejenige Menge der Ware, bei der der Preis für die angebotene Menge und der Preis für die nachgefragte Menge gleich groß sind, nennt man Gleichgewichtsmenge x_G. Den zugehörigen Preis nennt man Gleichgewichtspreis.

1) Ermitteln Sie für die gegebene Funktion p_N und die Funktion p_A mit $p_A(x) = 4 \cdot x + 4$ die Gleichgewichtsmenge x_G und den zugehörigen Gleichgewichtspreis.

Für eine Ware wird ein Preis p_M festgelegt, der um 2 GE/ME größer als der ermittelte Gleichgewichtspreis ist.

2) Bestimmen Sie die angebotene und die nachgefragte Menge für diesen Preis p_M und vergleichen Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die verkaufte Menge der Ware.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

a1) Intervall: $x_0 = 0$ ME, $x_n = 6$ ME $\Rightarrow$ [0 ME; 6 ME]

mittlere Änderungsrate: $\frac{p_N(6) - p_N(0)}{6 - 0} = \frac{0 - 36}{6} = -6$

mögliche Deutung:

Pro zusätzlicher Mengeneinheit, die verkauft werden soll, nimmt der Verkaufspreis im Intervall [0; 6] durchschnittlich um 6 GE/ME ab.

a2) mögliche Vorgehensweise:

Die angegebene Ungleichung besagt, dass die Funktion p_N im angegebenen Definitionsbereich streng monoton fallend ist. Das ist sicher dann der Fall, wenn $p_N'(x)$ negativ (oder für einzelne Stellen null) für alle $x \in (0; 6)$ ist.
Überprüfung: $p_N'(x) = -2 \cdot x$ und es gilt: $-2 \cdot x < 0$ für alle $x \in (0; 6)$

b1) $E(x) = x \cdot p_N(x) = -x^3 + 36 \cdot x$

$E'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 \cdot x^2 + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{12} \quad (x_2 = -\sqrt{12}) \quad \Rightarrow \quad x_E \approx 3{,}46$ ME

b2) mögliche Begründung:

Die Funktion E' ist eine nach unten offene Parabel, die an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert $E'(0) = 36$ hat und an der Stelle $x_E = \sqrt{12}$ eine Nullstelle hat. Also sind sämtliche Funktionswerte von E' (und damit der Grenzerlös für jede verkaufte Menge x) im Intervall $(0; x_E)$ positiv.

c1) $p_A(x) = p_N(x) \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot x + 4 = -x^2 + 36 \quad \Rightarrow \quad x_G = 4$ ME
Gleichgewichtspreis $= p_A(4) = p_N(4) = 20$

Bei der Gleichgewichtsmenge von $x_G = 4$ ME beträgt der zugehörige Gleichgewichtspreis 20 GE/ME.

c2) $p_M = 22$ GE/ME

angebotene Menge: $22 = 4 \cdot x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4{,}5$ ME
nachgefragte Menge: $22 = -x^2 + 36 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{14} \quad (x_2 = -\sqrt{14}) \quad \Rightarrow \quad x \approx 3{,}74$ ME

möglicher Vergleich:

Die nachgefragte Menge ist kleiner als die angebotene Menge, d. h., die Ware wird nicht zur Gänze verkauft.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Deutung.
a2) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis mithilfe der Differenzialrechnung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
b2) Ein Punkt für eine richtige Begründung. Andere richtige Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte, wobei die entsprechenden Einheiten nicht angeführt sein müssen. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
c2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte, wobei die entsprechenden Einheiten nicht angeführt sein müssen, und für einen richtigen Vergleich. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Körper mit rechteckigen Querschnittsflächen*

Aufgabennummer: 2_050	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, FA 2.1, FA 4.1, FA 4.3, AN 1.3, AN 4.3	

Die nachstehenden Abbildungen 1 und 2 stellen einen Körper mit ebenen Seitenflächen im Schrägriss bzw. eine Schnittfläche dar.

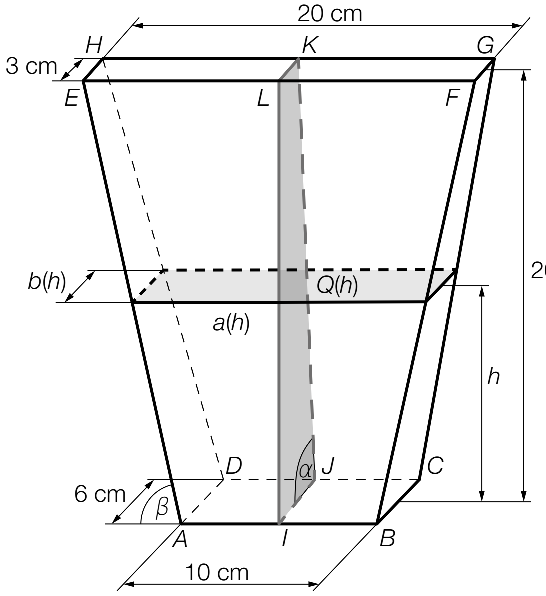


Abbildung 1: Schrägriss des Körpers

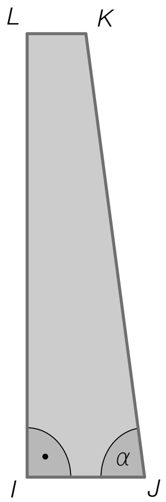


Abbildung 2: Schnittfläche *IJKL*

Die vordere Seitenfläche *ABFE* steht normal auf die horizontale Grundfläche *ABCD* und auf die horizontale Deckfläche *EFGH*, während die hintere Seitenfläche *DCGH* zur Grundfläche unter dem Winkel α ($0° < \alpha < 90°$) geneigt ist.

Die beiden Seitenflächen *ADHE* und *BCGF* weisen gegenüber der Grundfläche den gleichen Neigungswinkel β (mit $\beta \approx 76°$) auf.

Die horizontalen Querschnittsflächen des Körpers sind in jeder Höhe rechteckig. Die Längen $a(h)$ und die Breiten $b(h)$ dieser Rechtecke ändern sich linear in Abhängigkeit von der Höhe h. Die Grundfläche hat eine Länge von 10 cm und eine Breite von 6 cm, die Deckfläche hat eine Länge von 20 cm und eine Breite von 3 cm. Die Höhe des Körpers beträgt 20 cm.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Die Funktion $Q: [0; 20] \to \mathbb{R}$ beschreibt die Größe der Querschnittsfläche $Q(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h (mit $Q(h)$ in cm², h in cm).

Es gilt: $Q(h) = s \cdot h^2 + 1{,}5 \cdot h + t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Werte von s und t!

Berechnen Sie das Volumen des Körpers und geben Sie das Ergebnis inklusive Einheit an!

b) Die lokale Änderungsrate der Breite $b(h)$ nimmt für jedes $h \in [0; 20]$ einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ an.

Berechnen Sie c!

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen c und α mithilfe einer Gleichung!

c) Die Funktion a beschreibt die Länge $a(h)$ in der Höhe h mit $a(h)$ und h in cm.

Geben Sie eine Funktionsgleichung von a an!

Ändert man den Winkel β auf 45° und lässt die Länge der Grundlinie AB und die Körperhöhe unverändert, so erhält man eine neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1, bei der die Funktion a_1 mit $a_1(h) = 2 \cdot h + 10$ die Länge $a_1(h)$ in der Höhe h beschreibt ($a_1(h)$ und h in cm).

Geben Sie das Verhältnis $\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h : \int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h$ an und interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1 und die ursprüngliche vordere Seitenfläche $ABFE$!

Lösungserwartung

a) mögliche Vorgehensweise:

$Q(0) = 60 \quad \Rightarrow \quad t = 60$

$Q(20) = 60 \quad \Rightarrow \quad 60 = 400 \cdot s + 90 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{3}{40}$

$V = \int_0^{20} Q(h)\,\mathrm{d}h = -\frac{1}{40} \cdot 20^3 + 0{,}75 \cdot 20^2 + 60 \cdot 20 = 1\,300\text{ cm}^3$

b) $c = \frac{3-6}{20} = -\frac{3}{20}$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{c}$

c) mögliche Vorgehensweise:

$a(h) = \frac{a(20) - a(0)}{20} \cdot h + a(0)$

$a(h) = \frac{1}{2} \cdot h + 10$

mögliche Vorgehensweise:

$\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^{20} (2 \cdot h + 10)\,\mathrm{d}h = 600$

$\int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^{20} \left(\frac{1}{2} \cdot h + 10\right)\mathrm{d}h = 300$

$\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h : \int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h = 600 : 300 = 2 : 1$

Das Verhältnis des Flächeninhalts der neuen Seitenwand ABF_1E_1 zum Flächeninhalt der ursprünglichen Seitenwand $ABFE$ ist 2 : 1.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für s: [–0,08; –0,07]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung unter Angabe einer richtigen Einheit.
Toleranzintervall: [1 280 cm^3; 1 320 cm^3]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [–0,2; –0,1]
– Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Interpretation.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Stratosphärensprung

Aufgabennummer: 2_028	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 2.2	

Am 14.10.2012 sprang der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner aus einer Höhe von 38 969 m über dem Meeresspiegel aus einer Raumkapsel. Er erreichte nach 50 s in der nahezu luftleeren Stratosphäre eine Höchstgeschwindigkeit von 1 357,6 km/h (≈ 377,1 m/s) und überschritt dabei als erster Mensch im freien Fall die Schallgeschwindigkeit, die bei 20 °C ca. 1 236 km/h (≈ 343,3 m/s) beträgt, in der Stratosphäre wegen der niedrigen Lufttemperaturen aber deutlich geringer ist.

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft hängt bei Windstille nur von der Lufttemperatur T ab. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) werden nachstehend zwei Formeln angegeben, die – bis auf einen (gerundeten) Faktor – äquivalent sind. Die Lufttemperatur T wird in beiden Formeln in °C angegeben.

$$v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)}$$

$$v_2 = 331{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}}$$

Aufgabenstellung:

a) Die Fallbeschleunigung a eines Körpers im Schwerefeld der Erde ist abhängig vom Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt. Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche auf Meeresniveau, d. h. bei einer Entfernung von $r = 6\,371\,000$ m vom Erdmittelpunkt, beträgt bei vernachlässigbarem Luftwiderstand ca. 9,81 m/s².
Für die Fallbeschleunigung a gilt: $a(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und r der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt ist. Es gilt:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2};\ M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Berechnen Sie den Wert der Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner beim Absprung aus der Raumkapsel wirkte!

$a =$ ________ m/s²

Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung, die auf Felix Baumgartner bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit wirkte!

b) Als Felix Baumgartner seine Höchstgeschwindigkeit erreichte, bewegte er sich um 25 % schneller als der Schall in dieser Höhe.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der unter Verwendung einer der beiden in der Einleitung genannten Formeln die Lufttemperatur, die zu diesem Zeitpunkt geherrscht hat, berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Lufttemperatur!

Untersuchen Sie mithilfe der beiden Formeln den Quotienten der Schallgeschwindigkeiten im Lufttemperaturintervall [–60 °C; 20 °C] in Schritten von 10 °C und geben Sie eine Formel an, die in diesem Lufttemperaturintervall den Zusammenhang zwischen v_1 und v_2 beschreibt!

c) Zeigen Sie mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die beiden Formeln für die Schallgeschwindigkeit in der Einleitung bis auf einen (gerundeten) Faktor äquivalent sind! Gehen Sie dabei von der Formel für v_1 aus!

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit v_1 von der Lufttemperatur T kann im Lufttemperaturintervall [–20 °C; 40 °C] in guter Näherung durch eine lineare Funktion f mit $f(T) = k \cdot T + d$ modelliert werden.
Ermitteln Sie die Werte der Parameter k und d und interpretieren Sie diese Werte im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $r_1 = 6\,371\,000 + 38\,969 = 6\,409\,969$ m

$a(r_1) = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6\,409\,969^2} = 9{,}69$ m/s²

mittlere Beschleunigung: $a = \frac{377{,}1}{50} = 7{,}54$ m/s²

b) $\frac{377{,}1}{1{,}25} \approx 301{,}7$ m/s

$v_1(T) = 301{,}7 \quad \Rightarrow \quad T \approx -46{,}7$ °C

bzw. $v_2(T) = 301{,}7 \quad \Rightarrow \quad T \approx -46{,}9$ °C

T in °C	v_1 in m/s	v_2 in m/s	$\frac{v_2}{v_1}$
–60	292,67	292,84	1,00055
–50	299,46	299,63	1,00055
–40	306,10	306,27	1,00055
–30	312,59	312,77	1,00055
–20	318,96	319,13	1,00055
–10	325,20	325,38	1,00055
0	331,32	331,50	1,00055
10	337,33	337,51	1,00055
20	343,23	343,42	1,00055

$v_2 \approx 1{,}00055 \cdot v_1$ bzw. $v_1 \approx 0{,}99945 \cdot v_2$

c) $v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)} = \sqrt{401{,}87 \cdot 273{,}15 \cdot \left(\frac{T}{273{,}15} + 1\right)} \approx$

$\approx \sqrt{109\,770{,}8 \cdot \left(\frac{T}{273{,}15} + 1\right)} \approx 331{,}3 \cdot \sqrt{\frac{T}{273{,}15} + 1}$

Der Faktor 331,3 unterscheidet sich nur geringfügig vom Faktor 331,5 in der Formel für v_2.

$k = \frac{v_1(40) - v_1(-20)}{60} \approx 0{,}6$ ... pro 1 °C nimmt die Schallgeschwindigkeit um ca. 0,6 m/s zu

$d = v_1(0) \approx 331{,}3$ ... Schallgeschwindigkeit bei 0 °C

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Kettenlinie

Aufgabennummer: 2_030	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.7, FA 3.2	

Hängt man ein Seil (oder beispielsweise eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden.

Der Wert der Konstanten a hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.

Der vertikale Abstand zwischen dem tiefsten Punkt des Seils und seinen Aufhängepunkten wird als Durchhang bezeichnet.

Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion f der obigen Form mit $a = 4$ beschrieben werden (x und $f(x)$ in Metern). Die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Höhe und ihr Abstand beträgt $d = 6$ m.

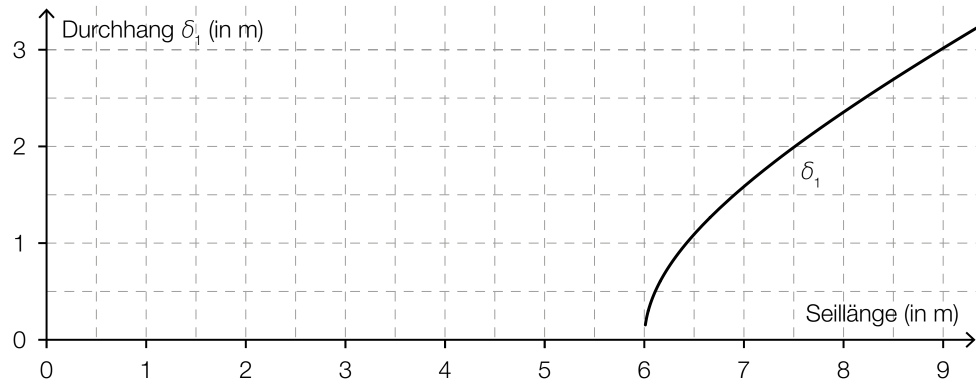
Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Stelle mit dem maximalen Durchhang des durch f beschriebenen Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Stelle!

Geben Sie eine Funktionsgleichung f_1 an, mit der ein Seil modelliert werden kann, welches an jeweils 1 m tieferen Aufhängepunkten montiert ist und denselben Durchhang wie das durch f beschriebene Seil aufweist!

b) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Durchhang δ des durch f modellierten Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Durchhang!

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion δ_1, der die Abhängigkeit des Durchhangs von der Länge des Seils zwischen den Aufhängepunkten P_1 und P_2 beschreibt.



Geben Sie mithilfe der oben dargestellten Abbildung die Länge des in der Einleitung beschriebenen Seils an! Ermitteln Sie weiters, um wie viele Meter der Durchhang zunimmt, wenn das Seil durch ein zwei Meter längeres Seil (gleicher Beschaffenheit) ersetzt wird, das an denselben Aufhängepunkten montiert ist!

c) Der Graph der Funktion f kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion g mit $g(x) = b \cdot x^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ angenähert werden. Der Graph von g verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f.

Geben Sie alle Gleichungen an, die für die Berechnung von b und c notwendig sind, und ermitteln Sie die Werte dieser Parameter!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der größte vertikale Abstand von f und g zwischen den beiden Aufhängepunkten berechnet werden kann!

d) Der Graph der Funktion f kann auch durch den Graphen einer Polynomfunktion h vierten Grades angenähert werden. Für den Graphen von h gelten folgende Bedingungen:
Er verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f und hat in den beiden Aufhängepunkten dieselbe Steigung wie der Graph von f.

Drücken Sie <u>alle</u> gegebenen Bedingungen mithilfe von Gleichungen aus!

Ermitteln Sie anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von h!

Möglicher Lösungsweg

a) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right) = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$

$f_1(x) = f(x) - 1 = \frac{4}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) - 1$

b) $\delta = f(3) - f(0)$
$\delta \approx 1{,}2$ m

Die Seillänge beträgt ca. 6,6 m.
$\delta_1(8{,}6) \approx 2{,}8 \ \Rightarrow$ Der Durchhang nimmt um ca. 1,6 m zu.

c) $g(0) = 4 = c$

$g(3) = f(3) \approx 5{,}18 = 9 \cdot b + 4 \ \Rightarrow \ b \approx 0{,}13$

größter vertikaler Abstand:
$(g(x) - f(x))' = 0$

d) $h(-3) = f(-3)$
$h(0) = f(0)$
$h(3) = f(3)$
$h'(-3) = f'(-3)$
$h'(3) = f'(3)$

$h(x) \approx 0{,}0007 \cdot x^4 + 0{,}125 \cdot x^2 + 4$

Saturn-V-Rakete

Aufgabennummer: 2_025	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 2.1, FA 4.3, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie erforderlich

Eine Mehrstufenrakete besteht aus mehreren, oft übereinander montierten „Raketenstufen". Jede Raketenstufe ist eine separate Rakete mit Treibstoffvorrat und Raketentriebwerk. Leere Treibstofftanks und nicht mehr benötigte Triebwerke werden abgeworfen. Auf diese Weise werden höhere Geschwindigkeiten und somit höhere Umlaufbahnen als mit einstufigen Raketen erreicht.
Die Familie der Saturn-Raketen gehört zu den leistungsstärksten Trägersystemen der Raumfahrt, die jemals gebaut wurden. Sie wurden im Rahmen des Apollo-Programms für die US-amerikanische Raumfahrtbehörde NASA entwickelt. Die Saturn V ist die größte jemals gebaute Rakete. Mithilfe dieser dreistufigen Rakete konnten in den Jahren 1969 bis 1972 insgesamt 12 Personen auf den Mond gebracht werden. 1973 beförderte eine Saturn V die US-amerikanische Raumstation Skylab in eine Erdumlaufbahn in 435 km Höhe.
Eine Saturn V hatte die Startmasse $m_0 = 2{,}9 \cdot 10^6$ kg. Innerhalb von 160 s nach dem Start wurden die $2{,}24 \cdot 10^6$ kg Treibstoff der ersten Stufe gleichmäßig verbrannt. Diese ersten 160 s werden als Brenndauer der ersten Stufe bezeichnet. Die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) einer Saturn V kann t Sekunden nach dem Start während der Brenndauer der ersten Stufe näherungsweise durch die Funktion v mit

$$v(t) = 0{,}0000000283 \cdot t^5 - 0{,}00000734 \cdot t^4 + 0{,}000872 \cdot t^3 - 0{,}00275 \cdot t^2 + 2{,}27 \cdot t$$

beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Beschleunigung einer Saturn V beim Start und am Ende der Brenndauer der ersten Stufe!

Geben Sie an, ob die Beschleunigung der Rakete nach der halben Brenndauer der ersten Stufe kleiner oder größer als die mittlere Beschleunigung (= mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) während der ersten 160 Sekunden des Flugs ist! Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion!

b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den eine Saturn V 160 s nach dem Start zurückgelegt hat!

Begründen Sie, warum in dieser Aufgabenstellung der zurückgelegte Weg nicht mit der Formel „Weg = Geschwindigkeit mal Zeit" berechnet werden kann!

c) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt t_1, für den gilt: $v(t_1) = \frac{v(0) + v(160)}{2}$.
Interpretieren Sie t_1 und $v(t_1)$ im gegebenen Kontext!

d) Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Treibstoffmasse m_T (in Tonnen) der Saturn V von der Flugzeit t während der Brenndauer der ersten Stufe durch eine Funktionsgleichung!

Geben Sie die prozentuelle Abnahme der Gesamtmasse einer Saturn V für diesen Zeitraum an!

e) Nach dem Gravitationsgesetz wirkt auf eine im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindliche Masse m die Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde ist.

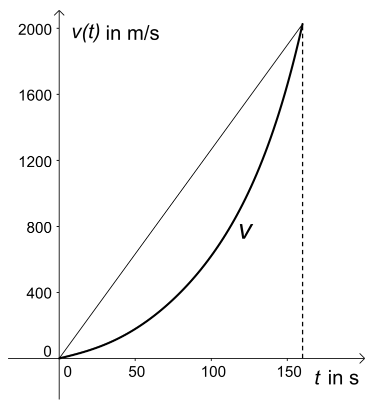
Deuten Sie das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ im Hinblick auf die Beförderung der Raumstation Skylab in die Erdumlaufbahn und beschreiben Sie, welche Werte dabei für die Grenzen r_1 und r_2 einzusetzen sind!

Begründen Sie anhand der Formel für die Gravitationskraft, um welchen Faktor sich das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ ändert, wenn ein Objekt mit einem Zehntel der Masse von Skylab in eine Umlaufbahn derselben Höhe gebracht wird!

Möglicher Lösungsweg

a) $a(0) = v'(0) = 2{,}27$ m/s^2
$a(160) = v'(160) = 40{,}83$ m/s^2

Bestimmt man die zur Sekante parallele Tangente, so liegt die Stelle des zugehörigen Berührpunktes rechts von $t = 80$. Aus der Linkskrümmung der Funktion v folgt daher, dass die Beschleunigung nach 80 Sekunden kleiner als die mittlere Beschleunigung im Intervall [0 s; 160 s] ist.



Weitere mögliche Begründung:
Die mittlere Beschleunigung (= Steigung der Sekante) in [0; 160] ist größer als die Momentanbeschleunigung (= Steigung der Tangente) bei $t = 80$.

b) $s(160) = \int_0^{160} v(t)\,\mathrm{d}t \approx 93\,371$

zurückgelegter Weg nach 160 s: 93 371 m

$s = v \cdot t$ gilt nur bei konstanter Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Saturn V ändert sich allerdings mit der Zeit.

c) $v(0) = 0$ m/s; $v(160) \approx 2\,022$ m/s
$v(t_1) = 1\,011 \;\Rightarrow\; t_1 \approx 125$ s

Die Geschwindigkeit ist nach 125 s halb so groß wie nach 160 s.

d) $m_T(t) = 2\,240 - 14 \cdot t$
$\frac{2{,}24}{2{,}9} \approx 0{,}77$
Die Gesamtmasse hat um 77 % abgenommen.

e) Das Ergebnis gibt die Arbeit an, die nötig ist, um die Raumstation Skylab in die entsprechende Erdumlaufbahn zu bringen.
r_1 ist der Erdradius, r_2 ist die Summe aus Erdradius und Höhe der Umlaufbahn.

Die Gravitationskraft und somit auch die Arbeit sind direkt proportional zur Masse des Objekts. Die erforderliche Arbeit ist daher nur ein Zehntel des Vergleichswertes.

Lösungsschlüssel

a) Ein Punkt für die richtige Berechnung der beiden Beschleunigungswerte.
Toleranzintervall für $a(0)$: [2,2 m/s^2; 2,3 m/s^2]
Toleranzintervall für $a(160)$: [40 m/s^2; 42 m/s^2]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

b) Ein Punkt für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges.
Toleranzintervall: [93 000 m; 94 000 m]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

c) Ein Punkt für die richtige Berechnung des Zeitpunkts t_1.
Toleranzintervall: [124 s; 126 s]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Deutung der beiden Werte laut Lösungserwartung.

d) Ein Punkt für die Angabe einer richtigen Funktionsgleichung.
Äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.
Ein Punkt für die Angabe des richtigen Prozentsatzes.
Toleranzintervall: [77 %; 78 %]

e) Ein Punkt für die richtige Deutung des bestimmten Integrals und die richtige Beschreibung der Werte der beiden Grenzen.
Ein Punkt für eine richtige Begründung, um welchen Faktor sich das Ergebnis ändert.
Die direkte Proportionalität zwischen Masse und Gravitationskraft muss dabei sinngemäß erwähnt werden.

Abkühlungsprozesse

Aufgabennummer: 2_032	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 2.1, AN 4.3, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.7	

Wird eine Tasse mit heißem Kaffee am Frühstückstisch abgestellt, kühlt der Kaffee anfangs rasch ab, bleibt aber relativ lange warm.

Die Temperatur einer Flüssigkeit während des Abkühlens kann nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz durch eine Funktion der Form $t \mapsto T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ beschrieben werden. Dabei gibt T_0 die Anfangstemperatur der Flüssigkeit (in °C) zum Zeitpunkt $t = 0$ an, T_U ist die konstante Umgebungstemperatur (in °C) und $k \in \mathbb{R}^+$ (in s^{-1}) ist eine von den Eigenschaften der Flüssigkeit und des Gefäßes abhängige Konstante.

Ein zu untersuchender Abkühlungsprozess wird durch eine Funktion T der obigen Form beschrieben. Dabei beträgt die Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C und die Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C. Die Abkühlungskonstante hat den Wert $k = 0{,}002$. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen, die Temperatur $T(t)$ in °C.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten der Funktion T im Intervall [0 s; 300 s] und interpretieren Sie den berechneten Wert im Hinblick auf den beschriebenen Abkühlungsprozess!

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von T für große Werte von t und interpretieren Sie den Verlauf im gegebenen Kontext!

b) Der Wert $T'(t)$ kann als „Abkühlungsgeschwindigkeit" der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t gedeutet werden.

Geben Sie für den zu untersuchenden Abkühlungsprozess eine Funktionsgleichung für T' an!
Geben Sie weiters denjenigen Zeitpunkt an, zu dem der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit am größten ist!

Der Graph von T' und die t-Achse schließen im Intervall [0 s; 600 s] eine Fläche von ca. 49 Flächeneinheiten ein.
Interpretieren Sie diesen Wert unter Verwendung der entsprechenden Einheit im gegebenen Kontext!

c) Eine zweite Flüssigkeit in einem anderen Gefäß hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von 95 °C. Nach einer Minute ist die Temperatur auf 83,4 °C gesunken, die Umgebungstemperatur beträgt $T_U = 20$ °C. Die Funktion T_2 beschreibt den Abkühlungsprozess dieser Flüssigkeit.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Abkühlungskonstante k_2 für diesen Abkühlungsprozess berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

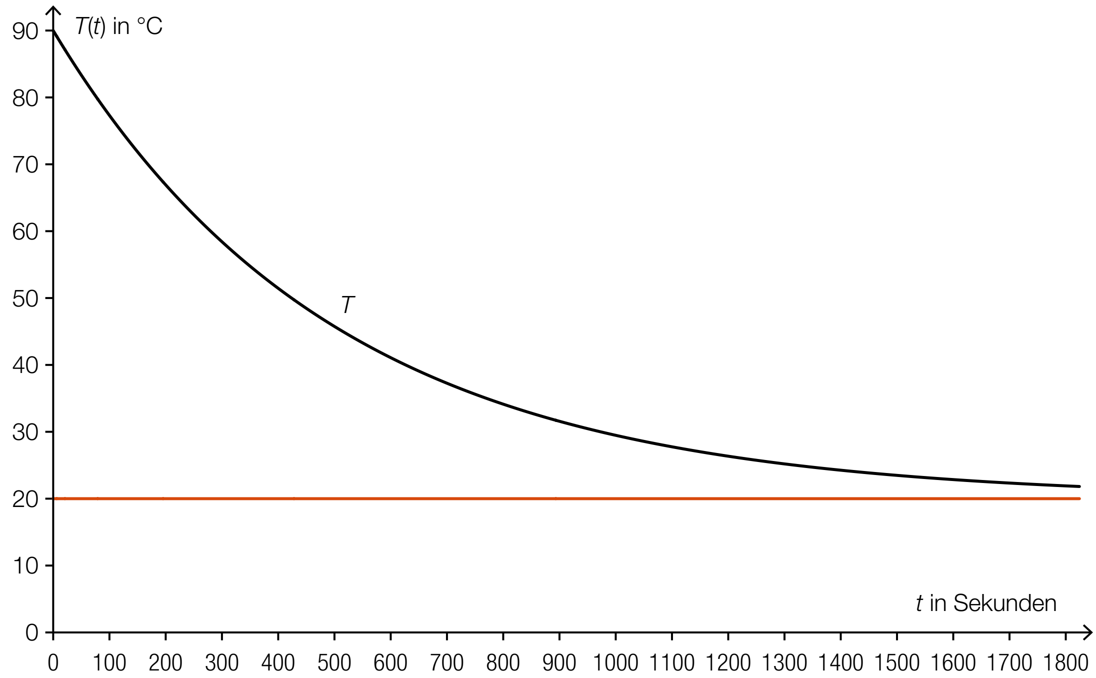
Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen T und T_2 und interpretieren Sie die Koordinaten des Schnittpunkts im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{T(300) - T(0)}{300} \approx -0{,}1053$

In den ersten fünf Minuten kühlt die Flüssigkeit durchschnittlich um ca. 0,1 °C pro Sekunde ab.

Der Graph von T nähert sich im Laufe der Zeit der Umgebungstemperatur (20 °C) an.



b) $T'(t) = -0{,}14 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t}$

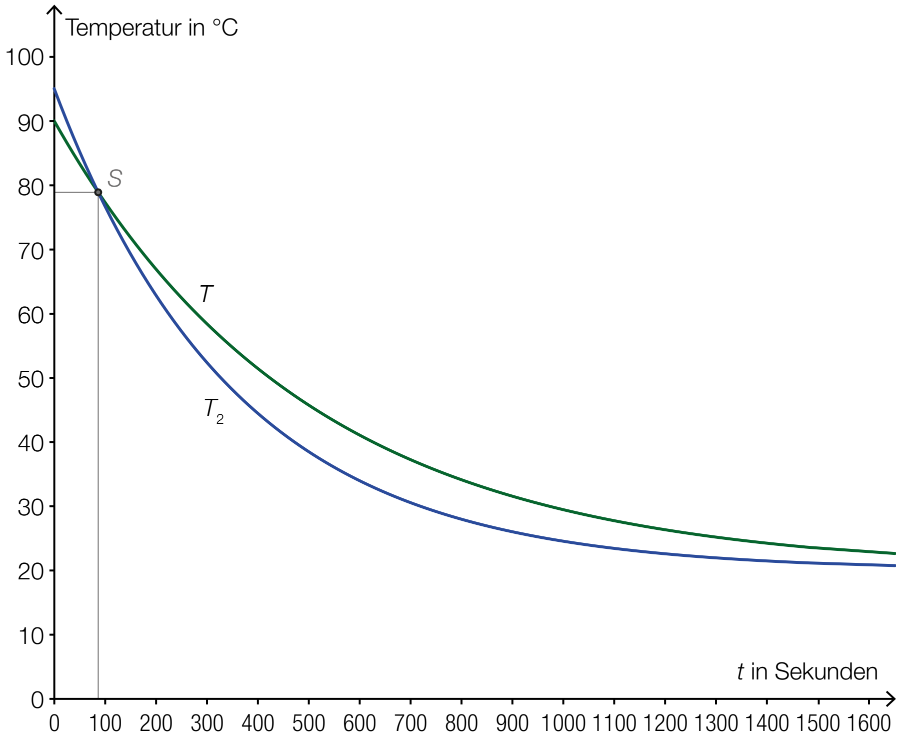
Der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 0$ am größten.

Die Flüssigkeit kühlt in den ersten zehn Minuten insgesamt um ca. 49 °C ab.

c) $T_2(t) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot t} \Rightarrow$

$T_2(60) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot 60} = 83{,}4$

$k_2 \approx 0{,}0028\ \text{s}^{-1}$



Schnittpunkt: $S \approx (86{,}2\,|\,78{,}9)$
Nach ca. 86,2 Sekunden haben beide Flüssigkeiten eine Temperatur von ca. 78,9 °C.

Aufnahme einer Substanz ins Blut

Aufgabennummer: 2_026	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 2.1, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5, FA 1.7	

Wenn bei einer medizinischen Behandlung eine Substanz verabreicht wird, kann die Konzentration der Substanz im Blut (kurz: Blutkonzentration) in Abhängigkeit von der Zeit t in manchen Fällen durch eine sogenannte Bateman-Funktion $c(t) = d \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$ mit den personenbezogenen Parametern $a, b, d > 0$, $a < b$ modelliert werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen, $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Verabreichung der Substanz.

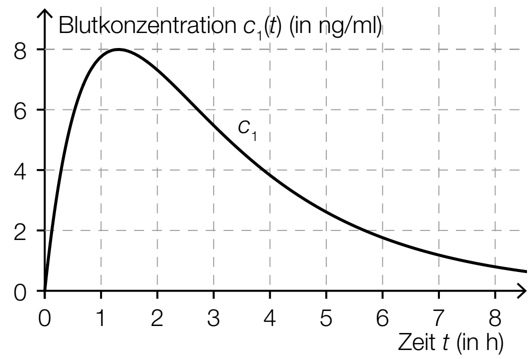
Die Bioverfügbarkeit f gibt den Anteil der verabreichten Substanz an, der unverändert in den Blutkreislauf gelangt. Bei einer intravenösen Verabreichung (d. h. einer direkten Verabreichung in eine Vene) beträgt der Wert der Bioverfügbarkeit 1.

Das Verteilungsvolumen V beschreibt, in welchem Ausmaß sich die Substanz aus dem Blut in das Gewebe verteilt.

Der Parameter d ist direkt proportional zur verabreichten Dosis D und zur Bioverfügbarkeit f, außerdem ist d indirekt proportional zum Verteilungsvolumen V.

Die nachstehende Abbildung zeigt exemplarisch den zeitlichen Verlauf der Blutkonzentration in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) für den Fall der Einnahme einer bestimmten Dosis der Substanz Lysergsäurediethylamid und kann mit der Bateman-Funktion c_1 mit den Parametern $d = 19{,}5$, $a = 0{,}4$ und $b = 1{,}3$ beschrieben werden.

Der Graph der Bateman-Funktion weist für große Zeiten t einen asymptotischen Verlauf gegen die Zeitachse auf.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration für die in der Einleitung beschriebene Bateman-Funktion c_1 berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Begründen Sie allgemein, warum der Wert des Parameters d in der Bateman-Funktion c nur die Größe der maximalen Blutkonzentration beeinflusst, aber nicht den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird!

b) Die Werte der Parameter a, b und d der Bateman-Funktion variieren von Patient zu Patient. Es wird im Folgenden angenommen, dass der Wert des Parameters d für drei untersuchte Patienten P_1, P_2, P_3 identisch ist.

Für den Patienten P_1 gelten die Parameter aus der Einleitung. Bei Patient P_2 ist der Wert des Parameters a etwas größer als bei Patient P_1.
Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Bateman-Funktion verändert, wenn der Wert des Parameters a erhöht wird, der Parameter b unverändert bleibt und $a < b$ gilt! Interpretieren Sie diese Veränderung im gegebenen Kontext!

Patient P_3 erreicht (bei gleicher verabreichter Dosis) die maximale Blutkonzentration zeitgleich mit Patient P_1, die maximale Blutkonzentration von Patient P_3 ist aber größer. Ermitteln Sie, wie sich die Werte von a und b bei der Bateman-Funktion für Patient P_3 von jenen von Patient P_1 unterscheiden!

c) Kreuzen Sie diejenige Formel an, die den Zusammenhang zwischen dem Parameter d der Bateman-Funktion und den in der Einleitung beschriebenen Größen V, D und f korrekt beschreibt! Der Parameter λ ist dabei ein allgemeiner Proportionalitätsfaktor.

$d = \lambda \cdot \frac{D}{V \cdot f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot V}{f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{V \cdot f}{D}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{V}{D \cdot f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{f}{V \cdot D}$	☐

Bei einem konstanten Wert des Parameters d und der Bioverfügbarkeit f kann man die verabreichte Dosis $D(V)$ als Funktion D in Abhängigkeit vom Verteilungsvolumen V auffassen. Beziehen Sie sich auf die von Ihnen angekreuzte Formel und geben Sie für die Parameterwerte der in der Einleitung dargestellten Bateman-Funktion und für den Fall einer intravenösen Verabreichung die Funktionsgleichung $D(V)$ an! Geben Sie weiters an, um welchen Funktionstyp es sich bei D handelt!

Möglicher Lösungsweg

a) $c_1(t) = 19{,}5 \cdot (e^{-0{,}4 \cdot t} - e^{-1{,}3 \cdot t})$
$c_1'(t) = 19{,}5 \cdot (-0{,}4 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}) = 0$

$t \approx 1{,}31$ Stunden

$c_1''(1{,}31) \approx -4{,}15 < 0$

Mögliche Begründungen:

Für die Berechnung des Zeitpunkts der (lokalen) maximalen Blutkonzentration muss die Gleichung $c'(t) = 0$ nach t gelöst werden. Der Parameter d fällt bei dieser Berechnung weg und beeinflusst somit nur die Höhe der maximalen Blutkonzentration zum ermittelten Zeitpunkt.

oder:

$c'(t) = d \cdot (-a \cdot e^{-a \cdot t} + b \cdot e^{-b \cdot t}) = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{a - b} \;\Rightarrow$ Der Parameter d tritt in dieser Formel nicht auf. Der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration t ist somit von d unabhängig.

b) Bei einer Erhöhung des Wertes von a verschiebt sich das lokale Maximum der Funktion bei einem niedrigeren Funktionswert „nach links“. Das bedeutet, dass die maximale Blutkonzentration früher erreicht wird und geringer ist.

Bei Patient P_3 ist (bei der Bateman-Funktion) der Wert von a kleiner und der Wert von b größer als bei (der Bateman-Funktion von) Patient P_1.

c)

$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☒

Die Funktionsgleichung lautet $D(V) = \frac{19{,}5}{\lambda} \cdot V$.
Es handelt sich um eine lineare Funktion.

Hopfen*

Aufgabennummer: 2_034	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.2, AN 3.2, AN 3.3, FA 1.5, FA 1.7, FA 2.2

Hopfen ist eine schnell wachsende Kletterpflanze. Die Modellfunktion $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}^-$ gibt näherungsweise die Pflanzenhöhe einer bestimmten Hopfensorte zum Zeitpunkt t an, wobei $h(t)$ in Metern und t in Wochen angegeben wird.

In der nachstehenden Tabelle sind die gemessenen Höhen einer Hopfenpflanze ab Anfang April ($t = 0$) zusammengefasst.

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Anhand dieser Messwerte wurden für die Modellfunktion h die Parameterwerte $a = 8$, $b = 15$ und $k = -0{,}46$ ermittelt.

Aufgabenstellung:

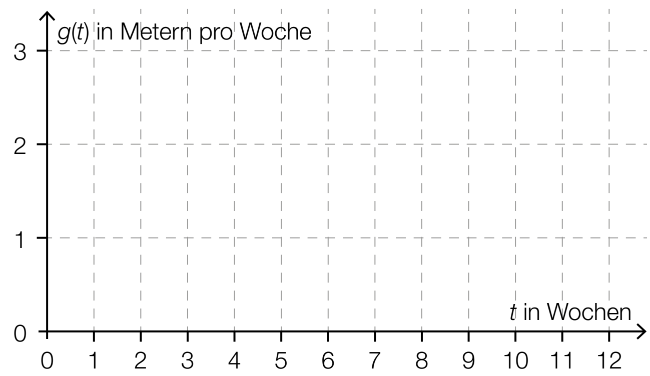
a) Geben Sie unter Verwendung der Modellfunktion h einen Ausdruck an, mit dem berechnet werden kann, um wie viele Meter die Hopfenpflanze im Zeitintervall $[0; t_1]$ gewachsen ist!

Berechnen Sie unter Verwendung der Modellfunktion h mithilfe Ihres Ausdrucks, wie viele Meter die Pflanze in den ersten 10 Wochen gewachsen ist, und geben Sie die prozentuelle Abweichung vom tatsächlich gemessenen Wert an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

b) Wird das Wachstum der Pflanze mithilfe der Funktion h modelliert, gibt es einen Zeitpunkt t_2, zu dem sie am schnellsten wächst. Geben Sie eine Gleichung an, mit der dieser Zeitpunkt berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Berechnen Sie die zugehörige maximale Wachstumsgeschwindigkeit und skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem unter Berücksichtigung des von Ihnen ermittelten Maximums den Verlauf des Graphen derjenigen Funktion g, die basierend auf der Modellfunktion h die Wachstumsgeschwindigkeit der Hopfenpflanze in Abhängigkeit von t beschreibt!



c) Ermitteln Sie eine lineare Funktion h_1, deren Werte bei $t = 0$ und $t = 12$ mit den gemessenen Höhen aus der angegebenen Tabelle übereinstimmen, und interpretieren Sie die Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Kontext!

$h_1(t) =$ ____

Begründen Sie anhand des Verlaufs der Graphen von h und h_1, warum es mindestens zwei Zeitpunkte gibt, in denen die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze denselben Wert hat wie die Steigung von h_1!

d) Für größer werdende t nähert sich $h(t)$ einem Wert an, der als h_{max} bezeichnet wird. Weisen Sie anhand der gegebenen Funktionsgleichung der Modellfunktion h rechnerisch nach, dass der Parameter k (mit $k < 0$) keinen Einfluss auf h_{max} hat, und geben Sie h_{max} an!

Günstige Witterungsverhältnisse können dazu führen, dass die Hopfenpflanze schneller und höher wächst, d. h., dass sie sich früher einem größeren Wert von h_{max} annähert. Geben Sie für ein derartiges Pflanzenwachstum an, wie a und k verändert werden müssen!

Lösungserwartung

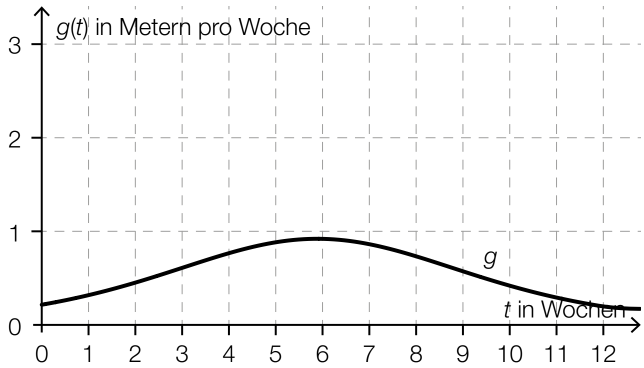
a) möglicher Ausdruck: $h(t_1) - h(0)$

$h(10) - h(0) \approx 6{,}45$
Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.
Die mit der Modellfunktion h berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall [0; 10] ist um ca. 0,8 % größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m).

b) Mögliche Gleichung:
$h''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2$

$t_2 \approx 5{,}9$ Wochen

$h'(t_2) \approx 0{,}92$
Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche.



c) Mögliche Funktionsgleichung von h_1:
$h_1(t) = 0{,}58\dot{3} \cdot t + 0{,}6$

Mögliche Interpretation:
Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche.

Mögliche Begründung:
Die Steigung von h ist anfangs kleiner als jene von h_1, dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

d) Möglicher Nachweis:

Für alle $k < 0$ gilt: $\lim\limits_{t \to \infty} e^{k \cdot t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t \to \infty} h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot 0} = a$, also ist h_{max} unabhängig von k.

$h_{\text{max}} = a$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss a vergrößert und k verkleinert werden.

Lösungsschlüssel

a)
- Ein Punkt für einen korrekten Ausdruck. Andere korrekte Ausdrücke sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe des richtigen Wertes und der richtigen prozentuellen Abweichung.
  Toleranzintervall für den Wert: [6,4 m; 6,5 m]

b)
- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die Angabe des richtigen Zeitpunkts, wobei die Einheit „Wochen" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [5,4 Wochen; 6,3 Wochen]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Meter pro Woche" nicht angeführt sein muss, und eine korrekte Skizze des Graphen von g.
  Toleranzintervall: [0,90 Meter pro Woche; 1 Meter pro Woche]

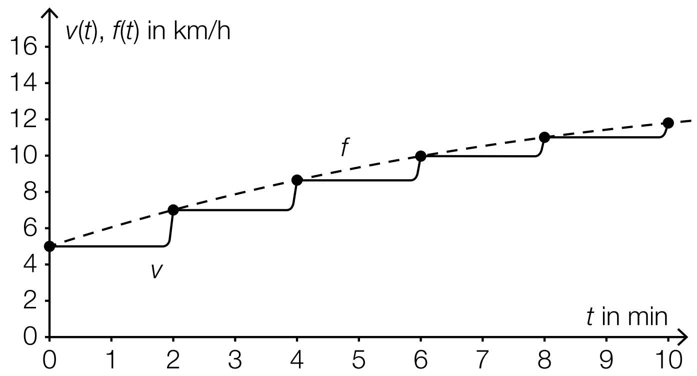
c)
- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung und eine korrekte Interpretation unter Verwendung korrekter Einheiten. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für die Steigung: [0,58; 0,59]
- Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

d)
- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis und die richtige Lösung. Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung der Veränderung der beiden Werte von a und k.

Laufband

Aufgabennummer: 2_029	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3	

Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können.
Bei einem individuell erstellten, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbandgeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbandgeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit
$f(t) = 0{,}0008 \cdot t^3 - 0{,}05 \cdot t^2 + 1{,}1 \cdot t + 5$.
Die Laufbandgeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnungen wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.
Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbandgeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

Begründen Sie, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht! Berechnen Sie unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

b) Geben Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

v_{min} = ______________________________ km/h

v_{max} = ______________________________ km/h

Begründen Sie, warum zu den Zeitpunkten t_{min} und t_{max}, zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minütigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{min}) \neq 0$ und $f'(t_{max}) \neq 0$ gilt!

c) Geben Sie den Wert von $v'(1)$ an und interpretieren Sie diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$v'(1)$ = ______________________________

Beschreiben Sie anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall [0; 30] verlaufen müsste!

d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.
Berechnen Sie diesen Näherungswert und erläutern Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Geben Sie die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).
Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h .

	t = 15 min	t = 30 min	t = 45 min	t = 60 min
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeigen Sie anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k!

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo" in min/km umschrieben. Berechnen Sie für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + ... + f(28)) \approx 11{,}57$

Das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h.

Das arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), \dots, v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: 0,5 h · 11,57 km/h = 5,785 km

b) $v_{min} = 5$ km/h
$v_{max} = 14{,}16$ km/h

t_{min} und t_{max} sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f, weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

c) $v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt 0 m/s^2.

oder:

Das Laufband (die Läuferin / der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt $t = 1$ min gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen ($t = 2$, $t = 4$, $t = 6$, ...) sehr hohe Werte annehmen.

d) $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 1{,}506$

zurückgelegte Weglänge: ca. 1,51 km

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind (1 h = 60 min).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:
$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1{,}388$ km

⇒ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. 118 m vom exakten Wert ab.

e) $194 = k \cdot 80 \cdot 2{,}5$
$k = 0{,}97$

Bei der doppelten/dreifachen/vierfachen Laufzeit wird die doppelte/dreifache/vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt/dreimal/viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8

Bungee-Jumping

Bungee-Jumping ist eine Extremsportart, bei der man von einer Absprungplattform in großer Höhe an einem elastischen Seil befestigt in die Tiefe springt.

Aufgabenstellung:

a) Sabine unternimmt einen Bungeesprung. Dabei schwingt sie am Seil mehrmals auf und ab.

Ihre Höhe über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t wird modellhaft durch die Funktion $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ beschrieben.

$$h(t) = a \cdot \left(e^{-0{,}03 \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + 1\right)$$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$h(t)$ ... Höhe über dem Boden zum Zeitpunkt t in m
a ... positiver Parameter

Zum Zeitpunkt $t = 0$ springt Sabine von der Absprungplattform in 90 m Höhe über dem Boden in die Tiefe.

1) Berechnen Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

Die gesamte Zeitdauer, in der sich Sabine während des Bungeesprungs in einer Höhe von mehr als 70 m über dem Boden befindet, wird mit d bezeichnet.

2) Ermitteln Sie d in Sekunden. *[0/1 P.]*

Nach Erreichen des tiefsten Punktes wird Sabine vom Seil wieder nach oben gezogen, bevor sie erneut fällt.

3) Berechnen Sie, wie viele Meter Sabine dabei nach oben gezogen wird. *[0/1 P.]*

Zum Zeitpunkt t_1 ist Sabines (vertikale) Fallgeschwindigkeit maximal.

4) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Für den Zeitpunkt t_1 gilt ___①___;
die Fallgeschwindigkeit kann mit ___②___ berechnet werden.

①	
$h''(t_1) > 0$	☐
$h''(t_1) < 0$	☐
$h''(t_1) = 0$	☐

②	
$h(t_1)$	☐
$\lvert h'(t_1) \rvert$	☐
$\int_0^{t_1} h(t)\,\mathrm{d}t$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $h(0) = a \cdot \left(e^{-0{,}03 \cdot 0} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 0}{6}\right) + 1\right) = 90$

$2 \cdot a = 90$
$a = 45$

a2) $h(t) = 70$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 1{,}803...$ $\quad t_2 = 10{,}663...$ $\quad t_3 = 13{,}149...$
$d = t_1 + (t_3 - t_2) = 4{,}289...$

a3) $h'(t) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

lokales Minimum: $T_1 = (5{,}890...|7{,}351...)$
lokales Maximum: $H_1 = (11{,}890...|76{,}446...)$
$76{,}446... - 7{,}351... = 69{,}095...$

Sabine wird rund 69,1 m nach oben gezogen, bevor sie erneut fällt.

a4)

①	
$h''(t_1) = 0$	☒

②	
$\lvert h'(t_1)\rvert$	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von d.
a3) Ein Punkt für das richtige Berechnen.
a4) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

Wachstum von Tierpopulationen

Aufgabenstellung:

a) Die Populationsgröße (Anzahl der Individuen) einer bestimmten Tierart kann modellhaft durch die Funktion $N\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

Dabei gilt:

$$N(t) = \frac{500}{1 + 4 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen
$N(t)$ ... Populationsgröße zum Zeitpunkt t

Zum Zeitpunkt t_v ist die Population auf das Doppelte ihrer Größe zum Zeitpunkt $t = 0$ angewachsen.

1) Berechnen Sie t_v. *[0/1 P.]*

b) Die Wachstumsgeschwindigkeit einer anderen Tierpopulation lässt sich durch die Polynomfunktion f mit $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ modellieren. Dabei gibt $f(t)$ die momentane Änderungsrate der Anzahl der Individuen in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Wochen, $f(t)$ in Individuen pro Woche).

Die Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt 15 Individuen pro Woche und erreicht nach 7 Wochen ihr Maximum. Nach 35 Wochen beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit 0 Individuen pro Woche.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf.

$f(t) =$ ____ *[0/1 P.]*

Es wird angenommen, dass die Tierpopulation zu Beginn der Beobachtungen aus 50 Individuen besteht.

2) Interpretieren Sie $50 + \int_0^7 f(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Einer der nachstehenden Ausdrücke beschreibt die mittlere Änderungsrate der Größe der Tierpopulation im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ mit $t_1 < t_2$.

3) Kreuzen Sie den jedenfalls zutreffenden Ausdruck an. *[1 aus 6]* *[0/1 P.]*

$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$	☐
$\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$	☐
$\int_0^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$	☐
$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2}$	☐
$f(t_2) - f(t_1)$	☐
$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{f(t_1)}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $N(0) = 100$
$N(t_v) = 2 \cdot N(0)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_v = 4{,}9...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von t_v.

b1) $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$
$f(0) = 15,\ f(35) = 0,\ f'(7) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = -\frac{1}{49} \cdot t^2 + \frac{2}{7} \cdot t + 15$

b2) Der Ausdruck gibt die Größe der Tierpopulation (Anzahl der Individuen) nach 7 Wochen an.

b3)

$\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von f.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Spezielle Polynomfunktionen vierten Grades

Gegeben ist eine Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Aufgabenstellung:

a) 1) Stellen Sie unter Verwendung von a und b eine Gleichung zur Berechnung der Wendestellen von f auf. *[0/1 P.]*

b) 1) Weisen Sie rechnerisch mithilfe der 1. und 2. Ableitung von f nach, dass auf der senkrechten Achse ein Extrempunkt P des Graphen von f liegt. *[0/1 P.]*

Genau einer der Koeffizienten a, b und c ist ausschlaggebend dafür, ob es sich beim ermittelten Extrempunkt P um einen Hochpunkt handelt.

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/1 P.]*

Damit dieser Extrempunkt P ein Hochpunkt ist, muss für den Koeffizienten ______①______ gelten, dass dieser ______②______ ist.

①	
a	☐
b	☐
c	☐

②	
kleiner als 0	☐
gleich 1	☐
größer als 0	☐

c) Gegeben ist eine Polynomfunktion g mit $g(x) = d \cdot (x + e)^2 \cdot (x - e)^2$ mit $d \neq 0$ und $e \in \mathbb{R}$. Der Graph von g verläuft durch den Punkt $N = (2 \mid 0)$.

1) Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle möglichen Werte von e. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$
$12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b = 0$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

b1) $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$
$f'(0) = 0$
$f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$
$f''(0) = 2 \cdot b \neq 0$
$P = (0|y_P)$ ist ein Extrempunkt von f.

b2)

①	
b	☒

②	
kleiner als 0	☒

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.
b2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

c1) $e = -2$ bzw. $e = 2$

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln aller möglichen Werte von e.

Weltbevölkerung

In der nachstehenden Tabelle ist für bestimmte Kalenderjahre die Schätzung der Weltbevölkerung (jeweils zur Jahresmitte) angegeben.

Kalenderjahr	Weltbevölkerung in Milliarden
1850	1,260
1900	1,650
1950	2,536
1960	3,030
1970	3,700
1990	5,327
2000	6,140
2010	6,957
2020	7,790

Datenquellen: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1694/umfrage/entwicklung-der-weltbevoelkerungszahl/, https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bevoelkerung/internationale_uebersich/036446.html [17.05.2020].

Aufgabenstellung:

a) Im Zeitraum von 1850 bis 1950 hat sich die Weltbevölkerung annähernd verdoppelt.
Nehmen Sie für diesen Zeitraum an, dass die Weltbevölkerung jährlich um den gleichen Prozentsatz gewachsen ist.

1) Berechnen Sie diesen Prozentsatz. *[0/1 P.]*

b) Ab 1970 kann die Entwicklung der Weltbevölkerung näherungsweise durch eine lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Werte für die Weltbevölkerung der Kalenderjahre 1970 und 2000 eine Funktionsgleichung von f in Abhängigkeit von der Zeit t auf (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1970, $f(t)$ in Milliarden). *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der mithilfe von f ermittelte Wert für das Kalenderjahr 2020 vom in der obigen Tabelle angegebenen Wert abweicht. *[0/1 P.]*

c) In einem anderen Modell wird die Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1970 durch die Funktion g modelliert.

$g(t) = 3{,}7 \cdot e^{-0{,}0001 \cdot t^2 + 0{,}02 \cdot t}$

t ... Zeit ab 1970 in Jahren
$g(t)$ ... Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden

Gemäß diesem Modell wird die Weltbevölkerung zunächst zunehmen und in weiterer Folge abnehmen.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion g das Maximum der Weltbevölkerung und das Kalenderjahr, in dem dies gemäß dem Modell eintreten soll.

Maximum der Weltbevölkerung: rund ____________________ Milliarden

Kalenderjahr: ____________________ *[0/½/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\sqrt[100]{\frac{2{,}536}{1{,}260}} = 1{,}00701...$

oder:

$\sqrt[100]{2} = 1{,}00695...$

Prozentsatz: rund 0,70 %

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

b1) $f(t) = k \cdot t + d$

$k = \frac{6{,}140 - 3{,}700}{30} = 0{,}081\dot{3}$

$d = f(0) = 3{,}700$

$f(t) = 0{,}081\dot{3} \cdot t + 3{,}700$

b2) $f(50) = 7{,}7\dot{6}$

$\frac{7{,}7\dot{6} - 7{,}790}{7{,}790} = -0{,}0029...$

Abweichung: rund –0,3 %

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *f*.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Abweichung in %. Auch die Angabe von 0,3 % ist richtig.

c1) Maximum der Weltbevölkerung: rund 10,1 Milliarden

Kalenderjahr: 2070

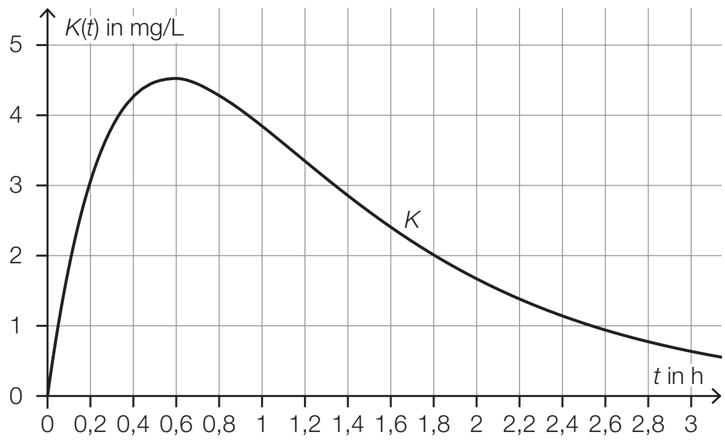
c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Koffein*

Aufgabennummer: 2_101	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Aufgabenstellung:

a) Lea trinkt eine Tasse Kaffee. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K dargestellt, die modellhaft die Konzentration $K(t)$ von Koffein in Leas Blut in Abhängigkeit von der Zeit t nach dem Trinken des Kaffees beschreibt (t in h, $K(t)$ in mg/L).



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung, wie viele Minuten nach dem Trinken des Kaffees die maximale Konzentration von Koffein im Blut auftritt.

______________________________ min

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Funktion K hat im Intervall (0; 0,8) _____①_____ und in diesem Intervall ändert sich das Vorzeichen der _____②_____.

①	
eine Wendestelle	☐
eine Extremstelle	☐
eine Nullstelle	☐

②	
Krümmung	☐
Steigung	☐
Funktionswerte	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

b) Die Löslichkeit von Koffein in Wasser gibt an, wie viel Gramm Koffein pro Liter (g/L) maximal gelöst werden können. Die Löslichkeit ist temperaturabhängig. Sie lässt sich näherungsweise durch die Funktion f beschreiben.

$f(T) = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T}$ mit $0 \leq T \leq 90$

T … Temperatur in °C
$f(T)$ … Löslichkeit von Koffein in Wasser bei der Temperatur T in g/L

Jemand behauptet:
„Bei einem Anstieg der Temperatur um 10 °C nimmt die Löslichkeit von Koffein in Wasser etwa auf das 1,65-Fache zu.“

1) Überprüfen Sie rechnerisch, ob diese Behauptung richtig ist.

Folgende Gleichung wird aufgestellt:
$2 \cdot 6{,}42 = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T}$

2) Interpretieren Sie die Lösung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) 36 min

a2)

①	
eine Extremstelle	☒

②	
Steigung	☒

b) **Lösungserwartung:**

b1) $f(T + 10) = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot (T+10)} = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T} \cdot e^{0{,}05 \cdot 10} = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T} \cdot 1{,}648... = f(T) \cdot 1{,}648...$

$\Rightarrow$ Die Behauptung ist richtig.

b2) Die Lösung der Gleichung ist die Temperaturerhöhung, bei der sich die Löslichkeit von Koffein in Wasser jeweils verdoppelt („Verdoppelungstemperatur").

oder:

Die Lösung der Gleichung ist diejenige Temperatur, bei der die Löslichkeit von Koffein in Wasser doppelt so hoch ist wie bei einer Temperatur von 0 °C.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Wertes.
Toleranzintervall: [33 min; 39 min]

a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Überprüfen. Auch ein Nachweis mit konkreten Zahlen ist als richtig zu werten.

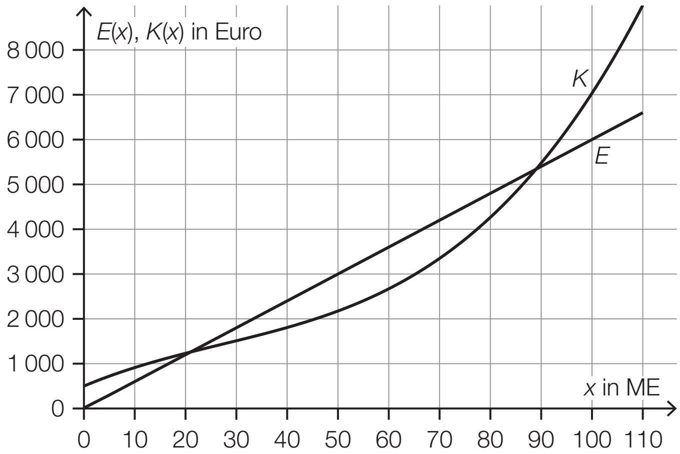
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Produktionskosten

Aufgabennummer: 2_016	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E eines bestimmten Betriebes. Mit x wird die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag eines bestimmten Produkts bezeichnet. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.



Aufgabenstellung:

a) 1) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich.

2) Erklären Sie anhand der Funktionsgraphen, warum sich durch eine Senkung des Verkaufspreises der Gewinnbereich verkleinert.

b) 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME ab.

Fixkosten: __________ Euro

Verkaufspreis pro ME: __________ Euro

Der Verkaufspreis wird um 25 % verringert.

2) Berechnen Sie den Erlös für 110 ME.

c) Zwei der nachstehenden Aussagen treffen auf die in der obigen Abbildung dargestellten Produktionskosten zu.

1) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

$K''(10) > K''(70)$	☐
$K''(60) > 0$	☐
Der Kostenzuwachs ist bei $x = 80$ maximal.	☐
Für alle $x \in [0; 110]$ gilt: $K'(x) > 0$.	☐
Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.	☐

d) 1) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung diejenige Produktionsmenge x_1, für die $K'(x_1) = E'(x_1)$ gilt.

x_1 = ____ ME

2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am höchsten ist.

Lösungserwartung

a1) Gewinnbereich: [21; 89]

a2) Eine Senkung des Verkaufspreises bewirkt eine geringere Steigung des Graphen der Erlösfunktion. Dadurch schieben sich die Grenzen des Gewinnbereichs näher zusammen.

b1) Fixkosten: 500 Euro
Verkaufspreis pro ME: 60 Euro

b2) $110 \cdot 60 \cdot \frac{3}{4} = 4\,950$
Der Erlös für 110 ME beträgt 4.950 Euro.

c1)

$K''(60) > 0$	☒
Für alle $x \in [0; 110]$ gilt: $K'(x) > 0$.	☒

d1) $x_1 = 63$ ME

d2) An der gesuchten Stelle muss gelten: $G'(x_1) = 0$.
Aus $G(x) = E(x) - K(x)$ folgt $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.
Da $E'(x_1) = K'(x_1)$, folgt $G'(x_1) = 0$.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Gewinnbereichs, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.
Toleranzintervall untere Grenze: [20; 22]
Toleranzintervall obere Grenze: [88; 90]

a2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

b1) Ein Punkt für das Ablesen der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.
Toleranzintervall Fixkosten: [400; 600]
Toleranzintervall Verkaufspreis pro ME: [55; 65]

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erlöses.

c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

d1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Produktionsmenge.
Toleranzintervall: [60; 66]

d2) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.

Kostenfunktion

Aufgabennummer: 2_012	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Bei einem bestimmten Unternehmen werden die Produktionskosten untersucht. Im ersten Jahr gilt modellhaft für dieses Unternehmen:

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 350 \cdot x + 20\,000$

x … Produktionsmenge in ME ($x \in \mathbb{R}_0^+$)
$K(x)$ … Produktionskosten in GE

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie, um wie viel sich die Grenzkosten bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten (das heißt bei Erhöhung des Produktionsumfangs von 50 ME auf 51 ME) bei diesem Unternehmen unterscheidet.

Für $K(x)$ gilt die Aussage: „Die Grenzkosten sind stets positiv."

2) Begründen Sie, warum diese Aussage richtig ist.

b) Für die Festlegung des Produktionsplans ist es erforderlich, die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME in Abhängigkeit von der Produktionsmenge zu kennen. Die Stückkostenfunktion gibt die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME an.

1) Stellen Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$ dieses Unternehmens auf.

2) Berechnen Sie, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Stückkosten für dieses Unternehmen am geringsten sind.

c) Im zweiten Jahr können die Produktionskosten dieses Unternehmens durch eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + 100 \cdot x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, x \in \mathbb{R}_0^+$ modellhaft beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie alle Werte für a so, dass ein progressiver Verlauf der Produktionskosten vorliegt.

Für diese Produktionskosten gilt:

- Die Fixkosten der Produktion betragen 15000 GE.
- Die Produktionskosten für 100 ME betragen 30000 GE.

2) Bestimmen Sie die Werte von a und c.

a = ______________________________

c = ______________________________

Lösungserwartung

a1) $K'(50) = 125$
$K(51) - K(50) = 123{,}51$
Unterschied: 1,49 GE

a2) $K(x)$ ist im angegebenen Bereich monoton steigend, deshalb ist $K'(x)$ stets positiv.

b1) $\overline{K}(x) = 0{,}01 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 350 + \frac{20\,000}{x}$

b2) $\overline{K}'(x) = 0$
$\Rightarrow \quad x = 180{,}64\ldots$

Bei einer Produktion von rund 181 ME sind die durchschnittlichen Stückkosten am geringsten.

c1) $a > 0$

c2) $a = 0{,}5$
$c = 15\,000$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Unterschieds.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Stückkostenfunktion.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Produktionsmenge.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Werte.
c2) Ein Punkt für das Bestimmen der beiden richtigen Werte.

Erderwärmung*

Aufgabennummer: 2_098	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.5, FA 2.2, FA 5.2, AN 1.3, AN 3.3

Unter *globaler Mitteltemperatur* versteht man die über die gesamte Erdoberfläche gemittelte Temperatur in einem bestimmten Zeitraum unter bestimmten Bedingungen.

Die Entwicklung der globalen Mitteltemperatur kann mithilfe von Klimamodellen prognostiziert werden.

Nachstehend sind für einzelne Jahre die globalen Mitteltemperaturen angeführt.

Jahr	1900	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980
globale Mitteltemperatur (in °C)	13,80	13,87	13,89	14,01	13,90	14,02	13,94	14,16

Jahr	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
globale Mitteltemperatur (in °C)	14,03	14,37	14,37	14,31	14,51	14,55	14,72

Die Funktion T beschreibt modellhaft die globale Mitteltemperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Jahren ab dem Jahr 1900, $T(t)$ in °C). Es gilt:

$T(t) = a \cdot e^{0{,}008 \cdot t} - 0{,}03 \cdot t + 11{,}1 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^+$

Aufgabenstellung:

a) Bei einem bestimmten Klimamodell wird $a = 2{,}7$ angenommen.
Die Funktion T hat an der Stelle $t = t_0$ eine lokale Extremstelle.

1) Ermitteln Sie t_0.

2) Begründen Sie mathematisch, warum gemäß diesem Modell die globale Mitteltemperatur ab der Stelle t_0 immer schneller ansteigt.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert), Maturatermin: 12. Jänner 2021

b) Verschiedene Studien nehmen an, dass die globale Mitteltemperatur im Jahr 2100 im Vergleich zur globalen Mitteltemperatur im Jahr 2000 (also 14,31 °C) um mindestens 1,5 °C, aber um höchstens 4,5 °C höher sein wird.

1) Weisen Sie nach, dass die Funktion T mit $a = 2{,}7$ diese Studien mit der Annahme für das Jahr 2100 bestätigt.

2) Geben Sie den kleinstmöglichen Wert a_{min} und den größtmöglichen Wert a_{max} so an, dass die Funktion T diese Studien bestätigt.

a_{min} = ____________________

a_{max} = ____________________

c) Bei der UN-Klimakonferenz in Paris im Jahr 2015 wurde eine neue internationale Klimaschutz-Vereinbarung getroffen, die die Begrenzung der Zunahme der globalen Mitteltemperatur vorsieht. Demnach dürfte die globale Mitteltemperatur im Jahr 2100 höchstens 15,3 °C betragen.

Um diese Klimaschutz-Vereinbarung zu erfüllen, darf ab dem Jahr 2015 die mittlere Änderungsrate der globalen Mitteltemperatur höchstens einen bestimmten Wert k betragen (k in °C pro Jahr).

1) Ermitteln Sie k.

Es wird angenommen, dass die globale Mitteltemperatur ab dem Jahr 2015 linear zunimmt und die mittlere Änderungsrate der globalen Mitteltemperatur tatsächlich k entspricht.

2) Geben Sie unter dieser Annahme eine Gleichung derjenigen linearen Funktion M an, die die jährliche globale Mitteltemperatur (in °C) t Jahre nach 2015 modellhaft beschreibt.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $T'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 41{,}06...$
$(T''(t_0) > 0)$

a2) mögliche Begründung:
Die globale Mitteltemperatur steigt ab t_0 immer schneller an, weil für alle $t > t_0$ der Graph von T linksgekrümmt ist.

b) **Lösungserwartung:**

b1) mögliche Vorgehensweise:
$T(200) = 18{,}473... \approx 18{,}47$
$14{,}31 + 1{,}5 \leq 18{,}47 \leq 14{,}31 + 4{,}5$
Die Funktion T mit $a = 2{,}7$ bestätigt diese Studien.

b2) Zunahme um 1,5 °C: $T(200) = 15{,}81$
Zunahme um 4,5 °C: $T(200) = 18{,}81$
$a_{min} = 2{,}162...$
$a_{max} = 2{,}768...$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $k = \frac{15{,}3 - 14{,}72}{2100 - 2015} = 0{,}00682...$
$k \approx 0{,}0068$ °C/Jahr

c2) $M(t) = 0{,}0068 \cdot t + 14{,}72$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei ein Nachweis, dass t_0 eine lokale Minimumstelle ist, nicht erbracht werden muss.
a2) Ein Punkt für eine richtige Begründung.

b1) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis.
b2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „°C/Jahr" nicht angegeben sein muss.
c2) Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Fußballspielen im Park

Aufgabennummer: 2_081	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, FA 4.3, AN 3.3	

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balles kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x … horizontale Entfernung des Balles von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balles über dem Boden an der Stelle x in m

a) 1) Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h.

2) Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

b) Julia fängt den Ball aus einer Höhe von 1,80 m.

1) Ermitteln Sie die beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle, an denen Julia sich dabei befinden kann.

c) Roland überlegt, ob er bei diesem Schuss den Ball über ein 2,8 m hohes Klettergerüst, das in direkter Schussrichtung 10 m von der Abschussstelle entfernt steht, schießen könnte.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Schuss tatsächlich über das Klettergerüst fliegen kann.

Lösungserwartung

a1) $0 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$
$0 = x^2 \cdot (-0{,}003 \cdot x + 0{,}057) \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
$-0{,}003 \cdot x + 0{,}057 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 19$

$D = [0; 19]$

a2) $h'(x) = 0$
$x \cdot (-0{,}009 \cdot x + 0{,}114) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
$-0{,}009 \cdot x + 0{,}114 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 12{,}66... \approx 12{,}7$
$h(x_2) = 3{,}04... \approx 3{,}0$

In einer horizontalen Entfernung von rund 12,7 m zur Abschussstelle erreicht der Ball seine größte Höhe von rund 3,0 m.
Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.

b1) $1{,}80 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$

$(x_1 = -5)$
$x_2 = 7{,}10... \approx 7{,}1$
$x_3 = 16{,}89... \approx 16{,}9$

Julia kann sich in einer Entfernung von etwa 7,1 m oder von etwa 16,9 m von der Abschussstelle befinden.

c1) $h(10) = 2{,}7$

Da $h(10)$ kleiner als 2,8 m ist, kann der Ball nicht über das Klettergerüst fliegen.

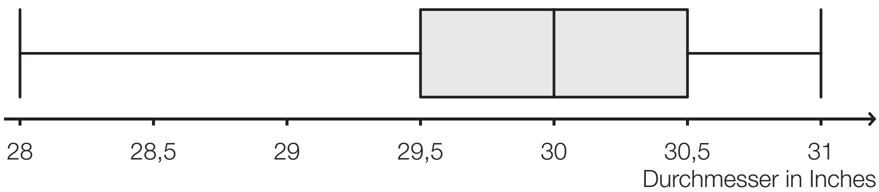
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Riesenpizza

Aufgabennummer: 2_085	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 3.3, WS 1.1, WS 1.2	

In den USA wird die Größe einer Pizza durch ihren Durchmesser (in Inches) angegeben. Im Folgenden werden Pizzen immer als kreisrund angenommen.

a) Bei 30-Inch-Pizzen verschiedener Lieferanten wurde der tatsächliche Durchmesser bestimmt. Die Messergebnisse sind im folgenden Boxplot zusammengefasst:



1) Lesen Sie die Spannweite ab.

Der Interquartilsabstand ist die Differenz von 3. und 1. Quartil.

In der Fachliteratur wird ein Wert oft als „Ausreißer nach oben" bezeichnet, wenn dieser Wert weiter als das 1,5-Fache des Interquartilsabstands rechts vom 3. Quartil liegt. Solche Ausreißer sind im obigen Boxplot nicht berücksichtigt.

2) Geben Sie an, ab welchem Durchmesser eine Pizza als „Ausreißer nach oben" bezeichnet wird.

b) 1) Zeigen Sie allgemein, dass der Flächeninhalt einer (kreisrunden) Pizza vervierfacht wird, wenn ihr Durchmesser verdoppelt wird.

c) Für eine bestimmte Pizzasorte wird der Preis pro Flächeneinheit in Abhängigkeit vom Durchmesser modellhaft durch folgende quadratische Funktion P beschrieben:

$P(d) = 0{,}0003 \cdot d^2 - 0{,}015 \cdot d + 0{,}2619$ mit $8 \leq d \leq 30$

d ... Durchmesser der Pizza in Inches
$P(d)$ ... Preis pro Flächeneinheit einer Pizza mit Durchmesser d in US-Dollar

1) Ermitteln Sie, für welchen Durchmesser der Preis pro Flächeneinheit am niedrigsten ist.

Lösungserwartung

a1) Spannweite: 3 Inch

a2) Interquartilsabstand: 30,5 – 29,5 = 1
3. Quartil: 30,5
$30{,}5 + 1{,}5 \cdot 1 = 32$
Eine Pizza wird ab einem Durchmesser von mehr als 32 Inch als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet.

b1) Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser d: $A_d = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$
Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser $2d$: $A_{2d} = \frac{4d^2}{4} \cdot \pi = d^2 \cdot \pi = 4 \cdot A_d$

Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.

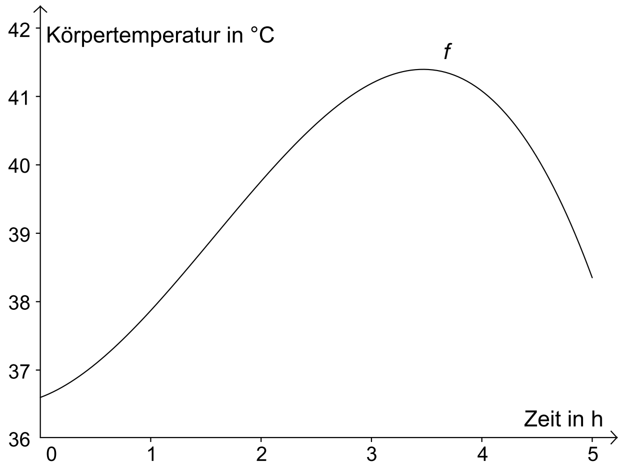
c1) $P'(d) = 0{,}0006 \cdot d - 0{,}015$
$P'(d) = 0 \Rightarrow d = 25$

Die Pizza mit dem niedrigsten Preis pro Flächeneinheit hat einen Durchmesser von 25 Inch.

Ganzkörperhyperthermie

Aufgabennummer: 2_092	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, FA 4.4, AN 3.3, AN 4.2	

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.



Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C

a) 1) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur 37 °C beträgt.

b) 1) Dokumentieren Sie, wie die maximale Körpertemperatur im angegebenen Zeitintervall mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann.

2) Begründen Sie, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

c) Die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ während der 5 Stunden andauernden Behandlung soll ermittelt werden.

Die mittlere Körpertemperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist:

$$\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ im Zeitintervall [0; 5].

Lösungserwartung

a1) $-0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6 = 37$

$t = 0{,}429... \Rightarrow t \approx 0{,}43$ h

b1) Dazu muss das Maximum der Funktion f ermittelt werden: Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung f'. Dann berechnet man die Funktionswerte an diesen Stellen und den Randstellen. Die größte dieser Zahlen ist der maximale Funktionswert.

b2) Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann der Graph der Polynomfunktion 3. Grades nur höchstens 2 Extrempunkte haben.

c1) $\overline{f} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 39{,}55... \approx 39{,}6$

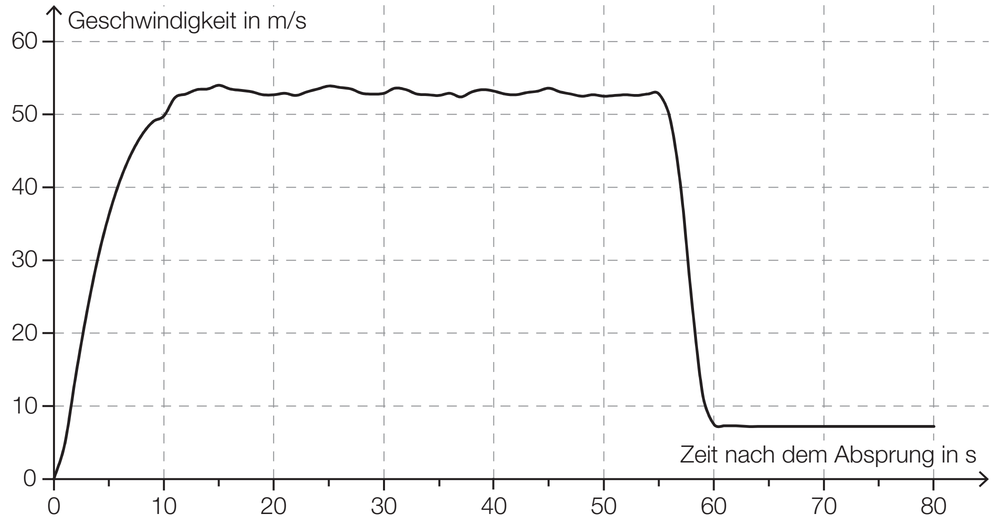
Die mittlere Körpertemperatur beträgt rund 39,6 °C.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fallschirmsprung

Aufgabennummer: 2_072	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.1, AN 3.3, AN 4.2, AN 4.3	

Bei einem Fallschirmsprung wurde der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers aufgezeichnet. Im nachstehenden Diagramm wird diese Geschwindigkeit für die ersten 80 Sekunden nach dem Absprung veranschaulicht.



a) In den ersten Sekunden nach dem Absprung gilt für den Fallschirmspringer annähernd das Fallgesetz:

$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$s(t)$ ... Fallstrecke zur Zeit t in m
g ... Erdbeschleunigung, $g = 9{,}81$ m/s²

1) Berechnen Sie mithilfe des Fallgesetzes die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers 1,5 Sekunden nach dem Absprung.

b) 55 Sekunden nach dem Absprung zieht der Fallschirmspringer die Reißleine, der Fallschirm öffnet sich.

1) Schätzen Sie den Flächeninhalt zwischen der Geschwindigkeitskurve und der Zeitachse im Intervall [0 s; 55 s] ab.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

c) Der Höhenmesser des Fallschirmspringers zeigt 60 Sekunden nach dem Absprung eine Meereshöhe von 1 300 Metern an. Ab dieser Meereshöhe sinkt der Fallschirmspringer jeweils 100 Meter in 14 Sekunden.
Dabei soll die Meereshöhe des Fallschirmspringers (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) durch eine Funktion h beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt 60 Sekunden nach dem Absprung.

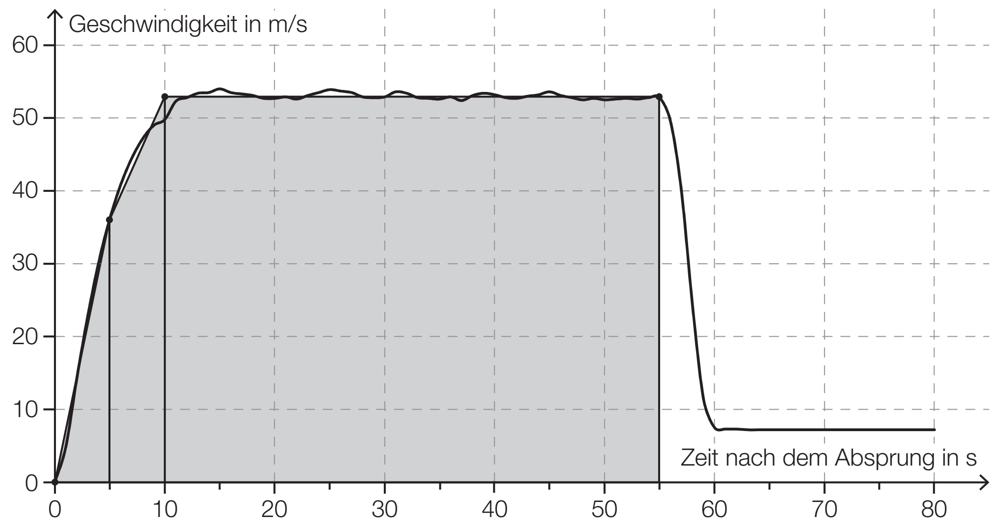
Lösungserwartung

a1) $s'(t) = v(t) = g \cdot t$

$v(1{,}5) = 9{,}81 \cdot 1{,}5 = 14{,}715$

Gemäß dem Fallgesetz beträgt die Geschwindigkeit 1,5 Sekunden nach dem Absprung rund 14,72 m/s.

b1) Näherungsweises Ermitteln des Flächeninhalts durch Dreiecke und Vierecke:



$$A \approx \frac{36 \cdot 5}{2} + \frac{(53 + 36) \cdot 5}{2} + 53 \cdot 45 = 2\,697{,}5$$

Toleranzintervall: [2 400; 2 900]

b2) Der Flächeninhalt entspricht der Fallstrecke in den ersten 55 Sekunden in Metern.

c1) $h(t) = 1\,300 - \frac{100}{14} \cdot t$

t ... Zeit in s

$h(t)$ ... Meereshöhe des Fallschirmspringers zur Zeit t in m

Erfassen der Geschwindigkeit

Aufgabennummer: 2_077	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, AN 3.2, AN 3.3	

Auf einer Teststrecke werden Messungen durchgeführt.

a) Die Teststrecke beginnt bei einem Stoppschild. Die Messergebnisse für ein Auto auf dieser Strecke sind in folgender Tabelle angegeben:

	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2
Zeit t in min	0	1	2,5
zurückgelegter Weg $s_1(t)$ in km	0	1	3

Der zurückgelegte Weg soll in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall [0; 2,5] durch eine Polynomfunktion s_1 mit $s_1(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

1) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion s_1.

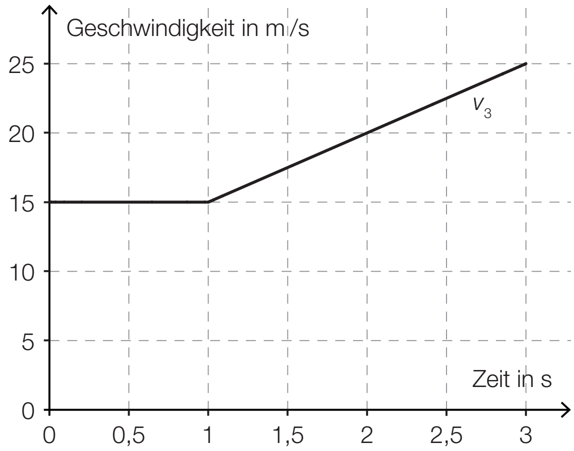
b) Der zurückgelegte Weg eines anderen Autos kann näherungsweise durch die Funktion s_2 beschrieben werden:

$s_2(t) = -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t$ mit $0 \leq t \leq 3$

t ... Zeit in min
$s_2(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in km

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob die Geschwindigkeit dieses Autos zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls null ist.
2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung des Autos im angegebenen Zeitintervall null ist.

c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos kann im Zeitintervall [0; 3] näherungsweise durch die Funktion v_3 beschrieben werden. Der Graph dieser Funktion v_3 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s_3 im Zeitintervall [1; 3] mit $s_3(1) = 15$.

Lösungserwartung

a1) $s_1(0) = 0$
$s_1(1) = 1$
$s_1(2,5) = 3$

oder:

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$3 = a \cdot 2{,}5^2 + b \cdot 2{,}5 + c$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{15}$
$b = \frac{13}{15}$
$c = 0$

b1) $v_2(t) = s_2'(t) = -t^2 + 4 \cdot t + \frac{1}{3}$
$v_2(0) = \frac{1}{3} \neq 0$
Das Auto hatte zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls eine Geschwindigkeit ungleich 0.

b2) $a_2(t) = s_2''(t) = -2 \cdot t + 4$

$a_2(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2$

c1) $v_3(t) = 5 \cdot t + 10 \;$ mit $\; 1 \leq t \leq 3$
Integrieren ergibt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + C$
Wegen $s_3(1) = 15$ gilt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + \frac{5}{2} \;$ mit $\; 1 \leq t \leq 3$
t ... Zeit in s
$s_3(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

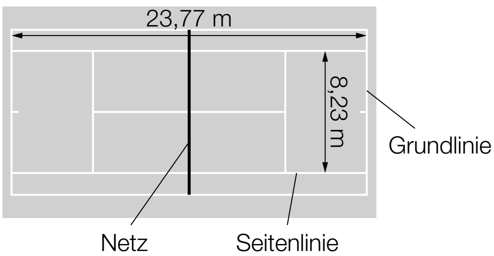
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Tennis*

Aufgabennummer: 2_058	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 4.3, WS 1.1	

Tennis ist ein Rückschlagspiel zwischen zwei oder vier Personen, bei dem ein Tennisball über ein Netz geschlagen werden muss. Das Spielfeld ist rechteckig und wird durch ein Netz in zwei Hälften geteilt (siehe Abbildung 1). Für ein Spiel zwischen zwei Personen ist der Platz 23,77 m lang und 8,23 m breit. Das Spielfeld wird durch die Grundlinien und die Seitenlinien begrenzt. Das Netz weist eine maximale Höhe von 1,07 m auf.

Abbildung 1:



Aufgabenstellung:

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -0{,}0007 \cdot x^3 + 0{,}005 \cdot x^2 + 0{,}2 \cdot x + 0{,}4$ beschreibt eine Bahnkurve eines Tennisballs bis zu derjenigen Stelle, an der der Tennisball erstmals den Boden berührt. Dabei gibt x die waagrechte Entfernung des Tennisballs vom Abschlagpunkt und $f(x)$ die Flughöhe des Tennisballs über dem Boden an (x und $f(x)$ in m). Die Flugbahn des Tennisballs startet zwischen den Seitenlinien an der Grundlinie und die Ebene, in der die Flugbahn liegt, verläuft parallel zur Seitenlinie des Tennisfelds.

1) Geben Sie an, in welcher waagrechten Entfernung vom Abschlagpunkt der Tennisball seine maximale Höhe erreicht.

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ____________________ m

2) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Tennisball im gegnerischen Spielfeld oder hinter der Grundlinie landet.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

b) Fällt ein Tennisball lotrecht (ohne Drehung) auf den Boden, so springt er wieder lotrecht zurück. Der Restitutionskoeffizient r ist ein Maß für die Sprungfähigkeit des Tennisballs.

Es gilt: $r = \frac{v_2}{v_1}$, wobei v_1 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs vor und v_2 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs nach dem Aufprall ist.

Die Differenz der vertikalen Geschwindigkeiten unmittelbar vor und nach dem Aufprall ist aufgrund der unterschiedlichen Bewegungsrichtungen des Tennisballs definiert durch: $\Delta v = v_2 - (-v_1)$.

1) Geben Sie Δv in Abhängigkeit von v_1 und r an.

$\Delta v =$ ____

Ein Tennisball trifft mit $v_1 = 4{,}4$ m/s lotrecht auf dem Boden auf. Der Restitutionskoeffizient beträgt für diesen Tennisball $r = 0{,}6$. Die Kontaktzeit mit dem Boden beträgt 0,01 s.

2) Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung a (in m/s²) des Tennisballs in vertikaler Richtung beim Aufprall (während der Kontaktzeit).

$a =$ ____ m/s²

c) Bei einem Fünf-Satz-Tennismatch gewinnt ein Spieler, sobald er drei Sätze gewonnen hat. Für einen Satzgewinn müssen in der Regel sechs Games gewonnen werden, wobei es für jedes gewonnene Game einen Punkt gibt.

Für unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p für ein gewonnenes Game wurden die daraus resultierenden Wahrscheinlichkeiten m für einen Matchgewinn bei einem Fünf-Satz-Match ermittelt. In der nachstehenden Tabelle sind diese Wahrscheinlichkeiten angeführt.

p	m
0,5	0,5
0,51	0,6302
0,55	0,9512
0,6	0,9995
0,7	1,000

Für ein bestimmtes Fünf-Satz-Match gilt:
Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Game gewinnt, ist um 2 Prozentpunkte höher als die Wahrscheinlichkeit, dass sein Gegenspieler B ein Game gewinnt.

1) Geben Sie an, um wie viel Prozentpunkte die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A dieses Fünf-Satz-Match gewinnt, höher ist als jene für seinen Gegenspieler B.

Gegenüber einem anderen, schwächeren Gegenspieler C hat Spieler A einen Vorteil von 10 Prozentpunkten, ein Game zu gewinnen.

2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Fünf-Satz-Match gegen Gegenspieler C gewinnt, um 50,94 Prozent höher ist als beim Fünf-Satz-Match gegen B.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = 0$

$-0{,}0021 \cdot x^2 + 0{,}01 \cdot x + 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 12{,}42... \quad (x_2 = -7{,}66...)$

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ca. 12,4 m

a2) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 21{,}597... \quad (x_2 = -2{,}15...,\ x_3 = -12{,}30...)$

Die einzige positive Nullstelle von f ist $x_1 \approx 21{,}6$.

Da das Spielfeld 23,77 m lang ist, landet der Tennisball im gegnerischen Spielfeld.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $\Delta v = r \cdot v_1 + v_1$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$\Delta v = v_1 \cdot (1 + r) = 4{,}4 \cdot (1 + 0{,}6) = 7{,}04$

$a = 7{,}04 : 0{,}01 = 704$

$a = 704\ \text{m/s}^2$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $0{,}6302 - 0{,}3698 = 0{,}2604$

Diese Wahrscheinlichkeit ist um ca. 26 Prozentpunkte höher.

c2) Wahrscheinlichkeit, dass Spieler *A* das Fünf-Satz-Match gegen Spieler *C* gewinnt: 0,9512

Wahrscheinlichkeit, dass Spieler *A* das Fünf-Satz-Match gegen Spieler *B* gewinnt: 0,6302

$\frac{0{,}9512}{0{,}6302} = 1{,}50936... \approx 1{,}5094$

$\Rightarrow$ 0,9512 ist um ca. 50,94 Prozent höher als 0,6302.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [12,4 m; 12,5 m]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

a2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für *a*: [700 m/s^2; 710 m/s^2]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [26; 26,1]

c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Einsatz von Antibiotika*

Aufgabennummer: 2_057	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.4, FA 3.4, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3	

Die Entwicklung einer Bakterienpopulation kann durch die Zufuhr von Antibiotika beeinflusst werden, was letztlich durch die Giftwirkung von Antibiotika zum Aussterben der Bakterienpopulation führen soll.

In bestimmten Fällen kann diese Entwicklung näherungsweise durch eine Funktion $B\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ beschrieben werden:

$B(t) = b \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2}$ mit $b, c, k \in \mathbb{R}^+$

t ... Zeit in Stunden
$B(t)$ ... Anzahl der Bakterien in Millionen zum Zeitpunkt t
b ... Anzahl der Bakterien in Millionen zum Zeitpunkt $t = 0$
k ... Konstante
c ... Parameter für die Giftwirkung

Aufgabenstellung:

a) Die Funktion B hat genau eine positive Extremstelle t_1.

1) Bestimmen Sie t_1 in Abhängigkeit von k und c.

2) Geben Sie an, welche Auswirkungen eine Vergrößerung von c bei gegebenem k auf die Lage der Extremstelle t_1 der Funktion B hat.

b) Die Funktion $B_1\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $B_1(t) = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$ beschreibt die Anzahl der Bakterien einer bestimmten Bakterienpopulation in Millionen in Abhängigkeit von der Zeit t.

Zum Zeitpunkt $t_2 \neq 0$ erreicht die Bakterienpopulation ihre ursprüngliche Anzahl von 20 Millionen.

1) Geben Sie t_2 an.

2) Deuten Sie $B_1'(t_2)$ im vorliegenden Kontext unter Verwendung der entsprechenden Einheit.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

c) Die Funktion B_2: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $B_2(t) = 5 \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$ beschreibt die Anzahl der Bakterien einer anderen Bakterienpopulation in Millionen, die zum Zeitpunkt $t = 4$ ihr Maximum aufweist.

1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t_3, zu dem die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation stattfindet.

2) Geben Sie an, wie viel Prozent der maximalen Anzahl an Bakterien zum Zeitpunkt t_3 noch vorhanden sind.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$B'(t) = b \cdot (k - c \cdot t) \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2}$

$B'(t_1) = 0$

$k - c \cdot t_1 = 0$

$t_1 = \frac{k}{c}$

a2) mögliche Beschreibung:

Die Extremstelle t_1 wird zu einem früheren Zeitpunkt erreicht.

b) **Lösungserwartung:**

b1) mögliche Vorgehensweise:

$20 = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$

$1 = e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$

$0 = 2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 4{,}\dot{4}\text{ h}$

b2) mögliche Deutung:

$B_1'(t_2)$ gibt die (momentane) Abnahmegeschwindigkeit in Millionen Bakterien pro Stunde zum Zeitpunkt t_2 an.

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:

$B_2''(t) = 5 \cdot (t^2 - 8 \cdot t + 15) \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$

$t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3;\ t_2 = 5$

Es gilt:

$B_2'(3) > 0$

und

$B_2'(5) < 0$

(und $B_2'''(5) \neq 0$)

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ findet die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation statt.

c2) $\frac{B_2(5)}{B_2(4)} = 0{,}60653... \approx 0{,}6065$

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ sind noch ca. 60,65 % der maximalen Anzahl an Bakterien vorhanden.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [4,4 h; 4,5 h]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h“ nicht angeführt sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,60; 0,61]

Kostenfunktion*

Aufgabennummer: 2_052	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.6, FA 4.1, FA 4.3, AN 3.3	

Ein Hersteller interessiert sich für die monatlich anfallenden Kosten bei der Produktion eines bestimmten Produkts. Die Produktionskosten für dieses Produkt lassen sich in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten, ME) durch eine Polynomfunktion dritten Grades K mit $K(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 0{,}2405 \cdot x + 42$ modellieren ($K(x)$ in Geldeinheiten, GE).

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie für dieses Produkt den durchschnittlichen Kostenanstieg pro zusätzlich produzierter Mengeneinheit im Intervall [100 ME; 200 ME].

2) Ermitteln Sie, ab welcher Produktionsmenge die Grenzkosten steigen.

b) Die Produktionsmenge x_{opt}, für die die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ mit $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ minimal ist, heißt Betriebsoptimum zur Kostenfunktion K.

1) Ermitteln Sie das Betriebsoptimum x_{opt}.

Der Hersteller berechnet die Produktionskosten für die Produktionsmenge x_{opt}. Dabei stellt er fest, dass diese Kosten 65 % seines für die Produktion dieses Produkts verfügbaren Kapitals ausmachen.

2) Berechnen Sie das dem Hersteller für die Produktion dieses Produkts zur Verfügung stehende Kapital.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

c) Für den Verkaufspreis p kann der Erlös in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x durch eine lineare Funktion E mit $E(x) = p \cdot x$ beschrieben werden ($E(x)$ in GE, x in ME, p in GE/ME). Dabei wird vorausgesetzt, dass gleich viele Mengeneinheiten verkauft wie produziert werden.

1) Bestimmen Sie p so, dass der maximale Gewinn bei einem Verkauf von 600 ME erzielt wird.

Die maximal mögliche Produktionsmenge beträgt 650 ME.

2) Bestimmen Sie den Gewinnbereich (also denjenigen Produktionsbereich, in dem der Hersteller Gewinn erzielt).

d) Für ein weiteres Produkt dieses Herstellers sind in der nachstehenden Tabelle die Produktionskosten (in GE) für verschiedene Produktionsmengen (in ME) dargestellt.

Produktionsmenge (in ME)	50	100	250		500
Produktionskosten (in GE)	197	253	308	380	700

Diese Produktionskosten können durch eine Polynomfunktion dritten Grades K_1 mit $K_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ modelliert werden.

1) Bestimmen Sie die Werte von a, b, c und d.

2) Berechnen Sie die in der obigen Tabelle fehlende Produktionsmenge.

Lösungserwartung

a1) $\frac{K(200) - K(100)}{200 - 100} = \frac{66{,}5 - 59{,}35}{100} = 0{,}0715$ GE/ME

a2) mögliche Vorgehensweise:

$K''(x) = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot x - 1{,}5 \cdot 10^{-3}$

$K''(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 312{,}5$ ME

Ab der Produktionsmenge von 312,5 ME steigen die Grenzkosten.

b1) mögliche Vorgehensweise:

$\overline{K}(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0{,}2405 + \frac{42}{x}$

$\overline{K}'(x) = 16 \cdot 10^{-7} \cdot x - 7{,}5 \cdot 10^{-4} - \frac{42}{x^2}$

$\overline{K}'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{opt} \approx 554{,}2$ ME

($\overline{K}''(x) > 0 \quad \Rightarrow$ Es liegt ein Minimum vor.)

b2) mögliche Vorgehensweise:

$K(554{,}2) \approx 81{,}1$ GE $\quad \Rightarrow \quad 81{,}1 : 0{,}65 \approx 125$

Dem Hersteller stehen für die Produktion dieses Produkts ca. 125 GE zur Verfügung.

c1) mögliche Vorgehensweise:

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G'(x) = p - K'(x)$

$G'(600) = p - K'(600) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}2045$ GE/ME

c2) mögliche Vorgehensweise:

$G(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 335 \quad (x_2 \approx 799, \quad x_3 \approx -196)$

Gewinnbereich: [335 ME; 650 ME]

d1) $a \approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}$

$b \approx -9{,}8 \cdot 10^{-3}$

$c \approx 2{,}324$

$d \approx 103$

d2) $K_1(x) = 380 \quad \Rightarrow \quad x \approx 365$ ME

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,05 GE/ME; 0,10 GE/ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [312 ME; 313 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss und eine Überprüfung, dass es sich um ein Minimum handelt, nicht durchgeführt werden muss.
Toleranzintervall: [554 ME; 555 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [120 GE; 130 GE]

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,20; 0,21]

c2) Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Gewinnbereichs, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall für x_1: [325; 345]

d1) Ein Punkt für die richtigen Werte von a, b, c und d.
Toleranzintervall für a: $[1 \cdot 10^{-5}; 2 \cdot 10^{-5}]$
Toleranzintervall für b: $[-1 \cdot 10^{-2}; -9 \cdot 10^{-3}]$
Toleranzintervall für c: [2; 2,5]
Toleranzintervall für d: [100; 105]

d2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung je nach Rundung der Koeffizienten a, b, c und d variieren kann.

Exponentialfunktion und lineare Funktion*

Aufgabennummer: 2_049	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 2.3, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.2, AN 4.3	

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$.

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist eine lineare Funktion $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_1(x) = k \cdot x + 2$ und $k \in \mathbb{R}$.

Geben Sie alle $k \in \mathbb{R}$ an, für die die Graphen von f und g_1 einander in genau zwei Punkten schneiden!

Für ein solches k beschreibt die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = g_1(x) - f(x)$ die Differenz von g_1 und f. Für eine Stelle x_0 zwischen den beiden Schnittpunkten der Graphen gilt die Beziehung $h'(x_0) = 0$.

Bestimmen Sie x_0 in Abhängigkeit von k!

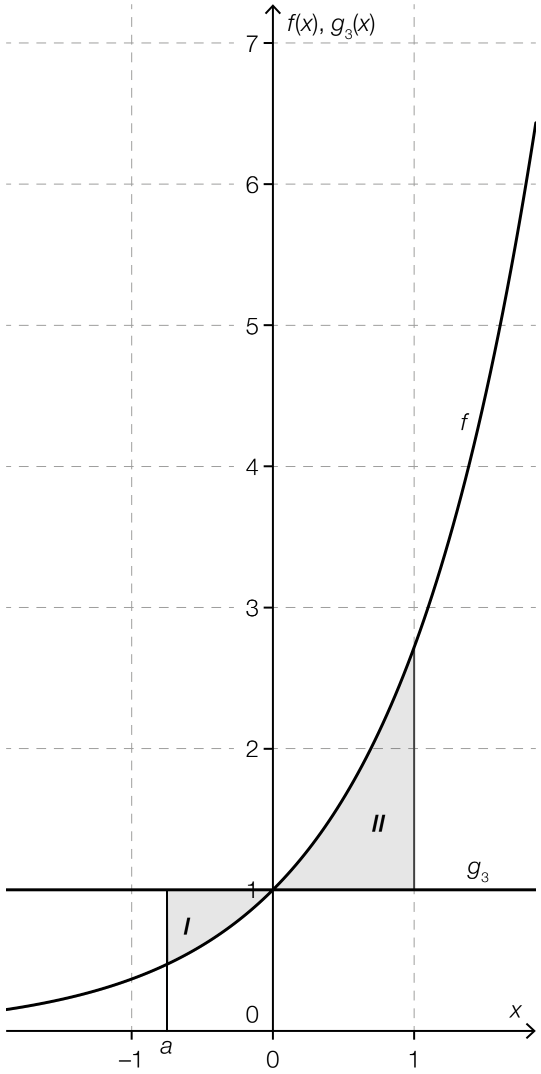
b) Der Graph einer linearen Funktion $g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_2(x) = 4 \cdot x + d$ und $d \in \mathbb{R}$ ist eine Tangente an den Graphen von f.

Geben Sie die Koordinaten des Berührpunkts B der beiden Graphen an!

Geben Sie den Wert von d an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

c) Gegeben ist die Funktion $g_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_3(x) = 1$.
Die von den beiden Graphen von g_3 und f im Intervall $[a; 0]$ (mit $a \in \mathbb{R}$ und $a < 0$) eingeschlossene Fläche ***I*** hat den Flächeninhalt A_1. Die von den beiden Graphen von f und g_3 im Intervall $[0; 1]$ eingeschlossene Fläche ***II*** hat den Flächeninhalt A_2.



Berechnen Sie den Flächeninhalt A_2!

Drücken Sie das bestimmte Integral $\int_a^1 (f(x) - g_3(x))\,dx$ durch die Flächeninhalte A_1 und A_2 aus!

Lösungserwartung

a) $k \in \mathbb{R}^+$

mögliche Vorgehensweise:

$h(x) = g_1(x) - f(x) = k \cdot x + 2 - e^x$
$h'(x) = k - e^x$
$h'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad k - e^{x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \ln(k)$

b) mögliche Vorgehensweise:

$B = (x_B \mid f(x_B))$
$f'(x_B) = 4$
$e^{x_B} = 4 \quad \Rightarrow \quad x_B = \ln(4)$
$f(x_B) = e^{\ln(4)} = 4$
$B = (\ln(4) \mid 4)$

$4 = 4 \cdot \ln(4) + d \quad \Rightarrow \quad d = 4 - 4 \cdot \ln(4) \approx -1{,}545$

c) $A_3 = \int_0^1 (e^x - 1)\,\mathrm{d}x = e - 2$

$\int_a^1 (f(x) - g_3(x))\,\mathrm{d}x = A_2 - A_1$

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Koordinaten.
Toleranzintervall für x_B: [1,3; 1,4]
Toleranzintervall für $f(x_B)$: [3,6; 4,1]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für d: [–2,0; –1,1]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei bereits die Angabe $\int_0^1 (e^x - 1)\,dx$ als richtig zu werten ist.
Toleranzintervall: [0,70; 0,72]
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Lachsbestand*

Aufgabennummer: 2_039	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.4, FA 1.6, AN 3.3, WS 1.1

Der kanadische Wissenschaftler W. E. Ricker untersuchte die Nachkommenanzahl von Fischen in Flüssen Nordamerikas in Abhängigkeit von der Anzahl der Fische der Elterngeneration. Er veröffentlichte 1954 das nach ihm benannte Ricker-Modell.
Der zu erwartende Bestand $R(n)$ einer Nachfolgegeneration kann näherungsweise anhand der sogenannten Reproduktionsfunktion R mit $R(n) = a \cdot n \cdot e^{-b \cdot n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ aus dem Bestand n der jeweiligen Elterngeneration ermittelt werden.
Lachse kehren spätestens vier Jahre nach dem Schlüpfen aus dem Meer an ihren „Geburtsort" zurück, um dort zu laichen, d.h., die Fischeier abzulegen. Nach dem Laichen stirbt der Großteil der Lachse.
Ricker untersuchte unter anderem die Rotlachspopulation im Skeena River in Kanada. Die nachstehende Tabelle gibt die dortigen Lachsbestände in den Jahren von 1908 bis 1923 an, wobei die angeführten Bestände Mittelwerte der beobachteten Bestände jeweils vier aufeinanderfolgender Jahre sind.

Zeitraum	beobachteter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1908–31.12.1911	1 098
01.01.1912–31.12.1915	740
01.01.1916–31.12.1919	714
01.01.1920–31.12.1923	615

Datenquelle: http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/s00/math121/lectures/product_rule/product.html [01.02.2018] (adaptiert).

Anhand dieser Daten für den Lachsbestand im Skeena River wurden für die Reproduktionsfunktion R die Parameterwerte $a = 1{,}535$ und $b = 0{,}000783$ ermittelt ($R(n)$ und n in tausend Lachsen).

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie für die Lachspopulation im Skeena River für $n > 0$ mithilfe der Reproduktionsfunktion die Lösung n_0 der Gleichung $R(n) = n$ in tausend Lachsen!

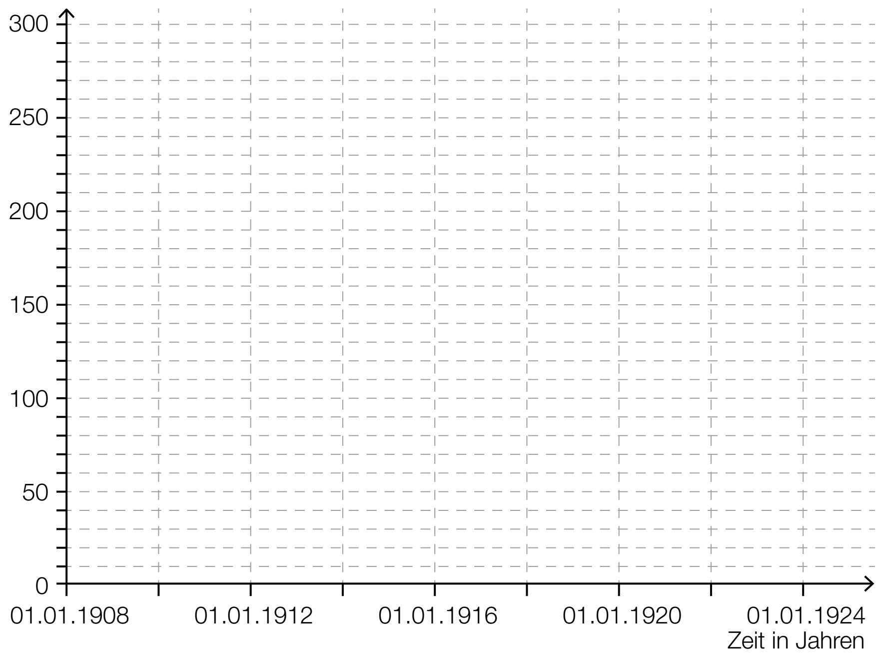
Interpretieren Sie n_0 im gegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extrempunkts $E = (n_E | R(n_E))$ der Reproduktionsfunktion R in Abhängigkeit von a und b und zeigen Sie, dass n_E für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ eine Stelle eines lokalen Maximums ist!

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a der Bestand $R(n_E)$ der Nachfolgegeneration stets größer als der vorherige Bestand n_E ist!

c) Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle der beobachteten Lachsbestände (in tausend Lachsen) durch ein Histogramm dar, wobei die absoluten Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken abgebildet werden sollen!



Das von Ricker entwickelte Modell zählt zu den Standardmodellen zur Beschreibung von Populationsentwicklungen. Dennoch können die mithilfe der Reproduktionsfunktion berechneten Werte mehr oder weniger stark von den beobachteten Werten abweichen.

Nehmen Sie den beobachteten durchschnittlichen Lachsbestand von 1 098 (im Zeitraum von 1908 bis 1911) als Ausgangswert, berechnen Sie damit für die jeweils vierjährigen Zeiträume von 1912 bis 1923 die laut Reproduktionsfunktion zu erwartenden durchschnittlichen Lachsbestände im Skeena River und tragen Sie die Werte in die nachstehende Tabelle ein!

Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	
01.01.1916–31.12.1919	
01.01.1920–31.12.1923	

Lösungserwartung

a) $n_0 \approx 547$

Mögliche Interpretation:

Im gegebenen Kontext gibt n_0 denjenigen Lachsbestand an, bei dem die Anzahl der Lachse der Nachfolgegeneration unverändert bleibt.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$R'(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad n_E = \frac{1}{b}$

$R\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b \cdot e}$

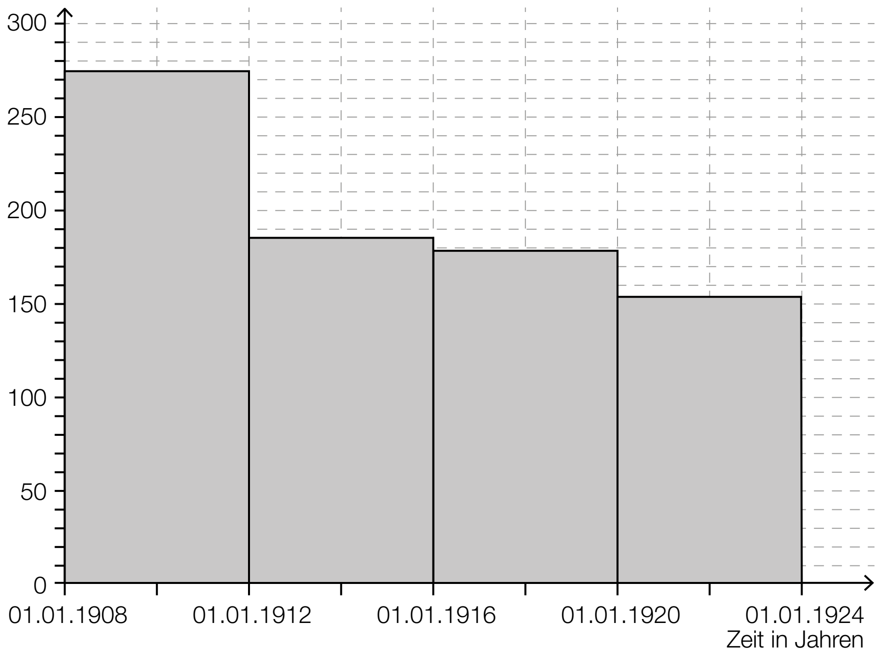
$\Rightarrow \quad E = \left(\frac{1}{b} \middle| \frac{a}{b \cdot e}\right)$

Möglicher Nachweis:

$R''\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{a \cdot b}{e} < 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad$ Maximumstelle

$\frac{a}{b \cdot e} > \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a > e$

c)



Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	713
01.01.1916–31.12.1919	626
01.01.1920–31.12.1923	589

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
   Toleranzintervall für den Lachsbestand: [547; 548]
   – Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von *E* und einen korrekten Nachweis.
   – Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) – Ein Punkt für ein korrektes Histogramm.
   – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte in der Tabelle.

Quadratische Funktion*

Aufgabennummer: 2_037	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.5, FA 1.5, AN 3.2, AN 3.3	

Der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades schneidet die positive senkrechte Achse im Punkt $A = (0|y_A)$ und hat mit der positiven x-Achse den Punkt $B = (x_B|0)$ gemeinsam, wobei B ein Extrempunkt von f ist.
Die Funktion f ist von der Form $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie an, ob c größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Geben Sie an, ob b größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

b) Gegeben ist folgende Aussage: „Der Punkt B ist ein Schnittpunkt der Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f'." Geben Sie an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Es gibt für alle Werte von b genau eine Stelle x_t mit folgender Eigenschaft: An der Stelle x_t haben f und f' die gleiche Steigung. Geben Sie diese Stelle x_t in Abhängigkeit von b an!

c) Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen b und c bestehen muss, damit die Extremstelle x_B von f auch Nullstelle von f ist!

Geben Sie die Koeffizienten b und c der Funktion f in Abhängigkeit von x_B an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

a) $c > 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt $A = (0|y_A)$ liegt auf der positiven senkrechten Achse, daher ist $y_A = f(0) > 0$.
Da $c = f(0)$ ist, muss $c > 0$ sein.

oder:

Der Parameter c legt fest, in welchem Punkt der Graph von f die senkrechte Achse schneidet. Da dieser Schnittpunkt auf der positiven senkrechten Achse liegt, muss $c > 0$ gelten.

$b < 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt B ist ein Extrempunkt von f. Da B auf der positiven x-Achse liegt, muss seine x-Koordinate x_B positiv sein. Die Extremstelle $x_E = x_B$ der Funktion f ergibt sich aus dem Ansatz: $f'(x_E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E = -2 \cdot b$.
Wegen $x_E = -2 \cdot b > 0$ muss $b < 0$ gelten.

oder:

Da aus $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b$ folgt, dass $f'(0) = b$ ist, und da f für $(-\infty; x_E)$ mit $x_E > 0$ streng monoton fallend ist, folgt $f'(0) < 0$ und somit gilt: $f'(0) = b < 0$.

oder:

Angenommen, es würde $b \geq 0$ gelten. Wegen $c > 0$ ergibt sich: $\frac{1}{4} \cdot x^2 + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit würde für alle $x > 0$ auch $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ gelten. Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass ein Berührpunkt mit der positiven x-Achse existiert. Folglich muss $b < 0$ gelten.

b) Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:
Da $B = (x_B|0)$ ein Extrempunkt von f ist, gilt $f'(x_B) = 0$. Weil auch $f(x_B) = 0$ ist, ist der Punkt B ein Schnittpunkt der Graphen von f und f'.

oder:

An einer Stelle, wo die Funktion f eine Extremstelle hat, weist f' eine Nullstelle auf. Da die Extremstelle von f im gegebenen Fall eine Nullstelle ist, haben f und f' die gleiche Nullstelle und somit im Punkt B einen Schnittpunkt.

Mögliche Vorgehensweise:
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b \quad \Rightarrow$ Die Steigung der Ableitungsfunktion f' ist $\frac{1}{2}$.

$f'(x_t) = \frac{1}{2} \cdot x_t + b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_t = 1 - 2 \cdot b$

c) Mögliche Vorgehensweise:
Wenn die Extremstelle von f auch Nullstelle von f ist, hat die Gleichung
$\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ genau eine Lösung.
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot c}}{0{,}5} \quad \Rightarrow \quad c = b^2$

Mögliche Vorgehensweise:
$f'(x_B) = \frac{1}{2} \cdot x_B + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-x_B}{2}$
Aus $c = b^2$ folgt: $c = \frac{x_B^2}{4}$.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe von $c > 0$ und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die Angabe von $b < 0$ und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage wahr ist, und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen b und c. Andere korrekte Zusammenhänge sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die korrekte Angabe der Koeffizienten b und c in Abhängigkeit von x_B.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Vergnügungspark

Aufgabennummer: 2_088	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.3, AG 4.1, FA 4.4, AN 4.2	

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region.

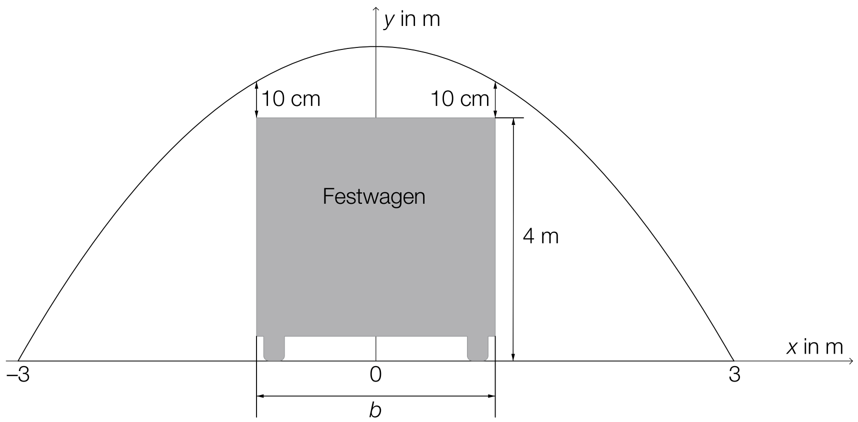
a) Beim Eingang zum Vergnügungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$

x, y ... Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.

Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden. Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).

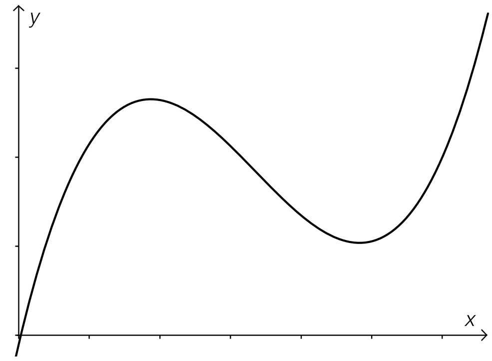


1) Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf.

Vor der Parade wird der Torbogen mit einer Folie verschlossen.

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt der dazu benötigten Folie.

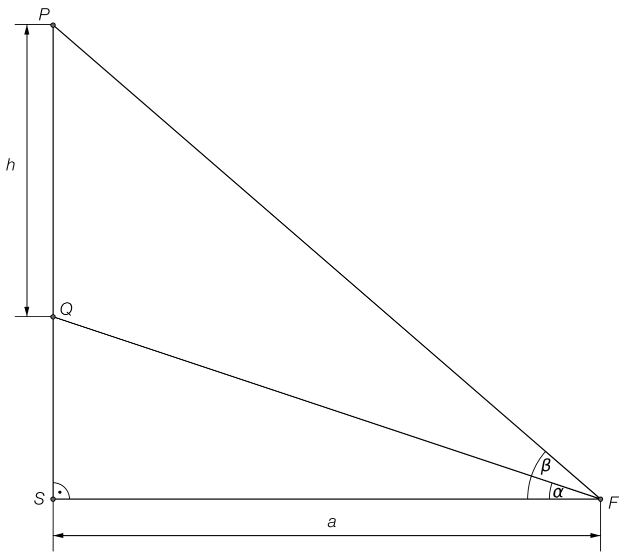
b) Eine der Hauptattraktionen ist die Hochschaubahn. Ein Teilstück kann durch die Polynomfunktion modelliert werden, deren Graph in der folgenden Abbildung zu sehen ist:



1) Erklären Sie, welchen Grad diese Polynomfunktion mindestens haben muss.

c) Im Vergnügungspark gibt es ein Kino.

Fiona sitzt *a* Meter von der Leinwand entfernt (Punkt *F*). Der Höhenwinkel zum unteren Ende der Leinwand (Punkt *Q*) wird mit α bezeichnet, der Höhenwinkel zum oberen Ende der Leinwand (Punkt *P*) wird mit β bezeichnet.



1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Höhe *h* der Leinwand aus *a*, α und β.

h = ____________________

Lösungserwartung

a1) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

a2) $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m^2.

b1) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c1) rechtwinkeliges Dreieck *FPS*: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck *FQS*: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Baumhaus

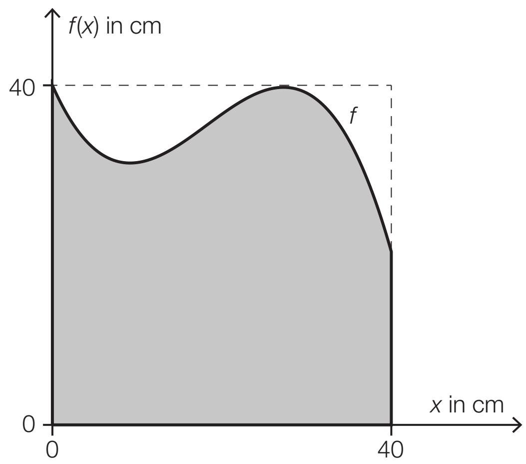
Aufgabennummer: 2_095	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.4, AN 4.2	

Eine Familie plant, ein Baumhaus aus Holz zu errichten. Der Baum dafür steht in einem horizontalen Teil des Gartens.

a) Eine 3,2 m lange Leiter wird angelehnt und reicht dann vom Boden genau bis zum Einstieg ins Baumhaus in einer Höhe von 2,8 m.

1) Berechnen Sie denjenigen Winkel, unter dem die Leiter gegenüber dem horizontalen Boden geneigt ist.

b) Die Fenster des Baumhauses sollen eine spezielle Form haben (siehe grau markierte Fläche in der nachstehenden Abbildung).



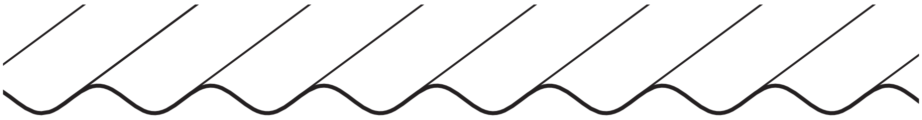
Die obere Begrenzungslinie des Fensters kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden.

$f(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}164 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 40$ mit $0 \leq x \leq 40$

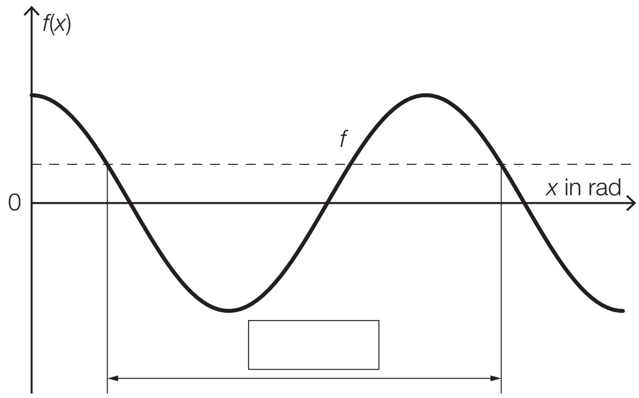
x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Fensterfläche in der dargestellten Form kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm ist.

c) Das Baumhaus wird mit gewellten Kunststoffplatten überdacht.

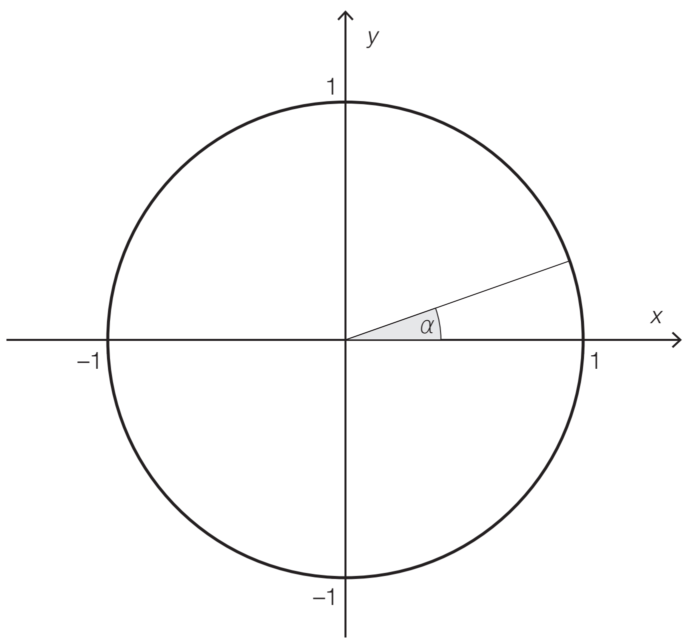


Dem Querschnitt liegt der Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ zugrunde. Dieser ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.



2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel β ein, für den gilt: $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$.

Lösungserwartung

a1) $\arcsin\left(\frac{2{,}8}{3{,}2}\right) = 61{,}0...°$

Der Winkel beträgt rund 61°.

b1) Flächeninhalt zwischen den Achsen und dem Graphen der Funktion in cm²:

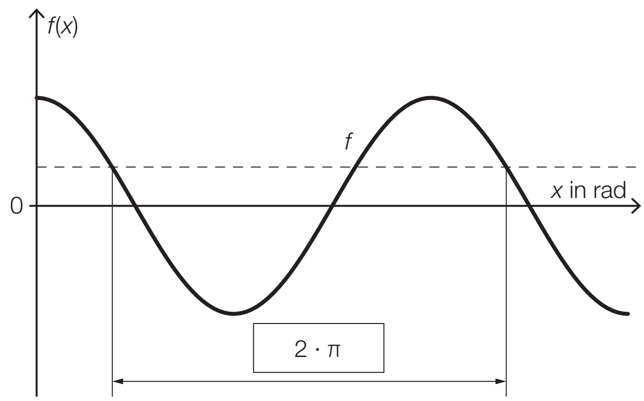
$\int_0^{40} f(x)\,dx = 1\,378{,}66...$

Flächeninhalt des Quadrats in cm²: $A = 1\,600$

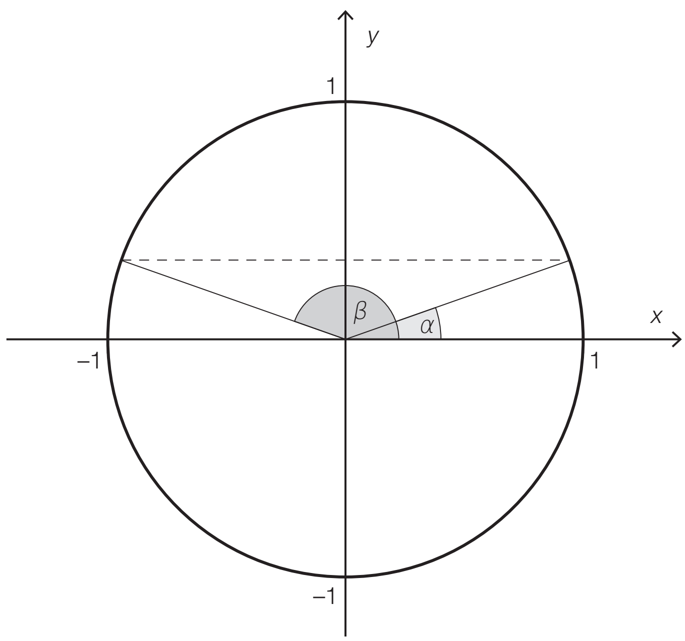
prozentueller Unterschied: $\frac{1\,378{,}66... - 1\,600}{1\,600} = -0{,}1383...$

Die Fensterfläche ist um rund 13,8 % kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm.

c1)



c2)



Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Überlagerung von Schwingungen*

Aufgabennummer: 2_038	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.1, FA 6.2, FA 6.3, FA 6.4, AN 4.2	

Ein Ton in der Musik kann im einfachsten Fall durch eine Sinusfunktion s mit $s(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Bei einer derartigen Sinusschwingung wird der maximale Funktionswert als Amplitude bezeichnet. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde wird als Frequenz f bezeichnet und in Hertz (Hz) angegeben.
Für die Frequenz f gilt: $f = \frac{1}{T}$ (mit T in Sekunden), wobei T die (kleinste) Periodenlänge der jeweiligen Sinusschwingung ist ($T \in \mathbb{R}^+$).

Drei bestimmte Töne werden mithilfe der nachstehenden Funktionen h_1, h_2 und h_3 beschrieben.
Die Zeit t ($t \geq 0$) wird dabei in Millisekunden (ms) gemessen.

$h_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$
$h_2(t) = \sin(2{,}5 \cdot \pi \cdot t)$
$h_3(t) = \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$

Die Überlagerung mehrerer Töne bezeichnet man als Klang.
Die Funktion h mit $h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$ beschreibt einen Klang.

Der Schalldruck eines Tons ist zeitabhängig und kann durch die Funktion p mit $p(t) = \overline{p} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschrieben werden. Dabei sind $\overline{p}$ und ω Konstanten.
Der Schalldruck wird in der Einheit Pascal (Pa) angegeben.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie für einen Ton, der mithilfe der Funktion g mit $g(t) = \sin(c \cdot \pi \cdot t)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und t in ms beschrieben wird, eine Formel für die Periodenlänge T (in ms) in Abhängigkeit von c an!

Der Effektivwert p_{eff} des Schalldrucks einer Sinusschwingung mit der Periodenlänge T (in ms) kann mit der Formel $p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T p^2(t)\,\mathrm{d}t}$ berechnet werden.

Berechnen Sie den Effektivwert des Schalldrucks eines Tons, wenn $\overline{p} = 1$ und $\omega = 2 \cdot \pi$ gilt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

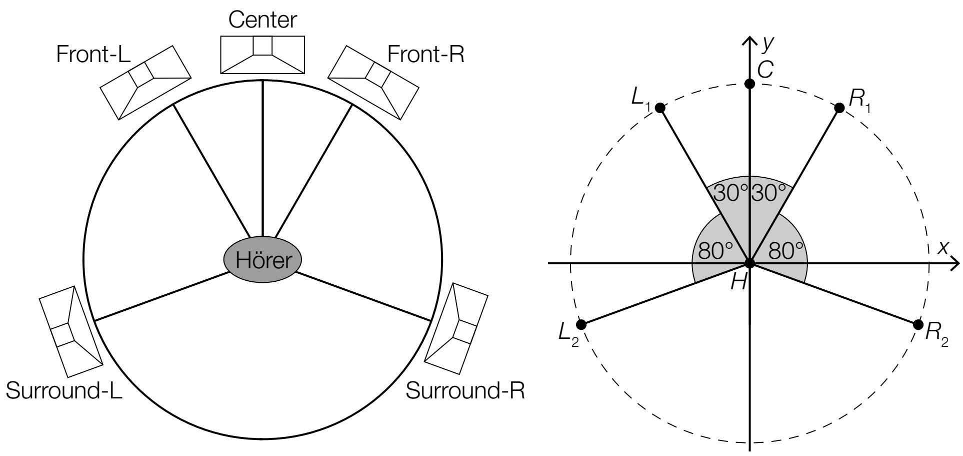
b) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die (kleinste) Periodenlänge T (in ms) der Funktion h an!

Geben Sie die Frequenz f der Funktion h in Hertz an!

c) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die Amplitude der Funktion h und denjenigen Zeitpunkt $t \geq 0$ (in ms) an, zu dem die Amplitude erstmals erreicht wird!

Begründen Sie, warum die Amplitude von h nicht gleich der Summe der drei Amplituden der Funktionen h_1, h_2 und h_3 ist!

d) Für ein angenehmes Raumklangerlebnis (z. B. in einem Heimkino) ist es günstig, wenn die fünf Lautsprecher eines Fünf-Kanal-Tonsystems wie in nachstehender linker Skizze dargestellt angeordnet sind (Ansicht von oben). Vereinfacht kann die Anordnung wie in nachstehender rechter Skizze in einem kartesischen Koordinatensystem (Einheit in Metern) dargestellt werden:



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/5.1 [23.04.2018] (adaptiert).

Jeder der fünf Lautsprecher (C, L_1, L_2, R_1, R_2) ist in diesem Fall 2 m vom Hörer (H) entfernt. Der Punkt H liegt im Koordinatenursprung.

Geben Sie die kartesischen Koordinaten von R_1 an!

Geben Sie die Entfernung zwischen L_2 und R_2 an!

Lösungserwartung

a) $T = \frac{2 \cdot \pi}{c \cdot \pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{c}$

Mögliche Vorgehensweise:

$T = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$

$p_{eff} = \sqrt{\frac{1}{1}\int_0^1 \sin^2(2\pi \cdot t)\,dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p_{eff} \approx 0{,}71\ \text{Pa}$

b) $T = 4$ ms

Frequenz von h: $\frac{1}{0{,}004} = 250$ Hz

c) Amplitude von h: ca. 2,9 nach ca. 0,2 ms

Mögliche Begründung:

Die Amplitude von h ist nicht gleich der Summe der Amplituden von h_1, h_2 und h_3, da die drei Funktionen ihre maximalen Funktionswerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreichen.

d) $R_1 = (1\,|\,\sqrt{3})$

Mögliche Vorgehensweise:

$x(R_1) = 2 \cdot \cos(60°) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$y(R_1) = 2 \cdot \sin(60°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Mögliche Vorgehensweise:

Entfernung zwischen L_2 und $R_2 = 2 \cdot x(R_2) = 2 \cdot 2 \cdot \cos(20°) \approx 3{,}76$ m

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Berechnung des richtigen Effektivwerts des Schalldrucks, wobei die Einheit „Pa" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,7 Pa; 0,71 Pa]

b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Periodenlänge von h, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,9 ms; 4,1 ms]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Amplitude und den richtigen Zeitpunkt, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervalle: [2,85; 2,95] bzw. [0,19 ms; 0,21 ms]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung.

d) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von R_1.
Toleranzintervall für die y-Koordinate: [1,7; 1,75]
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Lösung.
Toleranzintervall: [3,7 m; 3,8 m]

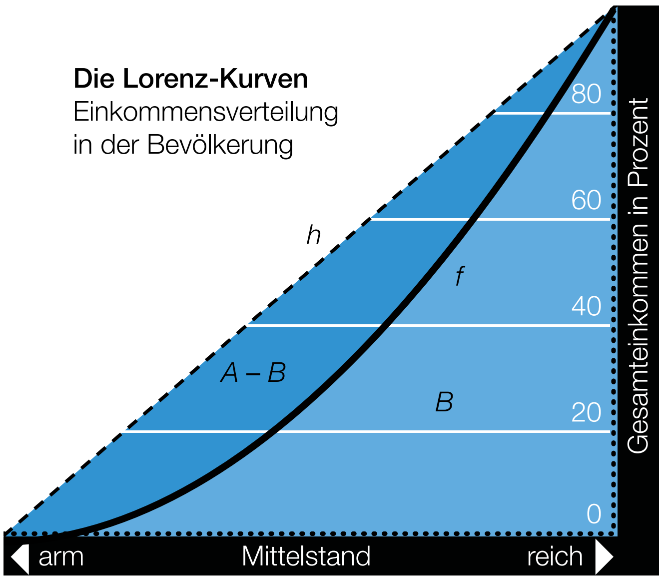
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Einkommensverteilung

Aufgabennummer: 2_031	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.4, AN 4.2, AN 4.3, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.2, FA 4.1, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2	

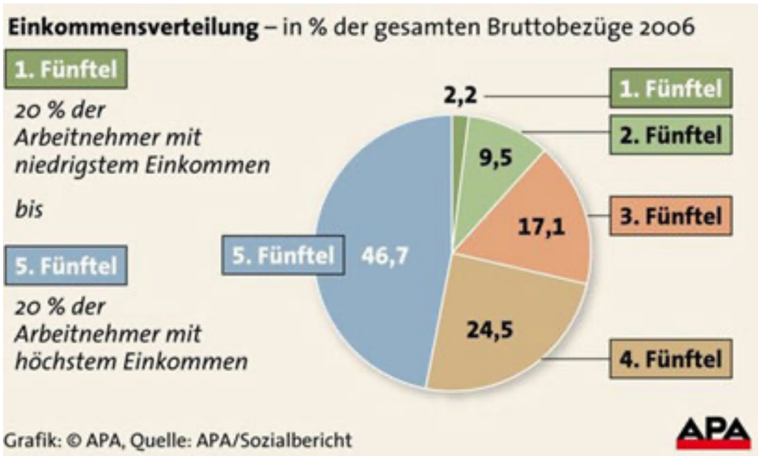
Der Statistiker Max Lorenz beschrieb bereits im Jahr 1905 statistische Verteilungen mithilfe der nach ihm benannten Lorenz-Kurve. Eine Lorenz-Kurve *f* kann z.B. zur Beschreibung der Einkommensverteilung in einem Staat herangezogen werden. Je ausgeprägter ihr „Bauch" ist, desto größer ist der Einkommensunterschied zwischen niedrigem und hohem Einkommen. Die Lorenz-Kurve der Einkommensverteilung eines Staates, in dem alle Personen bis auf eine Person nichts verdienen und diese eine Person alles bekommt, wird in der nachstehenden Grafik durch die punktierten Linien (Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks) dargestellt. Das andere Extrem ist ein Staat, in dem alle Personen gleich viel verdienen. In diesem Fall wird die Lorenz-Kurve zu einer Geraden *h*, welche durch die strichlierte Linie dargestellt ist. Zwischen den beiden Extremen verläuft die Lorenz-Kurve *f* eines Staates.

Jeder Punkt $P = (x|f(x))$ auf der Kurve *f* steht für folgende Aussage: „Die einkommensschwächsten *x* % aller Haushalte beziehen *f*(*x*) % des Gesamteinkommens."



Der Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks wird mit A bezeichnet. Der Graph der Lorenz-Kurve f schließt mit den beiden Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks eine Fläche mit Inhalt B ein. Setzt man den Inhalt der Fläche zwischen der Lorenz-Kurve f und der Geraden h mit der Dreiecksfläche A in Bezug, erhält man den Gini-Ungleichheitskoeffizienten $GUK = \frac{A - B}{A}$, eine Zahl zwischen null und eins. Je kleiner der GUK ist, desto gleichmäßiger ist das Gesamteinkommen auf die Bevölkerung verteilt.

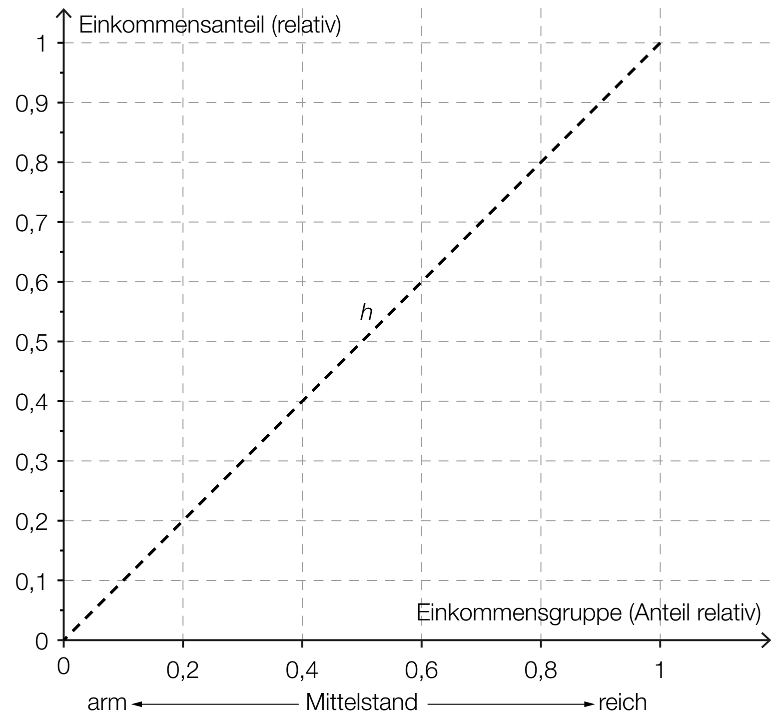
In der nachstehenden Grafik ist die Einkommensverteilung in Österreich in Prozent der gesamten Bruttobezüge im Jahre 2006 dargestellt. Daraus ist z. B. abzulesen, dass jene 20 % der Bevölkerung mit den niedrigsten Bruttoeinkommen nur 2,2 % des Gesamtbruttoeinkommens erhalten haben.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [04.05.2017].

Aufgabenstellung:

a) Zeichnen Sie die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung der Bruttobezüge in Österreich im Jahr 2006 in der nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!



Berechnen Sie mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttobezüge in Österreich für das Jahr 2006!

b) Die Verteilung der Bruttoeinkommen in Österreich im Jahre 2006 soll durch eine Polynomfunktion p so modelliert werden, dass alle Daten, die aus dem Kreisdiagramm aus der Einleitung abgelesen werden können, mit Funktionswerten dieser Polynomfunktion übereinstimmen.

Begründen Sie, welchen Grad die Polynomfunktion p bei konkreter Berechnung (maximal) hat!

Begründen Sie, warum eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht für die Modellierung einer Lorenz-Kurve geeignet ist!

c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}245 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2 + 0{,}155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen GUK!

Geben Sie mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" und die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen" im Vergleich zu den Bruttobezügen im Jahr 2006 in Österreich ändern würden!

d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

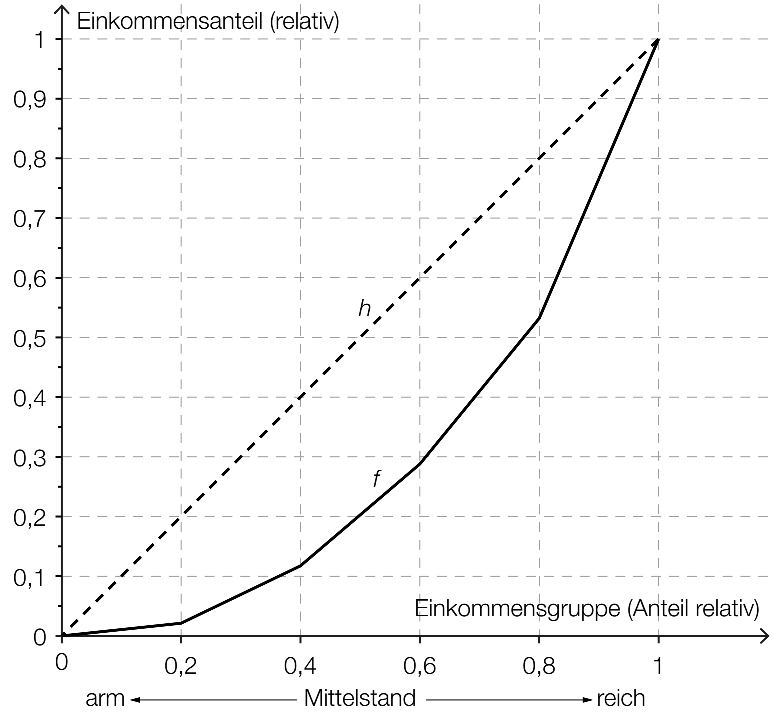
Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Geben Sie an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründen Sie Ihre Wahl!

Geben Sie eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermitteln Sie für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Inhalt der Fläche zwischen dem Polygonzug *f* und der Strecke *h* beträgt 0,208 Flächeneinheiten (die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen der waagrechten Achse und dem Streckenzug kann z. B. aus zwei Dreiecksflächen und drei Trapezflächen erfolgen).

$$\Rightarrow \ GUK = \frac{0{,}208}{0{,}5} = 0{,}416$$

b) Aus den Daten des Kreisdiagramms ergeben sich (für die Argumente $x = 0$, $x = 0{,}2$, $x = 0{,}4$, $x = 0{,}6$, $x = 0{,}8$, $x = 1$) sechs Funktionswerte von p und somit sechs „Bedingungen" für die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Eine Polynomfunktion fünften Grades hat sechs Koeffizienten und ist daher geeignet.
(Anmerkung: Bei „besonderer" Lage der Punkte kann auch ein Grad kleiner als fünf ausreichend sein.)

Jede Lorenz-Kurve verläuft durch den Punkt $(0|0)$. Da eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, ist sie nicht für die Modellierung geeignet.

c) $GUK = \dfrac{0{,}5 - \int_0^1 \left(0{,}245x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}155x\right) \mathrm{d}x}{0{,}5} = 0{,}3225$

$g(0{,}2) \approx 0{,}057$
$g(0{,}8) \approx 0{,}633$

Der Einkommensanteil der „20 % mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" würde (um ca. 3,5 Prozentpunkte) von 2,2 % auf ca. 5,7 % steigen.

Der Einkommensanteil der „20 % mit den höchsten Bruttoeinkommen" würde (um ca. 10 Prozentpunkte) von 46,7 % auf 36,7 % sinken.

d) $b = 0$, da der Graph durch den Punkt $(0|0)$ verlaufen muss
$a = 1$, da der Graph durch den Punkt $(1|1)$ verlaufen muss

$\dfrac{0{,}5 - \int_0^1 x^z \, \mathrm{d}x}{0{,}5} < 0{,}26$

$z \in \left(1; \dfrac{63}{37}\right)$

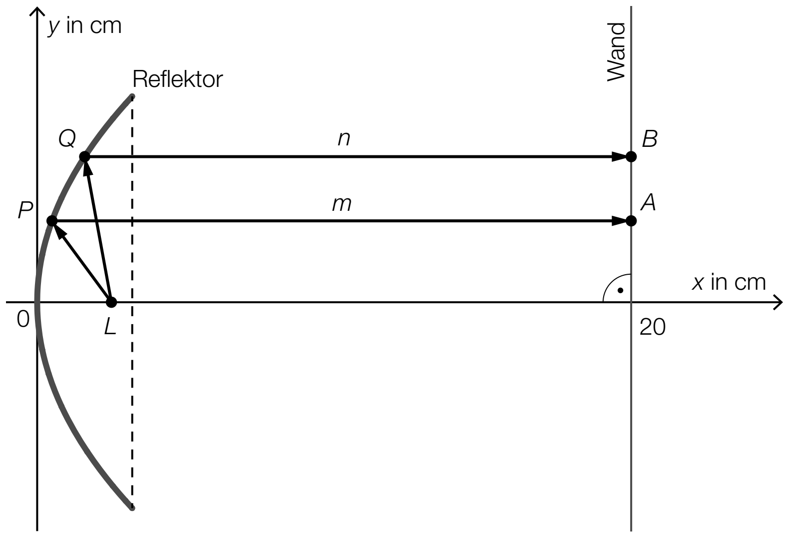
Taschenlampen

Ein Betrieb produziert und verkauft Taschenlampen.

Aufgabenstellung:

a) Der vordere Teil einer bestimmten Taschenlampe besteht aus der punktförmigen Lichtquelle L und einem Reflektor, der die Lichtquelle umgibt.

Der Querschnitt des vorderen Teiles dieser Taschenlampe ist in der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung in einem Koordinatensystem modellhaft dargestellt.



Zwei geradlinige Lichtstrahlen gehen von der Lichtquelle L aus und werden in den Punkten P und Q vom Reflektor parallel zur x-Achse auf eine Wand umgelenkt. Dort treffen sie in den Punkten A und B auf.

$L = (2{,}5|0)$
$\overline{LP} = 3$ cm und $\overline{LQ} = 4{,}1$ cm
$A = (20|y_A)$ und $B = (20|y_B)$
$m = 19{,}5$ cm

Es gilt: $\overline{LP} + m = \overline{LQ} + n$

1) Berechnen Sie y_B. *[0/1 P.]*

b) Bei der Kontrolle einer Lieferung werden Taschenlampen auf die Fehler F_1, F_2 und F_3 hin überprüft. Diese 3 Fehler treten unabhängig voneinander auf.

In der nachstehenden Tabelle sind diese Fehler und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten angegeben.

Fehler	Beschreibung	Wahrscheinlichkeit
F_1	Die Taschenlampe ist defekt.	p_1
F_2	Die Taschenlampe hat die falsche Farbe.	0,02
F_3	Die Taschenlampe hat keine Aufbewahrungstasche.	0,01

Eine Taschenlampe wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt und überprüft.

1) Ordnen Sie den vier Ereignissen jeweils die auf jeden Fall zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis F zu. *[0/½/1 P.]*

Die Taschenlampe ist defekt und hat die falsche Farbe.	☐
Die Taschenlampe hat die richtige Farbe.	☐
Die Taschenlampe ist nicht defekt, sie hat die richtige Farbe und sie hat keine Aufbewahrungstasche.	☐
Die Taschenlampe weist mindestens 1 dieser 3 Fehler auf.	☐

A	0,98
B	$1 - (1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99$
C	$p_1 \cdot 0{,}02$
D	$1 - p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
E	$p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
F	$(1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}01$

c) Die Gesamtkosten für die Herstellung der Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x können durch die differenzierbare Kostenfunktion K modelliert werden.

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' hat die Funktionsgleichung
$K'(x) = 0{,}33 \cdot x^2 - 1{,}8 \cdot x + 3$.

Es gilt: $K(1) = 44{,}21$

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

$K(x) =$ ____ *[0/1 P.]*

Im Folgenden wird angenommen, dass jede produzierte Taschenlampe auch verkauft wird.

Der Erlös aus dem Verkauf dieser Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x kann durch die Funktion E modelliert werden.

$E(x) = a \cdot x$

x ... Produktionsmenge in ME
$E(x)$ ... Erlös bei der Produktionsmenge x in GE
a ... Preis in GE/ME

Der Gewinn wird durch die Gewinnfunktion G modelliert (x in ME, $G(x)$ in GE).

Das Betriebsziel ist, bei einer Produktion und einem Verkauf von 5 ME Taschenlampen einen Gewinn von mindestens 100 GE zu erzielen.

2) Berechnen Sie den kleinstmöglichen Preis, mit dem dieses Betriebsziel erreicht wird.
[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $3 + 19{,}5 = 4{,}1 + n$
$n = 18{,}4$
$y_B = \sqrt{4{,}1^2 - (18{,}4 - 17{,}5)^2} = 4$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von y_B.

b1)

Die Taschenlampe ist defekt und hat die falsche Farbe.	C
Die Taschenlampe hat die richtige Farbe.	A
Die Taschenlampe ist nicht defekt, sie hat die richtige Farbe und sie hat keine Aufbewahrungstasche.	F
Die Taschenlampe weist mindestens 1 dieser 3 Fehler auf.	B

A	0,98
B	$1 - (1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99$
C	$p_1 \cdot 0{,}02$
D	$1 - p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
E	$p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
F	$(1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}01$

b1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

c1) $K(x) = 0{,}11 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 42$

c2) $G(x) = a \cdot x - (0{,}11 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 42)$
$G(5) \geq 100$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a \geq 29{,}65$

Der kleinstmögliche Preis beträgt 29,65 GE/ME.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von K.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

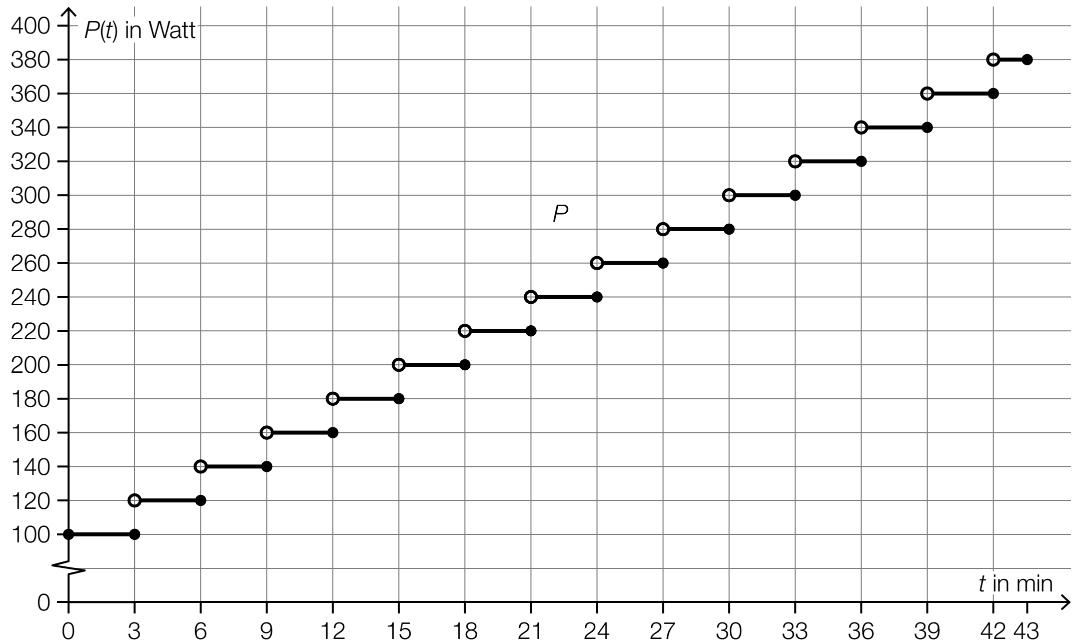
Belastungstests

Laktat ist ein Stoffwechselprodukt. Bei zunehmender körperlicher Belastung wird mehr Laktat im Körper produziert.
Bei Belastungstests werden unter anderem die Herzfrequenz und die Laktatkonzentration im Blut (in mmol/L) gemessen.

Aufgabenstellung:

a) Katharina unterzieht sich einem Belastungstest. Die Belastung wird bei diesem Test schrittweise erhöht, bis Katharina den Test nach 43 min abbricht.

Die Funktion P: $[0; 43] \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto P(t)$ beschreibt modellhaft die von Katharina erbrachte Leistung in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $P(t)$ in Watt). Der Graph von P ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Für die im Zeitintervall $[t_A; t_B]$ (in min) verrichtete Arbeit W (in Joule) gilt:

$$W = 60 \cdot \int_{t_A}^{t_B} P(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Berechnen Sie die von Katharina im Zeitintervall [30; 43] verrichtete Arbeit in Joule.

[0/1 P.]

Im Rahmen dieses Belastungstests wird die Laktatkonzentration in Katharinas Blut gemessen.
Die Funktion $c_1\colon [0; 43] \to \mathbb{R}^+$ mit $c_1(t) = 1{,}13 + 4 \cdot 10^{-8} \cdot t^5$ beschreibt modellhaft die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $c_1(t)$ in mmol/L).

2) Ermitteln Sie diejenige Leistung (in Watt) während dieses Belastungstests, bei der eine Laktatkonzentration von 1,95 mmol/L erreicht wird. *[0/1 P.]*

Bei diesem Belastungstest wird auch Katharinas Herzfrequenz gemessen.
Die Funktion $H\colon [0; 43] \to \mathbb{R}^+$ mit $H(t) = 2 \cdot t + 85$ beschreibt modellhaft die Herzfrequenz in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $H(t)$ in Schlägen/min).

3) Beschreiben Sie die Bedeutung der Zahlen 2 und 85 im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei jeweils die zugehörigen Einheiten an.

Bedeutung der Zahl 2:

____

Bedeutung der Zahl 85:

____

[0/½/1 P.]

b) Katharina unterzieht sich einem anderen Belastungstest. Dabei wird die Laktatkonzentration in ihrem Blut zu Beginn, während und nach einer intensiven Belastung gemessen.

Die Funktion $c_2\colon [0; 30] \to \mathbb{R}^+$ mit $c_2(t) = 31{,}2 \cdot (e^{-0{,}066 \cdot t} - e^{-0{,}325 \cdot t}) + 1{,}13$ beschreibt modellhaft die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $c_2(t)$ in mmol/L).

Zum Zeitpunkt t_1 ist die Laktatkonzentration wieder auf die Hälfte des maximal erreichten Wertes abgesunken.

1) Ermitteln Sie t_1. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $60 \cdot [3 \cdot (300 + 320 + 340 + 360) + 380] = 260\,400$

Die von Katharina im Zeitintervall [30; 43] verrichtete Arbeit beträgt 260 400 J.

a2) $c_1(t) = 1{,}95$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t = 28{,}9...$
$P(28{,}9...) = 280$

Die Leistung bei einer Laktatkonzentration von 1,95 mmol/L beträgt 280 Watt.

a3) Bedeutung der Zahl 2: Die Herzfrequenz nimmt pro Minute um 2 Schläge/min zu.
Bedeutung der Zahl 85: Die Herzfrequenz zu Beginn des Belastungstests beträgt 85 Schläge/min.

Das Angeben der Zahlen 2 und 85 ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der verrichteten Arbeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Leistung.
a3) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung der beiden Zahlen, ein halber Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung von nur einer Zahl, jeweils unter Angabe der zugehörigen Einheiten.

b1) t_{max} ... Zeitpunkt des maximal erreichten Wertes der Laktatkonzentration

$c_2'(t_{max}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_{max} = 6{,}155...$
$c_2(6{,}155...) = 17{,}69...$
$\frac{17{,}69...}{2} = c_2(t_1)$
$t_1 = 21{,}1...$ min

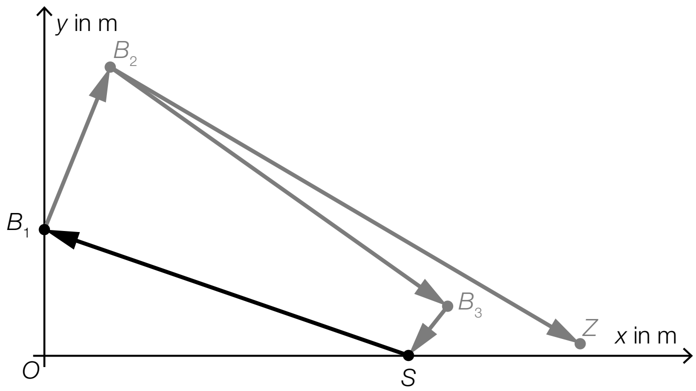
b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.

Triathlon

Triathlon ist ein Bewerb, bei dem die Sportlerinnen und Sportler einen Schwimmbewerb, einen Radbewerb und einen Laufbewerb in genau dieser Reihenfolge absolvieren.

Aufgabenstellung:

a) Der Verlauf der Schwimmstrecke eines bestimmten Triathlons ist in der nachstehenden Abbildung modellhaft dargestellt. Der Schwimmbewerb startet im Punkt S und endet im Punkt Z, dazwischen müssen die Kontrollpunkte B_1, B_2, B_3, S, B_1 und B_2 in genau dieser Reihenfolge erreicht werden.



Die Entfernung vom Punkt $S = (600|0)$ zum Punkt B_1 beträgt 700 m.

1) Berechnen Sie die y-Koordinate von B_1.
$B_1 = \left(0 \middle| \boxed{}\right)$ *[0/1 P.]*

b) Beim Radbewerb eines bestimmten Triathlons startet Stefanie 1,45 min vor Tanja.

t ... Zeit in min
$t = 0$ ... Zeitpunkt, zu dem Stefanie startet
$v_{\text{Stefanie}}(t)$ ... Geschwindigkeit von Stefanie zum Zeitpunkt t in km/min
$v_{\text{Tanja}}(t)$ ... Geschwindigkeit von Tanja zum Zeitpunkt t in km/min

Stefanie erreicht das Ziel des Radbewerbs nach einer Fahrzeit von 291 min. Zu dieser Zeit ist Tanja noch auf der Radstrecke.

1) Interpretieren Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet werden kann.
$\int_0^{291} v_{\text{Stefanie}}(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1,45}^{291} v_{\text{Tanja}}(t)\,\mathrm{d}t$ *[0/1 P.]*

c) Michael nimmt an einem bestimmten Triathlon teil.

Michael startet in den abschließenden 42,195 km langen Laufbewerb mit einer bisherigen Gesamtzeit von 5 h 12 min 38 s.

Michael beendet den Triathlon mit einer Gesamtzeit von 7 h 36 min 56 s.

1) Berechnen Sie Michaels Durchschnittsgeschwindigkeit im Laufbewerb in km/h. *[0/1 P.]*

d) Der wohl bekannteste Triathlon-Bewerb ist die *Ironman World Championship* in Hawaii.

Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0{,}1275 \cdot t^3 - 8{,}525 \cdot t^2 + 198{,}425 \cdot t + 15$ beschreibt in Abhängigkeit von der Zeit t für den Zeitraum von 1978 bis 2018 modellhaft die Anzahl der Personen, die an diesem Bewerb teilnehmen (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1978).

Quelle: https://www.tri226.de/ironman-ergebnisse.php?language=ge&table=start_finish [09.08.2022].

Die Anzahl der Personen, die an diesem Bewerb teilnehmen, ist im Zeitraum von 1978 bis 2018 im Mittel um n Personen pro Jahr gestiegen.

1) Berechnen Sie n. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $B_1 = (0|360{,}5...)$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der y-Koordinate von B_1.

b1) Es wird die verbliebene Wegstrecke von Tanja bis zum Ziel (des Radbewerbs) in km berechnet.

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

c1) Zeitdifferenz: 2 h 24 min 18 s = 2,405 h

$\frac{42{,}195}{2{,}405} = 17{,}54...$

Michaels Durchschnittsgeschwindigkeit im Laufbewerb beträgt rund 17,5 km/h.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Durchschnittsgeschwindigkeit.

d1) $n = \frac{f(40) - f(0)}{40} = 61{,}425$

d1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n.

Teich

In einem künstlich angelegten Teich befinden sich 129 m³ Wasser.

Aufgabenstellung:

a) Der Teich kann über zwei Abflüsse vollständig entleert werden.

Wird nur der eine Abfluss geöffnet, so dauert die vollständige Entleerung 10 h.
Wird nur der andere Abfluss geöffnet, so dauert die vollständige Entleerung 6 h.
Die jeweilige Abflussgeschwindigkeit ist dabei im gesamten Zeitraum konstant.
Die Zeitdauer, die zur vollständigen Entleerung benötigt wird, wenn beide Abflüsse gleichzeitig geöffnet sind, wird mit T bezeichnet.

1) Berechnen Sie T. *[0/1 P.]*

b) Der vollständig entleerte Teich wird wieder mit 129 m³ Wasser befüllt.

Die Funktion $d\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gibt die Fülldauer $d(z)$ in Abhängigkeit von der konstanten Zuflussgeschwindigkeit z an (z in m³/h, $d(z)$ in h).

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von d auf.

$d(z) =$ ____ *[0/1 P.]*

Die Funktion h beschreibt in Abhängigkeit von der Zeit t die Höhe der Wasseroberfläche über dem tiefsten Punkt des Teiches bei der konstanten Zuflussgeschwindigkeit $z = 6$ m³/h (t in h, $h(t)$ in m).

Für die momentane Änderungsrate der Höhe der Wasseroberfläche gilt:

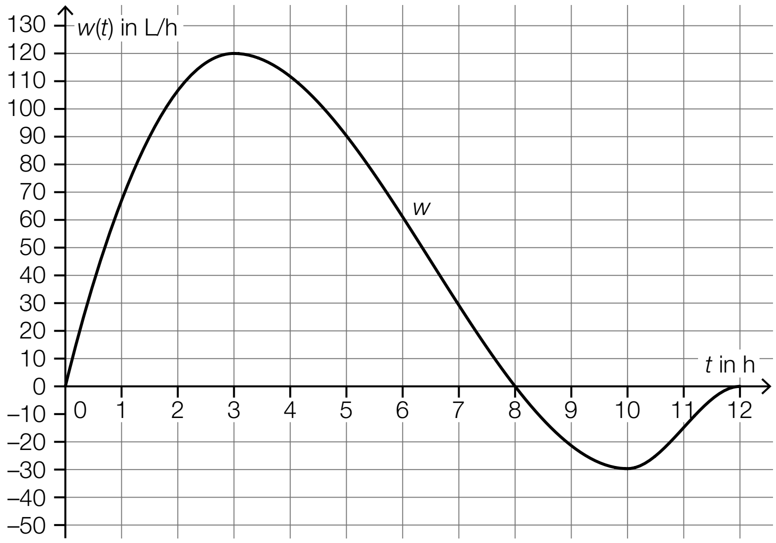
$$h'(t) = \frac{15}{\sqrt{2738 \cdot \pi \cdot t}} \quad \text{mit} \quad t > 0$$

2) Ermitteln Sie, um wie viele Meter die Höhe der Wasseroberfläche in den letzten 10 h der Befüllung ansteigt. *[0/1 P.]*

c) Durch Regen und Verdunstung ändert sich die Wassermenge im Teich.

Die Funktion w: $[0;12] \to \mathbb{R}$ beschreibt näherungsweise die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $w(t)$ in L/h).

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph von w dargestellt.



1) Ordnen Sie den vier Aussagen jeweils das passende größtmögliche Zeitintervall aus A bis F zu. *[0/½/1 P.]*

Die Wassermenge im Teich nimmt ab.	
Die Wassermenge im Teich nimmt immer schneller zu.	
Die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich nimmt ab.	
Die Wassermenge im Teich nimmt zu.	

A	(0; 3)
B	(3; 10)
C	(8; 12)
D	(3; 12)
E	(8; 10)
F	(0; 8)

Möglicher Lösungsweg

a1) $\left(\frac{129}{10} + \frac{129}{6}\right) \cdot T = 129$

$T = 3{,}75$ h

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *T*.

b1) $d(z) = \frac{129}{z}$

b2) $d(6) = 21{,}5$

$\int_{11{,}5}^{21{,}5} h'(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}40...$

Die Höhe der Wasseroberfläche steigt in den letzten 10 h der Befüllung um rund 0,4 m an.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *d*.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Anstiegs der Höhe der Wasseroberfläche.

c1)

Die Wassermenge im Teich nimmt ab.	C
Die Wassermenge im Teich nimmt immer schneller zu.	A
Die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich nimmt ab.	B
Die Wassermenge im Teich nimmt zu.	F

A	(0; 3)
B	(3; 10)
C	(8; 12)
D	(3; 12)
E	(8; 10)
F	(0; 8)

c1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Sauerstoffverbrauch von Säugetieren

Bei Säugetieren gibt es einen Zusammenhang zwischen der Körpermasse und dem Sauerstoffverbrauch.

Aufgabenstellung:

a) Für ein Säugetier, das sich im Beobachtungszeitraum nicht bewegt, kann der Sauerstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Körpermasse m näherungsweise durch eine Funktion $S: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, m \mapsto S(m)$ beschrieben werden (m in kg, $S(m)$ in L/h).

Für Katzen und Hunde mit einer Körpermasse m in kg gilt annähernd:

$S(m) = a \cdot m^{0,75}$

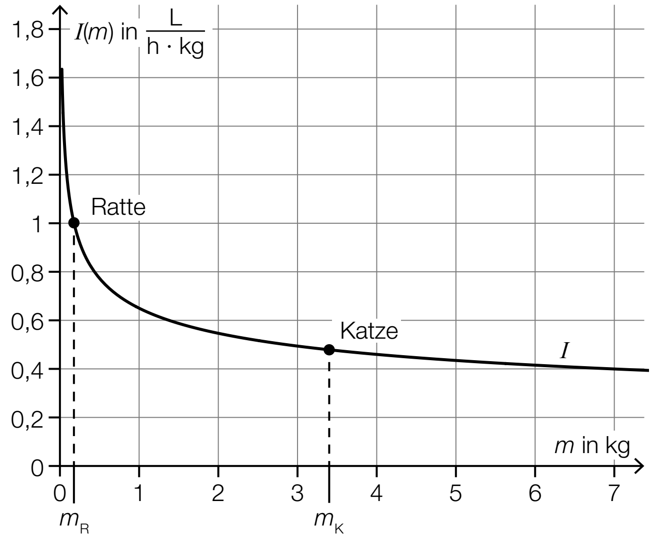
a ... positive Konstante

Die Körpermasse eines bestimmten Hundes ist doppelt so groß wie die einer bestimmten Katze.

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Sauerstoffverbrauch dieses Hundes höher als der dieser Katze ist. *[0/1 P.]*

b) Die Funktion $I\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ beschreibt die Stoffwechselintensität von Säugetieren in Abhängigkeit von ihrer Körpermasse m $\left(m \text{ in kg}, I(m) \text{ in } \frac{\text{L}}{\text{h} \cdot \text{kg}}\right)$.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph von I dargestellt.



Quelle: Sadava, David E., David M. Hillis et al.: *Purves Biologie*. Herausgegeben von Jürgen Markl. 10. Auflage. Berlin u. a.: Springer 2019, S. 1 201 (adaptiert).

Die Körpermasse einer Ratte wird mit m_R und die einer Katze mit m_K bezeichnet.
Für eine bestimmte Körpermasse m_1 ist $I'(m_1)$ gleich der mittleren Änderungsrate von I im Intervall $[m_R; m_K]$.

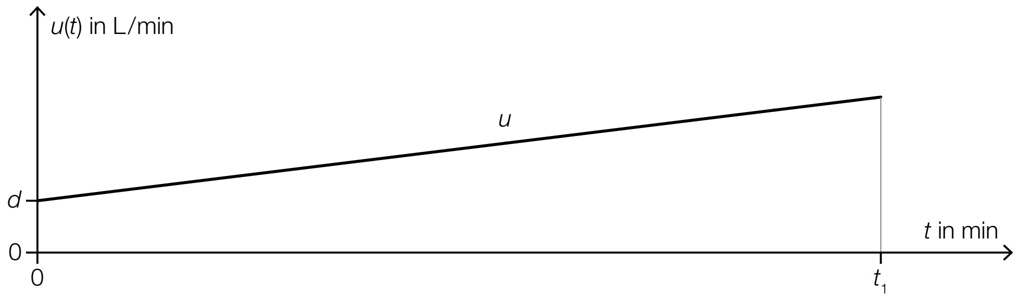
1) Ermitteln Sie m_1 mithilfe der obigen Abbildung.

$m_1 =$ ____________________ kg *[0/1 P.]*

c) Für ein Säugetier, das sich bewegt, wird die momentane Änderungsrate des Sauerstoffverbrauchs in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch die lineare Funktion $u: [0; t_1] \to \mathbb{R}$ mit $t_1 \in \mathbb{R}^+$ beschrieben (t in min, $u(t)$ in L/min).

Es gilt: $u(0) = d$ mit $d \in \mathbb{R}^+$

Der Graph von u ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von $\int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t$ auf. Verwenden Sie dabei t_1, $u(t_1)$ und d.

$\int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t =$ ____________________ *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie $\int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit. *[0/1 P.]*

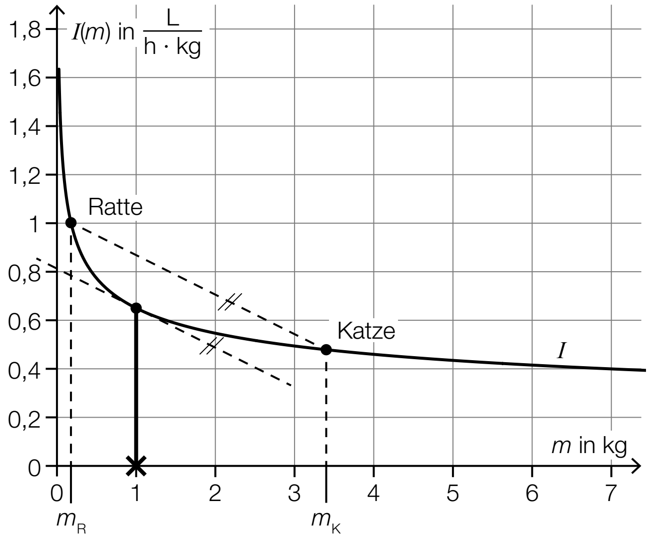
Möglicher Lösungsweg

a1) $2^{0,75} = 1{,}6817...$

Der Sauerstoffverbrauch dieses Hundes ist um rund 68,2 % höher als der dieser Katze.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

b1)



$m_1 = 1$ kg
Toleranzbereich in kg: [0,8; 1,2]

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von m_1.

c1) $\int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(u(t_1) + d) \cdot t_1}{2}$

c2) Der Ausdruck gibt den Sauerstoffverbrauch in L im Intervall $[0; t_1]$ an.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Schwimmbecken

In einem Freibad gibt es verschiedene Schwimmbecken.

Aufgabenstellung:

a) Das Volumen eines bestimmten quaderförmigen Schwimmbeckens kann mithilfe der Gleichung $V = a^2 \cdot h$ berechnet werden.

a ... Seitenlänge der quadratischen Grundfläche
h ... Tiefe des Schwimmbeckens

Betrachtet werden die Funktion $V: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, a \mapsto V(a)$ bei konstantem h und die Funktion $h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, V \mapsto h(V)$ bei konstantem a.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Die Funktion V ist eine ______①______, die Funktion h ist eine ______②______.

①	
lineare Funktion	☐
quadratische Funktion	☐
Quadratwurzelfunktion	☐

②	
lineare Funktion	☐
quadratische Funktion	☐
Quadratwurzelfunktion	☐

b) Zum Füllen eines anderen Schwimmbeckens werden p Pumpen verwendet, die pro Stunde jeweils die gleiche Wassermenge in das Schwimmbecken pumpen. Für $p = 2$ beträgt die Fülldauer 19 h.

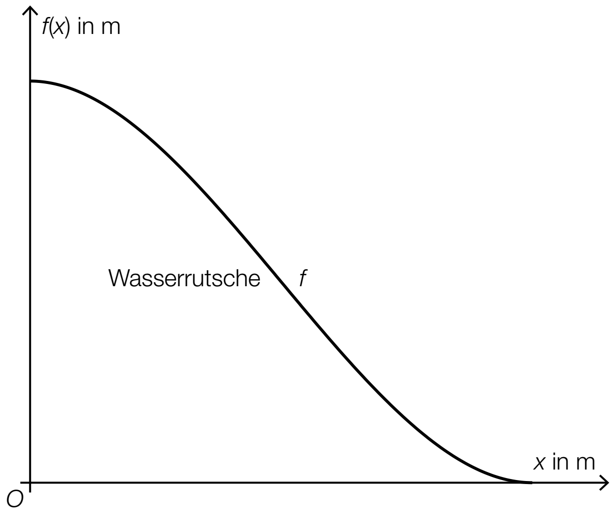
1) Stellen Sie unter Verwendung der Anzahl p der Pumpen eine Formel zur Berechnung der Fülldauer T (in h) auf.

$T =$ ____________________________________ *[0/1 P.]*

Die Wassermenge in diesem Schwimmbecken nimmt durch Verdunstung und durch betriebsbedingte Ursachen ab. Dabei beschreibt die Funktion $W: [0; 10] \to \mathbb{R}$ mit $W(t) = -\frac{1}{96} \cdot t^3 + \frac{1}{4} \cdot t^2 - \frac{35}{24} \cdot t$ modellhaft die momentane Änderungsrate der Wassermenge zum Zeitpunkt t an einem bestimmten Tag (t in h, $W(t)$ in m^3/h).

2) Ermitteln Sie die Abnahme der Wassermenge (in m^3) im Zeitintervall [0; 6]. *[0/1 P.]*

c) In der nachstehenden Abbildung ist das seitliche Profil einer bestimmten Wasserrutsche modellhaft dargestellt.



Das seitliche Profil der Wasserrutsche ist durch den Graphen der Funktion f: $[0; 5] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{8}{125} \cdot x^3 - \frac{12}{25} \cdot x^2 + 4$ gegeben (x in m, $f(x)$ in m).

1) Ermitteln Sie die Stelle x_1, an der die Wasserrutsche am steilsten bergab verläuft. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)

①	
quadratische Funktion	☒

②	
lineare Funktion	☒

a1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) $T = \frac{38}{p}$

b2) $\left|\int_0^6 W(t)\,\mathrm{d}t\right| = 11{,}625$

Die Abnahme der Wassermenge im Zeitintervall [0; 6] beträgt 11,625 m³.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Abnahme der Wassermenge, wobei –11,625 m³ ebenso als richtig zu werten ist.

c1) $f''(x) = 0$

$x_1 = 2{,}5$

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Stelle x_1.

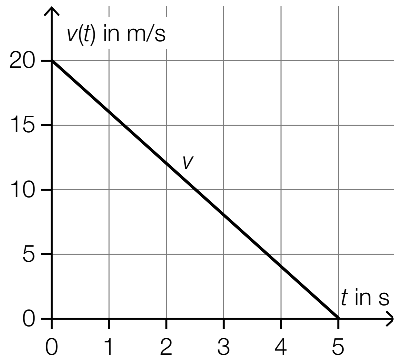
Bremsvorgänge

Durch das Einwirken einer Bremskraft und der damit verbundenen negativen Beschleunigung verringert sich die Geschwindigkeit eines fahrenden Fahrzeugs.

Aufgabenstellung:

a) Ein bestimmtes Fahrzeug wird durch eine Vollbremsung bis zum Stillstand abgebremst. Der Weg, den ein Fahrzeug während der Vollbremsung zurücklegt, wird als *Bremsweg* bezeichnet.

In der nachstehenden Abbildung ist das Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm für eine 5 s dauernde Vollbremsung dargestellt.



Für die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v gilt:

$v(t) = -4 \cdot t + 20 \quad \text{mit} \quad t \in [0; 5]$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s

1) Interpretieren Sie die Koeffizienten –4 und 20 aus der obigen Funktionsgleichung von v im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/½/1 P.]*

Die Länge des Bremswegs des Fahrzeugs bei dieser Vollbremsung wird mit s_B bezeichnet. Wird die Anfangsgeschwindigkeit halbiert, so beträgt bei gleichbleibender negativer Beschleunigung die Länge des Bremswegs $k \cdot s_B$ mit $k \in \mathbb{R}$.

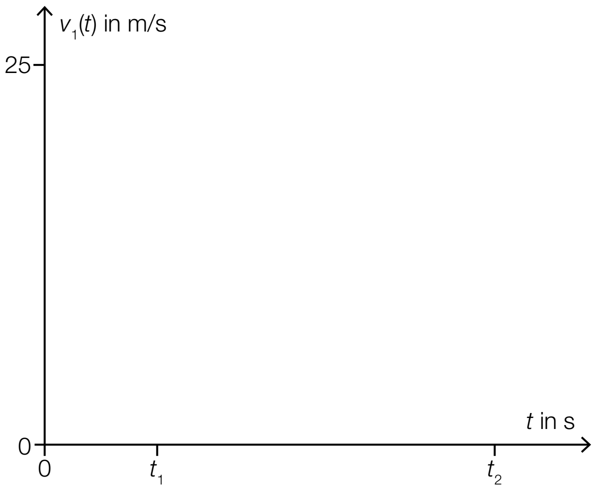
2) Ermitteln Sie k. *[0/1 P.]*

b) Ein Fahrzeug fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 25 m/s. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sieht der Fahrzeuglenker ein Hindernis auf der Straße.

Es gilt:

- Der Fahrzeuglenker benötigt eine bestimmte Zeit, um zu reagieren. Während dieser Zeit fährt das Fahrzeug mit der konstanten Geschwindigkeit von 25 m/s weiter.
- Der Bremsvorgang beginnt zum Zeitpunkt t_1 mit einer konstanten Bremsverzögerung (negative Beschleunigung).
- Zum Zeitpunkt t_2 kommt das Fahrzeug zum Stillstand.

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm den Geschwindigkeitsverlauf für den beschriebenen Vorgang ein (t in s, $v_1(t)$ in m/s). *[0/1 P.]*



Der Weg, den das Fahrzeug im Zeitintervall $[0; t_2]$ zurücklegt, wird *Anhalteweg* s_A genannt (s_A in m).

2) Stellen Sie unter Verwendung von t_1 und t_2 eine Formel zur Berechnung von s_A auf.

s_A = ________________________ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Die Geschwindigkeit nimmt pro Sekunde um 4 m/s ab.

Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt 20 m/s.

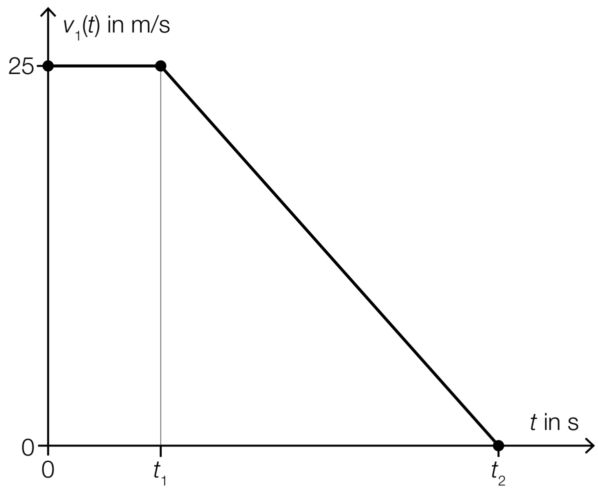
a2) Für eine Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s gilt: $s_B = \frac{5 \cdot 20}{2} = 50$

Bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s beträgt die Zeit bis zum Stillstand 2,5 s.
Es gilt: $k \cdot s_B = \frac{2{,}5 \cdot 10}{2} = 12{,}5$

$k = \frac{1}{4}$

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren beider Koeffizienten im gegebenen Sachzusammenhang, ein halber Punkt für das richtige Interpretieren nur eines Koeffizienten.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von k.

b1)



b2) $s_A = 25 \cdot t_1 + \frac{25}{2} \cdot (t_2 - t_1)$

b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Geschwindigkeitsverlaufs, wobei der Übergang zwischen den beiden linearen Funktionen im Punkt $(t_1 | 25)$ klar erkennbar sein muss.
b2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Fahrradtour

Aufgabenstellung:

a) Bettina macht eine 2-stündige Fahrradtour. Ihre Geschwindigkeit kann dabei näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -0{,}08 \cdot t^2 + 16 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2$

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn der Fahrradtour
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in km/h

1) Berechnen Sie die Zeitdauer, die Bettina für die ersten 10 km dieser Fahrradtour benötigt. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 1$. Geben Sie auch die zugehörige Einheit an. *[0/½/1 P.]*

b) Der empfohlene Reifendruck eines Fahrradreifens sinkt mit zunehmender Breite des Reifens. Für einen empfohlenen Reifendruck von 2 bar bis 9 bar kann der empfohlene Reifendruck näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden.

$p(x) = 19{,}1 \cdot e^{-0{,}0376 \cdot x}$

x ... Breite des Reifens in mm
$p(x)$ ... empfohlener Reifendruck bei der Breite x in bar

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall für die Breite des Reifens, für das sich ein empfohlener Reifendruck von 2 bar bis 9 bar ergibt. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung unter Angabe der zugehörigen Einheiten im gegebenen Sachzusammenhang.
$p(30) - p(20) \approx -2{,}8$ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 0{,}62...$
Bettina benötigt für die ersten 10 km rund 0,6 h.

a2) $a(t) = v'(t) = -0{,}16 \cdot t$
$v'(1) = -0{,}16$

Die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt –0,16 km/h².

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.
a2) Ein halber Punkt für das richtige Berechnen der Beschleunigung, ein halber Punkt für das Angeben der richtigen Einheit.

b1) $p(x) = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 20{,}0...$
$p(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 60{,}0...$

größtmögliches Intervall: [20,0...; 60,0...]

b2) Der für einen 30 mm breiten Reifen empfohlene Reifendruck ist um rund 2,8 bar geringer als der für einen 20 mm breiten Reifen empfohlene Reifendruck.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des größtmöglichen Intervalls.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe der zugehörigen Einheiten im gegebenen Sachzusammenhang.

Biathlon

Biathlon ist eine Wintersportart, die Skilanglauf und Schießen kombiniert.

Bei einem bestimmten Wettbewerb müssen drei Runden zu je 2500 m absolviert werden.
Dabei gilt:

- Nach der ersten und nach der zweiten absolvierten Runde findet jeweils ein Schießen statt. Bei jedem Schießen werden fünf Schüsse abgegeben.
- Für jeden Fehlschuss muss eine 150 m lange Strafrunde absolviert werden, wodurch es zu einem Zeitverlust kommt.

Quelle: https://www.sport1.de/wintersport/biathlon/2018/11/biathlon-im-ueberblick-regeln-disziplinen-wissenswertes [15.04.2021].

Aufgabenstellung:

a) Lisa absolviert die drei Runden mit folgenden durchschnittlichen Geschwindigkeiten (v_1, v_2, v_3 in m/s):

- v_1 für die erste Runde
- v_2 für die zweite Runde
- v_3 für die dritte Runde

Für das Schießen benötigt Lisa jeweils die Zeitdauer t^* (t^* in s).
Nach der ersten absolvierten Runde macht sie beim Schießen keinen Fehler.
Nach der zweiten absolvierten Runde macht sie beim Schießen genau 2 Fehler.
Die 2 Strafrunden absolviert sie mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von v_S (v_S in m/s).

Unter der Laufzeit b (b in s) versteht man diejenige Zeit, die Lisa insgesamt für die absolvierten Runden inklusive Strafrunden und für das Schießen benötigt.

1) Stellen Sie mithilfe von v_1, v_2, v_3, t^* und v_S eine Formel zur Berechnung von b auf.

b = ____ *[0/1 P.]*

b) Die Geschwindigkeit von Hanna in der ersten Runde kann modellhaft durch die Funktion $v\colon [0; 440] \to \mathbb{R}, t \mapsto v(t)$ beschrieben werden (t in s, $v(t)$ in m/s).

1) Interpretieren Sie $\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v(t)\,dt$ mit $T \in (0\text{ s}; 440\text{ s}]$ im gegebenen Sachzusammenhang.
[0/1 P.]

Es gibt genau zwei Zeitpunkte $t_1, t_2 \in (0\text{ s}; 440\text{ s})$ mit $t_1 < t_2$, für die gilt:
$v'(t_1) = 0$ und $v''(t_1) < 0$
$v'(t_2) = 0$ und $v''(t_2) < 0$

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Zeitpunkte t_1 und t_2 sind ______①______ der Funktion v und der Wert von $\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$ entspricht dabei der ______②______ im Zeitintervall $[t_1; t_2]$. *[0/½/1 P.]*

①	
lokale Minimumstellen	☐
lokale Maximumstellen	☐
Wendestellen	☐

②	
durchschnittlichen Geschwindigkeit	☐
Länge der zurückgelegten Strecke	☐
durchschnittlichen Beschleunigung	☐

c) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer von Daria beim Schießen an und wird als binomialverteilt angenommen. Bei jedem der 5 Schüsse ist p die Trefferwahrscheinlichkeit.

1) Stellen Sie unter Verwendung von p eine Formel zur Berechnung der nachstehenden Wahrscheinlichkeit auf.

$P(X \geq 4) =$ ________________________________ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $b = \frac{2\,500}{v_1} + \frac{2\,500}{v_2} + \frac{2\,500}{v_3} + 2 \cdot t^* + \frac{300}{v_S}$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b1) Der Ausdruck beschreibt die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0; T]$.

b2)

①	
lokale Maximumstellen	☒

②	
durchschnittlichen Beschleunigung	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

c1) $P(X \geq 4) = 5 \cdot p^4 \cdot (1 - p) + p^5$

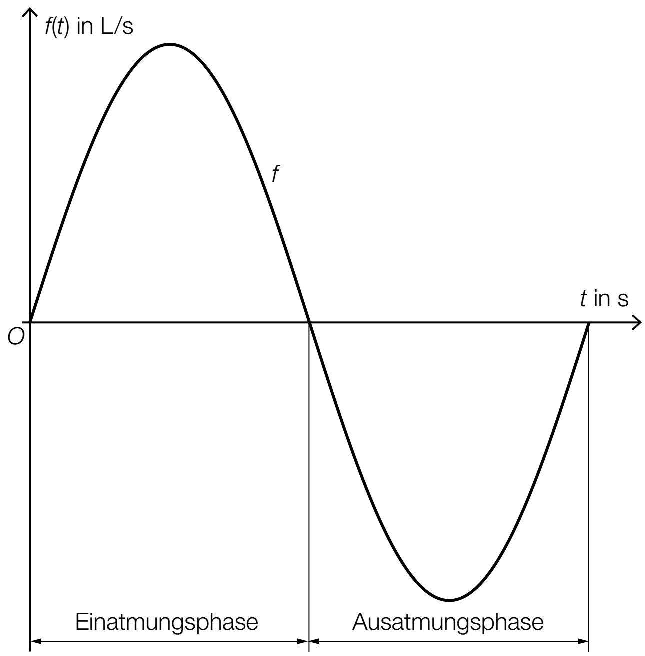
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Atemstromstärke

Unter *Atemstromstärke* versteht man die pro Zeiteinheit ein- bzw. ausgeatmete Luftmenge. Sie wird modellhaft durch die Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben (t in s, $f(t)$ in L/s).

Für die Atemstromstärke von Mathias gilt modellhaft:
$f(t) = 0{,}5 \cdot \sin(1{,}25 \cdot t)$

Ein Atemzyklus besteht aus einer vollständigen Einatmungsphase und einer vollständigen Ausatmungsphase. Die Beobachtung beginnt bei $t = 0$.
In der nachstehenden Abbildung ist ein Atemzyklus dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) In der Ausatmungsphase des betrachteten Atemzyklus von Mathias hat die Funktion f an der Stelle t_1 eine Extremstelle.

1) Ermitteln Sie t_1 (in s).

t_1 = ________________________________ s [0/1 P.]

Im betrachteten Atemzyklus gibt t_2 mit $t_2 > 0$ denjenigen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge von Mathias erstmals nach Beginn des Atemzyklus minimal ist.

2) Ermitteln Sie t_2 (in s).

t_2 = ________________________________ s [0/1 P.]

b) Zu Beginn einer Einatmungsphase befinden sich 3,5 Liter Luft in der Lunge von Mathias.

1) Interpretieren Sie die nachstehende Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$\int_0^{2,5} f(t)\,\mathrm{d}t + 3,5 \approx 4,29$ *[0/1 P.]*

Die Funktion V beschreibt das Volumen $V(t)$ der eingeatmeten Luft von Mathias während einer Einatmungsphase in Abhängigkeit von der Zeit t (Beginn der Einatmungsphase bei $t = 0$ und $V(0) = 0$, t in s, $V(t)$ in L).

2) Ergänzen Sie die beiden fehlenden Zahlen in der nachstehenden Funktionsgleichung von V.

$V(t) = -0,4 \cdot \cos(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot t) + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ *[0/½/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $t_1 = \frac{6 \cdot \pi}{5} = 3{,}76...$
$t_1 = 3{,}76...$ s

a2) $t_2 = \frac{8 \cdot \pi}{5} = 5{,}02...$
$t_2 = 5{,}02...$ s

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_2.

b1) 2,5 s nach Beginn der Einatmungsphase befinden sich rund 4,29 Liter Luft in der Lunge von Mathias.

b2) $V(t) = -0{,}4 \cdot \cos(1{,}25 \cdot t) + 0{,}4$

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das Ergänzen der beiden richtigen Zahlen, ein halber Punkt für nur eine richtige Zahl.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm*

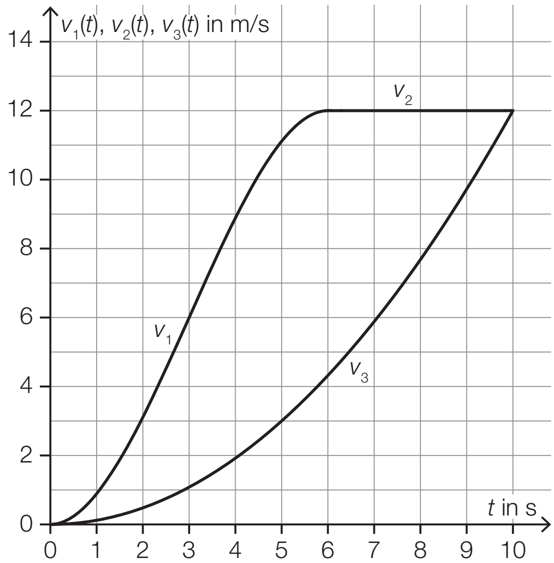
Aufgabennummer: 2_103	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Die Geschwindigkeiten von 2 PKWs (PKW *A* und PKW *B*) werden als Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit modelliert. Im unten stehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm sind die zugehörigen Graphen dargestellt. Die Zeit t wird in Sekunden angegeben, die Geschwindigkeiten werden in m/s angegeben.

PKW *A* und PKW *B* starten zum Zeitpunkt $t = 0$ aus dem Stillstand. Sie haben beide zum Zeitpunkt $t = 10$ eine Geschwindigkeit von 12 m/s.

PKW *A* bewegt sich für $t \in [0; 6]$ mit der Geschwindigkeit $v_1(t)$ und für $t \in [6; 10]$ mit der konstanten Geschwindigkeit $v_2(t)$.

PKW *B* bewegt sich für $t \in [0; 10]$ mit der Geschwindigkeit $v_3(t) = 0{,}12 \cdot t^2$.



Aufgabenstellung:

a) Im Zeitintervall [0; 6] legt PKW *A* eine Strecke von 36 m zurück.
Im Zeitintervall $[0; t_1]$ mit $6 \leq t_1 \leq 10$ legt PKW *A* eine Strecke mit der Länge d zurück (d in m).

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

1) Geben Sie d in Abhängigkeit von t_1 an.

d = ____

Im Zeitintervall [0; 10] legt PKW A eine längere Strecke als PKW B zurück.

2) Berechnen Sie, um wie viele Meter diese Strecke länger ist.

b) Für PKW A gilt:

- Zum Zeitpunkt $t = 6$ beträgt die Geschwindigkeit 12 m/s.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Beschleunigung 0 m/s².
- Zum Zeitpunkt $t = 3$ hat die Beschleunigung ihren maximalen Wert.

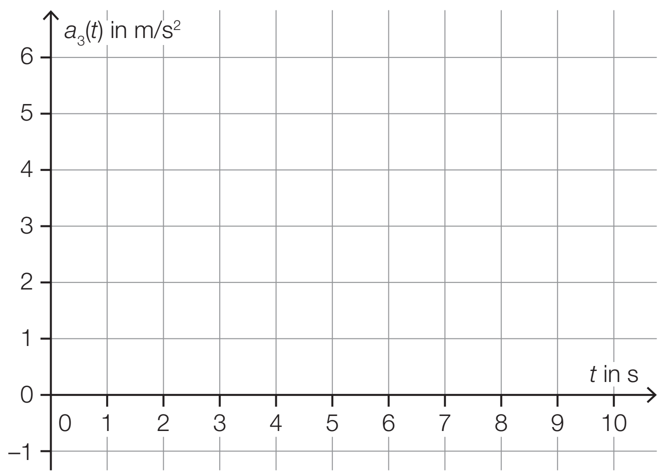
Für die Funktion $v_1\colon [0; 6] \to \mathbb{R}$ gilt:

$v_1(t) = p \cdot t^3 + q \cdot t^2 + r \cdot t$ für alle $t \in [0; 6]$ mit $p, q, r \in \mathbb{R}$

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen auf, mit dem die Koeffizienten p, q und r berechnet werden können.

c) Die Beschleunigung von PKW B wird im Zeitintervall [0; 10] durch die Funktion a_3 in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben (t in s, $a_3(t)$ in m/s²).

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Beschleunigungsfunktion a_3 ein.



Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $d = 36 + \int_6^{t_1} v_2(t)\,\mathrm{d}t$

oder:

$d = 36 + 12 \cdot (t_1 - 6)$

a2) $36 + 12 \cdot 4 - \int_0^{10} 0{,}12 \cdot t^2\,\mathrm{d}t = 44$

Die Strecke ist um 44 m länger.

b) Lösungserwartung:

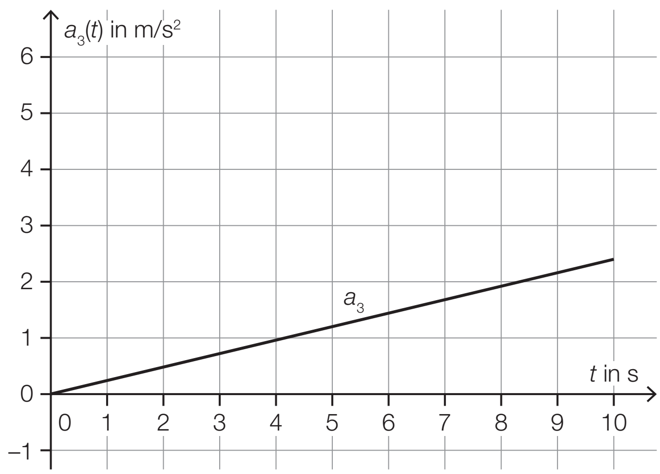
I: $v_1(6) = 12$
II: $v_1'(0) = 0$
III: $v_1''(3) = 0$

oder:

I: $216 \cdot p + 36 \cdot q + 6 \cdot r = 12$
II: $r = 0$
III: $18 \cdot p + 2 \cdot q = 0$

c) Lösungserwartung:

c1)



Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems mit drei Gleichungen, ein halber Punkt für nur zwei richtige Gleichungen.

c1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.

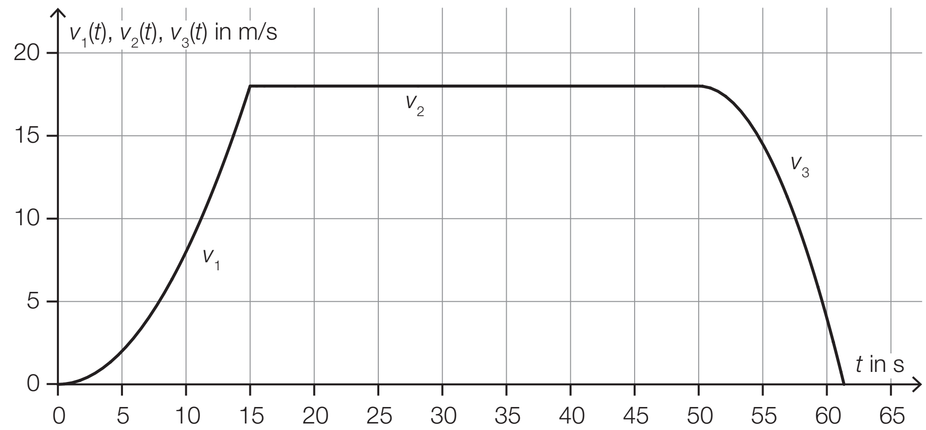
Wiener U-Bahn

Aufgabennummer: 2_018	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die Wiener U-Bahn-Linie U2 verkehrt zwischen den Stationen *Karlsplatz* und *Seestadt* und überquert dabei die Donau. Zwischen den beiden Stationen *Donaumarina* und *Donaustadtbrücke* verläuft die Strecke nahezu geradlinig und die U-Bahn benötigt für diese rund eine Minute.
Die Geschwindigkeit einer U-Bahn zwischen diesen beiden Stationen lässt sich modellhaft durch drei (abschnittsweise definierte) Funktionen beschreiben.

- $v_1(t) = 0{,}08 \cdot t^2$ $[0; 15)$
- $v_2(t) = 18$ $[15; 50)$
- $v_3(t) = -0{,}14 \cdot (t - 50)^2 + 18$ $[50; 61{,}34]$

Die Zeit t ist dabei in Sekunden, die Geschwindigkeit v in m/s angegeben. Die Graphen dieser Funktionen sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie die Länge derjenigen Strecke, die die U-Bahn im Zeitintervall [15; 50] zurücklegt.

Die Funktion v_3 modelliert den Bremsweg.

2) Erklären Sie, wie eine Änderung des Wertes –0,14 auf –0,2 den Bremsvorgang beeinflusst.

b) 1) Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung der U-Bahn vom Losfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit.

2) Erklären Sie, warum der Verlauf des Graphen im Intervall [14; 16] meist nicht der Realität entspricht.

Lösungserwartung

a1) $35 \cdot 18 = 630$

Im Zeitintervall [15; 50] legt die U-Bahn 630 m zurück.

a2) Der Bremsvorgang würde „stärker“ erfolgen, die U-Bahn würde also schneller zum Stillstand kommen.

b1) $\frac{v_1(15) - v_1(0)}{15 - 0} = \frac{18}{15} = 1{,}2$

Die mittlere Beschleunigung beträgt 1,2 m/s^2.

b2) Der Knick beim Übergang von v_1 auf v_2 bewirkt, dass die Fahrgäste einen starken „Ruck“ (eine sprunghafte Änderung der Beschleunigung) verspüren, der meist nicht der Realität entspricht.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge.
a2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der mittleren Beschleunigung.
b2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gewitter

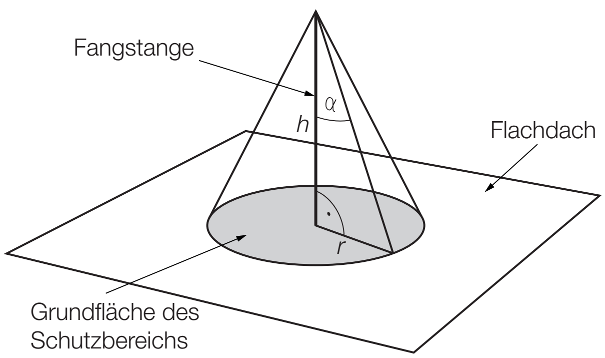
Aufgabennummer: 2_065	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AN 4.3, WS 2.3	

a) In drei verschiedenen Städten – *A*, *B* und *C* – werden am Nachmittag laut Wetterprognose unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten Gewitter auftreten:

Stadt	*A*	*B*	*C*
Wahrscheinlichkeit für ein Gewitter	50 %	80 %	80 %

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftreten wird.

b) Um Gebäude vor Blitzeinschlägen zu schützen, werden Blitzableiter verwendet. Dabei wird eine Metallstange, die sogenannte *Fangstange*, auf dem Gebäude senkrecht montiert. Der höchste Punkt einer solchen Fangstange kann als Spitze eines drehkegelförmigen Schutzbereichs angesehen werden. Alle Objekte, die sich vollständig innerhalb dieses Schutzbereichs befinden, sind vor direkten Blitzeinschlägen geschützt.



h … Höhe der Fangstange
α … Schutzwinkel
r … Radius der Grundfläche des Schutzbereichs

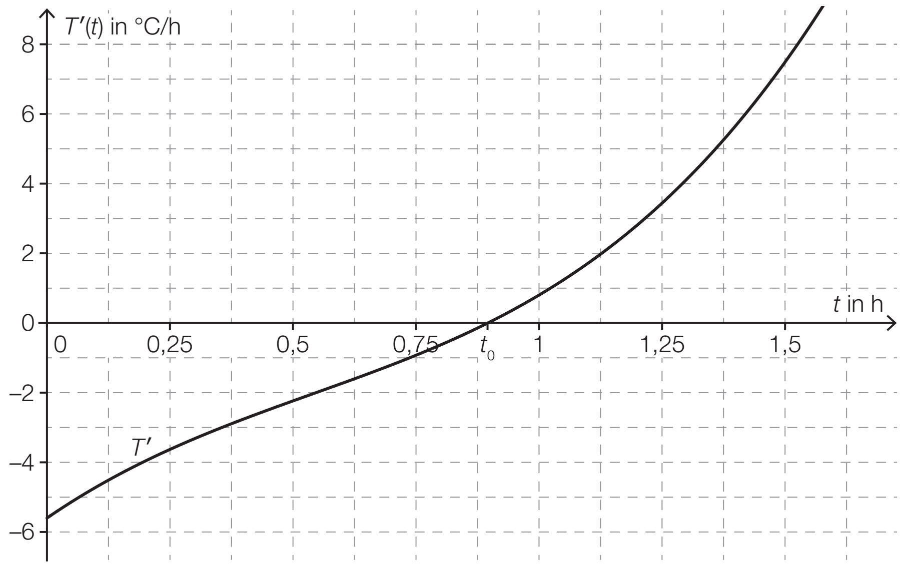
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Radius r aus α und h.

$r =$ ____

Auf einem Flachdach ist eine 2 m hohe Fangstange senkrecht montiert. 3 m vom Fußpunkt der Fangstange entfernt steht eine 1,2 m hohe Antenne senkrecht auf dem Flachdach. Der Schutzwinkel beträgt 77°.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich diese Antenne vollständig innerhalb des Schutzbereichs befindet.

c) Während eines Nachmittags, an dem es ein Gewitter gab, wurde die Veränderung der Temperatur ermittelt. Die Funktion T' beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



t … Zeit seit Beginn der Messung in h
$T'(t)$ … momentane Änderungsrate der Temperatur zur Zeit t in °C/h

Die absolute Temperaturänderung in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ kann durch das Integral $\int_{t_1}^{t_2} T'(t)\,dt$ berechnet werden.

1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5].

Lösungserwartung

a1) $1 - 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}68$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftritt, beträgt 68 %.

b1) $r = h \cdot \tan(\alpha)$

b2) $\frac{3}{\tan(77°)} = 0{,}69...$

$2 - 0{,}69... = 1{,}30...$

In einer Entfernung von 3 m von der Fangstange hat der Schutzbereich eine Höhe von rund 1,3 m.
Die 1,2 m hohe Antenne befindet sich daher zur Gänze im Schutzbereich.

Auch eine Überprüfung mithilfe einer exakten Zeichnung ist als richtig zu werten.

c1) Die dem Integral $\int_{1,25}^{1,5} T'(t)\,dt$ entsprechende Fläche wird von rund 10,5 Kästchen mit einem Flächeninhalt von jeweils 0,125 überdeckt.
Gesamtflächeninhalt: $10{,}5 \cdot 0{,}125 \approx 1{,}3$

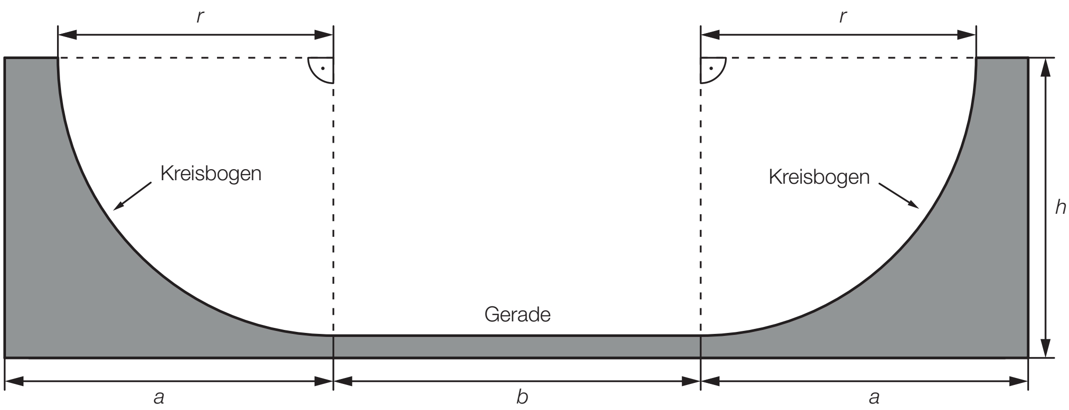
Die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5] beträgt rund 1,3 °C.
Toleranzintervall: [1,2 °C; 1,45 °C]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Skatepark

Aufgabennummer: 2_082	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3	

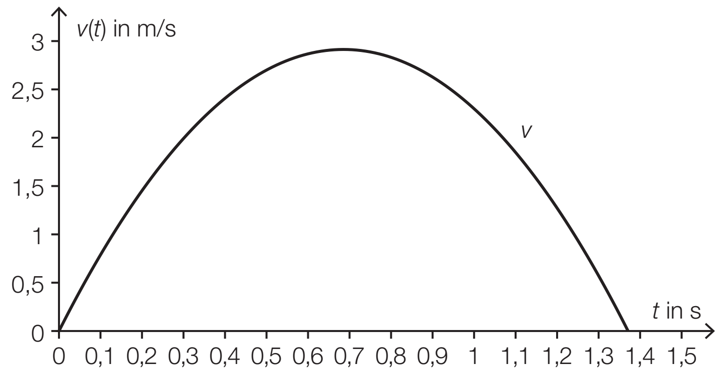
a) Folgende Grafik zeigt den Entwurf einer Halfpipe im Querschnitt:



1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts A der grauen Fläche (Querschnittsfläche) aus a, b, h und r.

A = ____

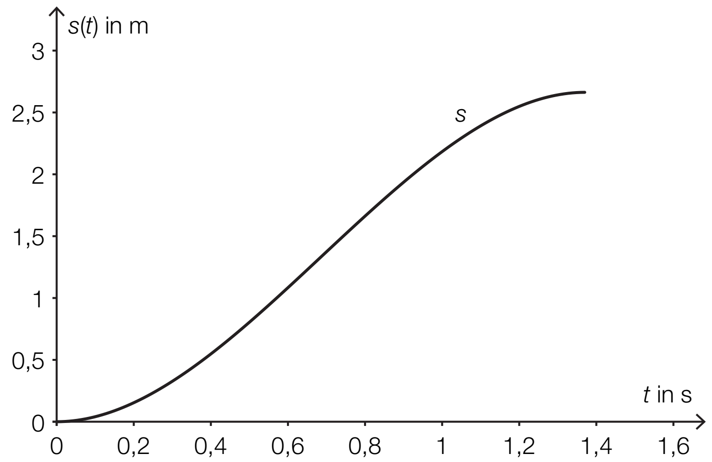
b) Die Geschwindigkeit einer Skaterin in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion v beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Weg, den die Skaterin zwischen $t = 0{,}5$ s und $t = 1$ s zurücklegt.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von $v'(0{,}3)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Der zurückgelegte Weg eines Skaters in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion s beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

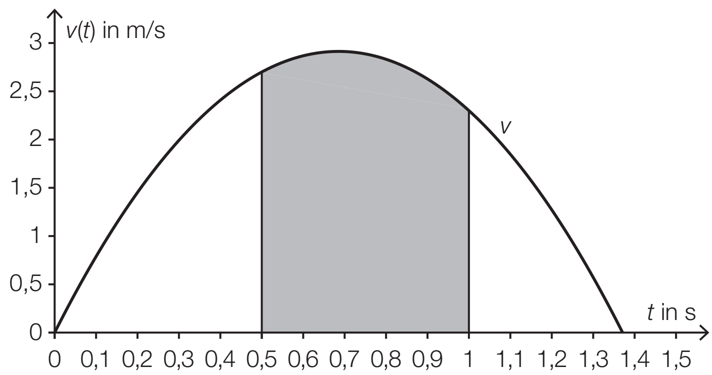


1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit zwischen $t = 0{,}6$ s und $t = 1{,}2$ s.

Lösungserwartung

a1) $A = (2 \cdot a + b) \cdot h - b \cdot r - \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

b1)



b2) $v'(0{,}3)$ ist die Beschleunigung (in m/s²) der Skaterin zum Zeitpunkt $t = 0{,}3$ s.

c1) $\bar{v} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 2,5 m/s.
Toleranzintervall für $\bar{v}$: [2,1; 2,9]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Sicherheitskontrolle*

Aufgabennummer: 2_096	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: WS 2.3, WS 3.1, WS 3.2, FA 1.5, AN 4.3

Beim Einlass in ein bestimmtes Stadion findet bei einer Veranstaltung eine maximal dreistufige Sicherheitskontrolle bei Personen statt, um mitgeführte Gegenstände zu kontrollieren und unzulässige Gegenstände zu erfassen. Liefert die erste Stufe dieser Sicherheitskontrolle kein eindeutiges Ergebnis, dann wird die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle durchgeführt. Liegt dann noch immer kein eindeutiges Ergebnis vor, kommt die dritte Stufe der Sicherheitskontrolle zum Einsatz.

Die erste und die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle dauern jeweils 15 s, die dritte Stufe dauert 300 s. Ein eindeutiges Ergebnis liefert dabei die erste Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, die zweite Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.

Aufgabenstellung:

a) Die Zufallsvariable X beschreibt die Dauer d (in s) der Sicherheitskontrolle bei einer Person. Wartezeiten, die eventuell auftreten können, werden nicht berücksichtigt.

1) Ergänzen Sie in der nachstehenden Tabelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X.

d			
$P(X = d)$			

2) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

b) Der Wert p gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person einen unzulässigen Gegenstand mit sich führt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen beide einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen, beträgt 10 %.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen mindestens 5 Personen einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert), Maturatermin: 16. September 2020

c) Die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion kann mithilfe der Funktion A mit $A(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $0 \leq t \leq 90$ in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden, wobei zum Zeitpunkt $t = 0$ der Einlass ins Stadion beginnt (t in Minuten, $A(t)$ in Personen pro Minute).

Zu Beginn des Einlasses ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion gleich 0.
45 min nach Beginn des Einlasses ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion maximal. Zu diesem Zeitpunkt beträgt sie 15 Personen pro Minute.

1) Berechnen Sie die Werte von a, b und c.

2) Geben Sie die Anzahl der Personen an, die insgesamt bis zum Zeitpunkt $t = 90$ ins Stadion gekommen sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1)

d	15	30	330
$P(X = d)$	0,9	$0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06$	$0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$

a2) $E(X) = 15 \cdot 0{,}9 + 30 \cdot 0{,}06 + 330 \cdot 0{,}04 = 28{,}5$

b) Lösungserwartung:

b1) $p^2 = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}31622... \approx 0{,}3162$

b2) Y ... Anzahl der Personen, die einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen
Y ist binomialverteilt mit $n = 10$, $p = 0{,}31622...$
$P(Y \geq 5) = 0{,}1794... \approx 0{,}179$

c) Lösungserwartung:

c1) $A(0) = 0,\; A(45) = 15,\; A'(45) = 0$

$a = -\frac{1}{135},\; b = \frac{2}{3},\; c = 0$

c2) $\int_0^{90} A(t)\,\mathrm{d}t = 900$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Ergänzung der richtigen Werte in der Tabelle.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für die Angabe der drei richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ozonmessungen*

Aufgabennummer: 2_064	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.2, FA 3.4, FA 4.3, AN 4.3	

Das Gas Ozon hat Auswirkungen auf unsere Gesundheit. Aus diesem Grund werden in Messstationen und mithilfe von Wetterballons die jeweiligen Ozonkonzentrationen in unterschiedlichen Atmosphärenschichten gemessen.

Aufgabenstellung:

a) Auf der Hohen Warte in Wien befindet sich in 220 m Seehöhe eine Wetterstation. Hier wird für eine Messreihe ein Wetterballon mit einem Ozonmessgerät gestartet. Das Ozonmessgerät beginnt mit seinen Aufzeichnungen, wenn der Wetterballon eine Seehöhe von 2 km erreicht hat.

Nehmen Sie an, dass der Wetterballon (mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s) lotrecht in die Höhe steigt und dabei gleichmäßig mit 0,125 m/s² beschleunigt, bis er zu einem Zeitpunkt t_1 eine Geschwindigkeit von 6 m/s erreicht. Die Zeit wird dabei in Sekunden und die Seehöhe in Metern gemessen.

1) Ermitteln Sie die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1.

Ab dem Zeitpunkt t_1 steigt der Wetterballon mit der konstanten Geschwindigkeit von 6 m/s lotrecht weiter.

2) Ermitteln Sie, wie viele Sekunden nach dem Start das Messgerät mit seinen Aufzeichnungen beginnt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

b) Ein Wetterballon hat bei einem Luftdruck von 1 013,25 hPa ein Volumen von 6,3 m³.
Durch die Abnahme des Luftdrucks während des Aufstiegs dehnt sich der Wetterballon immer weiter aus und wird näherungsweise kugelförmig. Bei einem Durchmesser von *d* Metern zerplatzt er.

Der Luftdruck kann in Abhängigkeit von der Seehöhe *h* durch eine Funktion *p* modelliert werden. Dabei ordnet die Funktion *p* der Seehöhe *h* den Luftdruck *p*(*h*) zu.

Es gilt: $p(h) = 1\,013{,}25 \cdot \left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}$ mit h in m, $p(h)$ in hPa

Gehen Sie davon aus, dass der Luftdruck *p*(*h*) und das Volumen *V*(*h*) des Wetterballons indirekt proportional zueinander sind. Dabei ist *V*(*h*) das Volumen des Wetterballons in der Seehöhe *h*.

1) Drücken Sie das Volumen *V*(*h*) durch die Seehöhe *h* aus.

   $V(h) =$ ____ mit h in m, $V(h)$ in m³

Der Wetterballon zerplatzt in einer Seehöhe von $h = 27\,873{,}6$ m.

2) Berechnen Sie den Durchmesser *d* des Wetterballons in Metern, bei dem dieser zerplatzt.

c) Das sogenannte *Gesamtozon* ist ein Maß für die Dicke der Ozonschicht und wird in sogenannten *Dobson-Einheiten* (DU) angegeben.

Die von einem Wetterballon aufgezeichneten Messdaten können modellhaft durch eine quadratische Funktion f beschrieben werden. Dabei ordnet f der Höhe h die Gesamtozondichte $f(h)$ zu (h in km, $f(h)$ in DU/km).

Der höchste Wert von 36 DU/km wird in einer Seehöhe von 22 km gemessen. In einer Seehöhe von 37 km beträgt der gemessene Wert 1 DU/km.

1) Ermitteln Sie $f(h)$.

$f(h) =$ ____

In der Erdatmosphäre entspricht 1 DU einer 0,01 mm dicken Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche. Die Dicke derjenigen Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche, die dem Gesamtozon zwischen 7 km und 37 km Seehöhe entspricht, ist $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h$.

2) Berechnen Sie die Dicke dieser Schicht.

Dicke dieser Schicht: ____ mm

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$v(t) = 0{,}125 \cdot t$

t ... Zeit in s

$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Wetterballons in m/s zum Zeitpunkt t

$v(t_1) = 6 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{6}{0{,}125} = 48$

$\int_0^{48} v(t)\,\mathrm{d}t = 144$

Die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1 beträgt 144 m.

a2) mögliche Vorgehensweise:

verbleibende senkrechte Strecke bis zum Start der Messung:

$2\,000 - 220 - 144 = 1\,636$

$\frac{1\,636}{6} + 48 = 320{,}\dot{6}$

Das Messgerät beginnt seine Aufzeichnungen ca. 321 s nach dem Start.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $V(h) = \frac{6{,}3}{\left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}}$ mit h in m, $V(h)$ in m³

b2) mögliche Vorgehensweise:

$V(27\,873{,}6) = 1\,150{,}351...$

$\frac{4 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \pi}{3} = 1\,150{,}351... \quad \Rightarrow \quad d = 13{,}0... \approx 13$

Der Durchmesser des Wetterballons, bei dem dieser zerplatzt, beträgt ca. 13 m.

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:

$f(h) = a \cdot h^2 + b \cdot h + c$

$f(37) = 1$

$f(22) = 36$

$f'(22) = 0$

$f(h) = -\frac{7}{45} \cdot h^2 + \frac{308}{45} \cdot h - \frac{1768}{45}$

c2) $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h = 730$

$730 \cdot 0{,}01 = 7{,}3$

Dicke dieser Schicht: 7,3 mm

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angegeben sein muss.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angegeben sein muss.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

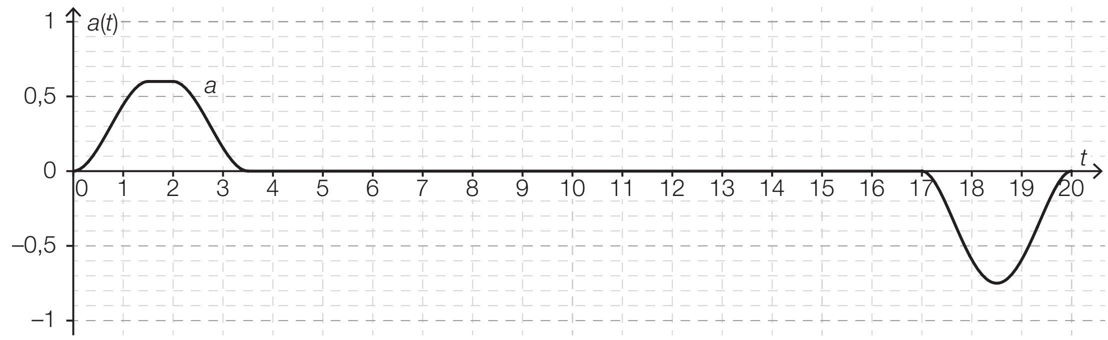
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufzugsfahrt*

Aufgabennummer: 2_059	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, AN 1.3, AN 4.3	

Die Geschwindigkeiten von Personenaufzügen können sich je nach Bauart und Gebäudehöhe sehr stark unterscheiden.

Die nachstehende Abbildung zeigt das Zeit-Beschleunigung-Diagramm für eine 20 s dauernde Aufzugsfahrt. Zu Beginn und am Ende der Fahrt steht der Aufzug still. Die Zeit t wird in Sekunden, die Beschleunigung $a(t)$ in m/s² angegeben. Die Beschleunigungswerte wurden mithilfe eines Sensors ermittelt und der Verlauf der Beschleunigung wurde mit einer differenzierbaren Funktion a modelliert.



Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie für jeden im Folgenden genannten Abschnitt der dargestellten Aufzugsfahrt das entsprechende Zeitintervall an.

Aufzug bremst ab: ____________________

Aufzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit: ____________________

Kim behauptet, dass die Geschwindigkeit des Aufzugs im Zeitintervall [1,5 s; 2 s] konstant bleibt.

2) Geben Sie an, ob Kim recht hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

b) 1) Ermitteln Sie anhand der gegebenen Abbildung näherungsweise die Höchstgeschwindigkeit v_{max} während der dargestellten Aufzugsfahrt.

Der Graph der Funktion a schließt mit der t-Achse in den Zeitintervallen [0; 3,5] und [17; 20] jeweils ein Flächenstück ein.

2) Begründen Sie, warum im gegebenen Kontext die Inhalte dieser beiden Flächenstücke gleich groß sein müssen.

c) Ein Produzent von Aufzugsanlagen plant die Herstellung eines neuen Aufzugs.
Die Beschleunigung dieses Aufzugs wird in den ersten 3 Sekunden durch die differenzierbare Funktion $a_1\colon [0; 3] \to \mathbb{R}$ mit

$$a_1(t) = \begin{cases} 0{,}6 \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t) & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0{,}6 & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 0{,}6 \cdot (t - 3)^2 \cdot (2 \cdot t - 3) & \text{für } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

beschrieben (t in s, $a_1(t)$ in m/s²).

1) Berechnen Sie die Geschwindigkeitszunahme dieses Aufzugs im Zeitintervall [0; 3].

Für den Verlauf der Fahrt müssen bestimmte Bedingungen für die Beschleunigung eingehalten werden. Der sogenannte *Ruck*, die momentane Änderungsrate der Beschleunigung, soll bei einer Fahrt mit einem Aufzug Werte zwischen –1 m/s³ und 1 m/s³ annehmen.

2) Überprüfen Sie, ob dieser Aufzug bei $t = 1$ die angeführten Bedingungen für den Ruck einhält.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) Aufzug bremst ab: [17 s; 20 s]

Aufzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit: [3,5 s; 17 s]

a2) Kim hat nicht recht, da die Beschleunigung in diesem Zeitintervall konstant und positiv ist und somit die Geschwindigkeit gleichmäßig (linear) zunimmt.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $\frac{3{,}5 + 0{,}5}{2} \cdot 0{,}6 = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad v_{max} \approx 1{,}2$ m/s

b2) Die Inhalte der beiden Flächenstücke müssen gleich groß sein, da die Geschwindigkeitszunahme während der Beschleunigungsphase gleich groß wie die Geschwindigkeitsabnahme während des Abbremsvorgangs sein muss.

c) **Lösungserwartung:**

c1) $\int_0^1 0{,}6 \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t)\,dt + \int_1^2 0{,}6\,dt + \int_2^3 0{,}6 \cdot (t-3)^2 \cdot (2 \cdot t - 3)\,dt = 1{,}2$
Im Zeitintervall [0; 3] beträgt die Geschwindigkeitszunahme 1,2 m/s.

c2) mögliche Vorgehensweise:
$a_1'(t) = 0$ für alle $t \in [1; 2) \quad \Rightarrow \quad a_1'(1) = 0$
Zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt die momentane Änderungsrate der Beschleunigung 0 m/s³. Die angeführten Bedingungen sind bei $t = 1$ eingehalten.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Zeitintervalle.
Abweichungen von bis zu ±0,3 s bei den Intervallgrenzen sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [1 m/s; 1,4 m/s]
b2) Ein Punkt für eine richtige Begründung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [1,1; 1,3]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

Bremsvorgang*

Aufgabennummer: 2_051	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.2, AN 1.1, AN 3.2, AN 4.3	

Der Bremsweg s_B ist die Länge derjenigen Strecke, die ein Fahrzeug ab dem Wirksamwerden der Bremsen bis zum Stillstand zurücklegt. Entscheidend für den Bremsweg sind die Fahrgeschwindigkeit v_0 des Fahrzeugs zu Beginn des Bremsvorgangs und die Bremsverzögerung b. Der Bremsweg s_B kann mit der Formel $s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b}$ berechnet werden (v_0 in m/s, b in m/s², s_B in m).

Der Anhalteweg s_A berücksichtigt zusätzlich zum Bremsweg den während der Reaktionszeit t_R zurückgelegten Weg. Dieser sogenannte *Reaktionsweg* s_R kann mit der Formel $s_R = v_0 \cdot t_R$ berechnet werden (v_0 in m/s, t_R in s, s_R in m).

Der Anhalteweg s_A ist gleich der Summe aus Reaktionsweg s_R und Bremsweg s_B.

Aufgabenstellung:

a) 1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Fahrgeschwindigkeit v_0 in Abhängigkeit vom Bremsweg s_B und von der Bremsverzögerung b auf.

$v_0 =$ ____________________________________

2) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Der Reaktionsweg s_R ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Bremsweg s_B ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Bremsweg s_B ist indirekt proportional zur Bremsverzögerung b.	☐
Der Anhalteweg s_A ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Anhalteweg s_A ist direkt proportional zur Reaktionszeit t_R.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

b) Die oft in Fahrschulen verwendeten Formeln für die näherungsweise Berechnung des Reaktions- und des Bremswegs (jeweils in m) lauten:
$s_R = \frac{v_0}{10} \cdot 3$ und $s_B = \left(\frac{v_0}{10}\right)^2$ mit v_0 in km/h und s_R bzw. s_B in m

1) Zeigen Sie anhand geeigneter Umformungen, dass die für die näherungsweise Berechnung des Reaktionswegs verwendete Formel für eine Reaktionszeit von etwa einer Sekunde annähernd die gleichen Ergebnisse wie die Formel für s_R aus der Einleitung liefert.

2) Berechnen Sie, welcher Wert für die Bremsverzögerung bei der Näherungsformel für den Bremsweg angenommen wird.

c) Es kann eine Bremsverzögerung b von 8 m/s² bei trockener Fahrbahn, von 6 m/s² bei nasser Fahrbahn und von höchstens 4 m/s² bei Schneefahrbahn angenommen werden.

1) Geben Sie denjenigen Bruchteil an, um den bei gleicher Fahrgeschwindigkeit der Bremsweg bei nasser Fahrbahn länger als bei trockener Fahrbahn ist.

Ein Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 20$ m/s. Der Anhalteweg ist bei Schneefahrbahn länger als bei trockener Fahrbahn.

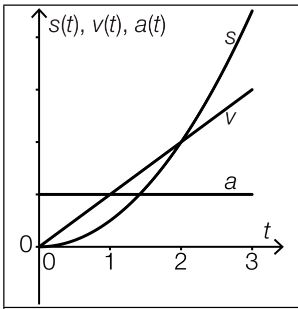
2) Ermitteln Sie unter der Annahme $t_R = 1$ s für diese beiden Fahrbahnzustände den Mindestwert für die absolute Zunahme des Anhaltewegs.

d) Das Wirksamwerden der Bremsen eines Fahrzeugs beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.
Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Fahrzeugs kann für das Zeitintervall [0; 3] durch die Funktion v modelliert werden, die Beschleunigung $a(t)$ durch die Funktion a und der in diesem Zeitintervall zurückgelegte Weg $s(t)$ durch die Funktion s ($v(t)$ in m/s, $a(t)$ in m/s², $s(t)$ in m, t in s).

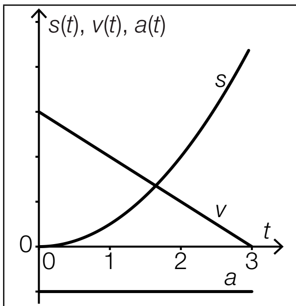
1) Interpretieren Sie die Bedeutung des bestimmten Integrals $\int_0^3 v(t)\mathrm{d}t$ im gegebenen Kontext.

Jede der sechs nachstehenden Abbildungen zeigt – jeweils im Zeitintervall [0; 3] – den Graphen einer Beschleunigungsfunktion a, den Graphen einer Geschwindigkeitsfunktion v und den Graphen einer Wegfunktion s.

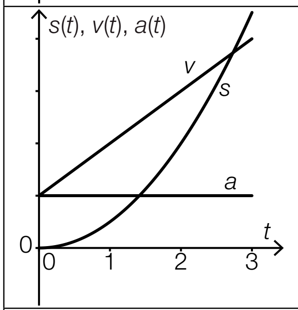
2) Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die drei zusammengehörige Graphen eines drei Sekunden dauernden Bremsvorgangs zeigt.



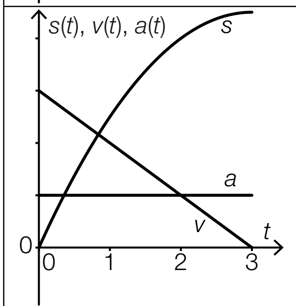
☐



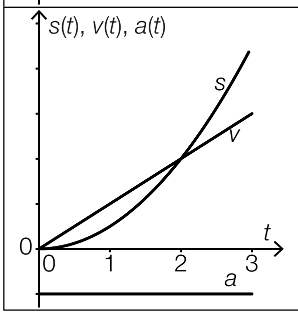
☐



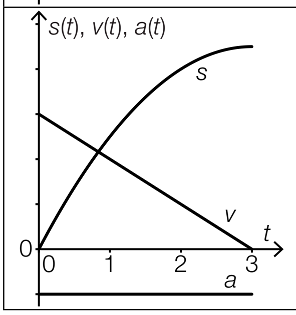
☐



☐



☐



☐

Lösungserwartung

a1) $v_0 = \sqrt{2 \cdot b \cdot s_B}$

a2)

Der Reaktionsweg s_R ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☒
Der Bremsweg s_B ist indirekt proportional zur Bremsverzögerung b.	☒

b1) mögliche Umformungen:

$s_R = v_0 \cdot t_R$

Für v_0 in m/s und $t_R = 1$ Sekunde gilt: $s_R = v_0$

Für v_0 in km/h und $t_R = 1$ Sekunde gilt: $s_R = \frac{v_0}{3{,}6} = v_0 \cdot 0{,}278... \approx v_0 \cdot 0{,}3 = \frac{v_0}{10} \cdot 3$

Daher liefern diese beiden Formeln annähernd die gleichen Ergebnisse.

b2) mögliche Vorgehensweise:

$s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b}$ mit v_0 in m/s $\Rightarrow$ $s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b} \cdot \frac{1}{3{,}6^2} = \frac{v_0^2}{25{,}92 \cdot b}$ mit v_0 in km/h,

$\frac{v_0^2}{25{,}92 \cdot b} = \frac{v_0^2}{100} \Rightarrow b \approx 3{,}9$ m/s²

Bei der Näherungsformel wird eine Bremsverzögerung von ca. 3,9 m/s² angenommen.

c1) $\frac{\frac{v_0^2}{2 \cdot 6}}{\frac{v_0^2}{2 \cdot 8}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ Bei nasser Fahrbahn ist der Bremsweg um $\frac{1}{3}$ länger als der Bremsweg bei trockener Fahrbahn.

c2) mögliche Vorgehensweise:

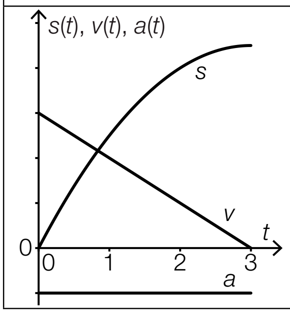
Anhalteweg bei trockener Fahrbahn: $s_A = 20 \cdot 1 + \frac{20^2}{2 \cdot 8} = 45$ m

Mindestwert für den Anhalteweg bei Schneefahrbahn: $s_A = 20 \cdot 1 + \frac{20^2}{2 \cdot 4} = 70$ m

Der Anhalteweg nimmt (bei $v_0 = 20$ m/s und $t_R = 1$ s) bei Schneefahrbahn um mindestens 25 m zu.

d1) Das bestimmte Integral $\int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t$ beschreibt den zurückgelegten Weg (in Metern) im Zeitintervall [0; 3].

d2)

	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

b1) Ein Punkt für die Angabe geeigneter Umformungen.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s²" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,8 m/s²; 4 m/s²]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

d1) Ein Punkt für eine (singgemäß) richtige Interpretation.
d2) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Abbildung angekreuzt ist.

Wings for Life World Run*

Aufgabennummer: 2_048	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 5.3, AN 1.1, AN 4.3, WS 1.1	

Der *Wings for Life World Run* ist ein in vielen Ländern zur gleichen Zeit stattfindender Volkslauf. Eine Besonderheit dieses Laufs ist, dass keine vorgegebene Distanz zurückgelegt werden muss.

Es starten alle Läufer/innen weltweit gleichzeitig um 11:00 UTC (koordinierte Weltzeit). Vom jeweiligen Startpunkt startet 30 Minuten später ein Auto, das sogenannte *Catcher-Car*, und fährt die Strecke ab. Dabei erhöht sich die Geschwindigkeit des Autos nach einem vorgegebenen Zeitplan. Für jede teilnehmende Person endet der Lauf, wenn sie vom Catcher-Car überholt wird. Das Ergebnis für eine teilnehmende Person ist die Länge derjenigen Strecke, die diese Person bis zum Zeitpunkt des Überholens durch das Catcher-Car zurückgelegt hat.

Für die Geschwindigkeiten des Catcher-Cars wurden bis zum Jahr 2018 folgende Werte vorgegeben (diese dienen modellhaft als Grundlage für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenstellungen):

Uhrzeit	Geschwindigkeit
von 11:30 bis 12:30	15 km/h
von 12:30 bis 13:30	16 km/h
von 13:30 bis 14:30	17 km/h
von 14:30 bis 15:30	20 km/h
von 15:30 bis 16:30	20 km/h
ab 16:30	35 km/h

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Eine Person läuft mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie vom Catcher-Car überholt wird. Diese Person wird während der 15-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.
Die Laufzeit t der Person hängt von der Geschwindigkeit v der Person ab.

Geben Sie einen Term an, mit dem t bei Kenntnis von v berechnet werden kann (mit t in h und v in km/h)!

t = ____

Im Jahr 2016 betrug die (konstante) Geschwindigkeit einer Person bei diesem Lauf 9 km/h. Ein Jahr später war ihre (konstante) Geschwindigkeit bei diesem Lauf um 10 % höher.

Geben Sie an, um wie viel Prozent sich dadurch die Streckenlänge erhöhte, die diese Person zurücklegte, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde!

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. _______________ %.

b) Eine bestimmte gut trainierte Person läuft während der ersten Stunde mit einer konstanten Geschwindigkeit und benötigt dabei pro Kilometer 5 Minuten. Anschließend wird sie langsamer. Ab diesem Zeitpunkt (also für $t \geq 1$) kann ihre Geschwindigkeit mithilfe der Funktion v in Abhängigkeit von der gelaufenen Zeit modelliert werden. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ gilt:

$v(t) = 12 \cdot 0{,}7^{t-1}$ mit t in h und $v(t)$ in km/h

Deuten Sie den Ausdruck $12 + \int_1^b v(t)\,\mathrm{d}t$ mit $b \geq 1$ im gegebenen Kontext!

Diese Person wird während der 16-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der das Catcher-Car diese Person überholt!

Uhrzeit: __ __ : __ __ UTC

c) Ein Läufer wird während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Juri schließt aus dieser Information, dass dieser Läufer nicht weniger als 40 km und nicht mehr als 88 km zurückgelegt hat, bis er vom Catcher-Car überholt wurde. Leo meint zu dieser Behauptung: „Deine Aussage ist wahr, aber ich könnte ein kleineres Intervall nennen, das ebenso zutrifft.“

Geben Sie an, ob die Behauptung von Leo stimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

In Wien legte 2017 die schnellste Teilnehmerin eine Strecke von 51,72 km zurück, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde.

Berechnen Sie ihre durchschnittliche Geschwindigkeit $\overline{v}$!

$\overline{v}$ = ____ km/h

Lösungserwartung

a) möglicher Term:

$v \cdot t = 15 \cdot (t - 0{,}5) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7{,}5}{15 - v}$

mögliche Vorgehensweise:

$s = v \cdot t$

$s = v \cdot \frac{7{,}5}{15 - v}$

$v = 9$ km/h: $s = 11{,}25$ km

$v = 9{,}9$ km/h: $s \approx 14{,}559$ km

$\frac{14{,}559}{11{,}25} \approx 1{,}294$

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. 29,4 %.

b) mögliche Deutung:

Der Ausdruck beschreibt die Streckenlänge, die die Person bis zum Zeitpunkt $t = b$ zurücklegt.

mögliche Vorgehensweise:

$12 + \int_1^b v(t)\,\mathrm{d}t = 15 + 16 \cdot (b - 1{,}5) \quad \Rightarrow \quad b \approx 1{,}878$

Die Laufzeit der Person bis zum Zeitpunkt des Überholens beträgt ca. 1 h 53 min.
Uhrzeit: 12:53 UTC

c) Die Behauptung von Leo stimmt.

mögliche Begründung:

Das Catcher-Car legt bis zum Beginn der 20-km/h-Phase 48 km zurück, daher muss der Läufer zumindest 48 km zurückgelegt haben. Das Catcher-Car legt innerhalb der 20-km/h-Phase weitere 40 km zurück, bevor es die 35-km/h-Phase startet. Daher legt der Läufer höchstens 88 km zurück, wenn er in dieser Phase überholt wird. Somit ist es Leo möglich, ein kleineres Intervall anzugeben. (Das kleinstmögliche Intervall beträgt [48 km; 88 km].)

Die Teilnehmerin wurde während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

$t = 3{,}5 + \frac{3{,}72}{20} = 3{,}686$ h

$\bar{v} = \frac{51{,}72}{3{,}686} \approx 14{,}03$ km/h

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [29 %; 30 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für eine richtige Deutung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch 12:52 UTC als richtig zu werten ist.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Behauptung von Leo stimmt, und eine richtige Begründung. Die Begründung ist ausreichend, wenn aus ihr klar hervorgeht, dass die Breite des Intervalls durch Vergrößerung der linken Intervallgrenze verringert werden kann, die Angabe eines konkreten Intervalls ist dafür nicht erforderlich.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [13,5; 14,5]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

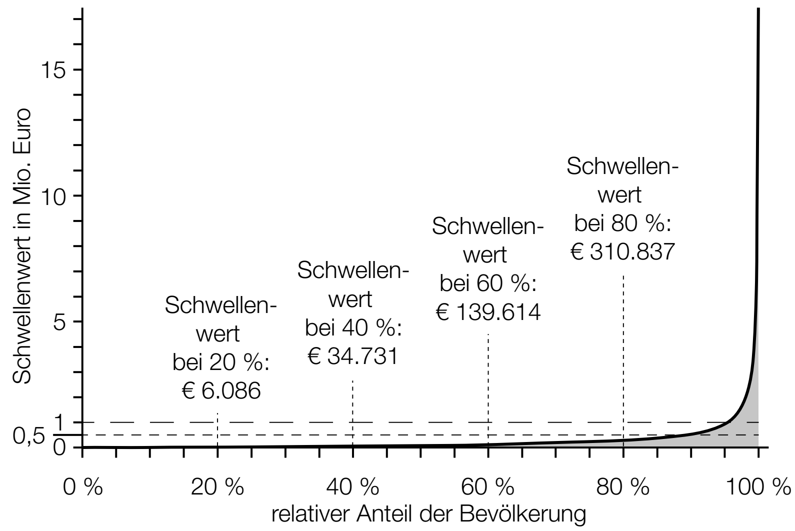
Vermögensverteilung*

Aufgabennummer: 2_043	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 4.3, WS 1.1	

Das gesamte Vermögen eines Landes ist häufig sehr ungleich auf die Bevölkerung verteilt. Eine im Jahr 2012 durchgeführte Erhebung der Europäischen Zentralbank (EZB) lieferte Daten für eine Abschätzung, welcher Anteil der österreichischen Bevölkerung über welches Vermögen (in Millionen Euro) verfügt. Die Ergebnisse der darauf basierenden Studie sind in Abbildung 1 dargestellt. Beispielsweise bedeutet der Schwellenwert bei 20 %, dass die vermögensschwächsten 20 % der österreichischen Bevölkerung ein Vermögen von maximal € 6.086 besitzen.
Im Jahr 2012 betrug die Bevölkerungszahl von Österreich ca. 8,45 Millionen Einwohner/innen.

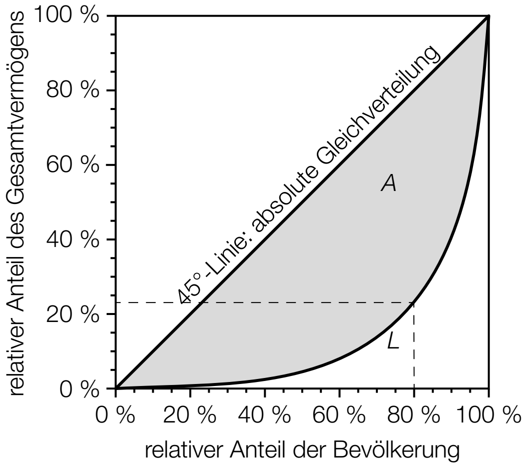
Die sogenannte *Lorenz-Kurve L* (vgl. Abbildung 2) veranschaulicht, welcher relative Anteil der Bevölkerung welchen relativen Anteil des Gesamtvermögens besitzt. So besitzen laut der EZB-Studie die vermögensschwächsten 80 % der österreichischen Bevölkerung nur ca. 23 % des gesamten Vermögens.

Abbildung 1:



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Abbildung 2:



Quelle: Eckerstorfer, Paul, Johannes Halak et al.: *Vermögen in Österreich. Bericht zum Forschungsprojekt „Reichtum im Wandel"*. Linz: Johannes-Kepler-Universität Linz 2013, S. 12–13. http://media.arbeiterkammer.at/PDF/Vermoegen_in_Oesterreich.pdf [17.10.2014] (adaptiert).

Der Gini-Koeffizient ist ein Maß für die Ungleichverteilung des Vermögens in einem Land. Er entspricht dem Quotienten aus dem Inhalt der markierten Fläche A (zwischen der 45°-Linie und der Lorenz-Kurve L) und dem Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, das durch die Eckpunkte (0 %|0 %), (100 %|0 %) und (100 %|100 %) festgelegt ist.
Laut EZB-Studie hatte der Gini-Koeffizient für Österreich für das Jahr 2012 den Wert 0,76.

Aufgabenstellung:

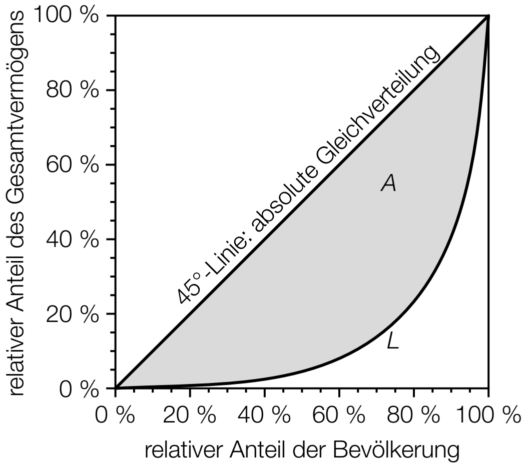
a) Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1, wie viele Personen in Österreich im Jahr 2012 ein Vermögen von mindestens einer Million Euro besaßen!

Berechnen Sie unter der vereinfachenden Annahme, dass die Schwellenwerte im Intervall [20 %; 40 %] annähernd linear zunehmen, einen Näherungswert des Schwellenwerts bei 25 %!

b) Ermitteln Sie, welchen relativen Anteil am Gesamtvermögen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen!

Laut einer Studie der Universität Linz aus dem Jahr 2013 besitzen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung einen deutlich größeren relativen Anteil am Gesamtvermögen, als es in der EZB-Studie behauptet wurde.

Unter Berücksichtigung der Studie der Universität Linz erhält man eine andere Lorenz-Kurve L^* als die abgebildete Lorenz-Kurve L. Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung einen möglichen Verlauf einer solchen Lorenz-Kurve L^*!



c) Die Lorenz-Kurve wird im Intervall [0; 1] durch eine reelle Funktion in Abhängigkeit von x modelliert, wobei x den relativen Anteil der Bevölkerung angibt.

Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten für ein Land S, dessen Lorenz-Kurve für das Jahr 2012 durch die Funktion L_1 mit $L_1(x) = 0{,}9 \cdot x^5 + 0{,}08 \cdot x^2 + 0{,}02 \cdot x$ im Intervall [0; 1] beschrieben werden kann!

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Gini-Koeffizienten für Österreich für das Jahr 2012 und geben Sie an, ob das Gesamtvermögen in diesem Jahr in Österreich oder im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war!

Lösungserwartung

a) Im Jahr 2012 hatten in Österreich ca. 422 500 Personen (laut Abbildung 1: ca. 5 % der Bevölkerung) ein Vermögen von mindestens einer Million Euro.

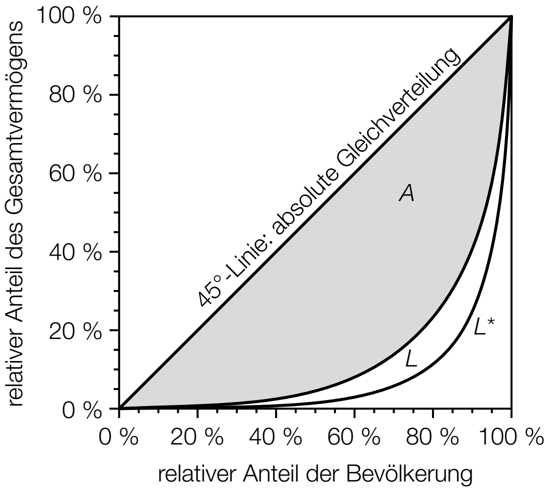
Mögliche Vorgehensweise:

$$6\,086 + \frac{34\,731 - 6\,086}{4} = 13\,247{,}25$$

Der Näherungswert für den Schwellenwert bei 25 % liegt bei ca. € 13.247.

b) Die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen ca. 60 % des Vermögens.

Möglicher Verlauf von L^*:



c) Mögliche Vorgehensweise:

$$0{,}5 - \int_0^1 L_1(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}31\dot{3}$$

$$\frac{0{,}31\dot{3}}{0{,}5} \approx 0{,}63$$

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 hatte für das Land S etwa den Wert 0,63.

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 war für das Land S niedriger als jener für Österreich. Das bedeutet, dass in diesem Jahr das Gesamtvermögen im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war als in Österreich.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch die Angabe des richtigen relativen Anteils als richtig zu werten ist.
Toleranzintervalle: [338 000; 507 000] bzw. [4 %; 6 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [€ 13.200; € 13.325]

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [58 %; 62 %]
– Ein Punkt für einen richtig eingezeichneten Verlauf einer möglichen Lorenz-Kurve L^*, wobei der Funktionswert an der Stelle 90 % kleiner als 42 % sein muss und die Funktion monoton steigend sein muss.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,62; 0,63]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für einen korrekten Vergleich und eine (sinngemäß) richtige Deutung.

Kondensator*

Aufgabennummer: 2_042	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.1, FA 1.5, AN 4.3	

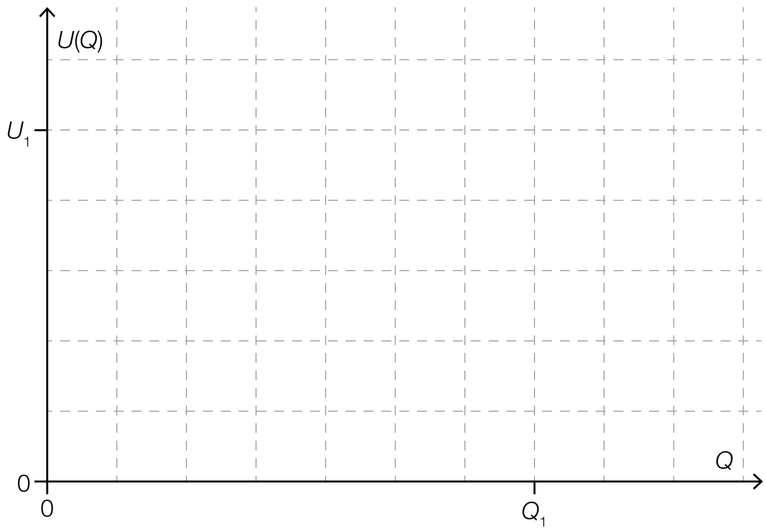
Ein Kondensator ist ein elektrisches Bauelement, mit dem elektrische Ladung und die daraus resultierende elektrische Energie gespeichert werden kann.
Eine einfache Form des Kondensators ist der sogenannte *Plattenkondensator*. Er besteht aus zwei einander gegenüberliegenden elektrisch leitfähigen Flächen, die als *Kondensatorplatten* bezeichnet werden.

Das Verhältnis zwischen der gespeicherten Ladung Q und der an die Kondensatorplatten angelegten (Gleich-)Spannung U wird als Kapazität C bezeichnet.

Es gilt $C = \frac{Q}{U}$, wobei C in der Einheit Farad angegeben wird.

Aufgabenstellung:

a) Ein Kondensator mit einer bestimmten Kapazität C wird bis zur Ladungsmenge Q_1 aufgeladen, die gemessene Spannung $U(Q_1)$ hat dann den Wert U_1.
Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung die Spannung U beim Ladevorgang am Kondensator in Abhängigkeit von der Ladung Q!



Die in diesem Kondensator gespeicherte Energie W kann mithilfe der Formel
$W = \int_0^{Q_1} U(Q)\,\mathrm{d}Q$ berechnet werden.
Geben Sie eine Formel für die gespeicherte Energie W in Abhängigkeit von U_1 und C an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

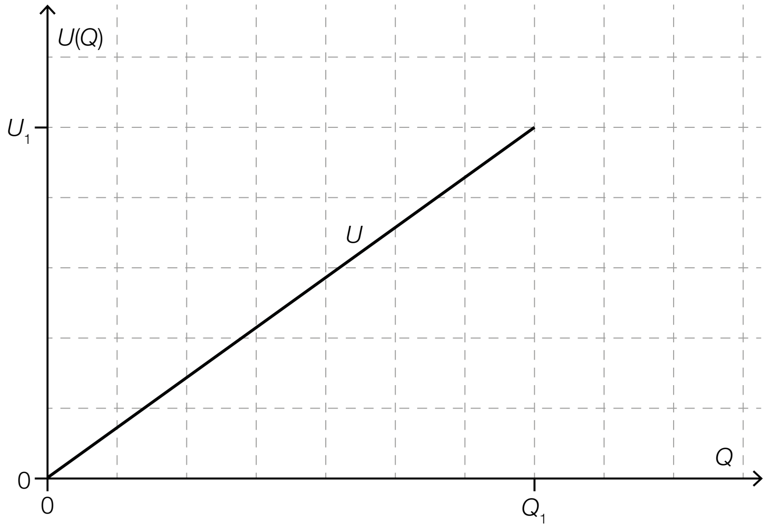
b) Bei einem Ladevorgang kann die Spannung zwischen den Kondensatorplatten als Funktion U in Abhängigkeit von der Zeit t durch $U(t) = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ beschrieben werden. Dabei ist $U^* > 0$ die an den Kondensator angelegte Spannung und $\tau > 0$ eine für den Ladevorgang charakteristische Konstante. Der Ladevorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Zeit, nach der die Spannung $U(t)$ zwischen den Kondensatorplatten 99 % der angelegten Spannung U^* beträgt, wird als *Ladezeit* bezeichnet.
Bestimmen Sie die Ladezeit eines Kondensators in Abhängigkeit von τ!

Geben Sie eine Formel für die momentane Änderungsrate der Spannung zwischen den Kondensatorplatten in Abhängigkeit von t an und zeigen Sie mithilfe dieser Formel, dass die Spannung während des Ladevorgangs ständig steigt!

Lösungserwartung

a)



$W = \int_0^{Q_1} U(Q)\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{2} \cdot U_1 \cdot Q_1 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_1^2$

b) Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}99 \cdot U^* = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$0{,}01 = e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ladezeit: $t = -\tau \cdot \ln(0{,}01)$ bzw. $t = \tau \cdot \ln(100)$

Mögliche Vorgehensweise:

$U'(t) = \dfrac{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot U^*}{\tau}$

Es gilt: $U^* > 0,\ \tau > 0,\ e^{-\frac{t}{\tau}} > 0 \quad \Rightarrow \quad U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.

Da $U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, ist U während des Ladevorgangs streng monoton steigend.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine richtige Skizze.
– Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen der Lösung sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine richtige Formel und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_041	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 1.2, FA 1.5, FA 4.3, AN 2.1, AN 3.3, AN 4.3	

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + t \cdot x$. Für den Parameter t gilt: $t \in \mathbb{R}$ und $t \neq 0$.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie die lokalen Extremstellen von f_t in Abhängigkeit von t an!

An der Stelle $x = t$ gelten für die Funktion f_t die Gleichungen $f_t(t) = 0$, $f_t'(t) = 0$ und $f_t''(t) = 2$.
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f_t bei $x = t$!

b) Geben Sie diejenige Stelle x_0 in Abhängigkeit von t an, an der sich das Krümmungsverhalten von f_t ändert!

Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Krümmungsverhalten des Graphen von f_t an der Stelle $x = 0$ unabhängig von der Wahl des Parameters t ist!

c) Die Funktion A beschreibt in Abhängigkeit von t mit $t > 0$ den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion f_t und von der x-Achse im Intervall $[0; t]$ begrenzt wird. Die Funktion $A: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $t \mapsto A(t)$, ist eine Polynomfunktion.

Geben Sie den Funktionsterm und den Grad von A an!

Geben Sie das Verhältnis $A(t) : A(2 \cdot t)$ an!

d) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f_{-1}(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt!

Erläutern Sie, wie der Graph der Funktion f_{-1} aus dem Graphen der Funktion f_1 hervorgeht!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

a) Mögliche Vorgehensweise:

$f_t'(x) = \frac{3}{t} \cdot x^2 - 4 \cdot x + t$

$3 \cdot x^2 - 4 \cdot t \cdot x + t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{t}{3};\ x_2 = t$

Mögliche Beschreibung:

An der Stelle $x = t$ hat f_t eine Nullstelle und ein lokales Minimum.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(x) = \frac{6}{t} \cdot x - 4$

$f_t''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{2}{3} \cdot t$

Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(0) = \frac{6}{t} \cdot 0 - 4 = -4$

Die zweite Ableitungsfunktion hat an der Stelle $x = 0$ den Wert -4 und ist somit unabhängig vom Parameter t.

c) Mögliche Vorgehensweise:

$A(t) = \int_0^t f_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t^3}{4} - \frac{2 \cdot t^3}{3} + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$

Die Funktion A ist eine Funktion dritten Grades.

$A(t) : A(2 \cdot t) = 1 : 8$

d) Mögliche Vorgehensweise:

$f_{-1}(x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x$

$f_1(-x) = (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x \quad \Rightarrow \quad f_{-1}(x) = f_1(-x)$

Mögliche Erläuterung:

Wird der Graph der Funktion f_1 an der senkrechten Achse gespiegelt, so erhält man den Graphen der Funktion f_{-1}.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

c) – Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm und die Angabe des richtigen Grades von A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für ein richtiges Verhältnis.

d) – Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.
– Ein Punkt für eine korrekte Erläuterung.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_033	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.3, AN 1.3, AN 4.2, AN 4.3, FA 4.3	

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind.

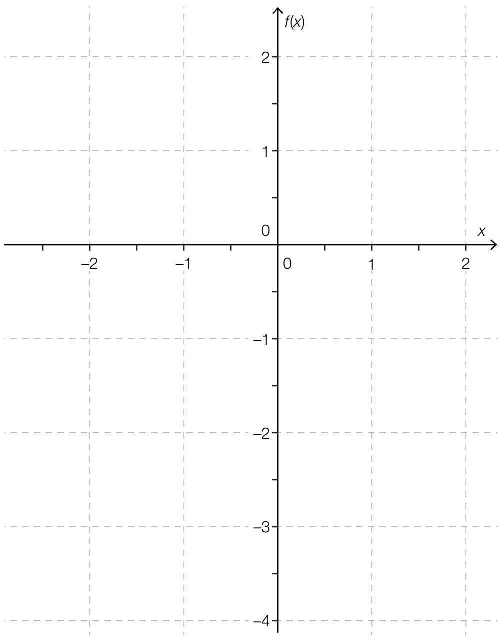
Aufgabenstellung:

a) Begründen Sie, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!

Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b. Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b an, sodass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$ hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

a) Mögliche Begründung:

Berechnung der Nullstellen: $a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$
Eine Nullstelle ist daher $x_1 = 0$.

Berechnung weiterer Nullstellen: $a \cdot x^2 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{b}{a}$

Wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt: $-\frac{b}{a} > 0$.
Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion f hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x entspricht dem Wert $f'(x)$.
$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \quad \Rightarrow \quad f'(0) = b$

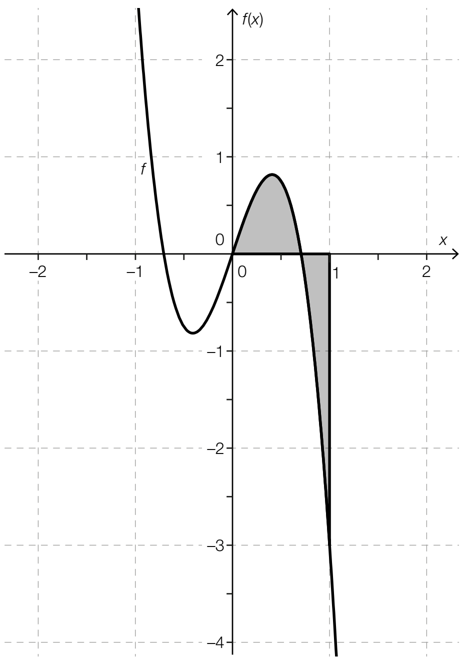
b) Mögliche Vorgehensweise:

$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x)\,\mathrm{d}x = \left(a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \cdot b$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von f und von der x-Achse begrenzt werden. Hätte f keine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$, dann würde der Graph von f in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der x-Achse (mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0; 1)$) oder zur Gänze unterhalb der x-Achse (mit $f(x) < 0$ für alle $x \in (0; 1)$) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von f im Intervall $(0; 1)$ entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Möglicher Graph von f:



Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für eine korrekte Beziehung zwischen a und b.
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung und eine Skizze eines möglichen Graphen von f. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.