Ganze Zahlen und irrationale Zahlen

Gegeben sind vier Eigenschaften von Zahlen sowie sechs Zahlen.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Eigenschaften von Zahlen jeweils die Zahl mit dieser Eigenschaft aus A bis F zu.

negative ganze Zahl	
negative irrationale Zahl	
positive ganze Zahl	
positive irrationale Zahl	

A	$2-\sqrt{10}$
B	10^{-2}
C	$-\sqrt{10^2}$
D	$2:(-10)$
E	$\sqrt{10}:2$
F	$(-\sqrt{10})^2$

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

negative ganze Zahl	C
negative irrationale Zahl	A
positive ganze Zahl	F
positive irrationale Zahl	E

A	$2 - \sqrt{10}$
B	10^{-2}
C	$-\sqrt{10^2}$
D	$2 : (-10)$
E	$\sqrt{10} : 2$
F	$(-\sqrt{10})^2$

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Zahlen und Zahlenmengen

Gegeben sind fünf Aussagen zu Zahlen und Zahlenmengen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$\sqrt{\frac{9}{2}}$ ist eine rationale Zahl.	☐
$-\sqrt{100}$ ist eine ganze Zahl.	☐
$\sqrt{15}$ ist eine endliche, nichtperiodische Dezimalzahl.	☐
Jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.	☐
$\sqrt{-4}$ ist eine reelle Zahl.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$-\sqrt{100}$ ist eine ganze Zahl.	☒
Jede rationale Zahl ist auch eine reelle Zahl.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Summe und Produkt zweier Zahlen

Für zwei Zahlen a und b mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a + b = a \cdot b$

Aufgabenstellung:

Begründen Sie allgemein, warum es unter dieser Voraussetzung nicht möglich ist, dass sowohl a als auch b negativ sind.

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Summe zweier negativer Zahlen ist negativ, das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv. Daher können die Summe und das Produkt der beiden Zahlen nicht übereinstimmen.

Ein Punkt für das richtige Begründen.

Grundkompetenz: AG 1.1

Zahlenmengen

Nachstehend sind Aussagen über Zahlenmengen angeführt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Die Menge der ganzen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der natürlichen Zahlen.	☐
Die Menge der rationalen Zahlen enthält alle ganzen Zahlen.	☐
Die Menge der rationalen Zahlen enthält alle reellen Zahlen.	☐
Die Menge der komplexen Zahlen ist eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen.	☐
Alle irrationalen Zahlen sind in der Menge der reellen Zahlen enthalten.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Die Menge der rationalen Zahlen enthält alle ganzen Zahlen.	☒
Alle irrationalen Zahlen sind in der Menge der reellen Zahlen enthalten.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Zahlendarstellungen

Für Zahlen gibt es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten. So ist etwa $\frac{1}{2} = 0{,}5$ als endliche Dezimalzahl oder $\frac{1}{6} = 0{,}1\dot{6}$ als periodische Dezimalzahl darstellbar.

Unten stehend sind Aussagen zu Darstellungsmöglichkeiten verschiedener Zahlen gegeben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Jede rationale Zahl lässt sich als endliche Dezimalzahl oder als periodische Dezimalzahl darstellen.	☐
Jede reelle Zahl kann als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden.	☐
Jeder Bruch zweier ganzer Zahlen kann als endliche Dezimalzahl dargestellt werden.	☐
Es gibt rationale Zahlen, die man nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen kann.	☐
Es gibt Quadratwurzeln natürlicher Zahlen, die nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können.	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Jede rationale Zahl lässt sich als endliche Dezimalzahl oder als periodische Dezimalzahl darstellen.	☒
Es gibt Quadratwurzeln natürlicher Zahlen, die nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen dargestellt werden können.	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Differenz zwischen zwei natürlichen Zahlen*

Aufgabennummer: 1_854	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	

Für zwei natürliche Zahlen n und m gilt: $n \neq m$.
Damit die Differenz $n - m$ eine natürliche Zahl ist, muss eine bestimmte mathematische Beziehung zwischen n und m gelten.

Aufgabenstellung:

Geben Sie diese mathematische Beziehung an.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung
$n > m$

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für das Angeben der richtigen mathematischen Beziehung, wobei auch $n \geq m$ als richtig zu werten ist.

Rationale Zahlen*

Aufgabennummer: 1_129	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Gegeben sind folgende Zahlen: $-\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{5}$; $3{,}\dot{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{-1}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden rationalen Zahlen an.

$-\frac{1}{2}$	☐
$\frac{\pi}{5}$	☐
$3{,}\dot{5}$	☐
$\sqrt{3}$	☐
$\sqrt{-1}$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem *Kompetenzcheck Mathematik (AHS) – Oktober 2013* entnommen und adaptiert.

Lösungserwartung

$-\frac{1}{2}$	☒
$3{,}\dot{5}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Zahlen den Zahlenmengen zuordnen*

Aufgabennummer: 1_397	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Gegeben sind Aussagen zu Zahlen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Die Zahl $-\frac{1}{3}$ liegt in $\mathbb{Z}$, aber nicht in $\mathbb{N}$.	☐
Die Zahl $\sqrt{-4}$ liegt in $\mathbb{C}$.	☐
Die Zahl $0,\dot{9}$ liegt in $\mathbb{R}$, aber nicht in $\mathbb{Q}$.	☐
Die Zahl π liegt in $\mathbb{R}$.	☐
Die Zahl $-\sqrt{7}$ liegt nicht in $\mathbb{R}$.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015, adaptiert

Lösungserwartung

Die Zahl $\sqrt{-4}$ liegt in $\mathbb{C}$.	☒
Die Zahl π liegt in $\mathbb{R}$.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Zahlenmengen*

Aufgabennummer: 1_566	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Untenstehend werden Aussagen über Zahlen aus den Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ getroffen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Jede reelle Zahl ist eine rationale Zahl.	☐
Jede natürliche Zahl ist eine rationale Zahl.	☐
Jede ganze Zahl ist eine reelle Zahl.	☐
Jede rationale Zahl ist eine ganze Zahl.	☐
Jede komplexe Zahl ist eine reelle Zahl.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017, adaptiert

Lösungserwartung

Jede natürliche Zahl ist eine rationale Zahl.	☒
Jede ganze Zahl ist eine reelle Zahl.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Rechenoperationen*

Aufgabennummer: 1_782	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Gegeben sind zwei natürliche Zahlen a und b, wobei gilt: $b \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, die auf jeden Fall eine natürliche Zahl als Ergebnis liefern.

$a + b$	☐
$a - b$	☐
$\frac{a}{b}$	☐
$a \cdot b$	☐
$\sqrt[a]{b}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

$a + b$	☒
$a \cdot b$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Ausdrücke angekreuzt sind.

Zahlen und Zahlenmengen*

Aufgabennummer: 1_758	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Gegeben sind fünf Aussagen zu Zahlen und Zahlenmengen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

$\sqrt{\frac{9}{2}}$ ist eine rationale Zahl.	☐
$-\sqrt{100}$ ist eine ganze Zahl.	☐
$\sqrt{15}$ hat eine endliche Dezimaldarstellung.	☐
$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.	☐
-4 ist kein Quadrat einer reellen Zahl.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$-\sqrt{100}$ ist eine ganze Zahl.	☒
-4 ist kein Quadrat einer reellen Zahl.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zahlenmengen*

Aufgabennummer: 1_710	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Zwischen Zahlenmengen bestehen bestimmte Beziehungen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden wahren Aussagen an.

$\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{N}$	☐
$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{Z}$	☐
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^-$	☐
$\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{Q}$	☐
$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$\mathbb{Z}^{+} \subseteq \mathbb{N}$	$\boxtimes$
$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$	$\boxtimes$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Rechenoperationen*

Aufgabennummer: 1_686	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Für zwei ganze Zahlen a, b mit $a < 0$ und $b < 0$ gilt: $b = 2 \cdot a$.

Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Berechnungen haben stets eine natürliche Zahl als Ergebnis? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Berechnungen an!

$a + b$	☐
$b : a$	☐
$a : b$	☐
$a \cdot b$	☐
$b - a$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

$b : a$	☒
$a \cdot b$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Berechnungen angekreuzt sind.

Zahlen und Zahlenmengen*

Aufgabennummer: 1_662	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Nachstehend sind Aussagen über Zahlen und Zahlenmengen angeführt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Es gibt mindestens eine Zahl, die in $\mathbb{N}$ enthalten ist, nicht aber in $\mathbb{Z}$.	☐
$-\sqrt{9}$ ist eine irrationale Zahl.	☐
Die Zahl 3 ist ein Element der Menge $\mathbb{Q}$.	☐
$\sqrt{-2}$ ist in $\mathbb{C}$ enthalten, nicht aber in $\mathbb{R}$.	☐
Die periodische Zahl $1,\dot{5}$ ist in $\mathbb{R}$ enthalten, nicht aber in $\mathbb{Q}$.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

Die Zahl 3 ist ein Element der Menge $\mathbb{Q}$.	☒
$\sqrt{-2}$ ist in $\mathbb{C}$ enthalten, nicht aber in $\mathbb{R}$.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zahlenmengen*

Aufgabennummer: 1_638	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Nachstehend sind Aussagen über Zahlen aus den Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ angeführt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Irrationale Zahlen lassen sich in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ darstellen.	☐
Jede rationale Zahl kann in endlicher oder periodischer Dezimalschreibweise geschrieben werden.	☐
Jede Bruchzahl ist eine komplexe Zahl.	☐
Die Menge der rationalen Zahlen besteht ausschließlich aus positiven Bruchzahlen.	☐
Jede reelle Zahl ist auch eine rationale Zahl.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

Jede rationale Zahl kann in endlicher oder periodischer Dezimalschreibweise geschrieben werden.	☒
Jede Bruchzahl ist eine komplexe Zahl.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Ganze Zahlen*

Aufgabennummer: 1_565	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Es sei *a* eine positive ganze Zahl.

Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Ausdrücke ergeben für $a \in \mathbb{Z}^+$ stets eine ganze Zahl?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Ausdrücke an!

a^{-1}	☐
a^2	☐
$a^{\frac{1}{2}}$	☐
$3 \cdot a$	☐
$\frac{a}{2}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

a^2	☒
$3 \cdot a$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Ausdrücke angekreuzt sind.

Eigenschaften von Zahlen*

Aufgabennummer: 1_517	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Nachstehend sind Aussagen über Zahlen und Zahlenmengen angeführt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Die Quadratwurzel jeder natürlichen Zahl ist eine irrationale Zahl.	☐
Jede natürliche Zahl kann als Bruch in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ dargestellt werden.	☐
Das Produkt zweier rationaler Zahlen kann eine natürliche Zahl sein.	☐
Jede reelle Zahl kann als Bruch in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ dargestellt werden.	☐
Es gibt eine kleinste ganze Zahl.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Jede natürliche Zahl kann als Bruch in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ dargestellt werden.	☒
Das Produkt zweier rationaler Zahlen kann eine natürliche Zahl sein.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Menge von Zahlen*

Aufgabennummer: 1_493	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 < x < 5\}$ ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

4,99 ist die größte Zahl, die zur Menge M gehört.	☐
Es gibt unendlich viele Zahlen in der Menge M, die kleiner als 2,1 sind.	☐
Jede reelle Zahl, die größer als 2 und kleiner als 5 ist, ist in der Menge M enthalten.	☐
Alle Elemente der Menge M können in der Form $\frac{a}{b}$ geschrieben werden, wobei a und b ganze Zahlen sind und $b \neq 0$ ist.	☐
Die Menge M enthält keine Zahlen aus der Menge der komplexen Zahlen.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

Es gibt unendlich viele Zahlen in der Menge M, die kleiner als 2,1 sind.	☒
Alle Elemente der Menge M können in der Form $\frac{a}{b}$ geschrieben werden, wobei a und b ganze Zahlen sind und $b \neq 0$ ist.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aussagen über Zahlen*

Aufgabennummer: 1_469	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Gegeben sind Aussagen über Zahlen.

Aufgabenstellung:

Welche der im Folgenden angeführten Aussagen gelten? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Jede reelle Zahl ist eine irrationale Zahl.	☐
Jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl.	☐
Jede rationale Zahl ist eine ganze Zahl.	☐
Jede ganze Zahl ist eine natürliche Zahl.	☐
Jede natürliche Zahl ist eine reelle Zahl.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

Jede reelle Zahl ist eine komplexe Zahl.	☒
Jede natürliche Zahl ist eine reelle Zahl.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Aussagen über Zahlenmengen*

Aufgabennummer: 1_373	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Untenstehend sind fünf Aussagen über Zahlen aus den Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ angeführt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die korrekt sind!

Reelle Zahlen mit periodischer oder endlicher Dezimaldarstellung sind rationale Zahlen.	☐
Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist stets eine natürliche Zahl.	☐
Alle Wurzelausdrücke der Form $\sqrt{a}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ sind stets irrationale Zahlen.	☐
Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen a, b existiert stets eine weitere rationale Zahl.	☐
Der Quotient zweier negativer ganzer Zahlen ist stets eine positive ganze Zahl.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

Reelle Zahlen mit periodischer oder endlicher Dezimaldarstellung sind rationale Zahlen.	☒
Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen *a*, *b* existiert stets eine weitere rationale Zahl.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Positive rationale Zahlen*

Aufgabennummer: 1_349	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.1

Gegeben ist die Zahlenmenge $\mathbb{Q}^+$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Zahlen an, die Elemente dieser Zahlenmenge sind!

$\sqrt{5}$	☐
$0{,}9 \cdot 10^{-3}$	☐
$\sqrt{0{,}01}$	☐
$\frac{\pi}{4}$	☐
$-1{,}41 \cdot 10^{3}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

$0{,}9 \cdot 10^{-3}$	☒
$\sqrt{0{,}01}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Zahlen angekreuzt sind.

Lineare Gleichung

Gegeben ist die folgende Gleichung in der Variablen $x \in \mathbb{Z}$:
$2 \cdot x - c = 0 \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Geben Sie alle reellen Zahlen c an, für die diese Gleichung eine Lösung in $\mathbb{Z}$ hat.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

…, -4, -2, 0, 2, 4, …   (alle geraden ganzen Zahlen)

Ein Punkt für das Angeben der richtigen Zahlen.

Grundkompetenz: AG 1.2

Rationale Zahlen*

Aufgabennummer: 1_830	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Nachstehend sind Aussagen über rationale Zahlen gegeben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Für alle rationalen Zahlen a und b gilt: $a + b \geq 0$.	☐
Zu jeder rationalen Zahl a gibt es eine rationale Zahl b so, dass gilt: $a + b = 0$.	☐
Es gibt rationale Zahlen a und b mit $a \cdot b < b$.	☐
Wenn von den beiden rationalen Zahlen a und b, $b \neq 0$, genau eine positiv ist, dann ist der Quotient $\frac{a}{b}$ auf jeden Fall positiv.	☐
Wenn von den beiden rationalen Zahlen a und b mindestens eine negativ ist, dann ist das Produkt $a \cdot b$ auf jeden Fall negativ.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

Zu jeder rationalen Zahl a gibt es eine rationale Zahl b so, dass gilt: $a + b = 0$.	☒
Es gibt rationale Zahlen a und b mit $a \cdot b < b$.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Gleichungen*

Aufgabennummer: 1_445	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☒
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Gegeben sind fünf Gleichungen in der Unbekannten x.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Gleichungen an, die <u>keine</u> reelle Lösung haben.

$2 \cdot x = 2 \cdot x + 1$	☐
$x = 2 \cdot x$	☐
$x^2 + 1 = 0$	☐
$x^2 = -x$	☐
$x^3 = -1$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015, adaptiert

Lösungserwartung

$2 \cdot x = 2 \cdot x + 1$	☒
$x^2 + 1 = 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Lösung einer Gleichung*

Aufgabennummer: 1_807	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AG 1.2

Nachstehend ist eine Gleichung in $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

$\sqrt{2 \cdot x - 6} = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie dasjenige Intervall an, das für alle Werte von $a \in \mathbb{R}_0^+$ die Lösung der gegebenen Gleichung enthält.

$(-\infty; -3]$	☐
$[3; \infty)$	☐
$[-3; 0)$	☐
$[0; 3)$	☐
$[-6; -3)$	☐
$[3; 6]$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

[3; ∞)	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich das laut Lösungserwartung richtige Intervall angekreuzt ist.

Äquivalente Gleichungen*

Aufgabennummer: 1_734	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.2

Gegeben ist die Gleichung $\frac{x}{2} - 4 = 3$ in $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden nachstehenden Gleichungen in $x \in \mathbb{R}$ an, die zur gegebenen Gleichung äquivalent sind.

$x - 4 = 6$	☐
$\frac{x}{2} = -1$	☐
$\frac{x}{2} - 3 = 4$	☐
$\frac{x-8}{2} = 3$	☐
$\left(\frac{x}{2} - 4\right)^2 = 9$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

$\frac{x}{2} - 3 = 4$	☒
$\frac{x-8}{2} = 3$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Zusammenhang zweier Variablen*

Aufgabennummer: 1_614	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.2

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt der Zusammenhang $a \cdot b = 1$.

Aufgabenstellung:

Zwei der fünf nachstehenden Aussagen treffen in jedem Fall zu.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

Wenn a kleiner als null ist, dann ist auch b kleiner als null.	☐
Die Vorzeichen von a und b können unterschiedlich sein.	☐
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(a - n) \cdot (b + n) = 1$.	☐
Für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt: $(a \cdot n) \cdot \left(\frac{b}{n}\right) = 1$.	☐
Es gilt: $a \neq b$.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Wenn a kleiner als null ist, dann ist auch b kleiner als null.	☒
Für jedes $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt: $(a \cdot n) \cdot \left(\frac{b}{n}\right) = 1$.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Rationale Exponenten

Aufgabennummer: 1_192	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 1.2

Gegeben ist der Term $x^{\frac{5}{3}}$ mit $x > 0$.

Aufgabenstellung:

Welche der nachstehend angeführten Terme sind zum gegebenen Term $x^{\frac{5}{3}}$ äquivalent?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Terme an!

$\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}}$	☐
$\sqrt[3]{x^5}$	☐
$x^{-\frac{3}{5}}$	☐
$\sqrt[5]{x^3}$	☐
$x \cdot \sqrt[3]{x^2}$	☐

Lösungserwartung

$\sqrt[3]{x^5}$	☒
$x \cdot \sqrt[3]{x^2}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung zutreffenden Terme angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Äquivalenzumformung*	
Aufgabennummer: 1_492	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 1.2

Nicht jede Umformung einer Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Aufgabenstellung:

Erklären Sie konkret auf das unten angegebene Beispiel bezogen, warum es sich bei der durchgeführten Umformung um keine Äquivalenzumformung handelt! Die Grundmenge ist die Menge der reellen Zahlen.

$x^2 - 5x = 0 \quad | : x$

$x - 5 = 0$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

Die Gleichung $x^2 - 5x = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = 0$ (die Lösungsmenge $L = \{0; 5\}$).
Die Gleichung $x - 5 = 0$ hat aber nur mehr die Lösung $x = 5$ (die Lösungsmenge $L = \{5\}$).
Durch die durchgeführte Umformung wurde die Lösungsmenge verändert, daher ist dies keine Äquivalenzumformung.

oder:

Bei der Division durch x würde im Fall $x = 0$ durch null dividiert werden, was keine zulässige Rechenoperation ist.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Erklärung.

Definitionsmengen*

Aufgabennummer: 1_372	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AG 1.2

Es sind vier Terme und sechs Mengen (A bis F) gegeben.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Termen jeweils die entsprechende größtmögliche Definitionsmenge D_A, D_B, … , D_F in der Menge der reellen Zahlen zu!

$\ln(x + 1)$	
$\sqrt{1 - x}$	
$\frac{2x}{x \cdot (x + 1)^2}$	
$\frac{2x}{x^2 + 1}$	

A	$D_A = \mathbb{R}$
B	$D_B = (1; \infty)$
C	$D_C = (-1; \infty)$
D	$D_D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 0\}$
E	$D_E = (-\infty; 1)$
F	$D_F = (-\infty; 1]$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

$\ln(x + 1)$	C
$\sqrt{1 - x}$	F
$\frac{2x}{x \cdot (x + 1)^2}$	D
$\frac{2x}{x^2 + 1}$	A

A	$D_A = \mathbb{R}$
B	$D_B = (1; \infty)$
C	$D_C = (-1; \infty)$
D	$D_D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 0\}$
E	$D_E = (-\infty; 1)$
F	$D_F = (-\infty; 1]$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Terme ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Spenden

Anton spendet an 3 Forschungseinrichtungen jeweils einen Geldbetrag von a Euro und an 5 Tierschutzvereine jeweils einen Geldbetrag von $(a + 10)$ Euro.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den durchschnittlichen Geldbetrag G (in Euro), den Anton gespendet hat, in Abhängigkeit von a an.

G = ____ Euro

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$G = \frac{3 \cdot a + 5 \cdot (a + 10)}{8}$ Euro

oder:

$G = a + 6{,}25$ Euro

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Geldbetrags.

Taxifahrt

Bei einem bestimmten Taxiunternehmen setzt sich der Tagestarif folgendermaßen zusammen: Zusätzlich zu einer festgelegten Grundgebühr G ist pro Kilometer zurückgelegter Strecke eine Gebühr K zu bezahlen.

Für eine Fahrt, die nachts zwischen 20:00 Uhr und 6:00 Uhr beginnt, ist ein Aufschlag auf den Tagestarif von 30 % zu entrichten.

Ein Fahrgast steigt um 22:00 Uhr in ein Taxi dieses Taxiunternehmens ein und fährt damit eine Strecke von S Kilometern.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Gleichung zur Berechnung der gesamten Fahrtkosten F für diese Fahrt auf. Verwenden Sie dabei G, S und K.

$F =$ ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$F = 1{,}3 \cdot (G + S \cdot K)$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

Flugtickets

Ein Fünftel der Tickets für einen bestimmten Flug wird an Privatpersonen vergeben, der Rest an Reiseunternehmen.

Jedes Ticket für ein Reiseunternehmen ist um 5 % billiger als ein Ticket für eine Privatperson.

Die Variable x gibt den Preis pro Ticket für eine Privatperson an.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Term zur Berechnung des durchschnittlichen Preises pro Ticket in Abhängigkeit von x an.

durchschnittlicher Preis pro Ticket: ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

durchschnittlicher Preis pro Ticket: $\frac{1}{5} \cdot x + \frac{4}{5} \cdot x \cdot 0{,}95 \quad (= 0{,}96 \cdot x)$

Ein Punkt für das Angeben des richtigen Terms.

Reines Wasser

Reines Wasser besteht ausschließlich aus Wassermolekülen. Modellhaft wird angenommen, dass ein Wassermolekül eine Masse von $3 \cdot 10^{-23}$ g hat.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Anzahl der Wassermoleküle in 3 kg reinem Wasser.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-23}} = 10^{26}$

Die Anzahl der Wassermoleküle in 3 kg reinem Wasser beträgt 10^{26}.

Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl.

Grundkompetenz: AG 2.1

Museumsbesuche

Die Eintrittspreise eines bestimmten Museums sind folgendermaßen festgelegt:
Der Eintrittspreis für einen Erwachsenen beträgt x Euro. Für Studierende ist dieser Eintrittspreis um p % ermäßigt. Kinder und Jugendliche bezahlen nichts für den Eintritt.

An einem bestimmten Wochenende bezahlen E Personen den Eintrittspreis für Erwachsene und S Personen den Eintrittspreis für Studierende. Außerdem besuchen K Kinder und J Jugendliche an diesem Wochenende das Museum.
Die Gesamteinnahmen des Museums aus Eintritten an diesem Wochenende werden mit G bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von G auf.

G = ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$G = E \cdot x + S \cdot x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Werte von Termen

Nachstehend sind fünf Terme mit $a \in \mathbb{R}$ und $a < 0$ gegeben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Terme an, deren Wert auf jeden Fall positiv ist. *[2 aus 5]*

$\frac{a-1}{a}$	☐
$\frac{1-2\cdot a}{a}$	☐
$\frac{a}{1-a}$	☐
$a^2 - 1$	☐
$-a$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\frac{a-1}{a}$	☒
$-a$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Kleidungsstück*

Aufgabennummer: 1_831	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	

Am Ende des Jahres 2017 lag der Preis eines bestimmten Kleidungsstücks bei € 49,90. Damit war es um 17,8 % teurer als zu Beginn des Jahres 2017.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie, um welchen Geldbetrag das Kleidungsstück im Laufe des Jahres 2017 teurer geworden ist.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$49{,}9 - \frac{49{,}9}{1{,}178} = 7{,}540...$

Geldbetrag: rund € 7,54

Lösungsschlüssel

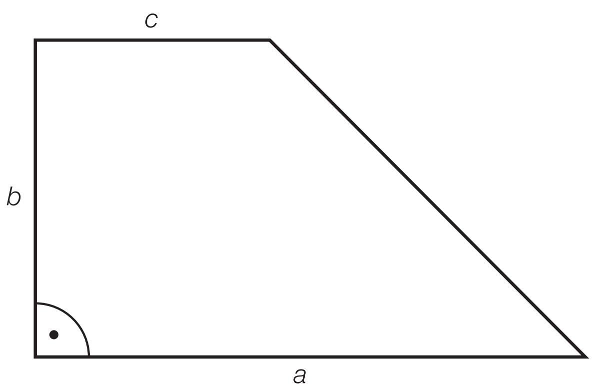
Ein Punkt für das richtige Berechnen des Geldbetrags.

Trapez

Aufgabennummer: 1_070	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)

Die nachstehende Abbildung zeigt ein Trapez.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Formeln an, mit denen der Flächeninhalt *A* dieses Trapezes berechnet werden kann. *[2 aus 5]*

$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot b$	☐
$A = b \cdot c + \frac{(a - c) \cdot b}{2}$	☐
$A = 0{,}5 \cdot a \cdot b - c$	☐
$A = 0{,}5 \cdot a \cdot b - (a + c) \cdot b$	☐
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + b \cdot c$	☐

Lösungserwartung

$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot b$	☒
$A = b \cdot c + \frac{(a - c) \cdot b}{2}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Potenzen*

Aufgabennummer: 1_121	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☒
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Gegeben ist der Term $(a^4 \cdot b^{-5} \cdot c)^{-3}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Terme an, die zum gegebenen Term äquivalent sind.

$a \cdot b^{-8} \cdot c^{-2}$	☐
$\frac{b^{15}}{a^{12} \cdot c^3}$	☐
$\left(\frac{b^8 \cdot c^2}{a}\right)^{-1}$	☐
$\left(\frac{a^4 \cdot c}{b^5}\right)^{-3}$	☐
$a^{-12} \cdot b^{-8} \cdot c^{-3}$	☐

* Diese Aufgabe wurde dem im Oktober 2012 publizierten Kompetenzcheck entnommen und adaptiert.

Lösungserwartung

$\frac{b^{15}}{a^{12} \cdot c^3}$	☒
$\left(\frac{a^4 \cdot c}{b^5}\right)^{-3}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Wirkstoff*

Aufgabennummer: 1_783	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Ein bestimmtes Medikament wird in flüssiger Form eingenommen. Es beinhaltet pro Milliliter Flüssigkeit 30 Milligramm eines Wirkstoffs. Martin nimmt 85 Milliliter dieses Medikaments ein. Vom Wirkstoff gelangen 10 % in seinen Blutkreislauf.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie viel Milligramm dieses Wirkstoffs in Martins Blutkreislauf gelangen.

Es gelangen ______________ Milligramm des Wirkstoffs in Martins Blutkreislauf.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

Es gelangen 255 Milligramm des Wirkstoffs in Martins Blutkreislauf.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Verkehrsunfallstatistik*

Aufgabennummer: 1_735	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Die nachstehenden Angaben beziehen sich auf Straßenverkehrsunfälle im Zeitraum von 2014 bis 2016.

A ... Anzahl der Straßenverkehrsunfälle im Jahr 2014, davon a % mit Personenschaden
B ... Anzahl der Straßenverkehrsunfälle im Jahr 2015, davon b % mit Personenschaden
C ... Anzahl der Straßenverkehrsunfälle im Jahr 2016, davon c % mit Personenschaden

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Term für die Gesamtanzahl N der Straßenverkehrsunfälle mit Personenschaden im Zeitraum von 2014 bis 2016 an.

N = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

$$N = \frac{A \cdot a}{100} + \frac{B \cdot b}{100} + \frac{C \cdot c}{100}$$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Darstellung von Zusammenhängen durch Gleichungen*

Aufgabennummer: 1_663	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AG 2.1

Viele Zusammenhänge können in der Mathematik durch Gleichungen ausgedrückt werden.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Beschreibungen eines möglichen Zusammenhangs zweier Zahlen a und b mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ jeweils die entsprechende Gleichung (aus A bis F) zu!

a ist halb so groß wie b.	
b ist 2 % von a.	
a ist um 2 % größer als b.	
b ist um 2 % kleiner als a.	

A	$2 \cdot a = b$
B	$2 \cdot b = a$
C	$a = 1{,}02 \cdot b$
D	$b = 0{,}02 \cdot a$
E	$1{,}2 \cdot b = a$
F	$b = 0{,}98 \cdot a$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

a ist halb so groß wie *b*.	A
b ist 2 % von *a*.	D
a ist um 2 % größer als *b*.	C
b ist um 2 % kleiner als *a*.	F

A	$2 \cdot a = b$
B	$2 \cdot b = a$
C	$a = 1{,}02 \cdot b$
D	$b = 0{,}02 \cdot a$
E	$1{,}2 \cdot b = a$
F	$b = 0{,}98 \cdot a$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier Beschreibungen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Solaranlagen*

Aufgabennummer: 1_615	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Eine Gemeinde unterstützt den Neubau von Solaranlagen in h Haushalten mit jeweils p % der Anschaffungskosten, wobei das arithmetische Mittel der Anschaffungskosten für eine Solaranlage für einen Haushalt in dieser Gemeinde e Euro beträgt.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie den Term $h \cdot e \cdot \frac{p}{100}$ im angegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Mögliche Interpretation:

Der Term gibt die Gesamtausgaben der Gemeinde zur Unterstützung der Haushalte bei den Anschaffungskosten für neue Solaranlagen an.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

Sparbuch

Aufgabennummer: 1_194	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Ein Geldbetrag K wird auf ein Sparbuch gelegt. Er wächst in n Jahren bei einem effektiven Jahreszinssatz von p % auf $K(n) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, die es ermöglicht, aus dem aktuellen Kontostand $K(n)$ jenen des nächsten Jahres $K(n + 1)$ zu errechnen!

Lösungserwartung

$K(n + 1) = K(n) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Reisekosten

Aufgabennummer: 1_295	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Ein Reiseveranstalter plant eine Busreise, an der x Erwachsene und y Kinder teilnehmen.
Für die Busfahrt müssen die Erwachsenen einen Preis von € p bezahlen, der Preis der Busfahrt ist für die Kinder um 30 % ermäßigt.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie einen Term auf, der die durchschnittlichen Kosten für die Busfahrt pro Reiseteilnehmer angibt!

Lösungserwartung

$$\frac{p \cdot x + 0{,}7 \cdot p \cdot y}{x + y}$$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen korrekten Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Druckkosten

Aufgabennummer: 1_193	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AG 2.1

Die Druckkosten K für Grußkarten setzen sich aus einem Grundpreis von € 7 und einem Preis von € 0,40 pro Grußkarte zusammen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Formel an, die verwendet werden kann, um die Druckkosten von n Grußkarten zu bestimmen!

$K = 0{,}4 + 7n$	☐
$K = 7{,}4n$	☐
$K = 7 + 0{,}4n$	☐
$K = 7{,}4n + 0{,}4$	☐
$K = 7{,}4 + n$	☐
$K = 0{,}4n - 7$	☐

Lösungserwartung

$K = 7 + 0{,}4n$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Formel angekreuzt ist.

Durchschnittsgeschwindigkeit

Aufgabennummer: 1_175	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Ein Fahrzeug erreichte den 1. Messpunkt einer Abschnittskontrolle zur Geschwindigkeitsüberwachung (Section-Control) um 9:32:26 Uhr. Die Streckenlänge der Section-Control beträgt 10 km. Der 2. Messpunkt wurde um 9:38:21 Uhr durchfahren.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs!

Lösungserwartung

$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\,000}{355}$ m/s ≈ 28,2 m/s (≈ 101,4 km/h)

Lösungsschlüssel

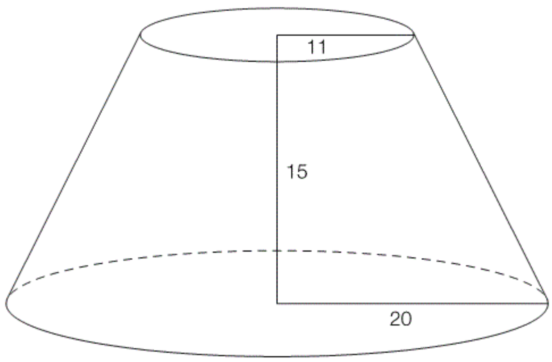
Ein Punkt für die richtige Lösung.
Lösungsintervall: [28; 29] bzw. [101; 102]

BMB Bundesministerium für Bildung

Kegelstumpf

Aufgabennummer: 1_309	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Ein 15 cm hohes Gefäß hat die Form eines geraden Kegelstumpfes. Der Radius am Boden hat eine Länge von 20 cm, der Radius mit der kleinsten Länge beträgt 11 cm.



Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel für die Länge $r(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h an!

Lösungserwartung

$r(h) = -0{,}6 \cdot h + 20$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Anzahl der Personen in einem Autobus*

Aufgabennummer: 1_590	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AG 2.1

Die Variable F bezeichnet die Anzahl der weiblichen Passagiere in einem Autobus, M bezeichnet die Anzahl der männlichen Passagiere in diesem Autobus. Zusammen mit dem Lenker (männlich) sind doppelt so viele Männer wie Frauen in diesem Autobus. (Der Lenker wird nicht bei den Passagieren mitgezählt.)

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Frauen und der Anzahl der Männer in diesem Autobus richtig beschreibt!

$2 \cdot (M + 1) = F$	☐
$M + 1 = 2 \cdot F$	☐
$F = 2 \cdot M + 1$	☐
$F + 1 = 2 \cdot M$	☐
$M - 1 = 2 \cdot F$	☐
$2 \cdot F = M$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

$M + 1 = 2 \cdot F$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Gleichung angekreuzt ist.

Kapital*

Aufgabennummer: 1_564	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Ein Kapital K wird 5 Jahre lang mit einem jährlichen Zinssatz von 1,2 % verzinst.

Aufgabenstellung:

Gegeben ist folgender Term:

$K \cdot 1{,}012^5 - K$

Geben Sie die Bedeutung dieses Terms im gegebenen Kontext an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

Mithilfe dieses Terms kann der Kapitalzuwachs (die Summe der Zinsen) im Zeitraum von 5 Jahren berechnet werden.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Mehrwertsteuer für Hörbücher*

Aufgabennummer: 1_541	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Seit 2015 werden in Deutschland bestimmte Hörbücher statt mit 19 % Mehrwertsteuer (MWSt.) mit dem ermäßigten Mehrwertsteuersatz von 7 % belegt.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Formel auf, mit deren Hilfe für ein Hörbuch, das ursprünglich inklusive 19 % MWSt. € x kostete, der ermäßigte Preis € y inklusive 7 % MWSt. berechnet werden kann!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

$y = \frac{x}{1{,}19} \cdot 1{,}07$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Treibstoffkosten*	
Aufgabennummer: 1_491	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Der durchschnittliche Treibstoffverbrauch eines PKW beträgt y Liter pro 100 km Fahrtstrecke.
Die Kosten für den Treibstoff betragen a Euro pro Liter.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Term an, der die durchschnittlichen Treibstoffkosten K (in Euro) für eine Fahrtstrecke von x km beschreibt!

K = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

$K = x \cdot \frac{y}{100} \cdot a$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen korrekten Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Taschengeld*

Aufgabennummer: 1_421	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Tim hat x Wochen lang wöchentlich € 8, y Wochen lang wöchentlich € 10 und z Wochen lang wöchentlich € 12 Taschengeld erhalten.

Aufgabenstellung:

Geben Sie in Worten an, was in diesem Zusammenhang durch den Term $\frac{8x + 10y + 12z}{x + y + z}$ dargestellt wird!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

Der Term stellt die Höhe des durchschnittlichen wöchentlichen Taschengeldes in Euro dar.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung des Terms, wobei die Begriffe *wöchentlich* und *in Euro* nicht vorkommen müssen.

Punktladungen*

Aufgabennummer: 1_348	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Der Betrag F der Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 im Abstand r wird beschrieben durch die Gleichung $F = C \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$ (C ... physikalische Konstante).

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, um welchen Faktor sich der Betrag F der Kraft ändert, wenn der Betrag der Punktladungen q_1 und q_2 jeweils verdoppelt und der Abstand r zwischen diesen beiden Punktladungen halbiert wird!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

$$F = C \cdot \frac{2 \cdot q_1 \cdot 2 \cdot q_2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = C \cdot \frac{16 \cdot q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Der Betrag der Kraft F wird 16-mal so groß.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Weder die Rechnung noch ein Antwortsatz müssen angegeben werden. Die Angabe des Faktors 16 ist ausreichend.

Angestellte Frauen und Männer*

Aufgabennummer: 1_157	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 2.1

Für die Anzahl x der in einem Betrieb angestellten Frauen und die Anzahl y der im selben Betrieb angestellten Männer kann man folgende Aussagen machen:

– Die Anzahl der in diesem Betrieb angestellten Männer ist um 94 größer als jene der Frauen.
– Es sind dreimal so viele Männer wie Frauen im Betrieb angestellt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Gleichungen an, die die oben angeführten Aussagen über die Anzahl der Angestellten mathematisch korrekt wiedergeben!

$x - y = 94$	☐
$3 \cdot x = 94$	☐
$3 \cdot x = y$	☐
$3 \cdot y = x$	☐
$y - x = 94$	☐

* Diese Aufgabe wurde der *Probeklausur Mathematik (AHS) – Mai 2013* entnommen.

Lösungserwartung

$3 \cdot x = y$	☒
$y - x = 94$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Eintrittspreis*

Aufgabennummer: 1_114	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.1

Der Eintrittspreis für ein Schwimmbad beträgt für Erwachsene p Euro. Kinder zahlen nur den halben Preis. Wenn man nach 15 Uhr das Schwimmbad besucht, gibt es auf den jeweils zu zahlenden Eintritt 60 % Ermäßigung.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel für die Gesamteinnahmen E aus dem Eintrittskartenverkauf eines Tages an, wenn e_1 Erwachsene und k_1 Kinder bereits vor 15 Uhr den Tageseintritt bezahlt haben und e_2 Erwachsene und k_2 Kinder nach 15 Uhr den ermäßigten Tageseintritt bezahlt haben!

$E =$ ____

* Diese Aufgabe wurde dem *Kompetenzcheck Mathematik (AHS) – Oktober 2012* entnommen.

Lösungserwartung

$E = e_1 \cdot p + k_1 \cdot \frac{p}{2} + \left(e_2 \cdot p + k_2 \cdot \frac{p}{2}\right) \cdot 0{,}4$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Abfüllmaschinen

Werden vier gleich schnell arbeitende Abfüllmaschinen gleichzeitig eingesetzt, so benötigen sie 24 Minuten zum Befüllen von 6000 Flaschen Mineralwasser.

Die Funktion f ordnet einer Anzahl n solcher gleichzeitig arbeitender Abfüllmaschinen die Dauer $f(n)$ zu, die für die Befüllung der 6000 Flaschen benötigt wird ($n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $f(n)$ in Minuten).

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f auf.

$f(n) =$ ____

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$f(n) = \frac{96}{n}$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung von *f*.

Schulwechsel

An einer bestimmten allgemeinbildenden höheren Schule (AHS) beschließen gegen Ende der 8. Schulstufe k Schüler/innen, an dieser Schule die Oberstufe zu besuchen. Alle übrigen m Schüler/innen beschließen, an eine berufsbildende höhere Schule (BHS) zu wechseln.
Dabei gilt:

- Ein Drittel der Schüler/innen dieser 8. Schulstufe wechselt an eine BHS.
- Die Anzahl derjenigen Schüler/innen, die an dieser Schule die Oberstufe besuchen, ist um 47 größer als die Anzahl derer, die an eine BHS wechseln.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an. *[2 aus 5]*

$k + m = 3 \cdot m$	☐
$k = 2 \cdot m - 47$	☐
$m = k - 47$	☐
$k = 3 \cdot m$	☐
$3 \cdot k - m = 47$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$k + m = 3 \cdot m$	☒
	☐
$m = k - 47$	☒
	☐
	☐

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bremsvorgang

Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 30 m/s und soll mit einer Bremsung zum Stillstand gebracht werden. Seine Geschwindigkeit nimmt dabei pro Sekunde um b m/s ab.

Mit t wird die Zeitdauer vom Beginn des Bremsvorgangs bis zum Stillstand des PKWs bezeichnet (t in s).

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Gleichung auf, die den Zusammenhang zwischen t und b beschreibt.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$30 - b \cdot t = 0$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

Grundkompetenz: AG 2.2

Radfahrer*

Aufgabennummer: 1_808	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 2.2

Die Schule von Alexander und die Schule von Bernhard sind durch eine 13 km lange geradlinige Straße verbunden.
An einem bestimmten Tag fahren beide von ihrer jeweiligen Schule aus mit dem Fahrrad entlang dieser Straße einander entgegen. Sie starten zu unterschiedlichen Zeitpunkten und begegnen einander t Stunden nach der Abfahrt von Alexander.
Bis zu ihrer Begegnung gilt:
- Alexander fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 18 km/h.
- Bernhard fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 24 km/h.

Im gegebenen Kontext wird die nachstehende Gleichung aufgestellt und gelöst.

$$18 \cdot t + 24 \cdot \left(t - \frac{1}{3}\right) = 13$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die im gegebenen Kontext unter Beachtung der obigen Gleichung und deren Lösung zutreffend sind.

Alexander fährt um 10 Minuten später ab als Bernhard.	☐
Alexander ist bis zur Begegnung mit Bernhard 30 Minuten unterwegs.	☐
Bernhard ist bis zur Begegnung mit Alexander 20 Minuten unterwegs.	☐
Alexander legt bis zur Begegnung mit Bernhard 9 km zurück.	☐
Bei ihrer Begegnung sind die beiden von Bernhards Schule weiter entfernt als von Alexanders Schule.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

Alexander ist bis zur Begegnung mit Bernhard 30 Minuten unterwegs.	☒
Alexander legt bis zur Begegnung mit Bernhard 9 km zurück.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Bewegung eines Körpers*

Aufgabennummer: 1_784	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.2

Ein Körper bewegt sich geradlinig mit einer konstanten Geschwindigkeit von 8 m/s und legt dabei 100 m zurück.

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie die Lösung der Gleichung $8 \cdot x - 100 = 0$ im gegebenen Kontext.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

mögliche Interpretation:

Die Lösung der Gleichung gibt die Zeit (in s) an, die der Körper für diese Bewegung benötigt.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Interpretation, wobei die Einheit „s“ nicht angeführt sein muss.

Gewinnaufteilung*

Aufgabennummer: 1_759	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.2

Eine Spielgemeinschaft bestehend aus 3 Spielerinnen gewinnt € 10.000. Dieser Gewinn wird wie folgt aufgeteilt: Spielerin *B* erhält um 50 % mehr als Spielerin *A*, Spielerin *C* erhält um 20 % weniger als Spielerin *B*.

Mit x wird der Betrag bezeichnet, den Spielerin *A* erhält (x in €).

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung an, mit der x berechnet werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$x + 1{,}5 \cdot x + 1{,}5 \cdot x \cdot 0{,}8 = 10\,000$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Löwenrudel*

Aufgabennummer: 1_736	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 2.2

Ein Rudel von Löwen besteht aus Männchen und Weibchen. Die Anzahl der Männchen in diesem Rudel wird mit m bezeichnet, jene der Weibchen mit w.

Die beiden nachstehenden Gleichungen enthalten Informationen über dieses Rudel.

$m + w = 21$

$4 \cdot m + 1 = w$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf dieses Rudel zutreffen.

In diesem Rudel sind mehr Männchen als Weibchen.	☐
Die Anzahl der Weibchen ist mehr als viermal so groß wie die Anzahl der Männchen.	☐
Die Anzahl der Männchen ist um 1 kleiner als die Anzahl der Weibchen.	☐
Insgesamt sind mehr als 20 Löwen (Männchen und Weibchen) in diesem Rudel.	☐
Das Vierfache der Anzahl der Männchen ist um 1 größer als die Anzahl der Weibchen.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

Die Anzahl der Weibchen ist mehr als viermal so groß wie die Anzahl der Männchen.	☒
Insgesamt sind mehr als 20 Löwen (Männchen und Weibchen) in diesem Rudel.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Sport

Aufgabennummer: 1_072	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.2

Von den 958 Schülerinnen und Schülern einer Schule betreiben viele regelmäßig Sport.
319 Schüler/innen spielen regelmäßig Tennis, 810 gehen regelmäßig schwimmen.
Nur 98 Schüler/innen geben an, weder Tennis zu spielen noch schwimmen zu gehen.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Anzahl derjenigen Schüler/innen, die beide Sportarten regelmäßig betreiben, berechnet werden kann, und ermitteln Sie deren Lösung!

Lösungserwartung

$958 - 98 = 810 + 319 - x$
$x = 269$

⇒ 269 Schüler/innen betreiben beide Sportarten regelmäßig.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Fahrenheit

Aufgabennummer: 1_053	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.2

In einigen Ländern wird die Temperatur in °F (Grad Fahrenheit) und nicht wie bei uns in °C (Grad Celsius) angegeben.
Die Umrechnung von x °C in y °F erfolgt durch die Gleichung $y = 1{,}8 \cdot x + 32$. Dabei gilt:

$$0\ °C \triangleq 32\ °F$$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie eine Gleichung, mit deren Hilfe die Temperatur von °F in °C umgerechnet werden kann!

Lösungserwartung

$x = (y - 32) : 1{,}8$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Fahrenheit und Celsius*

Aufgabennummer: 1_420	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.2

Während man in Europa die Temperatur in Grad Celsius (°C) angibt, verwendet man in den USA die Einheit Grad Fahrenheit (°F). Zwischen der Temperatur T_F in °F und der Temperatur T_C in °C besteht ein linearer Zusammenhang.

Für die Umrechnung von °F in °C gelten folgende Regeln:
- 32 °F entsprechen 0 °C.
- Eine Temperaturzunahme um 1 °F entspricht einer Zunahme der Temperatur um $\frac{5}{9}$ °C.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen der Temperatur T_F (°F, Grad Fahrenheit) und der Temperatur T_C (°C, Grad Celsius) beschreibt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

$T_C = (T_F - 32) \cdot \frac{5}{9}$

oder:

$T_F = \frac{9}{5} \cdot T_C + 32$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Praxisgemeinschaft*	
Aufgabennummer: 1_396	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.2

In einer Gemeinschaftspraxis teilen sich sechs Therapeutinnen und Therapeuten die anfallende Monatsmiete zu gleichen Teilen auf.
Am Ende des Jahres verlassen Mitglieder die Praxisgemeinschaft. Daher muss der Mietanteil für die Verbleibenden um jeweils € 20 erhöht werden und beträgt ab dem neuen Jahr nun monatlich € 60.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie anhand des gegebenen Textes eine Gleichung auf, mit der die Anzahl derjenigen Mitglieder, die die Praxisgemeinschaft verlassen, berechnet werden kann!
Bezeichnen Sie dabei die Anzahl derjenigen Mitglieder, die die Praxisgemeinschaft verlassen, mit der Variablen x!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$6 \cdot 40 = (6 - x) \cdot 60$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Gleichung.
Alle Gleichungen, die den gegebenen Text der Fragestellung entsprechend korrekt wiedergeben, sind als richtig zu werten!

Quadratische Gleichung

Gegeben ist die folgende quadratische Gleichung in der Variablen x:

$3 \cdot x^2 + a = 2 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 4 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie alle Werte von a, für die die gegebene Gleichung zwei verschiedene Lösungen in $\mathbb{R}$ hat.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$x^2 - 6 \cdot x + a + 4 = 0$
$3^2 - (a + 4) > 0$
$a + 4 < 9$
$a < 5$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln aller Werte von a.

Grundkompetenz: AG 2.3

Parameter einer quadratischen Gleichung

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + k \cdot x + 4 \cdot k = 0$ mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die zwei unterschiedlichen Werte k_1 und k_2 von k, für die die gegebene Gleichung genau eine Lösung hat.

k_1 = ___________________________

k_2 = ___________________________

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Parameter einer quadratischen Gleichung

$k_1 = 0$
$k_2 = 16$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Quadratische Gleichung*

Aufgabennummer: 1_855	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 - 6 \cdot x + c = 0$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie alle $c \in \mathbb{R}$ so, dass die Gleichung keine reelle Lösung hat.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$c \in (9; \infty)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ermitteln aller Werte von c.

Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ an, für die $x = -4$ eine Lösung der gegebenen quadratischen Gleichung ist.

Quadratische Gleichung*

Aufgabennummer: 1_737	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AG 2.3

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + r \cdot x + s = 0$ in $x \in \mathbb{R}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Lösungsfällen jeweils diejenige Aussage über die Parameter r und s (aus A bis F) zu, bei der stets der jeweilige Lösungsfall vorliegt.

Die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung.	
Die quadratische Gleichung hat nur eine reelle Lösung $x = -\frac{r}{2}$.	
Die quadratische Gleichung hat die reellen Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -r$.	
Die quadratische Gleichung hat die reellen Lösungen $x_1 = -\sqrt{-s}$ und $x_2 = \sqrt{-s}$.	

A	$\frac{r^2}{4} = s$
B	$\frac{r^2}{4} - s > 0$ mit $r, s \neq 0$
C	$r \in \mathbb{R},\ s > 0$
D	$r = 0,\ s < 0$
E	$r \neq 0,\ s = 0$
F	$r = 0,\ s > 0$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

Die quadratische Gleichung hat keine reelle Lösung.	F
Die quadratische Gleichung hat nur eine reelle Lösung $x = -\frac{r}{2}$.	A
Die quadratische Gleichung hat die reellen Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -r$.	E
Die quadratische Gleichung hat die reellen Lösungen $x_1 = -\sqrt{-s}$ und $x_2 = \sqrt{-s}$.	D

A	$\frac{r^2}{4} = s$
B	$\frac{r^2}{4} - s > 0$ mit $r, s \neq 0$
C	$r \in \mathbb{R},\ s > 0$
D	$r = 0,\ s < 0$
E	$r \neq 0,\ s = 0$
F	$r = 0,\ s > 0$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Lösungsfälle ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist. Bei zwei oder drei richtigen Zuordnungen ist ein halber Punkt zu geben.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Anhalteweg*

Aufgabennummer: 1_687	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

Schülerinnen und Schüler einer Fahrschule lernen die nachstehende Formel für die näherungsweise Berechnung des Anhaltewegs s. Dabei ist v die Geschwindigkeit des Fahrzeugs (s in m, v in km/h).

$$s = \frac{v}{10} \cdot 3 + \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

Bei „Fahren auf Sicht" muss man jederzeit die Geschwindigkeit so wählen, dass man innerhalb der Sichtweite anhalten kann. „Sichtweite" bezeichnet dabei die Länge des Streckenabschnitts, den man sehen kann.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die maximal zulässige Geschwindigkeit bei einer Sichtweite von 25 m!

Die maximal zulässige Geschwindigkeit beträgt ≈ ______________ km/h.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$25 = \frac{v}{10} \cdot 3 + \left(\frac{v}{10}\right)^2$

$v^2 + 30 \cdot v - 2\,500 = 0$

$v_1 = -15 + \sqrt{2\,725} \approx 37{,}2 \quad (v_2 = -15 - \sqrt{2\,725})$

Die maximal zulässige Geschwindigkeit beträgt ≈ 37,2 km/h.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [37; 38]

Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung*

Aufgabennummer: 1_639	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + a \cdot x = 0$ in x mit $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie denjenigen Wert für a, für den die gegebene Gleichung die Lösungsmenge $L = \left\{0; \frac{6}{7}\right\}$ hat!

a = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

$a = -\frac{6}{7}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Lösungsfälle quadratischer Gleichungen*

Aufgabennummer: 1_616	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form $r \cdot x^2 + s \cdot x + t = 0$ in der Variablen x mit den Koeffizienten $r, s, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Die Anzahl der reellen Lösungen der Gleichung hängt von r, s und t ab.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Anzahl der reellen Lösungen der gegebenen Gleichung an, wenn r und t verschiedene Vorzeichen haben, und begründen Sie Ihre Antwort allgemein!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

Wenn r und t verschiedene Vorzeichen haben, dann hat die gegebene Gleichung genau zwei (verschiedene) reelle Lösungen.

Mögliche Begründung:
Lösungen der Gleichung: $x_{1,2} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4 \cdot r \cdot t}}{2 \cdot r}$

Haben r und t verschiedene Vorzeichen, dann ist $-4 \cdot r \cdot t$ in jedem Fall positiv und es gilt:
$s^2 - 4 \cdot r \cdot t > 0$.
Daraus ergeben sich zwei verschiedene reelle Lösungen.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der richtigen Anzahl und eine korrekte allgemeine Begründung.

Zusammenhang der Parameter einer quadratischen Gleichung

Aufgabennummer: 1_087	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AG 2.3

Der Graph der Polynomfunktion f mit $f(x) = x^2 + p \cdot x + q$ berührt die x-Achse.

Aufgabenstellung:

Welcher Zusammenhang besteht dabei im Allgemeinen zwischen den Parametern p und q? Kreuzen Sie den zutreffenden mathematischen Ausdruck an!

$p = q$	☐
$-\frac{p}{2} = q$	☐
$-p > 2 \cdot q$	☐
$p^2 > 4 \cdot q$	☐
$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$	☐
$\frac{p^2}{4} < q$	☐

Lösungserwartung

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich der laut Lösungserwartung zutreffende mathematische Ausdruck angekreuzt ist.

Benzinverbrauch

Aufgabennummer: 1_016	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

Der Zusammenhang zwischen dem Benzinverbrauch y (in L/100 km) und der Geschwindigkeit x (in km/h) kann für einen bestimmten Autotyp durch die Funktionsgleichung $y = 0{,}0005 \cdot x^2 - 0{,}09 \cdot x + 10$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie rechnerisch, bei welcher Geschwindigkeit bzw. welchen Geschwindigkeiten der Verbrauch 6 L/100 km beträgt!

Lösungserwartung

$6 = 0{,}0005 \cdot x^2 - 0{,}09 \cdot x + 10$
$0 = x^2 - 180 \cdot x + 8\,000$

$x_{1,2} = 90 \pm \sqrt{8\,100 - 8\,000} = 90 \pm 10$
$x_1 = 80$, $x_2 = 100$

Bei 80 km/h und bei 100 km/h beträgt der Benzinverbrauch 6 L/100 km.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lösung einer quadratischen Gleichung	
Aufgabennummer: 1_055	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

Gegeben ist die Gleichung $(x-3)^2 = a$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie diejenigen Werte $a \in \mathbb{R}$, für die die gegebene Gleichung keine reelle Lösung hat!

Lösungserwartung

Für alle $a < 0$ gibt es keine Lösung.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Quadratische Gleichung

Aufgabennummer: 1_054	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AG 2.3

Gegeben ist eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \text{ mit } p, q \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine mathematisch korrekte Aussage entsteht!

Die quadratische Gleichung hat jedenfalls für x ___①___ in $\mathbb{R}$, wenn ___②___ gilt.

①	
keine Lösung	☐
genau eine Lösung	☐
zwei Lösungen	☐

②	
$p \neq 0$ und $q < 0$	☐
$p = q$	☐
$p < 0$ und $q > 0$	☐

Lösungserwartung

①	
zwei Lösungen	☒

②	
$p \neq 0$ und $q < 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Lösungen einer quadratischen Gleichung*

Aufgabennummer: 1_592	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AG 2.3

Eine Gleichung, die man auf die Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ umformen kann, nennt man quadratische Gleichung in der Variablen x mit den Koeffizienten a, b, c.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Eine quadratische Gleichung der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit ______①______ hat in jedem Fall ______②______.

①	
$a > 0$ und $c > 0$	☐
$a > 0$ und $c < 0$	☐
$a < 0$ und $c < 0$	☐

②	
zwei verschiedene reelle Lösungen	☐
genau eine reelle Lösung	☐
keine reelle Lösung	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

①	
$a > 0$ und $c < 0$	☒

②	
zwei verschiedene reelle Lösungen	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Quadratische Gleichung

Aufgabennummer: 1_540	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

Gegeben ist die Gleichung $a \cdot x^2 + 10 \cdot x + 25 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie jene(n) Wert(e) von a, für welche(n) die Gleichung genau eine reelle Lösung hat!

a = ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung
$a = 1$

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für die richtige Lösung.

Quadratische Gleichung*

Aufgabennummer: 1_490	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + p \cdot x - 12 = 0$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie denjenigen Wert für p, für den die Gleichung die Lösungsmenge $L = \{-2; 6\}$ hat!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung
$p = -4$

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für die richtige Lösung.

Quadratische Gleichung*

Aufgabennummer: 1_468	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

Gegeben ist die folgende quadratische Gleichung in der Unbekannten x über der Grundmenge $\mathbb{R}$:

$4x^2 - d = 2$ mit $d \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Geben Sie denjenigen Wert für $d \in \mathbb{R}$ an, für den die Gleichung genau eine Lösung hat!

d = ____________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$d = -2$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Quadratische Gleichung mit genau zwei Lösungen*

Aufgabennummer: 1_395	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

Gegeben ist die folgende quadratische Gleichung in der Unbekannten x über der Grundmenge $\mathbb{R}$:

$x^2 + 10x + q = 0$ mit $q \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, für welche Werte für $q \in \mathbb{R}$ die Gleichung genau zwei Lösungen hat!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$q < 25$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Quadratische Gleichung*	
Aufgabennummer: 1_371	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.3

Gegeben ist die quadratische Gleichung $(x - 7)^2 = 3 + c$ mit der Variablen $x \in \mathbb{R}$ und dem Parameter $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert des Parameters c so an, dass diese quadratische Gleichung in $\mathbb{R}$ genau eine Lösung hat!

c = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung
$c = -3$

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für die richtige Lösung.

Quadratische Gleichung*

Aufgabennummer: 1_347	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AG 2.3

Die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichung $rx^2 + sx + t = 0$ in der Menge der reellen Zahlen hängt von den Koeffizienten r, s und t ab.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Die quadratische Gleichung $rx^2 + sx + t = 0$ hat genau dann <u>für alle</u> $r \neq 0$; $r, s, t \in \mathbb{R}$ ___①___, wenn ___②___ gilt.

①	
zwei reelle Lösungen	☐
keine reelle Lösung	☐
genau eine reelle Lösung	☐

②	
$r^2 - 4st > 0$	☐
$t^2 = 4rs$	☐
$s^2 - 4rt > 0$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

①	
zwei reelle Lösungen	☒

②	
$s^2 - 4rt > 0$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Quadratische Gleichungen*

Aufgabennummer: 1_161	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AG 2.3

Quadratische Gleichungen können in der Menge der reellen Zahlen keine, genau eine oder zwei verschiedene Lösungen haben.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie jeder Lösungsmenge L die entsprechende quadratische Gleichung in der Menge der reellen Zahlen zu!

$L = \{\ \}$	
$L = \{-4; 4\}$	
$L = \{0; 4\}$	
$L = \{4\}$	

A	$(x + 4)^2 = 0$
B	$(x - 4)^2 = 25$
C	$x(x - 4) = 0$
D	$-x^2 = 16$
E	$x^2 - 16 = 0$
F	$x^2 - 8x + 16 = 0$

* Diese Aufgabe wurde der *Probeklausur Mathematik (AHS) – Mai 2013* entnommen.

Lösungserwartung

$L = \{\ \}$	D
$L = \{-4; 4\}$	E
$L = \{0; 4\}$	C
$L = \{4\}$	F

A	$(x + 4)^2 = 0$
B	$(x - 4)^2 = 25$
C	$x(x - 4) = 0$
D	$-x^2 = 16$
E	$x^2 - 16 = 0$
F	$x^2 - 8x + 16 = 0$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder Lösungsmenge ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Delegation*

Aufgabennummer: 1_760	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 2.4

Aus einer großen Gruppe von Jugendlichen und Erwachsenen soll eine Delegation gebildet werden.

Dabei gelten die folgenden drei Vorschriften:

1. Die Delegation soll mindestens 8 Mitglieder umfassen.
2. Die Delegation soll höchstens 12 Mitglieder umfassen.
3. In der Delegation sollen mindestens doppelt so viele Jugendliche wie Erwachsene sein.

Zwei der drei Vorschriften sind unten stehend jeweils durch eine Ungleichung beschrieben. Dabei wird die Anzahl der Jugendlichen in dieser Delegation mit J und die Anzahl der Erwachsenen in dieser Delegation mit E bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Ungleichungen an.

$J + E \leq 12$	☐
$J \geq 2 \cdot E$	☐
$J + E \leq 8$	☐
$J - 2 \cdot E < 0$	☐
$E \geq 2 \cdot J$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$J + E \leq 12$	☒
$J \geq 2 \cdot E$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Ungleichungen angekreuzt sind.

Ungleichungen lösen*

Aufgabennummer: 1_688	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.4

Gegeben sind zwei lineare Ungleichungen.

I: $7 \cdot x + 67 > -17$
II: $-25 - 4 \cdot x > 7$

Aufgabenstellung:

Gesucht sind alle reellen Zahlen x, die beide Ungleichungen erfüllen.
Geben Sie die Menge dieser Zahlen als Intervall an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

I: $7 \cdot x + 67 > -17 \quad \Rightarrow \quad x > -12$
II: $-25 - 4 \cdot x > 7 \quad \Rightarrow \quad x < -8$

Menge aller reellen Zahlen x, die beide Ungleichungen erfüllen: $(-12; -8)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Intervall. Andere Schreibweisen der Lösungsmenge sind ebenfalls als richtig zu werten. Bei Angabe eines halboffenen oder geschlossenen Intervalls ist der Punkt nicht zu geben.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Erdgasanbieter*

Aufgabennummer: 1_640	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.4

Ein Haushalt möchte seinen Erdgaslieferanten wechseln und schwankt noch bei der Wahl zwischen dem Anbieter *A* und dem Anbieter *B*.

Der Energiegehalt des verbrauchten Erdgases wird in Kilowattstunden (kWh) gemessen.

Anbieter *A* verrechnet jährlich eine fixe Gebühr von 340 Euro und 2,9 Cent pro kWh.
Anbieter *B* verrechnet jährlich eine fixe Gebühr von 400 Euro und 2,5 Cent pro kWh.

Die Ungleichung $0{,}025 \cdot x + 400 < 0{,}029 \cdot x + 340$ dient dem Vergleich der zu erwartenden Kosten bei den beiden Anbietern.

Aufgabenstellung:

Lösen Sie die oben angeführte Ungleichung und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

$x > 15\,000$

Mögliche Interpretation:

Bei einem Jahresverbrauch von mehr als 15 000 kWh ist Anbieter *B* günstiger als Anbieter *A*.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation, wobei die Einheit „kWh“ nicht angeführt sein muss.

Handytarife

Aufgabennummer: 1_199	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.4

Vom Handy-Netzbetreiber TELMAXFON werden zwei Tarifmodelle angeboten:

Tarif A: keine monatliche Grundgebühr,
Verbindungsentgelt 6,8 Cent pro Minute in alle Netze

Tarif B: monatliche Grundgebühr € 15,
Verbindungsentgelt 2,9 Cent pro Minute in alle Netze

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang die Ungleichung $15 + 0{,}029 \cdot t < 0{,}068 \cdot t$ und die Lösung der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned} 15 + 0{,}029 \cdot t &< 0{,}068 \cdot t \\ 15 &< 0{,}039 \cdot t \\ t &> 384{,}6 \end{aligned}$$

Lösungserwartung

Die Ungleichung ($15 + 0{,}029 \cdot t < 0{,}068 \cdot t$) drückt aus, dass Tarif B bei t telefonierten Minuten günstiger als Tarif A ist.
Die Lösung ($t > 384{,}6$) gibt an, dass Tarif B günstiger als Tarif A ist, wenn man mehr als 384 Minuten telefoniert.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden (sinngemäß) korrekten Interpretationen.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Lösungen von Ungleichungen

Aufgabennummer: 1_202	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.4

Gegeben ist die lineare Ungleichung $2x - 6y \leq -3$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie, für welche reellen Zahlen $a \in \mathbb{R}$ das Zahlenpaar $(18; a)$ Lösung der Ungleichung ist!

Lösungserwartung

$2 \cdot 18 - 6a \leq -3$

$-6a \leq -39$

$a \geq 6{,}5 \qquad a \in [6{,}5; \infty)$

(18; *a*) ist eine Lösung, wenn *a* größer oder gleich 6,5 ist.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

Kraft und Beschleunigung

Wirkt eine Kraft auf einen ruhenden Körper, so wird dieser Körper in Richtung der Kraft beschleunigt. Für den Betrag der Kraft gilt $F = m \cdot a$, wobei mit m die Masse und mit a die Beschleunigung des Körpers bezeichnet wird (F in Newton (N), m in kg, a in m/s²).

Auf eine bestimmte ruhende Kugel wirkt eine Kraft von $F_1 = 5$ N. Dadurch wird diese Kugel mit $a_1 = 0{,}625$ m/s^2 beschleunigt. Auf eine zweite ruhende Kugel gleicher Masse soll eine Kraft F_2 so wirken, dass diese Kugel mit $a_2 = 0{,}5$ m/s^2 beschleunigt wird.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie F_2 in N.

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$F_1 = m \cdot a_1$
$F_2 = m \cdot a_2$

$F_2 = \frac{a_2}{a_1} \cdot F_1$

$F_2 = 4\text{ N}$

Ein Punkt für das richtige Berechnen von F_2.

Grundkompetenz: AG 2.5

Apfelsaft und Orangensaft

Bei einer Veranstaltung werden als Getränke ausschließlich Apfelsaft und Orangensaft in Bechern zum Verkauf angeboten.
Insgesamt werden bei dieser Veranstaltung 375 Becher verkauft, davon *a* Becher Apfelsaft zu je € 0,80 und *b* Becher Orangensaft zu je € 1,00.
Der dabei erzielte Verkaufserlös beträgt € 339,00.

Aufgabenstellung:

Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung von *a* und *b*.

I: ____

II: ____

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

I: $a + b = 375$
II: $0{,}80 \cdot a + 1 \cdot b = 339$

Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems mit zwei Gleichungen, ein halber Punkt für nur eine richtige Gleichung.

Smoothie

Der Vitamin-C-Gehalt von Schwarzen Johannisbeeren beträgt durchschnittlich 177 mg pro 100 g, der Vitamin-C-Gehalt von Kiwis beträgt durchschnittlich 46 mg pro 100 g.

Für einen Smoothie sollen die beiden Fruchtsorten so gemischt werden, dass man eine Mischung mit insgesamt 75 g erhält, die 100 mg Vitamin C enthält.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Menge an Schwarzen Johannisbeeren (in g) und die Menge an Kiwis (in g), die für diesen Smoothie gemischt werden müssen.

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

x ... Menge an Schwarzen Johannisbeeren in g
y ... Menge an Kiwis in g

I: $x + y = 75$
II: $1{,}77 \cdot x + 0{,}46 \cdot y = 100$

$x = 50$, $y = 25$

Für diesen Smoothie müssen 50 g Schwarze Johannisbeeren und 25 g Kiwis gemischt werden.

Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte. Die Angabe der Einheit ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

Grundkompetenz: AG 2.5

Gleichungssystem

Von einem linearen Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in den zwei Variablen x und y ist die Gleichung I gegeben.

$\mathrm{I}: 2 \cdot x + y = 1$

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems soll leer sein.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine passende Gleichung II in x und y an.

II: ____

[0 / 1 P.]

Möglicher Lösungsweg

II: $2 \cdot x + y = c$ mit $c \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
(z. B. II: $2 \cdot x + y = 5$)

Ein Punkt für das Angeben der richtigen Gleichung, wobei alle Gleichungen $2 \cdot x + y = c$ mit $c \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ (und alle dazu äquivalenten Gleichungen) richtig sind.

Schulsportwoche*

Aufgabennummer: 1_832	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Für eine Schulsportwoche bucht eine Schule in einem Jugendgästehaus x Vierbettzimmer und y Sechsbettzimmer. Alle gebuchten Zimmer werden vollständig belegt.
Die Buchung kann durch das nachstehende Gleichungssystem beschrieben werden.

I: $4 \cdot x + 6 \cdot y = 56$
II: $x + y = 12$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Es werden genau 4 Vierbettzimmer und genau 6 Sechsbettzimmer gebucht.	☐
Es werden weniger Vierbettzimmer als Sechsbettzimmer gebucht.	☐
Es werden genau 12 Zimmer gebucht.	☐
Es werden Betten für genau 56 Personen gebucht.	☐
Es werden genau 10 Zimmer gebucht.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

Es werden genau 12 Zimmer gebucht.	☒
Es werden Betten für genau 56 Personen gebucht.	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Lineares Gleichungssystem*

Aufgabennummer: 1_711	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.5

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem in den Variablen x_1 und x_2. Es gilt: $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{I: } & 3 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 = a \\ \text{II: } & b \cdot x_1 + x_2 = a \end{aligned}$$

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b so, dass für die Lösungsmenge des Gleichungssystems $L = \{(2; -2)\}$ ist.

a = ______________________________

b = ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$a = 14$
$b = 8$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

Gleichungssystem*

Aufgabennummer: 1_664	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.5

Gegeben ist ein Gleichungssystem aus zwei linearen Gleichungen in den Variablen $x, y \in \mathbb{R}$.

I: $a \cdot x + y = -2$ mit $a \in \mathbb{R}$
II: $3 \cdot x + b \cdot y = 6$ mit $b \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b so, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat!

a = ______________________________

b = ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

$a = -1$
$b = -3$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Projektwoche

Aufgabennummer: 1_568	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 2.5

An einer Projektwoche nehmen insgesamt 25 Schüler/innen teil. Die Anzahl der Mädchen wird mit x bezeichnet, die Anzahl der Burschen mit y. Die Mädchen werden in 3-Bett-Zimmern untergebracht, die Burschen in 4-Bett-Zimmern, insgesamt stehen 7 Zimmer zur Verfügung. Die Betten aller 7 Zimmer werden belegt, es bleiben keine leeren Betten übrig.

Aufgabenstellung:

Mithilfe eines Gleichungssystems aus zwei der nachstehenden Gleichungen kann die Anzahl der Mädchen und die Anzahl der Burschen berechnet werden.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an!

$x + y = 7$	☐
$x + y = 25$	☐
$3 \cdot x + 4 \cdot y = 7$	☐
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$	☐
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 25$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$x + y = 25$	☒
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 7$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

Futtermittel*

Aufgabennummer: 1_563	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.5

Ein Bauer hat zwei Sorten von Fertigfutter für die Rindermast gekauft.
Fertigfutter *A* hat einen Proteinanteil von 14 %, während Fertigfutter *B* einen Proteinanteil von 35 % hat.
Der Bauer möchte für seine Jungstiere 100 kg einer Mischung dieser beiden Fertigfutter-Sorten mit einem Proteinanteil von 18 % herstellen. Es sollen *a* kg der Sorte *A* mit *b* kg der Sorte *B* gemischt werden.

Aufgabenstellung:

Geben Sie zwei Gleichungen in den Variablen *a* und *b* an, mithilfe derer die für diese Mischung benötigten Mengen berechnet werden können!

1. Gleichung: ____

2. Gleichung: ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

1. Gleichung: $a + b = 100$

2. Gleichung: $0{,}14 \cdot a + 0{,}35 \cdot b = 0{,}18 \cdot (a + b)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe zweier korrekter Gleichungen. Andere korrekte Gleichungssysteme, die eine Berechnung der nötigen Mengen ermöglichen, sind ebenfalls als richtig zu werten.

Gleichungssystem*

Aufgabennummer: 1_516	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.5

Gegeben ist ein Gleichungssystem aus zwei linearen Gleichungen in den Variablen $x, y \in \mathbb{R}$:

I: $x + 4 \cdot y = -8$
II: $a \cdot x + 6 \cdot y = c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie diejenigen Werte für a und c, für die das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat!

a = ___________________________________

c = ___________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

$a = 1{,}5$
$c = -12$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der korrekten Werte von a und c. Andere korrekte Schreibweisen der Ergebnisse sind ebenfalls als richtig zu werten.

Gleichungssystem*

Aufgabennummer: 1_467	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 2.5

Gegeben ist ein Gleichungssystem aus zwei linearen Gleichungen in den Variablen $x, y \in \mathbb{R}$.

$2x + 3y = 7$
$3x + by = c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie diejenigen Werte für b und c, für die das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat!

b = ____

c = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$b = \frac{9}{2}$

$c = \frac{21}{2}$

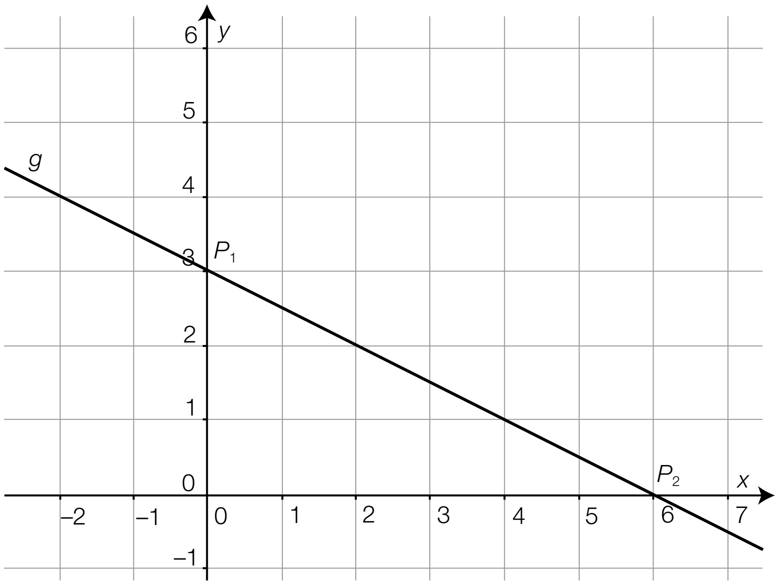
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der korrekten Werte von *b* und *c*. Andere korrekte Schreibweisen der Ergebnisse sind ebenfalls als richtig zu werten.

Gleichungssystem*

Aufgabennummer: 1_444	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Lückentext	Grundkompetenz: AG 2.5

Eine Teilmenge der Lösungsmenge einer linearen Gleichung wird durch die nachstehende Abbildung dargestellt. Die durch die Gleichung beschriebene Gerade *g* verläuft durch die Punkte P_1 und P_2, deren Koordinaten jeweils ganzzahlig sind.



Aufgabenstellung:

Die lineare Gleichung und eine zweite lineare Gleichung bilden ein lineares Gleichungssystem.

Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen der jeweils richtigen Satzteile so, dass eine korrekte Aussage entsteht!

Hat die zweite lineare Gleichung die Form ___①___ , so ___②___ .

①	
$2x + y = 1$	☐
$x + 2y = 8$	☐
$y = 5$	☐

②	
hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen	☐
ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $L = \{(-2\|4)\}$	☐
hat das Gleichungssystem keine Lösung	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

①	
$x + 2y = 8$	☒

②	
hat das Gleichungssystem keine Lösung	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.

Lineares Gleichungssystem*	
Aufgabennummer: 1_394	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 2.5

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem über der Grundmenge $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

I: $2x + y = 6$
II: $3x - y = -3$

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems über der Grundmenge G an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$x = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$

$y = \frac{24}{5} \notin \mathbb{N}$

$\Rightarrow L = \{\ \}$

Über der gegebenen Grundmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist die Lösungsmenge für das angegebene Gleichungssystem leer.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der korrekten Lösungsmenge. Die Lösungsmenge kann sowohl verbal formuliert als auch symbolisch angegeben sein. Die Werte für die beiden Variablen müssen nicht angegeben sein.

Vermietung

Alexander vermietet vier Wohnungen.
In der nachstehenden Tabelle sind die Bruttomieten und die Betriebskosten für ein bestimmtes Jahr angegeben.

	Bruttomiete (in €)	Betriebskosten (in €)
Wohnung 1	4800	1200
Wohnung 2	5500	1400
Wohnung 3	6000	1800
Wohnung 4	7000	1900

Die Spalten der Tabelle können als Vektoren angeschrieben werden. Dabei gibt der Vektor B die jeweiligen Bruttomieten und der Vektor K die jeweiligen Betriebskosten an.

Die Bruttomieten sind die Summe aus Nettomieten und Betriebskosten. Der Gewinn (nach Abzug der Steuern) beträgt 60 % der Nettomieten.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Vektor G, dessen Komponenten Alexanders Gewinne aus der Vermietung der vier Wohnungen sind.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$$G = 0{,}6 \cdot (B - K) = \begin{pmatrix} 2\,160 \\ 2\,460 \\ 2\,520 \\ 3\,060 \end{pmatrix}$$

Ein Punkt für das richtige Berechnen von G, wobei auch $0{,}6 \cdot (B - K)$ als richtig zu werten ist.

Grundkompetenz: AG 3.1

Körpergröße*

Aufgabennummer: 1_856	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	

Die Komponenten des Vektors K_1 geben die Körpergrößen der Kinder einer bestimmten Schulklasse (in cm) zu Beginn eines Schuljahres an.
Die Komponenten des Vektors K_2 geben die Körpergröße dieser Kinder (in cm) n Monate später an ($n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$). (Die Körpergrößen sind sowohl in K_1 als auch in K_2 in alphabetischer Reihenfolge der Namen der Kinder geordnet.)

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie den Vektor $\frac{1}{n} \cdot (K_2 - K_1)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

Der Vektor $\frac{1}{n} \cdot (K_2 - K_1)$ gibt (komponentenweise) für jedes Kind in der Schulklasse die mittlere Zunahme der Körpergröße in cm pro Monat an.

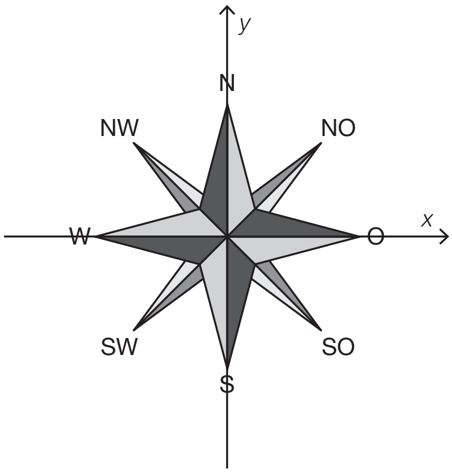
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Himmelsrichtungen*

Aufgabennummer: 1_761	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.1

Nachstehend ist eine symmetrische Windrose abgebildet, die Himmelsrichtungen zeigt.



Die Geschwindigkeit eines Schiffes, das in Richtung Nordwest (NW) fährt, wird durch den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ beschrieben.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Vektor $\vec{v}$ an, der die Geschwindigkeit eines Schiffes beschreibt, das in Richtung Nordost (NO) fährt.

$\vec{v}$ = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei jeder Vektor $\vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}^+$ als richtig zu werten ist.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Verkaufszahlen*

Aufgabennummer: 1_641	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AG 3.1

Ein Sportfachgeschäft bietet n verschiedene Sportartikel an. Die n Sportartikel sind in einer Datenbank nach ihrer Artikelnummer geordnet, sodass die Liste mit den entsprechenden Stückzahlen als Vektor (mit n Komponenten) aufgefasst werden kann.

Die Vektoren B, C und P (mit $B, C, P \in \mathbb{R}^n$) haben die folgende Bedeutung:

Vektor B: Die Komponente $b_i \in \mathbb{N}$ (mit $1 \leq i \leq n$) gibt den Lagerbestand des i-ten Artikels am Montagmorgen einer bestimmten Woche an.
Vektor C: Die Komponente $c_i \in \mathbb{N}$ (mit $1 \leq i \leq n$) gibt den Lagerbestand des i-ten Artikels am Samstagabend dieser Woche an.
Vektor P: Die Komponente $p_i \in \mathbb{R}$ (mit $1 \leq i \leq n$) gibt den Stückpreis (in Euro) des i-ten Artikels in dieser Woche an.

Das Fachgeschäft ist in der betrachteten Woche von Montag bis Samstag geöffnet und im Laufe dieser Woche werden weder Sportartikel nachgeliefert noch Stückpreise verändert.

Aufgabenstellung:

Am Ende der Woche werden Daten für die betrachtete Woche (Montag bis Samstag) ausgewertet, wobei die erforderlichen Berechnungen mithilfe von Termen angeschrieben werden können.

Ordnen Sie den vier gesuchten Größen jeweils den für die Berechnung zutreffenden Term (aus A bis F) zu!

durchschnittliche Verkaufszahlen (pro Sportartikel) pro Tag in der betrachteten Woche	
Gesamteinnahmen durch den Verkauf von Sportartikeln in der betrachteten Woche	
Verkaufszahlen (pro Sportartikel) in der betrachteten Woche	
Verkaufswert des Lagerbestands an Sportartikeln am Ende der betrachteten Woche	

A	$6 \cdot (B - C)$
B	$B - C$
C	$\frac{1}{6} \cdot (B - C)$
D	$P \cdot C$
E	$P \cdot (B - C)$
F	$6 \cdot P \cdot (B - C)$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

durchschnittliche Verkaufszahlen (pro Sportartikel) pro Tag in der betrachteten Woche	C
Gesamteinnahmen durch den Verkauf von Sportartikeln in der betrachteten Woche	E
Verkaufszahlen (pro Sportartikel) in der betrachteten Woche	B
Verkaufswert des Lagerbestands an Sportartikeln am Ende der betrachteten Woche	D

A	$6 \cdot (B - C)$
B	$B - C$
C	$\frac{1}{6} \cdot (B - C)$
D	$P \cdot C$
E	$P \cdot (B - C)$
F	$6 \cdot P \cdot (B - C)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jeder der vier gesuchten Größen ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist.

Bundesinstitut bifie
Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Perlensterne

Aufgabennummer: 1_208	Prüfungsteil: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.1

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Für einen Adventmarkt sollen Perlensterne hergestellt werden. Den Materialbedarf für die verschiedenen Modelle kann man der nachstehenden Tabelle entnehmen.

Den Spalten der Tabelle entsprechen Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

- Materialbedarfsvektor S_1 für den Stern 1
- Materialbedarfsvektor S_2 für den Stern 2
- Kostenvektor K pro Packung zu 10 Stück
- Lagerbestand L

	Material Stern 1	Material Stern 2	Kosten pro Packung Perlen	Lagerbestand der Perlen-Packungen
Wachsperlen 6 mm	1	0	€ 0,20	8
Wachsperlen 3 mm	72	84	€ 0,04	100
Glasperlen 6 mm	0	6	€ 0,90	12
Glasperlen oval	8	0	€ 1,50	9

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Bedeutung des Ausdrucks $10 \cdot L - (5 \cdot S_1 + 8 \cdot S_2)$ in diesem Zusammenhang an!

Möglicher Lösungsweg

$10 \cdot L - (5 \cdot S_1 + 8 \cdot S_2)$ gibt die verschiedenen noch vorhandenen Perlen nach der Fertigung von 5 Sternen nach Modell 1 und 8 Sternen nach Modell 2 an.

Lösungsschlüssel

Die Interpretation muss sinngemäß jener der Lösungserwartung entsprechen.

Betriebsgewinn

Aufgabennummer: 1_206	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.1

Ein Betrieb produziert und verkauft die Produkte $P_1, \ldots, P_5$. In der vorangegangenen Woche wurden x_i Stück des Produkts P_i produziert und auch verkauft. Das Produkt P_i wird zu einem Stückpreis v_i verkauft, k_i sind die Herstellungskosten pro Stück P_i.
Die Vektoren X, V und K sind folgendermaßen festgelegt:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \\ k_5 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung:

Geben Sie mithilfe der gegebenen Vektoren einen Term an, der für diesen Betrieb den Gewinn G der letzten Woche beschreibt!

$G =$ ____

Lösungserwartung

$G = X \cdot V - X \cdot K$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen korrekten Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

Energiesparlampen

Aufgabennummer: 1_207	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.1

Ein Händler handelt mit 7 verschiedenen Typen von Energiesparlampen. In der Buchhaltung verwendet er folgende 7-dimensionale Vektoren (die Werte in den Vektoren beziehen sich auf einen bestimmten Tag):

- Lagerhaltungsvektor L_1 für Lager 1 zu Beginn des Tages
- Lagerhaltungsvektor L_2 für Lager 2 zu Beginn des Tages
- Vektor P der Verkaufspreise
- Vektor B, der die Anzahl der an diesem Tag ausgelieferten Lampen angibt

Aufgabenstellung:

Interpretieren Sie den Ausdruck $(L_1 + L_2 - B) \cdot P$ in diesem Zusammenhang!

Lösungserwartung

Die Zahl $(L_1 + L_2 - B) \cdot P$ gibt den Lagerwert der am Ende des Tages in den beiden Lagern noch vorhandenen Lampen an.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Würstelstand*

Aufgabennummer: 1_569	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.1

Ein Würstelstandbesitzer führt Aufzeichnungen über die Anzahl der täglich verkauften Würstel. Die Aufzeichnung eines bestimmten Tages ist nachstehend angegeben:

	Anzahl der verkauften Portionen	Verkaufspreis pro Portion (in Euro)	Einkaufspreis pro Portion (in Euro)
Frankfurter	24	2,70	0,90
Debreziner	14	3,00	1,20
Burenwurst	11	2,80	1,00
Käsekrainer	19	3,20	1,40
Bratwurst	18	3,20	1,20

Die mit Zahlenwerten ausgefüllten Spalten der Tabelle können als Vektoren angeschrieben werden. Dabei gibt der Vektor A die Anzahl der verkauften Portionen, der Vektor B die Verkaufspreise pro Portion (in Euro) und der Vektor C die Einkaufspreise pro Portion (in Euro) an.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Ausdruck mithilfe der Vektoren A, B und C an, der den an diesem Tag erzielten Gesamtgewinn des Würstelstandbesitzers bezogen auf den Verkauf der Würstel beschreibt!

Gesamtgewinn = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

Gesamtgewinn = $A \cdot (B - C)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen korrekten Ausdruck. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Position eines Schiffes

Ein Schiff fährt an einem bestimmten Tag von 8:10 Uhr bis 8:30 Uhr mit konstanter Geschwindigkeit einen geradlinigen Kurs.

In einem kartesischen Koordinatensystem wird die Position dieses Schiffes um 8:10 Uhr durch den Punkt $A = (2|3)$ festgelegt, die Position um 8:30 Uhr durch den Punkt $B = (10|5)$.

Der Vektor $\vec{s}$ beschreibt die Veränderung der Position dieses Schiffes in einem Zeitintervall von 5 min.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Komponenten des Vektors $\vec{s}$ an.

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

[0/1 P.]

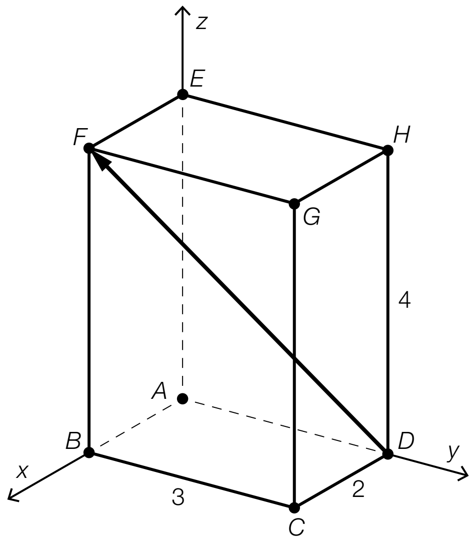
Möglicher Lösungsweg

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} \boxed{2} \\ \boxed{0{,}5} \end{pmatrix}$$

Ein Punkt für das Angeben der richtigen Komponenten.

Quader

In der nachstehenden Abbildung ist ein Quader *ABCDEFGH* in einem dreidimensionalen Koordinatensystem dargestellt. Die Längen der Kanten des Quaders können aus der Abbildung entnommen werden (Angaben in Zentimetern).



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{DF}$ an.

$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$

[0/1 P.]

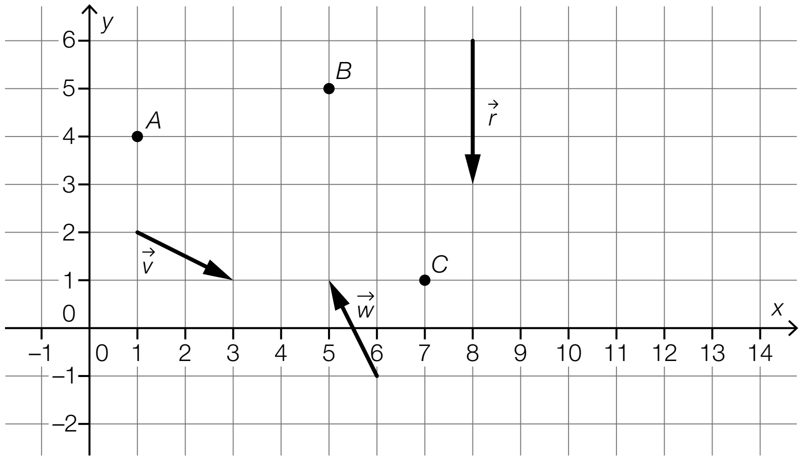
Möglicher Lösungsweg

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ein Punkt für das Angeben der richtigen Koordinaten.

Punkte und Vektoren

Im nachstehenden Koordinatensystem sind die drei Punkte A, B und C sowie die drei Vektoren $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ eingezeichnet.
Die Koordinaten der Punkte und die Komponenten der Vektoren sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$A = B + t \cdot \vec{r}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☐
$B = C + t \cdot \vec{v}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☐
$C = B + t \cdot \vec{w}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☐
$B = A + t \cdot \vec{w}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☐
$C = A + t \cdot \vec{v}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$C = B + t \cdot \vec{w}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☒
$C = A + t \cdot \vec{v}$ für ein $t \in \mathbb{R}$	☒

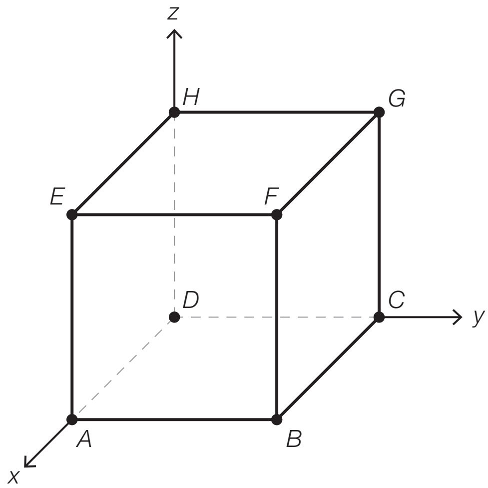
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Würfel und Vektor*

Aufgabennummer: 1_857	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Würfel, dessen Grundfläche *ABCD* in der *xy*-Ebene liegt.



Zwei Eckpunkte dieses Würfels legen einen bestimmten Vektor fest, der in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ verläuft.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diesen Vektor an. *[1 aus 6]*

$\overrightarrow{EC}$	☐
$\overrightarrow{FD}$	☐
$\overrightarrow{GA}$	☐
$\overrightarrow{GD}$	☐
$\overrightarrow{HA}$	☐
$\overrightarrow{HB}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$\overrightarrow{GA}$	☒

Lösungsschlüssel

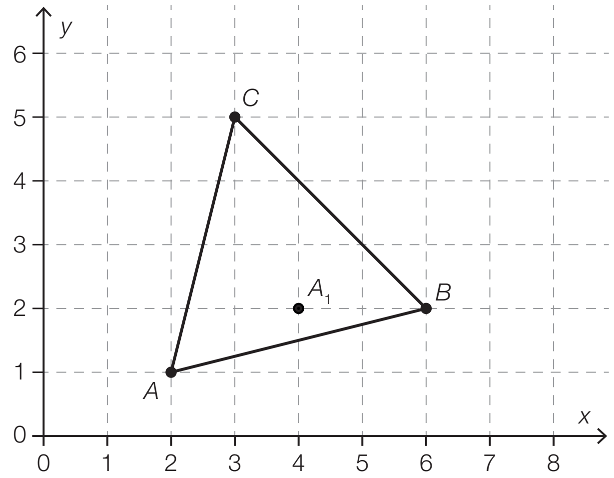
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Dreieck verschieben*

Aufgabennummer: 1_806	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.2

In der nachstehenden Abbildung sind ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C sowie der Punkt A_1 dargestellt. Die gekennzeichneten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



Das Dreieck soll so um den Vektor $\overrightarrow{AA_1}$ verschoben werden, dass die Punkte A, B und C in die Punkte A_1, B_1 und C_1 übergehen.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C_1.

C_1 = (_______ | _______)

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

$C_1 = (5|6)$

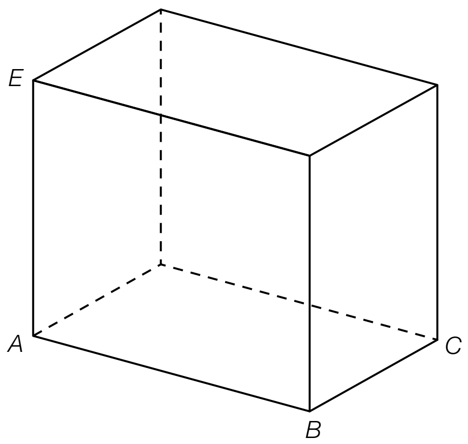
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Koordinaten des Punktes C_1.
Bei nur einer richtigen Koordinate ist ein halber Punkt zu geben.

Eckpunkte eines Quaders*

Aufgabennummer: 1_689	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.2

In der nachstehenden Abbildung ist ein Quader dargestellt. Die Eckpunkte A, B, C und E sind beschriftet.



Aufgabenstellung:

Für weitere Eckpunkte R, S und T des Quaders gilt:

$R = E + \overrightarrow{AB}$

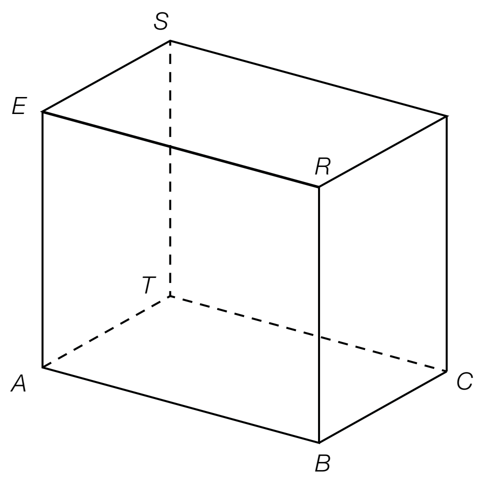
$S = A + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$

$T = E + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AE}$

Beschriften Sie in der oben stehenden Abbildung klar erkennbar die Eckpunkte R, S und T!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

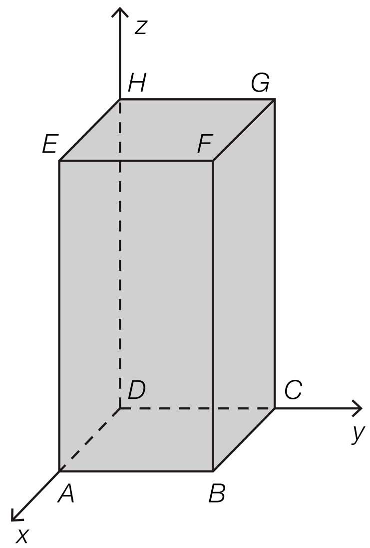
Ein Punkt für die richtige Zuordnung der drei Eckpunkte *R*, *S* und *T*.

Quader mit quadratischer Grundfläche*

Aufgabennummer: 1_562	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.2

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Quader, dessen quadratische Grundfläche in der *xy*-Ebene liegt. Die Länge einer Grundkante beträgt 5 Längeneinheiten, die Körperhöhe beträgt 10 Längeneinheiten. Der Eckpunkt *D* liegt im Koordinatenursprung, der Eckpunkt *C* liegt auf der positiven *y*-Achse.

Der Eckpunkt *E* hat somit die Koordinaten $E = (5|0|10)$.



Aufgabenstellung:

Geben Sie die Koordinaten (Komponenten) des Vektors $\overrightarrow{HB}$ an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

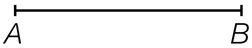
$$\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Vektors sind ebenfalls als richtig zu werten.

Teilungspunkt*

Aufgabennummer: 1_539	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.2

Die gegebene Strecke *AB*: 

wird innen durch den Punkt *T* im Verhältnis 3 : 2 geteilt.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Formel für die Berechnung des Punkts *T* auf!

T = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

Mögliche Formeln:

$T = A + \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$

oder:

$T = \frac{2}{5} \cdot A + \frac{3}{5} \cdot B$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Paralleler Vektor

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ein Vektor $\vec{b}$ soll zum Vektor $\vec{a}$ parallel sein und eine größere Länge als $\vec{a}$ haben.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Komponenten eines möglichen Vektors $\vec{b}$ an.

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

möglicher Vektor:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \boxed{4} \\ \boxed{-2} \\ \boxed{6} \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{b}$ muss ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$ sein, der Betrag des Proportionalitätsfaktors muss größer als 1 sein. Jeder Vektor $\vec{b}$ der Form $\vec{b} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $|k| > 1$ ist daher richtig.

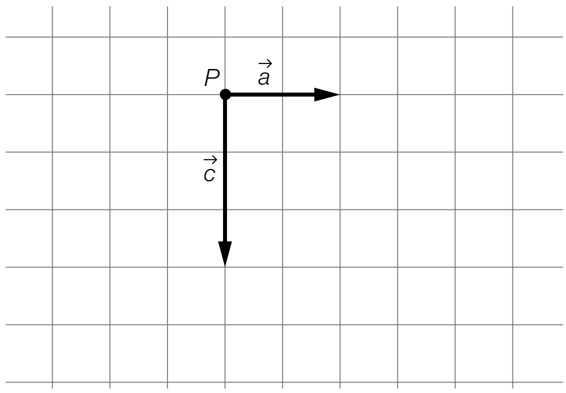
Ein Punkt für das Angeben der richtigen Komponenten.

Grafische Darstellung von Vektoren

In der unten stehenden Abbildung sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ als Pfeile ausgehend vom Punkt P dargestellt.

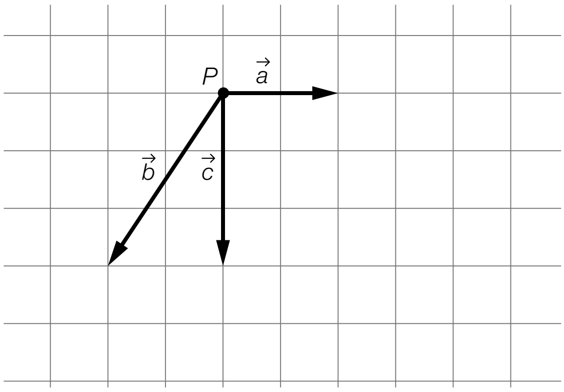
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie ausgehend vom Punkt P den Vektor $\vec{b}$ als Pfeil so ein, dass gilt:
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



[0/1 P.]

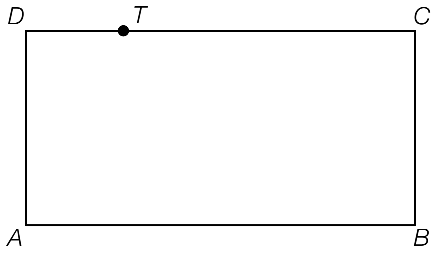
Möglicher Lösungsweg



Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Vektors $\vec{b}$ als Pfeil ausgehend von P.

Teilungspunkt einer Rechteckseite

Nachstehend ist ein Rechteck mit den Eckpunkten A, B, C und D dargestellt. Der Punkt T teilt die Strecke CD im Verhältnis 3 : 1 (siehe nachstehende Abbildung).



Für den Punkt T gilt:
$T = A + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{DA}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie r und s.

r = ____

s = ____

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

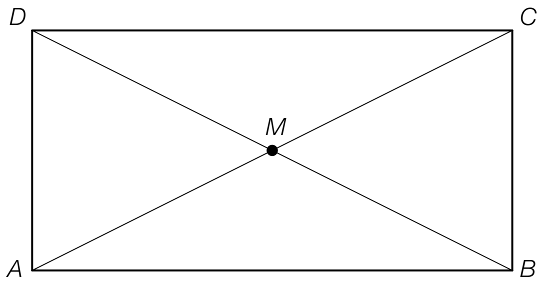
$r = \frac{1}{4}$

$s = -1$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln von r und s, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Vektoren im Rechteck

Nachstehend ist ein Rechteck mit den Eckpunkten *A*, *B*, *C* und *D* dargestellt. Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen ist mit *M* bezeichnet.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$	☐
$\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CM}$	☐
$\frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{CD} = -\frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$	☐
$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD}$	☐
$\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB}$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$	☒
$\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB}$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

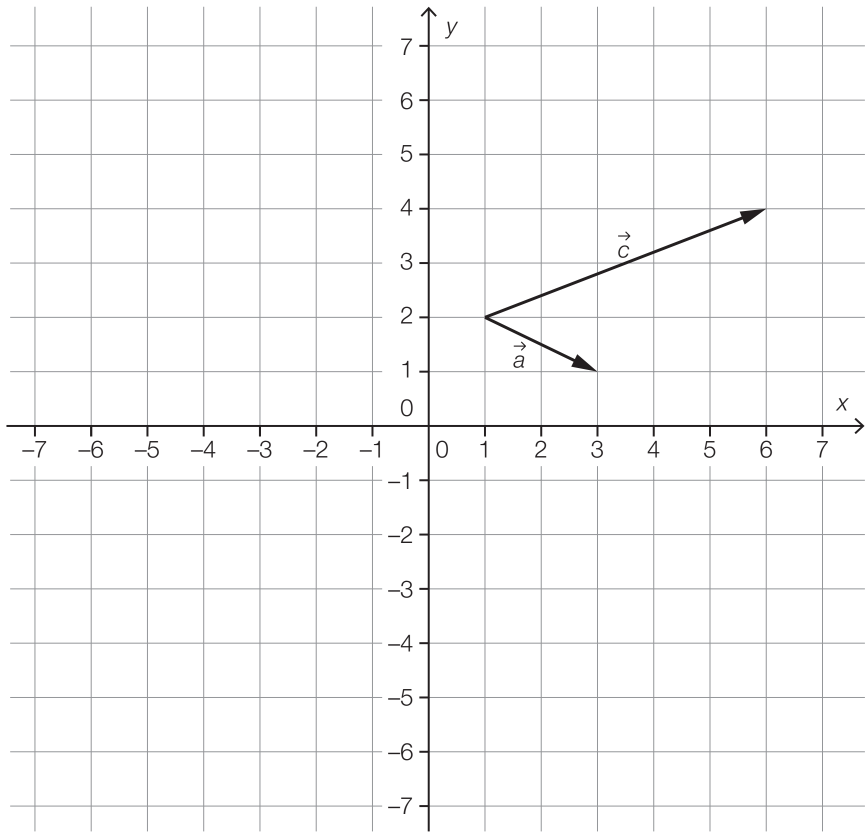
Vektoren*

Aufgabennummer: 1_858	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	

Im unten stehenden Koordinatensystem sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ eingezeichnet.
Es gilt: $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

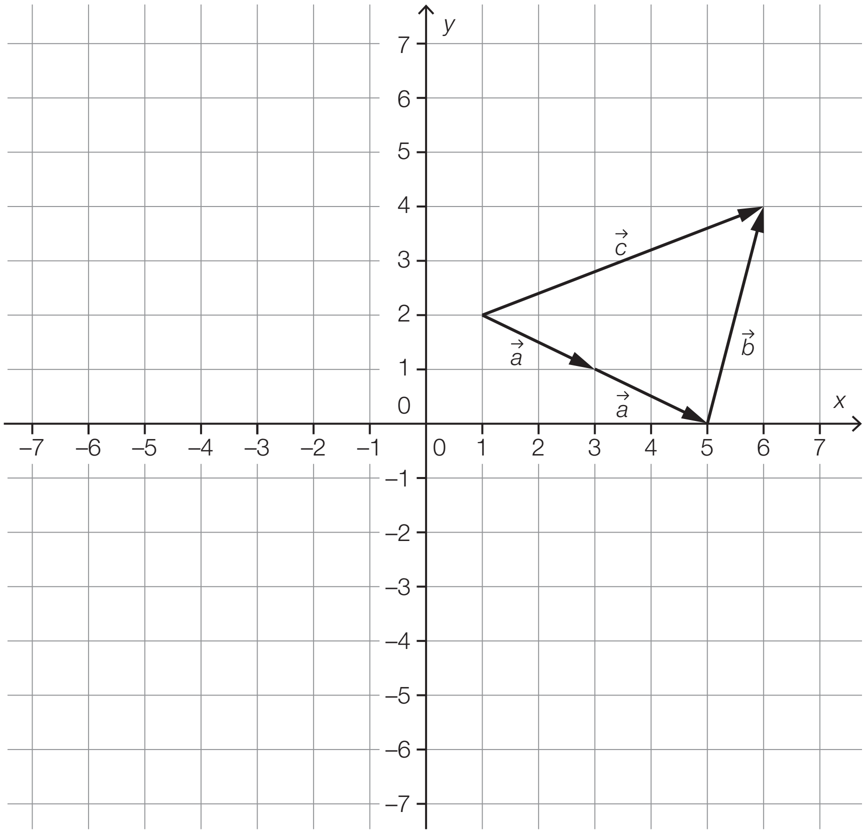
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie den Vektor $\vec{b}$ ein.



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung



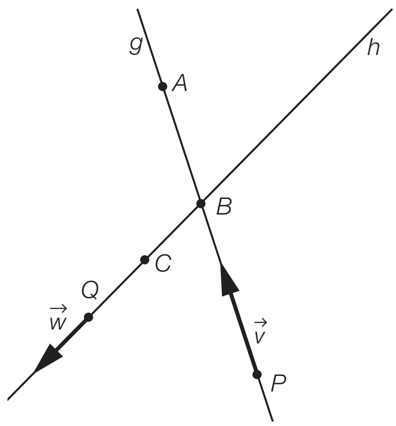
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Vektors $\vec{b}$, wobei die Pfeilspitze eingezeichnet sein muss, die Lage des Pfeiles (mit den richtigen Komponenten) jedoch beliebig ist.

Parameterdarstellung von Geraden*

Aufgabennummer: 1_833	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Die nachstehende Abbildung zeigt die beiden Geraden g und h. Auf jeder der Geraden sind drei Punkte gekennzeichnet: $A, B, P \in g$ bzw. $B, C, Q \in h$.
Zusätzlich ist von jeder Geraden ein Richtungsvektor dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, bei denen $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s \neq 0$ und $t \neq 0$ so gewählt werden können, dass die jeweilige Aussage wahr ist. *[2 aus 5]*

$A = C + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$	☐
$B = C + s \cdot \vec{v}$	☐
$B = Q + t \cdot \vec{w}$	☐
$A = P + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$	☐
$C = P + t \cdot \vec{w}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$A = C + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$	☒
$B = Q + t \cdot \vec{w}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Normalvektoren*

Aufgabennummer: 1_393	Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Vektoren an, die auf $\vec{a}$ normal stehen.

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015, adaptiert

Lösungserwartung

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	☒
$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$	☒

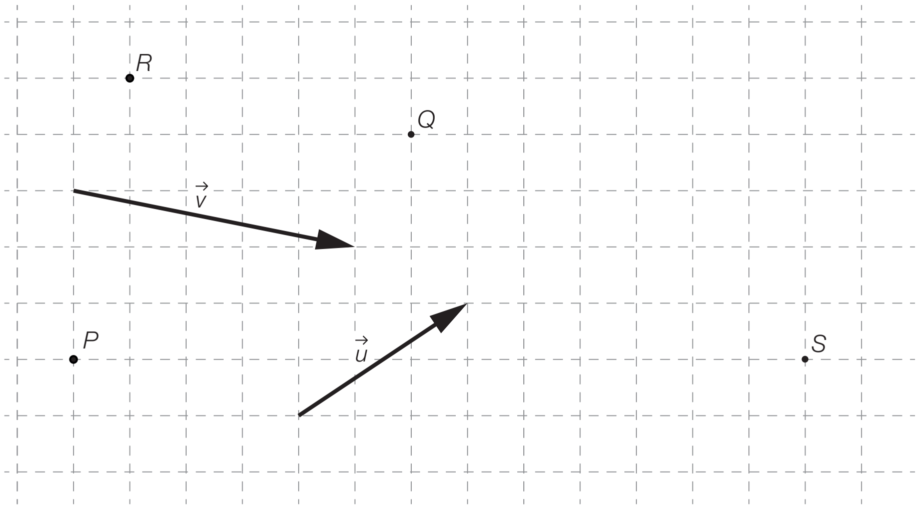
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Vektoren*

Aufgabennummer: 1_785	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Zuordnungsformat	Grundkompetenz: AG 3.3

In der nachstehenden Abbildung sind die vier Punkte P, Q, R und S sowie die zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dargestellt.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Vektoren jeweils den entsprechenden Ausdruck (aus A bis F) zu.

$\overrightarrow{PQ}$	
$\overrightarrow{PR}$	
$\overrightarrow{QR}$	
$\overrightarrow{PS}$	

A	$2 \cdot \vec{u} - \vec{v}$
B	$2 \cdot \vec{v} - \vec{u}$
C	$-\vec{v}$
D	$2 \cdot \vec{v} + \vec{u}$
E	$2 \cdot \vec{u}$
F	$2 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

$\overrightarrow{PQ}$	E
$\overrightarrow{PR}$	A
$\overrightarrow{QR}$	C
$\overrightarrow{PS}$	D

A	$2 \cdot \vec{u} - \vec{v}$
B	$2 \cdot \vec{v} - \vec{u}$
C	$-\vec{v}$
D	$2 \cdot \vec{v} + \vec{u}$
E	$2 \cdot \vec{u}$
F	$2 \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{v}$

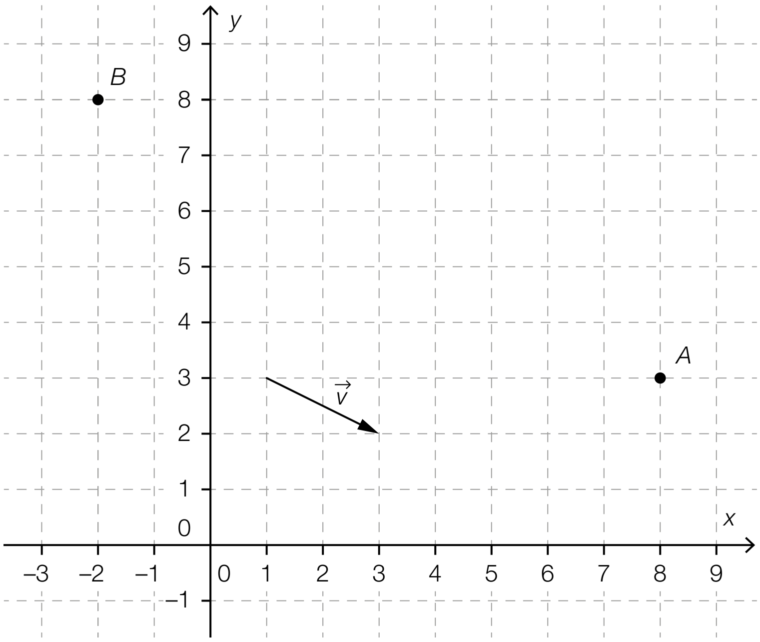
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn jedem der vier Vektoren ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Buchstabe zugeordnet ist. Bei zwei oder drei richtigen Zuordnungen ist ein halber Punkt zu geben.

Darstellung im Koordinatensystem*

Aufgabennummer: 1_712	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.3

Im nachstehenden Koordinatensystem sind der Vektor $\vec{v}$ sowie die Punkte A und B dargestellt. Die Komponenten des dargestellten Vektors $\vec{v}$ und die Koordinaten der beiden Punkte A und B sind ganzzahlig.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie den Wert des Parameters t so, dass die Gleichung $B = A + t \cdot \vec{v}$ erfüllt ist.

t = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$t = -5$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

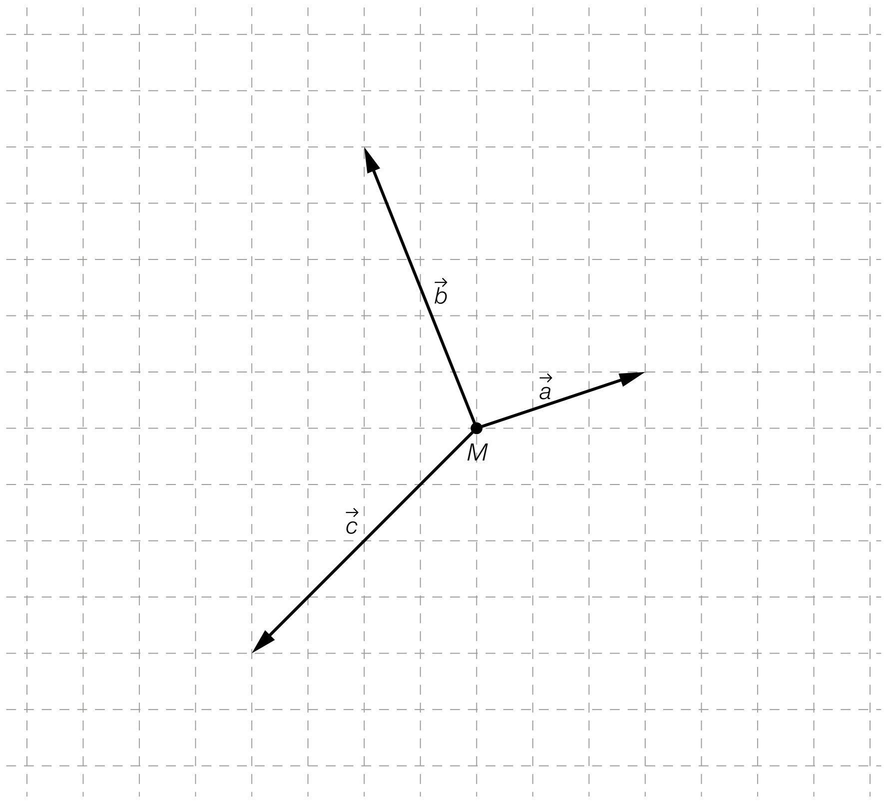
Kräfte*

Aufgabennummer: 1_617	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.3

An einem Massenpunkt M greifen drei Kräfte an. Diese sind durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gegeben.

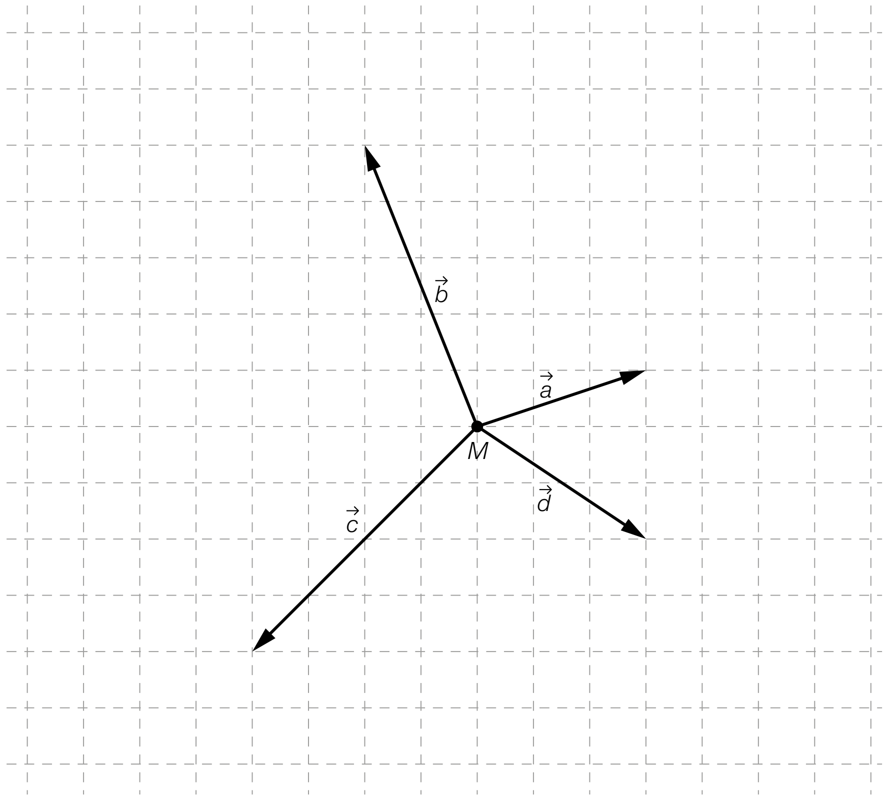
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung einen Kraftvektor $\vec{d}$ so ein, dass die Summe aller vier Kräfte (in jeder Komponente) gleich null ist!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Darstellung von $\vec{d}$, wobei $\vec{d}$ auch von einem anderen Ausgangspunkt aus gezeichnet sein kann.

Orthogonale Vektoren*

Aufgabennummer: 1_593	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.3

Gegeben sind die nachstehend angeführten Vektoren:

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie x so, dass die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ aufeinander normal stehen!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$\vec{d} \cdot \vec{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2 - x) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

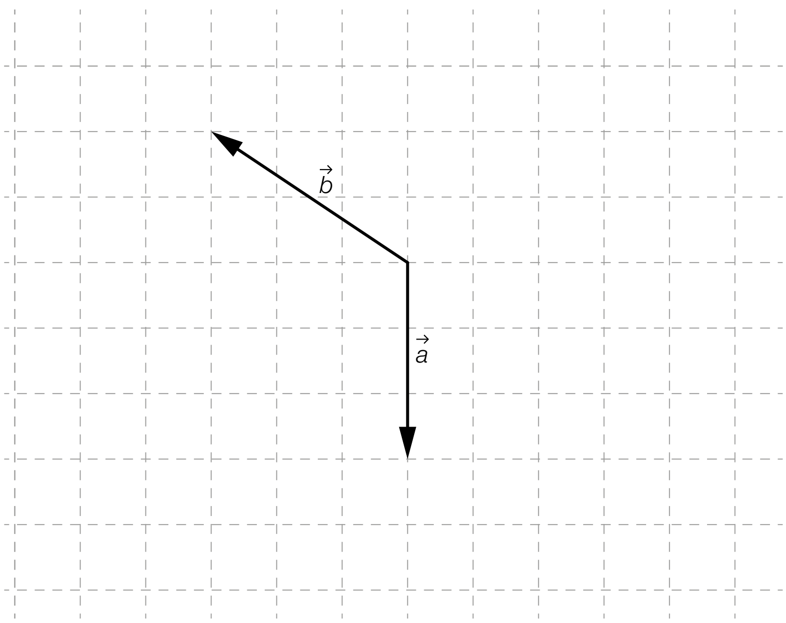
Vektoren in der Ebene*

Aufgabennummer: 1_570	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.3

Die unten stehende Abbildung zeigt zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

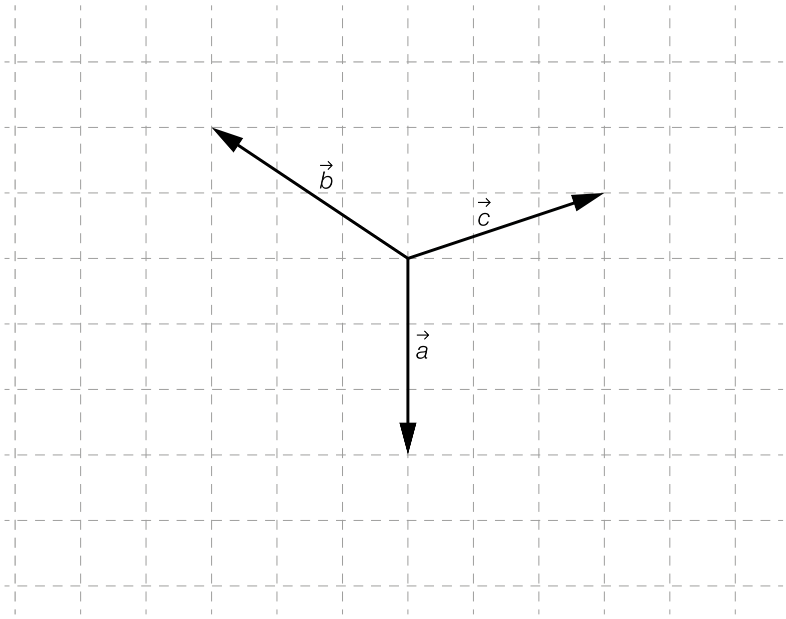
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in die Abbildung einen Vektor $\vec{c}$ so ein, dass die Summe der drei Vektoren den Nullvektor ergibt, also $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Darstellung von $\vec{c}$, wobei der gesuchte Vektor auch von anderen Ausgangspunkten aus gezeichnet werden kann.

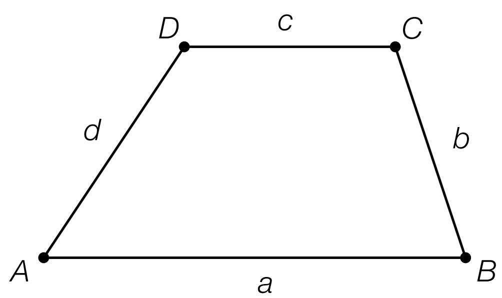
Trapez*

Aufgabennummer: 1_538	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.3

Von einem Trapez *ABCD* sind die Koordinaten der Eckpunkte gegeben:

$A = (2|-6)$
$B = (10|-2)$
$C = (9|2)$
$D = (3|y)$

Die Seiten $a = AB$ und $c = CD$ sind zueinander parallel.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Wert der Koordinate *y* des Punkts *D* an!

y = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{CD} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ y-2 \end{pmatrix}$

$8 = -6 \cdot t \;\Rightarrow\; t = -\frac{4}{3}$

somit:

$4 = -\frac{4}{3} \cdot (y-2) \;\Rightarrow\; y = -1$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Vektoren*

Aufgabennummer: 1_515	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.3

In der Ebene werden auf einer Geraden in gleichen Abständen nacheinander die Punkte A, B, C und D markiert.

Es gilt also:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$

Die Koordinaten der Punkte A und C sind bekannt.

$A = (3|1)$
$C = (7|8)$

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Koordinaten von D!

$D = ($ ______ | ______ $)$

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$D = C + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad D = (9|11{,}5)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Koordinaten des gesuchten Punktes *D*.
Andere Schreibweisen der Koordinaten sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

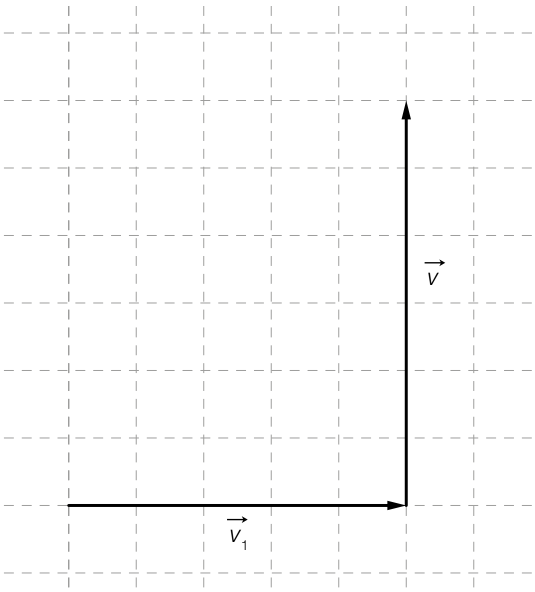
Vektoraddition*

Aufgabennummer: 1_489	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.3

Die unten stehende Abbildung zeigt zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}$.

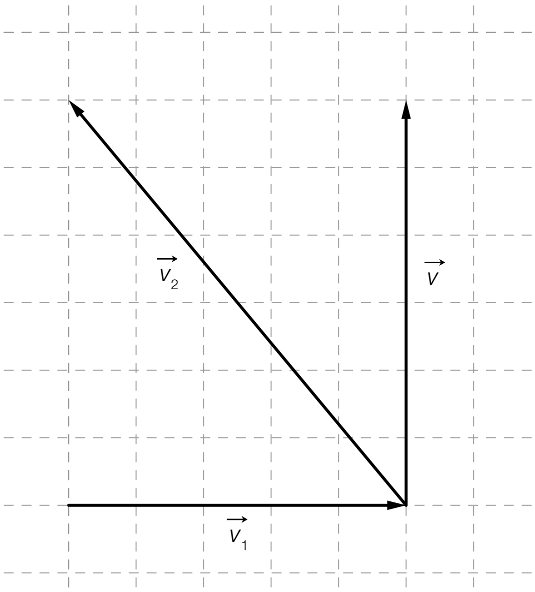
Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie in der Abbildung einen Vektor $\vec{v}_2$ so, dass $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$ ist!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Darstellung von $\vec{v}_2$, wobei der gesuchte Vektor auch von anderen Ausgangspunkten aus gezeichnet werden kann.

Normalvektoren*

Aufgabennummer: 1_466	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.3

Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinate z_b des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ z_b \end{pmatrix}$ so, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander normal stehen!

z_b = ______________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$z_b = -9$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

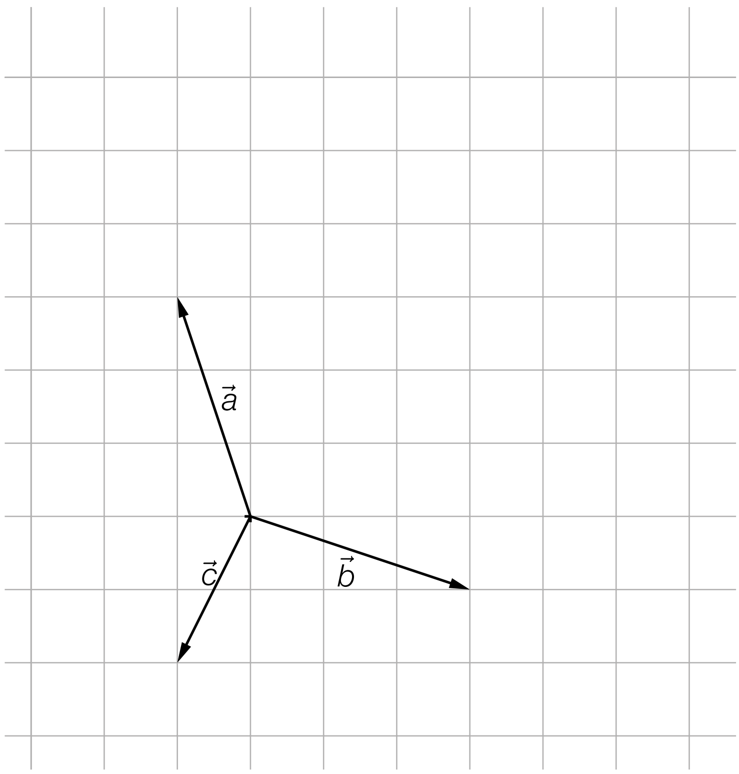
Vektoren*

Aufgabennummer: 1_443	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.3

In der unten stehenden Abbildung sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Pfeile dargestellt.

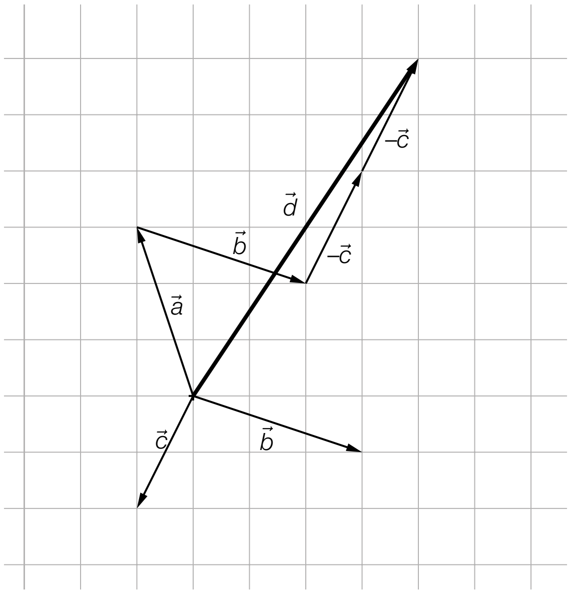
Aufgabenstellung:

Stellen Sie den Vektor $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$ als Pfeil dar!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Darstellung des gesuchten Pfeils, wobei der Lösungspfeil auch von anderen Ausgangspunkten aus gezeichnet werden kann.

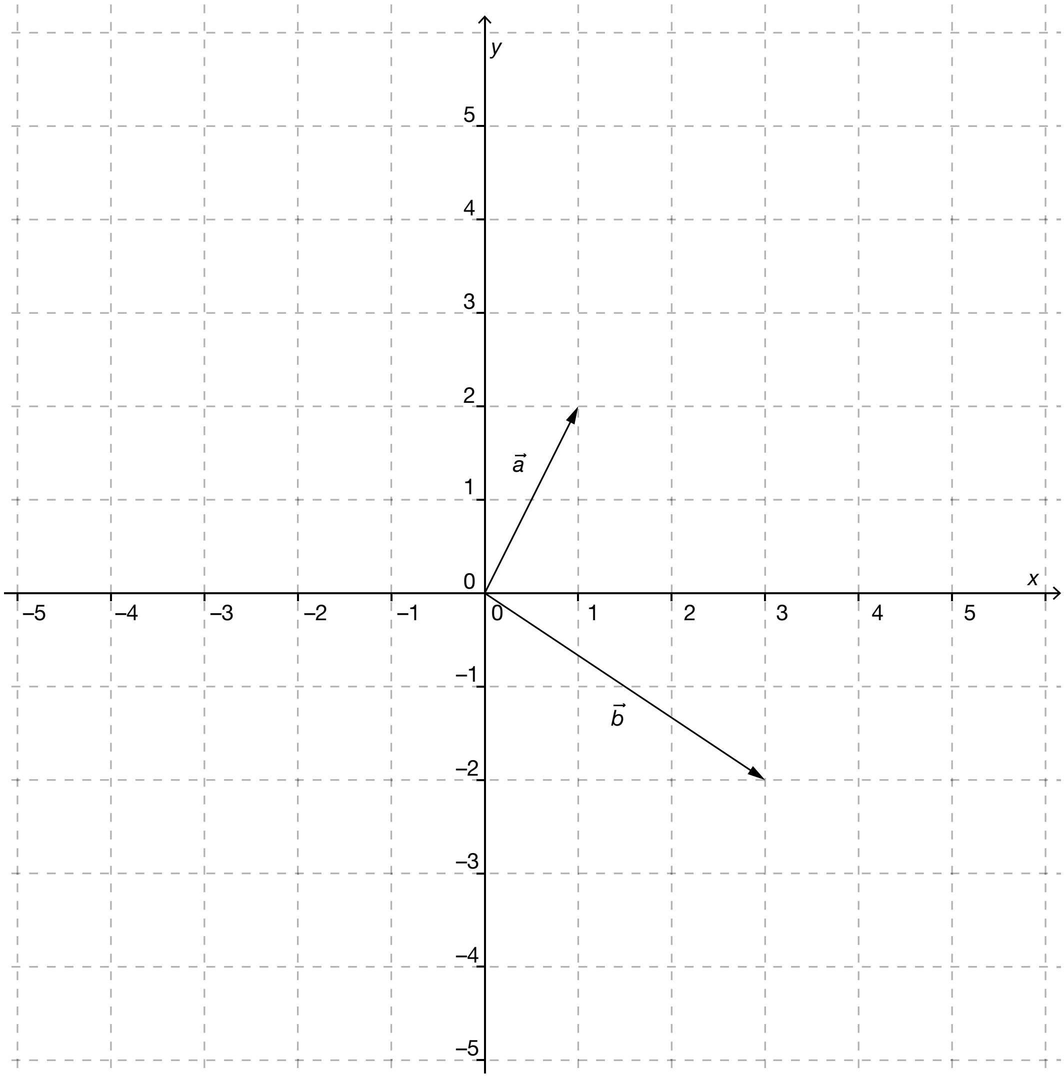
Vektoraddition*

Aufgabennummer: 1_370	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.3

Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

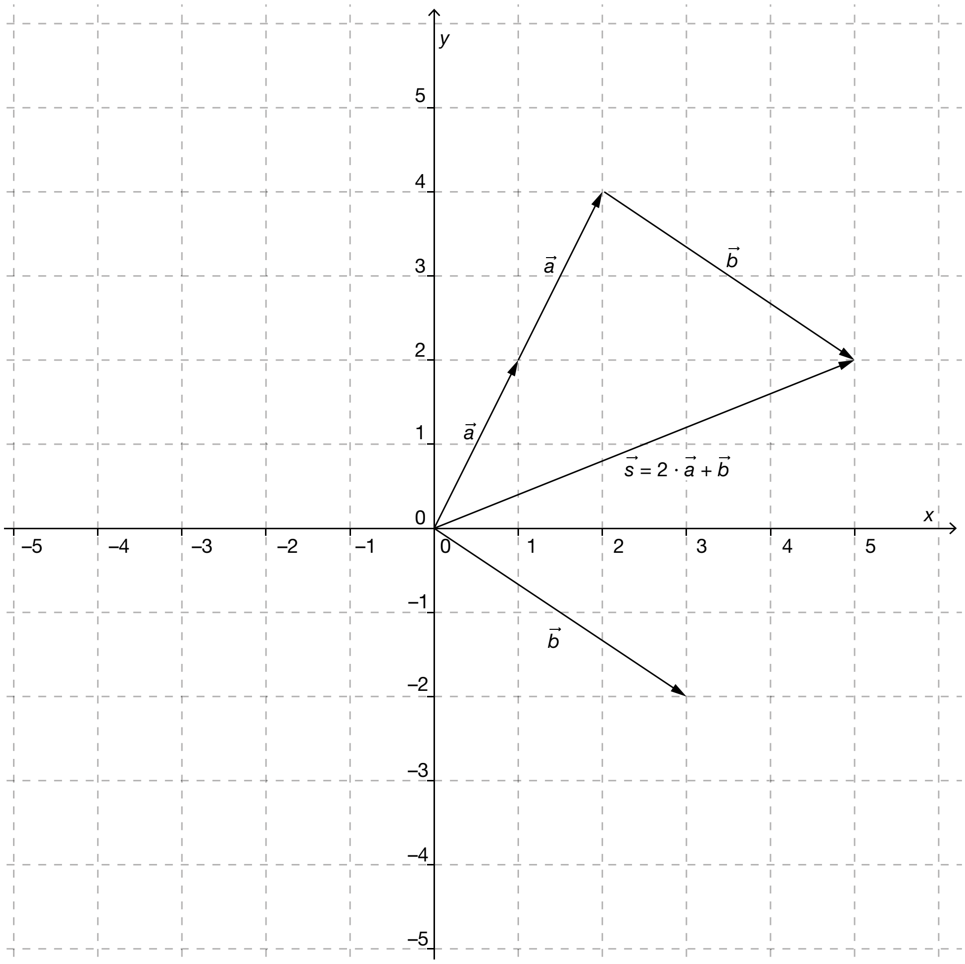
Aufgabenstellung:

Stellen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Vektor $\vec{s}$ mit $\vec{s} = 2 \cdot \vec{a} + \vec{b}$ als Pfeil dar!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

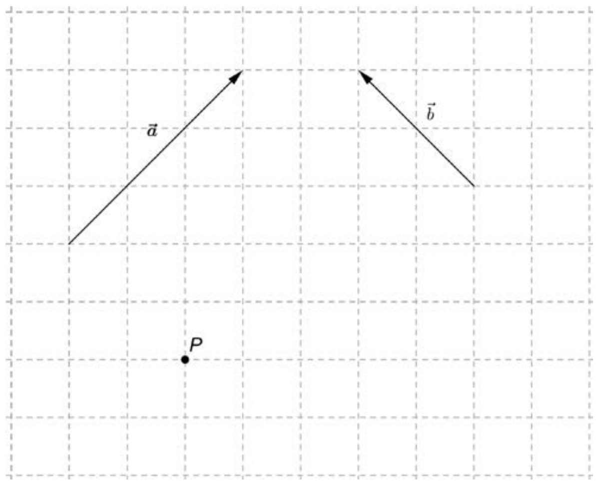
Ein Punkt für die richtige Lösung. Die Lösung ist dann als richtig zu werten, wenn der Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ richtig dargestellt ist. Die Spitze des Vektors $\vec{s}$ muss korrekt und klar erkennbar eingezeichnet sein. Als Ausgangspunkt kann ein beliebiger Punkt gewählt werden. Die Summanden müssen nicht dargestellt werden.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Vektorkonstruktion*

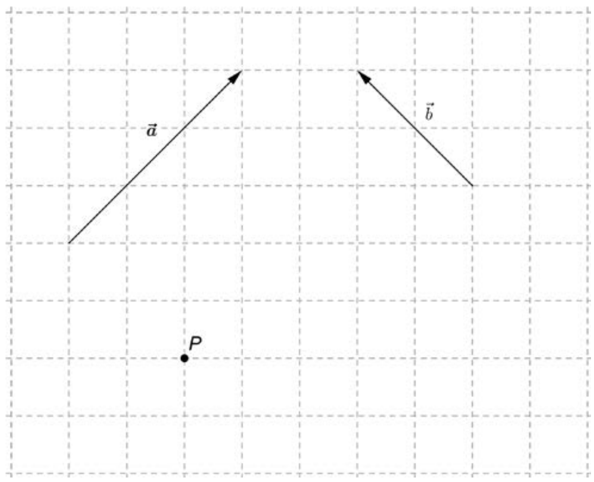
Aufgabennummer: 1_346	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 3.3

Die Abbildung zeigt zwei als Pfeile dargestellte Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und einen Punkt P.



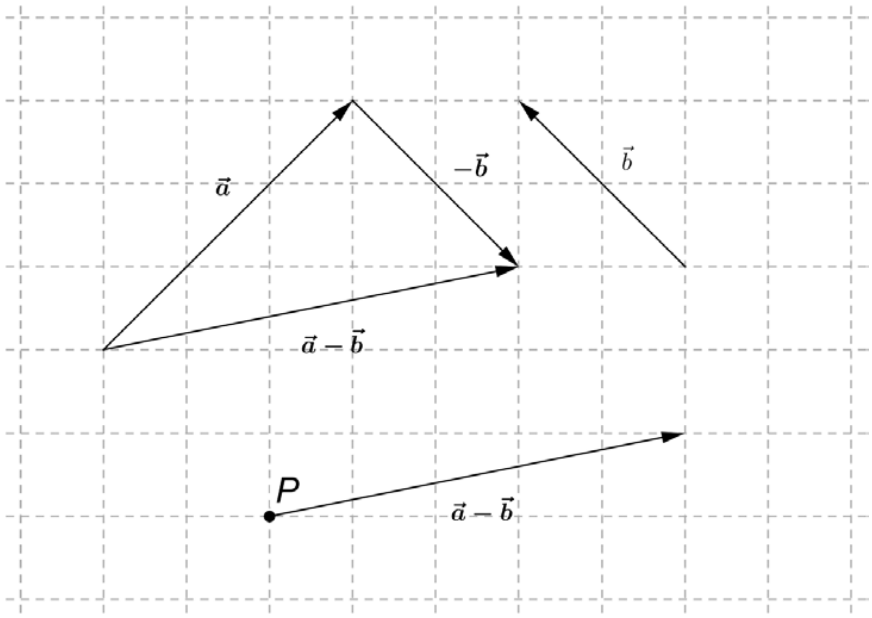
Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die unten stehende Abbildung um einen Pfeil, der vom Punkt P ausgeht und den Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ darstellt!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Darstellung des gesuchten Pfeils ausreicht. Der Anfangspunkt des Ergebnispfeils muss *P* sein.

Geradengleichungen

Gegeben sind die Geraden g und h mit den Gleichungen $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $h: X = \begin{pmatrix} 2 \\ b \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.
Die Geraden g und h sind identisch.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die reellen Zahlen a und b.

a = ____

b = ____

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$a = 2$
$b = 1$

Ein Punkt für das richtige Ermitteln von a und b, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Zwei Geraden im Raum

Gegeben sind zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^3$.

- $g: X = A + t \cdot \vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$
- $h: X = B + s \cdot \vec{b}$ mit $s \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Falls ___①___ gilt, sind die Geraden g und h auf jeden Fall ___②___.

①	
$A \notin h$ und $\vec{a} = \vec{b}$	☐
$B \in g$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	☐
$\vec{a} = r \cdot \vec{b}$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $B \notin g$	☐

②	
schneidend	☐
identisch	☐
windschief	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

①	
$B \in g$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$	☒

②	
schneidend	☒

Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

Normale Geraden

Gegeben ist die Parameterdarstellung der Geraden g:

$$g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Für eine Gerade n gilt:

- n steht normal auf g.
- n schneidet g im Punkt $P = (2|-4|9)$.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden n in Parameterdarstellung auf.

$n: X =$ ______________________________________

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

z. B. $n\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung, wobei die Gerade n den Punkt P enthalten muss und ihr Richtungsvektor normal auf den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ stehen muss.

Der Punkt ist auch dann zu geben, wenn „mit $t \in \mathbb{R}$“ nicht angegeben ist.

Punkt einer Geraden

Gegeben sind die Gerade g in $\mathbb{R}^3$ mit $g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$,
und der Punkt $A = \begin{pmatrix} 10 \\ -19 \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.
Der Punkt A liegt auf der Geraden g.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie a.

a = ____________________

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$a = -11$

Ein Punkt für das richtige Berechnen von a.

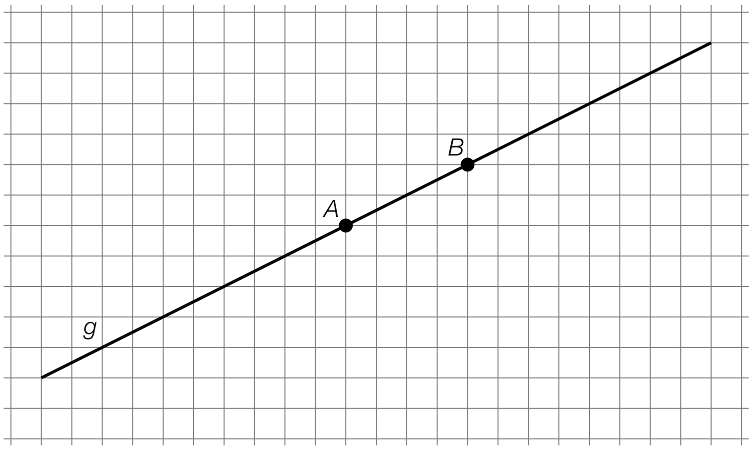
Punkt auf einer Geraden

Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B und kann durch $g: X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Für den Punkt $C \in g$ gilt: $t = -1{,}5$.

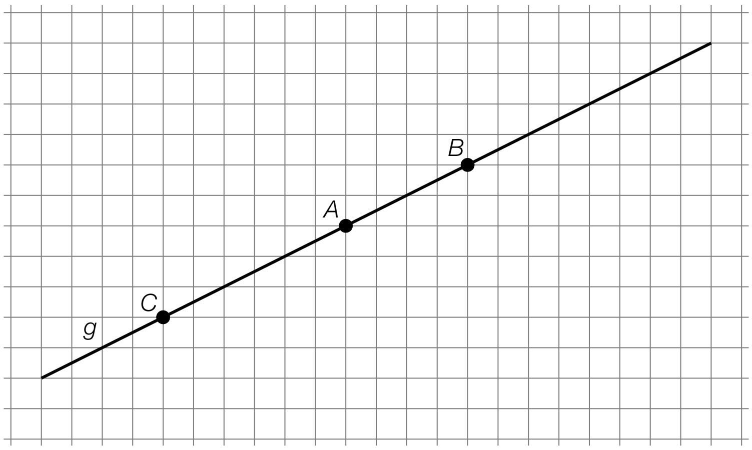
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der nachstehenden Abbildung den Punkt C ein.



[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg



Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Punktes *C*.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Parameterdarstellung*

Aufgabennummer: 1_810	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Gegeben ist eine Gerade g mit der Parameterdarstellung $g\colon X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie t so, dass $X = B$ gilt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

$t = 1$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Geraden in $\mathbb{R}^2$*

Aufgabennummer: 1_786	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.4

Für die zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^2$ gilt:

- Die Gerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{g}$ hat den Normalvektor $\vec{n}_g$.
- Die Gerade h mit dem Richtungsvektor $\vec{h}$ hat den Normalvektor $\vec{n}_h$.
- Die Geraden g und h stehen normal aufeinander.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Bedingungen an, die auf jeden Fall gelten.

$\vec{n}_g \cdot \vec{h} = 0$	☐
$\vec{n}_g \cdot \vec{n}_h = 0$	☐
$\vec{g} = r \cdot \vec{h}$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐
$\vec{g} = r \cdot \vec{n}_h$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐
$\vec{g} \cdot \vec{n}_h = 0$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

$\overrightarrow{n_g} \cdot \overrightarrow{n_h} = 0$	☒
$\vec{g} = r \cdot \overrightarrow{n_h}$ mit $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☒

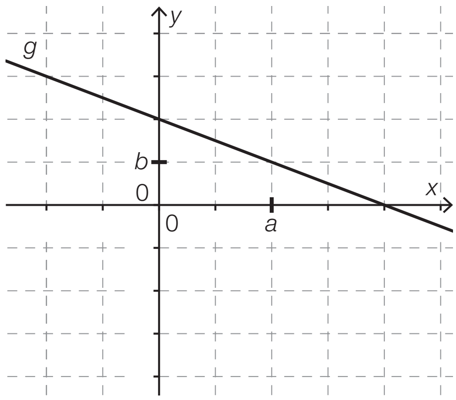
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Bedingungen angekreuzt sind.

Skalierung der Koordinatenachsen*

Aufgabennummer: 1_762	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Im nachstehenden Koordinatensystem, dessen Achsen unterschiedlich skaliert sind, ist eine Gerade g dargestellt. Auf der x-Achse ist a und auf der y-Achse ist b markiert. Dabei sind a und b ganzzahlig.
Die Gerade g wird durch $y = -2 \cdot x + 4$ beschrieben.



Aufgabenstellung:

Geben Sie a und b an.

a = ______________________________

b = ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$a = 1$
$b = 2$

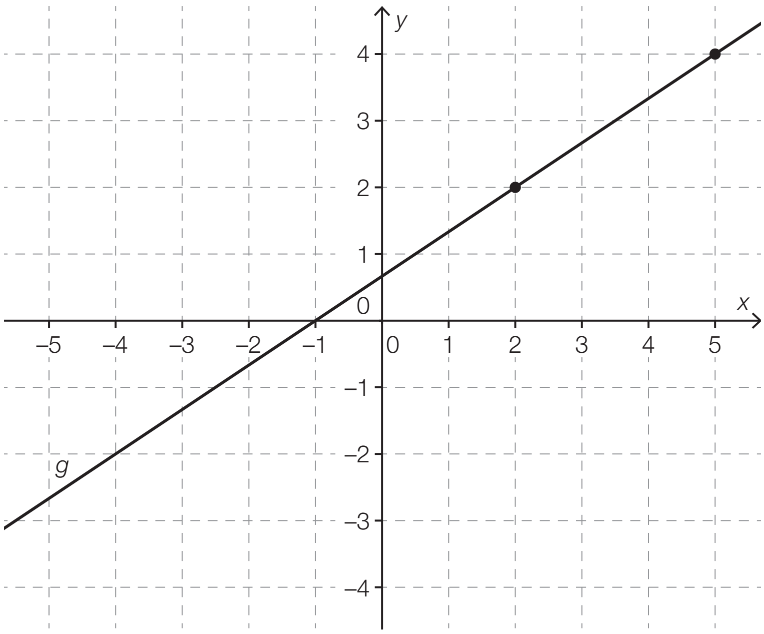
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Ist nur einer der angegebenen Werte richtig, ist ein halber Punkt zu geben.

Parallele Gerade durch einen Punkt*

Aufgabennummer: 1_738	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Im nachstehenden Koordinatensystem ist eine Gerade *g* abgebildet. Die gekennzeichneten Punkte der Geraden *g* haben ganzzahlige Koordinaten.



Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Parameterdarstellung einer zu *g* parallelen Geraden *h* durch den Punkt $(3|-1)$ an.

$h: X =$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

$h: X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Parameterdarstellung der Geraden *h*, wobei „$t \in \mathbb{R}$" nicht angegeben sein muss. Äquivalente Parameterdarstellungen der Geraden *h* sind als richtig zu werten.

Gleichung einer Geraden aufstellen*

Aufgabennummer: 1_713	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Die Punkte $A = (7|6)$, $M = (-1|7)$ und $N = (8|1)$ sind gegeben.
Eine Gerade g verläuft durch den Punkt A und steht normal auf die Verbindungsgerade durch die Punkte M und N.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$g: 3 \cdot x - 2 \cdot y = 9$

oder:

$g: X = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösungsschlüssel

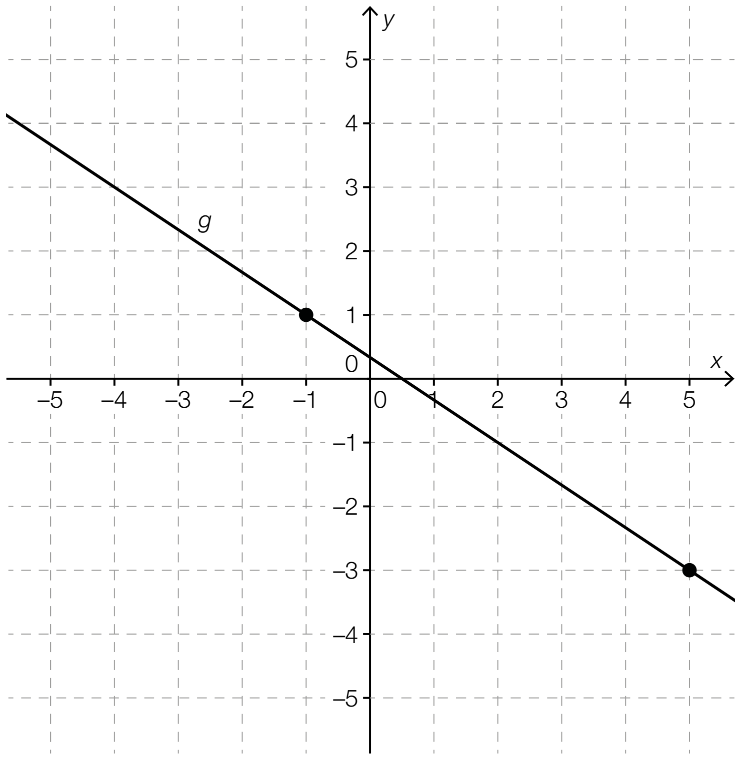
Ein Punkt für eine richtige Gleichung bzw. eine korrekte Parameterdarstellung der Geraden *g*, wobei „$t \in \mathbb{R}$" nicht angegeben sein muss.
Äquivalente Gleichungen bzw. äquivalente Parameterdarstellungen der Geraden *g* sind als richtig zu werten.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Parameterdarstellung einer Geraden*

Aufgabennummer: 1_690	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

In der nachstehenden Abbildung ist eine Gerade g dargestellt. Die gekennzeichneten Punkte der Geraden g haben ganzzahlige Koordinaten.



Aufgabenstellung:

Vervollständigen Sie folgende Parameterdarstellung der Geraden g durch Angabe der Werte für a und b mit $a, b \in \mathbb{R}$!

$g\colon X = \begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ b \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

a = ______________________________

b = ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

$a = -4$
$b = -2$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Parallele Geraden*

Aufgabennummer: 1_665	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.4

Gegeben sind die Parameterdarstellungen zweier Geraden $g\colon X = P + t \cdot \vec{u}$ und $h\colon X = Q + s \cdot \vec{v}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ und $\vec{u}, \vec{v} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Welche der nachstehend angeführten Aussagen sind unter der Voraussetzung, dass die beiden Geraden zueinander parallel, aber nicht identisch sind, stets zutreffend?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an!

$P = Q$	☐
$P \in h$	☐
$Q \notin g$	☐
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	☐
$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$ für ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

$Q \notin g$	☒
$\vec{u} = a \cdot \vec{v}$ für ein $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

Zur x-Achse parallele Gerade*

Aufgabennummer: 1_642	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Gegeben ist eine Gerade g mit der Parameterdarstellung $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \vec{a}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ so an, dass die Gerade g parallel zur x-Achse verläuft!

$\vec{a}$ = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen korrekten Vektor $\vec{a}$. Jeder Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $a_1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist als richtig zu werten.

Parallelität von Geraden*

Aufgabennummer: 1_561	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Gegeben sind folgende Parameterdarstellungen der Geraden g und h:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

$$h\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Koordinaten h_y und h_z des Richtungsvektors der Geraden h so, dass die Gerade h zur Geraden g parallel ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

$h_y = -2$

$h_z = -4$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte von h_y und h_z.

Parallele Gerade*

Aufgabennummer: 1_537	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Gegeben ist die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Die Gerade h verläuft parallel zu g durch den Koordinatenursprung.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Gleichung der Geraden h in der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ an!

h: ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung
$h: \; 3 \cdot x - 2 \cdot y = 0$

Lösungsschlüssel
Ein Punkt für eine korrekte Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Geradengleichung*

Aufgabennummer: 1_514	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Die Gerade g ist durch eine Parameterdarstellung $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ gegeben.

Aufgabenstellung:

Geben Sie mögliche Werte der Parameter a und b so an, dass die durch die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = 1$ gegebene Gerade h normal zur Geraden g ist!

$a =$ ______________________________

$b =$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Mögliche Werte der Parameter:

$a = 3$
$b = -5$

Lösungsschlüssel

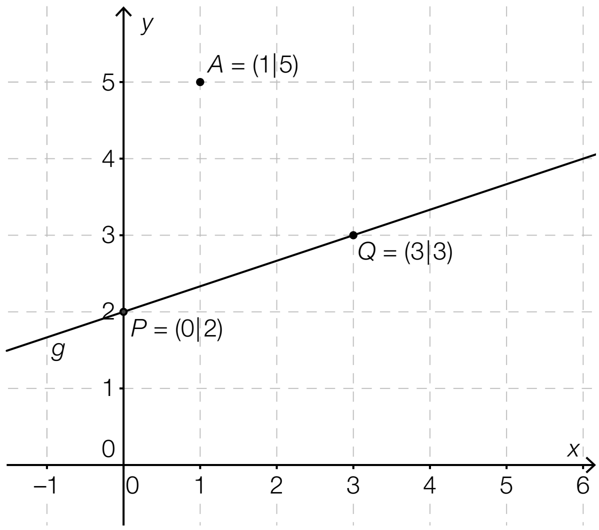
Ein Punkt für mögliche Werte der Parameter a und b, wobei $a = 3t$ und $b = -5t$ mit $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gelten muss.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Gleichung einer Geraden*

Aufgabennummer: 1_465	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

In der nachstehenden Abbildung sind eine Gerade g durch die Punkte P und Q sowie der Punkt A dargestellt.



Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h, die durch A verläuft und normal zu g ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$h: 3x + y = 8$

oder:

$h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Gleichung bzw. eine korrekte Parameterdarstellung der Geraden h, wobei „$t \in \mathbb{R}$" nicht angegeben sein muss.
Äquivalente Gleichungen bzw. äquivalente Parameterdarstellungen der Geraden h sind als richtig zu werten.

Schnittpunkt einer Geraden mit der x-Achse*

Aufgabennummer: 1_442	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Gegeben ist folgende Parameterdarstellung einer Geraden g:

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der x-Achse an!

S = ____________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$$\begin{cases} 1 + t = x \\ -5 + 7t = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{5}{7},\; x = \frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow \quad S = \left(\frac{12}{7} \,\middle|\, 0\right)$$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei beide Koordinaten des gesuchten Punktes korrekt angegeben sein müssen. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die erste Koordinate: [1,70; 1,72]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Parameterdarstellung einer Geraden*

Aufgabennummer: 1_418	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Die zwei Punkte $A = (-1|-6|2)$ und $B = (5|-3|-3)$ liegen auf einer Geraden g in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden g unter Verwendung der konkreten Koordinaten der Punkte A und B an!

$g: X =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

$g: X = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Parameterdarstellung der Geraden g, wobei $t \in \mathbb{R}$ nicht angegeben sein muss. Äquivalente Parameterdarstellungen der Geraden g sind als richtig zu werten. Die Angabe der Parameterdarstellung nur in allgemeiner Form wie z. B. $g: X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ genügt nicht.

Geradengleichung*	
Aufgabennummer: 1_392	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Gegeben ist eine Gerade *g* mit der Gleichung $2 \cdot x - 5 \cdot y = -6$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Gleichung der Geraden *h* an, die durch den Punkt $(0|0)$ geht und zur Geraden *g* parallel ist!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2015

Lösungserwartung

$h: 2 \cdot x - 5 \cdot y = 0$

oder:

$h: y = \frac{2}{5} \cdot x$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Alle äquivalenten Gleichungen sind als richtig zu werten. Auch die Angabe einer korrekten Parameterdarstellung der Geraden *h* ist als richtig zu werten.

Parameterdarstellung von Geraden*

Aufgabennummer: 1_369	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 3.4

Gegeben ist eine Gerade g:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Welche der folgenden Geraden h_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) mit $t_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, 5$) sind parallel zu g? Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Antworten an!

$h_1\colon X = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$h_2\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$	☐
$h_3\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$	☐
$h_4\colon X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☐
$h_5\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t_5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

$h_2: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$	☒
$h_4: X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t_4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Antwortmöglichkeiten angekreuzt sind.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Parallele Geraden*	
Aufgabennummer: 1_345	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.4

Gegeben sind Gleichungen der Geraden g und h. Die beiden Geraden sind nicht identisch.

$g\colon y = -\frac{x}{4} + 8$

$h\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$

Aufgabenstellung:

Begründen Sie, warum diese beiden Geraden parallel zueinander liegen!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

Parallele Geraden haben die gleiche Steigung bzw. parallele Richtungsvektoren.

$k_g = -\frac{1}{4}$

$\vec{a_h} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ und aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ folgt $k_h = k_g$

oder

$g\colon X = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

Somit ist $\vec{a_g} = \vec{a_h}$.

Oder:

Auch eine Begründung mit Normalvektoren ist möglich.

$g\colon x + 4y = 32$
$h\colon x + 4y = 16$

Somit ist $\vec{n_g} \parallel \vec{n_h}$.

oder

$\vec{n_g} \cdot \vec{a_h} = 0$

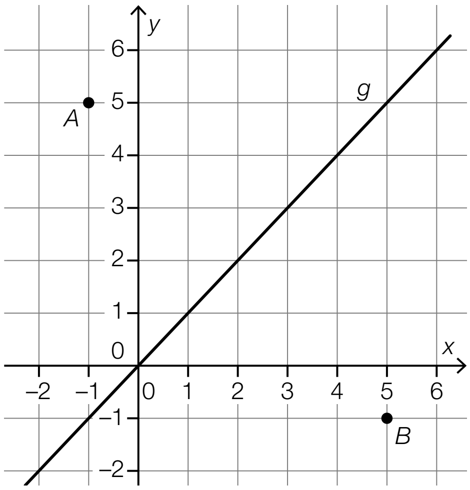
Lösungsschlüssel

Ein Punkt wird vergeben, wenn eine Begründung vorhanden und mathematisch korrekt ist.

Vektor und Gerade

In der unten stehenden Abbildung sind die Punkte A und B sowie die Gerade $g: y = x$ dargestellt.

Die Punkte A und B haben ganzzahlige Koordinaten.



Aufgabenstellung:

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Vektor $\overrightarrow{AB}$ normal auf die Gerade g steht.

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

Richtungsvektor von g: $\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\vec{g} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = 6 - 6 = 0$

Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.

Grundkompetenz: AG 3.5

Normalvektoren

Gegeben ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \cdot a \end{pmatrix}$ mit $a > 1$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Vektoren an, die normal auf $\vec{v}$ stehen. *[2 aus 5]*

$\begin{pmatrix} -3 \cdot a \\ 7 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 1{,}5 \cdot a \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} -6 \cdot a^2 \\ -14 \cdot a \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 3{,}5 \cdot a \end{pmatrix}$	☐
$\begin{pmatrix} 9 \cdot a^2 \\ -21 \cdot a \end{pmatrix}$	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

$\begin{pmatrix} 1{,}5 \cdot a \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$	☒
$\begin{pmatrix} -6 \cdot a^2 \\ -14 \cdot a \end{pmatrix}$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Quadrat*

Aufgabennummer: 1_834	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	

Von einem Quadrat mit den Eckpunkten A, B, C und D sind der Eckpunkt $C = (5|-3)$ und der Schnittpunkt der Diagonalen $M = (3|1)$ gegeben. Die Eckpunkte A, B, C und D des Quadrats sind dabei gegen den Uhrzeigersinn angeordnet.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte A und B.

A = ___________________________________

B = ___________________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$A = (1 \mid 5)$
$B = (-1 \mid -1)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Koordinaten beider Eckpunkte, ein halber Punkt für die richtigen Koordinaten nur eines Eckpunkts.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Beziehung zwischen Vektoren*

Aufgabennummer: 1_666	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.5

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \cdot m \\ n \end{pmatrix}$ mit $m, n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Aufgabenstellung:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen aufeinander normal stehen. Geben Sie für diesen Fall n in Abhängigkeit von m an!

$n =$ ____________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

$n = -26 \cdot m$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Rechter Winkel*

Aufgabennummer: 1_618	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.5

Gegeben ist eine Strecke *AB* im $\mathbb{R}^2$ mit $A = (3|4)$ und $B = (-2|1)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen möglichen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{n} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ an, der mit der Strecke *AB* einen rechten Winkel einschließt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

möglicher Vektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Lösung. Jeder Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{n} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, für den $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ist als richtig zu werten.

Normalvektor*

Aufgabennummer: 1_441	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 3.5

Gegeben sind die beiden Punkte $A = (-2|1)$ und $B = (3|-1)$.

Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Vektor $\vec{n}$ an, der auf den Vektor $\overrightarrow{AB}$ normal steht!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Jeder Vektor $\overrightarrow{n}$ mit $\overrightarrow{n} = c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ ist ebenfalls als richtig zu werten.

Vektoren*

Aufgabennummer: 1_417	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 3.5

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die unbekannte Koordinate b_1 so, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normal aufeinander stehen!

b_1 = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

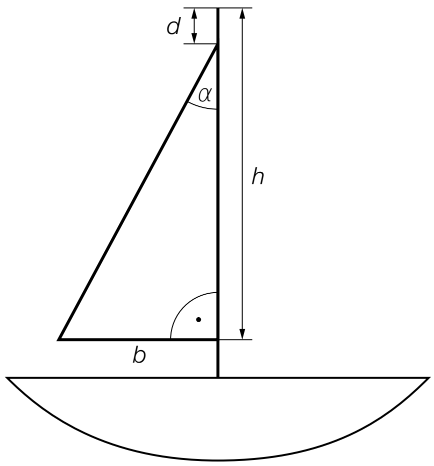
$b_1 = 6$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.

Segelboot

In der nachstehenden Abbildung ist ein Modell eines Segelboots dargestellt.



Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Winkels α auf. Verwenden Sie dabei h, d und b.

$\alpha =$ ____________________________________

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

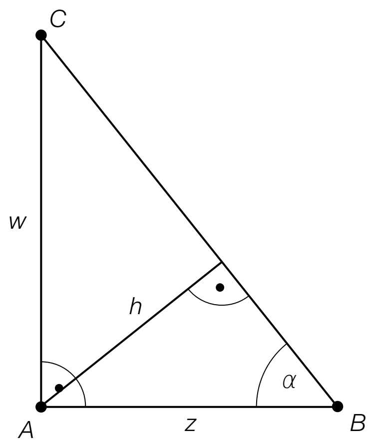
$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{h-d}\right)$ *oder* $\alpha = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + (h-d)^2}}\right)$ *oder* $\alpha = \arccos\left(\frac{h-d}{\sqrt{b^2 + (h-d)^2}}\right)$

Auch die Schreibweisen mit „$\tan^{-1}$“ oder „$\sin^{-1}$“ oder „$\cos^{-1}$“ sind als richtig zu werten.

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Dreieck

In der nachstehenden Abbildung ist ein rechtwinkeliges Dreieck *ABC* dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die Gleichung an, die jedenfalls zutrifft. *[1 aus 6]*

$h = \frac{w}{\sin(\alpha)} \cdot \cos(\alpha)$	☐
$h = \frac{w}{\cos(\alpha)} \cdot \sin(\alpha)$	☐
$h = \frac{w}{\sin(\alpha)} \cdot \tan(\alpha)$	☐
$h = \frac{w}{\tan(\alpha)} \cdot \sin(\alpha)$	☐
$h = \frac{\sin(\alpha)}{w} \cdot \tan(\alpha)$	☐
$h = \frac{\sin(\alpha)}{w} \cdot \cos(\alpha)$	☐

[0/1 P.]

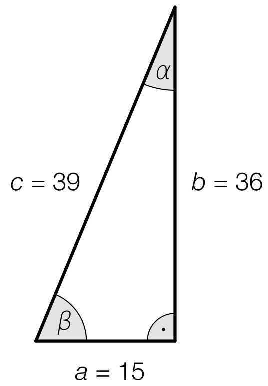
Möglicher Lösungsweg

$h = \frac{w}{\tan(\alpha)} \cdot \sin(\alpha)$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Dreieck

In der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist ein rechtwinkeliges Dreieck dargestellt. Die Winkel werden in Grad gemessen, die Seitenlängen in cm.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

$\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$	☐
$\cos(\beta) = \frac{5}{12}$	☐
$\tan(\alpha) = \frac{12}{5}$	☐
$\sin(90° - \beta) = \frac{15}{36}$	☐
$\cos(90° - \alpha) = \frac{15}{39}$	☐

[0/1 P.]

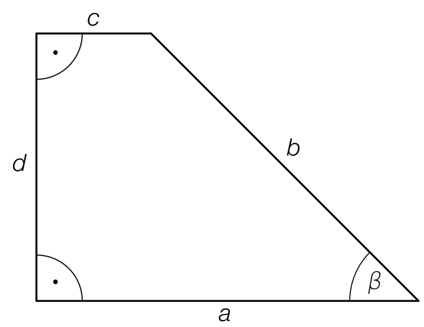
Möglicher Lösungsweg

$\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$	☒
$\cos(90° - \alpha) = \frac{15}{39}$	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Viereck

In der nachstehenden Abbildung ist ein Viereck dargestellt.



Aufgabenstellung:

Stellen Sie unter Verwendung der dafür erforderlichen Seitenlängen eine Formel zur Berechnung von $\tan(\beta)$ auf.

$\tan(\beta) =$ ____

[0/1 P.]

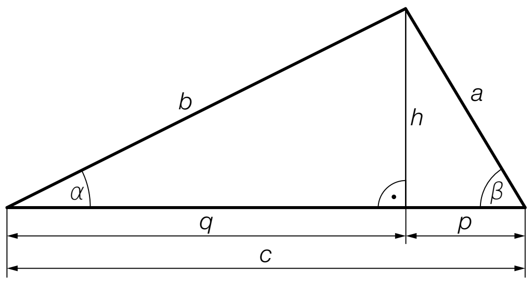
Möglicher Lösungsweg

$$\tan(\beta) = \frac{d}{a - c}$$

Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Berechnungen am Dreieck

Die nachstehende Abbildung zeigt ein Dreieck, das durch die Höhe h in zwei rechtwinkelige Dreiecke unterteilt wird.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Längen jeweils den zutreffenden Ausdruck zur Berechnung aus A bis F zu.

a	
b	
c	
h	

A	$b \cdot \cos(\alpha)$
B	$\frac{p}{\cos(\beta)}$
C	$\frac{h}{\tan(\beta)}$
D	$q \cdot \tan(\alpha)$
E	$q + \frac{h}{\tan(\beta)}$
F	$\frac{q}{\cos(\alpha)}$

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

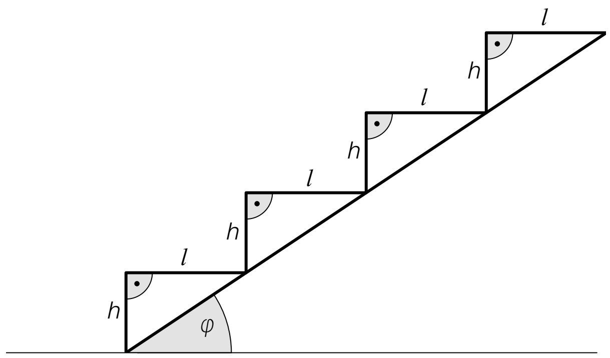
a	B
b	F
c	E
h	D

A	$b \cdot \cos(\alpha)$
B	$\frac{p}{\cos(\beta)}$
C	$\frac{h}{\tan(\beta)}$
D	$q \cdot \tan(\alpha)$
E	$q + \frac{h}{\tan(\beta)}$
F	$\frac{q}{\cos(\alpha)}$

Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Treppe

In der nachstehenden Abbildung ist eine Treppe mit der Stufenhöhe h (in cm), der Stufenlänge l (in cm) und dem Steigungswinkel φ dargestellt.



Es sollen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- $2 \cdot h + l = 63$
- Die Stufenlänge l liegt im Intervall [21 cm; 36,5 cm].

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie den kleinstmöglichen und den größtmöglichen Steigungswinkel φ (in °), bei dem die oben genannten Bedingungen erfüllt sind.

kleinstmöglicher Steigungswinkel φ: __________ °

größtmöglicher Steigungswinkel φ: __________ °

[0/½/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

kleinstmöglicher Steigungswinkel φ: 19,95...°
größtmöglicher Steigungswinkel φ: 45°

Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Steigungswinkel, ein halber Punkt für nur einen richtigen Steigungswinkel.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Winkel und Seiten von rechtwinkeligen Dreiecken*

Aufgabennummer: 1_859	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)

Für bestimmte rechtwinkelige Dreiecke gilt:

Die Winkel α, β und γ liegen den Seiten a, b und c in dieser Reihenfolge gegenüber.
Die Winkel werden in Grad und die Seitenlängen in Zentimetern gemessen.
Weiters gilt: $\cos(\alpha) = \frac{3}{5}$ und $\cos(\gamma) = 0$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die auf jedes dieser Dreiecke zutreffen. *[2 aus 5]*

$c = 5$ cm	☐
$\beta < 90°$	☐
$\sin(\beta) = \frac{3}{5}$	☐
$a < b < c$	☐
$\tan(\alpha) = 0{,}75$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

$\beta < 90°$	☒
$\sin(\beta) = \frac{3}{5}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Rampe*

Aufgabennummer: 1_835	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	

Eine Rampe mit einer (schrägen) Länge von d Metern überwindet einen Höhenunterschied von h Metern ($d > 0$, $h > 0$). Der Steigungswinkel der Rampe wird mit α bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Gleichungen an, die den gegebenen Sachverhalt richtig beschreiben. *[2 aus 5]*

$d = \frac{h}{\sin(\alpha)}$	☐
$d = h \cdot \cos(\alpha)$	☐
$d = \frac{h}{\cos(90° - \alpha)}$	☐
$d = h \cdot \sin(90° - \alpha)$	☐
$d = h \cdot \tan(\alpha)$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

Lösungserwartung

$d = \frac{h}{\sin(\alpha)}$	☒
$d = \frac{h}{\cos(90° - \alpha)}$	☒

Lösungsschlüssel

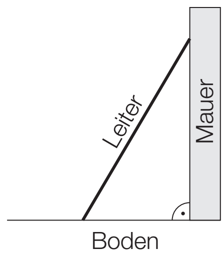
Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Leiter*

Aufgabennummer: 1_811	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Eine Leiter lehnt an einer senkrechten Mauer.
Die Leiter liegt in 6 m Höhe an der Mauer an und schließt mit der Mauer einen Winkel von 20° ein. Dieser Sachverhalt wird durch die nebenstehende (nicht maßstabgetreue) Abbildung veranschaulicht.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Länge der Leiter.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$$\frac{6}{\cos(20°)} = 6{,}385...$$

Die Länge der Leiter beträgt ca. 6,39 m.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.

Leiter*

Aufgabennummer: 1_787	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Eine 4 m lange Leiter wird auf einem waagrechten Boden aufgestellt und an eine senkrechte Hauswand angelegt.

Die Leiter muss mit dem Boden einen Winkel zwischen 65° und 75° einschließen, um einerseits ein Wegkippen und andererseits ein Wegrutschen zu vermeiden.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Mindestabstand und den Höchstabstand des unteren Endes der Leiter von der Hauswand.

Mindestabstand von der Hauswand: __________ m

Höchstabstand von der Hauswand: __________ m

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$\cos(\alpha) = \frac{d}{4} \quad \Rightarrow \quad d = 4 \cdot \cos(\alpha)$

α ... Winkel zwischen der Leiter und dem Boden
d ... Abstand des unteren Endes der Leiter von der Hauswand

Mindestabstand von der Hauswand: ca. 1,04 m
Höchstabstand von der Hauswand: ca. 1,69 m

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Für die Angabe von nur einem richtigen Wert ist ein halber Punkt zu geben.

Bahntrasse*

Aufgabennummer: 1_763	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Die Steigung einer geradlinigen Bahntrasse wird in Promille (‰) angegeben. Beispielsweise ist bei einem Höhenunterschied von 1 m pro 1 000 m zurückgelegter Distanz in horizontaler Richtung die Steigung 1 ‰.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Gleichung an, mit der für eine geradlinige Bahntrasse mit der Steigung 30 ‰ der Steigungswinkel α exakt berechnet werden kann ($\alpha > 0$).

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

Lösungserwartung

$\tan(\alpha) = \frac{30}{1\,000}$

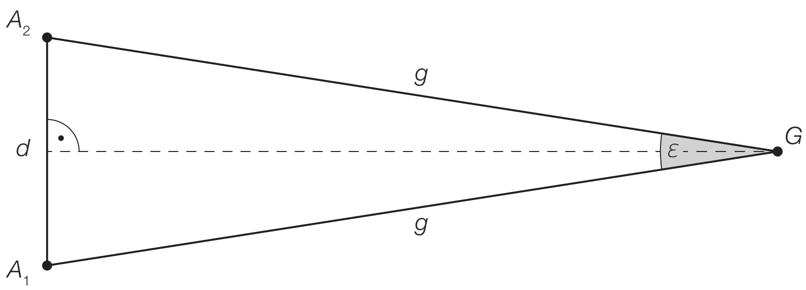
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

Räumliches Sehen*

Aufgabennummer: 1_739	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Betrachtet man einen Gegenstand, so schließen die Blickrichtungen der beiden Augen einen Winkel ε ein. In der nachstehend dargestellten Situation hat der Gegenstand G zu den beiden Augen A_1 und A_2 den gleichen Abstand g. Der Augenabstand wird mit d bezeichnet.



Aufgabenstellung:

Geben Sie den Abstand g in Abhängigkeit vom Augenabstand d und vom Winkel ε an.

g = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Lösungserwartung

$$g = \frac{d}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Drehkegel*

Aufgabennummer: 1_714	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Gegeben ist ein Drehkegel mit einer Höhe von 6 cm. Der Winkel zwischen der Kegelachse und der Erzeugenden (Mantellinie) beträgt 32°.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Radius r der Grundfläche des Drehkegels.

$r \approx$ ______________ cm

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

mögliche Vorgehensweise:

$r = \tan(32°) \cdot 6$
$r \approx 3{,}7$ cm

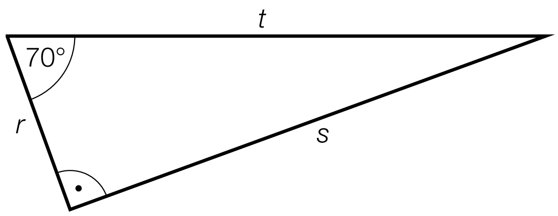
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [3,7; 4,0]

Dreieck*

Aufgabennummer: 1_691	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Gegeben ist nachstehendes Dreieck mit den Seitenlängen r, s und t.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{r}{t}$ für dieses Dreieck!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Lösungserwartung

$\frac{r}{t} = \cos(70°)$

oder:

$\frac{r}{t} \approx 0{,}34$

Lösungsschlüssel

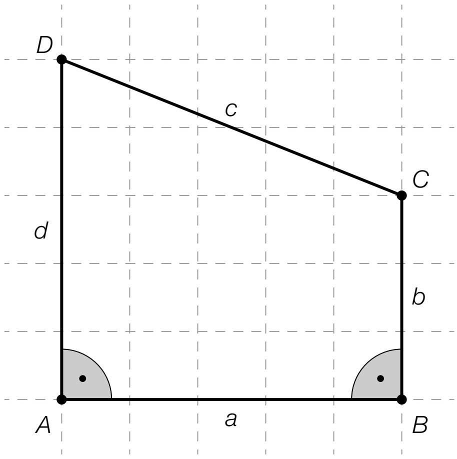
Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,3; 0,4]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Viereck*

Aufgabennummer: 1_667	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 4.1

Gegeben ist das nachstehende Viereck *ABCD* mit den Seitenlängen *a*, *b*, *c* und *d*.

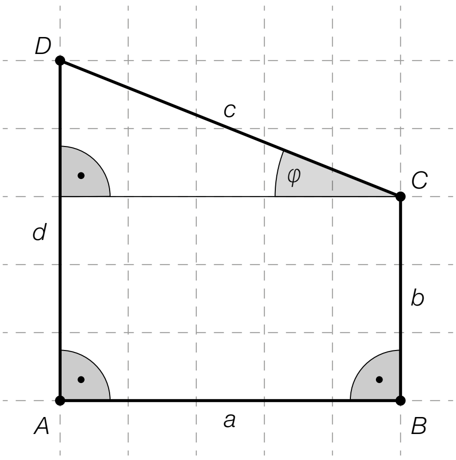


Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der obigen Abbildung einen Winkel φ ein, für den $\sin(\varphi) = \frac{d - b}{c}$ gilt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung



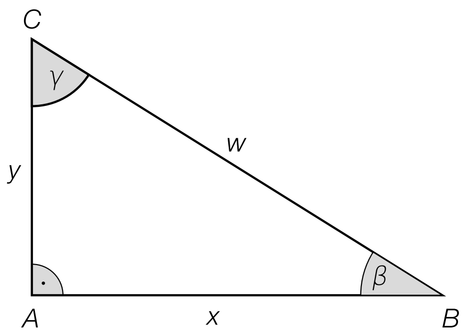
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für das Einzeichnen eines richtigen Winkels φ.

Rechtwinkeliges Dreieck*

Aufgabennummer: 1_643	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Die nachstehende Abbildung zeigt ein rechtwinkeliges Dreieck.



Aufgabenstellung:

Geben Sie einen Term zur Bestimmung der Länge der Seite w mithilfe von x und β an!

w = ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

$$w = \frac{x}{\cos(\beta)}$$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für einen korrekten Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.

BMBWF
BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG
www.bmbwf.gv.at

Gefälle einer Regenrinne*

Aufgabennummer: 1_594	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Eine Regenrinne hat eine bestimmte Länge l (in Metern). Damit das Wasser gut abrinnt, muss die Regenrinne unter einem Winkel von mindestens α zur Horizontalen geneigt sein. Dadurch ergibt sich ein Höhenunterschied von mindestens h Metern zwischen den beiden Endpunkten der Regenrinne.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel zur Berechnung von h in Abhängigkeit von l und α an!

h = ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung

$h = l \cdot \sin(\alpha)$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Sinkgeschwindigkeit*

Aufgabennummer: 1_571	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Ein Kleinflugzeug befindet sich im Landeanflug mit einer Neigung von α (in Grad) zur Horizontalen. Es hat eine Eigengeschwindigkeit von v (in m/s).

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel für den Höhenverlust x (in m) an, den das Flugzeug bei dieser Neigung und dieser Eigengeschwindigkeit in einer Sekunde erfährt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. September 2017

Lösungserwartung

$x = v \cdot \sin(\alpha)$

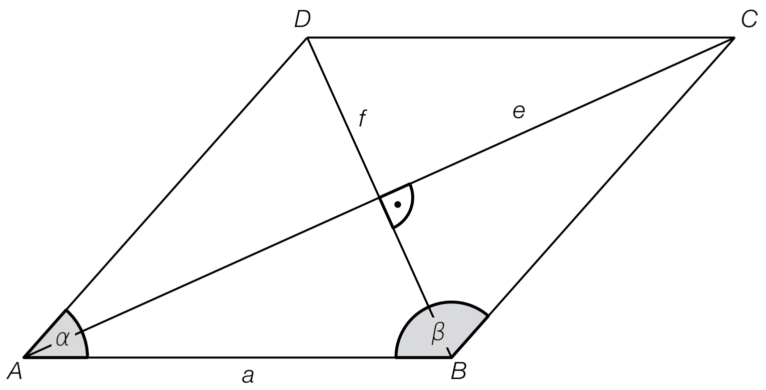
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln (auch in nicht expliziter Darstellung) sind als richtig zu werten.

Rhombus (Raute)*

Aufgabennummer: 1_536	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

In einem Rhombus mit der Seite *a* halbieren die Diagonalen $e = AC$ und $f = BD$ einander. Die Diagonale *e* halbiert den Winkel $\alpha = \sphericalangle DAB$ und die Diagonale *f* halbiert den Winkel $\beta = \sphericalangle ABC$.



Aufgabenstellung:

Gegeben sind die Seitenlänge *a* und der Winkel β.
Geben Sie eine Formel an, mit der *f* mithilfe von *a* und β berechnet werden kann!

$f =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2017

Lösungserwartung

$f = 2 \cdot a \cdot \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$

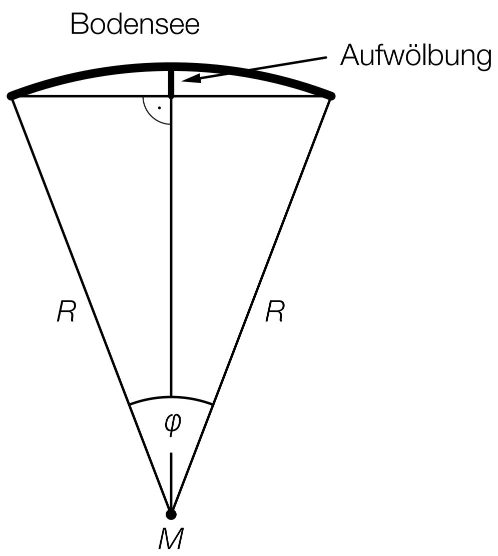
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Aufwölbung des Bodensees*

Aufgabennummer: 1_513	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Aufgrund der Erdkrümmung ist die Oberfläche des Bodensees gewölbt. Wird die Erde modellhaft als Kugel mit dem Radius $R = 6\,370$ km und dem Mittelpunkt M angenommen und aus der Länge der Südost-Nordwest-Ausdehnung des Bodensees der Winkel $\varphi = 0{,}5846°$ ermittelt, so lässt sich die Aufwölbung des Bodensees näherungsweise berechnen.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Aufwölbung des Bodensees (siehe obige Abbildung) in Metern!

Aufwölbung: ___________ Meter

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$6\,370 - 6\,370 \cdot \cos\left(\frac{0{,}5846}{2}\right) \approx 0{,}083 \text{ km} \triangleq 83 \text{ m}$

Aufwölbung: 83 Meter

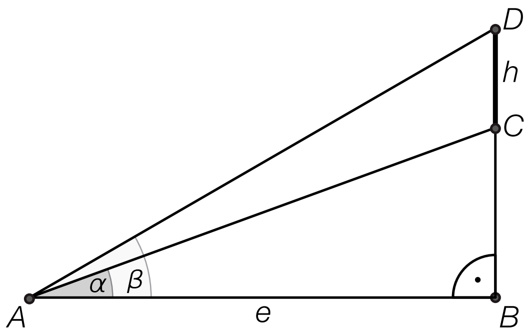
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [82 Meter; 84 Meter]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Vermessung einer unzugänglichen Steilwand*

Aufgabennummer: 1_488	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Ein Steilwandstück CD mit der Höhe $h = \overline{CD}$ ist unzugänglich. Um h bestimmen zu können, werden die Entfernung $e = 6$ Meter und zwei Winkel $\alpha = 24°$ und $\beta = 38°$ gemessen. Der Sachverhalt wird durch die nachstehende (nicht maßstabgetreue) Abbildung veranschaulicht.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Höhe h des unzugänglichen Steilwandstücks in Metern!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2016

Lösungserwartung

Mögliche Vorgehensweise:

$\tan(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{e} \quad \Rightarrow \quad \overline{BC} \approx 2{,}67$ m

$\tan(\beta) = \frac{\overline{BD}}{e} \quad \Rightarrow \quad \overline{BD} \approx 4{,}69$ m

$h = \overline{BD} - \overline{BC} \approx 2{,}02$ m

Die Höhe h ist ca. 2,02 m.

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angegeben sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
Toleranzintervall: [2 m; 2,1 m]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Standseilbahn Salzburg*

Aufgabennummer: 1_464	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Die *Festungsbahn Salzburg* ist eine Standseilbahn in der Stadt Salzburg mit konstanter Steigung. Die Bahn auf den dortigen Festungsberg ist die älteste in Betrieb befindliche Seilbahn dieser Art in Österreich. Die Standseilbahn legt eine Wegstrecke von 198,5 m zurück und überwindet dabei einen Höhenunterschied von 96,6 m.

Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AFestungsbahn_salzburg_20100720.jpg
By Herbert Ortner (Own work) [GFDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html), CC BY 3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by/3.0) or CC BY 3.0 at (http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/at/deed.en)], via Wikimedia Commons [27.05.2015].

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Winkel α, unter dem die Gleise der Bahn gegen die Horizontale geneigt sind!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2016

Lösungserwartung

$\sin(\alpha) = \frac{96{,}6}{198{,}5} \Rightarrow \alpha \approx 29{,}12°$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad" nicht angeführt sein muss. Eine korrekte Angabe in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [29°; 30°]

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Sonnenhöhe*	
Aufgabennummer: 1_440	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Unter der Sonnenhöhe φ versteht man denjenigen spitzen Winkel, den die einfallenden Sonnenstrahlen mit einer horizontalen Ebene einschließen. Die Schattenlänge s eines Gebäudes der Höhe h hängt von der Sonnenhöhe φ ab (s, h in Metern).

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, mit der die Schattenlänge s eines Gebäudes der Höhe h mithilfe der Sonnenhöhe φ berechnet werden kann!

$s =$ ____

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. September 2015

Lösungserwartung

$s = \frac{h}{\tan(\varphi)}$ mit $\varphi \in (0°; 90°)$ bzw. $\varphi \in (0; \frac{\pi}{2})$

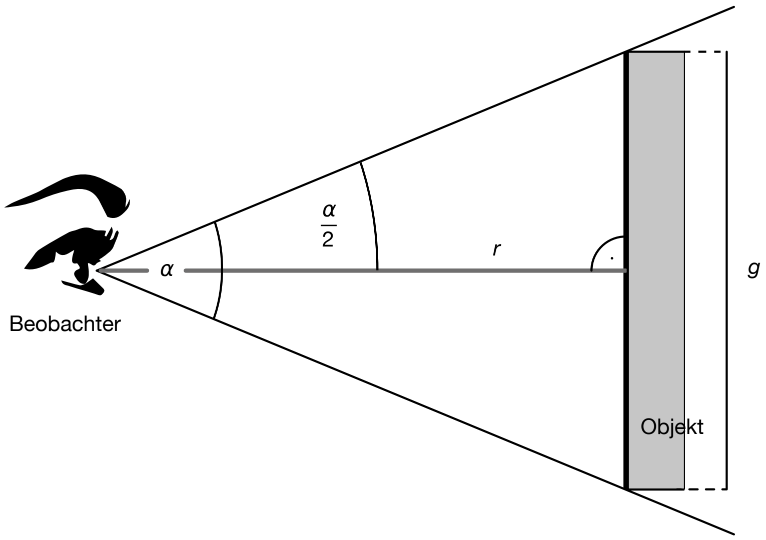
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel, wobei der Definitionsbereich für φ nicht angegeben sein muss. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Sehwinkel*

Aufgabennummer: 1_416	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: halboffenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Der Sehwinkel ist derjenige Winkel, unter dem ein Objekt von einem Beobachter wahrgenommen wird. Die nachstehende Abbildung verdeutlicht den Zusammenhang zwischen dem Sehwinkel α, der Entfernung r und der realen („wahren") Ausdehnung g eines Objekts in zwei Dimensionen.



Quelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d3/ScheinbareGroesse.png [22.01.2015] (adaptiert).

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, mit der die reale Ausdehnung g dieses Objekts mithilfe von α und r berechnet werden kann!

$g =$ ______________________________

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 11. Mai 2015

Lösungserwartung

$g = 2 \cdot r \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ mit $\alpha \in (0;\, 180°)$ bzw. $\alpha \in (0;\, \pi)$

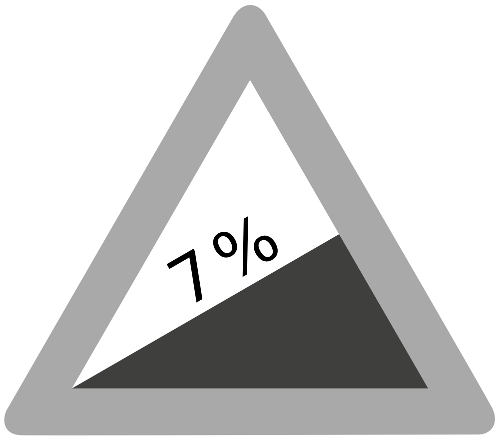
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine korrekte Formel, wobei der Definitionsbereich von α nicht angegeben sein muss. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

Steigungswinkel*

Aufgabennummer: 1_368	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.1

Das nachstehend abgebildete Verkehrszeichen besagt, dass eine Straße auf einer horizontalen Entfernung von 100 m um 7 m an Höhe gewinnt.



Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel zur Berechnung des Gradmaßes des Steigungswinkels α dieser Straße an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2014

Lösungserwartung

$\tan(\alpha) = \frac{7}{100}$

oder

$\alpha = \arctan\left(\frac{7}{100}\right)$

oder

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{7}{100}\right)$

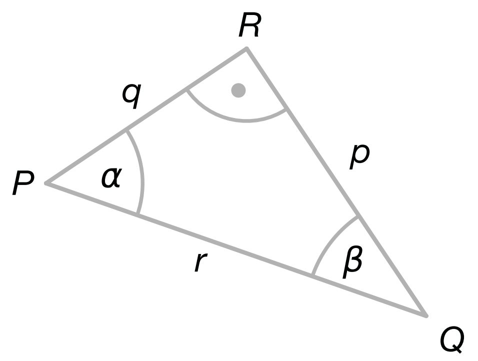
Lösungsschlüssel

Ein Punkt für eine richtige Formel. Korrekte äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.

Definition der Winkelfunktionen*

Aufgabennummer: 1_344	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)	Grundkompetenz: AG 4.1

Die nachstehende Abbildung zeigt ein rechtwinkeliges Dreieck *PQR*.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Gleichungen an, die für das dargestellte Dreieck gelten!

$\sin(\alpha) = \frac{p}{r}$	☐
$\sin(\alpha) = \frac{q}{r}$	☐
$\tan(\beta) = \frac{p}{q}$	☐
$\tan(\alpha) = \frac{r}{p}$	☐
$\cos(\beta) = \frac{p}{r}$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2014

Lösungserwartung

$\sin(\alpha) = \frac{p}{r}$	☒
$\cos(\beta) = \frac{p}{r}$	☒

Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Gleichungen angekreuzt sind.

Intervalle

Gegeben sind sechs verschiedene Intervalle.
Für alle Winkel α aus einem dieser Intervalle gilt: $\sin(\alpha) \geq 0$ und $\sin(\alpha) \neq 1$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie das zutreffende Intervall an. *[1 aus 6]*

[270°; 360°)	☐
[90°; 180°]	☐
(0°; 180°)	☐
[0°; 90°)	☐
(90°; 270°]	☐
[180°; 270°]	☐

[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

[0°; 90°)	☒

Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Winkel mit gleichem Sinuswert*

Aufgabennummer: 1_715	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)	Grundkompetenz: AG 4.2

Gegeben sei eine reelle Zahl c mit $0 < c < 1$. Für die zwei unterschiedlichen Winkel α und β soll gelten: $\sin(\alpha) = \sin(\beta) = c$.
Dabei soll α ein spitzer Winkel und β ein Winkel aus dem Intervall (0°; 360°) sein.

Aufgabenstellung:

Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln α und β?
Kreuzen Sie die zutreffende Beziehung an.

$\alpha + \beta = 90°$	☐
$\alpha + \beta = 180°$	☐
$\alpha + \beta = 270°$	☐
$\alpha + \beta = 360°$	☐
$\beta - \alpha = 270°$	☐
$\beta - \alpha = 180°$	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

$\alpha + \beta = 180°$	☒

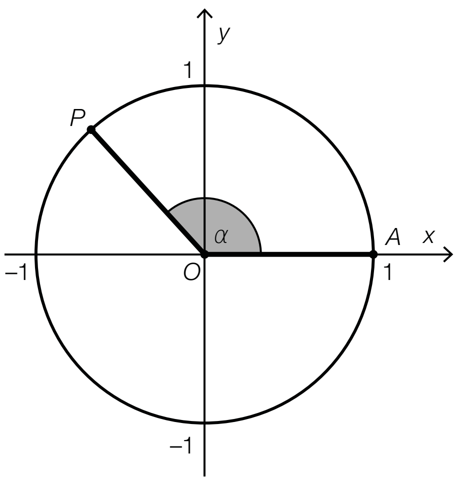
Lösungsschlüssel

Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Beziehung angekreuzt ist.

Sinus und Cosinus*

Aufgabennummer: 1_619	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 4.2

Die nachstehende Abbildung zeigt einen Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius 1. Die Punkte $A = (1|0)$ und P liegen auf der Kreislinie. Der eingezeichnete Winkel α wird vom Schenkel OA zum Schenkel OP gegen den Uhrzeigersinn gemessen.



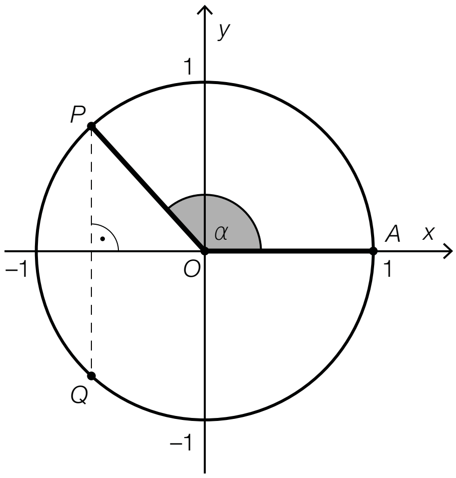
Ein Punkt Q auf der Kreislinie soll in analoger Weise einen Winkel β festlegen, für den folgende Beziehungen gelten:
$\sin(\beta) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der oben stehenden Abbildung den Punkt Q ein!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die korrekte Ergänzung von Q.

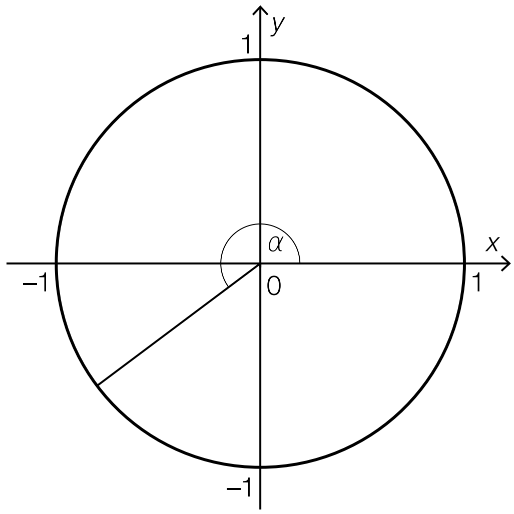
Winkel im Einheitskreis*

Aufgabennummer: 1_595	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: Konstruktionsformat	Grundkompetenz: AG 4.2

In der nachstehenden Grafik ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.

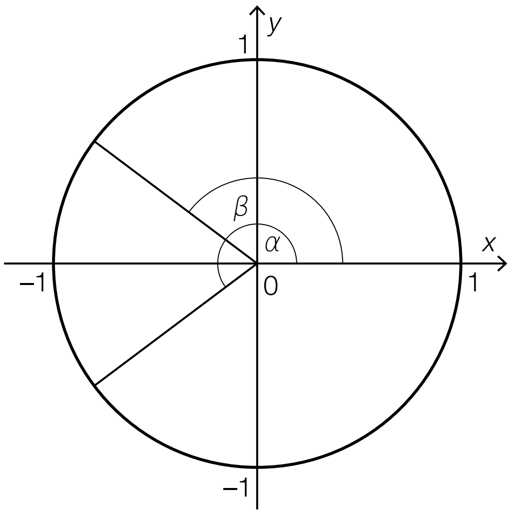
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in der Grafik denjenigen Winkel β aus dem Intervall $[0°; 360°]$ mit $\beta \neq \alpha$ ein, für den $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$ gilt!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. Jänner 2018

Lösungserwartung



Lösungsschlüssel

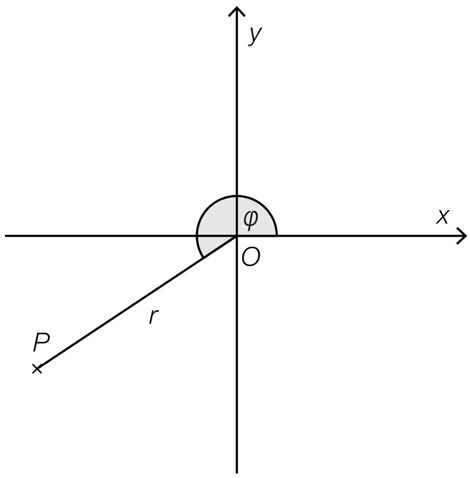
Ein Punkt für eine korrekte Ergänzung des Winkels β.
Toleranzintervall: [140°; 146°]

Koordinaten eines Punktes*

Aufgabennummer: 1_560	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.2

In der unten stehenden Abbildung ist der Punkt $P = (-3|-2)$ dargestellt.

Die Lage des Punktes P kann auch durch die Angabe des Abstands $r = \overline{OP}$ und die Größe des Winkels φ eindeutig festgelegt werden.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Größe des Winkels φ!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 10. Mai 2017

Lösungserwartung

Mögliche Berechnung:

$\tan(\varphi - 180°) = \frac{2}{3} \Rightarrow \varphi \approx 213{,}69°$

Lösungsschlüssel

Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [213°; 214°]
Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Winkel bestimmen*

Aufgabennummer: 1_512	Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐
Aufgabenformat: offenes Format	Grundkompetenz: AG 4.2

Für einen Winkel $\alpha \in [0°; 360°)$ gilt:
$\sin(\alpha) = 0{,}4$ und $\cos(\alpha) < 0$

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Winkel α!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2016

Lösungserwartung

$\sin(\alpha) = 0{,}4 \;\Rightarrow\; \alpha_1 \approx 23{,}6°;\ \alpha_2 \approx 156{,}4°$
$\cos(\alpha_1) > 0;\ \cos(\alpha_2) < 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \alpha_2 \approx 156{,}4°$

Lösungsschlüssel

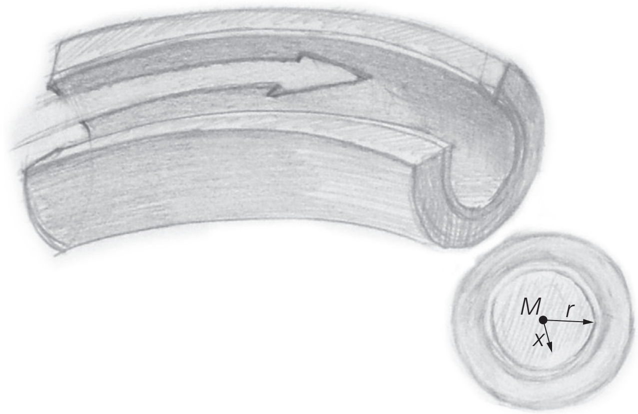
Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Grad“ nicht angeführt sein muss. Eine korrekte Angabe der Lösung in einer anderen Einheit ist ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [156°; 157°]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Blutgefäß

Aufgabennummer: 2_FT002	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Ein Blutgefäß kann wie in der nachstehenden schematischen Darstellung mit kreisförmiger Querschnittsfläche angenommen werden.



Bildquelle: http://www.gefaesschirurgie-klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php [05.06.2013] (adaptiert).

Die Funktion v mit $v(x) = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v des Blutteilchens und seinem Abstand x zum Mittelpunkt M der Querschnittsfläche des Blutgefäßes.

Dabei gilt:

M … Mittelpunkt der Querschnittsfläche des Blutgefäßes
r … Innenradius der Querschnittsfläche des Blutgefäßes (in mm)
v_m … maximale Geschwindigkeit des Blutteilchens in M (in cm/s)
x … Abstand des Blutteilchens von M (in mm)
$v(x)$ … Geschwindigkeit des Blutteilchens bei x (in cm/s)

Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für v an.

$D = [$__________ ; __________$)$

b) Bei einem bestimmten Abstand x_1 des Blutteilchens von M beträgt seine Geschwindigkeit 75 % von v_m.

1) Berechnen Sie x_1.

c) 1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für $x(v)$ auf.

$x(v) =$ ____ mit $v \in (0; v_m]$

2) Berechnen Sie in Abhängigkeit von r denjenigen Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes, bei dem die Geschwindigkeit des Blutteilchens auf die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit abnimmt.

d) 1) Geben Sie die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit v beim Abstand x an.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Vorzeichens der momentanen Änderungsrate von $v(x)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a1) $D = [0; r)$

b1) $\frac{3}{4} \cdot v_m = v_m \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{r}{2}$

c1) $x(v) = r \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{v_m}}$ mit $v \in (0; v_m]$

c2) $x\left(\frac{v_m}{2}\right) = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2}$

d1) $v'(x) = -v_m \cdot \frac{2 \cdot x}{r^2}$

d2) Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeit des Blutteilchens bei steigendem Abstand vom Mittelpunkt abnimmt.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Definitionsbereichs.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung.
c2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

d1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen momentanen Änderungsrate.
d2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung des Vorzeichens.

Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_041	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 1.2, FA 1.5, FA 4.3, AN 2.1, AN 3.3, AN 4.3	

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + t \cdot x$. Für den Parameter t gilt: $t \in \mathbb{R}$ und $t \neq 0$.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie die lokalen Extremstellen von f_t in Abhängigkeit von t an!

An der Stelle $x = t$ gelten für die Funktion f_t die Gleichungen $f_t(t) = 0$, $f_t'(t) = 0$ und $f_t''(t) = 2$.
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f_t bei $x = t$!

b) Geben Sie diejenige Stelle x_0 in Abhängigkeit von t an, an der sich das Krümmungsverhalten von f_t ändert!

Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Krümmungsverhalten des Graphen von f_t an der Stelle $x = 0$ unabhängig von der Wahl des Parameters t ist!

c) Die Funktion A beschreibt in Abhängigkeit von t mit $t > 0$ den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion f_t und von der x-Achse im Intervall $[0; t]$ begrenzt wird. Die Funktion $A: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $t \mapsto A(t)$, ist eine Polynomfunktion.

Geben Sie den Funktionsterm und den Grad von A an!

Geben Sie das Verhältnis $A(t) : A(2 \cdot t)$ an!

d) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f_{-1}(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt!

Erläutern Sie, wie der Graph der Funktion f_{-1} aus dem Graphen der Funktion f_1 hervorgeht!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

a) Mögliche Vorgehensweise:

$f_t'(x) = \frac{3}{t} \cdot x^2 - 4 \cdot x + t$

$3 \cdot x^2 - 4 \cdot t \cdot x + t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{t}{3};\ x_2 = t$

Mögliche Beschreibung:

An der Stelle $x = t$ hat f_t eine Nullstelle und ein lokales Minimum.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(x) = \frac{6}{t} \cdot x - 4$

$f_t''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{2}{3} \cdot t$

Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(0) = \frac{6}{t} \cdot 0 - 4 = -4$

Die zweite Ableitungsfunktion hat an der Stelle $x = 0$ den Wert -4 und ist somit unabhängig vom Parameter t.

c) Mögliche Vorgehensweise:

$A(t) = \int_0^t f_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t^3}{4} - \frac{2 \cdot t^3}{3} + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$

Die Funktion A ist eine Funktion dritten Grades.

$A(t) : A(2 \cdot t) = 1 : 8$

d) Mögliche Vorgehensweise:

$f_{-1}(x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x$

$f_1(-x) = (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x \quad \Rightarrow \quad f_{-1}(x) = f_1(-x)$

Mögliche Erläuterung:

Wird der Graph der Funktion f_1 an der senkrechten Achse gespiegelt, so erhält man den Graphen der Funktion f_{-1}.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

c) – Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm und die Angabe des richtigen Grades von A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für ein richtiges Verhältnis.

d) – Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.
– Ein Punkt für eine korrekte Erläuterung.

Passwörter

Passwörter bestehen aus Zeichen, die in einer festgelegten Reihenfolge angeordnet sind. Es ist erlaubt, dass in einem Passwort Zeichen mehrfach vorkommen.

Die Anzahl der Stellen eines Passworts wird als Passwortlänge k bezeichnet ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$).
Für jede dieser Stellen wird ein Zeichen aus jeweils n verschiedenen Zeichen gewählt ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Die Anzahl A aller möglichen Passwörter kann mithilfe der Formel $A = n^k$ berechnet werden.

Aufgabenstellung:

a) Ein bestimmter Computer kann 1 Milliarde Passwörter pro Sekunde überprüfen.
Für die Überprüfung von n^k Passwörtern benötigt der Computer t Stunden.

1) Stellen Sie mithilfe von k und n eine Formel zur Berechnung von t auf.

$t =$ ____________________ *[0/1 P.]*

Diese Formel zur Berechnung von t kann als Funktion in Abhängigkeit von k und n aufgefasst werden.

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Ist k konstant, so ist t in Abhängigkeit von n eine ______①______; ist n konstant, so ist t in Abhängigkeit von k eine ______②______.

①	
lineare Funktion	☐
Potenzfunktion	☐
Exponentialfunktion	☐

②	
lineare Funktion	☐
Potenzfunktion	☐
Exponentialfunktion	☐

b) Das Passwort für den Zugang auf eine bestimmte Website wird automatisch von einem Zufallsgenerator erzeugt. Der Zufallsgenerator wählt jedes Zeichen unabhängig von den anderen Zeichen und mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus 26 Buchstaben und 10 Ziffern aus ($n = 36$). Die Passwortlänge beträgt 8 Zeichen ($k = 8$).

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht.
[0/1 P.]

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält.
[0/1 P.]

Möglicher Lösungsweg

a1) $t = \frac{n^k}{60 \cdot 60 \cdot 10^9} \quad \left(= \frac{n^k}{3{,}6 \cdot 10^{12}}\right)$

a2)

①	
Potenzfunktion	☒

②	
Exponentialfunktion	☒

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

b1) $\left(\frac{26}{36}\right)^8 = 0{,}0740...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht, beträgt rund 7,4 %.

b2) $\left(\frac{26}{36}\right)^8 + 8 \cdot \left(\frac{26}{36}\right)^7 \cdot \frac{10}{36} = 0{,}3017...$
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält, beträgt rund 30,2 %.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort nur aus Buchstaben besteht.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit, dass das Passwort höchstens 1 Ziffer enthält.

Wachstum von Tierpopulationen

Aufgabenstellung:

a) Die Populationsgröße (Anzahl der Individuen) einer bestimmten Tierart kann modellhaft durch die Funktion N: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

Dabei gilt:

$$N(t) = \frac{500}{1 + 4 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen
$N(t)$ ... Populationsgröße zum Zeitpunkt t

Zum Zeitpunkt t_v ist die Population auf das Doppelte ihrer Größe zum Zeitpunkt $t = 0$ angewachsen.

1) Berechnen Sie t_v. *[0/1 P.]*

b) Die Wachstumsgeschwindigkeit einer anderen Tierpopulation lässt sich durch die Polynomfunktion f mit $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ modellieren. Dabei gibt $f(t)$ die momentane Änderungsrate der Anzahl der Individuen in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Wochen, $f(t)$ in Individuen pro Woche).

Die Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt 15 Individuen pro Woche und erreicht nach 7 Wochen ihr Maximum. Nach 35 Wochen beträgt die Wachstumsgeschwindigkeit 0 Individuen pro Woche.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von f auf.

$f(t) =$ ____ *[0/1 P.]*

Es wird angenommen, dass die Tierpopulation zu Beginn der Beobachtungen aus 50 Individuen besteht.

2) Interpretieren Sie $50 + \int_0^7 f(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Einer der nachstehenden Ausdrücke beschreibt die mittlere Änderungsrate der Größe der Tierpopulation im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ mit $t_1 < t_2$.

3) Kreuzen Sie den jedenfalls zutreffenden Ausdruck an. *[1 aus 6]* *[0/1 P.]*

$\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$	☐
$\dfrac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$	☐
$\int_0^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$	☐
$\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2}$	☐
$f(t_2) - f(t_1)$	☐
$\dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{f(t_1)}$	☐

Möglicher Lösungsweg

a1) $N(0) = 100$
$N(t_v) = 2 \cdot N(0)$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_v = 4{,}9...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von t_v.

b1) $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$
$f(0) = 15,\ f(35) = 0,\ f'(7) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = -\frac{1}{49} \cdot t^2 + \frac{2}{7} \cdot t + 15$

b2) Der Ausdruck gibt die Größe der Tierpopulation (Anzahl der Individuen) nach 7 Wochen an.

b3)

$\frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t}{t_2 - t_1}$	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von f.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b3) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

Bienenhaltung in Österreich

Die nachstehende Tabelle gibt Auskunft über die Anzahl der Imker/innen und ihrer Bienenvölker in Österreich im Zeitraum von 2015 bis 2019.

Jahr	Anzahl der Imker/innen	Anzahl der Bienenvölker
2015	26063	347128
2016	26609	354080
2017	27580	353267
2018	28432	373412
2019	30237	390607

Quelle: https://www.biene-oesterreich.at/daten-und-zahlen+2500++1000247 [10.08.2020].

Aufgabenstellung:

a) Maja führt mit Werten aus der obigen Tabelle die folgende Berechnung durch:

$$\frac{353267}{27580} \approx 13$$

1) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Die Anzahl der Imker/innen in Österreich wird in Abhängigkeit von der Zeit t durch die quadratische Funktion f der Form $f(t) = c \cdot t^2 + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ modelliert (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2015).
Die entsprechenden Funktionswerte von f stimmen für die Jahre 2015 und 2019 mit den Werten aus der obigen Tabelle überein.

1) Berechnen Sie c und d. *[0/1 P.]*

c) Niedrige Temperaturen führen zu einer Wintersterblichkeit von Bienenvölkern. Die Anzahl der Bienenvölker würde ohne eine erneute Aufzucht durch die Imker/innen jährlich um durchschnittlich 16 % abnehmen.

Die Anzahl der Bienenvölker in Österreich, die es ohne eine erneute Aufzucht geben würde, wird durch die Exponentialfunktion g beschrieben.

Es gilt:

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2015
$g(t)$ ... Anzahl der Bienenvölker in Österreich zur Zeit t

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von g auf.

$g(t) =$ ____ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeitdauer sich die Anzahl der Bienenvölker in Österreich gemäß der Exponentialfunktion g halbiert. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) Im Jahr 2017 betrug die durchschnittliche Anzahl der Bienenvölker pro Imker/in (in Österreich) rund 13.

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) I: $f(0) = 26\,063 = d$
II: $f(4) = 30\,237$

$16 \cdot c + 26\,063 = 30\,237$
$c = 260{,}875$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von c und d.

c1) $g(t) = 347\,128 \cdot 0{,}84^t$

c2) $0{,}5 = 0{,}84^t$
$t = 3{,}9...$

Die Zeitdauer beträgt rund 4 Jahre.

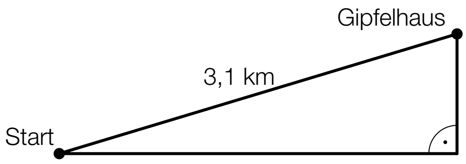
c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von g.
c2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.

Fitnessuhren

Fitnessuhren sind Armbanduhren, die bei sportlichen Aktivitäten verwendet werden können.

Aufgabenstellung:

a) Eine 3,1 km lange Bergtour führt vom Start auf 680 m Seehöhe zu einem Gipfelhaus auf 1 820 m Seehöhe. Der dabei zurückgelegte Weg wird modellhaft als geradlinig mit konstanter Steigung angenommen und ist in der nachstehenden Skizze (nicht maßstabgetreu) dargestellt.



1) Ermitteln Sie die Steigung des Weges.

Steigung: ____________________ % *[0/1 P.]*

b) Die Fitnessuhr *Sporty* ist besonders beliebt.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person in Österreich eine Fitnessuhr *Sporty* besitzt, beträgt p.

Im Rahmen einer Studie werden 160 zufällig ausgewählte Personen in Österreich befragt.

Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl derjenigen Personen unter den 160 Befragten an, die eine Fitnessuhr *Sporty* besitzen.

1) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass jedenfalls eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Die Wahrscheinlichkeit, dass von den 160 Befragten niemand eine Fitnessuhr *Sporty* besitzt, beträgt _____①_____; mit _____②_____ wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass von den 160 Befragten mindestens 2 eine Fitnessuhr *Sporty* besitzen.

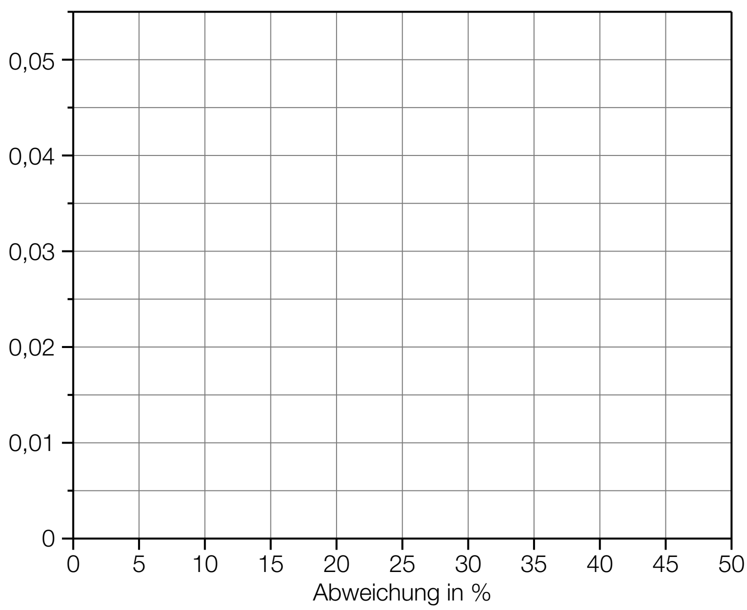
①	
$1 - p$	☐
p^{160}	☐
$(1 - p)^{160}$	☐

②	
$1 - \left[\binom{160}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{160} + \binom{160}{1} \cdot p \cdot (1 - p)^{159}\right]$	☐
$\binom{160}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{160} + \binom{160}{1} \cdot p \cdot (1 - p)^{159}$	☐
$\binom{160}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{158}$	☐

c) Fitnessuhren zeigen unter anderem den Kalorienverbrauch bei einer sportlichen Aktivität an.
Im Rahmen einer Studie wird bei 60 Personen die prozentuelle Abweichung des tatsächlichen Kalorienverbrauchs bei einer sportlichen Aktivität vom jeweiligen Messergebnis ihrer Fitnessuhren untersucht.
Diese Abweichungen mit den jeweils zugehörigen absoluten Häufigkeiten sind in der nachstehenden Tabelle nach Klassen zusammengefasst.

Abweichung in %	absolute Häufigkeit
[0; 20)	24
[20; 30)	30
[30; 50]	6

1) Erstellen Sie ein Histogramm, in dem für die drei oben angegebenen Klassen die relativen Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken dargestellt sind. *[0/1 P.]*



2) Begründen Sie, warum der Median der Datenliste (die der obigen Tabelle zugrunde liegt) im Intervall [20; 30) liegen muss. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\sqrt{3\,100^2 - 1\,140^2} = 2\,882{,}7...$

$\frac{1\,140}{2\,882{,}7...} = 0{,}395...$

Steigung: 39,5... %

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von *a*.

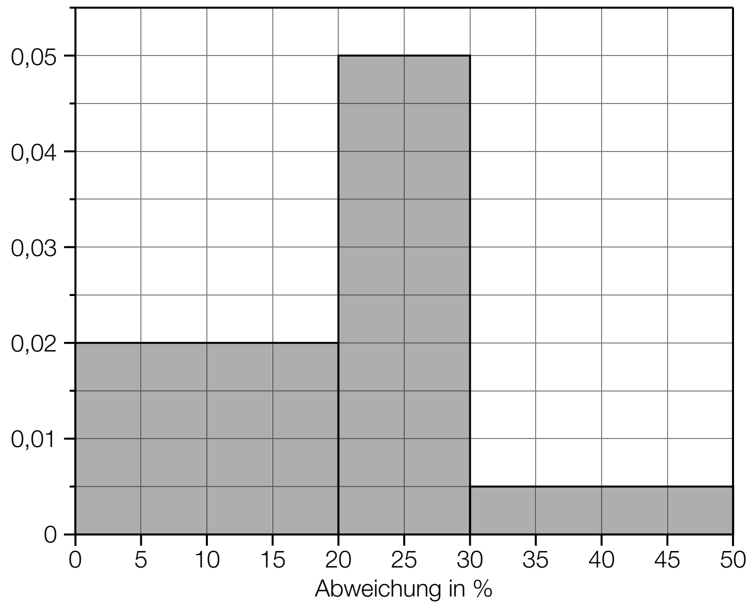
b1)

①	
$(1 - p)^{160}$	☒

②	
$1 - \left[\binom{160}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{160} + \binom{160}{1} \cdot p \cdot (1 - p)^{159}\right]$	☒

b1) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

c1)



c2) Sortiert man die zugrunde liegende Datenliste aufsteigend, dann ist der Median das arithmetische Mittel des 30. und 31. Wertes. Da beide im Intervall [20; 30) liegen, liegt auch das arithmetische Mittel dieser beiden Werte in diesem Intervall.

c1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Histogramms.
c2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

Sauerstoffverbrauch von Säugetieren

Bei Säugetieren gibt es einen Zusammenhang zwischen der Körpermasse und dem Sauerstoffverbrauch.

Aufgabenstellung:

a) Für ein Säugetier, das sich im Beobachtungszeitraum nicht bewegt, kann der Sauerstoffverbrauch in Abhängigkeit von der Körpermasse m näherungsweise durch eine Funktion $S\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ m \mapsto S(m)$ beschrieben werden (m in kg, $S(m)$ in L/h).

Für Katzen und Hunde mit einer Körpermasse m in kg gilt annähernd:

$S(m) = a \cdot m^{0{,}75}$

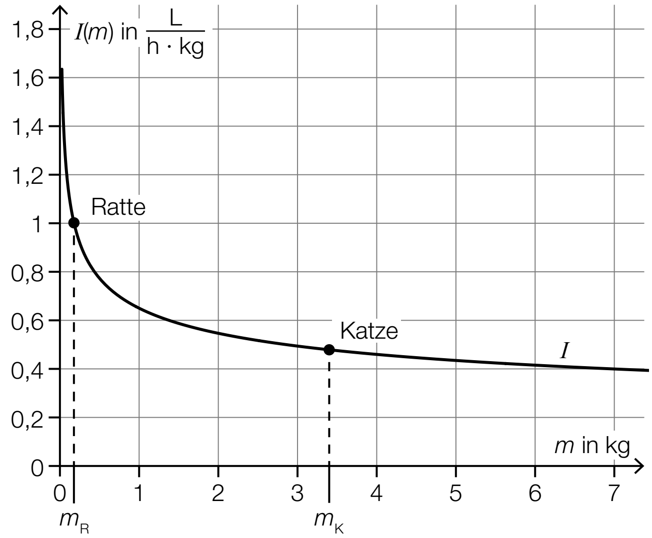
a ... positive Konstante

Die Körpermasse eines bestimmten Hundes ist doppelt so groß wie die einer bestimmten Katze.

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Sauerstoffverbrauch dieses Hundes höher als der dieser Katze ist. *[0/1 P.]*

b) Die Funktion $I: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ beschreibt die Stoffwechselintensität von Säugetieren in Abhängigkeit von ihrer Körpermasse m $\left(m \text{ in kg}, I(m) \text{ in } \frac{\text{L}}{\text{h} \cdot \text{kg}}\right)$.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph von I dargestellt.



Quelle: Sadava, David E., David M. Hillis et al.: *Purves Biologie*. Herausgegeben von Jürgen Markl. 10. Auflage. Berlin u. a.: Springer 2019, S. 1 201 (adaptiert).

Die Körpermasse einer Ratte wird mit m_R und die einer Katze mit m_K bezeichnet.
Für eine bestimmte Körpermasse m_1 ist $I'(m_1)$ gleich der mittleren Änderungsrate von I im Intervall $[m_R; m_K]$.

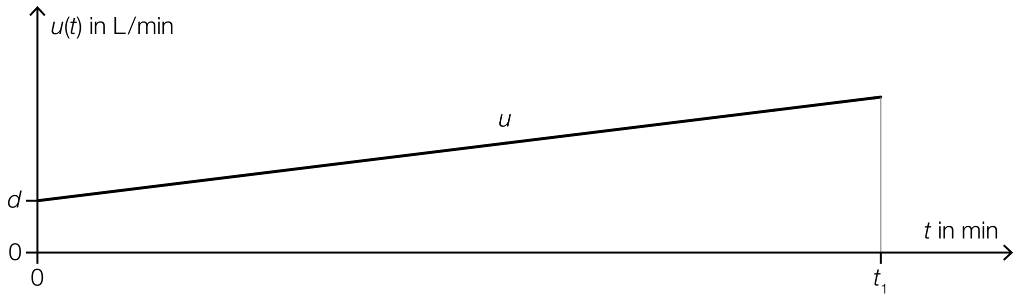
1) Ermitteln Sie m_1 mithilfe der obigen Abbildung.

m_1 = ____________________ kg *[0/1 P.]*

c) Für ein Säugetier, das sich bewegt, wird die momentane Änderungsrate des Sauerstoffverbrauchs in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch die lineare Funktion $u: [0; t_1] \to \mathbb{R}$ mit $t_1 \in \mathbb{R}^+$ beschrieben (t in min, $u(t)$ in L/min).

Es gilt: $u(0) = d$ mit $d \in \mathbb{R}^+$

Der Graph von u ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von $\int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t$ auf. Verwenden Sie dabei t_1, $u(t_1)$ und d.

$\int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t =$ ____ *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie $\int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t$ im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit. *[0/1 P.]*

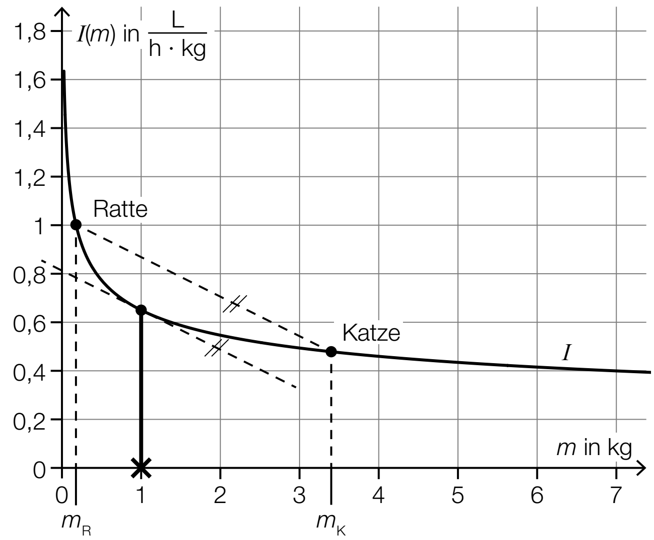
Möglicher Lösungsweg

a1) $2^{0,75} = 1,6817...$

Der Sauerstoffverbrauch dieses Hundes ist um rund 68,2 % höher als der dieser Katze.

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

b1)



$m_1 = 1$ kg
Toleranzbereich in kg: [0,8; 1,2]

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von m_1.

c1) $\int_0^{t_1} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(u(t_1) + d) \cdot t_1}{2}$

c2) Der Ausdruck gibt den Sauerstoffverbrauch in L im Intervall $[0; t_1]$ an.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
c2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Auslastung von Flügen

Für Fluggesellschaften ist eine hohe Auslastung ihrer Flüge wichtig.

Aufgabenstellung:

a) Häufig werden bei Flügen nicht alle verkauften Tickets in Anspruch genommen. Daher werden üblicherweise mehr Tickets verkauft, als Plätze zur Verfügung stehen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person (unabhängig von den anderen Personen) ihr Ticket in Anspruch nimmt, beträgt 90 %.
Für einen bestimmten Flug werden 6 % mehr Tickets verkauft, als Plätze zur Verfügung stehen.

Es stehen m Plätze zur Verfügung.
Es werden n Tickets verkauft.
Bei n verkauften Tickets beträgt der Erwartungswert für die in Anspruch genommenen Tickets 477.

1) Berechnen Sie n und m.

$n =$ ________________________________

$m =$ ________________________________ *[0/1 P.]*

Folgendes Ereignis E wird betrachtet:
E ... „für mindestens 1 Person, die ihr Ticket in Anspruch nehmen möchte, steht kein Platz zur Verfügung"

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E)$. *[0/1 P.]*

b) Für einen bestimmten Flug eines voll besetzten Flugzeugs kann der Zusammenhang zwischen der Flugdistanz s und dem Treibstoffverbrauch $V(s)$ näherungsweise durch die Funktion $V\colon [2\,000; 10\,000] \to \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

$$V(s) = 4 + \left(\frac{s}{128\,000} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{s}{1\,000} \cdot e^{-\frac{s}{4\,000}} \quad \text{mit} \quad 2\,000 \leq s \leq 10\,000$$

s ... Flugdistanz in km
$V(s)$ ... Treibstoffverbrauch bei der Flugdistanz s in Litern pro Fluggast pro 100 km

1) Ermitteln Sie die Flugdistanz d (in km), bei der der Treibstoffverbrauch am geringsten ist. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Menge an Treibstoff (in L), die dieses Flugzeug für die Flugdistanz d benötigt, wenn es mit 271 Fluggästen voll besetzt ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $n = \frac{477}{0,9} = 530$

$m = \frac{530}{1,06} = 500$

a2) X ... Anzahl der Personen, die ihr Ticket in Anspruch nehmen
Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 530$ und $p = 0,9$.

$P(X \geq 501) = 0,00012...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n und m.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) $V'(d) = 0$
$d = 3\,507,5...$ km
$(V''(3\,507,5...) > 0)$

b2) $V(3\,507,5...) = 3,67...$
$3,67... \cdot 271 \cdot 35,0... = 34\,934,1...$

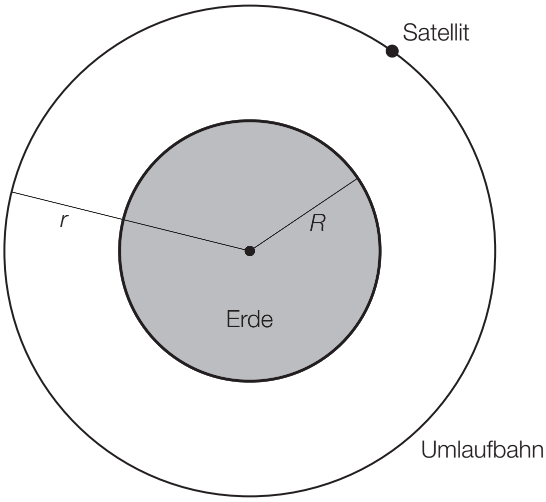
Die benötigte Menge an Treibstoff beträgt rund 34 934 L.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Flugdistanz d.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Menge an Treibstoff.

Satelliten und ihre Umlaufbahnen*

Aufgabennummer: 2_107	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Ein Satellit bewegt sich auf einer annähernd kreisförmigen Umlaufbahn mit dem Radius r um die Erde. Die Erde wird als kugelförmig mit dem Radius R angenommen.
Dieses Modell ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) Ein bestimmter Satellit bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 7\,500$ m/s auf seiner Umlaufbahn. Der Zusammenhang zwischen seiner Geschwindigkeit und dem Radius seiner Umlaufbahn wird durch die nachstehende Gleichung angegeben.

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

v ... Geschwindigkeit des Satelliten in m/s
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ ... allgemeine Gravitationskonstante in $\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
$M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ ... Masse der Erde in kg
r ... Radius der Umlaufbahn des Satelliten in m

1) Berechnen Sie den Radius r der Umlaufbahn dieses Satelliten.

r = ______________________________ m

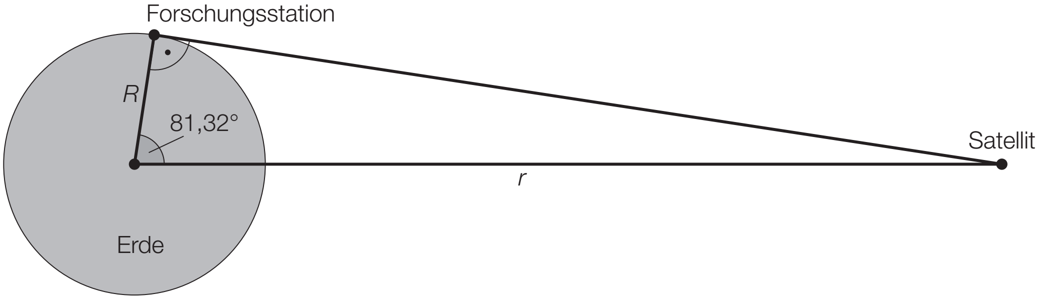
2) Berechnen Sie die Zeit (in s), die dieser Satellit für einen Umlauf um die Erde benötigt.

t = ______________________________ s

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

b) Die Satellitenschüssel einer Forschungsstation wird auf einen bestimmten Satelliten ausgerichtet.

In der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist diese Situation dargestellt.



Der Erdradius R wird mit $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m angenommen.

1) Berechnen Sie den Radius r der Umlaufbahn dieses Satelliten.

r = ____ m

Die Geschwindigkeit von Funksignalen wird mit $3 \cdot 10^8$ m/s angenommen.

2) Berechnen Sie die Zeit (in s), die ein Funksignal für seinen Weg von der Forschungsstation zu diesem Satelliten benötigt. Geben Sie das Ergebnis mit 3 Nachkommastellen an.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $7\,500 = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{r}}$

$r = 7\,079\,093{,}3...$ m

a2) $2 \cdot r \cdot \pi = 7\,500 \cdot t$

$t = 5\,930{,}5...$ s

b) Lösungserwartung:

b1) $\cos(81{,}32°) = \frac{6{,}37 \cdot 10^{6}}{r}$

$r = 42\,208\,977{,}5...$ m

b2) Entfernung Forschungsstation – Satellit: $\sqrt{r^2 - R^2} = 41\,725\,542{,}4...$ m

$\frac{41\,725\,542{,}4...}{300\,000\,000} = 0{,}1390...$

Das Funksignal benötigt für seinen Weg von der Forschungsstation zum Satelliten rund 0,139 s.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *r*.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Zeit.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *r*.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Zeit auf 3 Nachkommastellen.

CO2 und Klimaschutz*

Aufgabennummer: 2_102	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

In den letzten Jahrzehnten hat der CO_2-Gehalt in der Erdatmosphäre unter anderem durch den Straßenverkehr zugenommen.

Aufgabenstellung:

a) Für jeden PKW mit Benzinantrieb wird angenommen, dass pro Liter verbrauchten Benzins 2,32 kg CO_2 ausgestoßen werden.

PKW *A* fährt eine Strecke von *s* km mit einem durchschnittlichen Benzinverbrauch von 7,9 Litern pro 100 km.

Um dessen CO_2-Ausstoß auszugleichen, sollen *b* Bäume gepflanzt werden. Dabei nimmt man an, dass jeder dieser Bäume in seiner gesamten Lebenszeit 500 kg CO_2 aufnimmt.

1) Stellen Sie unter Verwendung von *s* eine Formel zur Berechnung der Anzahl *b* der zu pflanzenden Bäume auf.

$b =$ ____________________________________

PKW *B* legt eine Strecke von 15 000 km zurück. Um dessen CO_2-Ausstoß auszugleichen, werden 5 Bäume gepflanzt.

2) Berechnen Sie den durchschnittlichen Benzinverbrauch (in Litern pro 100 km) von PKW *B* auf dieser Strecke.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

b) Neben CO_2 verstärken auch andere Gase die Klimaerwärmung. Die Emission von diesen Gasen wird in sogenannte *CO_2-Äquivalente* umgerechnet.

Die nachstehende Tabelle gibt für einige Staaten der EU Auskunft über die jeweilige Einwohnerzahl (in Millionen) im Jahr 2015 und die zugehörigen CO_2-Äquivalente (in Tonnen pro Person).

	Einwohnerzahl in Millionen	CO_2-Äquivalente in Tonnen pro Person
Belgien	11,2	11,9
Frankreich	66,4	6,8
Italien	60,8	7,0
Luxemburg	0,6	18,5
Niederlande	16,9	12,3

Datenquellen: https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Population_and_population_change_statistics/de&oldid=320539 [24.07.2020],
https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Länder_nach_Treibhausgas-Emissionen [24.07.2020].

1) Berechnen Sie die durchschnittlichen CO_2-Äquivalente $\overline{e}$ (in Tonnen pro Person) für den gesamten in der obigen Tabelle angeführten Teil der EU.

$\overline{e}$ = ____ Tonnen pro Person

Lukas sind nur die in der obigen Tabelle angeführten Werte der CO_2-Äquivalente der einzelnen Staaten bekannt, <u>nicht</u> aber die jeweils zugehörige Einwohnerzahl.
Er berechnet das arithmetische Mittel $\overline{x}$ der CO_2-Äquivalente: $\overline{x} = 11{,}3$.

2) Erklären Sie ohne Verwendung des berechneten Wertes von $\overline{e}$, warum $\overline{x}$ größer als $\overline{e}$ sein muss.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $b = \frac{7{,}9 \cdot 2{,}32 \cdot s}{100 \cdot 500}$

a2) $5 = \frac{x \cdot 2{,}32 \cdot 15\,000}{100 \cdot 500}$

$\Rightarrow \quad x = 7{,}18...$

durchschnittlicher Benzinverbrauch: rund 7,18 Liter pro 100 km

b) **Lösungserwartung:**

b1) $\overline{e} = 7{,}8...$ Tonnen pro Person

b2) Das arithmetische Mittel $\overline{x}$ ist größer, weil die für die einzelnen Staaten angegebenen Werte der CO_2-Äquivalente für Staaten mit einer geringeren Einwohnerzahl größer sind als für jene mit einer höheren Einwohnerzahl.

oder:

Wenn man die jeweilige Einwohnerzahl der einzelnen Staaten beim Übergang vom ungewichteten zum gewichteten arithmetischen Mittel berücksichtigt, erhöht sich das Gewicht jedes Staates mit einem Wert der CO_2-Äquivalente kleiner als $\overline{x}$ und verringert sich das Gewicht jedes Staates mit einem Wert der CO_2-Äquivalente größer als $\overline{x}$.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des durchschnittlichen Benzinverbrauchs.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen.
b2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

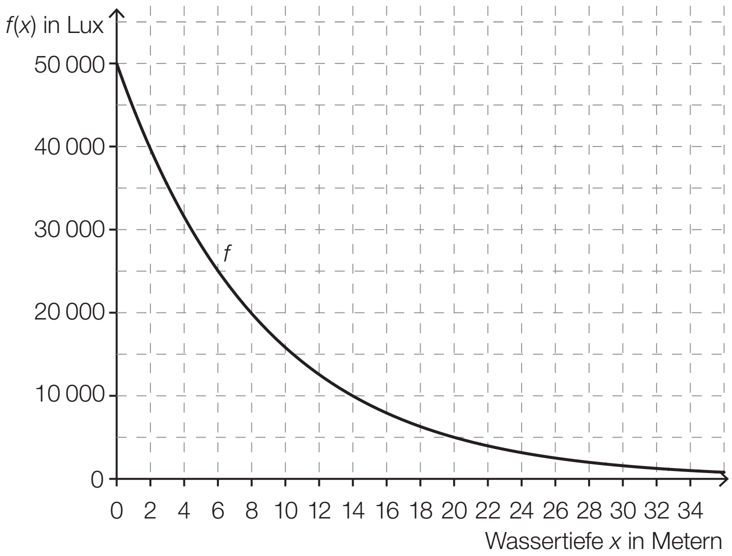
Unter Wasser

Aufgabennummer: 2_079	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.4, FA 5.1	

a) Direkt unter der Wasseroberfläche beträgt der Druck 1 Bar. Der Druck nimmt mit zunehmender Wassertiefe gleichmäßig zu, und zwar um 1 Bar je 10 Meter Wassertiefe.

1) Berechnen Sie, in welcher Wassertiefe ein Druck von 3,9 Bar herrscht.

b) Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion *f* beschrieben werden. Der Graph von *f* ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion *f*.

c) Durch eine bestimmte Tauchermaske werden alle Gegenstände unter Wasser um ein Drittel größer wahrgenommen, als sie tatsächlich sind.

1) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die tatsächliche Größe kleiner als die wahrgenommene Größe ist.

Lösungserwartung

a1) $3{,}9 = 1 + 0{,}1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 29$

In einer Wassertiefe von 29 Metern herrscht ein Druck von 3,9 Bar.

b1) In einer Tiefe von 20 Metern beträgt die Beleuchtungsstärke 5000 Lux.

Toleranzintervall: [19,5; 20,5]

b2) $f(x) = a \cdot b^x$

$a = 50\,000$

$5\,000 = 50\,000 \cdot b^{20} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[20]{0{,}1} = 0{,}8912... \approx 0{,}891$

$f(x) = 50\,000 \cdot 0{,}891^x$

Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

c1) tatsächliche Größe: x

wahrgenommene Größe: $w = \frac{4}{3} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{4} \cdot w$

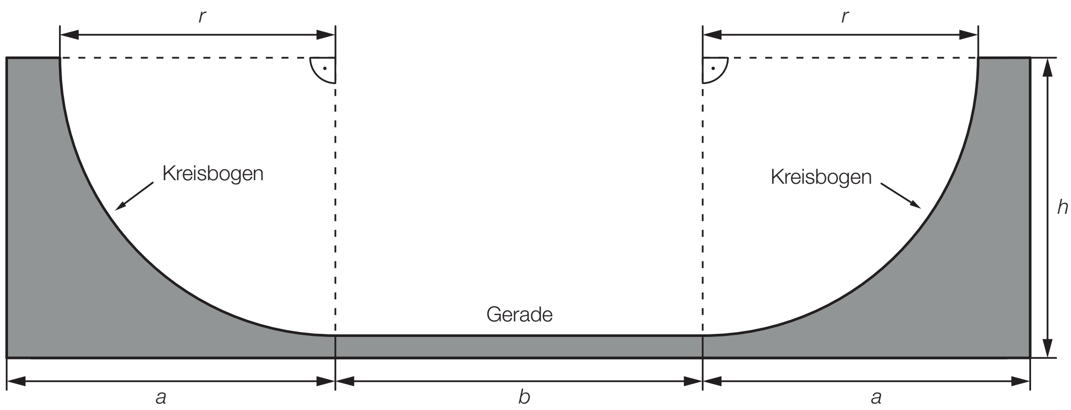
Die tatsächliche Größe ist um 25 % kleiner als die wahrgenommene Größe.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Skatepark

Aufgabennummer: 2_082	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3	

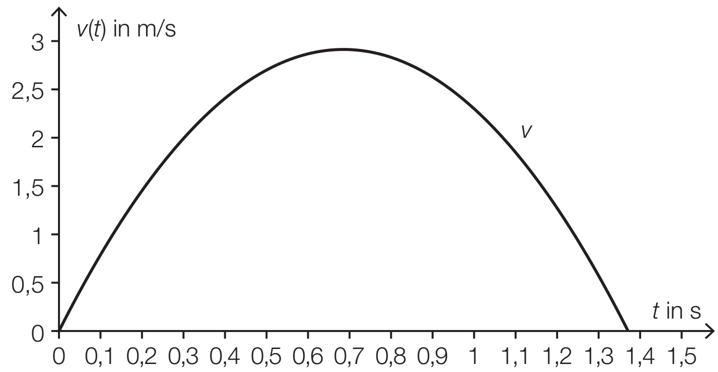
a) Folgende Grafik zeigt den Entwurf einer Halfpipe im Querschnitt:



1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts A der grauen Fläche (Querschnittsfläche) aus a, b, h und r.

$A =$ ________________________________

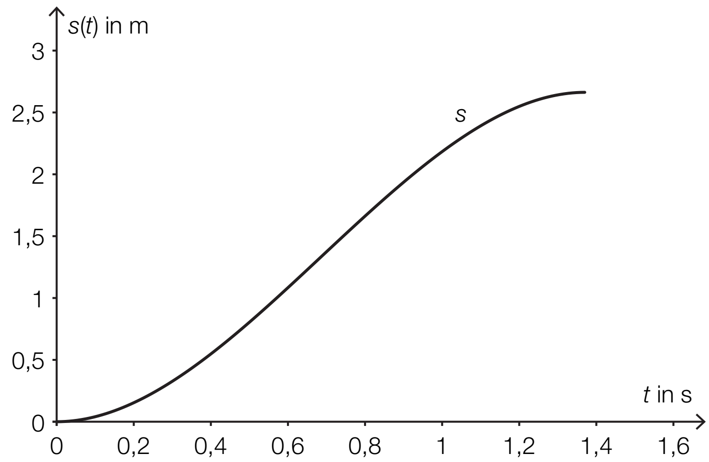
b) Die Geschwindigkeit einer Skaterin in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion v beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Weg, den die Skaterin zwischen $t = 0{,}5$ s und $t = 1$ s zurücklegt.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von $v'(0{,}3)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Der zurückgelegte Weg eines Skaters in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion s beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

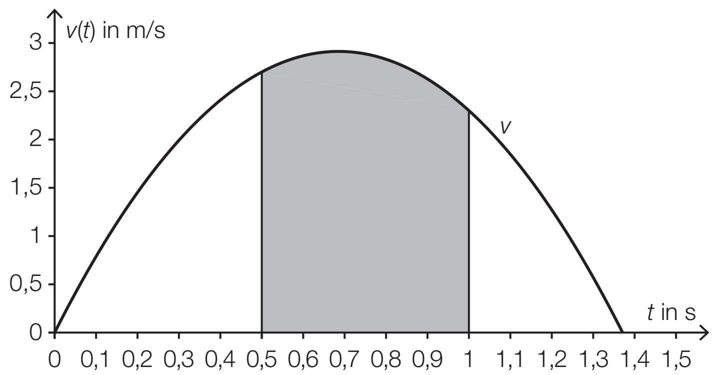


1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit zwischen $t = 0{,}6$ s und $t = 1{,}2$ s.

Lösungserwartung

a1) $A = (2 \cdot a + b) \cdot h - b \cdot r - \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

b1)



b2) $v'(0{,}3)$ ist die Beschleunigung (in m/s²) der Skaterin zum Zeitpunkt $t = 0{,}3$ s.

c1) $\bar{v} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 2,5 m/s.

Toleranzintervall für $\bar{v}$: [2,1; 2,9]

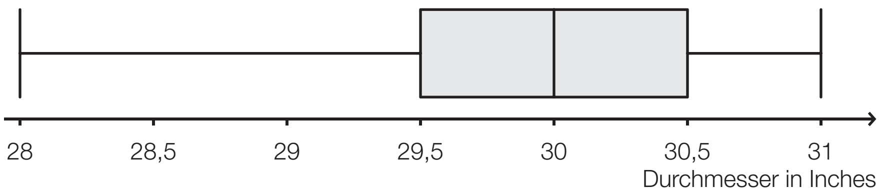
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Riesenpizza

Aufgabennummer: 2_085	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 3.3, WS 1.1, WS 1.2	

In den USA wird die Größe einer Pizza durch ihren Durchmesser (in Inches) angegeben. Im Folgenden werden Pizzen immer als kreisrund angenommen.

a) Bei 30-Inch-Pizzen verschiedener Lieferanten wurde der tatsächliche Durchmesser bestimmt. Die Messergebnisse sind im folgenden Boxplot zusammengefasst:



1) Lesen Sie die Spannweite ab.

Der Interquartilsabstand ist die Differenz von 3. und 1. Quartil.

In der Fachliteratur wird ein Wert oft als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet, wenn dieser Wert weiter als das 1,5-Fache des Interquartilsabstands rechts vom 3. Quartil liegt. Solche Ausreißer sind im obigen Boxplot nicht berücksichtigt.

2) Geben Sie an, ab welchem Durchmesser eine Pizza als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet wird.

b) 1) Zeigen Sie allgemein, dass der Flächeninhalt einer (kreisrunden) Pizza vervierfacht wird, wenn ihr Durchmesser verdoppelt wird.

c) Für eine bestimmte Pizzasorte wird der Preis pro Flächeneinheit in Abhängigkeit vom Durchmesser modellhaft durch folgende quadratische Funktion P beschrieben:

$P(d) = 0{,}0003 \cdot d^2 - 0{,}015 \cdot d + 0{,}2619$ mit $8 \leq d \leq 30$

d ... Durchmesser der Pizza in Inches
$P(d)$ ... Preis pro Flächeneinheit einer Pizza mit Durchmesser d in US-Dollar

1) Ermitteln Sie, für welchen Durchmesser der Preis pro Flächeneinheit am niedrigsten ist.

Lösungserwartung

a1) Spannweite: 3 Inch

a2) Interquartilsabstand: 30,5 – 29,5 = 1
3. Quartil: 30,5
30,5 + 1,5 · 1 = 32
Eine Pizza wird ab einem Durchmesser von mehr als 32 Inch als „Ausreißer nach oben“ bezeichnet.

b1) Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser d: $A_d = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$
Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser $2d$: $A_{2d} = \frac{4d^2}{4} \cdot \pi = d^2 \cdot \pi = 4 \cdot A_d$

Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.

c1) $P'(d) = 0{,}0006 \cdot d - 0{,}015$
$P'(d) = 0 \Rightarrow d = 25$

Die Pizza mit dem niedrigsten Preis pro Flächeneinheit hat einen Durchmesser von 25 Inch.

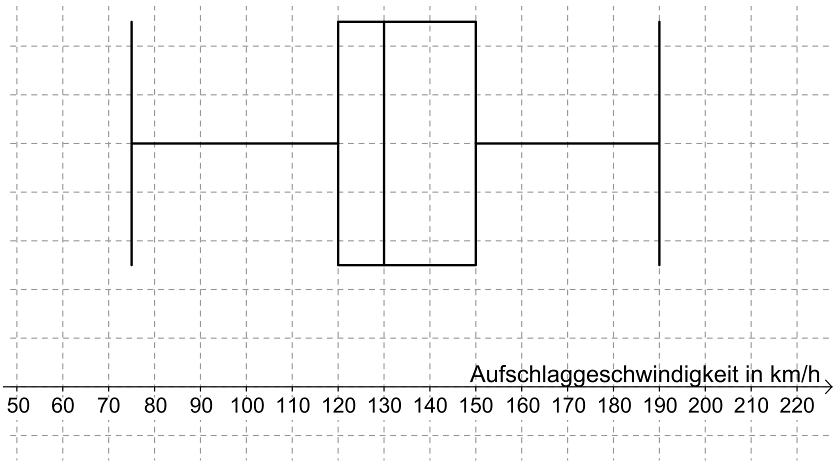
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Tennis

Aufgabennummer: 2_087	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.5, WS 1.1	

Im Rahmen der Nachwuchsförderung wurden die Leistungen der Teilnehmer eines Tennisturniers genauer beobachtet.

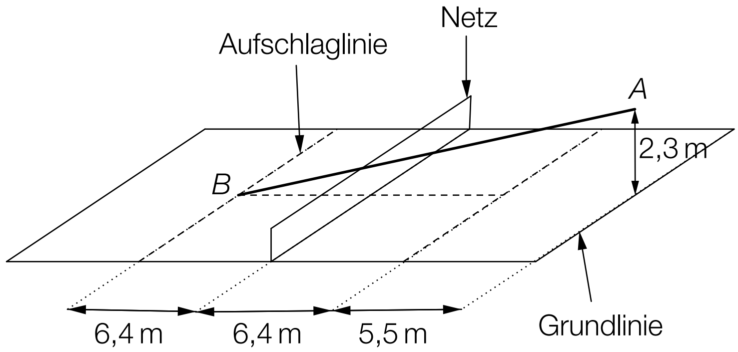
a) Für die Auswertung der Daten der Aufschlaggeschwindigkeit der Teilnehmer wurde der nachstehende Boxplot erstellt.



1) Lesen Sie diejenige Aufschlaggeschwindigkeit ab, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde.

2) Lesen Sie den Quartilsabstand ab.

b) Ein Spieler trifft beim Aufschlag den Ball in einer Höhe von 2,3 m im Punkt *A* genau über der Mitte der Grundlinie. Er visiert den Punkt *B* (Mitte der Aufschlaglinie) an. Um nicht ins Netz zu gehen, muss der Ball das Netz in einer Höhe von mindestens 1 Meter (über dem Boden) überqueren.
Die Flugbahn des Tennisballs beim Aufschlag kann modellhaft mittels einer Gerade beschrieben werden.



1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Aufschlag über das Netz geht.

c) Mithilfe einer Videoanalyse wird ein Grundlinienschlag modelliert.
Die Flugbahn zwischen dem Abschlagpunkt und dem Punkt, in dem der Ball auf dem Boden aufkommt, kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x + \frac{21}{50} \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung zum Abschlagpunkt in Metern (m)
$f(x)$ ... Höhe des Balles an der Stelle x über dem Boden in m

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der obigen Zahl $\frac{21}{50}$ für die Flugbahn.

Lösungserwartung

a1) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde:
120 km/h

a2) Quartilsabstand: 30 km/h

b1) Argumentation mit ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots\text{ m} \approx 0{,}8\text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

Eine Argumentation mit einer linearen Funktion oder mit Steigungswinkeln ist ebenfalls möglich.

c1) Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wachstum von Holzbeständen

Aufgabennummer: 2_089	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 5.1, FA 5.2	

a) Bauer Waldner weiß, dass sich der Holzbestand seines Waldes um ca. 2,7 % pro Jahr bezogen auf das jeweilige Vorjahr vermehrt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Holzbestand 36000 m³.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für diejenige Funktion f auf, die den Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren angibt.

b) Der Holzbestand eines anderen Waldes kann näherungsweise mithilfe der Funktion g beschrieben werden:

$g(t) = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

t ... Zeit in Jahren
$g(t)$ ... Holzbestand zum Zeitpunkt t in Kubikmetern (m³)

Wenn der Holzbestand auf 33000 m³ angewachsen ist, wird so viel geschlägert, dass wieder der Holzbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegt.

Für den Verkauf dieses geschlägerten Holzes betragen die Einnahmen € 96.000.

1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Verkaufspreis für 1 m³ Holz.
2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Holzbestand auf 33000 m³ angewachsen ist.

c) Ein Student behauptet: „Um die relative Änderung r des Holzbestandes von einem Zeitpunkt t_1 bis zu einem späteren Zeitpunkt t_2 zu berechnen, subtrahiere ich vom Holzbestand zum Zeitpunkt t_2 den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 und dividiere die Differenz durch den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1."

1) Übersetzen Sie die Rechenanleitung des Studenten in eine Formel.

Lösungserwartung

a1) $f(t) = 36\,000 \cdot 1{,}027^t$

t … Zeit in Jahren
$f(t)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t in m³

b1) Verkauft wurden 1 200 m³, daher betrug der durchschnittliche Preis pro Kubikmeter € 80.

b2) $33\,000 = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

$$t = \frac{\ln(33\,000) - \ln(31\,800)}{\ln(1{,}025)} = 1{,}50\ldots$$

Nach etwa 1,5 Jahren beträgt der Holzbestand 33 000 m³.

c1) $r = \dfrac{h(t_2) - h(t_1)}{h(t_1)}$

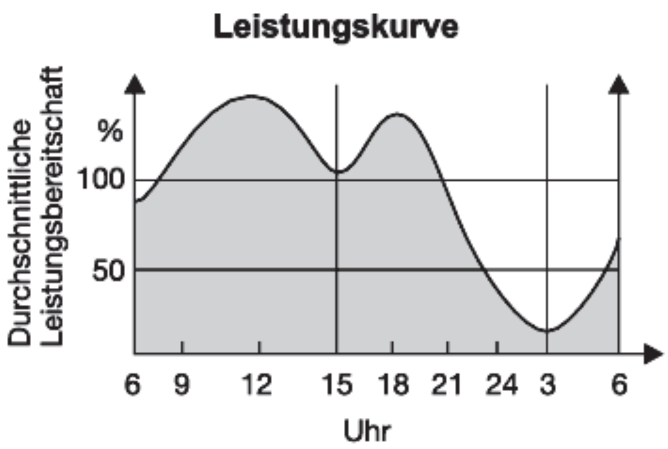
r … relative Änderung
t_1, t_2 … Zeitpunkte
$h(t_1)$, $h(t_2)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 bzw. t_2

Leistungskurve

Aufgabennummer: 2_094	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.5, AN 1.3, AN 2.1

Die *Leistungskurve*, auch *Arbeitskurve* genannt, ist die Darstellung der Arbeitsleistung einer Arbeitnehmerin/eines Arbeitnehmers in Abhängigkeit von der Tageszeit unter Berücksichtigung seiner Durchschnittsleistung (100 Prozent). Auf einer Webseite findet man folgende Grafik:



Quelle: http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/85252/leistungskurve-v9.html [30.05.2014].

a) 1) Lesen Sie ab, in welchen Zeitintervallen die Leistungsbereitschaft abnimmt.

b) Um 9 Uhr beträgt die Leistungsbereitschaft einer Arbeitnehmerin 110 %. Um 12 Uhr beträgt sie 140 %. Im Zeitintervall von 12 Uhr bis 14 Uhr beträgt die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft –12 % pro Stunde.

1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft im Zeitintervall von 9 Uhr bis 12 Uhr.

2) Berechnen Sie die Leistungsbereitschaft um 14 Uhr.

c) Die Leistungsbereitschaft eines Arbeitnehmers kann im Zeitintervall von 0 Uhr bis 6 Uhr durch die Funktion f beschrieben werden. Dabei gilt:

$$f(t) = \frac{10}{3} \cdot t^2 - 20 \cdot t + 40$$

t ... Zeit in Stunden, $0 \le t \le 6$
$f(t)$ ... Leistungsbereitschaft zur Zeit t in Prozent

1) Berechnen Sie die 1. Ableitung der Leistungsbereitschaft um 2:30 Uhr.

Lösungserwartung

a1) Eine Abnahme der Leistungsbereitschaft liegt im Zeitintervall von ca. 12 Uhr bis ca. 15 Uhr sowie im Zeitintervall von ca. 18 Uhr bis ca. 3 Uhr vor.

Toleranzintervall: $\pm 0{,}5\ h$

b1) mittlere Änderungsrate: $\frac{140 - 110}{12 - 9} = 10 \rightarrow +\ 10\ \%$ pro Stunde

b2) Leistungsbereitschaft um 14 Uhr: $140 - 2 \cdot 12 = 116 \rightarrow 116\ \%$

c1) $f'(t) = \frac{20}{3} \cdot t - 20$

$f'(2{,}5) = -\frac{10}{3} \approx -3{,}33$

Münzen

Aufgabennummer: 2_067	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, WS 2.3, WS 3.2	

Susi und Markus spielen mit fairen Münzen. Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf" und „Zahl" jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Susi hat eine Schachtel mit 3 Ein-Euro-Münzen und 5 Zwei-Euro-Münzen.
Markus hat eine Schachtel mit 2 Ein-Euro-Münzen und 3 Zwei-Euro-Münzen.
Beide ziehen aus ihrer Schachtel zufällig jeweils 1 Münze.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass durch die beiden Ziehungen ein Gesamtwert von € 3 erzielt wird.

b) Markus will eine Zwei-Euro-Münze 10-mal werfen.
Susi stellt die Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir mindestens 3-mal ‚Zahl'?"

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen mindestens 3-mal „Zahl" geworfen wird.

c) Susi und Markus beschäftigen sich mit der Wahrscheinlichkeit, mit der „Zahl" beim wiederholten Werfen einer Münze auftritt. Dabei stoßen sie auf folgende Gleichung:

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}5^n = 0{,}9375$

X ... Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Zahl"

1) Berechnen Sie n.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes n in diesem Zusammenhang.

Lösungserwartung

a1) $P(S = 1 \text{ und } M = 2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}$

$P(S = 2 \text{ und } M = 1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist die gesuchte Lösung:

$\frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40} = 47{,}5\ \%$

b1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung: $n = 10$ und $p = 0{,}5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9453... \approx 94{,}5\ \%$

c1) $n = \frac{\ln(0{,}0625)}{\ln(0{,}5)} = 4$

c2) Der Wert n gibt an, wie oft man die Münze werfen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 93,75 % mindestens 1-mal „Zahl“ geworfen wird.

Pauschalreisen

Aufgabennummer: 2_071	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, WS 3.2	

Ein Reisebüro vermittelt Plätze für Pauschalreisen nach Kroatien.

a) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Alle 100 zur Verfügung stehenden Plätze werden vermittelt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 4 der vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen werden.

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet werden kann:
$\binom{100}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^{95}$

b) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Es werden 102 Plätze vermittelt, obwohl nur 100 Plätze zur Verfügung stehen.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Plätze unter diesen Voraussetzungen nicht ausreicht.

c) Pro Reisetermin stehen jeweils 100 Plätze zur Verfügung.
Für jeden gebuchten Platz erzielt das Reisebüro einen Gewinn von a Euro.
Für jeden nicht gebuchten Platz macht das Reisebüro einen Verlust von 120 Euro.
Den Gesamtgewinn erhält man, indem man vom Gewinn für alle gebuchten Plätze den Verlust für alle nicht gebuchten Plätze abzieht.

Bei einem bestimmten Reisetermin werden nur x Plätze gebucht. Der Gesamtgewinn für diesen Termin beträgt G Euro.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus a und G.

$x =$ ____________________________________

Lösungserwartung

a1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}05$

$P(X \leq 4) = 0{,}4359...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 43,6 %.

a2) Es werden 5 der 100 vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen.

b1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 102$ und $p = 0{,}05$

$P(X \leq 1) = 0{,}0340...$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 3,4 %.

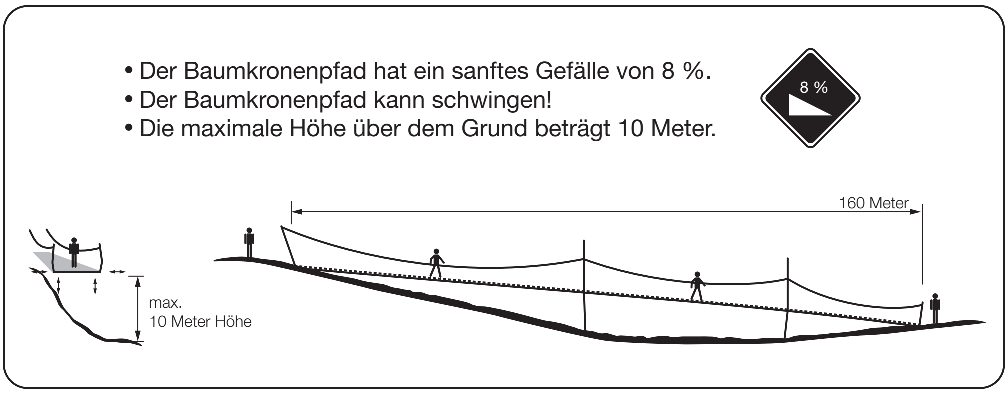
c1) $G = x \cdot a - (100 - x) \cdot 120 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{G + 12\,000}{a + 120}$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Baumkronenpfad

Aufgabennummer: 2_076	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 5.1, FA 5.3	

Der *Baumkronenpfad* ist eine Brückenstrecke durch einen Teil des Schönbrunner Tiergartens.



a) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen:
„Der Baumkronenpfad hat ein sanftes Gefälle von 8 %."

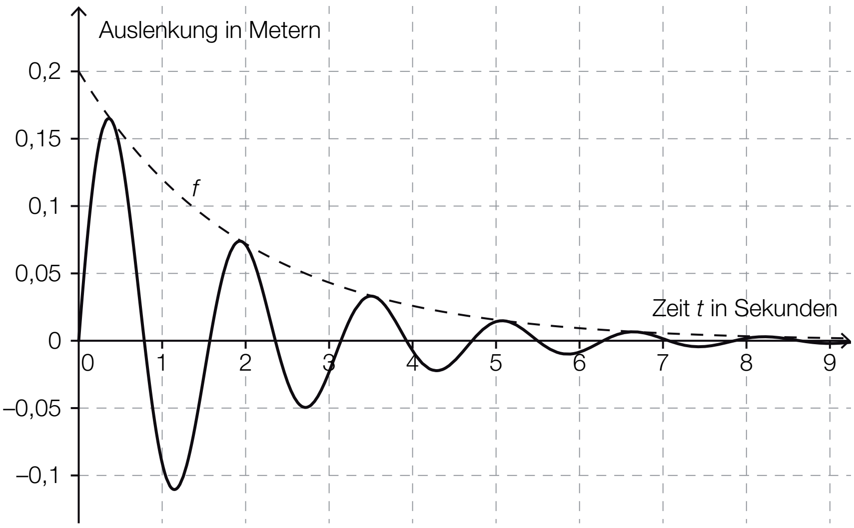
Dabei wird der Baumkronenpfad vereinfacht als geradlinig angenommen. Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.

1) Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen Startpunkt und Endpunkt.

2) Berechnen Sie den Neigungswinkel des Baumkronenpfads.

b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!“

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende“ strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion *f* mit $f(t) = c \cdot a^t$.

1) Lesen Sie aus der Grafik den Parameter *c* ab.
2) Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter *a* dieser Funktion *f* gilt: $0 < a < 1$.

Lösungserwartung

a1) Höhenunterschied in Metern: $160 \cdot 0{,}08 = 12{,}8$

a2) $\tan(\alpha) = 0{,}08 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4{,}57\ldots°$

Auch $\alpha = -4{,}57\ldots°$ *ist als richtig zu werten.*
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

b1) $c = f(0) = 0{,}2$

b2) Da die gegebene Exponentialfunktion streng monoton fallend ist, gilt für den Parameter a:
$0 < a < 1$.

Teilchenbeschleuniger

Aufgabennummer: 2_084	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, WS 3.2, WS 3.3	

Am Forschungsinstitut CERN wird mithilfe moderner Teilchenbeschleuniger physikalische Grundlagenforschung betrieben. In einem Teilchenbeschleuniger werden elektrisch geladene Teilchen auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt.

a) Die Teilchen bewegen sich in einem ringförmigen Tunnel nahezu mit Lichtgeschwindigkeit. Sie machen dabei in einer Sekunde *a* Umläufe und legen in dieser Zeit rund $3 \cdot 10^8$ m zurück.

1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Länge *u* eines Umlaufs in Kilometern.

$u =$ ____

b) Wenn Teilchen im Teilchenbeschleuniger kollidieren, können neue Teilchen entstehen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kollision ein Teilchen eines bestimmten Typs entsteht, beträgt 3,4 %.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird mit $P(E) = \binom{500}{2} \cdot 0{,}034^2 \cdot (1 - 0{,}034)^{498}$ berechnet.

1) Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird.

2) Berechnen Sie, wie viele dieser Teilchen im Mittel entstehen, wenn 1 000 Kollisionen stattfinden.

c) Im Zentrum eines Atoms befindet sich der Atomkern. Vereinfacht können sowohl der Atomkern als auch das gesamte Atom als kugelförmig angenommen werden.
In einer Broschüre wird beschrieben, wie klein ein Atomkern im Vergleich zum gesamten Atom ist: „Hätte ein Atomkern 1 cm Durchmesser, so wäre der Durchmesser des gesamten Atoms 100 m."

1) Berechnen Sie den Durchmesser eines Atoms, wenn der Durchmesser des Atomkerns 10^{-14} m beträgt.

Lösungserwartung

a1) $u = \frac{3 \cdot 10^8}{a \cdot 10^3}$

b1) Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei 500 Kollisionen genau 2 Teilchen dieses Typs entstehen.

b2) $1\,000 \cdot 0{,}034 = 34$

Bei 1 000 Kollisionen entstehen im Mittel 34 Teilchen dieses Typs.

c1) $\frac{100}{0{,}01} = \frac{d}{10^{-14}} \Rightarrow d = 10^{-10}$

Der Durchmesser des Atoms beträgt 10^{-10} m.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Section-Control

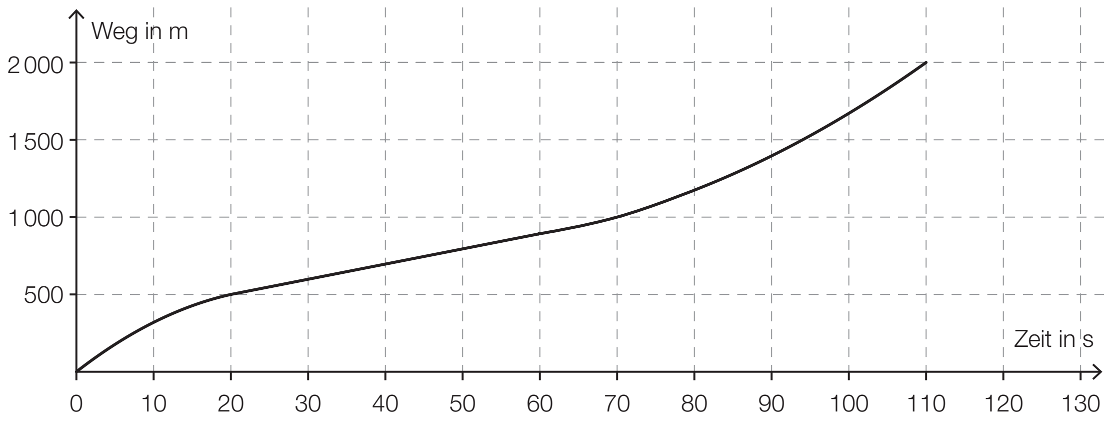
Aufgabennummer: 2_086	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 1.1, AN 1.3	

Section-Control **bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.**

a) In einem 6 km langen Baustellenbereich wird eine Section-Control errichtet.
Es gilt eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 60 km/h.
Jemand behauptet: „Wenn ich die zulässige Höchstgeschwindigkeit im gesamten Baustellenbereich um 10 % überschreite, dann verkürzt sich meine Fahrzeit im Baustellenbereich um 10 %."

1) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

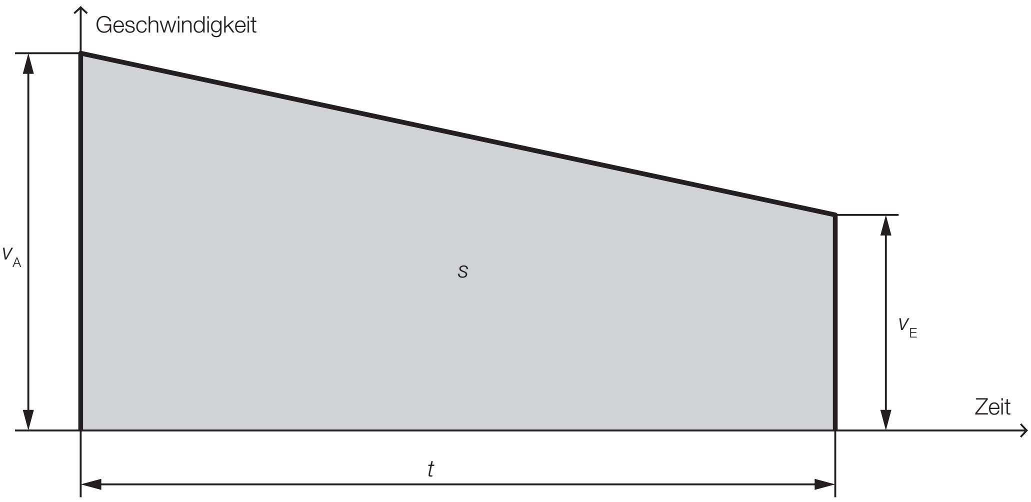
b) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeugs in einem überprüften Bereich dargestellt.



1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte.

2) Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist.

c) Ein Fahrzeug fährt durch einen Bereich, der durch eine Section-Control überwacht wird. Seine Geschwindigkeit nimmt auf diesem Streckenabschnitt linear ab.



Die Endgeschwindigkeit v_E, die Fahrzeit t und der zurückgelegte Weg s sind bekannt.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit v_A des Fahrzeugs.

$v_A =$ ______________________________

Lösungserwartung

a1) $s = 6$ km

$v_1 = 60$ km/h: $t_1 = \frac{s}{v_1} = 0{,}1$ h

$v_2 = 66$ km/h: $t_2 = \frac{s}{v_2} = 0{,}\overline{09}$ h

90 % von 0,1 h sind exakt 0,09 h. Das ist weniger als t_2.

b1) $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1\,000 \text{ m}}{70 \text{ s}} = 14{,}285\ldots \text{ m/s} \approx 14{,}29 \text{ m/s}$

b2) Die Fahrzeit für die erste Weghälfte beträgt 70 Sekunden. Die Fahrzeit für die zweite Weghälfte beträgt nur 40 Sekunden. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte geringer.

c1) Der Flächeninhalt des Trapezes entspricht dem zurückgelegten Weg: $s = \frac{v_A + v_E}{2} \cdot t$.

$v_A = 2 \cdot \frac{s}{t} - v_E$

Gold

Aufgabennummer: 2_090	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1	

Das Edelmetall Gold gilt als besonders wertvoll, weil es selten vorkommt, leicht zu Schmuck verarbeitet werden kann und sehr beständig ist.

a) Der *World Gold Council*, eine globale Lobby-Organisation der Goldminenindustrie, schätzt die bis zum Jahr 2012 weltweit geförderte Goldmenge auf rund $1{,}713 \cdot 10^8$ Kilogramm (kg).
Gold hat eine Dichte von 19,3 Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm³). Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

Stellen Sie sich vor, dass die gesamte weltweit geförderte Goldmenge in einen Würfel gegossen wird.

1) Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels in Metern.

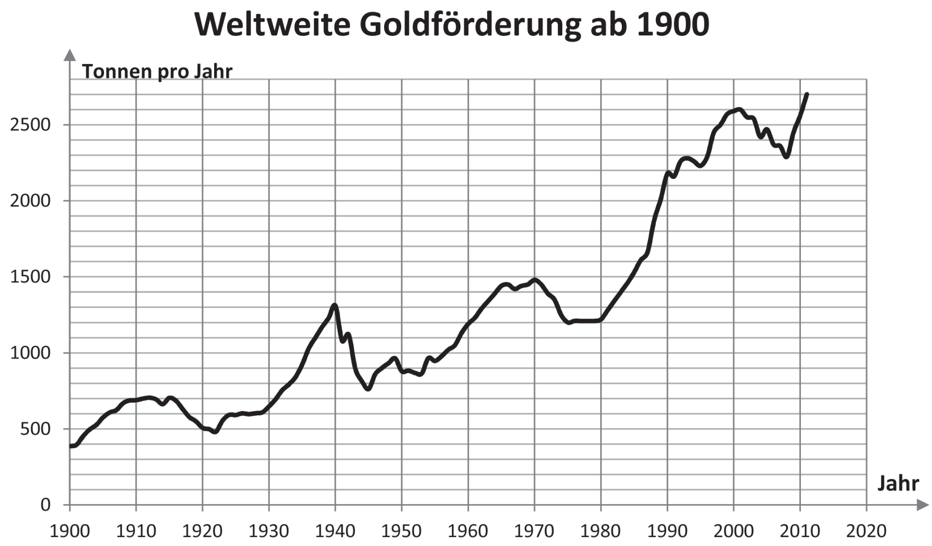
b) Gold kommt in der Natur auch in der Form von Nuggets (Goldklumpen) vor. Es wird in der Einheit *Feinunze* (oz. tr.) gehandelt, die einer Masse von 31,1035 Gramm (g) reinen Goldes entspricht.

Gesucht ist der Wert W eines Nuggets in Euro, wenn folgende Größen bekannt sind:

m ... Masse des Nuggets in Gramm (g)
p ... Preis in Euro für eine Feinunze Gold

1) Erstellen Sie eine Formel für W.

c) Die nachstehende Grafik zeigt die weltweite jährliche Förderung von Gold ab dem Jahr 1900 in Tonnen.



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldfoerderung.png [29.08.2013] (adaptiert).

1) Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, in welchem Jahrzehnt die weltweite Förderung absolut am stärksten gestiegen ist.

d) In einer Zeitung wird folgende Analyse veröffentlicht: „Der Wert der Ein-Unzen-Krugerrand-Goldmünze ist im Jahr 2010 um 20 % gestiegen. Im Jahr 2011 stieg der Wert nochmals um 10 %. Also ist der Wert der Münze in diesen beiden Jahren insgesamt um 30 % gestiegen."

1) Begründen Sie, warum diese Aussage über die Wertentwicklung nicht richtig ist.

Lösungserwartung

a1) Kantenlänge des Würfels: $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\dfrac{1{,}713 \cdot 10^{11}\text{ g}}{19{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 2\,070{,}4\ldots\text{ cm}$

Der Würfel hat eine Kantenlänge von rund 20,7 Metern.

b1) $W = \dfrac{m \cdot p}{31{,}1035}$

c1) Die weltweite jährliche Förderung ist zwischen 1980 und 1990 absolut am stärksten gestiegen.

d1) Die angegebenen Prozentsätze dürfen nicht addiert werden, weil sie sich nicht auf denselben Grundwert beziehen.
Der Wert der Goldmünze ist um den Faktor $1{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}32$ gestiegen, also um 32 %.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Solarthermie-Anlagen*

Aufgabennummer: 2_074	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 5.1, AN 4.3	

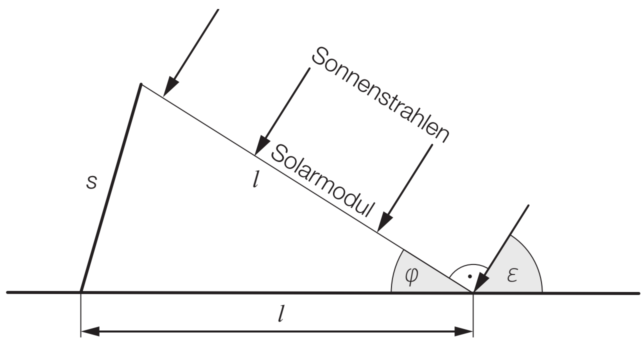
Bei Solarthermie-Anlagen wird die Sonnenstrahlung von sogenannten *Solarmodulen* in Wärme umgewandelt. Diese Wärme kann beispielsweise zur Warmwassererzeugung oder zur Heizung von Gebäuden verwendet werden.

Aufgabenstellung:

a) Ein Solarmodul einer Solarthermie-Anlage mit der Länge l schließt mit dem waagrechten Erdboden den Winkel φ ein. Dieser Winkel φ wird durch eine Stütze mit variabler Länge s so verändert, dass das Solarmodul mit den Sonnenstrahlen einen rechten Winkel einschließt.

Die Sonnenstrahlen treffen unter dem Winkel ε auf den Erdboden auf.

Die Situation ist in der nachstehenden Abbildung modellhaft dargestellt.



1) Geben Sie eine Formel an, mit der s unter Verwendung von l und ε berechnet werden kann.

$s =$ ______________________________

Das oben abgebildete Solarmodul hat die Länge l = 1 666 mm. Bei diesem Solarmodul nimmt der Winkel ε im Laufe eines bestimmten Tages Werte von 14° bis 65° an.

2) Geben Sie den maximalen Wert von s an.

maximaler Wert von s: ______________________________ mm

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

b) Die Leistung einer bestimmten Solarthermie-Anlage an einem wolkenfreien Tag wird durch die Funktion P modelliert. Dabei gilt:

$P(t) = 0{,}0136 \cdot a^3 \cdot t^4 - 0{,}272 \cdot a^2 \cdot t^3 + 1{,}36 \cdot a \cdot t^2$

t ... Zeit in h, die seit dem Sonnenaufgang ($t = 0$) vergangen ist
$P(t)$ ... Leistung in kW zur Zeit t
a ... Parameter

Beim Sonnenaufgang und beim Sonnenuntergang beträgt die Leistung der Solarthermie-Anlage 0 kW. Zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang nimmt die Funktion P positive Werte an.

1) Ermitteln Sie für diese Solarthermie-Anlage den Wert des Parameters a für einen bestimmten wolkenfreien Tag, an dem die Sonne um 7:08 Uhr aufgeht und um 18:38 Uhr untergeht.

Die Arbeit, die von der Solarthermie-Anlage zwischen den zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 verrichtet wird, ist $\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Berechnen Sie die an diesem Tag von der Solarthermie-Anlage verrichtete Arbeit (in kWh).

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $s = 2 \cdot l \cdot \sin\left(\frac{90° - \varepsilon}{2}\right)$

a2) $2 \cdot 1\,666 \cdot \sin\left(\frac{90° - 14°}{2}\right) = 2\,051{,}3... \approx 2\,051$

maximaler Wert von s: ca. 2 051 mm

b) **Lösungserwartung:**

b1) Mit $P(11{,}5) = 0$ erhält man den Parameter $a = \frac{20}{23}$.

b2) $\int_0^{11{,}5} P(t)\,\mathrm{d}t = 59{,}9... \approx 60$

Die an diesem Tag von der Solarthermie-Anlage verrichtete Arbeit beträgt ca. 60 kWh.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „kWh" nicht angegeben sein muss.

Benzinverbrauch*

Aufgabennummer: 2_075	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 1.1, AN 3.3	

Der Benzinverbrauch eines bestimmten Kleinwagens kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit modellhaft durch die Funktion B beschrieben werden.

$$B(v) = 0{,}000483 \cdot v^2 - 0{,}0326 \cdot v + 2{,}1714 + \frac{66}{v} \quad \text{mit } 20 < v < 150$$

v ... Geschwindigkeit in km/h
$B(v)$ ... Benzinverbrauch in Litern pro 100 km (L/100 km) bei der Geschwindigkeit v

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h höher als bei einer Geschwindigkeit von 70 km/h ist.

______________________________ %

Der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 40 km/h ist um 25 % geringer als der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit v_1 mit $20 < v_1 < 40$.

2) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v_1.

v_1 = ______________________________ km/h

b) Für hohe Geschwindigkeiten soll die Funktion B durch eine lineare Funktion f mit $f(v) = k \cdot v + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ angenähert werden, sodass gilt:
$f(100) = B(100)$
$f(130) = B(130)$

1) $\boxed{\text{A}}$ Ermitteln Sie einen Funktionsterm der Funktion f.

$f(v)$ = ______________________________

Diese Näherung kann verwendet werden, wenn die Abweichung zwischen den Funktionswerten von f und B höchstens 0,3 L/100 km beträgt.

2) Geben Sie das größtmögliche Intervall für die Geschwindigkeit an, in dem die Funktion f als Näherung verwendet werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

c) 1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion B diejenige Geschwindigkeit v_{min}, bei der der Benzinverbrauch am geringsten ist, sowie den zugehörigen Benzinverbrauch B_{min}.

v_{min} = ____________________ km/h

B_{min} = ____________________ L/100 km

Der Benzinverbrauch hängt auch vom Reifendruck ab.
Die Funktion g beschreibt den Benzinverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck.
Dabei gilt: $g(v) = 1{,}02 \cdot B(v)$

2) Berechnen Sie mithilfe der Funktion g, bei welchen beiden Geschwindigkeiten der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{min} ist.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $\frac{B(90) - B(70)}{B(70)} = 0{,}2138... \approx 21{,}4\ \%$

a2) $B(v_1) \cdot 0{,}75 = B(40)$

$v_1 = 24{,}24...$ km/h

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:

$f(100) = B(100) = 4{,}40...$

$f(130) = B(130) = 6{,}60...$

$f(v) = 0{,}0734... \cdot v - 2{,}9399...$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$D(v) = B(v) - f(v)$

$D(v) = 0{,}3$

$(v_1 = -10{,}94...)$

$v_2 = 87{,}08...$

$v_3 = 143{,}34...$

Da die Funktion D an der Stelle $v = 114{,}91...$ km/h eine Minimumstelle mit dem Funktionswert $-0{,}1 > -0{,}3$ hat, erhält man das Intervall [87,1 km/h; 143,3 km/h].

c) Lösungserwartung:

c1) $v_{min} = 55{,}73...$ km/h

$B_{min} = 3{,}03...$ L/100 km

c2) $g(v) = B_{min} + 2$

$v_1 = 20{,}41...$ km/h

$v_2 = 108{,}67...$ km/h

Bei Geschwindigkeiten von ca. 20,4 km/h und ca. 108,7 km/h ist der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{min}.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm. Äquivalente Funktionsterme sind als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für das richtige Intervall, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

c1) Ein Punkt für die beiden richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die beiden richtigen Geschwindigkeiten, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ozonmessungen*

Aufgabennummer: 2_064	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.2, FA 3.4, FA 4.3, AN 4.3	

Das Gas Ozon hat Auswirkungen auf unsere Gesundheit. Aus diesem Grund werden in Messstationen und mithilfe von Wetterballons die jeweiligen Ozonkonzentrationen in unterschiedlichen Atmosphärenschichten gemessen.

Aufgabenstellung:

a) Auf der Hohen Warte in Wien befindet sich in 220 m Seehöhe eine Wetterstation. Hier wird für eine Messreihe ein Wetterballon mit einem Ozonmessgerät gestartet. Das Ozonmessgerät beginnt mit seinen Aufzeichnungen, wenn der Wetterballon eine Seehöhe von 2 km erreicht hat.

Nehmen Sie an, dass der Wetterballon (mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s) lotrecht in die Höhe steigt und dabei gleichmäßig mit 0,125 m/s^2 beschleunigt, bis er zu einem Zeitpunkt t_1 eine Geschwindigkeit von 6 m/s erreicht. Die Zeit wird dabei in Sekunden und die Seehöhe in Metern gemessen.

1) Ermitteln Sie die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1.

Ab dem Zeitpunkt t_1 steigt der Wetterballon mit der konstanten Geschwindigkeit von 6 m/s lotrecht weiter.

2) Ermitteln Sie, wie viele Sekunden nach dem Start das Messgerät mit seinen Aufzeichnungen beginnt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

b) Ein Wetterballon hat bei einem Luftdruck von 1 013,25 hPa ein Volumen von 6,3 m³.
Durch die Abnahme des Luftdrucks während des Aufstiegs dehnt sich der Wetterballon immer weiter aus und wird näherungsweise kugelförmig. Bei einem Durchmesser von *d* Metern zerplatzt er.

Der Luftdruck kann in Abhängigkeit von der Seehöhe *h* durch eine Funktion *p* modelliert werden. Dabei ordnet die Funktion *p* der Seehöhe *h* den Luftdruck *p*(*h*) zu.

Es gilt: $p(h) = 1\,013{,}25 \cdot \left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}$ mit h in m, $p(h)$ in hPa

Gehen Sie davon aus, dass der Luftdruck *p*(*h*) und das Volumen *V*(*h*) des Wetterballons indirekt proportional zueinander sind. Dabei ist *V*(*h*) das Volumen des Wetterballons in der Seehöhe *h*.

1) Drücken Sie das Volumen *V*(*h*) durch die Seehöhe *h* aus.

   $V(h) =$ ____ mit h in m, $V(h)$ in m³

Der Wetterballon zerplatzt in einer Seehöhe von $h = 27\,873{,}6$ m.

2) Berechnen Sie den Durchmesser *d* des Wetterballons in Metern, bei dem dieser zerplatzt.

c) Das sogenannte *Gesamtozon* ist ein Maß für die Dicke der Ozonschicht und wird in sogenannten *Dobson-Einheiten* (DU) angegeben.

Die von einem Wetterballon aufgezeichneten Messdaten können modellhaft durch eine quadratische Funktion f beschrieben werden. Dabei ordnet f der Höhe h die Gesamtozondichte $f(h)$ zu (h in km, $f(h)$ in DU/km).

Der höchste Wert von 36 DU/km wird in einer Seehöhe von 22 km gemessen. In einer Seehöhe von 37 km beträgt der gemessene Wert 1 DU/km.

1) Ermitteln Sie $f(h)$.

$f(h) =$ ____

In der Erdatmosphäre entspricht 1 DU einer 0,01 mm dicken Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche. Die Dicke derjenigen Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche, die dem Gesamtozon zwischen 7 km und 37 km Seehöhe entspricht, ist $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h$.

2) Berechnen Sie die Dicke dieser Schicht.

Dicke dieser Schicht: ____ mm

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$v(t) = 0{,}125 \cdot t$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Wetterballons in m/s zum Zeitpunkt t

$v(t_1) = 6 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{6}{0{,}125} = 48$

$\int_0^{48} v(t)\,\mathrm{d}t = 144$

Die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1 beträgt 144 m.

a2) mögliche Vorgehensweise:

verbleibende senkrechte Strecke bis zum Start der Messung:
$2\,000 - 220 - 144 = 1\,636$

$\frac{1\,636}{6} + 48 = 320{,}\dot{6}$

Das Messgerät beginnt seine Aufzeichnungen ca. 321 s nach dem Start.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $V(h) = \dfrac{6{,}3}{\left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}}$ mit h in m, $V(h)$ in m³

b2) mögliche Vorgehensweise:

$V(27\,873{,}6) = 1\,150{,}351...$

$\dfrac{4 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \pi}{3} = 1\,150{,}351... \quad \Rightarrow \quad d = 13{,}0... \approx 13$

Der Durchmesser des Wetterballons, bei dem dieser zerplatzt, beträgt ca. 13 m.

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:

$f(h) = a \cdot h^2 + b \cdot h + c$

$f(37) = 1$

$f(22) = 36$

$f'(22) = 0$

$f(h) = -\frac{7}{45} \cdot h^2 + \frac{308}{45} \cdot h - \frac{1768}{45}$

c2) $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h = 730$

$730 \cdot 0{,}01 = 7{,}3$

Dicke dieser Schicht: 7,3 mm

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s“ nicht angegeben sein muss.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

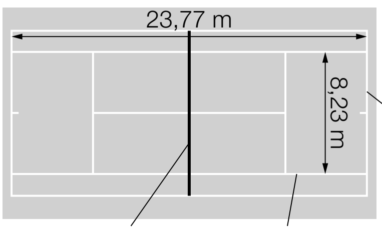
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Tennis*

Aufgabennummer: 2_058	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 4.3, WS 1.1	

Tennis ist ein Rückschlagspiel zwischen zwei oder vier Personen, bei dem ein Tennisball über ein Netz geschlagen werden muss. Das Spielfeld ist rechteckig und wird durch ein Netz in zwei Hälften geteilt (siehe Abbildung 1). Für ein Spiel zwischen zwei Personen ist der Platz 23,77 m lang und 8,23 m breit. Das Spielfeld wird durch die Grundlinien und die Seitenlinien begrenzt. Das Netz weist eine maximale Höhe von 1,07 m auf.

Abbildung 1:



Aufgabenstellung:

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -0{,}0007 \cdot x^3 + 0{,}005 \cdot x^2 + 0{,}2 \cdot x + 0{,}4$ beschreibt eine Bahnkurve eines Tennisballs bis zu derjenigen Stelle, an der der Tennisball erstmals den Boden berührt. Dabei gibt x die waagrechte Entfernung des Tennisballs vom Abschlagpunkt und $f(x)$ die Flughöhe des Tennisballs über dem Boden an (x und $f(x)$ in m). Die Flugbahn des Tennisballs startet zwischen den Seitenlinien an der Grundlinie und die Ebene, in der die Flugbahn liegt, verläuft parallel zur Seitenlinie des Tennisfelds.

1) Geben Sie an, in welcher waagrechten Entfernung vom Abschlagpunkt der Tennisball seine maximale Höhe erreicht.

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ____________________ m

2) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Tennisball im gegnerischen Spielfeld oder hinter der Grundlinie landet.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

b) Fällt ein Tennisball lotrecht (ohne Drehung) auf den Boden, so springt er wieder lotrecht zurück. Der Restitutionskoeffizient r ist ein Maß für die Sprungfähigkeit des Tennisballs.

Es gilt: $r = \frac{v_2}{v_1}$, wobei v_1 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs vor und v_2 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs nach dem Aufprall ist.

Die Differenz der vertikalen Geschwindigkeiten unmittelbar vor und nach dem Aufprall ist aufgrund der unterschiedlichen Bewegungsrichtungen des Tennisballs definiert durch: $\Delta v = v_2 - (-v_1)$.

1) Geben Sie Δv in Abhängigkeit von v_1 und r an.

$\Delta v =$ ____

Ein Tennisball trifft mit $v_1 = 4{,}4$ m/s lotrecht auf dem Boden auf. Der Restitutionskoeffizient beträgt für diesen Tennisball $r = 0{,}6$. Die Kontaktzeit mit dem Boden beträgt 0,01 s.

2) Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung a (in m/s²) des Tennisballs in vertikaler Richtung beim Aufprall (während der Kontaktzeit).

$a =$ ____ m/s²

c) Bei einem Fünf-Satz-Tennismatch gewinnt ein Spieler, sobald er drei Sätze gewonnen hat. Für einen Satzgewinn müssen in der Regel sechs Games gewonnen werden, wobei es für jedes gewonnene Game einen Punkt gibt.

Für unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p für ein gewonnenes Game wurden die daraus resultierenden Wahrscheinlichkeiten m für einen Matchgewinn bei einem Fünf-Satz-Match ermittelt. In der nachstehenden Tabelle sind diese Wahrscheinlichkeiten angeführt.

p	m
0,5	0,5
0,51	0,6302
0,55	0,9512
0,6	0,9995
0,7	1,000

Für ein bestimmtes Fünf-Satz-Match gilt:
Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Game gewinnt, ist um 2 Prozentpunkte höher als die Wahrscheinlichkeit, dass sein Gegenspieler B ein Game gewinnt.

1) Geben Sie an, um wie viel Prozentpunkte die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A dieses Fünf-Satz-Match gewinnt, höher ist als jene für seinen Gegenspieler B.

Gegenüber einem anderen, schwächeren Gegenspieler C hat Spieler A einen Vorteil von 10 Prozentpunkten, ein Game zu gewinnen.

2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Fünf-Satz-Match gegen Gegenspieler C gewinnt, um 50,94 Prozent höher ist als beim Fünf-Satz-Match gegen B.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = 0$

$-0{,}0021 \cdot x^2 + 0{,}01 \cdot x + 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 12{,}42... \quad (x_2 = -7{,}66...)$

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ca. 12,4 m

a2) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 21{,}597... \quad (x_2 = -2{,}15...,\ x_3 = -12{,}30...)$

Die einzige positive Nullstelle von f ist $x_1 \approx 21{,}6$.

Da das Spielfeld 23,77 m lang ist, landet der Tennisball im gegnerischen Spielfeld.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $\Delta v = r \cdot v_1 + v_1$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$\Delta v = v_1 \cdot (1 + r) = 4{,}4 \cdot (1 + 0{,}6) = 7{,}04$

$a = 7{,}04 : 0{,}01 = 704$

$a = 704\ \text{m/s}^2$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $0{,}6302 - 0{,}3698 = 0{,}2604$

Diese Wahrscheinlichkeit ist um ca. 26 Prozentpunkte höher.

c2) Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Fünf-Satz-Match gegen Spieler C gewinnt: 0,9512

Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A das Fünf-Satz-Match gegen Spieler B gewinnt: 0,6302

$\frac{0{,}9512}{0{,}6302} = 1{,}50936... \approx 1{,}5094$

$\Rightarrow$ 0,9512 ist um ca. 50,94 Prozent höher als 0,6302.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [12,4 m; 12,5 m]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
a2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für a: [700 m/s^2; 710 m/s^2]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [26; 26,1]
c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Bremsvorgang*

Aufgabennummer: 2_051	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.2, AN 1.1, AN 3.2, AN 4.3	

Der Bremsweg s_B ist die Länge derjenigen Strecke, die ein Fahrzeug ab dem Wirksamwerden der Bremsen bis zum Stillstand zurücklegt. Entscheidend für den Bremsweg sind die Fahrgeschwindigkeit v_0 des Fahrzeugs zu Beginn des Bremsvorgangs und die Bremsverzögerung b. Der Bremsweg s_B kann mit der Formel $s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b}$ berechnet werden (v_0 in m/s, b in m/s², s_B in m).

Der Anhalteweg s_A berücksichtigt zusätzlich zum Bremsweg den während der Reaktionszeit t_R zurückgelegten Weg. Dieser sogenannte *Reaktionsweg* s_R kann mit der Formel $s_R = v_0 \cdot t_R$ berechnet werden (v_0 in m/s, t_R in s, s_R in m).

Der Anhalteweg s_A ist gleich der Summe aus Reaktionsweg s_R und Bremsweg s_B.

Aufgabenstellung:

a) 1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Fahrgeschwindigkeit v_0 in Abhängigkeit vom Bremsweg s_B und von der Bremsverzögerung b auf.

$v_0 =$ ____________________

2) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Der Reaktionsweg s_R ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Bremsweg s_B ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Bremsweg s_B ist indirekt proportional zur Bremsverzögerung b.	☐
Der Anhalteweg s_A ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Anhalteweg s_A ist direkt proportional zur Reaktionszeit t_R.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

b) Die oft in Fahrschulen verwendeten Formeln für die näherungsweise Berechnung des Reaktions- und des Bremswegs (jeweils in m) lauten:
$s_R = \frac{v_0}{10} \cdot 3$ und $s_B = \left(\frac{v_0}{10}\right)^2$ mit v_0 in km/h und s_R bzw. s_B in m

1) Zeigen Sie anhand geeigneter Umformungen, dass die für die näherungsweise Berechnung des Reaktionswegs verwendete Formel für eine Reaktionszeit von etwa einer Sekunde annähernd die gleichen Ergebnisse wie die Formel für s_R aus der Einleitung liefert.

2) Berechnen Sie, welcher Wert für die Bremsverzögerung bei der Näherungsformel für den Bremsweg angenommen wird.

c) Es kann eine Bremsverzögerung b von 8 m/s² bei trockener Fahrbahn, von 6 m/s² bei nasser Fahrbahn und von höchstens 4 m/s² bei Schneefahrbahn angenommen werden.

1) Geben Sie denjenigen Bruchteil an, um den bei gleicher Fahrgeschwindigkeit der Bremsweg bei nasser Fahrbahn länger als bei trockener Fahrbahn ist.

Ein Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 20$ m/s. Der Anhalteweg ist bei Schneefahrbahn länger als bei trockener Fahrbahn.

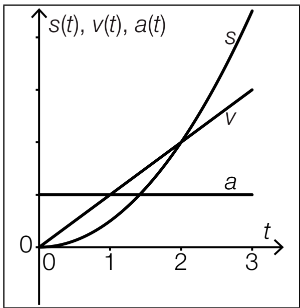
2) Ermitteln Sie unter der Annahme $t_R = 1$ s für diese beiden Fahrbahnzustände den Mindestwert für die absolute Zunahme des Anhaltewegs.

d) Das Wirksamwerden der Bremsen eines Fahrzeugs beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.
Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Fahrzeugs kann für das Zeitintervall [0; 3] durch die Funktion v modelliert werden, die Beschleunigung $a(t)$ durch die Funktion a und der in diesem Zeitintervall zurückgelegte Weg $s(t)$ durch die Funktion s ($v(t)$ in m/s, $a(t)$ in m/s², $s(t)$ in m, t in s).

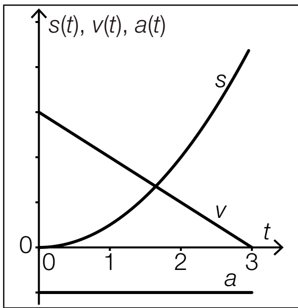
1) Interpretieren Sie die Bedeutung des bestimmten Integrals $\int_0^3 v(t)\,dt$ im gegebenen Kontext.

Jede der sechs nachstehenden Abbildungen zeigt – jeweils im Zeitintervall [0; 3] – den Graphen einer Beschleunigungsfunktion a, den Graphen einer Geschwindigkeitsfunktion v und den Graphen einer Wegfunktion s.

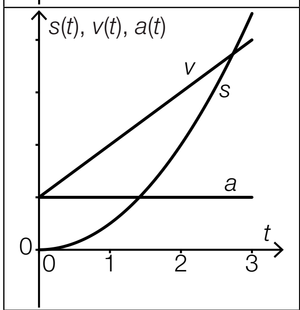
2) Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die drei zusammengehörige Graphen eines drei Sekunden dauernden Bremsvorgangs zeigt.



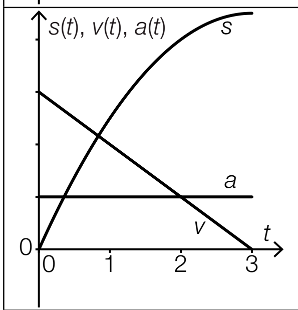
☐



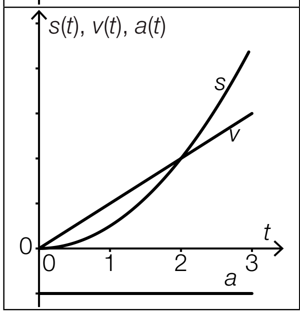
☐



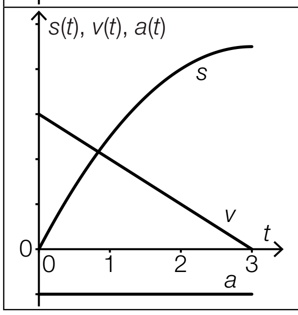
☐



☐



☐



☐

Lösungserwartung

a1) $v_0 = \sqrt{2 \cdot b \cdot s_B}$

a2)

Der Reaktionsweg s_R ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☒
Der Bremsweg s_B ist indirekt proportional zur Bremsverzögerung b.	☒

b1) mögliche Umformungen:

$s_R = v_0 \cdot t_R$

Für v_0 in m/s und t_R = 1 Sekunde gilt: $s_R = v_0$

Für v_0 in km/h und t_R = 1 Sekunde gilt: $s_R = \frac{v_0}{3{,}6} = v_0 \cdot 0{,}278... \approx v_0 \cdot 0{,}3 = \frac{v_0}{10} \cdot 3$

Daher liefern diese beiden Formeln annähernd die gleichen Ergebnisse.

b2) mögliche Vorgehensweise:

$s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b}$ mit v_0 in m/s $\Rightarrow$ $s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b} \cdot \frac{1}{3{,}6^2} = \frac{v_0^2}{25{,}92 \cdot b}$ mit v_0 in km/h,

$\frac{v_0^2}{25{,}92 \cdot b} = \frac{v_0^2}{100}$ $\Rightarrow$ $b \approx 3{,}9$ m/s²

Bei der Näherungsformel wird eine Bremsverzögerung von ca. 3,9 m/s² angenommen.

c1) $\frac{\frac{v_0^2}{2 \cdot 6}}{\frac{v_0^2}{2 \cdot 8}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ Bei nasser Fahrbahn ist der Bremsweg um $\frac{1}{3}$ länger als der Bremsweg bei trockener Fahrbahn.

c2) mögliche Vorgehensweise:

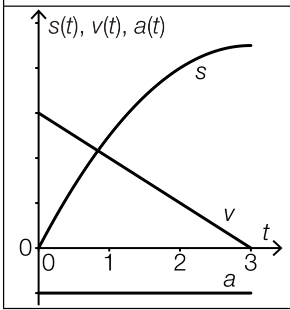
Anhalteweg bei trockener Fahrbahn: $s_A = 20 \cdot 1 + \frac{20^2}{2 \cdot 8} = 45$ m

Mindestwert für den Anhalteweg bei Schneefahrbahn: $s_A = 20 \cdot 1 + \frac{20^2}{2 \cdot 4} = 70$ m

Der Anhalteweg nimmt (bei $v_0 = 20$ m/s und $t_R = 1$ s) bei Schneefahrbahn um mindestens 25 m zu.

d1) Das bestimmte Integral $\int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t$ beschreibt den zurückgelegten Weg (in Metern) im Zeitintervall [0; 3].

d2)

			☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

b1) Ein Punkt für die Angabe geeigneter Umformungen.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s²" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,8 m/s²; 4 m/s²]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

d1) Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation.
d2) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Abbildung angekreuzt ist.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zuverlässigkeit eines Systems*

Aufgabennummer: 2_045	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1, AN 3.3, WS 2.3	

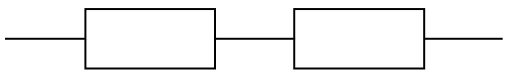
Ein System ist im Folgenden eine Maschine, die aus mehreren Bauteilen besteht. Jedes Bauteil dieses Systems kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit korrekt funktionieren oder ausfallen. Wenn einzelne Bauteile eines Systems ausfallen, hängt es von der Bauart des Systems ab, ob das gesamte System weiter funktioniert oder ob es ausfällt.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Bauteils* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. Das gilt jeweils für eine bestimmte Zeitdauer und unter bestimmten Bedingungen.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Systems* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. (Es wird modellhaft angenommen, dass Ausfälle von Bauteilen voneinander unabhängig sind.) Die entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit heißt Ausfallwahrscheinlichkeit.

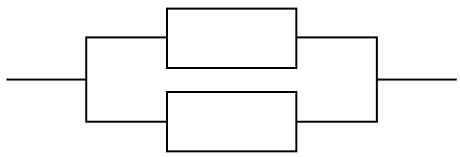
Man unterscheidet zwei einfache Typen von Systemen:

- Seriensysteme:



Ein Seriensystem funktioniert genau dann, wenn alle Bauteile funktionieren.

- Parallelsysteme:

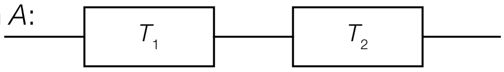


Ein Parallelsystem funktioniert genau dann, wenn mindestens ein Bauteil funktioniert.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist das System A:



Das Bauteil T_1 hat die Zuverlässigkeit p_1 und das Bauteil T_2 hat die Zuverlässigkeit p_2.

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems A als Funktion z_A von p_1 und p_2.

Geben Sie $z_A(p_1, p_2)$ an!

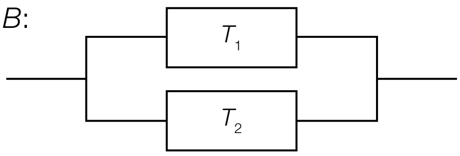
$z_A(p_1, p_2) =$ ____

Bei einem anderen System gleicher Bauart haben die Bauteile jeweils die gleiche Zuverlässigkeit $p_1 = p_2 = 0{,}7$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit dieses Systems soll auf ein Viertel der aktuellen Ausfallwahrscheinlichkeit gesenkt werden.

Geben Sie an, welchen Wert die Zuverlässigkeit p_{neu} (für jedes der beiden Bauteile) annehmen muss!

$p_{neu} =$ ____

b) Gegeben ist das System B:



Die beiden Bauteile T_1 und T_2 haben jeweils die gleiche Zuverlässigkeit p.

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems B als Funktion z_B von p.

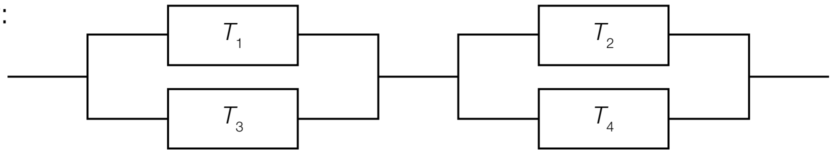
Geben Sie $z_B(p)$ an!

$z_B(p) =$ ____

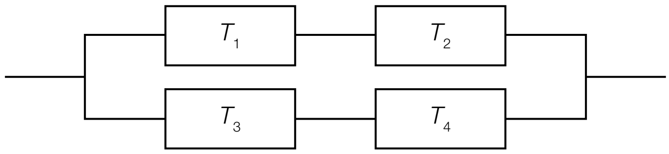
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion z_B auf dem Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend ist!

c) Gegeben sind die Systeme C und D:

System C:



System D:



Jedes der Bauteile T_1, T_2, T_3 und T_4 hat die gleiche Zuverlässigkeit p.

Die Zuverlässigkeit z_C des Systems C ist eine Funktion von p und wird durch die Funktionsgleichung $z_C(p) = p^4 - 4 \cdot p^3 + 4 \cdot p^2$ beschrieben.

Ermitteln Sie den Quotienten $\frac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)}$ und interpretieren Sie diesen Wert für das System C!

Die Zuverlässigkeit z_D des Systems D ist eine Funktion von p.

Begründen Sie, warum $z_C(p) > z_D(p)$ für alle $p \in (0; 1)$ gilt!
Verwenden Sie dazu entweder eine Funktionsgleichung von z_D oder begründen Sie anhand der Bauart der Systeme C und D.

Lösungserwartung

a) $z_A(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2$

mögliche Vorgehensweise:

$1 - p_{neu}^2 = \frac{1 - 0{,}7^2}{4}$

$p_{neu} = \sqrt{0{,}8725} \approx 0{,}934$

b) $z_B(p) = 1 - (1 - p)^2$

mögliche Vorgehensweisen:

Der Funktionsterm $1 - (1 - p)^2 = -(p - 1)^2 + 1$ ist dahingehend zu deuten, dass die durch $f(x) = x^2$ beschriebene Grundparabel durch Einsetzen von $x = (p - 1)$ um eine Einheit nach rechts verschoben wird, wegen des Minus vor der Klammer an der horizontalen Achse gespiegelt und durch die Addition von 1 um eine Einheit nach oben geschoben wird.
Damit liegt der Scheitelpunkt bei $(1|1)$ und z_B ist im Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend.

oder:

$z_B'(p) = 2 \cdot (1 - p) > 0$ für alle $p \in (0; 1)$

oder:

$z_B = 1 - (1 - p)^2$
$(1 - p)$ ist für $p \in (0; 1)$ positiv und streng monoton fallend, daher auch $(1 - p)^2$.
Damit ist $1 - (1 - p)^2$ für $p \in (0; 1)$ streng monoton steigend.

c) $\frac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)} \approx 0{,}254$

mögliche Interpretation:
Bei Erhöhung der Zuverlässigkeit der Bauteile von 0,8 auf 0,9 sinkt die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems auf etwa ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

mögliche Begründungen:

$z_D(p) = 2 \cdot p^2 \cdot (1 - p^2) + p^4$
$z_D(p) = 2 \cdot p^2 - p^4$

Der Graph der Funktion z_C verläuft für alle $p \in (0; 1)$ oberhalb des Graphen der Funktion z_D.

oder:

Bei allen Kombinationen, bei denen System *D* funktioniert, funktioniert auch System *C*. Außerdem funktioniert System *C* auch dann, wenn nur T_1 und T_4 bzw. nur T_2 und T_3 funktionieren.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen richtigen Term für z_A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,93; 0,94] bzw. [93 %; 94 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für einen richtigen Nachweis. Andere richtige Nachweise (z. B. grafische Nachweise) sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für den richtigen Wert des Quotienten und eine richtige Interpretation.
Toleranzintervall: [0,25; 0,26] bzw. [25 %; 26 %]
– Ein Punkt für eine richtige Begründung.

Wings for Life World Run*

Aufgabennummer: 2_048	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 5.3, AN 1.1, AN 4.3, WS 1.1	

Der *Wings for Life World Run* ist ein in vielen Ländern zur gleichen Zeit stattfindender Volkslauf. Eine Besonderheit dieses Laufs ist, dass keine vorgegebene Distanz zurückgelegt werden muss.

Es starten alle Läufer/innen weltweit gleichzeitig um 11:00 UTC (koordinierte Weltzeit). Vom jeweiligen Startpunkt startet 30 Minuten später ein Auto, das sogenannte *Catcher-Car*, und fährt die Strecke ab. Dabei erhöht sich die Geschwindigkeit des Autos nach einem vorgegebenen Zeitplan. Für jede teilnehmende Person endet der Lauf, wenn sie vom Catcher-Car überholt wird. Das Ergebnis für eine teilnehmende Person ist die Länge derjenigen Strecke, die diese Person bis zum Zeitpunkt des Überholens durch das Catcher-Car zurückgelegt hat.

Für die Geschwindigkeiten des Catcher-Cars wurden bis zum Jahr 2018 folgende Werte vorgegeben (diese dienen modellhaft als Grundlage für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenstellungen):

Uhrzeit	Geschwindigkeit
von 11:30 bis 12:30	15 km/h
von 12:30 bis 13:30	16 km/h
von 13:30 bis 14:30	17 km/h
von 14:30 bis 15:30	20 km/h
von 15:30 bis 16:30	20 km/h
ab 16:30	35 km/h

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Eine Person läuft mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie vom Catcher-Car überholt wird. Diese Person wird während der 15-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.
Die Laufzeit t der Person hängt von der Geschwindigkeit v der Person ab.

Geben Sie einen Term an, mit dem t bei Kenntnis von v berechnet werden kann (mit t in h und v in km/h)!

t = ____

Im Jahr 2016 betrug die (konstante) Geschwindigkeit einer Person bei diesem Lauf 9 km/h. Ein Jahr später war ihre (konstante) Geschwindigkeit bei diesem Lauf um 10 % höher.

Geben Sie an, um wie viel Prozent sich dadurch die Streckenlänge erhöhte, die diese Person zurücklegte, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde!

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. ______________ %.

b) Eine bestimmte gut trainierte Person läuft während der ersten Stunde mit einer konstanten Geschwindigkeit und benötigt dabei pro Kilometer 5 Minuten. Anschließend wird sie langsamer. Ab diesem Zeitpunkt (also für $t \geq 1$) kann ihre Geschwindigkeit mithilfe der Funktion v in Abhängigkeit von der gelaufenen Zeit modelliert werden. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ gilt:

$v(t) = 12 \cdot 0{,}7^{t-1}$ mit t in h und $v(t)$ in km/h

Deuten Sie den Ausdruck $12 + \int_1^b v(t)\,\mathrm{d}t$ mit $b \geq 1$ im gegebenen Kontext!

Diese Person wird während der 16-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der das Catcher-Car diese Person überholt!

Uhrzeit: __ __ : __ __ UTC

c) Ein Läufer wird während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Juri schließt aus dieser Information, dass dieser Läufer nicht weniger als 40 km und nicht mehr als 88 km zurückgelegt hat, bis er vom Catcher-Car überholt wurde. Leo meint zu dieser Behauptung: „Deine Aussage ist wahr, aber ich könnte ein kleineres Intervall nennen, das ebenso zutrifft.“

Geben Sie an, ob die Behauptung von Leo stimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

In Wien legte 2017 die schnellste Teilnehmerin eine Strecke von 51,72 km zurück, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde.

Berechnen Sie ihre durchschnittliche Geschwindigkeit $\overline{v}$!

$\overline{v}$ = ____ km/h

Lösungserwartung

a) möglicher Term:

$v \cdot t = 15 \cdot (t - 0{,}5) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7{,}5}{15 - v}$

mögliche Vorgehensweise:

$s = v \cdot t$

$s = v \cdot \frac{7{,}5}{15 - v}$

$v = 9$ km/h: $s = 11{,}25$ km

$v = 9{,}9$ km/h: $s \approx 14{,}559$ km

$\frac{14{,}559}{11{,}25} \approx 1{,}294$

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. 29,4 %.

b) mögliche Deutung:

Der Ausdruck beschreibt die Streckenlänge, die die Person bis zum Zeitpunkt $t = b$ zurücklegt.

mögliche Vorgehensweise:

$12 + \int_1^b v(t)\,\mathrm{d}t = 15 + 16 \cdot (b - 1{,}5) \quad \Rightarrow \quad b \approx 1{,}878$

Die Laufzeit der Person bis zum Zeitpunkt des Überholens beträgt ca. 1 h 53 min.
Uhrzeit: 12:53 UTC

c) Die Behauptung von Leo stimmt.

mögliche Begründung:

Das Catcher-Car legt bis zum Beginn der 20-km/h-Phase 48 km zurück, daher muss der Läufer zumindest 48 km zurückgelegt haben. Das Catcher-Car legt innerhalb der 20-km/h-Phase weitere 40 km zurück, bevor es die 35-km/h-Phase startet. Daher legt der Läufer höchstens 88 km zurück, wenn er in dieser Phase überholt wird. Somit ist es Leo möglich, ein kleineres Intervall anzugeben. (Das kleinstmögliche Intervall beträgt [48 km; 88 km].)

Die Teilnehmerin wurde während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

$t = 3{,}5 + \frac{3{,}72}{20} = 3{,}686$ h

$\bar{v} = \frac{51{,}72}{3{,}686} \approx 14{,}03$ km/h

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [29 %; 30 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für eine richtige Deutung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch 12:52 UTC als richtig zu werten ist.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Behauptung von Leo stimmt, und eine richtige Begründung. Die Begründung ist ausreichend, wenn aus ihr klar hervorgeht, dass die Breite des Intervalls durch Vergrößerung der linken Intervallgrenze verringert werden kann, die Angabe eines konkreten Intervalls ist dafür nicht erforderlich.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [13,5; 14,5]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Kondensator*

Aufgabennummer: 2_042	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.1, FA 1.5, AN 4.3	

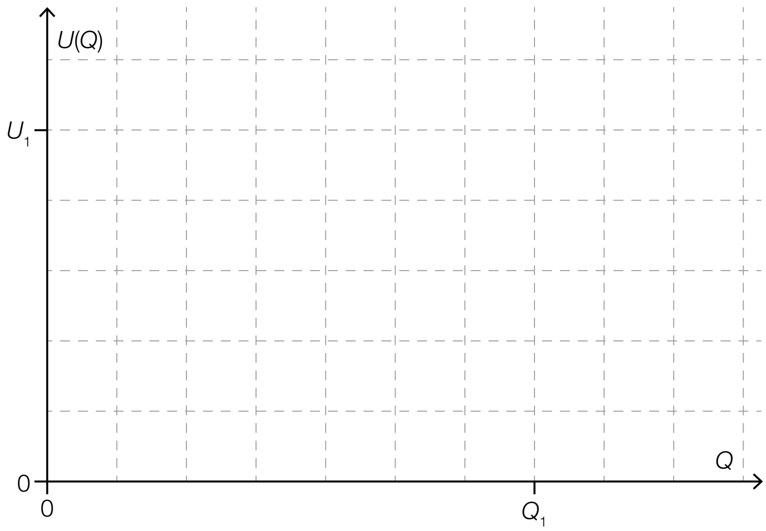
Ein Kondensator ist ein elektrisches Bauelement, mit dem elektrische Ladung und die daraus resultierende elektrische Energie gespeichert werden kann.
Eine einfache Form des Kondensators ist der sogenannte *Plattenkondensator*. Er besteht aus zwei einander gegenüberliegenden elektrisch leitfähigen Flächen, die als *Kondensatorplatten* bezeichnet werden.

Das Verhältnis zwischen der gespeicherten Ladung Q und der an die Kondensatorplatten angelegten (Gleich-)Spannung U wird als Kapazität C bezeichnet.

Es gilt $C = \frac{Q}{U}$, wobei C in der Einheit Farad angegeben wird.

Aufgabenstellung:

a) Ein Kondensator mit einer bestimmten Kapazität C wird bis zur Ladungsmenge Q_1 aufgeladen, die gemessene Spannung $U(Q_1)$ hat dann den Wert U_1.
Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung die Spannung U beim Ladevorgang am Kondensator in Abhängigkeit von der Ladung Q!



Die in diesem Kondensator gespeicherte Energie W kann mithilfe der Formel $W = \int_0^{Q_1} U(Q)\,dQ$ berechnet werden.
Geben Sie eine Formel für die gespeicherte Energie W in Abhängigkeit von U_1 und C an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

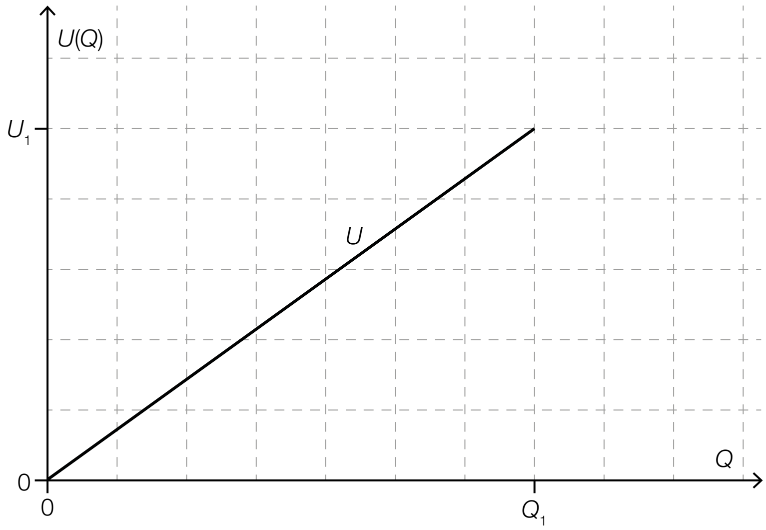
b) Bei einem Ladevorgang kann die Spannung zwischen den Kondensatorplatten als Funktion U in Abhängigkeit von der Zeit t durch $U(t) = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ beschrieben werden. Dabei ist $U^* > 0$ die an den Kondensator angelegte Spannung und $\tau > 0$ eine für den Ladevorgang charakteristische Konstante. Der Ladevorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Zeit, nach der die Spannung $U(t)$ zwischen den Kondensatorplatten 99 % der angelegten Spannung U^* beträgt, wird als *Ladezeit* bezeichnet.
Bestimmen Sie die Ladezeit eines Kondensators in Abhängigkeit von τ!

Geben Sie eine Formel für die momentane Änderungsrate der Spannung zwischen den Kondensatorplatten in Abhängigkeit von t an und zeigen Sie mithilfe dieser Formel, dass die Spannung während des Ladevorgangs ständig steigt!

Lösungserwartung

a)



$$W = \int_0^{Q_1} U(Q)\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{2} \cdot U_1 \cdot Q_1 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_1^2$$

b) Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}99 \cdot U^* = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$0{,}01 = e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ladezeit: $t = -\tau \cdot \ln(0{,}01)$ bzw. $t = \tau \cdot \ln(100)$

Mögliche Vorgehensweise:

$$U'(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot U^*}{\tau}$$

Es gilt: $U^* > 0,\ \tau > 0,\ e^{-\frac{t}{\tau}} > 0 \quad \Rightarrow \quad U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.
Da $U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, ist U während des Ladevorgangs streng monoton steigend.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine richtige Skizze.
– Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen der Lösung sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine richtige Formel und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

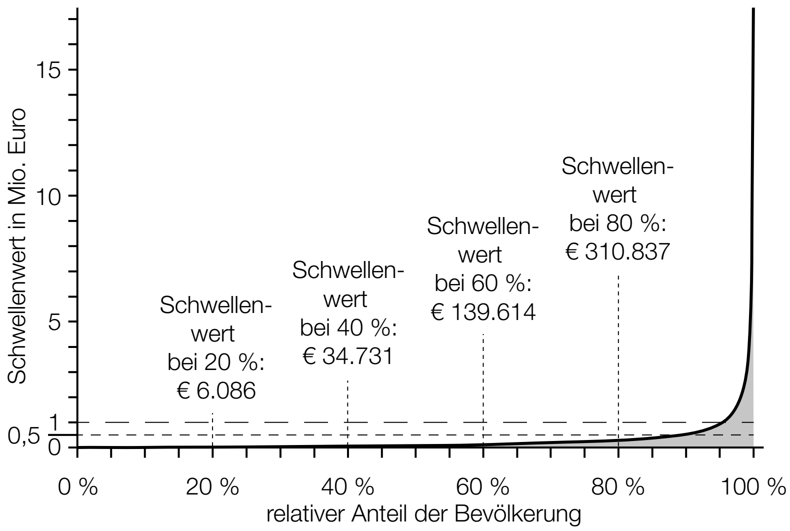
Vermögensverteilung*

Aufgabennummer: 2_043	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 4.3, WS 1.1	

Das gesamte Vermögen eines Landes ist häufig sehr ungleich auf die Bevölkerung verteilt. Eine im Jahr 2012 durchgeführte Erhebung der Europäischen Zentralbank (EZB) lieferte Daten für eine Abschätzung, welcher Anteil der österreichischen Bevölkerung über welches Vermögen (in Millionen Euro) verfügt. Die Ergebnisse der darauf basierenden Studie sind in Abbildung 1 dargestellt. Beispielsweise bedeutet der Schwellenwert bei 20 %, dass die vermögensschwächsten 20 % der österreichischen Bevölkerung ein Vermögen von maximal € 6.086 besitzen.
Im Jahr 2012 betrug die Bevölkerungszahl von Österreich ca. 8,45 Millionen Einwohner/innen.

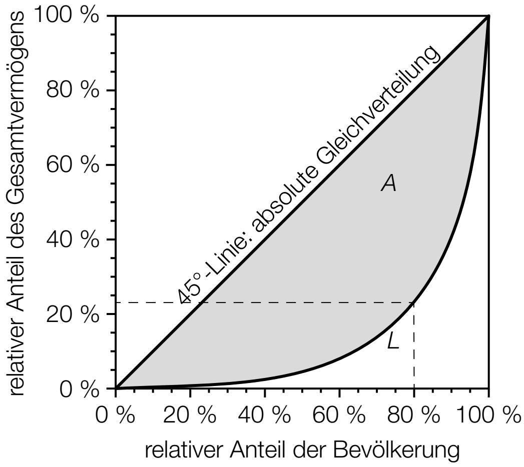
Die sogenannte *Lorenz-Kurve L* (vgl. Abbildung 2) veranschaulicht, welcher relative Anteil der Bevölkerung welchen relativen Anteil des Gesamtvermögens besitzt. So besitzen laut der EZB-Studie die vermögensschwächsten 80 % der österreichischen Bevölkerung nur ca. 23 % des gesamten Vermögens.

Abbildung 1:



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Abbildung 2:



Quelle: Eckerstorfer, Paul, Johannes Halak et al.: *Vermögen in Österreich. Bericht zum Forschungsprojekt „Reichtum im Wandel“.* Linz: Johannes-Kepler-Universität Linz 2013, S. 12–13. http://media.arbeiterkammer.at/PDF/Vermoegen_in_Oesterreich.pdf [17.10.2014] (adaptiert).

Der Gini-Koeffizient ist ein Maß für die Ungleichverteilung des Vermögens in einem Land. Er entspricht dem Quotienten aus dem Inhalt der markierten Fläche A (zwischen der 45°-Linie und der Lorenz-Kurve L) und dem Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, das durch die Eckpunkte (0 %|0 %), (100 %|0 %) und (100 %|100 %) festgelegt ist.
Laut EZB-Studie hatte der Gini-Koeffizient für Österreich für das Jahr 2012 den Wert 0,76.

Aufgabenstellung:

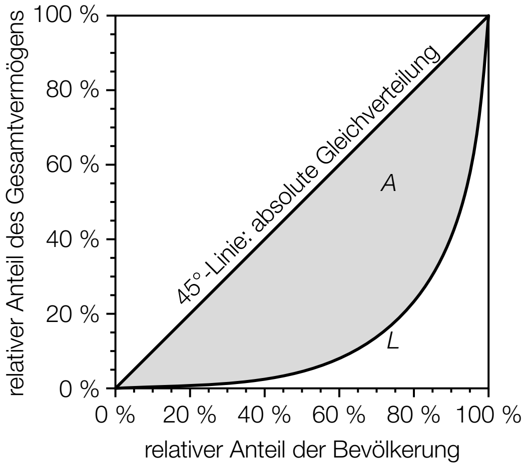
a) Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1, wie viele Personen in Österreich im Jahr 2012 ein Vermögen von mindestens einer Million Euro besaßen!

Berechnen Sie unter der vereinfachenden Annahme, dass die Schwellenwerte im Intervall [20 %; 40 %] annähernd linear zunehmen, einen Näherungswert des Schwellenwerts bei 25 %!

b) Ermitteln Sie, welchen relativen Anteil am Gesamtvermögen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen!

Laut einer Studie der Universität Linz aus dem Jahr 2013 besitzen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung einen deutlich größeren relativen Anteil am Gesamtvermögen, als es in der EZB-Studie behauptet wurde.

Unter Berücksichtigung der Studie der Universität Linz erhält man eine andere Lorenz-Kurve L^* als die abgebildete Lorenz-Kurve L. Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung einen möglichen Verlauf einer solchen Lorenz-Kurve L^*!



c) Die Lorenz-Kurve wird im Intervall [0; 1] durch eine reelle Funktion in Abhängigkeit von x modelliert, wobei x den relativen Anteil der Bevölkerung angibt.

Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten für ein Land S, dessen Lorenz-Kurve für das Jahr 2012 durch die Funktion L_1 mit $L_1(x) = 0{,}9 \cdot x^5 + 0{,}08 \cdot x^2 + 0{,}02 \cdot x$ im Intervall [0; 1] beschrieben werden kann!

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Gini-Koeffizienten für Österreich für das Jahr 2012 und geben Sie an, ob das Gesamtvermögen in diesem Jahr in Österreich oder im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war!

Lösungserwartung

a) Im Jahr 2012 hatten in Österreich ca. 422 500 Personen (laut Abbildung 1: ca. 5 % der Bevölkerung) ein Vermögen von mindestens einer Million Euro.

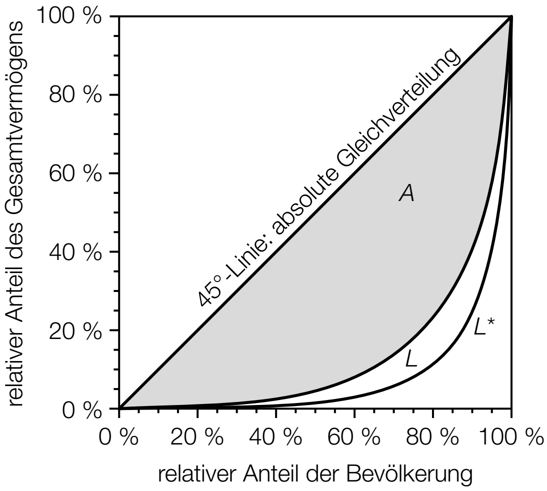
Mögliche Vorgehensweise:

$6\,086 + \frac{34\,731 - 6\,086}{4} = 13\,247{,}25$

Der Näherungswert für den Schwellenwert bei 25 % liegt bei ca. € 13.247.

b) Die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen ca. 60 % des Vermögens.

Möglicher Verlauf von L^*:



c) Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}5 - \int_0^1 L_1(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}31\dot{3}$

$\frac{0{,}31\dot{3}}{0{,}5} \approx 0{,}63$

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 hatte für das Land *S* etwa den Wert 0,63.

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 war für das Land *S* niedriger als jener für Österreich. Das bedeutet, dass in diesem Jahr das Gesamtvermögen im Land *S* gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war als in Österreich.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch die Angabe des richtigen relativen Anteils als richtig zu werten ist.
Toleranzintervalle: [338 000; 507 000] bzw. [4 %; 6 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [€ 13.200; € 13.325]

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [58 %; 62 %]
– Ein Punkt für einen richtig eingezeichneten Verlauf einer möglichen Lorenz-Kurve L^*, wobei der Funktionswert an der Stelle 90 % kleiner als 42 % sein muss und die Funktion monoton steigend sein muss.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,62; 0,63]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für einen korrekten Vergleich und eine (sinngemäß) richtige Deutung.

Lachsbestand*

Aufgabennummer: 2_039	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.4, FA 1.6, AN 3.3, WS 1.1	

Der kanadische Wissenschaftler W. E. Ricker untersuchte die Nachkommenanzahl von Fischen in Flüssen Nordamerikas in Abhängigkeit von der Anzahl der Fische der Elterngeneration. Er veröffentlichte 1954 das nach ihm benannte Ricker-Modell.
Der zu erwartende Bestand $R(n)$ einer Nachfolgegeneration kann näherungsweise anhand der sogenannten Reproduktionsfunktion R mit $R(n) = a \cdot n \cdot e^{-b \cdot n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ aus dem Bestand n der jeweiligen Elterngeneration ermittelt werden.
Lachse kehren spätestens vier Jahre nach dem Schlüpfen aus dem Meer an ihren „Geburtsort" zurück, um dort zu laichen, d.h., die Fischeier abzulegen. Nach dem Laichen stirbt der Großteil der Lachse.
Ricker untersuchte unter anderem die Rotlachspopulation im Skeena River in Kanada. Die nachstehende Tabelle gibt die dortigen Lachsbestände in den Jahren von 1908 bis 1923 an, wobei die angeführten Bestände Mittelwerte der beobachteten Bestände jeweils vier aufeinanderfolgender Jahre sind.

Zeitraum	beobachteter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1908–31.12.1911	1098
01.01.1912–31.12.1915	740
01.01.1916–31.12.1919	714
01.01.1920–31.12.1923	615

Datenquelle: http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/s00/math121/lectures/product_rule/product.html [01.02.2018] (adaptiert).

Anhand dieser Daten für den Lachsbestand im Skeena River wurden für die Reproduktionsfunktion R die Parameterwerte $a = 1{,}535$ und $b = 0{,}000783$ ermittelt ($R(n)$ und n in tausend Lachsen).

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie für die Lachspopulation im Skeena River für $n > 0$ mithilfe der Reproduktionsfunktion die Lösung n_0 der Gleichung $R(n) = n$ in tausend Lachsen!

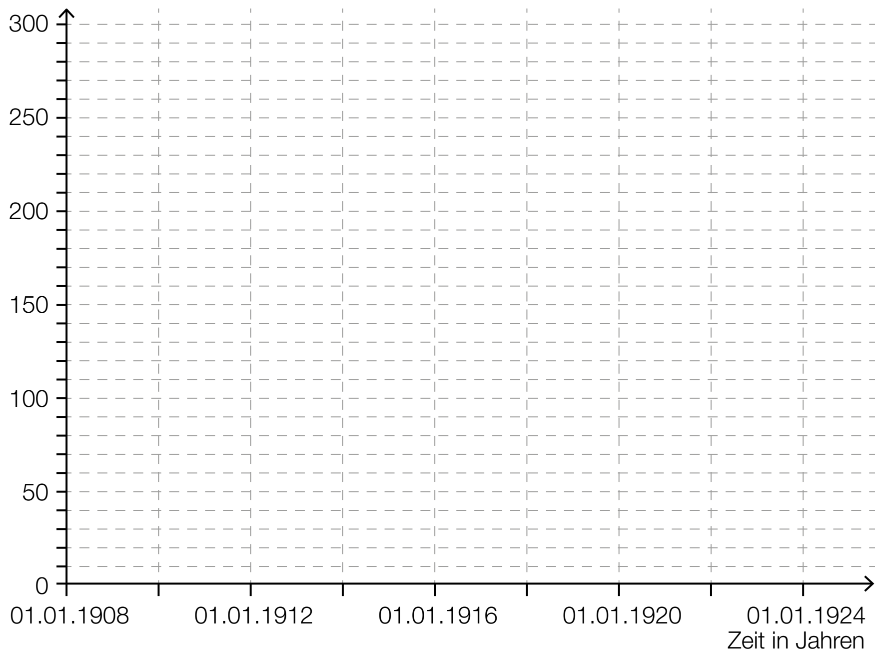
Interpretieren Sie n_0 im gegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extrempunkts $E = (n_E | R(n_E))$ der Reproduktionsfunktion R in Abhängigkeit von a und b und zeigen Sie, dass n_E für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ eine Stelle eines lokalen Maximums ist!

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a der Bestand $R(n_E)$ der Nachfolgegeneration stets größer als der vorherige Bestand n_E ist!

c) Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle der beobachteten Lachsbestände (in tausend Lachsen) durch ein Histogramm dar, wobei die absoluten Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken abgebildet werden sollen!



Das von Ricker entwickelte Modell zählt zu den Standardmodellen zur Beschreibung von Populationsentwicklungen. Dennoch können die mithilfe der Reproduktionsfunktion berechneten Werte mehr oder weniger stark von den beobachteten Werten abweichen.

Nehmen Sie den beobachteten durchschnittlichen Lachsbestand von 1 098 (im Zeitraum von 1908 bis 1911) als Ausgangswert, berechnen Sie damit für die jeweils vierjährigen Zeiträume von 1912 bis 1923 die laut Reproduktionsfunktion zu erwartenden durchschnittlichen Lachsbestände im Skeena River und tragen Sie die Werte in die nachstehende Tabelle ein!

Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	
01.01.1916–31.12.1919	
01.01.1920–31.12.1923	

Lösungserwartung

a) $n_0 \approx 547$

Mögliche Interpretation:

Im gegebenen Kontext gibt n_0 denjenigen Lachsbestand an, bei dem die Anzahl der Lachse der Nachfolgegeneration unverändert bleibt.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$R'(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad n_E = \frac{1}{b}$

$R\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b \cdot e}$

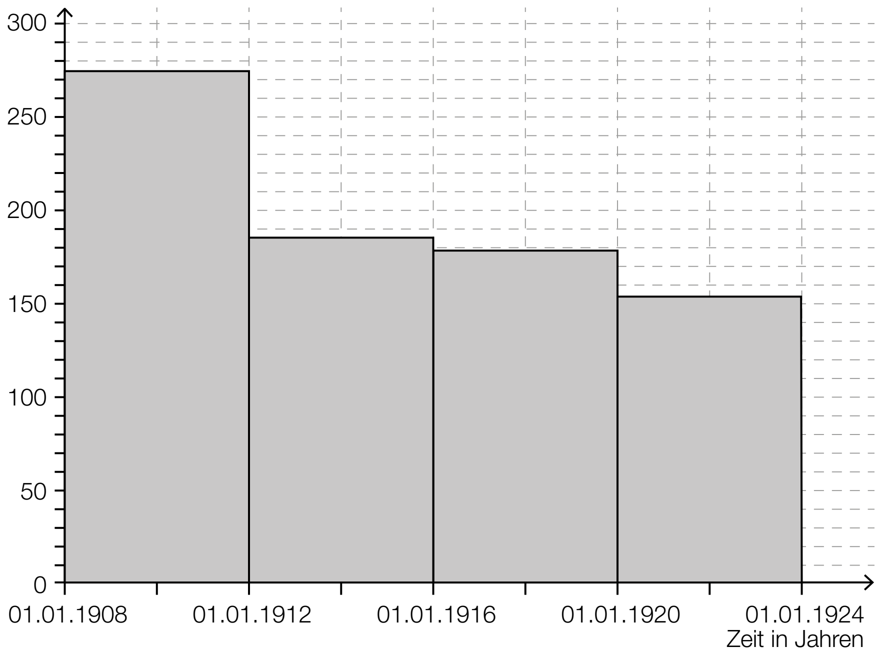
$\Rightarrow \quad E = \left(\frac{1}{b} \middle| \frac{a}{b \cdot e}\right)$

Möglicher Nachweis:

$R''\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{a \cdot b}{e} < 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad$ Maximumstelle

$\frac{a}{b \cdot e} > \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a > e$

c)



Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	713
01.01.1916–31.12.1919	626
01.01.1920–31.12.1923	589

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für den Lachsbestand: [547; 548]
– Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von *E* und einen korrekten Nachweis.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) – Ein Punkt für ein korrektes Histogramm.
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte in der Tabelle.

Stratosphärensprung

Aufgabennummer: 2_028	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 2.2	

Am 14.10.2012 sprang der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner aus einer Höhe von 38 969 m über dem Meeresspiegel aus einer Raumkapsel. Er erreichte nach 50 s in der nahezu luftleeren Stratosphäre eine Höchstgeschwindigkeit von 1 357,6 km/h (≈ 377,1 m/s) und überschritt dabei als erster Mensch im freien Fall die Schallgeschwindigkeit, die bei 20 °C ca. 1 236 km/h (≈ 343,3 m/s) beträgt, in der Stratosphäre wegen der niedrigen Lufttemperaturen aber deutlich geringer ist.

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft hängt bei Windstille nur von der Lufttemperatur T ab. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) werden nachstehend zwei Formeln angegeben, die – bis auf einen (gerundeten) Faktor – äquivalent sind. Die Lufttemperatur T wird in beiden Formeln in °C angegeben.

$$v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)}$$

$$v_2 = 331{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}}$$

Aufgabenstellung:

a) Die Fallbeschleunigung a eines Körpers im Schwerefeld der Erde ist abhängig vom Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt. Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche auf Meeresniveau, d. h. bei einer Entfernung von $r = 6\,371\,000$ m vom Erdmittelpunkt, beträgt bei vernachlässigbarem Luftwiderstand ca. 9,81 m/s².
Für die Fallbeschleunigung a gilt: $a(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und r der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt ist. Es gilt:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}\ \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2};\ M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$$

Berechnen Sie den Wert der Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner beim Absprung aus der Raumkapsel wirkte!

$a =$ _______ m/s²

Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung, die auf Felix Baumgartner bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit wirkte!

b) Als Felix Baumgartner seine Höchstgeschwindigkeit erreichte, bewegte er sich um 25 % schneller als der Schall in dieser Höhe.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der unter Verwendung einer der beiden in der Einleitung genannten Formeln die Lufttemperatur, die zu diesem Zeitpunkt geherrscht hat, berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Lufttemperatur!

Untersuchen Sie mithilfe der beiden Formeln den Quotienten der Schallgeschwindigkeiten im Lufttemperaturintervall [–60 °C; 20 °C] in Schritten von 10 °C und geben Sie eine Formel an, die in diesem Lufttemperaturintervall den Zusammenhang zwischen v_1 und v_2 beschreibt!

c) Zeigen Sie mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die beiden Formeln für die Schallgeschwindigkeit in der Einleitung bis auf einen (gerundeten) Faktor äquivalent sind! Gehen Sie dabei von der Formel für v_1 aus!

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit v_1 von der Lufttemperatur T kann im Lufttemperaturintervall [–20 °C; 40 °C] in guter Näherung durch eine lineare Funktion f mit $f(T) = k \cdot T + d$ modelliert werden.
Ermitteln Sie die Werte der Parameter k und d und interpretieren Sie diese Werte im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $r_1 = 6\,371\,000 + 38\,969 = 6\,409\,969$ m

$a(r_1) = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6\,409\,969^2} = 9{,}69$ m/s²

mittlere Beschleunigung: $a = \frac{377{,}1}{50} = 7{,}54$ m/s²

b) $\frac{377{,}1}{1{,}25} \approx 301{,}7$ m/s

$v_1(T) = 301{,}7 \;\Rightarrow\; T \approx -46{,}7$ °C

bzw. $v_2(T) = 301{,}7 \;\Rightarrow\; T \approx -46{,}9$ °C

T in °C	v_1 in m/s	v_2 in m/s	$\frac{v_2}{v_1}$
–60	292,67	292,84	1,00055
–50	299,46	299,63	1,00055
–40	306,10	306,27	1,00055
–30	312,59	312,77	1,00055
–20	318,96	319,13	1,00055
–10	325,20	325,38	1,00055
0	331,32	331,50	1,00055
10	337,33	337,51	1,00055
20	343,23	343,42	1,00055

$v_2 \approx 1{,}00055 \cdot v_1$ bzw. $v_1 \approx 0{,}99945 \cdot v_2$

c) $v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)} = \sqrt{401{,}87 \cdot 273{,}15 \cdot \left(\frac{T}{273{,}15} + 1\right)} \approx$

$\approx \sqrt{109\,770{,}8 \cdot \left(\frac{T}{273{,}15} + 1\right)} \approx 331{,}3 \cdot \sqrt{\frac{T}{273{,}15} + 1}$

Der Faktor 331,3 unterscheidet sich nur geringfügig vom Faktor 331,5 in der Formel für v_2.

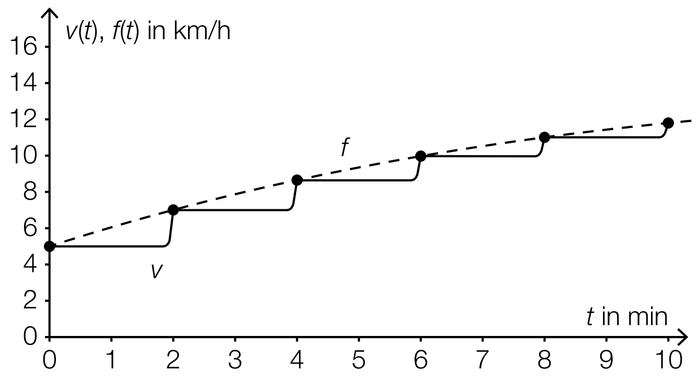
$k = \frac{v_1(40) - v_1(-20)}{60} \approx 0{,}6$ ... pro 1 °C nimmt die Schallgeschwindigkeit um ca. 0,6 m/s zu

$d = v_1(0) \approx 331{,}3$ ... Schallgeschwindigkeit bei 0 °C

Laufband

Aufgabennummer: 2_029	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3	

Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können.
Bei einem individuell erstellten, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbandgeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbandgeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit
$f(t) = 0{,}0008 \cdot t^3 - 0{,}05 \cdot t^2 + 1{,}1 \cdot t + 5$.
Die Laufbandgeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnungen wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.
Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbandgeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

Begründen Sie, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht! Berechnen Sie unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

b) Geben Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

v_{min} = ____ km/h

v_{max} = ____ km/h

Begründen Sie, warum zu den Zeitpunkten t_{min} und t_{max}, zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minütigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{min}) \neq 0$ und $f'(t_{max}) \neq 0$ gilt!

c) Geben Sie den Wert von $v'(1)$ an und interpretieren Sie diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$v'(1)$ = ____

Beschreiben Sie anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall [0; 30] verlaufen müsste!

d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.
Berechnen Sie diesen Näherungswert und erläutern Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Geben Sie die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).
Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h .

	t = 15 min	t = 30 min	t = 45 min	t = 60 min
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeigen Sie anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k!

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo“ in min/km umschrieben. Berechnen Sie für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + \ldots + f(28)) \approx 11{,}57$

Das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h.

Das arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), \ldots, v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: 0,5 h · 11,57 km/h = 5,785 km

b) $v_{min} = 5$ km/h
$v_{max} = 14{,}16$ km/h

t_{min} und t_{max} sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f, weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

c) $v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt 0 m/s^2.

oder:

Das Laufband (die Läuferin / der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt $t = 1$ min gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen ($t = 2$, $t = 4$, $t = 6$, ...) sehr hohe Werte annehmen.

d) $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 1{,}506$

zurückgelegte Weglänge: ca. 1,51 km

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind (1 h = 60 min).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:
$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1{,}388$ km

⇒ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. 118 m vom exakten Wert ab.

e) $194 = k \cdot 80 \cdot 2{,}5$
$k = 0{,}97$

Bei der doppelten/dreifachen/vierfachen Laufzeit wird die doppelte/dreifache/vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt/dreimal/viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Aufnahme einer Substanz ins Blut

Aufgabennummer: 2_026	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 2.1, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5, FA 1.7	

Wenn bei einer medizinischen Behandlung eine Substanz verabreicht wird, kann die Konzentration der Substanz im Blut (kurz: Blutkonzentration) in Abhängigkeit von der Zeit t in manchen Fällen durch eine sogenannte Bateman-Funktion $c(t) = d \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$ mit den personenbezogenen Parametern $a, b, d > 0, a < b$ modelliert werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen, $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Verabreichung der Substanz.

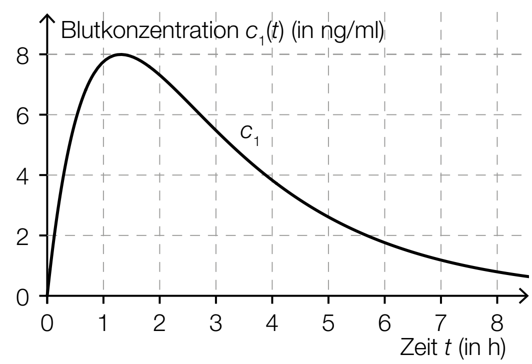
Die Bioverfügbarkeit f gibt den Anteil der verabreichten Substanz an, der unverändert in den Blutkreislauf gelangt. Bei einer intravenösen Verabreichung (d. h. einer direkten Verabreichung in eine Vene) beträgt der Wert der Bioverfügbarkeit 1.

Das Verteilungsvolumen V beschreibt, in welchem Ausmaß sich die Substanz aus dem Blut in das Gewebe verteilt.

Der Parameter d ist direkt proportional zur verabreichten Dosis D und zur Bioverfügbarkeit f, außerdem ist d indirekt proportional zum Verteilungsvolumen V.

Die nachstehende Abbildung zeigt exemplarisch den zeitlichen Verlauf der Blutkonzentration in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) für den Fall der Einnahme einer bestimmten Dosis der Substanz Lysergsäurediethylamid und kann mit der Bateman-Funktion c_1 mit den Parametern $d = 19{,}5$, $a = 0{,}4$ und $b = 1{,}3$ beschrieben werden.

Der Graph der Bateman-Funktion weist für große Zeiten t einen asymptotischen Verlauf gegen die Zeitachse auf.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration für die in der Einleitung beschriebene Bateman-Funktion c_1 berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Begründen Sie allgemein, warum der Wert des Parameters d in der Bateman-Funktion c nur die Größe der maximalen Blutkonzentration beeinflusst, aber nicht den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird!

b) Die Werte der Parameter a, b und d der Bateman-Funktion variieren von Patient zu Patient. Es wird im Folgenden angenommen, dass der Wert des Parameters d für drei untersuchte Patienten P_1, P_2, P_3 identisch ist.

Für den Patienten P_1 gelten die Parameter aus der Einleitung. Bei Patient P_2 ist der Wert des Parameters a etwas größer als bei Patient P_1.
Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Bateman-Funktion verändert, wenn der Wert des Parameters a erhöht wird, der Parameter b unverändert bleibt und $a < b$ gilt! Interpretieren Sie diese Veränderung im gegebenen Kontext!

Patient P_3 erreicht (bei gleicher verabreichter Dosis) die maximale Blutkonzentration zeitgleich mit Patient P_1, die maximale Blutkonzentration von Patient P_3 ist aber größer. Ermitteln Sie, wie sich die Werte von a und b bei der Bateman-Funktion für Patient P_3 von jenen von Patient P_1 unterscheiden!

c) Kreuzen Sie diejenige Formel an, die den Zusammenhang zwischen dem Parameter d der Bateman-Funktion und den in der Einleitung beschriebenen Größen V, D und f korrekt beschreibt! Der Parameter λ ist dabei ein allgemeiner Proportionalitätsfaktor.

$d = \lambda \cdot \frac{D}{V \cdot f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot V}{f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{V \cdot f}{D}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{V}{D \cdot f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{f}{V \cdot D}$	☐

Bei einem konstanten Wert des Parameters d und der Bioverfügbarkeit f kann man die verabreichte Dosis $D(V)$ als Funktion D in Abhängigkeit vom Verteilungsvolumen V auffassen. Beziehen Sie sich auf die von Ihnen angekreuzte Formel und geben Sie für die Parameterwerte der in der Einleitung dargestellten Bateman-Funktion und für den Fall einer intravenösen Verabreichung die Funktionsgleichung $D(V)$ an! Geben Sie weiters an, um welchen Funktionstyp es sich bei D handelt!

Möglicher Lösungsweg

a) $c_1(t) = 19{,}5 \cdot (e^{-0{,}4 \cdot t} - e^{-1{,}3 \cdot t})$
$c_1'(t) = 19{,}5 \cdot (-0{,}4 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}) = 0$

$t \approx 1{,}31$ Stunden

$c_1''(1{,}31) \approx -4{,}15 < 0$

Mögliche Begründungen:

Für die Berechnung des Zeitpunkts der (lokalen) maximalen Blutkonzentration muss die Gleichung $c'(t) = 0$ nach t gelöst werden. Der Parameter d fällt bei dieser Berechnung weg und beeinflusst somit nur die Höhe der maximalen Blutkonzentration zum ermittelten Zeitpunkt.

oder:

$c'(t) = d \cdot (-a \cdot e^{-a \cdot t} + b \cdot e^{-b \cdot t}) = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{a - b} \;\Rightarrow$ Der Parameter d tritt in dieser Formel nicht auf. Der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration t ist somit von d unabhängig.

b) Bei einer Erhöhung des Wertes von a verschiebt sich das lokale Maximum der Funktion bei einem niedrigeren Funktionswert „nach links“. Das bedeutet, dass die maximale Blutkonzentration früher erreicht wird und geringer ist.

Bei Patient P_3 ist (bei der Bateman-Funktion) der Wert von a kleiner und der Wert von b größer als bei (der Bateman-Funktion von) Patient P_1.

c)

$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	$\boxtimes$

Die Funktionsgleichung lautet $D(V) = \frac{19{,}5}{\lambda} \cdot V$.
Es handelt sich um eine lineare Funktion.

Bundesinstitut bifie Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens

Saturn-V-Rakete

Aufgabennummer: 2_025	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 2.1, FA 4.3, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie erforderlich

Eine Mehrstufenrakete besteht aus mehreren, oft übereinander montierten „Raketenstufen". Jede Raketenstufe ist eine separate Rakete mit Treibstoffvorrat und Raketentriebwerk. Leere Treibstofftanks und nicht mehr benötigte Triebwerke werden abgeworfen. Auf diese Weise werden höhere Geschwindigkeiten und somit höhere Umlaufbahnen als mit einstufigen Raketen erreicht.
Die Familie der Saturn-Raketen gehört zu den leistungsstärksten Trägersystemen der Raumfahrt, die jemals gebaut wurden. Sie wurden im Rahmen des Apollo-Programms für die US-amerikanische Raumfahrtbehörde NASA entwickelt. Die Saturn V ist die größte jemals gebaute Rakete. Mithilfe dieser dreistufigen Rakete konnten in den Jahren 1969 bis 1972 insgesamt 12 Personen auf den Mond gebracht werden. 1973 beförderte eine Saturn V die US-amerikanische Raumstation Skylab in eine Erdumlaufbahn in 435 km Höhe.
Eine Saturn V hatte die Startmasse $m_0 = 2{,}9 \cdot 10^6$ kg. Innerhalb von 160 s nach dem Start wurden die $2{,}24 \cdot 10^6$ kg Treibstoff der ersten Stufe gleichmäßig verbrannt. Diese ersten 160 s werden als Brenndauer der ersten Stufe bezeichnet. Die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) einer Saturn V kann t Sekunden nach dem Start während der Brenndauer der ersten Stufe näherungsweise durch die Funktion v mit

$$v(t) = 0{,}0000000283 \cdot t^5 - 0{,}00000734 \cdot t^4 + 0{,}000872 \cdot t^3 - 0{,}00275 \cdot t^2 + 2{,}27 \cdot t$$

beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Beschleunigung einer Saturn V beim Start und am Ende der Brenndauer der ersten Stufe!

Geben Sie an, ob die Beschleunigung der Rakete nach der halben Brenndauer der ersten Stufe kleiner oder größer als die mittlere Beschleunigung (= mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) während der ersten 160 Sekunden des Flugs ist! Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion!

b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den eine Saturn V 160 s nach dem Start zurückgelegt hat!

Begründen Sie, warum in dieser Aufgabenstellung der zurückgelegte Weg nicht mit der Formel „Weg = Geschwindigkeit mal Zeit" berechnet werden kann!

c) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt t_1, für den gilt: $v(t_1) = \frac{v(0) + v(160)}{2}$.
Interpretieren Sie t_1 und $v(t_1)$ im gegebenen Kontext!

d) Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Treibstoffmasse m_T (in Tonnen) der Saturn V von der Flugzeit t während der Brenndauer der ersten Stufe durch eine Funktionsgleichung!

Geben Sie die prozentuelle Abnahme der Gesamtmasse einer Saturn V für diesen Zeitraum an!

e) Nach dem Gravitationsgesetz wirkt auf eine im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindliche Masse m die Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde ist.

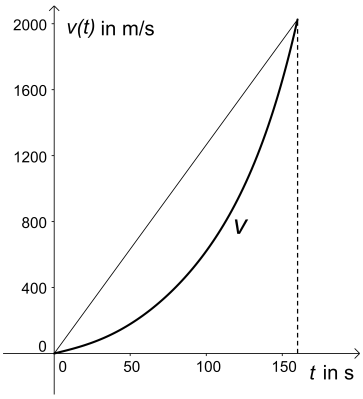
Deuten Sie das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ im Hinblick auf die Beförderung der Raumstation Skylab in die Erdumlaufbahn und beschreiben Sie, welche Werte dabei für die Grenzen r_1 und r_2 einzusetzen sind!

Begründen Sie anhand der Formel für die Gravitationskraft, um welchen Faktor sich das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ ändert, wenn ein Objekt mit einem Zehntel der Masse von Skylab in eine Umlaufbahn derselben Höhe gebracht wird!

Möglicher Lösungsweg

a) $a(0) = v'(0) = 2{,}27$ m/s²
$a(160) = v'(160) = 40{,}83$ m/s²

Bestimmt man die zur Sekante parallele Tangente, so liegt die Stelle des zugehörigen Berührpunktes rechts von $t = 80$. Aus der Linkskrümmung der Funktion v folgt daher, dass die Beschleunigung nach 80 Sekunden kleiner als die mittlere Beschleunigung im Intervall [0 s; 160 s] ist.



Weitere mögliche Begründung:
Die mittlere Beschleunigung (= Steigung der Sekante) in [0; 160] ist größer als die Momentanbeschleunigung (= Steigung der Tangente) bei $t = 80$.

b) $s(160) = \int_0^{160} v(t)\,\mathrm{d}t \approx 93\,371$

zurückgelegter Weg nach 160 s: 93 371 m

$s = v \cdot t$ gilt nur bei konstanter Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Saturn V ändert sich allerdings mit der Zeit.

c) $v(0) = 0$ m/s; $v(160) \approx 2\,022$ m/s
$v(t_1) = 1\,011 \;\Rightarrow\; t_1 \approx 125$ s

Die Geschwindigkeit ist nach 125 s halb so groß wie nach 160 s.

d) $m_T(t) = 2\,240 - 14 \cdot t$
$\frac{2{,}24}{2{,}9} \approx 0{,}77$
Die Gesamtmasse hat um 77 % abgenommen.

e) Das Ergebnis gibt die Arbeit an, die nötig ist, um die Raumstation Skylab in die entsprechende Erdumlaufbahn zu bringen.
r_1 ist der Erdradius, r_2 ist die Summe aus Erdradius und Höhe der Umlaufbahn.

Die Gravitationskraft und somit auch die Arbeit sind direkt proportional zur Masse des Objekts. Die erforderliche Arbeit ist daher nur ein Zehntel des Vergleichswertes.

Lösungsschlüssel

a) Ein Punkt für die richtige Berechnung der beiden Beschleunigungswerte.
Toleranzintervall für $a(0)$: [2,2 m/s²; 2,3 m/s²]
Toleranzintervall für $a(160)$: [40 m/s²; 42 m/s²]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

b) Ein Punkt für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges.
Toleranzintervall: [93 000 m; 94 000 m]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

c) Ein Punkt für die richtige Berechnung des Zeitpunkts t_1.
Toleranzintervall: [124 s; 126 s]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Deutung der beiden Werte laut Lösungserwartung.

d) Ein Punkt für die Angabe einer richtigen Funktionsgleichung.
Äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.
Ein Punkt für die Angabe des richtigen Prozentsatzes.
Toleranzintervall: [77 %; 78 %]

e) Ein Punkt für die richtige Deutung des bestimmten Integrals und die richtige Beschreibung der Werte der beiden Grenzen.
Ein Punkt für eine richtige Begründung, um welchen Faktor sich das Ergebnis ändert.
Die direkte Proportionalität zwischen Masse und Gravitationskraft muss dabei sinngemäß erwähnt werden.

Hohlspiegel

Aufgabennummer: 2_023	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: a) AG 2.1, FA 1.8 b) FA 1.7, FA 1.8 c) AG 2.1, FA 1.2	

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In der Physik spricht man von einem kugelförmigen Hohlspiegel, wenn er Teil einer innenverspiegelten Kugel ist. Charakteristische Punkte beim Hohlspiegel sind der Mittelpunkt M der Kugel, der Scheitelpunkt S und der Brennpunkt F des Spiegels.

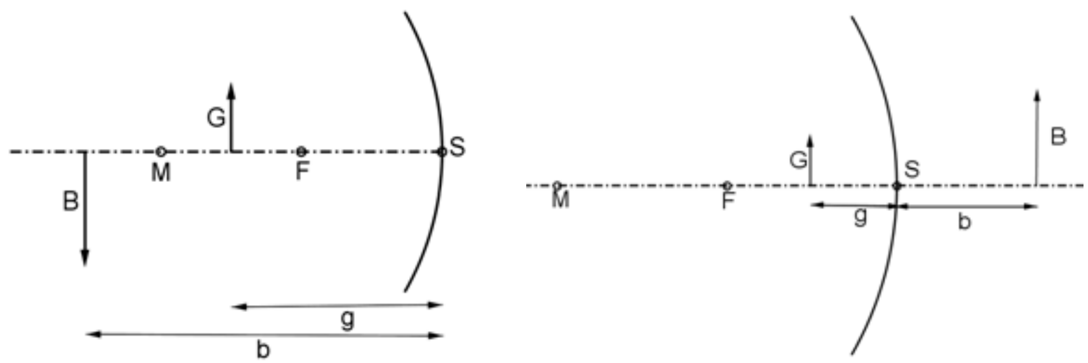
Es gelten folgende Relationen (siehe untenstehende Abbildungen):

Brennweite f des Spiegels: $f = \overline{FS} = \frac{\overline{MS}}{2}$ $(f > 0)$
Radius der Kugel: $\overline{MS} = 2 \cdot f$

Die Entfernung eines Gegenstands G (mit der Höhe G) vom Scheitelpunkt S wird mit g $(g > 0)$ bezeichnet, die Entfernung des nach Reflexion der Strahlen am Spiegel entstehenden Bildes B (mit der Höhe B) vom Scheitel S mit b.

Das Vorzeichen von b hat dabei die folgenden Bedeutungen:
- $b > 0$: Es entsteht ein reelles Bild „vor" dem Spiegel, das auf einem Schirm aufgefangen werden kann.
- $b < 0$: Es entsteht ein virtuelles Bild „hinter" dem Spiegel.

Skizzen des Querschnitts:
- linke Grafik: reelles Bild B eines Gegenstandes G $(b > 0)$
- rechte Grafik: virtuelles Bild B eines Gegenstandes G $(b < 0)$



Aufgrund physikalischer Überlegungen gelten unter bestimmten Bedingungen die Beziehungen $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$ und $\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f}$. Daraus ergibt sich der Zusammenhang $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Der Quotient $\frac{B}{G}$ bestimmt den Vergrößerungsfaktor; er ist bei einem reellen Bild positiv ($g > 0$ und $b > 0$) und bei einem virtuellen Bild negativ ($g > 0$ und $b < 0$).

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie den Vergrößerungsfaktor $\frac{B}{G}$ für $f = 40$ cm und $g = 50$ cm an!

Geben Sie ein Intervall für die Gegenstandsweite g an, damit ein virtuelles Bild entsteht!

Begründen Sie Ihre Antwort durch eine mathematische Argumentation!

b) Stellen Sie die Bildweite b als Funktion der Gegenstandsweite g bei konstanter Brennweite f dar! Betrachten Sie die Fälle $g = 2f$ sowie $g = f$ und geben Sie die jeweilige Auswirkung für b an!

Was kann mithilfe dieser Funktion über den Grenzwert von b ausgesagt werden, wenn $g > f$ ist und sich g der Brennweite f annähert? Tätigen Sie eine entsprechende Aussage und begründen Sie diese durch Betrachtung von Zähler und Nenner!

c) Leiten Sie aus den gegebenen Beziehungen $\frac{G}{B}$ die oben angeführte Formel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ her! Geben Sie die notwendigen Umformungsschritte an!

Der Ausdruck $\frac{1}{b}$ kann als Funktion in Abhängigkeit von g der Form $\frac{1}{b}(g) = a \cdot g^k + c$ betrachtet werden. Geben Sie die Werte der Parameter a und c sowie des Exponenten k für diesen Fall an!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{1}{b} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{1}{200}$ → Bildweite 200 cm = 2 m

$\frac{B}{G} = \frac{200}{50} = 4$ → vierfache Vergrößerung

Bildweite negativ:

Intervall für g: $(0; f)$ bzw. Angabe des Intervalls durch: $0 < g < f$

Akzeptiert wird auch der Bezug zur ersten Fragestellung mit $f = 40$.

Intervall für g: $(0; 40)$ bzw. $0 < g < 40$

Begründung 1: Aus $b = \frac{g \cdot f}{g - f} < 0$ folgt $g < f$.
Begründung 2: Aus $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ folgt $g < f$, da der Kehrwert von b dann größer ist als der Kehrwert von f.

b) Funktion: $b(g) = \frac{f \cdot g}{g - f}$

$b(2f) = 2f$; Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich groß und entsprechen dem Radius der Kugel. Erweiterung: Auch G und B sind gleich groß. $b(f)$ existiert nicht; der Nenner hat den Wert 0.

(Auch die Form $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ ist als richtig zu werten.)

Annäherung von g an f mit $g > f$:
Der Ausdruck $\frac{f \cdot g}{g - f}$ ist positiv; der Zähler ist eine positive Zahl (auch: nähert sich dem Wert f^2), der Nenner ist positiv und nähert sich dem Wert 0, daher wird b immer größer (der Grenzwert ist unendlich – oder ähnliche Aussagen).

Anmerkungen: Wenn die Form $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ verwendet wird, sind auch umgangssprachliche Formulierungen wie „oben steht die positive Zahl 1, unten steht etwas Positives, das gegen 0 geht, daher ist der Grenzwert +1" als richtig zu werten. Auch Argumente, bei denen teilweise oder immer „oben" statt „Zähler" und „unten" statt „Nenner" (oder Ähnliches) verwendet wird, sind als richtig zu werten.

c) Zwei mögliche Umformungen werden angeführt:

Variante 1:

$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f}$

$\frac{g}{b} = \frac{g}{f} - 1 \;\Big|\; : g$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

Variante 2:

$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f} \;\Big|\; \cdot (b \cdot f)$

$g \cdot f = b \cdot g - f \cdot b \;\Big|\; : (b \cdot g \cdot f)$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

Daraus ergibt sich direkt der angegebene Zusammenhang.

$\frac{1}{b}(g) = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \;\Rightarrow\; a = -1,\, k = -1,\, c = \frac{1}{f}$

Treibstoffverbrauch

Aufgabennummer: 2_015	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 1.5, FA 2.3, FA 2.5

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Fast vier Fünftel aller Güter werden zumindest auf einem Teil ihres Weges vom Erzeuger zum Konsumenten mit dem Schiff transportiert.

In der Schifffahrt werden Entfernungen in Seemeilen (1 sm = 1,852 km) und Geschwindigkeiten in Knoten (1 K = 1 sm/h) angegeben.

Der stündliche Treibstoffverbrauch y (in Tonnen pro Stunde) des Schiffs *Ozeanexpress* kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x (in Knoten) durch die Gleichung $y = 0{,}00002x^4 + 0{,}6$ beschrieben werden. Dieses Schiff hat noch einen Treibstoffvorrat von 600 Tonnen.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Formel für die Zeit t (in Stunden) an, die das Schiff mit einer konstanten Geschwindigkeit x unterwegs sein kann, bis dieser Treibstoffvorrat aufgebraucht ist.

Die Funktion f soll den Weg $f(x)$ beschreiben, den das Schiff mit diesem Treibstoffvorrat bei einer konstanten Geschwindigkeit x zurücklegen kann. Geben Sie den Term der Funktion f an!

Die Funktion f hat in $H\,(10\,|\,7\,500)$ ein Maximum. Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punktes im vorliegenden Kontext!

b) Der Chef eines Schifffahrtsunternehmens stellte fest, dass sich der Treibstoffverbrauch um rund 50 % verringert, wenn Schiffe statt mit 25 nur noch mit 20 Knoten unterwegs sind.

In der nachstehenden Grafik wird der Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg bei einer Geschwindigkeit von 25 Knoten dargestellt.

Überlegen Sie, wie sich diese Grafik ändert, wenn die Geschwindigkeit nur 20 Knoten beträgt, und zeichnen Sie den entsprechenden Graphen ein!

Interpretieren Sie, was die 50%ige Treibstoffreduktion für die Steigung der Geraden bedeutet!

c) Eine Reederei hat den Auftrag erhalten, in einem vorgegebenen Zeitraum eine bestimmte Warenmenge zu transportieren. Ursprünglich plante sie, dafür acht Schiffe einzusetzen.

Geben Sie an, wie viele zusätzliche Schiffe gleichen Typs bei einer Drosselung der Geschwindigkeit von 25 auf 20 Knoten erforderlich sind, damit der Auftrag zeitgerecht ausgeführt werden kann! (Die Stehzeiten der Schiffe sind dabei zu vernachlässigen.)

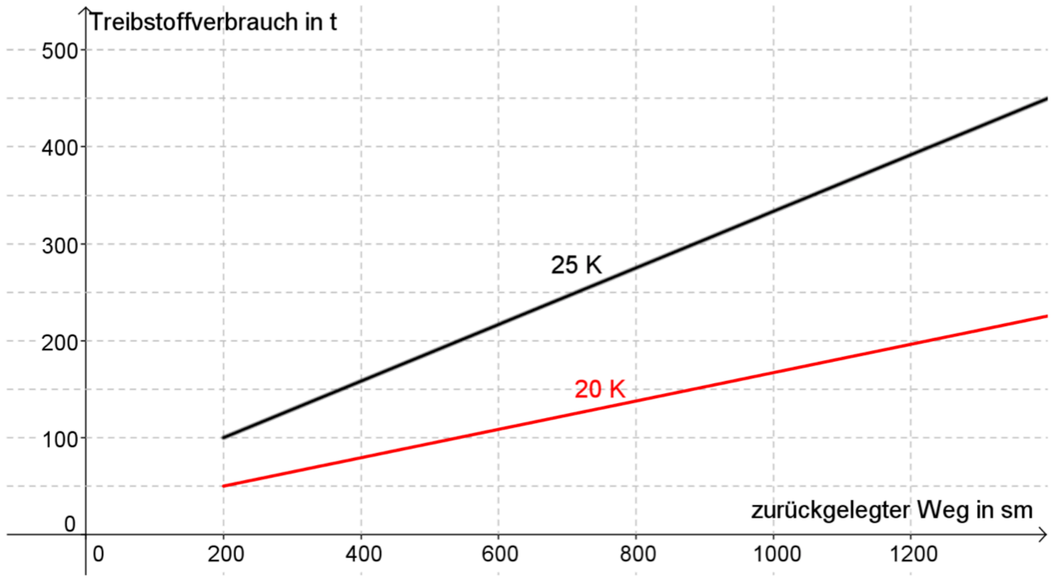
Geben Sie eine Formel an, mit der die erforderliche Anzahl der Schiffe in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x ermittelt werden kann!

Möglicher Lösungsweg

a) $t = \frac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6}$; $f(x) = \frac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6} \cdot x$

Bei einer Geschwindigkeit von 10 Knoten kann mit dem vorhandenen Treibstoff die längste Strecke, nämlich 7 500 Seemeilen, zurückgelegt werden.

b)



Die Steigung der Geraden wird halbiert, wenn die Treibstoffverbrauch um 50 % reduziert wird.

c) Es müssen zwei weitere Schiffe eingesetzt werden.

Anzahl der Schiffe $= \frac{200}{x}$

Teich

In einem künstlich angelegten Teich befinden sich 129 m^3 Wasser.

Aufgabenstellung:

a) Der Teich kann über zwei Abflüsse vollständig entleert werden.

Wird nur der eine Abfluss geöffnet, so dauert die vollständige Entleerung 10 h.
Wird nur der andere Abfluss geöffnet, so dauert die vollständige Entleerung 6 h.
Die jeweilige Abflussgeschwindigkeit ist dabei im gesamten Zeitraum konstant.
Die Zeitdauer, die zur vollständigen Entleerung benötigt wird, wenn beide Abflüsse gleichzeitig geöffnet sind, wird mit T bezeichnet.

1) Berechnen Sie T. *[0/1 P.]*

b) Der vollständig entleerte Teich wird wieder mit 129 m^3 Wasser befüllt.

Die Funktion $d\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gibt die Fülldauer $d(z)$ in Abhängigkeit von der konstanten Zuflussgeschwindigkeit z an (z in m^3/h, $d(z)$ in h).

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von d auf.

$d(z) =$ ____ *[0/1 P.]*

Die Funktion h beschreibt in Abhängigkeit von der Zeit t die Höhe der Wasseroberfläche über dem tiefsten Punkt des Teiches bei der konstanten Zuflussgeschwindigkeit $z = 6\ m^3/h$ (t in h, $h(t)$ in m).

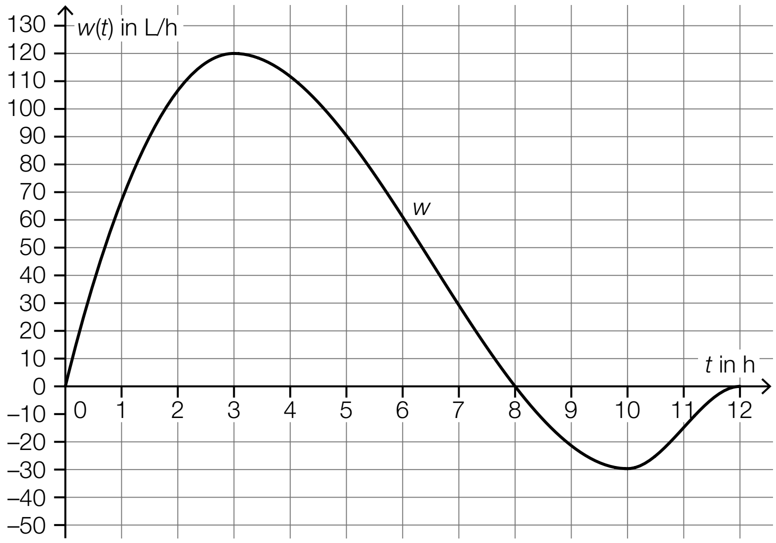
Für die momentane Änderungsrate der Höhe der Wasseroberfläche gilt:
$$h'(t) = \frac{15}{\sqrt{2738 \cdot \pi \cdot t}} \quad \text{mit} \quad t > 0$$

2) Ermitteln Sie, um wie viele Meter die Höhe der Wasseroberfläche in den letzten 10 h der Befüllung ansteigt. *[0/1 P.]*

c) Durch Regen und Verdunstung ändert sich die Wassermenge im Teich.

Die Funktion w: $[0;12] \to \mathbb{R}$ beschreibt näherungsweise die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $w(t)$ in L/h).

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph von w dargestellt.



1) Ordnen Sie den vier Aussagen jeweils das passende größtmögliche Zeitintervall aus A bis F zu. *[0/½/1 P.]*

Die Wassermenge im Teich nimmt ab.	
Die Wassermenge im Teich nimmt immer schneller zu.	
Die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich nimmt ab.	
Die Wassermenge im Teich nimmt zu.	

A	(0; 3)
B	(3; 10)
C	(8; 12)
D	(3; 12)
E	(8; 10)
F	(0; 8)

Möglicher Lösungsweg

a1) $\left(\frac{129}{10} + \frac{129}{6}\right) \cdot T = 129$

$T = 3{,}75$ h

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von T.

b1) $d(z) = \frac{129}{z}$

b2) $d(6) = 21{,}5$

$\int_{11,5}^{21,5} h'(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}40...$

Die Höhe der Wasseroberfläche steigt in den letzten 10 h der Befüllung um rund 0,4 m an.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von d.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Anstiegs der Höhe der Wasseroberfläche.

c1)

Die Wassermenge im Teich nimmt ab.	C
Die Wassermenge im Teich nimmt immer schneller zu.	A
Die momentane Änderungsrate der Wassermenge im Teich nimmt ab.	B
Die Wassermenge im Teich nimmt zu.	F

A	(0; 3)
B	(3; 10)
C	(8; 12)
D	(3; 12)
E	(8; 10)
F	(0; 8)

c1) Ein Punkt für vier richtige Zuordnungen, ein halber Punkt für zwei oder drei richtige Zuordnungen.

Biathlon

Biathlon ist eine Wintersportart, die Skilanglauf und Schießen kombiniert.

Bei einem bestimmten Wettbewerb müssen drei Runden zu je 2 500 m absolviert werden.
Dabei gilt:

- Nach der ersten und nach der zweiten absolvierten Runde findet jeweils ein Schießen statt. Bei jedem Schießen werden fünf Schüsse abgegeben.
- Für jeden Fehlschuss muss eine 150 m lange Strafrunde absolviert werden, wodurch es zu einem Zeitverlust kommt.

Quelle: https://www.sport1.de/wintersport/biathlon/2018/11/biathlon-im-ueberblick-regeln-disziplinen-wissenswertes [15.04.2021].

Aufgabenstellung:

a) Lisa absolviert die drei Runden mit folgenden durchschnittlichen Geschwindigkeiten (v_1, v_2, v_3 in m/s):

- v_1 für die erste Runde
- v_2 für die zweite Runde
- v_3 für die dritte Runde

Für das Schießen benötigt Lisa jeweils die Zeitdauer t^* (t^* in s).
Nach der ersten absolvierten Runde macht sie beim Schießen keinen Fehler.
Nach der zweiten absolvierten Runde macht sie beim Schießen genau 2 Fehler.
Die 2 Strafrunden absolviert sie mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von v_S (v_S in m/s).

Unter der Laufzeit b (b in s) versteht man diejenige Zeit, die Lisa insgesamt für die absolvierten Runden inklusive Strafrunden und für das Schießen benötigt.

1) Stellen Sie mithilfe von v_1, v_2, v_3, t^* und v_S eine Formel zur Berechnung von b auf.

$b =$ ____ *[0/1 P.]*

b) Die Geschwindigkeit von Hanna in der ersten Runde kann modellhaft durch die Funktion $v\colon [0; 440] \to \mathbb{R}, t \mapsto v(t)$ beschrieben werden (t in s, $v(t)$ in m/s).

1) Interpretieren Sie $\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v(t)\,dt$ mit $T \in (0\text{ s}; 440\text{ s}]$ im gegebenen Sachzusammenhang.

[0/1 P.]

Es gibt genau zwei Zeitpunkte $t_1, t_2 \in (0\text{ s}; 440\text{ s})$ mit $t_1 < t_2$, für die gilt:
$v'(t_1) = 0$ und $v''(t_1) < 0$
$v'(t_2) = 0$ und $v''(t_2) < 0$

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Zeitpunkte t_1 und t_2 sind ______①______ der Funktion v und der Wert von $\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$ entspricht dabei der ______②______ im Zeitintervall $[t_1; t_2]$. *[0/½/1 P.]*

①	
lokale Minimumstellen	☐
lokale Maximumstellen	☐
Wendestellen	☐

②	
durchschnittlichen Geschwindigkeit	☐
Länge der zurückgelegten Strecke	☐
durchschnittlichen Beschleunigung	☐

c) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer von Daria beim Schießen an und wird als binomialverteilt angenommen. Bei jedem der 5 Schüsse ist p die Trefferwahrscheinlichkeit.

1) Stellen Sie unter Verwendung von p eine Formel zur Berechnung der nachstehenden Wahrscheinlichkeit auf.

$P(X \geq 4) =$ ____ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $b = \frac{2\,500}{v_1} + \frac{2\,500}{v_2} + \frac{2\,500}{v_3} + 2 \cdot t^* + \frac{300}{v_S}$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b1) Der Ausdruck beschreibt die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0; T]$.

b2)

①	
lokale Maximumstellen	☒

②	
durchschnittlichen Beschleunigung	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

c1) $P(X \geq 4) = 5 \cdot p^4 \cdot (1 - p) + p^5$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Müsliriegel*

Aufgabennummer: 2_100	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.2, AN 1.1, WS 3.1, WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3	

Ein neuer Müsliriegel steht vor der Markteinführung. Der Hersteller dieses Müsliriegels produziert 100000 Stück davon.

Auf allen Verpackungen der Müsliriegel wird die Möglichkeit von Sofortgewinnen angekündigt. Die jeweilige Höhe des Sofortgewinns kann man nach dem Öffnen der Verpackung auf deren Innenseite ablesen. Der Hersteller des Müsliriegels gibt an:

Es werden

- 9000 Sofortgewinne zu je € 2
- 900 Sofortgewinne zu je € 5
- 100 Sofortgewinne zu je € 65

ausgezahlt.

Alle produzierten Müsliriegel werden an Geschäfte geliefert. Die Verteilung der Müsliriegel erfolgt nach dem Zufallsprinzip.

Aufgabenstellung:

a) Unter Berücksichtigung aller Produktionskosten kostet jeder der 100000 Müsliriegel in der Produktion durchschnittlich € 1.

Der Verkaufspreis eines Müsliriegels soll so festgelegt werden, dass für den Hersteller ein Gewinn von mindestens € 80.000 erzielt wird, wenn nach dem Verkauf aller Müsliriegel alle Sofortgewinne ausgezahlt werden müssen.
Alle Müsliriegel haben den gleichen Verkaufspreis.

1) Ermitteln Sie den unter diesen Voraussetzungen kleinstmöglichen Verkaufspreis p des Müsliriegels.

2) Geben Sie an, um wie viel Prozent der kleinstmögliche Verkaufspreis p gesenkt werden kann, wenn man die Müsliriegel ohne Gewinnspiel verkauft und der Gewinn trotzdem mindestens € 80.000 ausmachen soll.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

b) Die Zufallsvariable X beschreibt die Höhe des ausgezahlten Sofortgewinns pro gekauften Müsliriegel.

1) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Ein Kunde kauft 4 Müsliriegel.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Kunde mindestens einen Sofortgewinn erzielt.

c) Aus Erfahrung weiß man, dass 95 % der Müsliriegel eine vorgegebene Mindestmasse haben.

Eine Zufallsstichprobe von 1 000 Müsliriegeln wird ausgewählt. Die binomialverteilte Zufallsvariable Y beschreibt dabei die Anzahl der Müsliriegel in dieser Zufallsstichprobe, die die vorgegebene Mindestmasse haben.

1) Ermitteln Sie die Standardabweichung $\sigma(Y)$ der Zufallsvariablen Y.

$\sigma(Y) =$ ______________________________

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Kontext.

$P(Y \geq 933) \approx 0{,}99$

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$G(x)$ ... Gewinn bei einer Produktion von x Müsliriegeln

$G(100\,000) = p \cdot 100\,000 - 100\,000 - (9\,000 \cdot 2 + 900 \cdot 5 + 100 \cdot 65)$

$G(100\,000) = 80\,000 \quad \Rightarrow \quad p = € \, 2{,}09$

a2) $p_1 \cdot 100\,000 - 100\,000 = 80\,000 \quad \Rightarrow \quad p_1 = € \, 1{,}80$

$\frac{0{,}29}{2{,}09} = 0{,}1387... \approx 13{,}9\ \%$

b) **Lösungserwartung:**

b1) $E(X) = 0{,}09 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot 5 + 0{,}001 \cdot 65$

$E(X) = € \, 0{,}29$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$1 - \frac{90\,000}{100\,000} \cdot \frac{89\,999}{99\,999} \cdot \frac{89\,998}{99\,998} \cdot \frac{89\,997}{99\,997} = 0{,}3439...$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $\sigma(Y) = \sqrt{1\,000 \cdot 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}95)} = 6{,}892...$

c2) mögliche Interpretation:

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 933 Müsliriegel die vorgegebene Mindestmasse haben, beträgt ca. 99 %.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die näherungsweise Berechnung mit $1 - 0{,}9^4$ ebenfalls als richtig zu werten ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
c2) Ein Punkt für eine richtige Interpretation..

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Vergnügungspark

Aufgabennummer: 2_088	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.3, AG 4.1, FA 4.4, AN 4.2	

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region.

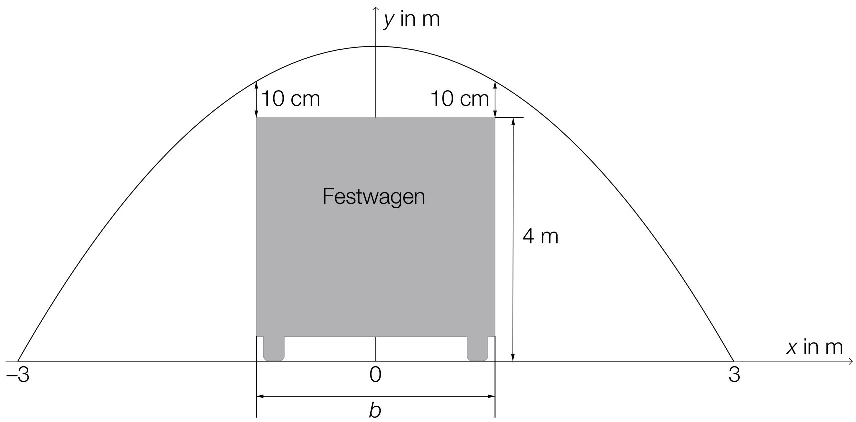
a) Beim Eingang zum Vergnügungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$

x, y ... Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.

Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden. Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).

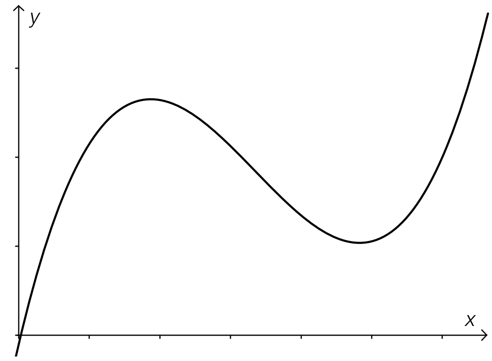


1) Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf.

Vor der Parade wird der Torbogen mit einer Folie verschlossen.

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt der dazu benötigten Folie.

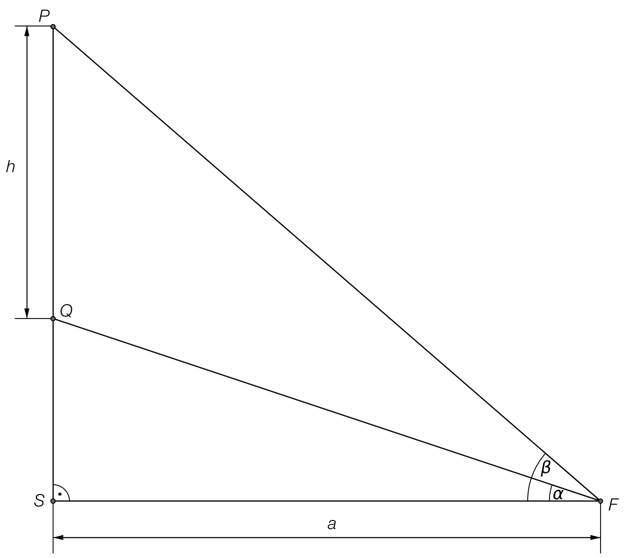
b) Eine der Hauptattraktionen ist die Hochschaubahn. Ein Teilstück kann durch die Polynomfunktion modelliert werden, deren Graph in der folgenden Abbildung zu sehen ist:



1) Erklären Sie, welchen Grad diese Polynomfunktion mindestens haben muss.

c) Im Vergnügungspark gibt es ein Kino.

Fiona sitzt *a* Meter von der Leinwand entfernt (Punkt *F*). Der Höhenwinkel zum unteren Ende der Leinwand (Punkt *Q*) wird mit α bezeichnet, der Höhenwinkel zum oberen Ende der Leinwand (Punkt *P*) wird mit β bezeichnet.



1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Höhe *h* der Leinwand aus *a*, α und β.

$h =$ ____________________

Lösungserwartung

a1) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

a2) $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m².

b1) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c1) rechtwinkeliges Dreieck FPS: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck FQS: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_033	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.3, AN 1.3, AN 4.2, AN 4.3, FA 4.3	

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sind.

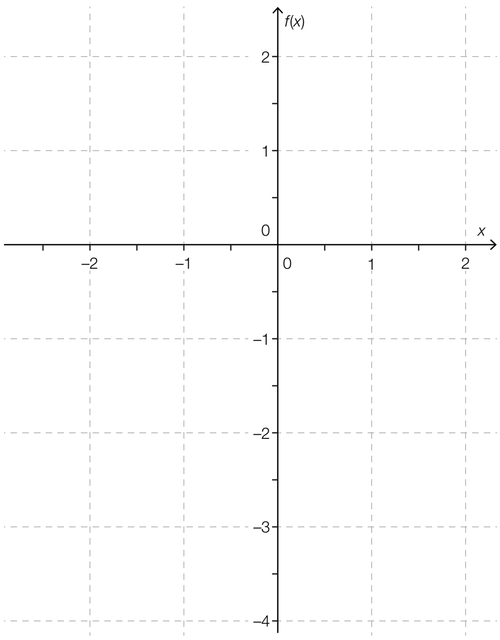
Aufgabenstellung:

a) Begründen Sie, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!

Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b. Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b an, sodass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$ hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

a) Mögliche Begründung:

Berechnung der Nullstellen: $a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$
Eine Nullstelle ist daher $x_1 = 0$.

Berechnung weiterer Nullstellen: $a \cdot x^2 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{b}{a}$

Wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt: $-\frac{b}{a} > 0$.
Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion f hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x entspricht dem Wert $f'(x)$.
$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \quad \Rightarrow \quad f'(0) = b$

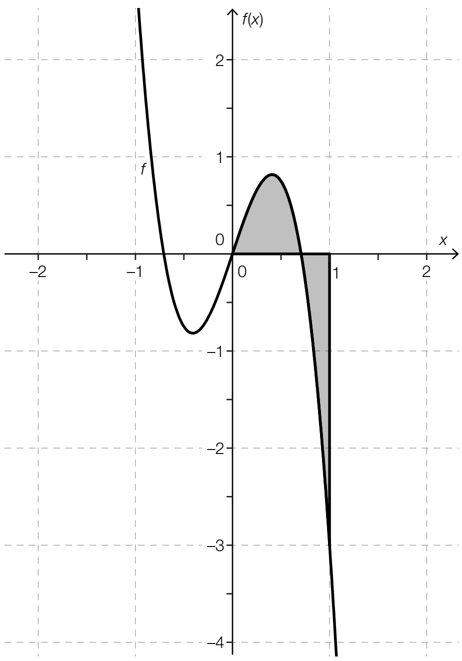
b) Mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x)\,\mathrm{d}x = \left(a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \cdot b$$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von f und von der x-Achse begrenzt werden. Hätte f keine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$, dann würde der Graph von f in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der x-Achse (mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0; 1)$) oder zur Gänze unterhalb der x-Achse (mit $f(x) < 0$ für alle $x \in (0; 1)$) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von f im Intervall $(0; 1)$ entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Möglicher Graph von f:



Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für eine korrekte Beziehung zwischen a und b.
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung und eine Skizze eines möglichen Graphen von f. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

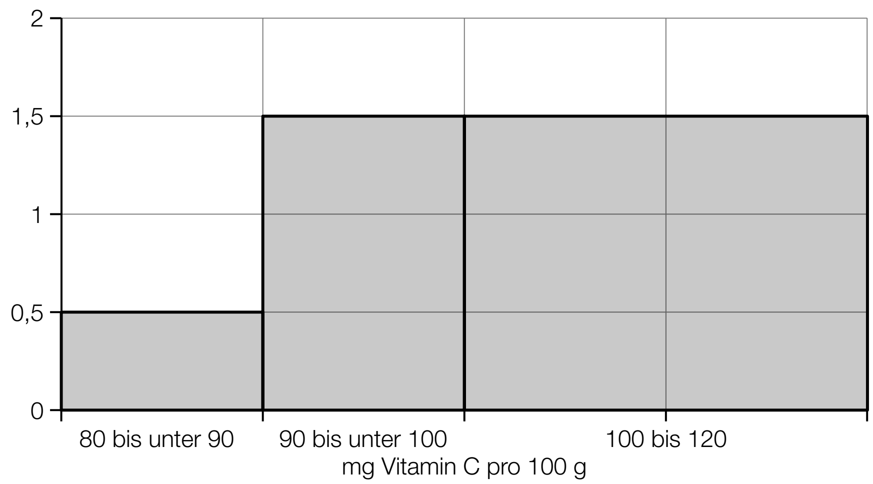
Vitamin C

Vitamin C erfüllt viele wichtige Aufgaben im menschlichen Körper.

Aufgabenstellung:

a) Brokkoli enthält durchschnittlich 100 mg Vitamin C pro 100 g.

Bei einem Gemüsegroßhändler wird eine Zufallsstichprobe von 50 Portionen frischem Brokkoli entnommen und für jede Portion der Vitamin-C-Gehalt pro 100 g gemessen.
Der Flächeninhalt eines Rechtecks im nachstehenden Histogramm entspricht der absoluten Häufigkeit der Portionen dieser Stichprobe im jeweiligen Bereich.



1) Ermitteln Sie die Anzahl der Portionen in der Zufallsstichprobe, die 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g aufweisen. *[0 / 1 P.]*

Von der Zufallsstichprobe werden 3 Portionen ohne Zurücklegen entnommen.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 dieser Portionen 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g aufweisen. *[0 / 1 P.]*

b) Ein Getränkehersteller möchte Fruchtsaft so in Flaschen abfüllen, dass jede Flasche 100 mg Vitamin C enthält.

Es stehen zur Verfügung:

- Birnensaft mit 20 mg Vitamin C pro 100 ml
- Orangensaft mit 35 mg Vitamin C pro 100 ml
- Mischungen aus diesen beiden Säften

Emine behauptet, dass der Vitamin-C-Gehalt von 100 mg bei Flaschen mit einem Fassungsvermögen von 250 ml nicht erreicht werden kann.

1) Begründen Sie, warum Emines Behauptung richtig ist. *[0/1 P.]*

Die zur Verfügung stehenden Fruchtsäfte werden so gemischt, dass 350 ml Saft genau 100 mg Vitamin C enthalten.

2) Ermitteln Sie, wie viele Milliliter Birnensaft mit wie vielen Millilitern Orangensaft dafür gemischt werden müssen. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $20 \cdot 1{,}5 = 30$

30 Portionen weisen 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g auf.

a2) $1 - \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{28}{48} = 0{,}7928...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 79,3 %.

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Anzahl.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) 250 ml Orangensaft enthalten nur 87,5 mg Vitamin C und somit weniger als 100 mg.

b2) x ... Menge an Birnensaft in einer Flasche in ml
y ... Menge an Orangensaft in einer Flasche in ml

I: $0{,}2 \cdot x + 0{,}35 \cdot y = 100$
II: $x + y = 350$

$x = 150$
$y = 200$

Es müssen 150 ml Birnensaft mit 200 ml Orangensaft gemischt werden.

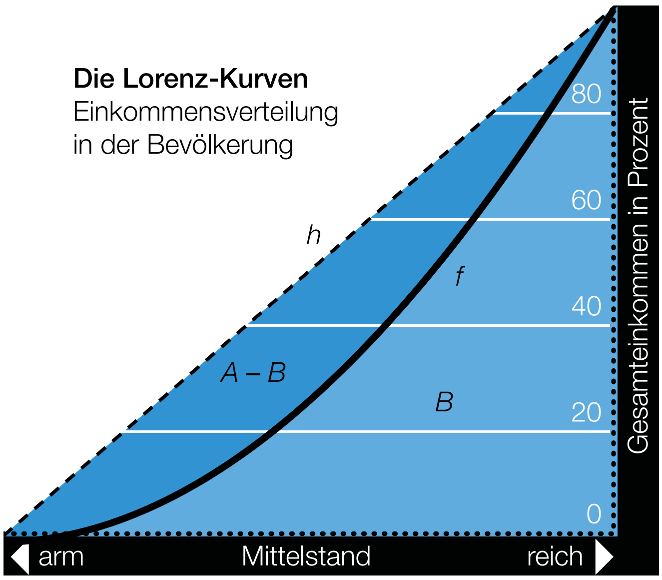
b1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte.

Einkommensverteilung

Aufgabennummer: 2_031	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.4, AN 4.2, AN 4.3, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.2, FA 4.1, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2	

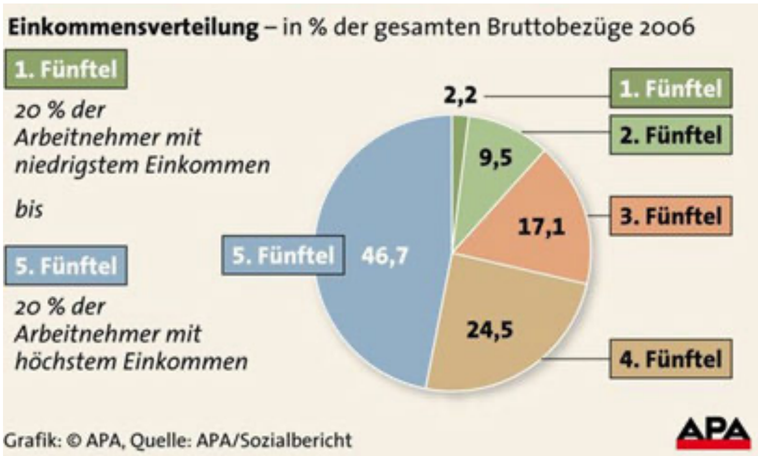
Der Statistiker Max Lorenz beschrieb bereits im Jahr 1905 statistische Verteilungen mithilfe der nach ihm benannten Lorenz-Kurve. Eine Lorenz-Kurve *f* kann z. B. zur Beschreibung der Einkommensverteilung in einem Staat herangezogen werden. Je ausgeprägter ihr „Bauch" ist, desto größer ist der Einkommensunterschied zwischen niedrigem und hohem Einkommen. Die Lorenz-Kurve der Einkommensverteilung eines Staates, in dem alle Personen bis auf eine Person nichts verdienen und diese eine Person alles bekommt, wird in der nachstehenden Grafik durch die punktierten Linien (Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks) dargestellt. Das andere Extrem ist ein Staat, in dem alle Personen gleich viel verdienen. In diesem Fall wird die Lorenz-Kurve zu einer Geraden *h*, welche durch die strichlierte Linie dargestellt ist. Zwischen den beiden Extremen verläuft die Lorenz-Kurve *f* eines Staates.

Jeder Punkt $P = (x \mid f(x))$ auf der Kurve *f* steht für folgende Aussage: „Die einkommensschwächsten x % aller Haushalte beziehen $f(x)$ % des Gesamteinkommens."



Der Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks wird mit A bezeichnet. Der Graph der Lorenz-Kurve f schließt mit den beiden Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks eine Fläche mit Inhalt B ein. Setzt man den Inhalt der Fläche zwischen der Lorenz-Kurve f und der Geraden h mit der Dreiecksfläche A in Bezug, erhält man den Gini-Ungleichheitskoeffizienten $GUK = \frac{A - B}{A}$, eine Zahl zwischen null und eins. Je kleiner der GUK ist, desto gleichmäßiger ist das Gesamteinkommen auf die Bevölkerung verteilt.

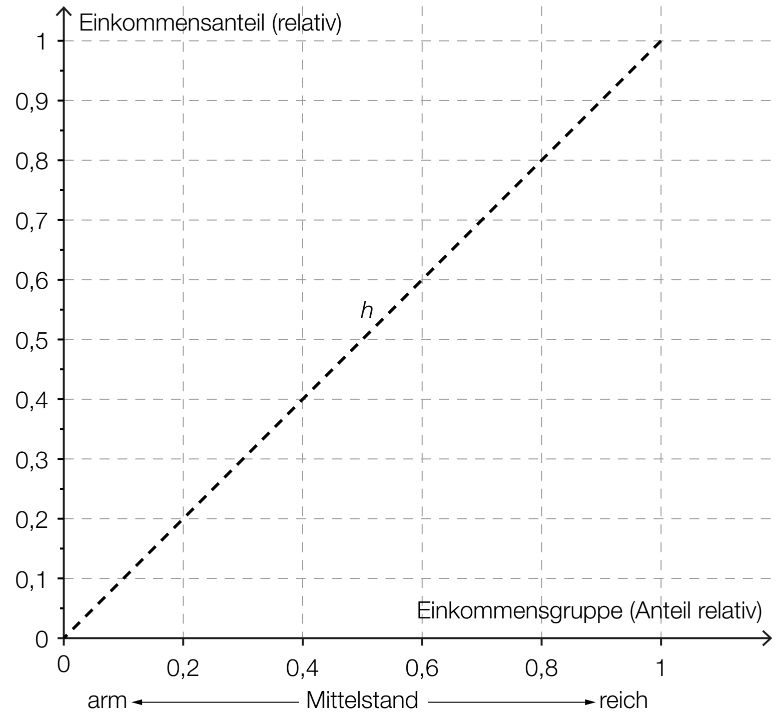
In der nachstehenden Grafik ist die Einkommensverteilung in Österreich in Prozent der gesamten Bruttobezüge im Jahre 2006 dargestellt. Daraus ist z. B. abzulesen, dass jene 20 % der Bevölkerung mit den niedrigsten Bruttoeinkommen nur 2,2 % des Gesamtbruttoeinkommens erhalten haben.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [04.05.2017].

Aufgabenstellung:

a) Zeichnen Sie die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung der Bruttobezüge in Österreich im Jahr 2006 in der nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!



Berechnen Sie mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttobezüge in Österreich für das Jahr 2006!

b) Die Verteilung der Bruttoeinkommen in Österreich im Jahre 2006 soll durch eine Polynomfunktion p so modelliert werden, dass alle Daten, die aus dem Kreisdiagramm aus der Einleitung abgelesen werden können, mit Funktionswerten dieser Polynomfunktion übereinstimmen.

Begründen Sie, welchen Grad die Polynomfunktion p bei konkreter Berechnung (maximal) hat!

Begründen Sie, warum eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht für die Modellierung einer Lorenz-Kurve geeignet ist!

c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}245 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2 + 0{,}155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen GUK!

Geben Sie mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" und die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen" im Vergleich zu den Bruttobezügen im Jahr 2006 in Österreich ändern würden!

d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

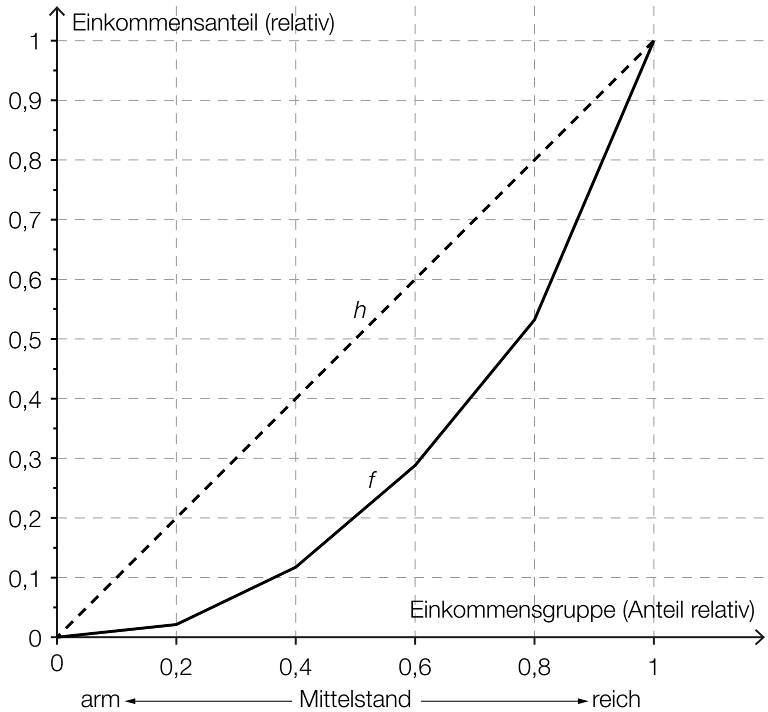
Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Geben Sie an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründen Sie Ihre Wahl!

Geben Sie eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermitteln Sie für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Inhalt der Fläche zwischen dem Polygonzug f und der Strecke h beträgt 0,208 Flächeneinheiten (die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen der waagrechten Achse und dem Streckenzug kann z. B. aus zwei Dreiecksflächen und drei Trapezflächen erfolgen).

$$\Rightarrow \; GUK = \frac{0{,}208}{0{,}5} = 0{,}416$$

b) Aus den Daten des Kreisdiagramms ergeben sich (für die Argumente $x = 0$, $x = 0{,}2$, $x = 0{,}4$, $x = 0{,}6$, $x = 0{,}8$, $x = 1$) sechs Funktionswerte von p und somit sechs „Bedingungen" für die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Eine Polynomfunktion fünften Grades hat sechs Koeffizienten und ist daher geeignet.
(Anmerkung: Bei „besonderer" Lage der Punkte kann auch ein Grad kleiner als fünf ausreichend sein.)

Jede Lorenz-Kurve verläuft durch den Punkt (0|0). Da eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$) nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, ist sie nicht für die Modellierung geeignet.

c) $GUK = \frac{0{,}5 - \int_0^1 \left(0{,}245x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}155x\right) \mathrm{d}x}{0{,}5} = 0{,}3225$

$g(0{,}2) \approx 0{,}057$
$g(0{,}8) \approx 0{,}633$

Der Einkommensanteil der „20 % mit den niedrigsten Bruttoeinkommen“ würde (um ca. 3,5 Prozentpunkte) von 2,2 % auf ca. 5,7 % steigen.

Der Einkommensanteil der „20 % mit den höchsten Bruttoeinkommen“ würde (um ca. 10 Prozentpunkte) von 46,7 % auf 36,7 % sinken.

d) $b = 0$, da der Graph durch den Punkt $(0|0)$ verlaufen muss
$a = 1$, da der Graph durch den Punkt $(1|1)$ verlaufen muss

$\frac{0{,}5 - \int_0^1 x^z \, \mathrm{d}x}{0{,}5} < 0{,}26$

$z \in \left(1; \frac{63}{37}\right)$

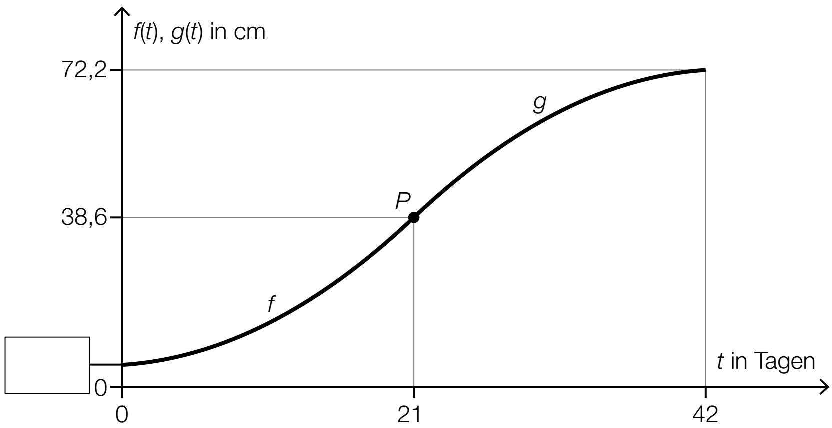
Sonnenblumen

Aufgabenstellung:

a) Die Höhe einer bestimmten Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t näherungsweise durch die zwei quadratischen Funktionen f und g beschreiben. Die Graphen dieser beiden Funktionen gehen im Punkt P mit gleicher Steigung ineinander über. (Siehe unten stehende Abbildung.)

$f(t) = \frac{1}{15} \cdot t^2 + 0{,}2 \cdot t + 5 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 21$
$g(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c \quad \text{mit} \quad 21 \leq t \leq 42$

$t \in [0; 42]$ ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$f(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt t in cm
$g(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt t in cm



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung den fehlenden Wert der Achsenbeschriftung in das dafür vorgesehene Kästchen ein. *[0/1 P.]*

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c der Funktion g. *[0/½/1 P.]*

3) Interpretieren Sie den nachstehenden Term im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

Es gilt: $t_1 = 2$ Tage, $t_2 = 42$ Tage

$$\frac{g(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$ *[0/1 P.]*

b) Die Höhe einer anderen Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t in einem bestimmten Zeitintervall näherungsweise durch die Funktion h beschreiben.

$h(t) = 6{,}2 \cdot a^t$

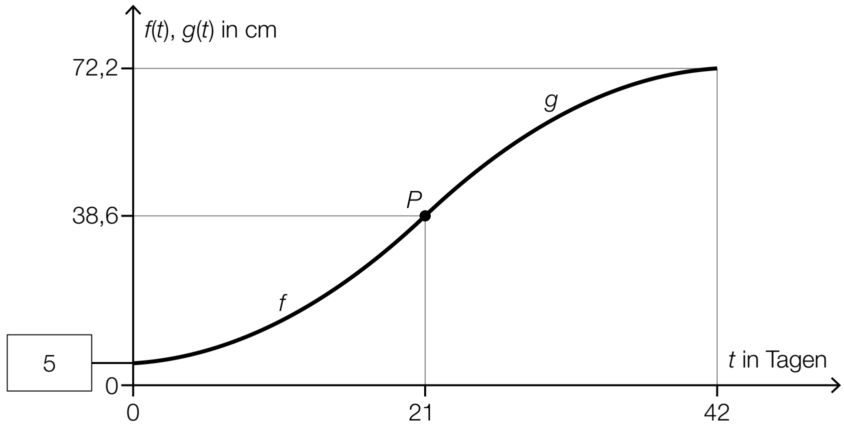
t ... Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$h(t)$ ... Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt t in cm

Zum Zeitpunkt $t = 17$ beträgt die Höhe dieser Sonnenblume 38,6 cm.

1) Berechnen Sie a. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1)



a2) $f'(t) = \frac{2}{15} \cdot t + 0{,}2$
$g'(t) = 2 \cdot a \cdot t + b$

I: $g(21) = 38{,}6$
II: $g(42) = 72{,}2$
III: $f'(21) = g'(21)$

oder:

I: $21^2 \cdot a + 21 \cdot b + c = 38{,}6$
II: $42^2 \cdot a + 42 \cdot b + c = 72{,}2$
III: $42 \cdot a + b = 3$

a3) Der Term beschreibt die mittlere Änderungsrate der Höhe dieser Sonnenblume im Zeitintervall [2; 42] in cm/Tag.

oder:

Der Term beschreibt das durchschnittliche Wachstum dieser Sonnenblume im Zeitintervall [2; 42] in cm/Tag.

a1) Ein Punkt für das Eintragen des richtigen Wertes.
a2) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems mit drei Gleichungen, ein halber Punkt für nur zwei richtige Gleichungen.
a3) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

b1) $38{,}6 = 6{,}2 \cdot a^{17}$

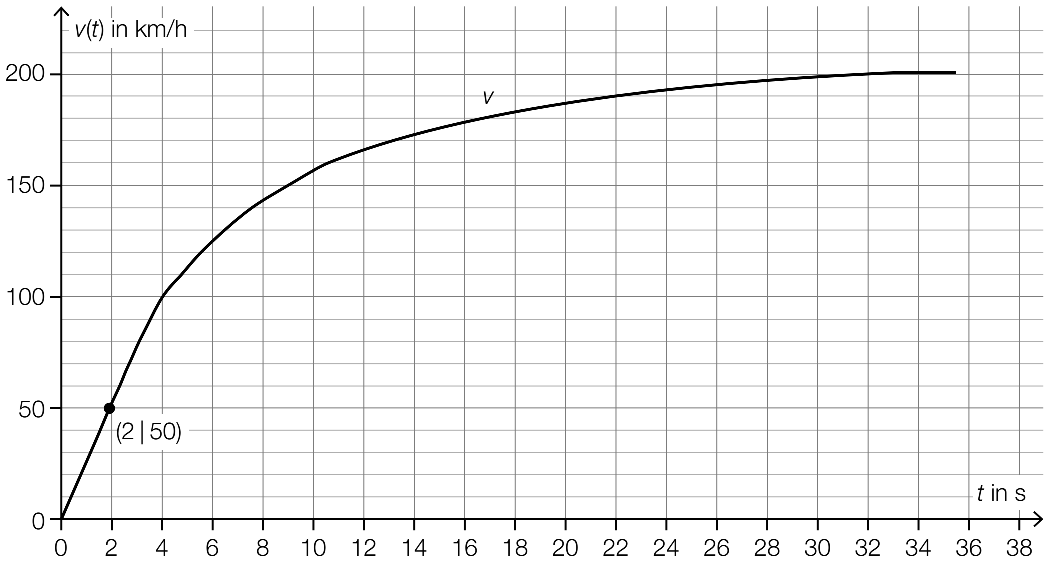
$$a = \sqrt[17]{\frac{38{,}6}{6{,}2}} = 1{,}1135...$$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von *a*.

Beschleunigungstest

Bei einem Beschleunigungstest wird ein Fahrzeug aus dem Stillstand (Anfangsgeschwindigkeit = 0 km/h) beschleunigt.

In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion v für einen Beschleunigungstest mit einem Sportwagen dargestellt. Dabei bewegt sich der Sportwagen t Sekunden nach Beginn des Beschleunigungsvorgangs mit der Geschwindigkeit $v(t)$ in km/h.



Aufgabenstellung:

a) Es wird angenommen, dass die Geschwindigkeit v_1 des Sportwagens im Zeitintervall [0; 2] direkt proportional zur Zeit t ist (t in s, $v_1(t)$ in km/h).

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von v_1 auf.

$v_1(t) =$ ____ *[0/1 P.]*

b) Bei einer anderen Modellierung kann die Geschwindigkeit des Sportwagens im Zeitintervall [0; 20] in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion v_2 beschrieben werden.

$v_2(t) = -0{,}001 \cdot t^4 + 0{,}078 \cdot t^3 - 2{,}23 \cdot t^2 + 32 \cdot t$

t ... Zeit in s
$v_2(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in km/h

1) Berechnen Sie mithilfe von v_2 den Zeitpunkt $t_2 \in [0; 20]$, zu dem die Geschwindigkeit des Sportwagens 130 km/h beträgt. *[0/1 P.]*

c) Die Geschwindigkeit-Beschleunigung-Funktion a ordnet jeder Geschwindigkeit $v \in [80; 160]$ des Sportwagens näherungsweise die entsprechende Beschleunigung $a(v)$ zu.

$a(v) = 0{,}0003 \cdot v^2 + b \cdot v + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$

v ... Geschwindigkeit in km/h
$a(v)$ ... Beschleunigung bei der Geschwindigkeit v in m/s²

In der nachstehenden Tabelle sind zwei Beschleunigungswerte angeführt.

v in km/h	80	160
$a(v)$ in m/s²	6,7	1,4

1) Ermitteln Sie b und c. *[0/1 P.]*

2) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion a und der Abbildung im Einleitungstext den Zeitpunkt t_3, zu dem die Beschleunigung 3,7 m/s² beträgt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $v_1(t) = 25 \cdot t$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von v_1.

b1) $v_2(t_2) = 130$

$t_2 = 6{,}21...\ \text{s}$

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von t_2.

c1) $a(80) = 6{,}7$
$a(160) = 1{,}4$
$b = -0{,}13825$ und $c = 15{,}84$

c2) $a(v_3) = 3{,}7$
$v_3 = 118{,}054...$
Aus der Abbildung folgt: $t_3 \approx 5{,}5$ s.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte.
c2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_3.
Toleranzintervall für t_3: [4; 6]

Maturaball*

Aufgabennummer: 2_105	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Aufgabenstellung:

a) Für einen Maturaball werden Karten im Vorverkauf und an der Abendkassa angeboten. Im Vorverkauf kostet jede Karte € 20. An der Abendkassa kostet jede Karte um 10 % mehr.

Insgesamt wurden 640 Karten um einen Gesamtpreis von € 13.240 verkauft.

Es werden folgende Bezeichnungen gewählt:

x ... Anzahl der im Vorverkauf verkauften Karten
y ... Anzahl der an der Abendkassa verkauften Karten

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung von x und y.

b) Zur Unterhaltung wird das Spiel *Glücksrad* angeboten. Die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, beträgt bei jedem Spiel konstant und unabhängig voneinander 25 %.

Katja spielt dieses Spiel 3-mal.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Katja dabei genau 2-mal gewinnt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

c) Weiters wird das Spiel *Entenspiel* angeboten.
Von insgesamt 50 Badeenten sind 5 an ihrer Unterseite markiert.

Bei diesem Spiel wählt eine teilnehmende Person 2 der 50 Badeenten zufällig und ohne Zurücklegen aus. Jede markierte Badeente, die dabei ausgewählt wird, führt zu einem Gewinn.

Die Zufallsvariable X gibt dabei an, wie viele der beiden ausgewählten Badeenten markiert sind. Die Wahrscheinlichkeit für ein in diesem Sachzusammenhang mögliches Ereignis wird mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet.

$$P(X = \boxed{}) = \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49}$$

1) Tragen Sie die fehlende Zahl im dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Martin behauptet: „Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt.“

2) Begründen Sie, warum Martins Behauptung falsch ist.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) I: $20 \cdot x + 22 \cdot y = 13\,240$
II: $x + y = 640$

b) **Lösungserwartung:**

b1) X ... Anzahl der Gewinne
X ist binomialverteilt mit $n = 3$, $p = 0{,}25$.
$P(X = 2) = 3 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 = 0{,}140625$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $P(X = \boxed{1}) = \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49}$

c2) Martins Behauptung ist falsch, weil die Wahrscheinlichkeit, dass eine markierte Badeente ausgewählt wird, nicht konstant bleibt.

oder:

Martins Behauptung ist falsch, weil es sich beim gegebenen Sachzusammenhang um ein Ziehen ohne Zurücklegen handelt.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems mit zwei Gleichungen, ein halber Punkt für nur eine richtige Gleichung.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
c2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kostenfunktion

Aufgabennummer: 2_012	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Bei einem bestimmten Unternehmen werden die Produktionskosten untersucht. Im ersten Jahr gilt modellhaft für dieses Unternehmen:

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 350 \cdot x + 20\,000$

x … Produktionsmenge in ME ($x \in \mathbb{R}_0^+$)
$K(x)$ … Produktionskosten in GE

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie, um wie viel sich die Grenzkosten bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten (das heißt bei Erhöhung des Produktionsumfangs von 50 ME auf 51 ME) bei diesem Unternehmen unterscheidet.

Für $K(x)$ gilt die Aussage: „Die Grenzkosten sind stets positiv."

2) Begründen Sie, warum diese Aussage richtig ist.

b) Für die Festlegung des Produktionsplans ist es erforderlich, die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME in Abhängigkeit von der Produktionsmenge zu kennen. Die Stückkostenfunktion gibt die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME an.

1) Stellen Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$ dieses Unternehmens auf.

2) Berechnen Sie, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Stückkosten für dieses Unternehmen am geringsten sind.

c) Im zweiten Jahr können die Produktionskosten dieses Unternehmens durch eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + 100 \cdot x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, x \in \mathbb{R}_0^+$ modellhaft beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie alle Werte für a so, dass ein progressiver Verlauf der Produktionskosten vorliegt.

Für diese Produktionskosten gilt:

- Die Fixkosten der Produktion betragen 15 000 GE.
- Die Produktionskosten für 100 ME betragen 30 000 GE.

2) Bestimmen Sie die Werte von a und c.

a = ________________________________

c = ________________________________

Lösungserwartung

a1) $K'(50) = 125$
$K(51) - K(50) = 123{,}51$
Unterschied: 1,49 GE

a2) $K(x)$ ist im angegebenen Bereich monoton steigend, deshalb ist $K'(x)$ stets positiv.

b1) $\overline{K}(x) = 0{,}01 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 350 + \frac{20\,000}{x}$

b2) $\overline{K}'(x) = 0$
$\Rightarrow \quad x = 180{,}64\ldots$

Bei einer Produktion von rund 181 ME sind die durchschnittlichen Stückkosten am geringsten.

c1) $a > 0$

c2) $a = 0{,}5$
$c = 15\,000$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Unterschieds.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Stückkostenfunktion.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Produktionsmenge.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Werte.
c2) Ein Punkt für das Bestimmen der beiden richtigen Werte.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Altenpflege

Aufgabennummer: 2_073	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3	

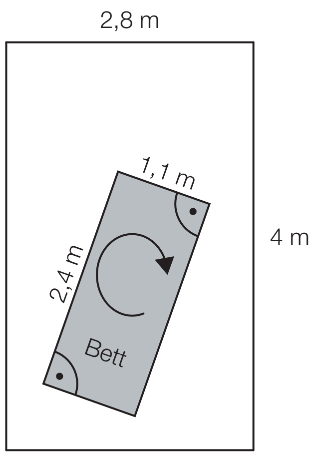
a) Katharina und Georg arbeiten als Pflegekräfte in einem Heim. Sie bekommen das gleiche monatliche Grundgehalt. Im Februar lag in diesem Heim ein besonderer Arbeitsbedarf vor. Georg leistete 14 Überstunden, Katharina leistete 46 Überstunden. Ihr jeweiliges Gesamtentgelt setzt sich aus dem Grundgehalt und der Abgeltung für die geleisteten Überstunden zusammen. Jede Überstunde wird dabei gleich abgegolten.

Das Gesamtentgelt von Georg betrug im Februar € 2.617, jenes von Katharina betrug € 3.433.

1) Ermitteln Sie das Grundgehalt und die Abgeltung für eine Überstunde.

b) Der Aufzug eines Pflegeheims hat eine rechteckige Grundfläche mit einer Länge von 4 m und einer Breite von 2,8 m. Ein Pflegebett fährt auf beweglichen Rollen und hat die Außenmaße 2,4 m × 1,1 m (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).

Aufzug-Innenraum von oben gesehen



1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Aufzug breit genug ist, damit das Bett – wie oben skizziert – um 180° gedreht werden kann.

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr durch mobile Dienste im Rahmen der Altenpflege in Oberösterreich sowie deren prozentuellen Anstieg jeweils im Vergleich zur Anzahl 2 Jahre davor.

Jahr	Anzahl der Hausbesuche pro Jahr	prozentueller Anstieg (gerundet)
1994	498 086	
1996	589 168	18,3 %
1998	802 146	36,1 %
2000	1 017 793	26,9 %
2002	1 176 665	15,6 %
2004	1 360 543	15,6 %

Der prozentuelle Anstieg der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr betrug sowohl von 2000 auf 2002 als auch von 2002 auf 2004 jeweils rund 15,6 %.

1) Erklären Sie in Worten, warum sich die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr von 2000 auf 2002 von jener von 2002 auf 2004 unterscheidet, obwohl die prozentuellen Anstiege in den jeweiligen Zeitintervallen gleich sind.
2) Interpretieren Sie das Ergebnis der Berechnung $\frac{1\,360\,543 - 498\,086}{2004 - 1994} \approx 86\,246$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a1) x ... Grundgehalt in €
y ... Abgeltung für eine Überstunde in €

$x + 14 \cdot y = 2617$
$x + 46 \cdot y = 3433$

$x = 2260$, $y = 25{,}50$

Das Grundgehalt beträgt € 2.260, die Abgeltung für eine Überstunde € 25,50.

b1) Länge der Diagonalen des Bettes d:
$d = \sqrt{1{,}1^2 + 2{,}4^2} = 2{,}640...$

Die Länge der Diagonalen beträgt rund 2,64 m. Da die Diagonale kürzer als die Liftbreite ist, kann das Bett im Lift um 180° gedreht werden.

c1) Die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr unterscheidet sich, da verschiedene Grundwerte für die Berechnung der prozentuellen Anstiege herangezogen werden.

c2) Die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr ist im Zeitintervall von 1994 bis 2004 durchschnittlich um rund 86246 pro Jahr gestiegen.

Quadratische Funktion*

Aufgabennummer: 2_037	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.5, FA 1.5, AN 3.2, AN 3.3	

Der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades schneidet die positive senkrechte Achse im Punkt $A = (0|y_A)$ und hat mit der positiven x-Achse den Punkt $B = (x_B|0)$ gemeinsam, wobei B ein Extrempunkt von f ist.
Die Funktion f ist von der Form $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie an, ob c größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Geben Sie an, ob b größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

b) Gegeben ist folgende Aussage: „Der Punkt B ist ein Schnittpunkt der Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f'." Geben Sie an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Es gibt für alle Werte von b genau eine Stelle x_t mit folgender Eigenschaft: An der Stelle x_t haben f und f' die gleiche Steigung. Geben Sie diese Stelle x_t in Abhängigkeit von b an!

c) Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen b und c bestehen muss, damit die Extremstelle x_B von f auch Nullstelle von f ist!

Geben Sie die Koeffizienten b und c der Funktion f in Abhängigkeit von x_B an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

a) $c > 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt $A = (0|y_A)$ liegt auf der positiven senkrechten Achse, daher ist $y_A = f(0) > 0$.
Da $c = f(0)$ ist, muss $c > 0$ sein.

oder:

Der Parameter c legt fest, in welchem Punkt der Graph von f die senkrechte Achse schneidet. Da dieser Schnittpunkt auf der positiven senkrechten Achse liegt, muss $c > 0$ gelten.

$b < 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt B ist ein Extrempunkt von f. Da B auf der positiven x-Achse liegt, muss seine x-Koordinate x_B positiv sein. Die Extremstelle $x_{\mathrm{E}} = x_B$ der Funktion f ergibt sich aus dem Ansatz: $f'(x_{\mathrm{E}}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{\mathrm{E}} = -2 \cdot b$.
Wegen $x_{\mathrm{E}} = -2 \cdot b > 0$ muss $b < 0$ gelten.

oder:

Da aus $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b$ folgt, dass $f'(0) = b$ ist, und da f für $(-\infty; x_{\mathrm{E}})$ mit $x_{\mathrm{E}} > 0$ streng monoton fallend ist, folgt $f'(0) < 0$ und somit gilt: $f'(0) = b < 0$.

oder:

Angenommen, es würde $b \geq 0$ gelten. Wegen $c > 0$ ergibt sich: $\frac{1}{4} \cdot x^2 + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit würde für alle $x > 0$ auch $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ gelten. Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass ein Berührpunkt mit der positiven x-Achse existiert. Folglich muss $b < 0$ gelten.

b) Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:
Da $B = (x_B|0)$ ein Extrempunkt von f ist, gilt $f'(x_B) = 0$. Weil auch $f(x_B) = 0$ ist, ist der Punkt B ein Schnittpunkt der Graphen von f und f'.

oder:

An einer Stelle, wo die Funktion f eine Extremstelle hat, weist f' eine Nullstelle auf. Da die Extremstelle von f im gegebenen Fall eine Nullstelle ist, haben f und f' die gleiche Nullstelle und somit im Punkt B einen Schnittpunkt.

Mögliche Vorgehensweise:
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad$ Die Steigung der Ableitungsfunktion f' ist $\frac{1}{2}$.

$f'(x_t) = \frac{1}{2} \cdot x_t + b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_t = 1 - 2 \cdot b$

c) Mögliche Vorgehensweise:
Wenn die Extremstelle von f auch Nullstelle von f ist, hat die Gleichung
$\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ genau eine Lösung.
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot c}}{0{,}5} \quad \Rightarrow \quad c = b^2$

Mögliche Vorgehensweise:
$f'(x_B) = \frac{1}{2} \cdot x_B + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-x_B}{2}$
Aus $c = b^2$ folgt: $c = \frac{x_B^2}{4}$.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe von $c > 0$ und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die Angabe von $b < 0$ und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage wahr ist, und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen b und c. Andere korrekte Zusammenhänge sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die korrekte Angabe der Koeffizienten b und c in Abhängigkeit von x_B.

Kettenlinie

Aufgabennummer: 2_030	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.7, FA 3.2	

Hängt man ein Seil (oder beispielsweise eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden.
Der Wert der Konstanten a hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.
Der vertikale Abstand zwischen dem tiefsten Punkt des Seils und seinen Aufhängepunkten wird als Durchhang bezeichnet.
Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion f der obigen Form mit $a = 4$ beschrieben werden (x und $f(x)$ in Metern). Die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Höhe und ihr Abstand beträgt $d = 6$ m.

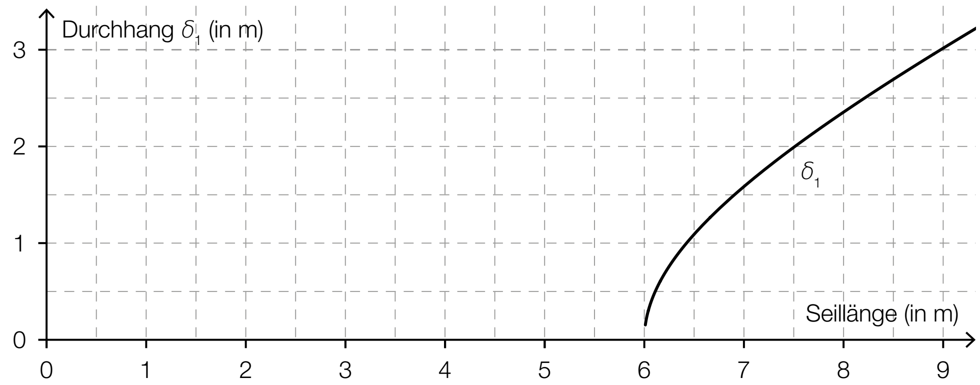
Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Stelle mit dem maximalen Durchhang des durch f beschriebenen Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Stelle!

Geben Sie eine Funktionsgleichung f_1 an, mit der ein Seil modelliert werden kann, welches an jeweils 1 m tieferen Aufhängepunkten montiert ist und denselben Durchhang wie das durch f beschriebene Seil aufweist!

b) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Durchhang δ des durch f modellierten Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Durchhang!

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion δ_1, der die Abhängigkeit des Durchhangs von der Länge des Seils zwischen den Aufhängepunkten P_1 und P_2 beschreibt.



Geben Sie mithilfe der oben dargestellten Abbildung die Länge des in der Einleitung beschriebenen Seils an! Ermitteln Sie weiters, um wie viele Meter der Durchhang zunimmt, wenn das Seil durch ein zwei Meter längeres Seil (gleicher Beschaffenheit) ersetzt wird, das an denselben Aufhängepunkten montiert ist!

c) Der Graph der Funktion f kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion g mit $g(x) = b \cdot x^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ angenähert werden. Der Graph von g verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f.

Geben Sie alle Gleichungen an, die für die Berechnung von b und c notwendig sind, und ermitteln Sie die Werte dieser Parameter!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der größte vertikale Abstand von f und g zwischen den beiden Aufhängepunkten berechnet werden kann!

d) Der Graph der Funktion f kann auch durch den Graphen einer Polynomfunktion h vierten Grades angenähert werden. Für den Graphen von h gelten folgende Bedingungen:
Er verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f und hat in den beiden Aufhängepunkten dieselbe Steigung wie der Graph von f.

Drücken Sie alle gegebenen Bedingungen mithilfe von Gleichungen aus!

Ermitteln Sie anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von h!

Möglicher Lösungsweg

a) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

$f_1(x) = f(x) - 1 = \frac{4}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) - 1$

b) $\delta = f(3) - f(0)$
$\delta \approx 1{,}2$ m

Die Seillänge beträgt ca. 6,6 m.
$\delta_1(8{,}6) \approx 2{,}8 \;\Rightarrow$ Der Durchhang nimmt um ca. 1,6 m zu.

c) $g(0) = 4 = c$

$g(3) = f(3) \approx 5{,}18 = 9 \cdot b + 4 \;\Rightarrow\; b \approx 0{,}13$

größter vertikaler Abstand:
$(g(x) - f(x))' = 0$

d) $h(-3) = f(-3)$
$h(0) = f(0)$
$h(3) = f(3)$
$h'(-3) = f'(-3)$
$h'(3) = f'(3)$

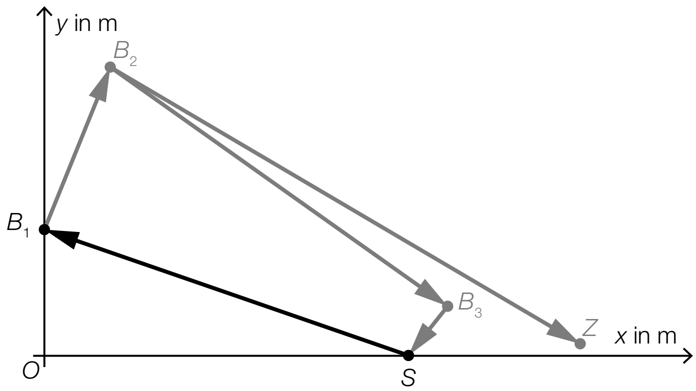
$h(x) \approx 0{,}0007 \cdot x^4 + 0{,}125 \cdot x^2 + 4$

Triathlon

Triathlon ist ein Bewerb, bei dem die Sportlerinnen und Sportler einen Schwimmbewerb, einen Radbewerb und einen Laufbewerb in genau dieser Reihenfolge absolvieren.

Aufgabenstellung:

a) Der Verlauf der Schwimmstrecke eines bestimmten Triathlons ist in der nachstehenden Abbildung modellhaft dargestellt. Der Schwimmbewerb startet im Punkt S und endet im Punkt Z, dazwischen müssen die Kontrollpunkte B_1, B_2, B_3, S, B_1 und B_2 in genau dieser Reihenfolge erreicht werden.



Die Entfernung vom Punkt $S = (600|0)$ zum Punkt B_1 beträgt 700 m.

1) Berechnen Sie die y-Koordinate von B_1.

$B_1 = (0|\boxed{})$ *[0/1 P.]*

b) Beim Radbewerb eines bestimmten Triathlons startet Stefanie 1,45 min vor Tanja.

t ... Zeit in min
$t = 0$ ... Zeitpunkt, zu dem Stefanie startet
$v_{\text{Stefanie}}(t)$ ... Geschwindigkeit von Stefanie zum Zeitpunkt t in km/min
$v_{\text{Tanja}}(t)$ ... Geschwindigkeit von Tanja zum Zeitpunkt t in km/min

Stefanie erreicht das Ziel des Radbewerbs nach einer Fahrzeit von 291 min. Zu dieser Zeit ist Tanja noch auf der Radstrecke.

1) Interpretieren Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet werden kann.

$\int_0^{291} v_{\text{Stefanie}}(t)\,\mathrm{d}t - \int_{1,45}^{291} v_{\text{Tanja}}(t)\,\mathrm{d}t$ *[0/1 P.]*

c) Michael nimmt an einem bestimmten Triathlon teil.

Michael startet in den abschließenden 42,195 km langen Laufbewerb mit einer bisherigen Gesamtzeit von 5 h 12 min 38 s.

Michael beendet den Triathlon mit einer Gesamtzeit von 7 h 36 min 56 s.

1) Berechnen Sie Michaels Durchschnittsgeschwindigkeit im Laufbewerb in km/h. *[0/1 P.]*

d) Der wohl bekannteste Triathlon-Bewerb ist die *Ironman World Championship* in Hawaii.

Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = 0{,}1275 \cdot t^3 - 8{,}525 \cdot t^2 + 198{,}425 \cdot t + 15$ beschreibt in Abhängigkeit von der Zeit t für den Zeitraum von 1978 bis 2018 modellhaft die Anzahl der Personen, die an diesem Bewerb teilnehmen (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1978).
Quelle: https://www.tri226.de/ironman-ergebnisse.php?language=ge&table=start_finish [09.08.2022].

Die Anzahl der Personen, die an diesem Bewerb teilnehmen, ist im Zeitraum von 1978 bis 2018 im Mittel um n Personen pro Jahr gestiegen.

1) Berechnen Sie n. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $B_1 = (0|360{,}5...)$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der y-Koordinate von B_1.

b1) Es wird die verbliebene Wegstrecke von Tanja bis zum Ziel (des Radbewerbs) in km berechnet.

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

c1) Zeitdifferenz: 2 h 24 min 18 s = 2,405 h

$\frac{42{,}195}{2{,}405} = 17{,}54...$

Michaels Durchschnittsgeschwindigkeit im Laufbewerb beträgt rund 17,5 km/h.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Durchschnittsgeschwindigkeit.

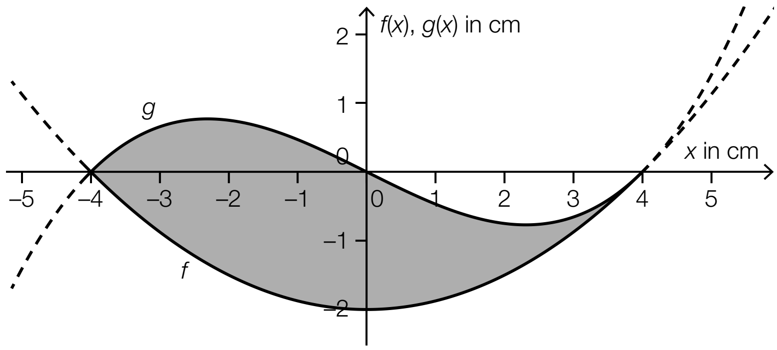
d1) $n = \frac{f(40) - f(0)}{40} = 61{,}425$

d1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n.

Firmenlogos

Aufgabenstellung:

a) In der nachstehenden Abbildung ist ein Firmenlogo grau markiert dargestellt.



Die untere Begrenzungslinie wird durch einen Teil des Graphen der Funktion f beschrieben:
$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 - 2$

Die obere Begrenzungslinie wird durch einen Teil des Graphen der Funktion g beschrieben:
$g(x) = a \cdot (x^3 - 16 \cdot x)$ mit $a \in \mathbb{R}$

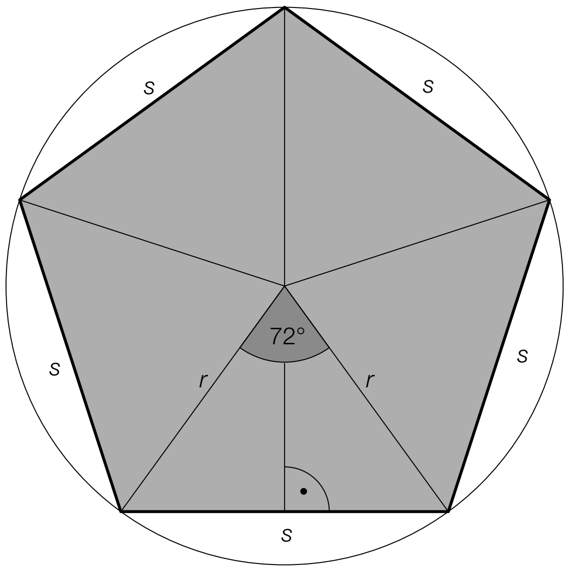
An der Stelle $x = 4$ haben f und g die gleiche Steigung.

1) Berechnen Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

Der Punkt $(0|0)$ ist ein Wendepunkt des Graphen von g.

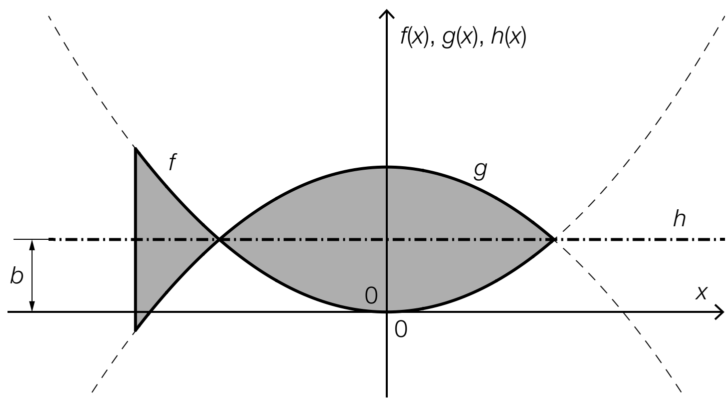
2) Begründen Sie, warum der Graph der Funktion g keinen weiteren Wendepunkt haben kann. *[0/1 P.]*

b) Das Logo eines Autoherstellers hat die Form eines regelmäßigen Fünfecks (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).



1) Berechnen Sie für $r = 3$ cm den Umfang u dieses regelmäßigen Fünfecks. *[0/1 P.]*

c) Im nachstehenden Koordinatensystem ist das Logo eines Fischrestaurants grau markiert dargestellt.



Das Logo ist symmetrisch bezüglich des Graphen der konstanten Funktion h mit $h(x) = b$ mit $b \in \mathbb{R}^+$. Die Begrenzungslinien des Logos sind Teile der Graphen der Funktionen f und g (siehe obige Abbildung).

Für die Funktion f gilt:

$f(x) = a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$

1) Stellen Sie unter Verwendung von a und b eine Funktionsgleichung von g auf. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $f'(x) = \frac{x}{4}$
$f'(4) = 1$
$g'(x) = a \cdot (3 \cdot x^2 - 16)$
$g'(4) = 32 \cdot a$
$32 \cdot a = 1$
$a = \frac{1}{32}$

a2) Die Funktion g ist eine Polynomfunktion 3. Grades.

oder:

Die Funktion g'' ist linear und hat nur 1 Nullstelle.
(Die Funktion g kann also nur 1 Wendepunkt haben.)

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von a.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) $u = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin(36°) = 17{,}63...$

$u = 17{,}6$ cm

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Umfangs u.

c1) $g(x) = -a \cdot x^2 + 2 \cdot b$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von g.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gewitter

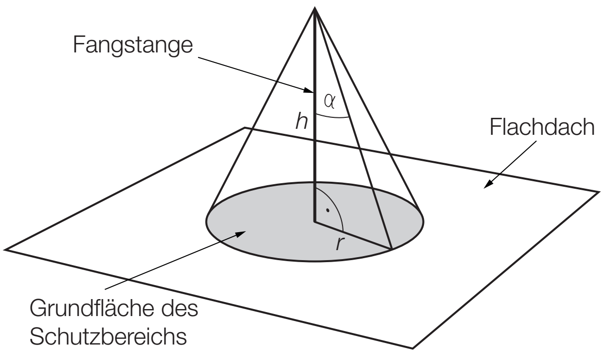
Aufgabennummer: 2_065	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AN 4.3, WS 2.3	

a) In drei verschiedenen Städten – *A*, *B* und *C* – werden am Nachmittag laut Wetterprognose unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten Gewitter auftreten:

Stadt	*A*	*B*	*C*
Wahrscheinlichkeit für ein Gewitter	50 %	80 %	80 %

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftreten wird.

b) Um Gebäude vor Blitzeinschlägen zu schützen, werden Blitzableiter verwendet. Dabei wird eine Metallstange, die sogenannte *Fangstange*, auf dem Gebäude senkrecht montiert. Der höchste Punkt einer solchen Fangstange kann als Spitze eines drehkegelförmigen Schutzbereichs angesehen werden. Alle Objekte, die sich vollständig innerhalb dieses Schutzbereichs befinden, sind vor direkten Blitzeinschlägen geschützt.



h … Höhe der Fangstange
α … Schutzwinkel
r … Radius der Grundfläche des Schutzbereichs

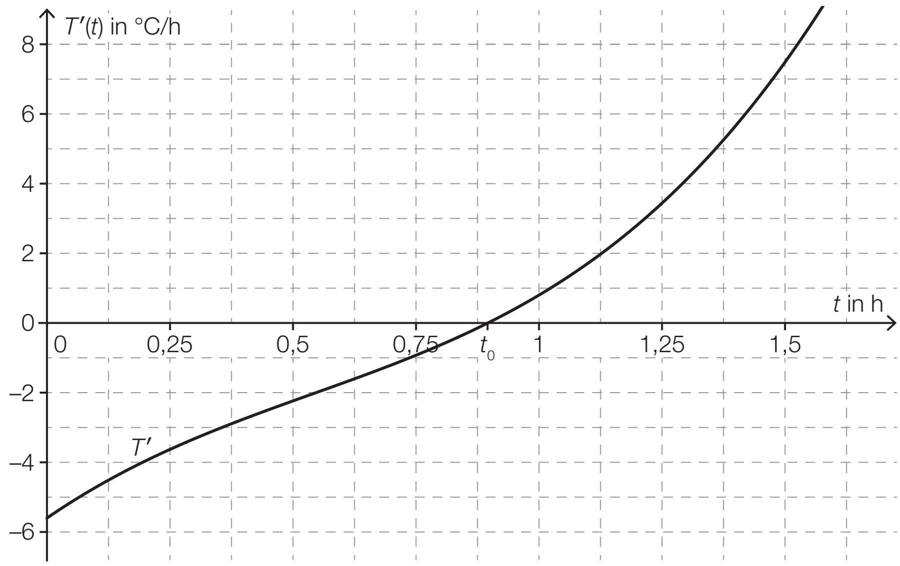
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Radius r aus α und h.

$r =$ ____

Auf einem Flachdach ist eine 2 m hohe Fangstange senkrecht montiert. 3 m vom Fußpunkt der Fangstange entfernt steht eine 1,2 m hohe Antenne senkrecht auf dem Flachdach. Der Schutzwinkel beträgt 77°.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich diese Antenne vollständig innerhalb des Schutzbereichs befindet.

c) Während eines Nachmittags, an dem es ein Gewitter gab, wurde die Veränderung der Temperatur ermittelt. Die Funktion T' beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



t … Zeit seit Beginn der Messung in h
$T'(t)$ … momentane Änderungsrate der Temperatur zur Zeit t in °C/h

Die absolute Temperaturänderung in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ kann durch das Integral $\int_{t_1}^{t_2} T'(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.

1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5].

Lösungserwartung

a1) $1 - 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}68$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftritt, beträgt 68 %.

b1) $r = h \cdot \tan(\alpha)$

b2) $\frac{3}{\tan(77°)} = 0{,}69...$

$2 - 0{,}69... = 1{,}30...$

In einer Entfernung von 3 m von der Fangstange hat der Schutzbereich eine Höhe von rund 1,3 m.
Die 1,2 m hohe Antenne befindet sich daher zur Gänze im Schutzbereich.

Auch eine Überprüfung mithilfe einer exakten Zeichnung ist als richtig zu werten.

c1) Die dem Integral $\int_{1,25}^{1,5} T'(t)\,dt$ entsprechende Fläche wird von rund 10,5 Kästchen mit einem Flächeninhalt von jeweils 0,125 überdeckt.
Gesamtflächeninhalt: $10{,}5 \cdot 0{,}125 \approx 1{,}3$

Die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5] beträgt rund 1,3 °C.
Toleranzintervall: [1,2 °C; 1,45 °C]

Kugelstoßen

Aufgabennummer: 2_070	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 2.1, FA 4.3	

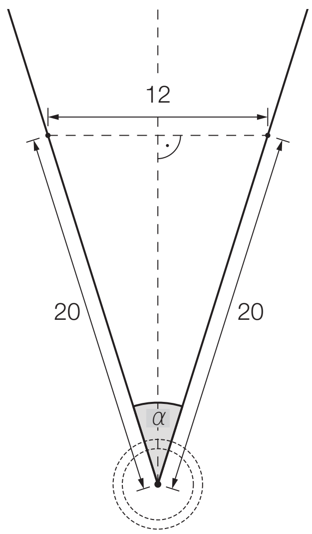
Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen.
Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden.

a) Im Jahr 1948 wurde bei den Männern ein neuer Weltrekord mit der Weite 17,68 m aufgestellt.

Eine Faustregel besagt, dass sich seit 1948 der Weltrekord bei den Männern alle 2,5 Jahre um 34 cm verbessert hat. Die Weltrekordweite (in Metern) soll gemäß dieser Faustregel in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) durch eine lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1948.

b) Der Aufschlagbereich ist in der nachstehenden Abbildung in der Ansicht von oben dargestellt (alle Angaben in Metern).



1) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung markierten Winkel α.

c) Die Bahnkurve einer gestoßenen Kugel lässt sich näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion h beschreiben:

$h(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung der Kugel von der Abstoßstelle in m
$h(x)$ ... Höhe der Kugel über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung von der Abstoßstelle die Kugel auf dem Boden aufschlägt.

d) Für die bei den Männern verwendeten Kugeln gelten folgende Vorgaben:

- Die Masse beträgt 7 257 g.
- Der Durchmesser der Kugel liegt zwischen 11 cm und 13 cm.

Eine Messing-Eisen-Legierung hat eine Dichte von 8,2 g/cm³.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ϱ, also $m = V \cdot \varrho$.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob man aus dieser Messing-Eisen-Legierung eine Kugel herstellen kann, die diese Vorgaben erfüllt.

Lösungserwartung

a1) Steigung k der linearen Funktion f: $k = \frac{0{,}34}{2{,}5} = 0{,}136$

$f(t) = 0{,}136 \cdot t + 17{,}68$

t ... Zeit in Jahren
$f(t)$ ... Weltrekordweite zur Zeit t in m

b1) $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{6}{20}\right) = 34{,}915...° \approx 34{,}92°$

c1) $h(x) = 0$

oder:

$-0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2 = 0$

$x_1 = 17{,}310...$
$(x_2 = -2{,}310...)$
Die Kugel schlägt in einer horizontalen Entfernung von rund 17,31 m auf dem Boden auf.

d1) $7\,257 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot 8{,}2$

$r = \sqrt[3]{\frac{7\,257 \cdot 3}{8{,}2 \cdot 4 \cdot \pi}} = 5{,}95...$

$d = 2 \cdot r = 11{,}91...$
Der Durchmesser einer derartigen Kugel beträgt rund 11,9 cm und liegt im angegebenen Bereich.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Standseilbahnen

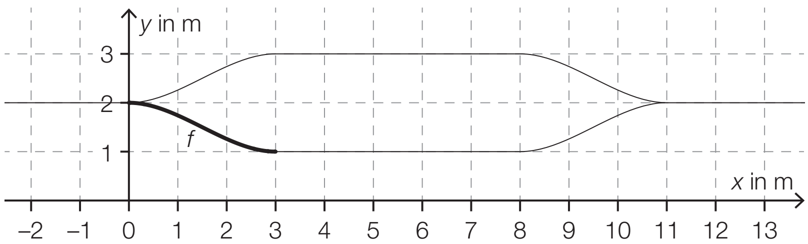
Aufgabennummer: 2_080	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 1.8, FA 4.3	

Die Wägen von Standseilbahnen fahren auf Schienen und können große Steigungen bewältigen.

a) Eine bestimmte Standseilbahn hat eine konstante Steigung von 40 %.

1) Berechnen Sie, welchen Höhenunterschied ein Wagen dieser Bahn überwindet, wenn er von der Talstation bis zur Bergstation eine Fahrstrecke von 180 m zurücklegt.

b) Bei den meisten Standseilbahnen gibt es in der Mitte der Strecke eine Ausweichstelle, bei der der talwärts fahrende Wagen dem bergwärts fahrenden Wagen ausweichen kann.
In der nachstehenden Abbildung ist eine solche Ausweichstelle modellhaft dargestellt.



Der Funktionsgraph von *f* schließt an den Stellen 0 und 3 knickfrei an die eingezeichneten Geradenstücke an. „Knickfrei" bedeutet, dass die Funktionen an denjenigen Stellen, an denen ihre Graphen aneinander anschließen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Für die Funktion *f* gilt:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x, $f(x)$ … Koordinaten in m

Die Koeffizienten a, b, c und d können mithilfe eines linearen Gleichungssystems berechnet werden. Der Ansatz für zwei der benötigten Gleichungen lautet:

$27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{}$

$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{}$

1) Vervollständigen Sie mithilfe der obigen Abbildung die beiden Gleichungen, indem Sie jeweils die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen schreiben.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert des Koeffizienten d ab.

c) Der Umsatz des Weltmarktführers im Seilbahnbau betrug im Geschäftsjahr 2015/16 rund 834 Millionen Euro und lag somit um 5,04 % über dem Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15.

1) Berechnen Sie den Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 in Millionen Euro.

Lösungserwartung

a1) $\tan(\alpha) = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 21{,}801...°$
Höhenunterschied $h = 180 \cdot \sin(\alpha) = 66{,}850...$

Der Wagen überwindet einen Höhenunterschied von rund 66,85 m.

b1) $27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{1}$
$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{0}$

b2) $d = 2$

c1) $\frac{834}{1{,}0504} = 793{,}9...$

Der Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 betrug rund 794 Millionen Euro.
Die Angabe des Zusatzes „Millionen Euro" ist nicht erforderlich.

Baumhaus

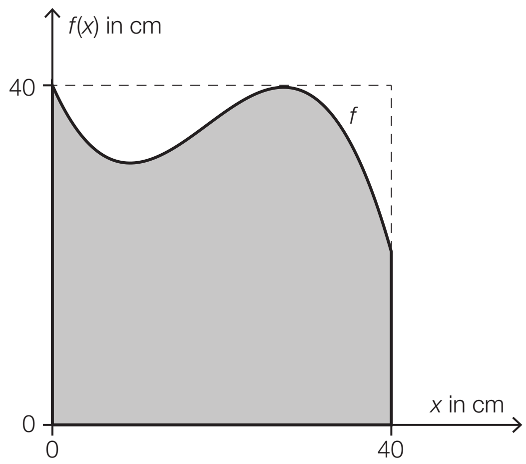
Aufgabennummer: 2_095	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.4, AN 4.2	

Eine Familie plant, ein Baumhaus aus Holz zu errichten. Der Baum dafür steht in einem horizontalen Teil des Gartens.

a) Eine 3,2 m lange Leiter wird angelehnt und reicht dann vom Boden genau bis zum Einstieg ins Baumhaus in einer Höhe von 2,8 m.

1) Berechnen Sie denjenigen Winkel, unter dem die Leiter gegenüber dem horizontalen Boden geneigt ist.

b) Die Fenster des Baumhauses sollen eine spezielle Form haben (siehe grau markierte Fläche in der nachstehenden Abbildung).



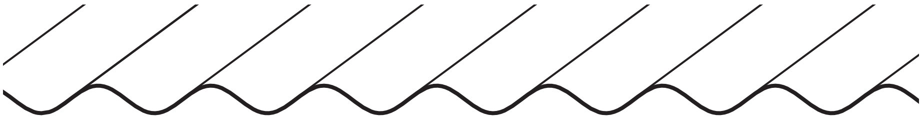
Die obere Begrenzungslinie des Fensters kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion *f* beschrieben werden.

$f(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}164 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 40$ mit $0 \leq x \leq 40$

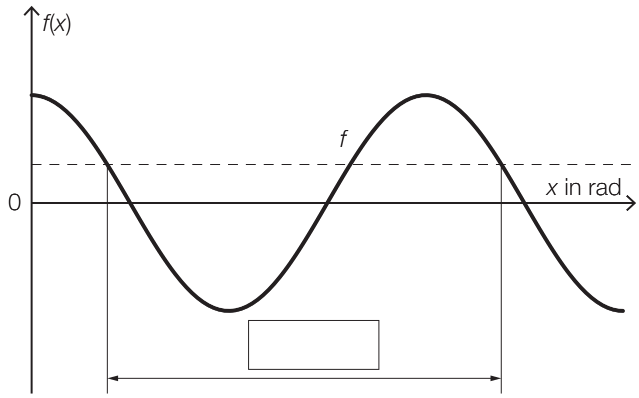
x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Fensterfläche in der dargestellten Form kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm ist.

c) Das Baumhaus wird mit gewellten Kunststoffplatten überdacht.

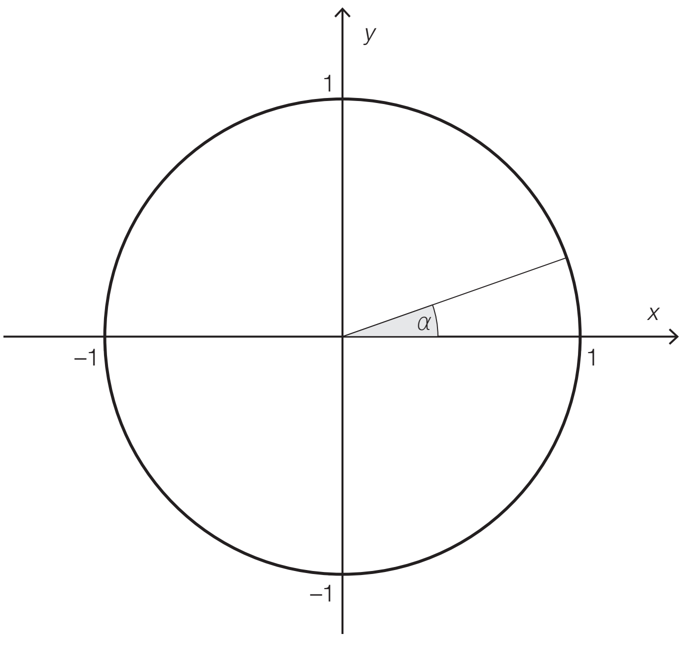


Dem Querschnitt liegt der Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ zugrunde. Dieser ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.



2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel β ein, für den gilt: $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$.

Lösungserwartung

a1) $\arcsin\left(\frac{2,8}{3,2}\right) = 61,0...°$

Der Winkel beträgt rund 61°.

b1) Flächeninhalt zwischen den Achsen und dem Graphen der Funktion in cm²:

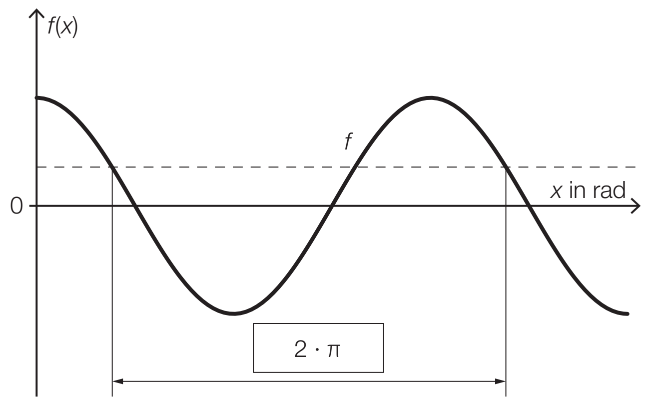
$\int_0^{40} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,378,66...$

Flächeninhalt des Quadrats in cm²: $A = 1\,600$

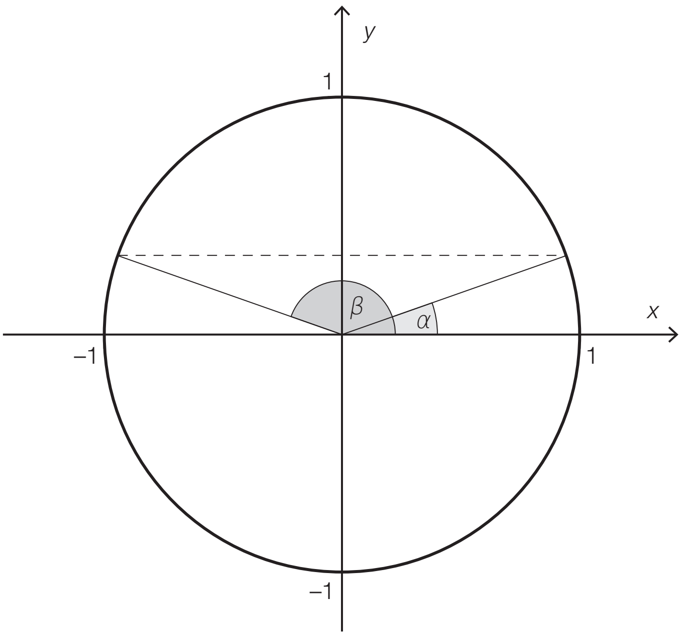
prozentueller Unterschied: $\frac{1\,378,66... - 1\,600}{1\,600} = -0,1383...$

Die Fensterfläche ist um rund 13,8 % kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm.

c1)



c2)



Körper mit rechteckigen Querschnittsflächen*

Aufgabennummer: 2_050	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, FA 2.1, FA 4.1, FA 4.3, AN 1.3, AN 4.3	

Die nachstehenden Abbildungen 1 und 2 stellen einen Körper mit ebenen Seitenflächen im Schrägriss bzw. eine Schnittfläche dar.

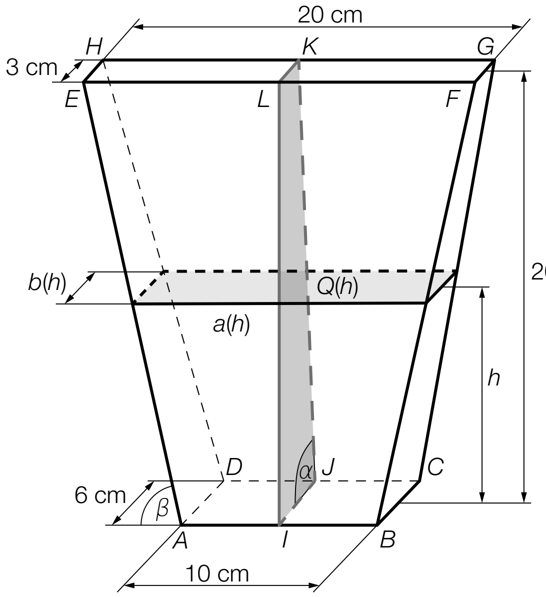


Abbildung 1: Schrägriss des Körpers

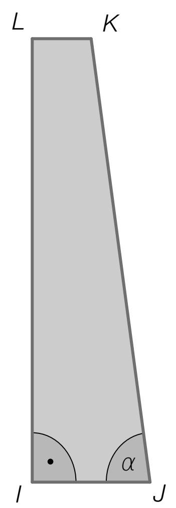


Abbildung 2: Schnittfläche *IJKL*

Die vordere Seitenfläche *ABFE* steht normal auf die horizontale Grundfläche *ABCD* und auf die horizontale Deckfläche *EFGH*, während die hintere Seitenfläche *DCGH* zur Grundfläche unter dem Winkel α ($0° < \alpha < 90°$) geneigt ist.

Die beiden Seitenflächen *ADHE* und *BCGF* weisen gegenüber der Grundfläche den gleichen Neigungswinkel β (mit $\beta \approx 76°$) auf.

Die horizontalen Querschnittsflächen des Körpers sind in jeder Höhe rechteckig. Die Längen $a(h)$ und die Breiten $b(h)$ dieser Rechtecke ändern sich linear in Abhängigkeit von der Höhe h. Die Grundfläche hat eine Länge von 10 cm und eine Breite von 6 cm, die Deckfläche hat eine Länge von 20 cm und eine Breite von 3 cm. Die Höhe des Körpers beträgt 20 cm.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Die Funktion Q: $[0; 20] \to \mathbb{R}$ beschreibt die Größe der Querschnittsfläche $Q(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h (mit $Q(h)$ in cm², h in cm).

Es gilt: $Q(h) = s \cdot h^2 + 1{,}5 \cdot h + t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Werte von s und t!

Berechnen Sie das Volumen des Körpers und geben Sie das Ergebnis inklusive Einheit an!

b) Die lokale Änderungsrate der Breite $b(h)$ nimmt für jedes $h \in [0; 20]$ einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ an.

Berechnen Sie c!

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen c und α mithilfe einer Gleichung!

c) Die Funktion a beschreibt die Länge $a(h)$ in der Höhe h mit $a(h)$ und h in cm.

Geben Sie eine Funktionsgleichung von a an!

Ändert man den Winkel β auf 45° und lässt die Länge der Grundlinie AB und die Körperhöhe unverändert, so erhält man eine neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1, bei der die Funktion a_1 mit $a_1(h) = 2 \cdot h + 10$ die Länge $a_1(h)$ in der Höhe h beschreibt ($a_1(h)$ und h in cm).

Geben Sie das Verhältnis $\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h : \int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h$ an und interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1 und die ursprüngliche vordere Seitenfläche $ABFE$!

Lösungserwartung

a) mögliche Vorgehensweise:

$Q(0) = 60 \quad \Rightarrow \quad t = 60$

$Q(20) = 60 \quad \Rightarrow \quad 60 = 400 \cdot s + 90 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{3}{40}$

$V = \int_0^{20} Q(h)\,\mathrm{d}h = -\frac{1}{40} \cdot 20^3 + 0{,}75 \cdot 20^2 + 60 \cdot 20 = 1\,300\text{ cm}^3$

b) $c = \frac{3-6}{20} = -\frac{3}{20}$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{c}$

c) mögliche Vorgehensweise:

$a(h) = \frac{a(20) - a(0)}{20} \cdot h + a(0)$

$a(h) = \frac{1}{2} \cdot h + 10$

mögliche Vorgehensweise:

$\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^{20} (2 \cdot h + 10)\,\mathrm{d}h = 600$

$\int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^{20} \left(\frac{1}{2} \cdot h + 10\right)\mathrm{d}h = 300$

$\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h : \int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h = 600 : 300 = 2 : 1$

Das Verhältnis des Flächeninhalts der neuen Seitenwand ABF_1E_1 zum Flächeninhalt der ursprünglichen Seitenwand $ABFE$ ist 2 : 1.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für s: [–0,08; –0,07]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung unter Angabe einer richtigen Einheit.
Toleranzintervall: [1 280 cm^3; 1 320 cm^3]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [–0,2; –0,1]
– Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Interpretation.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Überlagerung von Schwingungen*

Aufgabennummer: 2_038	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.1, FA 6.2, FA 6.3, FA 6.4, AN 4.2	

Ein Ton in der Musik kann im einfachsten Fall durch eine Sinusfunktion s mit $s(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Bei einer derartigen Sinusschwingung wird der maximale Funktionswert als Amplitude bezeichnet. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde wird als Frequenz f bezeichnet und in Hertz (Hz) angegeben.
Für die Frequenz f gilt: $f = \frac{1}{T}$ (mit T in Sekunden), wobei T die (kleinste) Periodenlänge der jeweiligen Sinusschwingung ist ($T \in \mathbb{R}^+$).

Drei bestimmte Töne werden mithilfe der nachstehenden Funktionen h_1, h_2 und h_3 beschrieben.
Die Zeit t ($t \geq 0$) wird dabei in Millisekunden (ms) gemessen.

$h_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$
$h_2(t) = \sin(2{,}5 \cdot \pi \cdot t)$
$h_3(t) = \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$

Die Überlagerung mehrerer Töne bezeichnet man als Klang.
Die Funktion h mit $h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$ beschreibt einen Klang.

Der Schalldruck eines Tons ist zeitabhängig und kann durch die Funktion p mit $p(t) = \overline{p} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschrieben werden. Dabei sind $\overline{p}$ und ω Konstanten.
Der Schalldruck wird in der Einheit Pascal (Pa) angegeben.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie für einen Ton, der mithilfe der Funktion g mit $g(t) = \sin(c \cdot \pi \cdot t)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und t in ms beschrieben wird, eine Formel für die Periodenlänge T (in ms) in Abhängigkeit von c an!

Der Effektivwert p_{eff} des Schalldrucks einer Sinusschwingung mit der Periodenlänge T (in ms) kann mit der Formel $p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t)\,\mathrm{d}t}$ berechnet werden.

Berechnen Sie den Effektivwert des Schalldrucks eines Tons, wenn $\overline{p} = 1$ und $\omega = 2 \cdot \pi$ gilt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

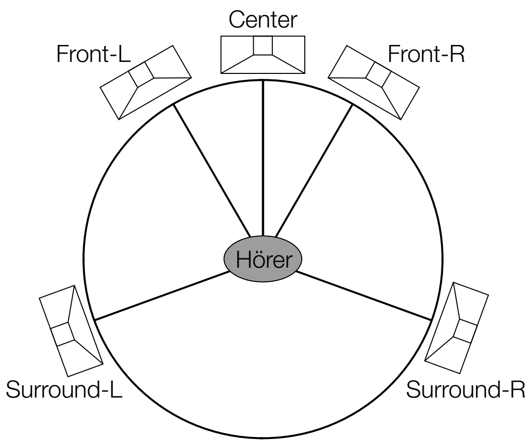
b) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die (kleinste) Periodenlänge T (in ms) der Funktion h an!

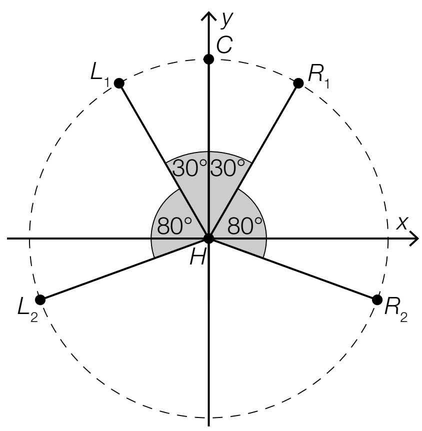
Geben Sie die Frequenz f der Funktion h in Hertz an!

c) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die Amplitude der Funktion h und denjenigen Zeitpunkt $t \geq 0$ (in ms) an, zu dem die Amplitude erstmals erreicht wird!

Begründen Sie, warum die Amplitude von h nicht gleich der Summe der drei Amplituden der Funktionen h_1, h_2 und h_3 ist!

d) Für ein angenehmes Raumklangerlebnis (z. B. in einem Heimkino) ist es günstig, wenn die fünf Lautsprecher eines Fünf-Kanal-Tonsystems wie in nachstehender linker Skizze dargestellt angeordnet sind (Ansicht von oben). Vereinfacht kann die Anordnung wie in nachstehender rechter Skizze in einem kartesischen Koordinatensystem (Einheit in Metern) dargestellt werden:





Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/5.1 [23.04.2018] (adaptiert).

Jeder der fünf Lautsprecher (C, L_1, L_2, R_1, R_2) ist in diesem Fall 2 m vom Hörer (H) entfernt. Der Punkt H liegt im Koordinatenursprung.

Geben Sie die kartesischen Koordinaten von R_1 an!

Geben Sie die Entfernung zwischen L_2 und R_2 an!

Lösungserwartung

a) $T = \frac{2 \cdot \pi}{c \cdot \pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{c}$

Mögliche Vorgehensweise:

$T = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$

$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{1}\int_0^1 \sin^2(2\pi \cdot t)\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p_{\text{eff}} \approx 0{,}71 \text{ Pa}$

b) $T = 4$ ms

Frequenz von h: $\frac{1}{0{,}004} = 250$ Hz

c) Amplitude von h: ca. 2,9 nach ca. 0,2 ms

Mögliche Begründung:

Die Amplitude von h ist nicht gleich der Summe der Amplituden von h_1, h_2 und h_3, da die drei Funktionen ihre maximalen Funktionswerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreichen.

d) $R_1 = (1\,|\,\sqrt{3})$

Mögliche Vorgehensweise:

$x(R_1) = 2 \cdot \cos(60°) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$y(R_1) = 2 \cdot \sin(60°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Mögliche Vorgehensweise:

Entfernung zwischen L_2 und $R_2 = 2 \cdot x(R_2) = 2 \cdot 2 \cdot \cos(20°) \approx 3{,}76$ m

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Berechnung des richtigen Effektivwerts des Schalldrucks, wobei die Einheit „Pa" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,7 Pa; 0,71 Pa]

b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Periodenlänge von h, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,9 ms; 4,1 ms]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Amplitude und den richtigen Zeitpunkt, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervalle: [2,85; 2,95] bzw. [0,19 ms; 0,21 ms]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung.

d) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von R_1.
Toleranzintervall für die y-Koordinate: [1,7; 1,75]
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Lösung.
Toleranzintervall: [3,7 m; 3,8 m]