Name:	
Klasse:	

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

7. Mai 2024

Mathematik

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft enthält Teil-1-Aufgaben und Teil-2-Aufgaben (bestehend aus Teilaufgaben). Die Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar. Ihnen stehen *270 Minuten* an Arbeitszeit zur Verfügung.

Verwenden Sie für die Bearbeitung ausschließlich dieses Aufgabenheft und das Ihnen zur Verfügung gestellte Arbeitspapier. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Klasse in die dafür vorgesehenen Felder auf dem Deckblatt des Aufgabenhefts sowie Ihren Namen und die fortlaufende Seitenzahl auf jedes verwendete Blatt Arbeitspapier. Geben Sie bei der Beantwortung jeder Handlungsanweisung deren Bezeichnung (z. B.: 25a1) auf dem Arbeitspapier an.

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist.

Die Verwendung der vom zuständigen Regierungsmitglied für die Klausurarbeit freigegebenen Formelsammlung für die SRP in Mathematik ist erlaubt. Weiters ist die Verwendung von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Eine Erläuterung der Antwortformate liegt im Prüfungsraum zur Durchsicht auf.

Handreichung für die Bearbeitung

– Lösungen müssen jedenfalls eindeutig als solche erkennbar sein.
– Lösungen müssen jedenfalls mit zugehörigen Einheiten angegeben werden, wenn dazu in der Handlungsanweisung explizit aufgefordert wird.

Bei offenen Antwortformaten steht für die Punktevergabe der Nachweis der jeweiligen Grundkompetenz im Vordergrund. Für die Bearbeitung offener Antwortformate wird empfohlen:

– den Lösungsweg, auch im Fall von Technologieeinsatz, nachvollziehbar zu dokumentieren,
– selbst gewählte Variablen zu erklären und gegebenenfalls mit den zugehörigen Einheiten anzugeben,
– frühzeitiges Runden zu vermeiden,
– Diagramme oder Skizzen zu beschriften.

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■
6 + 6 = 10	☐

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalt und dann wieder gewählt.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐
6 + 6 = 10	☐

Beurteilungsschlüssel

erreichte Punkte	Note
32–36 Punkte	Sehr gut
27–31,5 Punkte	Gut
22–26,5 Punkte	Befriedigend
17–21,5 Punkte	Genügend
0–16,5 Punkte	Nicht genügend

Best-of-Wertung: Für die Aufgaben 26, 27 und 28 gilt eine Best-of-Wertung. Von diesen drei Teil-2-Aufgaben wird diejenige Aufgabe, bei der die niedrigste Punkteanzahl erreicht worden ist, nicht gewertet.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Vergleich zweier Mengen

Die Menge $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 8\}$ ist eine Teilmenge der natürlichen Zahlen und die Menge $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x < 8\}$ ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Beide Mengen A und B enthalten rationale Zahlen.	☐
Die Menge B ist eine Teilmenge der Menge A.	☐
Die zwei Mengen A und B enthalten gleich viele Zahlen.	☐
Die Menge A enthält genau 6 Zahlen, die auch in der Menge B enthalten sind.	☐
Beide Mengen A und B enthalten Zahlen, die größer als 7 sind.	☐

[0/1 P.]

Aufgabe 2

Äpfel und Marillen

Ein bestimmter Obsthändler verkauft Äpfel und Marillen.
Der Preis für 1 kg Äpfel beträgt a Euro, der Preis für 1 kg Marillen beträgt m Euro ($a, m \in \mathbb{R}^+$).

Es gilt:

- 1 kg Marillen kostet um 80 % mehr als 1 kg Äpfel.
- 1 kg Marillen kostet um 1,40 Euro mehr als 1 kg Äpfel.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Gleichungen an. *[2 aus 5]*

$a \cdot 0{,}8 = m$	☐
$a + 1{,}8 = m$	☐
$a = m - 1{,}4$	☐
$a = \frac{m}{1{,}4}$	☐
$\frac{m}{a} = 1{,}8$	☐

[0/1 P.]

Aufgabe 3

Gleichungssystem

Gegeben ist ein Gleichungssystem in x und y mit $a, c \in \mathbb{R}$.

I: $2 \cdot x - y = 3$
II: $a \cdot x + 2 \cdot y = c$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung.

Aufgabenstellung:

Geben Sie jeweils einen Wert von a und c an.

a = __________

c = __________

[0/1 P.]

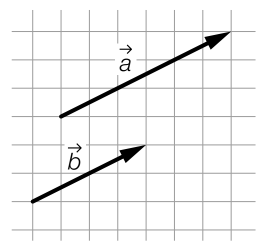
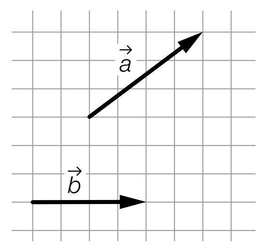
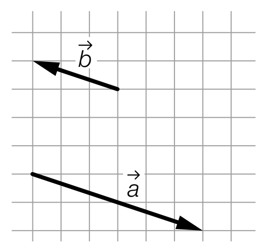
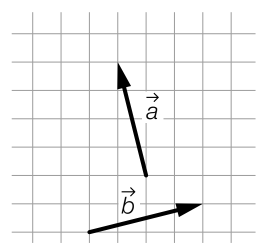
Aufgabe 4

Vektoren

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Abbildungen jeweils diejenige Aussage aus A bis F zu, die auf die dargestellten Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zutrifft.

	☐
	☐
	☐
	☐

A	$(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{b}$
B	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
C	$\vec{b} = \frac{3}{2} \cdot \vec{a}$
D	$\vec{a} = -2 \cdot \vec{b}$
E	$(\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{a}$
F	$\vec{b} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a}$

[0/½/1 P.]

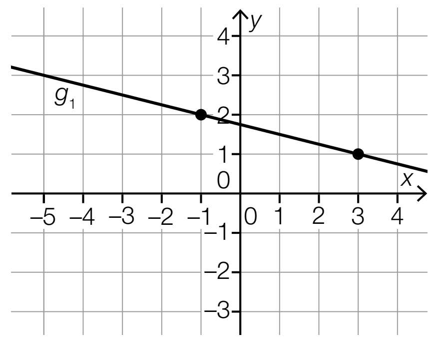
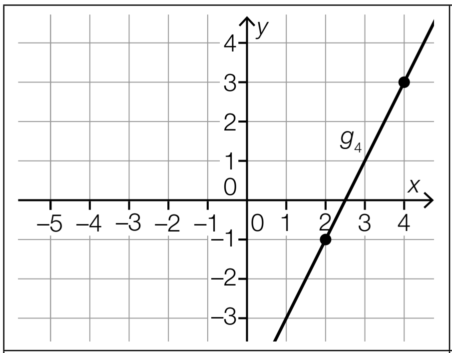
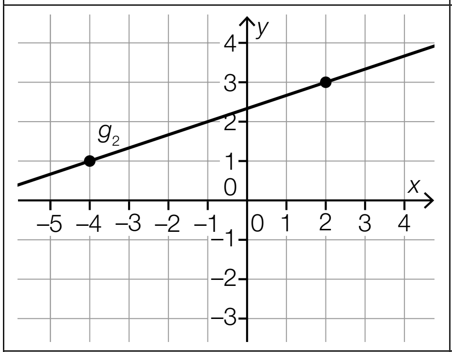
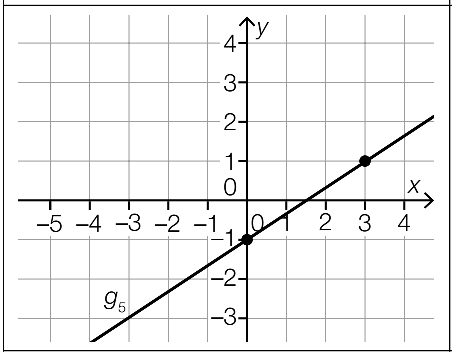
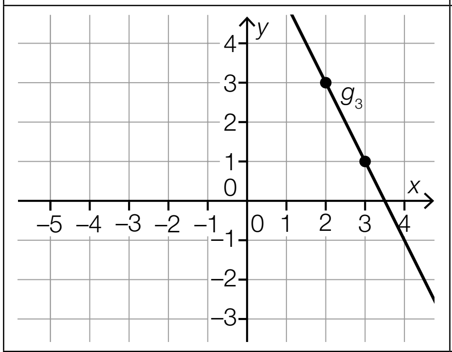
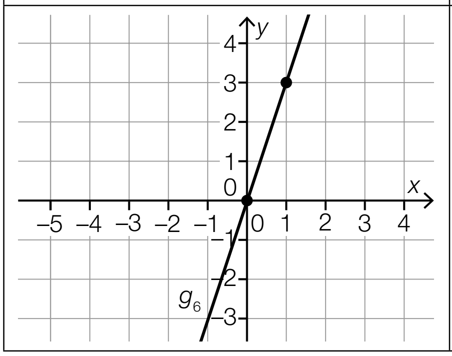
Aufgabe 5

Parameterdarstellung einer Geraden

Unten stehend sind die sechs Geraden $g_1, g_2, \ldots, g_6$ grafisch dargestellt. Die gekennzeichneten Punkte der Geraden haben ganzzahlige Koordinaten.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die Darstellung derjenigen Geraden an, die eine Parameterdarstellung der Form $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ hat. *[1 aus 6]*

	☐		☐
	☐		☐
	☐		☐

[0/1 P.]

Aufgabe 6

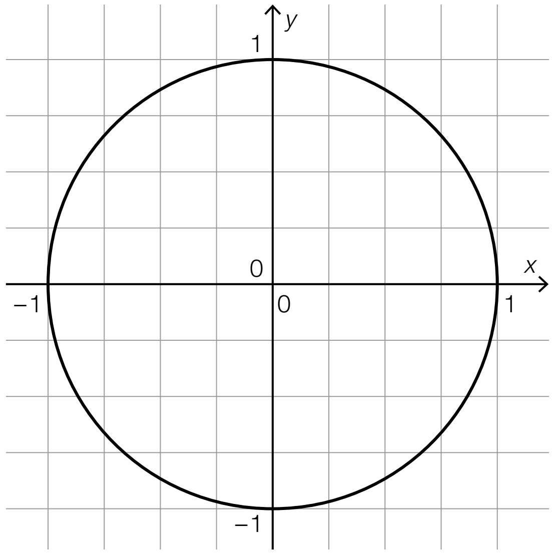
Einheitskreis

Für den Winkel $\alpha \in [0°; 360°)$ gilt:
$\sin(\alpha) = -0{,}5$ und $\cos(\alpha) < 0$

Im unten stehenden Koordinatensystem ist ein Einheitskreis dargestellt.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie in diesem Koordinatensystem den Punkt $P = (\cos(\alpha) | \sin(\alpha))$ ein.



[0/1 P.]

Aufgabe 7

Beschleunigung

Ein Körper bewegt sich im Zeitintervall [0; 5] geradlinig mit einer konstanten Beschleunigung und kommt zum Zeitpunkt $t = 5$ zum Stillstand.

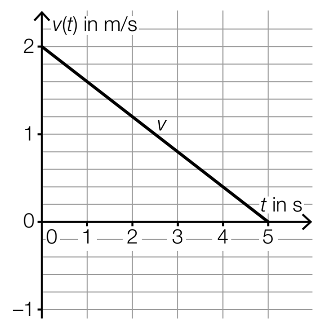
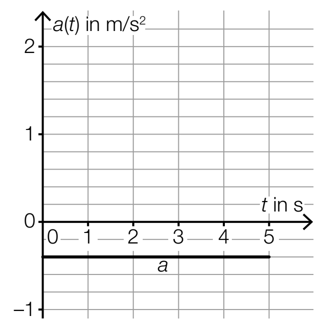
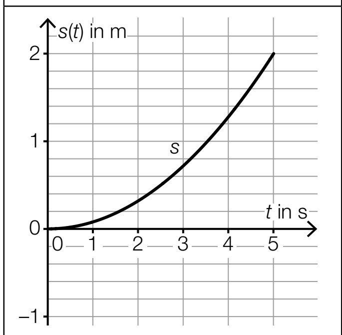
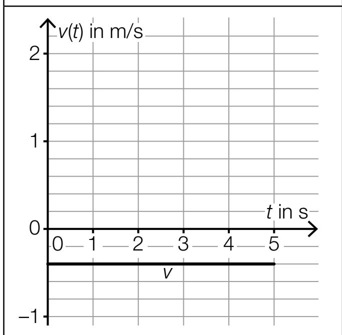
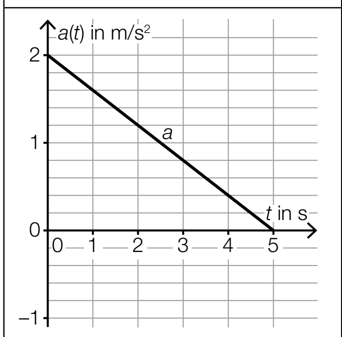
Für die Beschleunigung gilt: $a(t) = -0{,}4$

t ... Zeit in s
$a(t)$ ... Beschleunigung zum Zeitpunkt t in m/s²
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zum Zeitpunkt t in m

In zwei der unten stehenden Abbildungen wird die Bewegung des Körpers richtig dargestellt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Abbildungen an. *[2 aus 5]*

	☐
	☐
	☐
	☐
	☐

[0/1 P.]

Aufgabe 8

Rennrad

Im Handbuch zu einem Rennrad sind folgende Werte angegeben:

Anzahl der Kurbelumdrehungen pro Minute	Geschwindigkeit in km/h
60	28,8
85	40,8

Die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Kurbelumdrehungen kann durch die lineare Funktion v modelliert werden.

x ... Anzahl der Kurbelumdrehungen pro Minute
$v(x)$ ... Geschwindigkeit bei x Kurbelumdrehungen pro Minute in km/h

Aufgabenstellung:

Stellen Sie eine Gleichung von v auf.

$v(x) =$ ____

[0 / 1 P.]

Aufgabe 9

Potenzfunktion

Gegeben ist eine Potenzfunktion $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^z$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $z \in \mathbb{Z}$.

Es gilt:

- Verdoppelt man den Wert des Arguments x, so verringert sich der zugehörige Funktionswert auf ein Viertel des ursprünglichen Funktionswerts.
- Der Punkt $(2\,|\,2)$ liegt auf dem Graphen von f.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Werte von a und z an.

z = ___________

a = ___________

[0/1 P.]

Aufgabe 10

Befüllen eines Wasserbeckens

Ein leeres Wasserbecken wird vollständig mit Wasser befüllt.

Die Funktion $d\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ beschreibt die Dauer des Befüllens in Abhängigkeit von der Zuflussrate z (z in m³/h, $d(z)$ in h).

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen von d.

Aufgabenstellung:

Geben Sie das Volumen V des Wasserbeckens an.

$V =$ ____________________ m³

[0/1 P.]

Aufgabe 11

Halbwertszeit

Die Masse einer radioaktiven Substanz in Abhängigkeit von der Zeit t kann durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden. Dabei gilt:

$N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$

$N(t)$ ... vorhandene Masse der radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt t
N_0 ... vorhandene Masse der radioaktiven Substanz zum Zeitpunkt $t = 0$
$k \in \mathbb{R}^+$ ... Zerfallskonstante

Mit τ wird die Halbwertszeit der radioaktiven Substanz bezeichnet.
Mit t^* wird ein beliebiger Zeitpunkt bezeichnet.
Es gilt: $t^* \neq \tau$ und $t^* > 0$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie den zu $N(t^* + \tau)$ äquivalenten Ausdruck an. *[1 aus 6]*

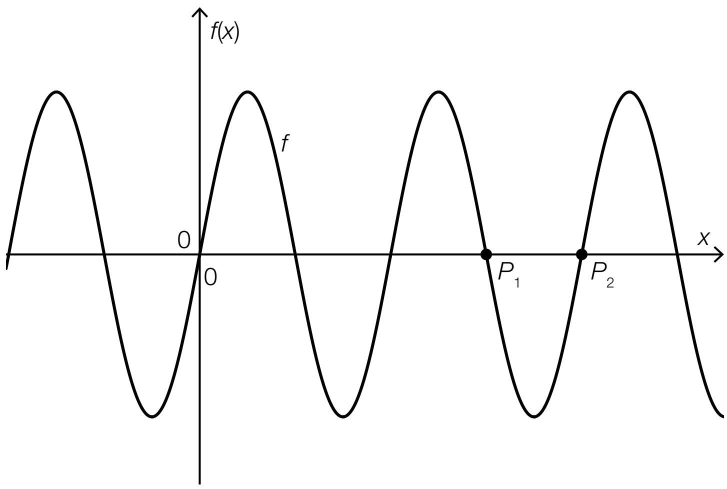
$2 \cdot N_0$	☐
$N(\tau)$	☐
$N\left(\frac{1}{2} \cdot t^*\right)$	☐
$2 \cdot N(\tau)$	☐
$N(2 \cdot t^*)$	☐
$\frac{1}{2} \cdot N(t^*)$	☐

[0/1 P.]

Aufgabe 12

Sinusfunktion

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$.



Die Punkte $P_1 = (x_1 | 0)$ und $P_2 = (x_2 | 0)$ mit $x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4}$ und $x_2 = \pi$ liegen auf dem Graphen von f.

Es gilt: $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = -3$

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie a und b.

a = ____________________

b = ____________________

[0/½/1 P.]

Aufgabe 13

CO_2-Emissionen

Die nachstehende Tabelle zeigt die Höhe der CO_2-Emissionen in Österreich für ausgewählte Jahre.

Jahr	1990	2005	2017	2018
CO_2-Emissionen in Millionen Tonnen	78,5	92,5	82,0	79,0

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Werte der nachstehend angegebenen Größen.

absolute Änderung der CO_2-Emissionen von 2017 auf 2018: _______________ Millionen Tonnen

relative Änderung der CO_2-Emissionen von 1990 auf 2005: _______________

[0/½/1 P.]

Aufgabe 14

Bewegung eines Radfahrers

Die Polynomfunktion s beschreibt näherungsweise den zurückgelegten Weg eines Radfahrers in Abhängigkeit von der Zeit t (t in h, $s(t)$ in km).

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Der Ausdruck $\lim\limits_{t \to 2} \frac{s'(t) - s'(2)}{t - 2}$ beschreibt ___①___ und der Ausdruck $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ beschreibt ___②___.

①	
die momentane Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 2$	☐
die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 2$	☐
den bis zum Zeitpunkt $t = 2$ zurückgelegten Weg	☐

②	
die durchschnittliche Beschleunigung im Zeitintervall $[t_1; t_2]$	☐
die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2]$	☐
den im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ zurückgelegten Weg	☐

[0/½/1 P.]

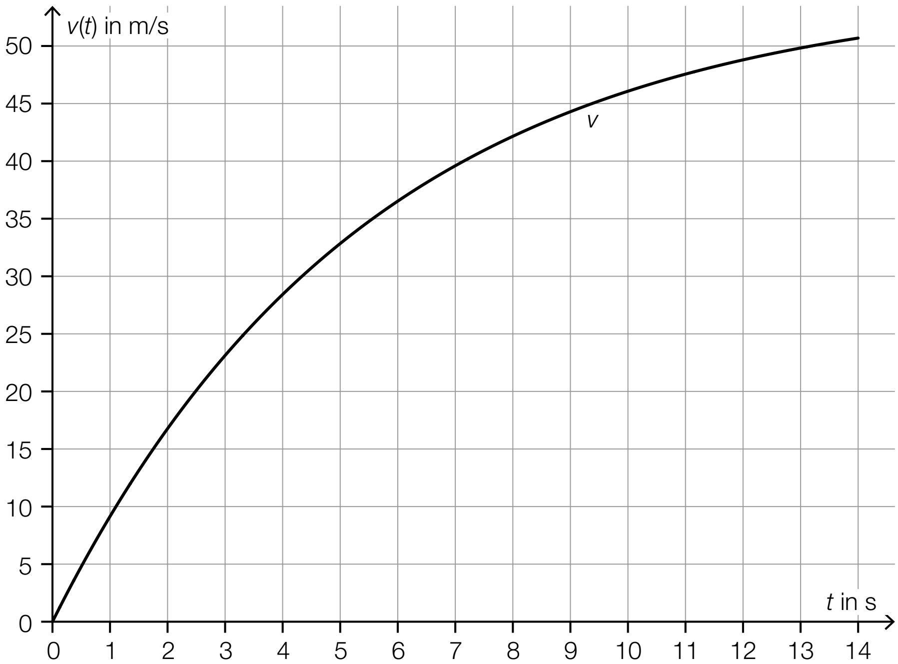
Aufgabe 15

Fallschirmsprung

Die Geschwindigkeit einer Fallschirmspringerin bei einem bestimmten Fallschirmsprung in Abhängigkeit von der Zeit t lässt sich für das Intervall [0; 14] durch die differenzierbare Funktion v modellieren (t in s, $v(t)$ in m/s). Die unten stehende Abbildung zeigt den Graphen von v.

Aufgabenstellung:

Kennzeichnen Sie in der Abbildung den Zeitpunkt t_1, zu dem die Beschleunigung der Fallschirmspringerin 5 m/s² beträgt.



[0 / 1 P.]

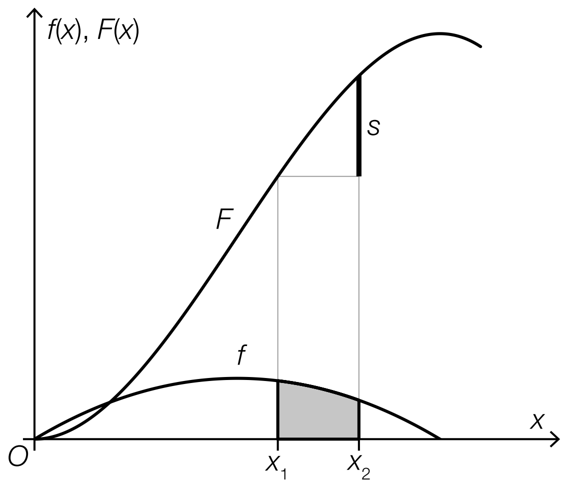
Aufgabe 16

Funktion und Stammfunktion

In der unten stehenden Abbildung sind der Graph der Funktion f und der Graph einer ihrer Stammfunktionen F dargestellt.

Im Intervall $[x_1; x_2]$ ist unter dem Graphen der Funktion f ein Flächenstück grau gekennzeichnet.

Unter dem Graphen von F ist die Strecke mit der Länge s gekennzeichnet.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Gleichung an, die den Zusammenhang zwischen s und dem Inhalt des grau gekennzeichneten Flächenstücks richtig beschreibt. *[1 aus 6]*

$s = F(x_1) - F(x_2)$	☐
$s = f(x_2) - f(x_1)$	☐
$s = \frac{F(x_1) + F(x_2)}{2}$	☐
$s = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$s = \int_{x_2}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$s = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x$	☐

[0/1 P.]

Aufgabe 17

Eigenschaften von quadratischen Funktionen

Gegeben sind zwei quadratische Funktionen f und h.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) = h'(x)$ und $f(x), h(x) > 0$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden auf jeden Fall zutreffenden Aussagen an. *[2 aus 5]*

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $h''(x) < 0$	☐
h' ist streng monoton fallend.	☐
Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) - h(x) = c$	☐
h' ist eine lineare Funktion, deren Graph durch den Punkt $(0\|0)$ verläuft.	☐
f' hat eine Nullstelle.	☐

[0/1 P.]

Aufgabe 18

Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen

In Abbildung 1 sind die Graphen der quadratischen Funktion f und der linearen Funktion g dargestellt.
In Abbildung 2 sind die Graphen der Funktionen F und G dargestellt.

Es gilt:
F ist eine Stammfunktion von f.
G ist eine Stammfunktion von g.

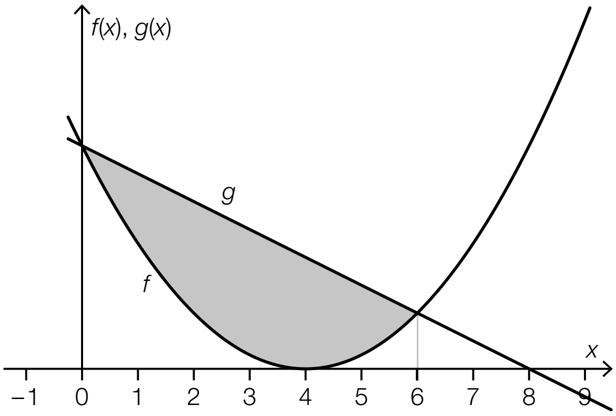


Abbildung 1

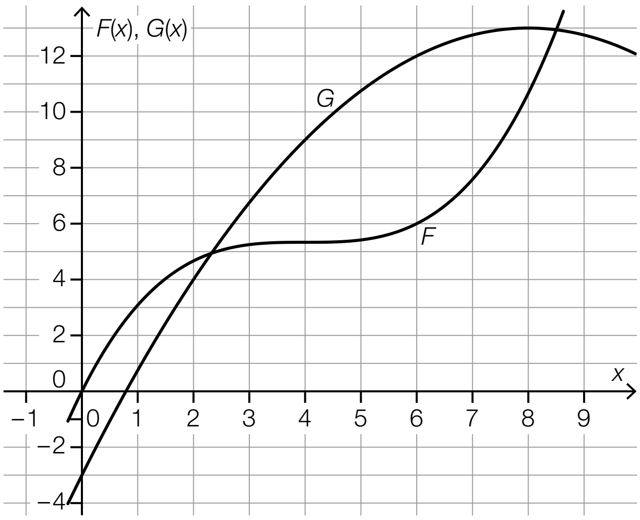


Abbildung 2

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie mithilfe der Abbildungen den Flächeninhalt A der grau markierten Fläche.

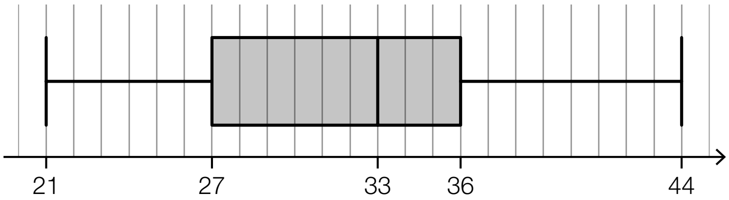
[0/1 P.]

Aufgabe 19

Vergleich zweier Diagramme

In den nachstehenden Abbildungen ist die Datenliste A in einem Stängel-Blatt-Diagramm und die Datenliste B als Boxplot dargestellt.

2	1	7	7	9
3	1	3	6	6
4	3			



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden statistischen Kennzahlen an, bei denen sich die Datenlisten A und B unterscheiden. *[2 aus 5]*

1. Quartil	☐
Spannweite	☐
3. Quartil	☐
Minimum	☐
Median	☐

[0/1 P.]

Aufgabe 20

Arithmetisches Mittel

Eine bestimmte Datenliste enthält 20 Werte und hat das arithmetische Mittel $\bar{x} = 15{,}5$.

Aus dieser Datenliste werden die Werte 4, 6, 13 und 27 entfernt. Die verbleibende Datenliste mit 16 Werten hat das arithmetische Mittel $\bar{x}_1$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}_1$.

[0/1 P.]

Aufgabe 21

Lösungszeiten für Sudoku

Bei einem Online-Sudoku werden 6 Spiele durchgeführt. In der nachstehenden Tabelle sind die Lösungszeiten der ersten 5 Spiele gegeben.

Spiel	Lösungszeit in s
1	356
2	321
3	378
4	450
5	298
6	t

Der Median aller 6 Lösungszeiten beträgt 350 s.

Aufgabenstellung:

Geben Sie t an.

t = ____________________ s

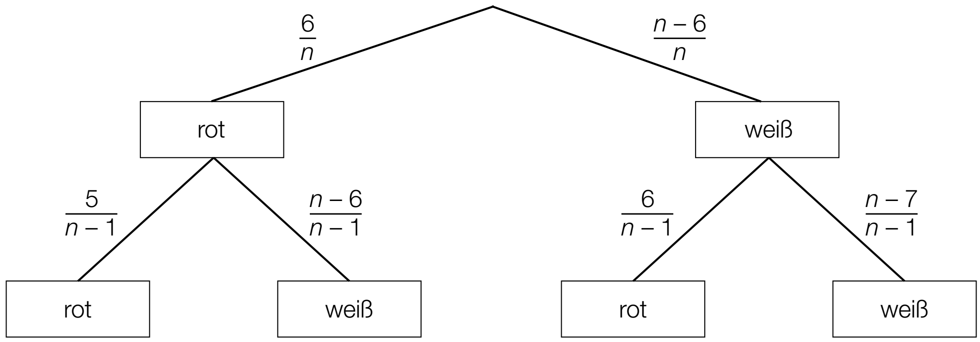
[0/1 P.]

Aufgabe 22

Ziehen von Kugeln

In einer Urne befinden sich n Kugeln. Von den n Kugeln sind 6 Kugeln rot, die restlichen Kugeln sind weiß. Aus dieser Urne werden nach dem Zufallsprinzip hintereinander 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind im nachstehenden Baumdiagramm dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln rot sind, beträgt p.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie unter Verwendung von n eine Gleichung zur Berechnung von p auf.

$p =$ ____________________

[0/1 P.]

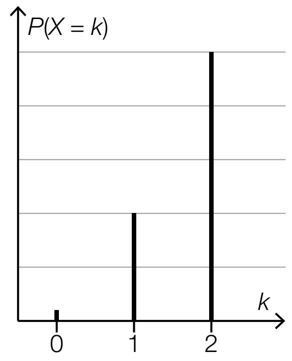
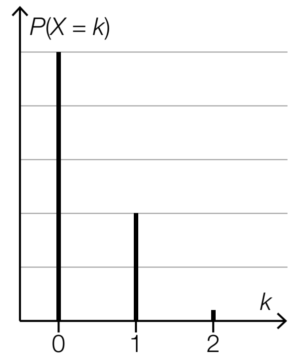
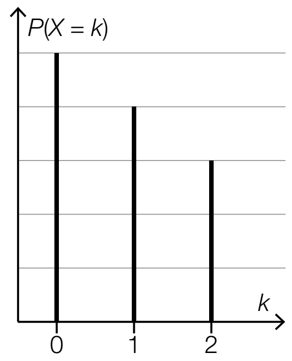
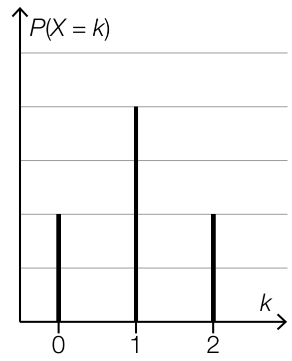
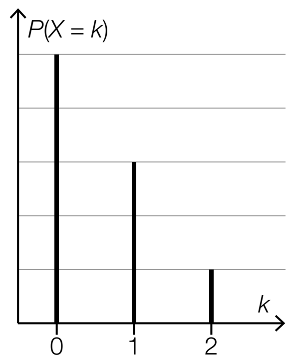
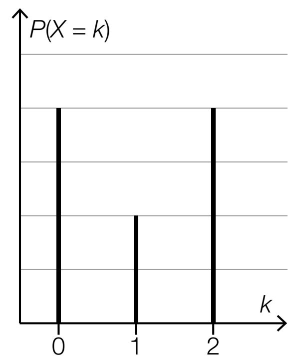
Aufgabe 23

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ein fairer 6-seitiger Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 wird 2-mal geworfen.
Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft bei diesen 2 Würfen die Augenzahl 6 auftritt.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X richtig darstellt.
[1 aus 6]

	☐		☐
	☐		☐
	☐		☐

[0/1 P.]

Aufgabe 24

Computerspiel

Ein bestimmtes Computerspiel besteht aus mehreren Spielrunden.
Bei einer Spielrunde gibt es jeweils 5 Fragen mit jeweils 4 Antwortmöglichkeiten, von denen immer nur 1 Antwortmöglichkeit richtig ist.
Eine Spielrunde gilt als gewonnen, wenn mehr als die Hälfte der Fragen richtig beantwortet wird.
Die 4 Antwortmöglichkeiten sind bei jeder Frage nach dem Zufallsprinzip angeordnet.

Gerhard wählt, ohne die Fragen zu lesen, bei einer bestimmten Spielrunde jedes Mal die erste Antwortmöglichkeit aus.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Gerhard diese Spielrunde gewinnt.

[0/1 P.]

Aufgabe 25 (Teil 2)

Bogenschießen

Auf dem Gelände einer bestimmten 3-D-Bogenschießanlage wird mit Pfeil und Bogen auf Figuren geschossen.

Aufgabenstellung:

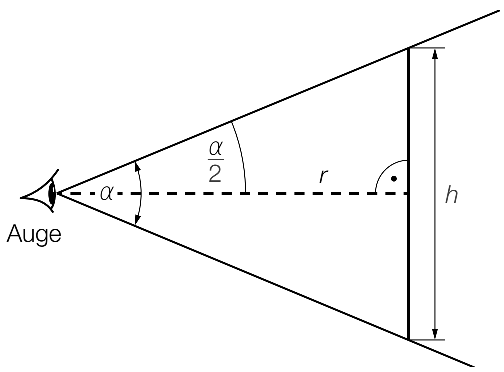
a) Paul schießt einen Pfeil auf eine Figur. Die Flugbahn der Pfeilspitze vom Start im Punkt S zum Ziel im Punkt Z kann durch die Gerade g modelliert werden.

Es gilt: $S = (0|0|1{,}8)$, $Z = (-5|7|8{,}5)$

1) Stellen Sie eine Gleichung von g in Parameterdarstellung auf.

g: $X =$ ____ *[0/1 P.]*

b) Lara sieht eine bestimmte Figur unter dem Sehwinkel α. In der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist der Zusammenhang zwischen dem Sehwinkel α, der Entfernung r und der Größe h dargestellt.



1) Stellen Sie unter Verwendung von α und r eine Formel zur Berechnung von h auf.

$h =$ ____ *[0/1 P.]*

c) Paul schießt beim Training auf die 3 Ziele A, B und C. Er trifft diese bei jedem Schuss unabhängig von jedem anderen Schuss mit den in der nachstehenden Tabelle angeführten Wahrscheinlichkeiten.

Ziel	A	B	C
Wahrscheinlichkeit	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{4}$

Paul schießt nacheinander jeweils 1-mal auf die 3 Ziele A, B und C.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Paul mindestens 1 dieser 3 Ziele trifft. *[0/1 P.]*

Paul schießt 10-mal auf das Ziel A. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt dabei die Anzahl der Treffer an.

2) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$. *[0/1 P.]*

Aufgabe 26 (Teil 2, Best-of-Wertung)

Bungee-Jumping

Bungee-Jumping ist eine Extremsportart, bei der man von einer Absprungplattform in großer Höhe an einem elastischen Seil befestigt in die Tiefe springt.

Aufgabenstellung:

a) Sabine unternimmt einen Bungeesprung. Dabei schwingt sie am Seil mehrmals auf und ab.

Ihre Höhe über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t wird modellhaft durch die Funktion $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ beschrieben.

$$h(t) = a \cdot \left(e^{-0{,}03 \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + 1\right)$$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$h(t)$ ... Höhe über dem Boden zum Zeitpunkt t in m
a ... positiver Parameter

Zum Zeitpunkt $t = 0$ springt Sabine von der Absprungplattform in 90 m Höhe über dem Boden in die Tiefe.

1) Berechnen Sie den Parameter a. *[0/1 P.]*

Die gesamte Zeitdauer, in der sich Sabine während des Bungeesprungs in einer Höhe von mehr als 70 m über dem Boden befindet, wird mit d bezeichnet.

2) Ermitteln Sie d in Sekunden. *[0/1 P.]*

Nach Erreichen des tiefsten Punktes wird Sabine vom Seil wieder nach oben gezogen, bevor sie erneut fällt.

3) Berechnen Sie, wie viele Meter Sabine dabei nach oben gezogen wird. *[0/1 P.]*

Zum Zeitpunkt t_1 ist Sabines (vertikale) Fallgeschwindigkeit maximal.

4) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht. *[0/½/1 P.]*

Für den Zeitpunkt t_1 gilt ______①______;
die Fallgeschwindigkeit kann mit ______②______ berechnet werden.

①	
$h''(t_1) > 0$	☐
$h''(t_1) < 0$	☐
$h''(t_1) = 0$	☐

②	
$h(t_1)$	☐
$\lvert h'(t_1) \rvert$	☐
$\int_0^{t_1} h(t)\,\mathrm{d}t$	☐

Aufgabe 27 (Teil 2, Best-of-Wertung)

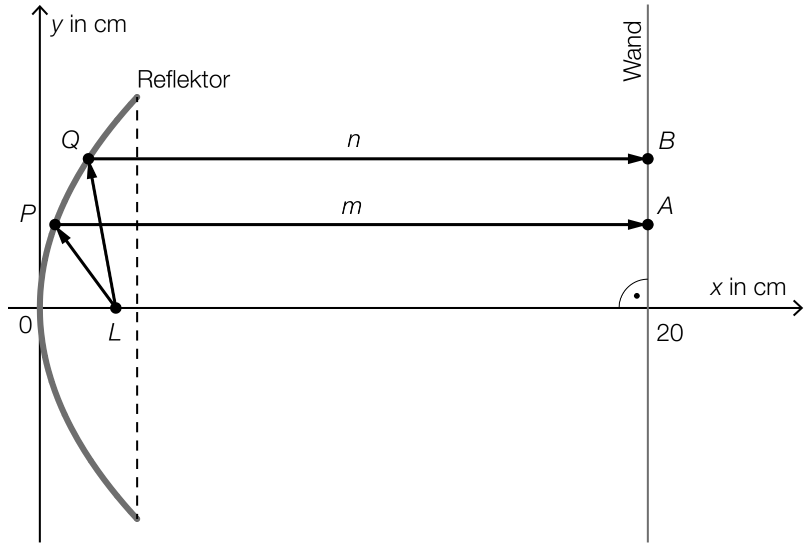
Taschenlampen

Ein Betrieb produziert und verkauft Taschenlampen.

Aufgabenstellung:

a) Der vordere Teil einer bestimmten Taschenlampe besteht aus der punktförmigen Lichtquelle L und einem Reflektor, der die Lichtquelle umgibt.

Der Querschnitt des vorderen Teiles dieser Taschenlampe ist in der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung in einem Koordinatensystem modellhaft dargestellt.



Zwei geradlinige Lichtstrahlen gehen von der Lichtquelle L aus und werden in den Punkten P und Q vom Reflektor parallel zur x-Achse auf eine Wand umgelenkt. Dort treffen sie in den Punkten A und B auf.

$L = (2{,}5 | 0)$
$\overline{LP} = 3$ cm und $\overline{LQ} = 4{,}1$ cm
$A = (20 | y_A)$ und $B = (20 | y_B)$
$m = 19{,}5$ cm

Es gilt: $\overline{LP} + m = \overline{LQ} + n$

1) Berechnen Sie y_B. *[0/1 P.]*

b) Bei der Kontrolle einer Lieferung werden Taschenlampen auf die Fehler F_1, F_2 und F_3 hin überprüft. Diese 3 Fehler treten unabhängig voneinander auf.

In der nachstehenden Tabelle sind diese Fehler und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten angegeben.

Fehler	Beschreibung	Wahrscheinlichkeit
F_1	Die Taschenlampe ist defekt.	p_1
F_2	Die Taschenlampe hat die falsche Farbe.	0,02
F_3	Die Taschenlampe hat keine Aufbewahrungstasche.	0,01

Eine Taschenlampe wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt und überprüft.

1) Ordnen Sie den vier Ereignissen jeweils die auf jeden Fall zutreffende Wahrscheinlichkeit aus A bis F zu. *[0/½/1 P.]*

Die Taschenlampe ist defekt und hat die falsche Farbe.	☐
Die Taschenlampe hat die richtige Farbe.	☐
Die Taschenlampe ist nicht defekt, sie hat die richtige Farbe und sie hat keine Aufbewahrungstasche.	☐
Die Taschenlampe weist mindestens 1 dieser 3 Fehler auf.	☐

A	0,98
B	$1 - (1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}99$
C	$p_1 \cdot 0{,}02$
D	$1 - p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
E	$p_1 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}01$
F	$(1 - p_1) \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}01$

c) Die Gesamtkosten für die Herstellung der Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x können durch die differenzierbare Kostenfunktion K modelliert werden.

x ... Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' hat die Funktionsgleichung
$K'(x) = 0{,}33 \cdot x^2 - 1{,}8 \cdot x + 3$.

Es gilt: $K(1) = 44{,}21$

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

$K(x) =$ ____ *[0/1 P.]*

Im Folgenden wird angenommen, dass jede produzierte Taschenlampe auch verkauft wird.

Der Erlös aus dem Verkauf dieser Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x kann durch die Funktion E modelliert werden.

$E(x) = a \cdot x$

x ... Produktionsmenge in ME
$E(x)$ ... Erlös bei der Produktionsmenge x in GE
a ... Preis in GE/ME

Der Gewinn wird durch die Gewinnfunktion G modelliert (x in ME, $G(x)$ in GE).

Das Betriebsziel ist, bei einer Produktion und einem Verkauf von 5 ME Taschenlampen einen Gewinn von mindestens 100 GE zu erzielen.

2) Berechnen Sie den kleinstmöglichen Preis, mit dem dieses Betriebsziel erreicht wird.

[0/1 P.]

Aufgabe 28 (Teil 2, Best-of-Wertung)

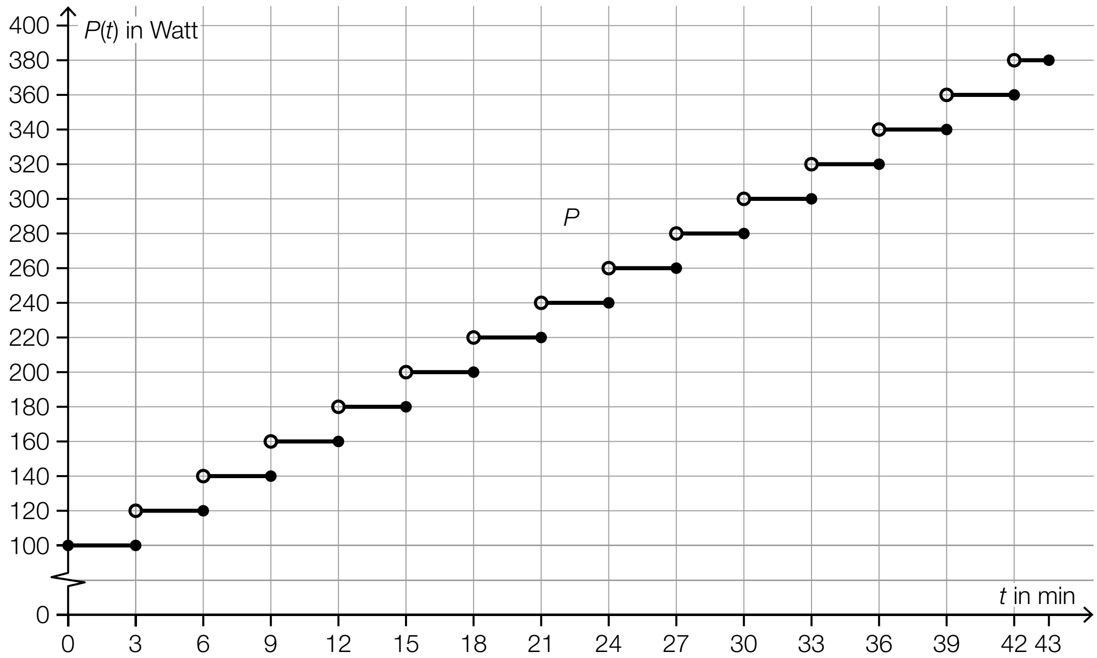
Belastungstests

Laktat ist ein Stoffwechselprodukt. Bei zunehmender körperlicher Belastung wird mehr Laktat im Körper produziert.
Bei Belastungstests werden unter anderem die Herzfrequenz und die Laktatkonzentration im Blut (in mmol/L) gemessen.

Aufgabenstellung:

a) Katharina unterzieht sich einem Belastungstest. Die Belastung wird bei diesem Test schrittweise erhöht, bis Katharina den Test nach 43 min abbricht.

Die Funktion $P\colon [0; 43] \to \mathbb{R}^+, t \mapsto P(t)$ beschreibt modellhaft die von Katharina erbrachte Leistung in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $P(t)$ in Watt). Der Graph von P ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Für die im Zeitintervall $[t_A; t_B]$ (in min) verrichtete Arbeit W (in Joule) gilt:
$W = 60 \cdot \int_{t_A}^{t_B} P(t)\,\mathrm{d}t$

1) Berechnen Sie die von Katharina im Zeitintervall [30; 43] verrichtete Arbeit in Joule.

[0/1 P.]

Im Rahmen dieses Belastungstests wird die Laktatkonzentration in Katharinas Blut gemessen.
Die Funktion c_1: [0; 43] → $\mathbb{R}^+$ mit $c_1(t) = 1{,}13 + 4 \cdot 10^{-8} \cdot t^5$ beschreibt modellhaft die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $c_1(t)$ in mmol/L).

2) Ermitteln Sie diejenige Leistung (in Watt) während dieses Belastungstests, bei der eine Laktatkonzentration von 1,95 mmol/L erreicht wird. *[0/1 P.]*

Bei diesem Belastungstest wird auch Katharinas Herzfrequenz gemessen.
Die Funktion H: [0; 43] → $\mathbb{R}^+$ mit $H(t) = 2 \cdot t + 85$ beschreibt modellhaft die Herzfrequenz in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $H(t)$ in Schlägen/min).

3) Beschreiben Sie die Bedeutung der Zahlen 2 und 85 im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei jeweils die zugehörigen Einheiten an.

Bedeutung der Zahl 2:

___

Bedeutung der Zahl 85:

___

[0/½/1 P.]

b) Katharina unterzieht sich einem anderen Belastungstest. Dabei wird die Laktatkonzentration in ihrem Blut zu Beginn, während und nach einer intensiven Belastung gemessen.

Die Funktion c_2: [0; 30] → $\mathbb{R}^+$ mit $c_2(t) = 31{,}2 \cdot (e^{-0{,}066 \cdot t} - e^{-0{,}325 \cdot t}) + 1{,}13$ beschreibt modellhaft die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Zeit t ab Beginn des Belastungstests (t in min, $c_2(t)$ in mmol/L).

Zum Zeitpunkt t_1 ist die Laktatkonzentration wieder auf die Hälfte des maximal erreichten Wertes abgesunken.

1) Ermitteln Sie t_1. *[0/1 P.]*