

Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche
Reifeprüfung/Reife- und Diplomprüfung

Formelsammlung

Mathematik (AHS)
Angewandte Mathematik (BHS)
Berufsreifeprüfung Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel	Seite
1 Mengen	3
2 Vorsilben	3
3 Potenzen	3
4 Logarithmen	4
5 Quadratische Gleichungen	4
6 Ebene Figuren	5
7 Körper	6
8 Trigonometrie	7
9 Komplexe Zahlen	8
10 Vektoren	8
11 Geraden	9
12 Matrizen	10
13 Folgen und Reihen	11
14 Änderungsmaße	11
15 Wachstums- und Abnahmeprozesse	12
16 Ableitung und Integral	13
17 Differenzialgleichungen 1. Ordnung	14
18 Statistik	15
19 Wahrscheinlichkeit	16
20 Lineare Regression	18
21 Finanzmathematik	19
22 Investitionsrechnung	20
23 Kosten- und Preistheorie	21
24 Technisch-naturwissenschaftliche Grundlagen	22
Index	23

1 Mengen

\in	ist Element von ...
\notin	ist nicht Element von ...
\cap	Durchschnitt(smenge)
\cup	Vereinigung(smenge)
\subset	echte Teilmenge
\subseteq	Teilmenge
\setminus	Differenzmenge („ohne“)
$\{\}$	leere Menge

Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$	natürliche Zahlen
\mathbb{Z}	ganze Zahlen
\mathbb{Q}	rationale Zahlen
\mathbb{R}	reelle Zahlen
\mathbb{C}	komplexe Zahlen
\mathbb{R}^+ bzw. \mathbb{R}^-	positive bzw. negative reelle Zahlen
\mathbb{R}_0^+ bzw. \mathbb{R}_0^-	positive bzw. negative reelle Zahlen mit Null

2 Vorsilben

Tera-	T	10^{12}	Dezi-	d	10^{-1}
Giga-	G	10^9	Zenti-	c	10^{-2}
Mega-	M	10^6	Milli-	m	10^{-3}
Kilo-	k	10^3	Mikro-	μ	10^{-6}
Hekto-	h	10^2	Nano-	n	10^{-9}
Deka-	da	10^1	Pico-	p	10^{-12}

3 Potenzen

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$$a \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} \qquad a^1 = a \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^0 = 1$$

Potenzen mit rationalen Exponenten (Wurzeln)

$$a, b \in \mathbb{R}_0^+; n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{mit} \quad n \geq 2$$

$$a = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a^n = b \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \qquad a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} \quad \text{mit} \quad a > 0$$

Rechenregeln

$$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; r, s \in \mathbb{Z}$$

$$a, b \in \mathbb{R}_0^+; m, n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{mit} \quad m, n \geq 2$$

$$\text{bzw. } a, b \in \mathbb{R}^+; r, s \in \mathbb{Q}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Binomische Formeln

$$a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

4 Logarithmen

$$a, b, c \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } a \neq 1; x, r \in \mathbb{R}$$

$$x = \log_a(b) \Leftrightarrow a^x = b$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$\log_a(b^r) = r \cdot \log_a(b)$$

$$\log_a(a^x) = x$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a\left(\frac{1}{a}\right) = -1$$

$$a^{\log_a(b)} = b$$

natürlicher Logarithmus (Logarithmus zur Basis e): $\ln(b) = \log_e(b)$

dekadischer Logarithmus (Logarithmus zur Basis 10): $\lg(b) = \log_{10}(b)$

5 Quadratische Gleichungen

$$p, q \in \mathbb{R}$$

$$a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Satz von Vieta

x_1 und x_2 sind genau dann die Lösungen der Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$, wenn gilt:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Zerlegung in Linearfaktoren

$$x^2 + p \cdot x + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

6 Ebene Figuren

A ... Flächeninhalt

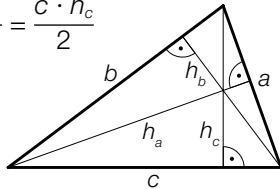
u ... Umfang

Dreieck

Allgemeines Dreieck

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$u = a + b + c$$

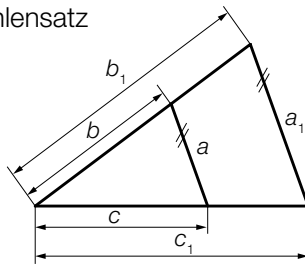


Heron'sche Flächenformel

$$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} \text{ mit } s = \frac{a + b + c}{2}$$

Ähnlichkeit und Strahlensatz

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$



Rechtwinkeliges Dreieck

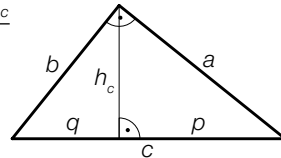
mit Hypotenuse c und Katheten a, b

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

$$h_c^2 = p \cdot q$$

$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$



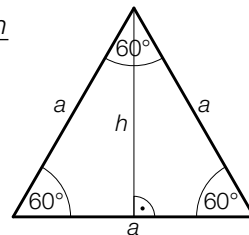
Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Gleichseitiges Dreieck

$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

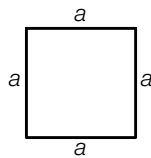


Viereck

Quadrat

$$A = a^2$$

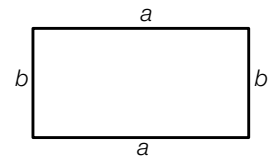
$$u = 4 \cdot a$$



Rechteck

$$A = a \cdot b$$

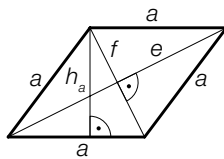
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Raute (Rhombus)

$$A = a \cdot h_a = \frac{e \cdot f}{2}$$

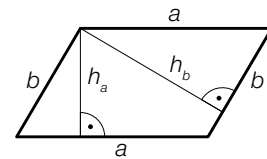
$$u = 4 \cdot a$$



Parallelogramm

$$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

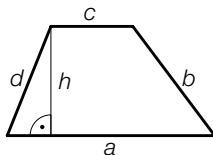
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Trapez

$$A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$$

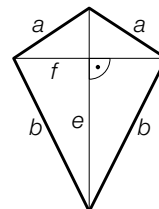
$$u = a + b + c + d$$



Deltoid

$$A = \frac{e \cdot f}{2}$$

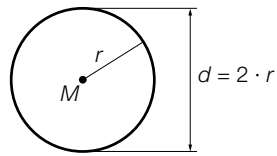
$$u = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$



Kreis

$$A = \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$

$$u = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$$

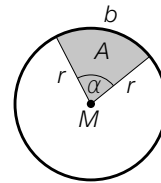


Kreisbogen und Kreissektor

α im Gradmaß ($^\circ$)

$$b = \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$$

$$A = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{b \cdot r}{2}$$



7 Körper

V ... Volumen
O ... Inhalt der Oberfläche
G ... Inhalt der Grundfläche

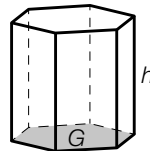
M ... Inhalt der Mantelfläche
 u_G ... Umfang der Grundfläche

Prisma

$$V = G \cdot h$$

$$M = u_G \cdot h$$

$$O = 2 \cdot G + M$$

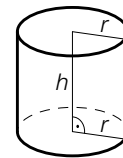


Drehzylinder

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$

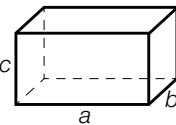
$$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$$



Quader

$$V = a \cdot b \cdot c$$

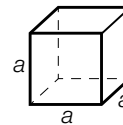
$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$



Würfel

$$V = a^3$$

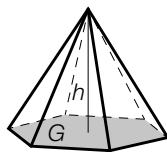
$$O = 6 \cdot a^2$$



Pyramide

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

$$O = G + M$$



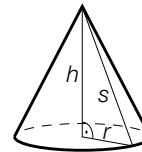
Drehkegel

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$M = \pi \cdot r \cdot s$$

$$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$$

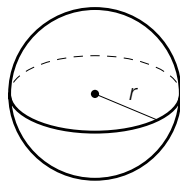
$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$



Kugel

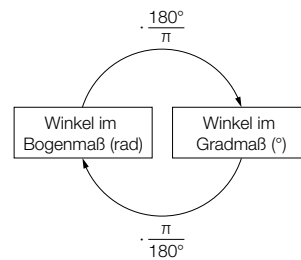
$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$



8 Trigonometrie

Umrechnung zwischen Gradmaß und Bogenmaß

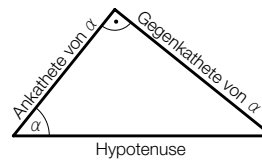


Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck

Sinus: $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

Cosinus: $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

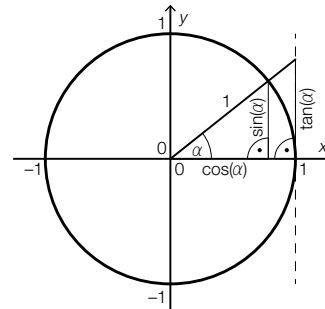
Tangens: $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$



Trigonometrie im Einheitskreis

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

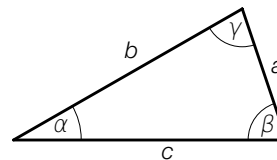
$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ für $\cos(\alpha) \neq 0$



Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

Sinussatz: $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$

Cosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$



Trigonometrische Flächenformel:

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$

Allgemeine Sinusfunktion (in Abhängigkeit von der Zeit t)

A ... Amplitude

ω ... Kreisfrequenz

φ ... Nullphasenwinkel

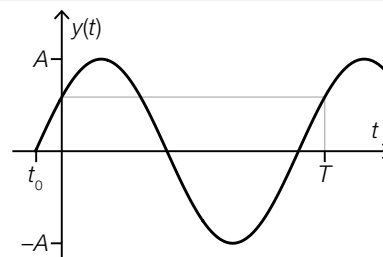
T ... Schwingungsdauer (Periodendauer)

f ... Frequenz

$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

$t_0 = -\frac{\varphi}{\omega}$



9 Komplexe Zahlen

j bzw. i ... imaginäre Einheit mit $j^2 = -1$ bzw. $i^2 = -1$

a ... Realteil, $a \in \mathbb{R}$

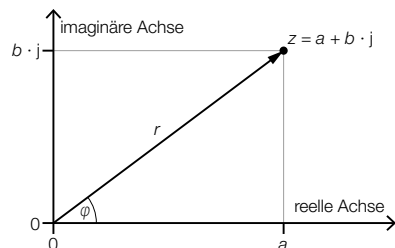
b ... Imaginärteil, $b \in \mathbb{R}$

r ... Betrag, $r \in \mathbb{R}_0^+$

φ ... Argument, $\varphi \in \mathbb{R}$

Komponentenform

$$z = a + b \cdot j$$



Polarformen

$$z = r \cdot [\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)] = r \cdot e^{j \cdot \varphi} = (r; \varphi) = r \angle \varphi$$

Umrechnungen

$$a = r \cdot \cos(\varphi) \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$b = r \cdot \sin(\varphi) \quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}$$

10 Vektoren

P, Q ... Punkte

Vektoren in \mathbb{R}^2

Pfeil von P nach Q :

$$P = (p_1 | p_2), Q = (q_1 | q_2)$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln in \mathbb{R}^2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

Skalarprodukt in \mathbb{R}^2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Betrag (Länge) eines Vektors in \mathbb{R}^2

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Normalvektoren \vec{n} zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ in \mathbb{R}^2

$$\vec{n} = k \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad \text{für } |\vec{a}| \neq 0 \text{ und } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Vektoren in \mathbb{R}^n

Pfeil von P nach Q :

$$P = (p_1 | p_2 | \dots | p_n), Q = (q_1 | q_2 | \dots | q_n)$$

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}$$

Rechenregeln in \mathbb{R}^n

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ \vdots \\ a_n \pm b_n \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \vdots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

Skalarprodukt in \mathbb{R}^n

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$$

Betrag (Länge) eines Vektors in \mathbb{R}^n

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Orthogonalitätskriterium in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \text{ für } |\vec{a}| \neq 0 \text{ und } |\vec{b}| \neq 0$$

Parallelitätskriterium in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \text{ für } |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0 \text{ und } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Winkel φ zwischen \vec{a} und \vec{b} in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ für } |\vec{a}| \neq 0 \text{ und } |\vec{b}| \neq 0$$

Einheitsvektor \vec{a}_0 in Richtung \vec{a}

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \text{ für } |\vec{a}| \neq 0$$

Vektorprodukt in \mathbb{R}^3

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

11 Geraden

g ... Gerade	\vec{g} ... ein Richtungsvektor der Geraden g
	\vec{n} ... ein Normalvektor der Geraden g
	X, P ... Punkte auf der Geraden g
	k ... Steigung der Geraden g
	α ... Steigungswinkel der Geraden g
	$a, b, c, k, d \in \mathbb{R}$

Parameterdarstellung einer Geraden g in \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3

$$g: X = P + t \cdot \vec{g} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Gleichung einer Geraden g in \mathbb{R}^2

explizite Form der Geradengleichung: $g: y = k \cdot x + d$ dabei gilt $k = \tan(\alpha)$

allgemeine Geradengleichung: $g: a \cdot x + b \cdot y = c$

Normalvektordarstellung: $g: \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$

dabei gilt $\vec{n} \parallel \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

12 Matrizen

$$a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R}; i, j, m, n, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{R}$$

Addition/Subtraktion von Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl k

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & \dots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

$A \dots m \times p$ -Matrix

$B \dots p \times n$ -Matrix

$C = A \cdot B \dots m \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{j1} & \dots & c_{jj} & \dots & c_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj}$$

Einheitsmatrix E

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponierte Matrix A^T

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix A^{-1} einer quadratischen Matrix A

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise (n Gleichungen in n Variablen)

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

...

$$a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Wenn die inverse Matrix A^{-1} existiert, dann gilt: $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Produktionsprozesse

$A \dots$ quadratische Verflechtungsmatrix

$E \dots$ Einheitsmatrix

$\vec{x} \dots$ Produktionsvektor

$\vec{n} \dots$ Nachfragevektor

$$\vec{x} = A \cdot \vec{x} + \vec{n}$$

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{n} = (E - A) \cdot \vec{x}$$

13 Folgen und Reihen

Arithmetische Folge

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Rekursives Bildungsgesetz

$$a_{n+1} = a_n + d \text{ und Angabe von } a_1$$

Explizites Bildungsgesetz

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

Endliche arithmetische Reihe

Summe s_n der ersten n Glieder

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot a_1 + (n - 1) \cdot d]$$

Geometrische Folge

$$(b_n) = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Rekursives Bildungsgesetz

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \text{ und Angabe von } b_1$$

Explizites Bildungsgesetz

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Endliche geometrische Reihe

Summe s_n der ersten n Glieder

$$s_n = \sum_{i=1}^n b_i = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$$

$$s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ für } q \neq 1$$

Unendliche geometrische Reihe

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist genau dann konvergent,
wenn $|q| < 1$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{b_1}{1 - q} \text{ für } |q| < 1$$

14 Änderungsmaße

Für eine auf einem Intervall $[a; b]$ definierte reelle Funktion f gilt:

Absolute Änderung von f in $[a; b]$

$$f(b) - f(a)$$

Relative (prozentuale) Änderung von f in $[a; b]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{f(a)} \text{ für } f(a) \neq 0$$

Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) von f in $[a; b]$ bzw. in $[x; x + \Delta x]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ bzw. } \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ für } b \neq a \text{ bzw. } \Delta x \neq 0$$

Differenzialquotient (lokale bzw. „momentane“ Änderungsrate) von f an der Stelle x

$$f'(x) = \lim_{x_1 \rightarrow x} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \text{ bzw. } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

15 Wachstums- und Abnahmeprozesse

t ... Zeit
 $N(t)$... Bestand zur Zeit t
 $N_0 = N(0)$... Bestand zur Zeit $t = 0$

Linear

$k \in \mathbb{R}^+$

lineares Wachstum $N(t) = N_0 + k \cdot t$

lineare Abnahme $N(t) = N_0 - k \cdot t$

Exponentiell

$a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1$ und $N_0 > 0$
 a ... Änderungsfaktor

exponentielles Wachstum $N(t) = N_0 \cdot a^t$ für $a > 1$ $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$

exponentielle Abnahme $N(t) = N_0 \cdot a^t$ für $0 < a < 1$ $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Beschränkt

$S, a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a < 1$
 S ... Sättigungswert, Kapazitätsgrenze

beschränktes Wachstum (Sättigungsfunktion) $N(t) = S - b \cdot a^t$ mit $b = S - N_0$ $N(t) = S - b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $b = S - N_0$

beschränkte Abnahme (Abklingfunktion) $N(t) = S + b \cdot a^t$ mit $b = |S - N_0|$ $N(t) = S + b \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $b = |S - N_0|$

Logistisch

$S, a, \lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $0 < a < 1$ und $N_0 > 0$
 S ... Sättigungswert, Kapazitätsgrenze

logistisches Wachstum $N(t) = \frac{S}{1 + c \cdot a^t}$ mit $c = \frac{S - N_0}{N_0}$ $N(t) = \frac{S}{1 + c \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$ mit $c = \frac{S - N_0}{N_0}$

16 Ableitung und Integral

$f, g, h \dots$ auf ganz \mathbb{R} oder einem Intervall definierte differenzierbare Funktionen

$f', g', h' \dots$ Ableitungsfunktionen

$F, G, H \dots$ Stammfunktionen

$C, k, q \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Unbestimmtes Integral

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{mit} \quad F' = f$$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Funktion	Ableitungsfunktion	Stammfunktion
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln(x)$ für $q = -1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\ln(\cos(x))$
$g(x) = k \cdot f(x)$	$g'(x) = k \cdot f'(x)$	$G(x) = k \cdot F(x)$
$h(x) = f(x) \pm g(x)$	$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$	$H(x) = F(x) \pm G(x)$
$g(x) = f(k \cdot x)$	$g'(x) = k \cdot f'(k \cdot x)$	$G(x) = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x)$

Ableitungsregeln

Faktorregel	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$
Summenregel	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
Produktregel	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
Quotientenregel	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ für $g(x) \neq 0$
Kettenregel	$h(x) = f(g(x)) \Rightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Integrationsmethode – lineare Substitution

$$\int f(a \cdot x + b) dx = \frac{F(a \cdot x + b)}{a} + C$$

Volumen V von Rotationskörpern

Rotation des Graphen einer Funktion f mit $y = f(x)$ um eine Koordinatenachse

Rotation um die x -Achse ($a \leq x \leq b$)

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx$$

Rotation um die y -Achse ($c \leq y \leq d$)

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy$$

Bogenlänge s des Graphen einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Linearer Mittelwert m einer Funktion f im Intervall $[a; b]$

$$m = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

17 Differenzialgleichungen 1. Ordnung

Differenzialgleichungen mit trennbaren Variablen

$$y' = f(x) \cdot g(y) \text{ bzw. } \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \text{ mit } y = y(x)$$

Lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

y ... allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

y_h ... allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung $y' + a \cdot y = 0$

y_p ... partikuläre (spezielle) Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung

s ... Störfunktion

$$y' + a \cdot y = s(x) \text{ mit } a \in \mathbb{R}, y = y(x)$$

$$y = y_h + y_p$$

18 Statistik

x_1, x_2, \dots, x_n ... eine Liste von n reellen Zahlen
 Dabei treten k verschiedene Werte x_1, x_2, \dots, x_k auf.
 H_i ... absolute Häufigkeit von x_i mit $H_1 + H_2 + \dots + H_k = n$

Relative Häufigkeit h_i von x_i

$$h_i = \frac{H_i}{n}$$

Lagemaße

Arithmetisches Mittel \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot H_1 + x_2 \cdot H_2 + \dots + x_k \cdot H_k}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i \cdot H_i$$

Geometrisches Mittel \bar{x}_{geo}

$$\bar{x}_{\text{geo}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad \text{für } x_i > 0$$

Median \tilde{x} bei metrischen Daten

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$... geordnete Liste mit n Werten

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & \dots \text{ für } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2} \cdot (x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) & \dots \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Quartile

q_1 : Mindestens 25 % der Werte sind kleiner oder gleich q_1 , zugleich sind mindestens 75 % der Werte größer oder gleich q_1 .

$q_2 = \tilde{x}$: Mindestens 50 % der Werte sind kleiner oder gleich q_2 , zugleich sind mindestens 50 % der Werte größer oder gleich q_2 .

q_3 : Mindestens 75 % der Werte sind kleiner oder gleich q_3 , zugleich sind mindestens 25 % der Werte größer oder gleich q_3 .

Streuungsmaße

Spannweite: $x_{\max} - x_{\min}$

(Inter)quartilsabstand: $q_3 - q_1$

s^2 ... (empirische) Varianz einer Datenliste

s ... (empirische) Standardabweichung einer Datenliste

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i}$$

Wenn aus einer Stichprobe vom Umfang n die Varianz einer Grundgesamtheit geschätzt werden soll:

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i$$

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot H_i}$$

19 Wahrscheinlichkeit

$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$

$A, B \dots$ Ereignisse

\bar{A} bzw. $\neg A \dots$ Gegenereignis von A

$A \cap B$ bzw. $A \wedge B \dots A$ und B (sowohl das Ereignis A als auch das Ereignis B treten ein)

$A \cup B$ bzw. $A \vee B \dots A$ oder B (mindestens eines der beiden Ereignisse A und B tritt ein)

$P(A) \dots$ Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A

$P(A|B) \dots$ Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A unter der Voraussetzung, dass das Ereignis B eingetreten ist (bedingte Wahrscheinlichkeit)

Fakultät (Faktorielle)

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Wahrscheinlichkeit bei einem Laplace-Versuch

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}$$

Elementare Regeln

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\text{bzw. } P(\neg A) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$\text{bzw. } P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Wenn A und B (stochastisch) unabhängig voneinander sind:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{bzw. } P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{bzw. } P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$$

Wenn A und B unvereinbar sind:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{bzw. } P(A \vee B) = P(A) + P(B)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\text{bzw. } P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}$$

bzw.

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\neg A) \cdot P(B|\neg A)}$$

Erwartungswert μ einer diskreten Zufallsvariablen X mit den Werten x_1, x_2, \dots, x_n

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

Varianz σ^2 einer diskreten Zufallsvariablen X mit den Werten x_1, x_2, \dots, x_n

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$$

Standardabweichung σ

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

Binomialverteilung

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}; k \in \mathbb{N}; p \in \mathbb{R} \text{ mit } k \leq n \text{ und } 0 \leq p \leq 1$$

Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Erwartungswert: $E(X) = \mu = n \cdot p$

Varianz: $V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Normalverteilung

$$\mu, \sigma \in \mathbb{R} \text{ mit } \sigma > 0$$

f ... Dichtefunktion

F ... Verteilungsfunktion

φ ... Dichtefunktion der Standardnormalverteilung

Φ ... Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Normalverteilung $N(\mu; \sigma^2)$: Zufallsvariable X ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ bzw. der Varianz σ^2

$$P(X \leq x_1) = F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Wahrscheinlichkeiten für σ -Umgebungen

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$$

$$P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \approx 0,954$$

$$P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \approx 0,997$$

Standardnormalverteilung $N(0; 1)$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^z \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

$$P(-z \leq Z \leq z) = 2 \cdot \phi(z) - 1$$

$P(-z \leq Z \leq z)$	= 90 %	= 95 %	= 99 %
z	$\approx 1,645$	$\approx 1,960$	$\approx 2,576$

Zufallsstrebereich und Konfidenzintervall

$\mu, \sigma, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$ und $0 < \alpha < 1$

\bar{x} ... Stichprobenmittelwert

s_{n-1} ... Standardabweichung einer Stichprobe

n ... Stichprobenumfang

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$... $(1-\frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung

$t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}}$... $(1-\frac{\alpha}{2})$ -Quantil der t -Verteilung mit f Freiheitsgraden

Zweiseitiger $(1-\alpha)$ -Zufallsstrebereich für einen Einzelwert einer normalverteilten Zufallsvariablen

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \right]$$

Zweiseitiger $(1-\alpha)$ -Zufallsstrebereich für den Stichprobenmittelwert normalverteilter Werte

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Zweiseitiges $(1-\alpha)$ -Konfidenzintervall für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsvariablen

σ bekannt: $\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$

σ unbekannt: $\left[\bar{x} - t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{f, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \right]$ mit $f = n - 1$

20 Lineare Regression

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$... Wertepaare

\bar{x}, \bar{y} ... arithmetisches Mittel der x_i bzw. y_i

Lineare Regressionsfunktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$d = \bar{y} - k \cdot \bar{x}$$

Korrelationskoeffizient nach Pearson

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

21 Finanzmathematik

Zinsen und Zinseszinsen

K_0 ... Anfangskapital
 K_n ... Endkapital nach n Jahren
 i ... Jahreszinssatz

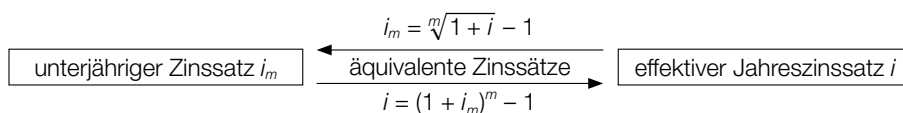
einfache Verzinsung: $K_n = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)$

Zinseszinsen: $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$

Unterjährige Verzinsung

m ... Anzahl der Zinsperioden pro Jahr	Für Zinsperioden gelten folgende Abkürzungen:
	p. a. ... pro Jahr
	p. s. ... pro Semester
	p. q. ... pro Quartal
	p. m. ... pro Monat

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i_m)^{n \cdot m}$$



Rentenrechnung

R ... Ratenhöhe
 n ... Anzahl der Raten
 i ... Zinssatz
 $q = 1 + i$... Aufzinsungsfaktor

Voraussetzung: Rentenperiode = Zinsperiode

	nachschüssig	vorschüssig
Endwert E	$E_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$	$E_{\text{vor}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot q$
Barwert B	$B_{\text{nach}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^n}$	$B_{\text{vor}} = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$

Tilgungsplan

Zeitabschnitt	Zinsanteil	Tilgungsanteil	Annuität	Restschuld
0				K_0
1	$K_0 \cdot i$	T_1	$A_1 = K_0 \cdot i + T_1$	$K_1 = K_0 - T_1$
...

22 Investitionsrechnung

E_t ... Einnahmen im Jahr t
A_t ... Ausgaben im Jahr t
A_0 ... Anschaffungskosten
R_t ... Rückflüsse im Jahr t
i ... kalkulatorischer Zinssatz (Jahreszinssatz)
n ... Nutzungsdauer in Jahren
i_w ... Wiederveranlagungszinssatz (Jahreszinssatz)
E ... Endwert der wiederveranlagten Rückflüsse

$$R_t = E_t - A_t$$

Kapitalwert C_0

$$C_0 = -A_0 + \left[\frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i)^n} \right]$$

Interner Zinssatz i_{intern}

$$-A_0 + \left[\frac{R_1}{(1+i_{\text{intern}})} + \frac{R_2}{(1+i_{\text{intern}})^2} + \dots + \frac{R_n}{(1+i_{\text{intern}})^n} \right] = 0$$

Modifizierter interner Zinssatz i_{mod}

$$A_0 \cdot (1+i_{\text{mod}})^n = E \quad \text{mit} \quad E = R_1 \cdot (1+i_w)^{n-1} + R_2 \cdot (1+i_w)^{n-2} + \dots + R_{n-1} \cdot (1+i_w) + R_n$$

23 Kosten- und Preistheorie

x ... produzierte, angebotene, nachgefragte bzw. verkaufte Menge ($x \geq 0$)

Kostenfunktion K	$K(x)$
Fixkosten F	$K(0)$
variable Kostenfunktion K_v	$K_v(x) = K(x) - F$
Grenzkostenfunktion K'	$K'(x)$
Stückkostenfunktion (Durchschnittskostenfunktion) \bar{K}	$\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$
variable Stückkostenfunktion (variable Durchschnittskostenfunktion) \bar{K}_v	$\bar{K}_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Betriebsoptimum x_{opt}	$\bar{K}'(x_{\text{opt}}) = 0$ (Minimumstelle von \bar{K})
langfristige Preisuntergrenze (kostendeckender Preis)	$\bar{K}(x_{\text{opt}})$
Betriebsminimum x_{min}	$\bar{K}_v'(x_{\text{min}}) = 0$ (Minimumstelle von \bar{K}_v)
kurzfristige Preisuntergrenze	$\bar{K}_v(x_{\text{min}})$
Kostenkehre	$K''(x) = 0$
progressiver Kostenverlauf	$K''(x) > 0$
degressiver Kostenverlauf	$K''(x) < 0$
Preis p	
Preisfunktion der Nachfrage (Preis-Absatz-Funktion) p_N	$p_N(x)$
Preisfunktion des Angebots p_A	$p_A(x)$
Marktgleichgewicht	$p_A(x) = p_N(x)$
Höchstpreis	$p_N(0)$
Sättigungsmenge	$p_N(x) = 0$
Erlösfunktion (Umsatzfunktion) E	
	$E(x) = p \cdot x$ bzw. $E(x) = p_N(x) \cdot x$
Grenzerlösfunktion E'	$E'(x)$
Gewinnfunktion G	
	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzwinnfunktion G'	$G'(x)$
untere Gewinnngrenze (Break-even-Point, Gewinnschwelle) x_u obere Gewinnngrenze x_o	$G(x_u) = G(x_o) = 0$ mit $x_u \leq x_o$
Gewinnbereich (Gewinnzone)	$[x_u; x_o]$
Cournot'scher Punkt C	$C = (x_C p_N(x_C))$ mit $G'(x_C) = 0$

24 Technisch-naturwissenschaftliche Grundlagen

ρ ... Dichte	t ... Zeit
m ... Masse	s ... Weg
V ... Volumen	v ... Geschwindigkeit
F ... Kraft	a ... Beschleunigung
W ... Arbeit	v_0 ... Anfangsgeschwindigkeit
P ... Leistung	

Dichte	$\rho = \frac{m}{V}$
--------	----------------------

Kraft	$F = m \cdot a$
-------	-----------------

Arbeit	$W = F \cdot s$
--------	-----------------

Leistung	$P = \frac{W}{t}$
----------	-------------------

Bewegungsvorgänge

Geschwindigkeit bei einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung	$v = \frac{s}{t}$
--	-------------------

Geschwindigkeit bei einer gleichmäßig beschleunigten geradlinigen Bewegung	$v = a \cdot t + v_0$
--	-----------------------

Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit t	$v(t) = s'(t)$
--	----------------

Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit t	$a(t) = v'(t) = s''(t)$
---	-------------------------

Index

A

Abklingfunktion 12
Ableitung 13
Ableitungsfunktion 13
Ableitungsregeln 13
absolute Änderung 11
absolute Häufigkeit 15
Ähnlichkeit 5
allgemeine Geradengleichung 9
allgemeines Dreieck 5, 7
Amplitude 7
Änderungsfaktor 12
Änderungsmaße 11
Änderungsrate 11
Anfangskapital 19
Annuität 19
Anschaffungskosten 20
äquivalente Zinssätze 19
Arbeit 22
arithmetische Folge 11
arithmetisches Mittel 15
arithmetische Reihe 11
Aufzinsungsfaktor 19

B

Barwert 19
bedingte Wahrscheinlichkeit 16
Beschleunigung 22
beschränkte Abnahme 12
beschränktes Wachstum 12
bestimmtes Integral 13
Betrag (eines Vektors) 8
Betriebsminimum 21
Betriebsoptimum 21
Bewegungsvorgänge 22
Binomialkoeffizient 16
Binomialverteilung 17
binomische Formeln 4
Bogenlänge 14
Bogenmaß 7
Break-even-Point 21

C

Cosinus 7
Cosinussatz 7
Cournot'scher Punkt 21

D

degressiver Kostenverlauf 21
Deka- 3
dekadischer Logarithmus 4
Deltoid 5
Dezi- 3
Dichte 22
Dichtefunktion 17
Differenzenquotient 11
Differenzialgleichungen 14
Differenzialquotient 11

Differenzmenge 3
diskrete Zufallsvariable 17
Drehkegel 6
Drehzylinder 6
Dreieck 5
Durchschnitt(smenge) 3
Durchschnittskostenfunktion 21

E

ebene Figuren 5
echte Teilmenge 3
effektiver Jahreszinssatz 19
einfache Verzinsung 19
Einheitskreis 7
Einheitsmatrix 10
Einheitsvektor 9
Element 3
Endkapital 19
Endwert 19, 20
Erlösfunktion 21
Erwartungswert 17
explizites Bildungsgesetz 11
exponentielle Abnahme 12
exponentielles Wachstum 12

F

Faktorielle 16
Faktorregel 13
Fakultät 16
Finanzmathematik 19
Fixkosten 21
Flächeninhalt 5
Folgen 11
Freiheitsgrad 18
Frequenz 7

G

ganze Zahlen 3
Gegenereignis 16
geometrische Folge 11
geometrische Reihe 11
geometrisches Mittel 15
Gerade 9
Geradengleichung 9
Geschwindigkeit 22
Gewinnbereich 21
Gewinnfunktion 21
Gewinnmenge 21
Gewinnschwelle 21
Gewinnzone 21
Giga- 3
gleichförmige geradlinige
Bewegung 22
gleichmäßig beschleunigte
geradlinige Bewegung 22
gleichseitiges Dreieck 5
Gradmaß 7
Grenzerlösfunktion 21

Grenzgewinnfunktion 21
Grenzkostenfunktion 21
Grundfläche 6

H

Hekto- 3
Heron'sche Flächenformel 5
Höchstpreis 21
homogene Differenzial-
gleichung 14
Hypotenuse 5, 7

I

Imaginärteil 8
inhomogene Differenzial-
gleichung 14
Integral 13
interner Zinssatz 20
Interquartilsabstand 15
inverse Matrix 10
Investitionsrechnung 20

J

Jahreszinssatz 19, 20

K

kalkulatorischer Zinssatz 20
Kapazitätsgrenze 12
Kapitalwert 20
Kathete 5, 7
Kettenregel 13
Kilo- 3
komplexe Zahlen 8
Komponentenform 8
Konfidenzintervall 18
Körper 6
Korrelationskoeffizient 18
Kosten- und Preistheorie 21
kostendeckender Preis 21
Kostenfunktion 21
Kostenkehre 21
Kraft 22
Kreis 6
Kreisbogen 6
Kreisfrequenz 7
Kreissektor 6
Kugel 6
kurzfristige Preisuntergrenze 21

L

Lagemaße 15
langfristige Preisuntergrenze 21
Laplace-Versuch 16
leere Menge 3
Leistung 22
lineare Abnahme 12
lineare Gleichungssysteme 10
lineare Regression 18

lineare Substitution 14
linearer Mittelwert 14
lineares Wachstum 12
Linearfaktoren 4
Logarithmen 4
logistisches Wachstum 12
lokale Änderungsrate 11

M

Mantelfläche 6
Marktgleichgewicht 21
Masse 22
Matrix 10
Median 15
Mega- 3
Mengen 3
Mikro- 3
Milli- 3
Mittelwert 15
mittlere Änderungsrate 11
modifizierter interner Zinssatz 20
momentane Änderungsrate 11

N

Nachfragevektor 10
nachsüchtig 19
Nano- 3
natürliche Zahlen 3
natürlicher Logarithmus 4
Normalvektor 8
Normalverteilung 17
Nullphasenwinkel 7
Nutzungsdauer 20

O

Oberfläche 6
Orthogonalitätskriterium 9

P

Parallelitätskriterium 9
Parallelogramm 5
Parameterdarstellung 9
Periodendauer 7
Pico- 3
Polarformen 8
Potenzen 3
Preis 21
Preis-Absatz-Funktion 21
Preisfunktion der Nachfrage 21
Preisfunktion des Angebots 21
Prisma 6
Produktionsprozesse 10
Produktionsvektor 10
Produktregel 13
progressiver Kostenverlauf 21
prozentuelle Änderung 11
Pyramide 6

Q

Quader 6
Quadrat 5
quadratische Gleichungen 4
Quantil 18
Quartil 15
Quartilsabstand 15
Quotientenregel 13

R

Rate 19
Ratenhöhe 19
rationale Exponenten 3
rationale Zahlen 3
Raute 5
Realteil 8
Rechteck 5
rechtwinkeliges Dreieck 5, 7
reelle Zahlen 3
Reihen 11
rekursives Bildungsgesetz 11
relative Änderung 11
relative Häufigkeit 15
Rentenrechnung 19
Restschuld 19
Rhombus 5
Richtungsvektor 9
Rotationskörper 14
Rückflüsse 20

S

Sättigungsfunktion 12
Sättigungsmenge 21
Sättigungswert 12
Satz des Pythagoras 5
Satz von Bayes 16
Satz von Vieta 4
Schwingungsdauer 7
Sigma-Umgebungen 17
Sinus 7
Sinusfunktion 7
Sinussatz 7
Skalarprodukt 8
Spannweite 15
Stammfunktion 13
Standardabweichung 15, 17
Standardnormalverteilung 17
Statistik 15
Steigung 9
Steigungswinkel 9
Stichprobe 15, 18
Stichprobenmittelwert 18
Stichprobenumfang 18
Störfunktion 14
Strahlensatz 5
Streuungsmaße 15
Stückkostenfunktion 21
Summenregel 13

T

Tangens 7
Teilmenge 3
Tera- 3
Tilgungsanteil 19
Tilgungsplan 19
transponierte Matrix 10
Trapez 5
trennbare Variablen 14
Trigonometrie 7
trigonometrische Flächenformel 7
 t -Verteilung 18

U

Umfang 5, 6
Umsatzfunktion 21
unbestimmtes Integral 13
unendliche geometrische Reihe 11
unterjährige Verzinsung 19

V

variable Durchschnittskostenfunktion 21
variable Kostenfunktion 21
variable Stückkostenfunktion 21
Varianz 15, 17
Vektoren 8
Vektorprodukt 9
Vereinigung(smenge) 3
Verflechtungsmatrix 10
Verteilungsfunktion 17
Verzinsung 19
Viereck 5
Volumen 6, 14, 22
vorschüssig 19
Vorsilben 3

W

Wahrscheinlichkeit 16, 17
Wiederveranlagungszinssatz 20
Winkel 7
Würfel 6
Wurzeln 3

Z

Zahlenmengen 3
Zenti- 3
Zinsanteil 19
Zinsen 19
Zinsezinsen 19
Zinssatz 19
Zufallsstrebereich 18
Zufallsvariable 17
 σ -Umgebungen 17