3. Ableitungsfunktion/Stammfunktion

3.1 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Der erster Teil des Satzes besagt im Wesentlichen, dass die Integration die inverse Operation zur Differentiation ist. Der zweite Teil gibt an, wie das bestimmte Integral gebildet wird.

Satz 1.

Ist $I = [a; b]$ ein abgeschlossenes Intervall und die Funktion f eine reellwertige stetige Funktion auf dem Intervall, so bezeichnet man

$$F(x) := \int_c^x f(t)dt, \quad x \in I$$

eine Stammfunktion F. Diese Funktion F ist differenzierbar und es gilt,

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in I.$$

Satz 2.

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

3.2 Unbestimmtes Integral

Das Aufsuchen einer Stammfunktion wird unbestimmtes Integrieren genannt.
Dies ist bis auf eine Konstante eindeutig. Das heißt, es gibt zu jeder Funktion f eine Schar an Stammfunktionen F, die sich um eine Konstante unterscheiden. F abgeleitet ergibt wieder f und beim Ableiten gilt, dass additive Konstanten wegfallen, somit kann jeder Stammfunktion eine Konstante hinzugefügt werden, sie beleibt immer noch Stammfunktion von f, denn ihre Ableitung ist weiterhin f.

3.3 Integrationsregeln

3.3.1 Potenzregel

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Beim Integrieren einer Potenz mit der Variable als Basis wird die Hochzahl um eins erhöht und es wird durch die neue Hochzahl dividiert.
Bsp.:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \qquad \int 1\,dx = x + c \qquad \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c \qquad \int 0\,dx = c$$

3.3.2 Faktorregel

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Multiplikative Faktoren bleiben beim Integrieren (wie beim Differenzieren) erhalten, somit kann man sie auch vor das Integral setzen.

Achtung: Vergleiche

$$\int_a^b f(k \cdot x)dx = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x)\Big|_a^b$$

Bsp.:

$$\int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3} + c$$

$$\int sin(3x)dx = -\frac{cos(3x)}{3} + c$$

$$\int cos(3x)dx = \frac{sin(3x)}{3} + c$$

allgemein gilt:

$$\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

$$\int sin(ax)dx = -\frac{cos(ax)}{a} + c$$

$$\int cos(ax)dx = \frac{sin(ax)}{a} + c$$

3.3.3 Summen- und Differenzenregel

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Das Integral einer Summe/Differenz ist die Summe/Differenz der Integrale.

3.3.4 Integrale spezieller Funktionen

$$\int sin(x)dx) = -cos(x) + c$$

$$\int cos(x)dx = sin(x) + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

3.4 Das bestimmte Integral

Das bestimmte Integral gibt einen bestimmten Wert an, den *Integralwert*.

$$\int_a^b f(x)dx = Integralwert$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

a...untere Grenze
b...untere Grenze
f(x)...Integrand
dx...gibt an, dass bezüglich *x* integriert wird

Bsp.:

$$\int_1^3 (-x^3 + 3x^2 + x - 3)dx = -\frac{x^4}{4} + \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} + \frac{x^2}{2} - 3x\Big|_1^3 = (-\frac{3^4}{4} + 3^3 + \frac{3^2}{2} - 3 \cdot 3) - (-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3) = \frac{9}{4} - (-\frac{7}{4}) = 4$$

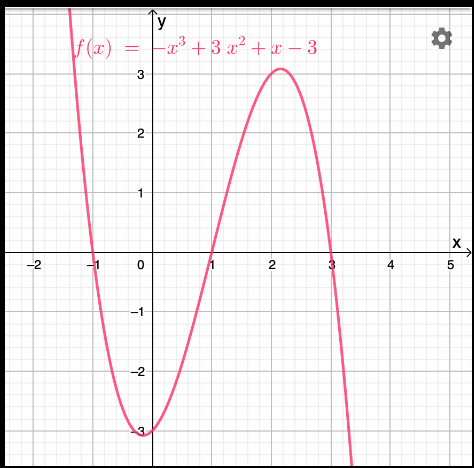
$$\int_{-1}^1 (-x^3 + 3x^2 + x - 3)dx = -\frac{x^4}{4} + \cancel{3} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}} + \frac{x^2}{2} - 3x\Big|_{-1}^1 =$$

$$(-\frac{1^4}{4} + 1^3 + \frac{1^2}{2} - 3 \cdot 1) - (-\frac{(-1)^4}{4} + (-1)^3 + \frac{(-1)^2}{2} - 3 \cdot (-1) =$$

$$(-\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} - 3) - (-\frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} + 3) = -\frac{7}{4} - \frac{9}{4} = -4$$

$$\int_{-1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)dx=-\frac{x^4}{4}+\cancel{3}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}}+\frac{x^2}{2}-3x\Big|_1^3=$$

$$(-\frac{3^4}{4}+3^3+\frac{3^2}{2}-3\cdot 3)-(-\frac{(-1)^4}{4}+(-1)^3+\frac{(-1)^2}{2}-3\cdot(-1)=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}=0$$



Betrachtet man das bestimmte Integral zwischen 1 und 3, so gibt der Integralwert den von der Kurve und der x-Achse zwischen den Grenzen 1 und 3 eingeschlossenen Flächeninhalt an. Diese Fläche beträgt 4 Einheiten.

Nachdem die vom Graphen und der x-Achse eingeschlossene Fläche zwischen -1 und 1 unterhalb der x-Achse liegt, ist der Integralwert negativ.
Dieses Phänomen nennt man *Orientierung des Integrals*.
Der Flächeninhalt zwischen -1 und 1 beträgt ebenfalls 4 Einheiten, doch der Wert des Integrals ist -4.
Ermittelt man den Integralwert zwischen -1 und 3, so erhält man 0, denn die beiden Flächen gleich groß sind aber jeweils unterhalb und oberhalb der x-Achse liegen.
Also man muss zwischen den Begriffen ‚Flächeninhalt' und ‚Integralwert' unterscheiden. Mit dem bestimmten Integral ermittelt man sehr wohl Flächen, doch es ist auf die Positionierung des eingeschlossenen Bereiches zu achten.

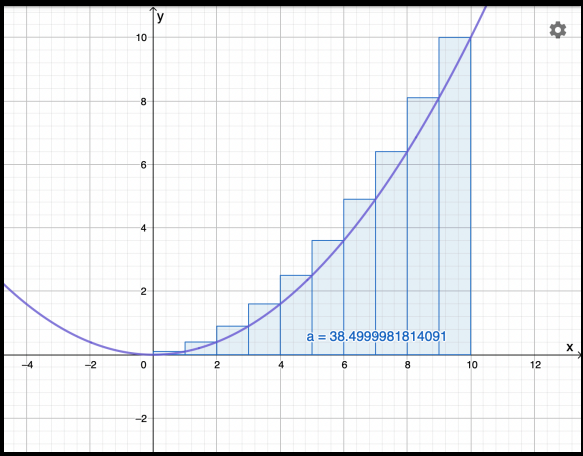
Es gilt: Vertauscht man obere und untere Grenze, so wechselt der Integralwert das Vorzeichen.

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

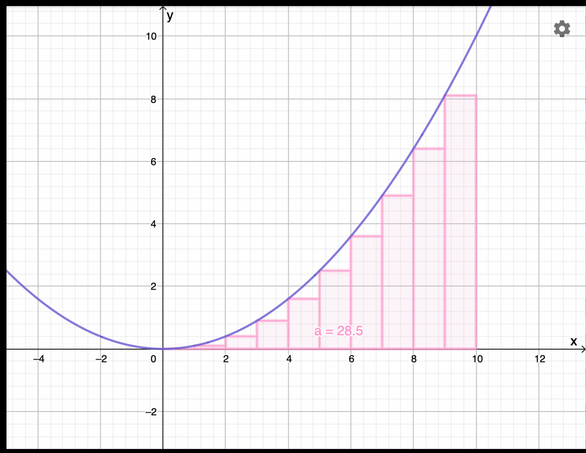
Um den Integralwert positiv zu machen, können Betragstriche eingesetzt, man kann auch die Grenzen vertauschen oder ein Minus vor das Integral setzten.

3.5 Ober- und Untersumme, Riemannsches Integral

Obersumme



Untersumme



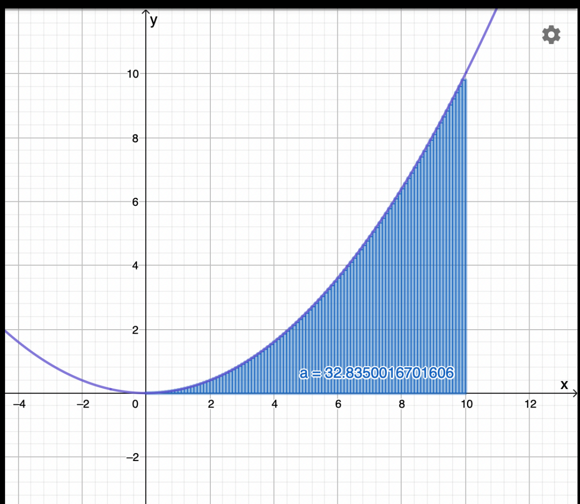
Betrachte die Funktion:

$$f(x) = 0.1x^2$$

Gesucht ist die Fläche unter der Kurve beispielsweise im Intervall [0; 10].
Man bildet gleichbreite Rechtecke, um so die Fläche unter der Kurve abschätzen zu können.
Die Obersumme ist etwas größer, die Untersumme ist etwas kleiner als die Fläche unter der Kurve.
Je mehr Rechtecke man setzt, also je kleiner die Breite der Seite, desto genauer ist die Annäherung.
Sei also die untere Grenze 0 und die obere Grenze 10. Das Intervall wird oben in 10 gleichbreite Teilintervalle zerlegt ($n = 10$). Die Breite des Intervalls wird mit Δx bezeichnet. In dem Fall ist $\Delta x = 1$.
Bei der Obersumme wird der höchste Funktionswert des Teilintervalls für die eine Seitenlänge des Rechtecks gesetzt, hingegen bei der Untersumme der kleinste Funktionswert.

$$U \leq \int_a^b f(x)dx \leq O$$

Lässt man $\Delta x \to 0$ gehen ($n \to \infty$), erhält man den exakten Flächeninhalt. Somit definiert man das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten.



Betrachte man hier als Vergleich die Annäherung, wenn die Anzahl der Rechtecke auf 100 erhöht wird ($n = 100$).

Der exakte Wert ist:

$$\int_0^{10} 0{,}1x^2 dx = 33{,}\dot{3}$$

3.6 Das bestimmte Integral im Kontext

- Das Integral der Kraft nach dem Weg ist die Arbeit
- Das Integral der Leistung nach der Zeit ist die Arbeit.
- Das Integral der Geschwindigkeit nach der Zeit ist der zurückgelegter Weg.
- Das Integral der Beschleunigung nach der Zeit ist die Geschwindigkeitsänderung im betrachteten Zeitraum.
- Das Integral der momentanen Änderungsrate f' der Größe f in einem gegebenen Intervall ist die absolute Änderung von f in diesem Intervall.
- Das Integral der Grenzkostenfunktion im $[a; b]$ ist die Änderung der Gesamtkosten bei einer Änderung der Produktionsmenge von a Mengeneinheiten auf b Mengeneinheiten.
- Das Integral der Grenzgewinnfunktion im $[a; b]$ ist die Änderung des Gewinns bei einer Änderung der Produktionsmenge von a Mengeneinheiten auf b Mengeneinheiten.

3.7 Ableitungsfunktionen und ihre Bedeutung

3.7.1 Die erste Ableitung

$f'(x)$ heißt erste Ableitung der Funktion. Diese gibt die Steigung der Funktion an, die mit Hilfe der Tangente gemessen wird.

Bsp.:
$f(x) = x^2 - 3x + 1$
$f'(x) = 2x - 3$
Welche Steigung hat die Funktion an der Stelle $x_0 = 2$?
$f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$
$f'(2) = 1$, das heißt, die Steigung der Funktion f an der Stelle 2 ist 1.

Monotonie:
$f'(x) > 0$: Ist die Steigung positiv, so ist der Graph streng monoton steigend.
$f(x)' < 0$: Ist die Steigung negativ, so ist der Graph streng monoton fallend.

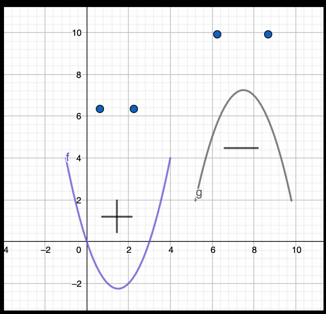
Extremstellen:

Ist x_0 eine lokale Extremstelle, so gilt: $f'(x_0) = 0$
An der Stelle ändert die Funktion ihr Monotonieverhalten.

Für eine lokale Extremstelle ist $f'(x_0) = 0$ nur eine *notwendige Bedingung*, begründet aber noch keine lokale Extremstelle. Damit eine lokale Extremstelle vorliegt, muss die Krümmung positiv oder negativ sein, das heißt ungleich null.

3.7.2 Die zweite Ableitung

$f''(x)$ heißt zweite Ableitung der Funktion. Diese gibt die Krümmung der Funktion an.
Die Krümmung kann positiv (=linksgekrümmt) oder negativ (=rechtsgekrümmt) sowie null sein.



Ist die Krümmung an einer Stelle der Funktion null, so ist diese Stelle eine Wendestelle. An dieser Stelle ändert sich das Krümmungsverhalten der Funktion.

$f''(x) < 0$ heißt, der Graph ist negativ gekrümmt oder rechtsgekrümmt.
$f''(x) > 0$ heißt, der Graph ist positiv gekrümmt oder linksgekrümmt.

Für $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist x_0 eine Wendestelle.

Sattelpunkt:
Sind Krümmung und Steigung der Funktion gleichzeitig null, liegt ein Sattelpunkt vor.
Der Sattelpunkt ist laut Definition ein Wendepunkt mit Steigung null.
Für eine Sattelstelle x_0 gilt:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = 0$$

Lokales Maximum:
Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 eine lokale Maximumstelle.

Lokales Minimum:
Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 eine lokale Minimumstelle.

Zusammenfassung: Berechnung der Null-, Extrem- und Wendestellen:

$$\text{N}: f(x) = 0$$

$$\text{E}: f'(x) = 0$$

$$\text{W}: f''(x) = 0$$

Bemerkung:

Die y-Koordinaten werden ermittelt, indem man x in die Funktionsgleichung einsetzt.