Hohlspiegel

Aufgabennummer: 2_023	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: a) AG 2.1, FA 1.8 b) FA 1.7, FA 1.8 c) AG 2.1, FA 1.2

☒ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

In der Physik spricht man von einem kugelförmigen Hohlspiegel, wenn er Teil einer innenverspiegelten Kugel ist. Charakteristische Punkte beim Hohlspiegel sind der Mittelpunkt *M* der Kugel, der Scheitelpunkt *S* und der Brennpunkt *F* des Spiegels.

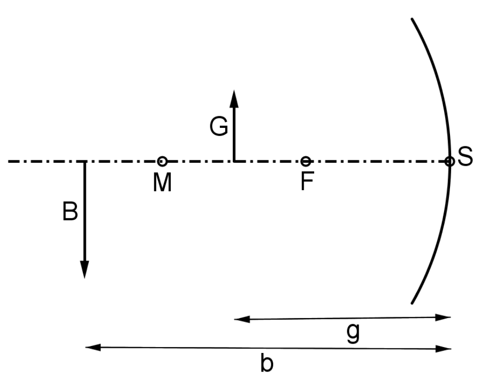
Es gelten folgende Relationen (siehe untenstehende Abbildungen):

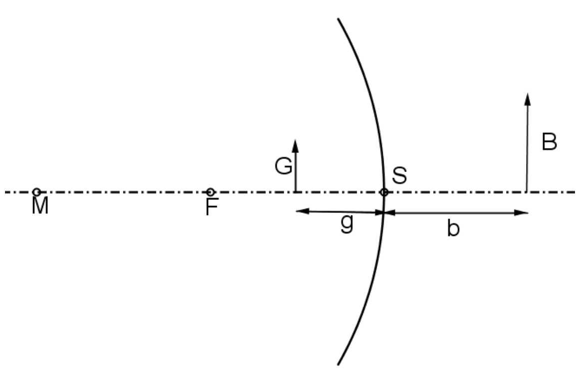
Brennweite *f* des Spiegels: $f = \overline{FS} = \frac{\overline{MS}}{2}$ $(f > 0)$
Radius der Kugel: $\overline{MS} = 2 \cdot f$

Die Entfernung eines Gegenstands *G* (mit der Höhe *G*) vom Scheitelpunkt *S* wird mit *g* $(g > 0)$ bezeichnet, die Entfernung des nach Reflexion der Strahlen am Spiegel entstehenden Bildes *B* (mit der Höhe *B*) vom Scheitel *S* mit *b*.

Das Vorzeichen von *b* hat dabei die folgenden Bedeutungen:
- $b > 0$: Es entsteht ein reelles Bild „vor" dem Spiegel, das auf einem Schirm aufgefangen werden kann.
- $b < 0$: Es entsteht ein virtuelles Bild „hinter" dem Spiegel.

Skizzen des Querschnitts:
- linke Grafik: reelles Bild *B* eines Gegenstandes *G* $(b > 0)$
- rechte Grafik: virtuelles Bild *B* eines Gegenstandes *G* $(b < 0)$





Aufgrund physikalischer Überlegungen gelten unter bestimmten Bedingungen die Beziehungen $\frac{G}{B} = \frac{g}{b}$ und $\frac{G}{B} = \frac{g-f}{f}$. Daraus ergibt sich der Zusammenhang $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Der Quotient $\frac{B}{G}$ bestimmt den Vergrößerungsfaktor; er ist bei einem reellen Bild positiv ($g > 0$ und $b > 0$) und bei einem virtuellen Bild negativ ($g > 0$ und $b < 0$).

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie den Vergrößerungsfaktor $\frac{B}{G}$ für $f = 40$ cm und $g = 50$ cm an!

Geben Sie ein Intervall für die Gegenstandsweite g an, damit ein virtuelles Bild entsteht!

Begründen Sie Ihre Antwort durch eine mathematische Argumentation!

b) Stellen Sie die Bildweite b als Funktion der Gegenstandsweite g bei konstanter Brennweite f dar! Betrachten Sie die Fälle $g = 2f$ sowie $g = f$ und geben Sie die jeweilige Auswirkung für b an!

Was kann mithilfe dieser Funktion über den Grenzwert von b ausgesagt werden, wenn $g > f$ ist und sich g der Brennweite f annähert? Tätigen Sie eine entsprechende Aussage und begründen Sie diese durch Betrachtung von Zähler und Nenner!

c) Leiten Sie aus den gegebenen Beziehungen $\frac{G}{B}$ die oben angeführte Formel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ her! Geben Sie die notwendigen Umformungsschritte an!

Der Ausdruck $\frac{1}{b}$ kann als Funktion in Abhängigkeit von g der Form $\frac{1}{b}(g) = a \cdot g^k + c$ betrachtet werden. Geben Sie die Werte der Parameter a und c sowie des Exponenten k für diesen Fall an!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{1}{b} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{1}{200}$ → Bildweite 200 cm = 2 m

$\frac{B}{G} = \frac{200}{50} = 4$ → vierfache Vergrößerung

Bildweite negativ:

Intervall für g: $(0; f)$ bzw. Angabe des Intervalls durch: $0 < g < f$

Akzeptiert wird auch der Bezug zur ersten Fragestellung mit $f = 40$.

Intervall für g: $(0; 40)$ bzw. $0 < g < 40$

Begründung 1: Aus $b = \frac{g \cdot f}{g - f} < 0$ folgt $g < f$.
Begründung 2: Aus $\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ folgt $g < f$, da der Kehrwert von b dann größer ist als der Kehrwert von f.

b) Funktion: $b(g) = \frac{f \cdot g}{g - f}$

$b(2f) = 2f$; Bildweite und Gegenstandsweite sind gleich groß und entsprechen dem Radius der Kugel. Erweiterung: Auch G und B sind gleich groß. $b(f)$ existiert nicht; der Nenner hat den Wert 0.

(Auch die Form $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ ist als richtig zu werten.)

Annäherung von g an f mit $g > f$:
Der Ausdruck $\frac{f \cdot g}{g - f}$ ist positiv; der Zähler ist eine positive Zahl (auch: nähert sich dem Wert f^2), der Nenner ist positiv und nähert sich dem Wert 0, daher wird b immer größer (der Grenzwert ist unendlich – oder ähnliche Aussagen).

Anmerkungen: Wenn die Form $b(g) = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}$ verwendet wird, sind auch umgangssprachliche Formulierungen wie „oben steht die positive Zahl 1, unten steht etwas Positives, das gegen 0 geht, daher ist der Grenzwert +1" als richtig zu werten. Auch Argumente, bei denen teilweise oder immer „oben" statt „Zähler" und „unten" statt „Nenner" (oder Ähnliches) verwendet wird, sind als richtig zu werten.

c) Zwei mögliche Umformungen werden angeführt:

Variante 1:

$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f}$

$\frac{g}{b} = \frac{g}{f} - 1 \; \Big| : g$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

Variante 2:

$\frac{g}{b} = \frac{g-f}{f} \; \Big| \cdot (b \cdot f)$

$g \cdot f = b \cdot g - f \cdot b \; \Big| : (b \cdot g \cdot f)$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g}$

Daraus ergibt sich direkt der angegebene Zusammenhang.

$\frac{1}{b}(g) = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \;\Rightarrow\; a = -1,\, k = -1,\, c = \frac{1}{f}$

Treibstoffverbrauch

Aufgabennummer: 2_015	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 1.5, FA 2.3, FA 2.5

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☒ gewohnte Hilfsmittel möglich	☐ besondere Technologie erforderlich

Fast vier Fünftel aller Güter werden zumindest auf einem Teil ihres Weges vom Erzeuger zum Konsumenten mit dem Schiff transportiert.

In der Schifffahrt werden Entfernungen in Seemeilen (1 sm = 1,852 km) und Geschwindigkeiten in Knoten (1 K = 1 sm/h) angegeben.

Der stündliche Treibstoffverbrauch y (in Tonnen pro Stunde) des Schiffs *Ozeanexpress* kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit x (in Knoten) durch die Gleichung $y = 0{,}00002x^4 + 0{,}6$ beschrieben werden. Dieses Schiff hat noch einen Treibstoffvorrat von 600 Tonnen.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Formel für die Zeit t (in Stunden) an, die das Schiff mit einer konstanten Geschwindigkeit x unterwegs sein kann, bis dieser Treibstoffvorrat aufgebraucht ist.

Die Funktion f soll den Weg $f(x)$ beschreiben, den das Schiff mit diesem Treibstoffvorrat bei einer konstanten Geschwindigkeit x zurücklegen kann. Geben Sie den Term der Funktion f an!

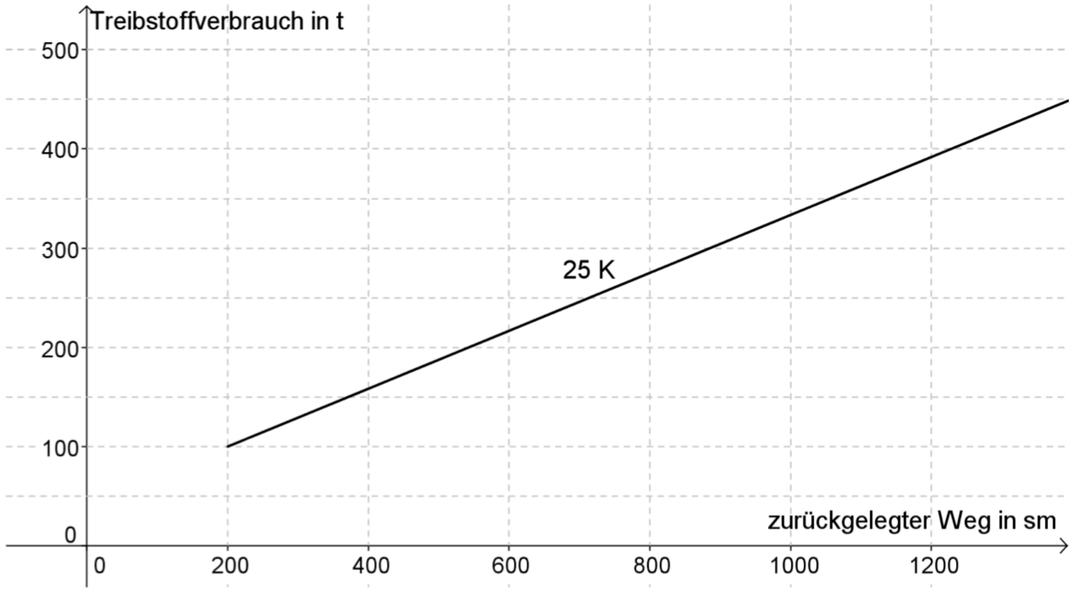
Die Funktion f hat in H $(10|7\,500)$ ein Maximum. Interpretieren Sie die Koordinaten dieses Punktes im vorliegenden Kontext!

b) Der Chef eines Schifffahrtsunternehmens stellte fest, dass sich der Treibstoffverbrauch um rund 50 % verringert, wenn Schiffe statt mit 25 nur noch mit 20 Knoten unterwegs sind.

In der nachstehenden Grafik wird der Treibstoffverbrauch in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg bei einer Geschwindigkeit von 25 Knoten dargestellt.

Überlegen Sie, wie sich diese Grafik ändert, wenn die Geschwindigkeit nur 20 Knoten beträgt, und zeichnen Sie den entsprechenden Graphen ein!

Interpretieren Sie, was die 50%ige Treibstoffreduktion für die Steigung der Geraden bedeutet!



c) Eine Reederei hat den Auftrag erhalten, in einem vorgegebenen Zeitraum eine bestimmte Warenmenge zu transportieren. Ursprünglich plante sie, dafür acht Schiffe einzusetzen.

Geben Sie an, wie viele zusätzliche Schiffe gleichen Typs bei einer Drosselung der Geschwindigkeit von 25 auf 20 Knoten erforderlich sind, damit der Auftrag zeitgerecht ausgeführt werden kann! (Die Stehzeiten der Schiffe sind dabei zu vernachlässigen.)

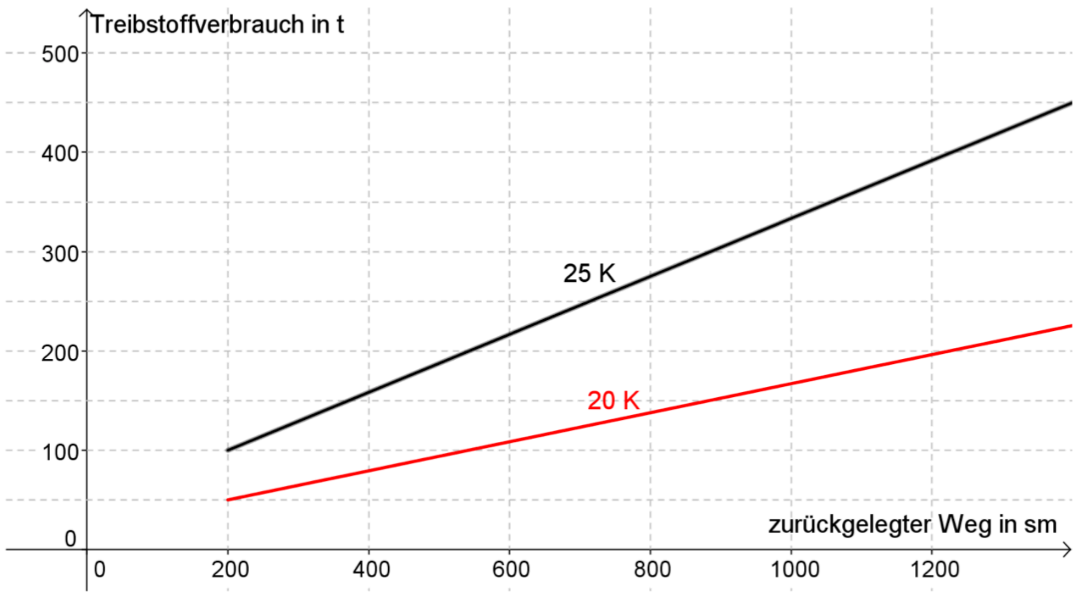
Geben Sie eine Formel an, mit der die erforderliche Anzahl der Schiffe in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit *x* ermittelt werden kann!

Möglicher Lösungsweg

a) $t = \frac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6}$; $f(x) = \frac{600}{0{,}00002x^4 + 0{,}6} \cdot x$

Bei einer Geschwindigkeit von 10 Knoten kann mit dem vorhandenen Treibstoff die längste Strecke, nämlich 7 500 Seemeilen, zurückgelegt werden.

b)



Die Steigung der Geraden wird halbiert, wenn die Treibstoffverbrauch um 50 % reduziert wird.

c) Es müssen zwei weitere Schiffe eingesetzt werden.

Anzahl der Schiffe = $\frac{200}{x}$

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Aufnahme einer Substanz ins Blut

Aufgabennummer: 2_026	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 2.1, AN 3.3, FA 1.2, FA 1.5, FA 1.7	

Wenn bei einer medizinischen Behandlung eine Substanz verabreicht wird, kann die Konzentration der Substanz im Blut (kurz: Blutkonzentration) in Abhängigkeit von der Zeit t in manchen Fällen durch eine sogenannte Bateman-Funktion $c(t) = d \cdot (e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t})$ mit den personenbezogenen Parametern $a, b, d > 0, a < b$ modelliert werden. Die Zeit t wird in Stunden gemessen, $t = 0$ entspricht dem Zeitpunkt der Verabreichung der Substanz.

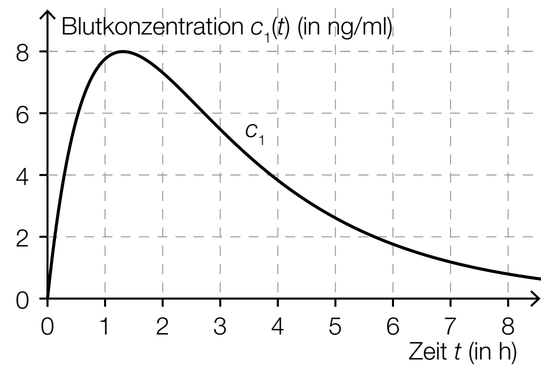
Die Bioverfügbarkeit f gibt den Anteil der verabreichten Substanz an, der unverändert in den Blutkreislauf gelangt. Bei einer intravenösen Verabreichung (d. h. einer direkten Verabreichung in eine Vene) beträgt der Wert der Bioverfügbarkeit 1.

Das Verteilungsvolumen V beschreibt, in welchem Ausmaß sich die Substanz aus dem Blut in das Gewebe verteilt.

Der Parameter d ist direkt proportional zur verabreichten Dosis D und zur Bioverfügbarkeit f, außerdem ist d indirekt proportional zum Verteilungsvolumen V.

Die nachstehende Abbildung zeigt exemplarisch den zeitlichen Verlauf der Blutkonzentration in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) für den Fall der Einnahme einer bestimmten Dosis der Substanz Lysergsäurediethylamid und kann mit der Bateman-Funktion c_1 mit den Parametern $d = 19{,}5$, $a = 0{,}4$ und $b = 1{,}3$ beschrieben werden.

Der Graph der Bateman-Funktion weist für große Zeiten t einen asymptotischen Verlauf gegen die Zeitachse auf.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration für die in der Einleitung beschriebene Bateman-Funktion c_1 berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Begründen Sie allgemein, warum der Wert des Parameters d in der Bateman-Funktion c nur die Größe der maximalen Blutkonzentration beeinflusst, aber nicht den Zeitpunkt, zu dem diese erreicht wird!

b) Die Werte der Parameter a, b und d der Bateman-Funktion variieren von Patient zu Patient. Es wird im Folgenden angenommen, dass der Wert des Parameters d für drei untersuchte Patienten P_1, P_2, P_3 identisch ist.

Für den Patienten P_1 gelten die Parameter aus der Einleitung. Bei Patient P_2 ist der Wert des Parameters a etwas größer als bei Patient P_1.
Beschreiben Sie, wie sich der Graph der Bateman-Funktion verändert, wenn der Wert des Parameters a erhöht wird, der Parameter b unverändert bleibt und $a < b$ gilt! Interpretieren Sie diese Veränderung im gegebenen Kontext!

Patient P_3 erreicht (bei gleicher verabreichter Dosis) die maximale Blutkonzentration zeitgleich mit Patient P_1, die maximale Blutkonzentration von Patient P_3 ist aber größer.
Ermitteln Sie, wie sich die Werte von a und b bei der Bateman-Funktion für Patient P_3 von jenen von Patient P_1 unterscheiden!

c) Kreuzen Sie diejenige Formel an, die den Zusammenhang zwischen dem Parameter d der Bateman-Funktion und den in der Einleitung beschriebenen Größen V, D und f korrekt beschreibt! Der Parameter λ ist dabei ein allgemeiner Proportionalitätsfaktor.

$d = \lambda \cdot \frac{D}{V \cdot f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot V}{f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{V \cdot f}{D}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{V}{D \cdot f}$	☐
$d = \lambda \cdot \frac{f}{V \cdot D}$	☐

Bei einem konstanten Wert des Parameters d und der Bioverfügbarkeit f kann man die verabreichte Dosis $D(V)$ als Funktion D in Abhängigkeit vom Verteilungsvolumen V auffassen. Beziehen Sie sich auf die von Ihnen angekreuzte Formel und geben Sie für die Parameterwerte der in der Einleitung dargestellten Bateman-Funktion und für den Fall einer intravenösen Verabreichung die Funktionsgleichung $D(V)$ an! Geben Sie weiters an, um welchen Funktionstyp es sich bei D handelt!

Möglicher Lösungsweg

a) $c_1(t) = 19{,}5 \cdot (e^{-0{,}4 \cdot t} - e^{-1{,}3 \cdot t})$

$c_1'(t) = 19{,}5 \cdot (-0{,}4 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t} + 1{,}3 \cdot e^{-1{,}3 \cdot t}) = 0$

$t \approx 1{,}31$ Stunden

$c_1''(1{,}31) \approx -4{,}15 < 0$

Mögliche Begründungen:

Für die Berechnung des Zeitpunkts der (lokalen) maximalen Blutkonzentration muss die Gleichung $c'(t) = 0$ nach t gelöst werden. Der Parameter d fällt bei dieser Berechnung weg und beeinflusst somit nur die Höhe der maximalen Blutkonzentration zum ermittelten Zeitpunkt.

oder:

$c'(t) = d \cdot (-a \cdot e^{-a \cdot t} + b \cdot e^{-b \cdot t}) = 0 \;\Rightarrow\; t = \frac{\ln(a) - \ln(b)}{a - b} \;\Rightarrow$ Der Parameter d tritt in dieser Formel nicht auf. Der Zeitpunkt der maximalen Blutkonzentration t ist somit von d unabhängig.

b) Bei einer Erhöhung des Wertes von a verschiebt sich das lokale Maximum der Funktion bei einem niedrigeren Funktionswert „nach links“. Das bedeutet, dass die maximale Blutkonzentration früher erreicht wird und geringer ist.

Bei Patient P_3 ist (bei der Bateman-Funktion) der Wert von a kleiner und der Wert von b größer als bei (der Bateman-Funktion von) Patient P_1.

c)

$d = \lambda \cdot \frac{D \cdot f}{V}$	☒

Die Funktionsgleichung lautet $D(V) = \frac{19{,}5}{\lambda} \cdot V$.

Es handelt sich um eine lineare Funktion.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Stratosphärensprung

Aufgabennummer: 2_028	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 2.2	

Am 14.10.2012 sprang der österreichische Extremsportler Felix Baumgartner aus einer Höhe von 38 969 m über dem Meeresspiegel aus einer Raumkapsel. Er erreichte nach 50 s in der nahezu luftleeren Stratosphäre eine Höchstgeschwindigkeit von 1 357,6 km/h (≈ 377,1 m/s) und überschritt dabei als erster Mensch im freien Fall die Schallgeschwindigkeit, die bei 20 °C ca. 1 236 km/h (≈ 343,3 m/s) beträgt, in der Stratosphäre wegen der niedrigen Lufttemperaturen aber deutlich geringer ist.

Die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft hängt bei Windstille nur von der Lufttemperatur T ab. Für die Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) werden nachstehend zwei Formeln angegeben, die – bis auf einen (gerundeten) Faktor – äquivalent sind. Die Lufttemperatur T wird in beiden Formeln in °C angegeben.

$$v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)}$$

$$v_2 = 331{,}5 \cdot \sqrt{1 + \frac{T}{273{,}15}}$$

Aufgabenstellung:

a) Die Fallbeschleunigung a eines Körpers im Schwerefeld der Erde ist abhängig vom Abstand des Körpers zum Erdmittelpunkt. Die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche auf Meeresniveau, d. h. bei einer Entfernung von $r = 6\,371\,000$ m vom Erdmittelpunkt, beträgt bei vernachlässigbarem Luftwiderstand ca. 9,81 m/s².
Für die Fallbeschleunigung a gilt: $a(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante, M die Erdmasse und r der Abstand des Körpers vom Erdmittelpunkt ist. Es gilt:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2};\ M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Berechnen Sie den Wert der Fallbeschleunigung, die auf Felix Baumgartner beim Absprung aus der Raumkapsel wirkte!

$a =$ _______ m/s²

Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung, die auf Felix Baumgartner bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit wirkte!

b) Als Felix Baumgartner seine Höchstgeschwindigkeit erreichte, bewegte er sich um 25 % schneller als der Schall in dieser Höhe.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der unter Verwendung einer der beiden in der Einleitung genannten Formeln die Lufttemperatur, die zu diesem Zeitpunkt geherrscht hat, berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Lufttemperatur!

Untersuchen Sie mithilfe der beiden Formeln den Quotienten der Schallgeschwindigkeiten im Lufttemperaturintervall [–60 °C; 20 °C] in Schritten von 10 °C und geben Sie eine Formel an, die in diesem Lufttemperaturintervall den Zusammenhang zwischen v_1 und v_2 beschreibt!

c) Zeigen Sie mithilfe von Äquivalenzumformungen, dass die beiden Formeln für die Schallgeschwindigkeit in der Einleitung bis auf einen (gerundeten) Faktor äquivalent sind! Gehen Sie dabei von der Formel für v_1 aus!

Die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit v_1 von der Lufttemperatur T kann im Lufttemperaturintervall [–20 °C; 40 °C] in guter Näherung durch eine lineare Funktion f mit $f(T) = k \cdot T + d$ modelliert werden.
Ermitteln Sie die Werte der Parameter k und d und interpretieren Sie diese Werte im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $r_1 = 6\,371\,000 + 38\,969 = 6\,409\,969$ m

$a(r_1) = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6\,409\,969^2} = 9{,}69$ m/s²

mittlere Beschleunigung: $a = \frac{377{,}1}{50} = 7{,}54$ m/s²

b) $\frac{377{,}1}{1{,}25} \approx 301{,}7$ m/s

$v_1(T) = 301{,}7 \quad \Rightarrow \quad T \approx -46{,}7$ °C

bzw. $v_2(T) = 301{,}7 \quad \Rightarrow \quad T \approx -46{,}9$ °C

T in °C	v_1 in m/s	v_2 in m/s	$\frac{v_2}{v_1}$
–60	292,67	292,84	1,00055
–50	299,46	299,63	1,00055
–40	306,10	306,27	1,00055
–30	312,59	312,77	1,00055
–20	318,96	319,13	1,00055
–10	325,20	325,38	1,00055
0	331,32	331,50	1,00055
10	337,33	337,51	1,00055
20	343,23	343,42	1,00055

$v_2 \approx 1{,}00055 \cdot v_1$ bzw. $v_1 \approx 0{,}99945 \cdot v_2$

c) $v_1 = \sqrt{401{,}87 \cdot (T + 273{,}15)} = \sqrt{401{,}87 \cdot 273{,}15 \cdot \left(\frac{T}{273{,}15} + 1\right)} \approx$

$\approx \sqrt{109\,770{,}8 \cdot \left(\frac{T}{273{,}15} + 1\right)} \approx 331{,}3 \cdot \sqrt{\frac{T}{273{,}15} + 1}$

Der Faktor 331,3 unterscheidet sich nur geringfügig vom Faktor 331,5 in der Formel für v_2.

$k = \frac{v_1(40) - v_1(-20)}{60} \approx 0{,}6$ ... pro 1 °C nimmt die Schallgeschwindigkeit um ca. 0,6 m/s zu

$d = v_1(0) \approx 331{,}3$ ... Schallgeschwindigkeit bei 0 °C

Laufband

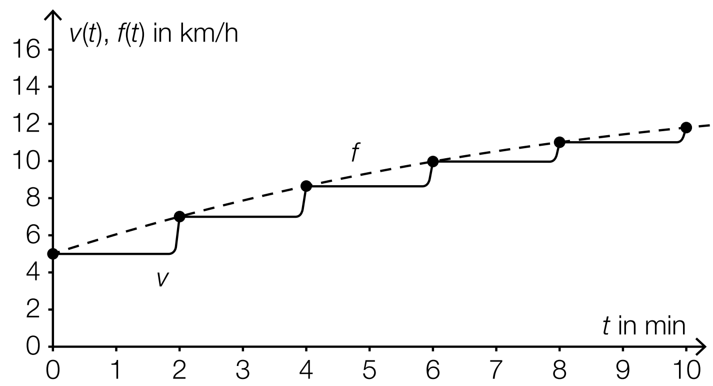
Aufgabennummer: 2_029	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.2, AN 3.3, AN 4.2, FA 1.4, FA 1.7, FA 2.6, WS 1.3	

Ein Laufband ist ein Sportgerät, auf dem verschiedene Lauftrainingsprogramme absolviert werden können.

Bei einem individuell erstellten, 30-minütigen Trainingsprogramm ändert sich die Laufbandgeschwindigkeit alle zwei Minuten. Die von der Zeit t (in min) abhängigen Laufbandgeschwindigkeiten (in km/h) sind Funktionswerte an bestimmten Stellen der Funktion f mit
$f(t) = 0{,}0008 \cdot t^3 - 0{,}05 \cdot t^2 + 1{,}1 \cdot t + 5$.

Die Laufbandgeschwindigkeit während der ersten beiden Minuten entspricht dem Funktionswert $f(0)$, die Geschwindigkeit in den beiden darauffolgenden Minuten dem Wert $f(2)$ usw. Für die Berechnungen wird vereinfacht angenommen, dass sich die Laufbandgeschwindigkeit innerhalb sehr kurzer Zeit ändert.

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft die Entwicklung der Laufbandgeschwindigkeit in den ersten zehn Minuten des Trainings, wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit des Laufbands zum Zeitpunkt t angibt. Das Training beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie einen Ausdruck an, mit dem das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten während des 30-minütigen Trainingsprogramms berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

Begründen Sie, warum das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ während des 30-minütigen Trainingsprogramms entspricht!
Berechnen Sie unter Verwendung der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$ die während des 30-minütigen Trainingsprogramms bewältigte Strecke!

b) Geben Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Laufbands während des 30-minütigen Trainingsprogramms an!

v_{min} = ________________________________ km/h

v_{max} = ________________________________ km/h

Begründen Sie, warum zu den Zeitpunkten t_{min} und t_{max}, zu denen die minimale bzw. die maximale Geschwindigkeit des Laufbands in dem 30-minütigen Trainingsprogramm erreicht wird, $f'(t_{min}) \neq 0$ und $f'(t_{max}) \neq 0$ gilt!

c) Geben Sie den Wert von $v'(1)$ an und interpretieren Sie diesen Wert (mit Angabe der Einheit) im gegebenen Kontext!

$v'(1)$ = ________________________________

Beschreiben Sie anhand des Graphen in der Einleitung, wie der Graph der Ableitungsfunktion v' im Intervall [0; 30] verlaufen müsste!

d) Die in den ersten zehn Trainingsminuten zurückgelegte Weglänge kann näherungsweise mit dem Integral $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.
Berechnen Sie diesen Näherungswert und erläutern Sie die Bedeutung des Faktors $\frac{1}{60}$!

Geben Sie die absolute Abweichung des berechneten Näherungswertes von der tatsächlich zurückgelegten Weglänge während der ersten zehn Minuten in Metern an!

e) Unter bestimmten Voraussetzungen ist der Energiebedarf einer Person bei einem Lauftraining direkt proportional zur Masse der Person (in kg) und zur zurückgelegten Weglänge (in km).
Die nachstehende Tabelle zeigt den Energiebedarf (in kcal) einer 80 kg schweren Person bei einem Lauftraining in Abhängigkeit von der Dauer t des Trainings. Die Person läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 10 km/h .

	t = 15 min	t = 30 min	t = 45 min	t = 60 min
Energiebedarf in kcal	194	388	582	776

Zeigen Sie anhand der Tabellenwerte die direkte Proportionalität des Energiebedarfs zur zurückgelegten Wegstrecke und berechnen Sie den Proportionalitätsfaktor k!

Beim Lauftraining wird die Geschwindigkeit häufig als „Tempo“ in min/km umschrieben. Berechnen Sie für die unten angeführten Geschwindigkeiten unter Verwendung des Proportionalitätsfaktors k für eine 90 kg schwere Person jeweils das Tempo und den Energiebedarf (in kcal) für die angegebene Zeitdauer!

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8		
10			
12			

Möglicher Lösungsweg

a) $\bar{v} = \frac{1}{15} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + ... + f(28)) \approx 11{,}57$

Das arithmetische Mittel der Laufbandgeschwindigkeiten beträgt 11,57 km/h.

Das arithmetische Mittel entspricht der mittleren Geschwindigkeit während des 30-minütigen Trainingsprogramms, weil die Geschwindigkeiten $v(0), \ldots, v(28)$ in gleich langen Zeitintervallen (2 min) jeweils konstant sind.

zurückgelegte Weglänge: 0,5 h · 11,57 km/h = 5,785 km

b) v_{min} = 5 km/h
v_{max} = 14,16 km/h

t_{min} und t_{max} sind keine lokalen Extremstellen der Funktion f, weshalb die 1. Ableitung von f an diesen Stellen nicht null ist.

c) $v'(1) = 0$

Mögliche Interpretationen:

Die Beschleunigung (momentane Geschwindigkeitsänderung) des Laufbands nach 1 Minute beträgt 0 m/s^2.

oder:

Das Laufband (die Läuferin / der Läufer) bewegt sich während der ersten 2 Minuten mit konstanter Geschwindigkeit, d.h., seine Beschleunigung ist zum Zeitpunkt t = 1 min gleich null.

Der Graph von v' würde auf der 1. Achse verlaufen und nur zu den Zeitpunkten der Geschwindigkeitsänderungen (t = 2, t = 4, t = 6, ...) sehr hohe Werte annehmen.

d) $\frac{1}{60} \cdot \int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 1{,}506$

zurückgelegte Weglänge: ca. 1,51 km

Mögliche Begründungen:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die Geschwindigkeiten von km/h in km/min umzurechnen, da die Zeiten (Intervallgrenzen) in Minuten gegeben sind (1 h = 60 min).

oder:

Der Faktor $\frac{1}{60}$ ist erforderlich, um die pro Stunde zurückgelegten Wegstrecken auf die pro Minute zurückgelegten Wegstrecken umzurechnen.

Für die tatsächlich zurückgelegte Weglänge gilt:
$\frac{2}{60} \cdot (f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)) \approx 1{,}388$ km

⇒ Der Näherungswert für die Weglänge weicht um ca. 118 m vom exakten Wert ab.

e) $194 = k \cdot 80 \cdot 2{,}5$
$k = 0{,}97$

Bei der doppelten/dreifachen/vierfachen Laufzeit wird die doppelte/dreifache/vierfache Strecke zurückgelegt und auch der Energiebedarf ist doppelt/dreimal/viermal so groß.

Geschwindigkeit in km/h	Tempo in min/km	Energiebedarf in 15 min	Energiebedarf in 30 min
7,5	8	163,7	327,4
10	6	218,25	436,5
12	5	261,9	523,8

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

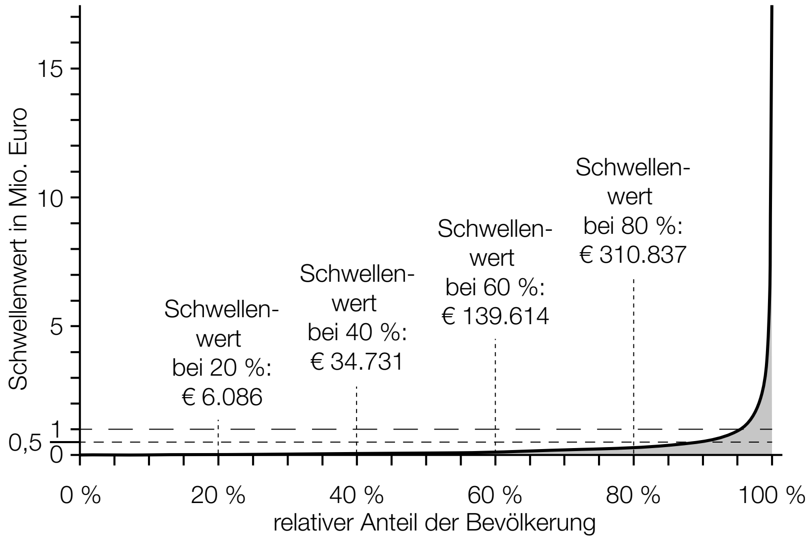
Vermögensverteilung*

Aufgabennummer: 2_043	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 4.3, WS 1.1	

Das gesamte Vermögen eines Landes ist häufig sehr ungleich auf die Bevölkerung verteilt. Eine im Jahr 2012 durchgeführte Erhebung der Europäischen Zentralbank (EZB) lieferte Daten für eine Abschätzung, welcher Anteil der österreichischen Bevölkerung über welches Vermögen (in Millionen Euro) verfügt. Die Ergebnisse der darauf basierenden Studie sind in Abbildung 1 dargestellt. Beispielsweise bedeutet der Schwellenwert bei 20 %, dass die vermögensschwächsten 20 % der österreichischen Bevölkerung ein Vermögen von maximal € 6.086 besitzen.
Im Jahr 2012 betrug die Bevölkerungszahl von Österreich ca. 8,45 Millionen Einwohner/innen.

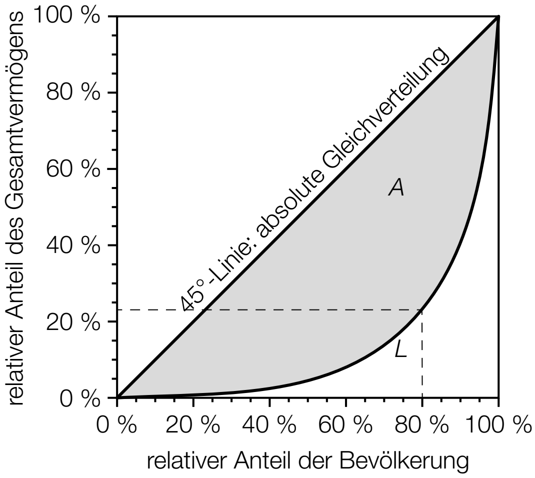
Die sogenannte *Lorenz-Kurve L* (vgl. Abbildung 2) veranschaulicht, welcher relative Anteil der Bevölkerung welchen relativen Anteil des Gesamtvermögens besitzt. So besitzen laut der EZB-Studie die vermögensschwächsten 80 % der österreichischen Bevölkerung nur ca. 23 % des gesamten Vermögens.

Abbildung 1:



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Abbildung 2:



Quelle: Eckerstorfer, Paul, Johannes Halak et al.: *Vermögen in Österreich. Bericht zum Forschungsprojekt „Reichtum im Wandel“.* Linz: Johannes-Kepler-Universität Linz 2013, S. 12–13. http://media.arbeiterkammer.at/PDF/Vermoegen_in_Oesterreich.pdf [17.10.2014] (adaptiert).

Der Gini-Koeffizient ist ein Maß für die Ungleichverteilung des Vermögens in einem Land. Er entspricht dem Quotienten aus dem Inhalt der markierten Fläche A (zwischen der 45°-Linie und der Lorenz-Kurve L) und dem Flächeninhalt desjenigen Dreiecks, das durch die Eckpunkte (0 %|0 %), (100 %|0 %) und (100 %|100 %) festgelegt ist.
Laut EZB-Studie hatte der Gini-Koeffizient für Österreich für das Jahr 2012 den Wert 0,76.

Aufgabenstellung:

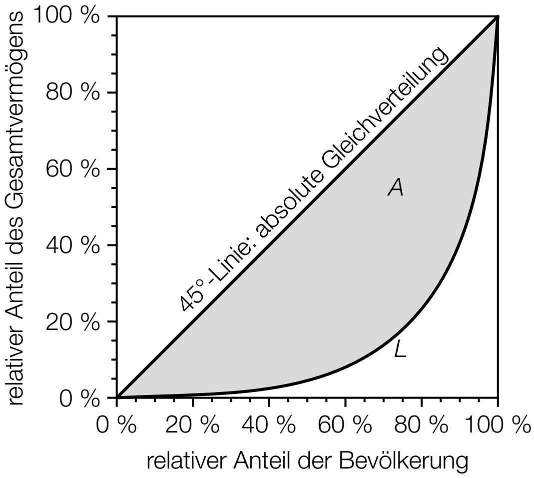
a) Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1, wie viele Personen in Österreich im Jahr 2012 ein Vermögen von mindestens einer Million Euro besaßen!

Berechnen Sie unter der vereinfachenden Annahme, dass die Schwellenwerte im Intervall [20 %; 40 %] annähernd linear zunehmen, einen Näherungswert des Schwellenwerts bei 25 %!

b) Ermitteln Sie, welchen relativen Anteil am Gesamtvermögen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen!

Laut einer Studie der Universität Linz aus dem Jahr 2013 besitzen die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung einen deutlich größeren relativen Anteil am Gesamtvermögen, als es in der EZB-Studie behauptet wurde.

Unter Berücksichtigung der Studie der Universität Linz erhält man eine andere Lorenz-Kurve L^* als die abgebildete Lorenz-Kurve L. Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung einen möglichen Verlauf einer solchen Lorenz-Kurve L^*!



c) Die Lorenz-Kurve wird im Intervall [0; 1] durch eine reelle Funktion in Abhängigkeit von x modelliert, wobei x den relativen Anteil der Bevölkerung angibt.

Berechnen Sie den Gini-Koeffizienten für ein Land S, dessen Lorenz-Kurve für das Jahr 2012 durch die Funktion L_1 mit $L_1(x) = 0{,}9 \cdot x^5 + 0{,}08 \cdot x^2 + 0{,}02 \cdot x$ im Intervall [0; 1] beschrieben werden kann!

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Gini-Koeffizienten für Österreich für das Jahr 2012 und geben Sie an, ob das Gesamtvermögen in diesem Jahr in Österreich oder im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war!

Lösungserwartung

a) Im Jahr 2012 hatten in Österreich ca. 422500 Personen (laut Abbildung 1: ca. 5 % der Bevölkerung) ein Vermögen von mindestens einer Million Euro.

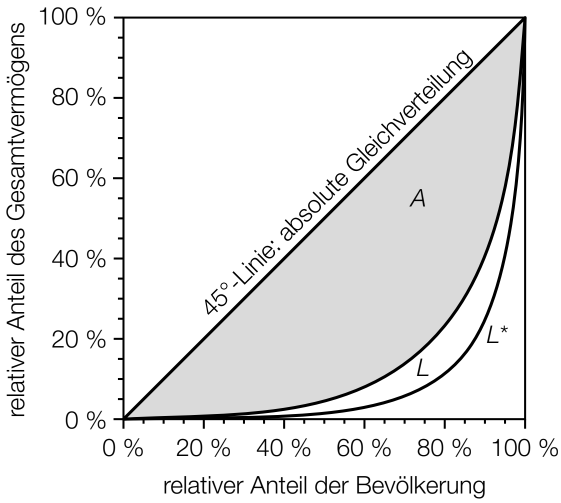
Mögliche Vorgehensweise:

$6086 + \frac{34731 - 6086}{4} = 13247{,}25$

Der Näherungswert für den Schwellenwert bei 25 % liegt bei ca. € 13.247.

b) Die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen ca. 60 % des Vermögens.

Möglicher Verlauf von L^*:



c) Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}5 - \int_0^1 L_1(x)\,dx = 0{,}31\dot{3}$

$\frac{0{,}31\dot{3}}{0{,}5} \approx 0{,}63$

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 hatte für das Land S etwa den Wert 0,63.

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 war für das Land S niedriger als jener für Österreich. Das bedeutet, dass in diesem Jahr das Gesamtvermögen im Land S gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war als in Österreich.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch die Angabe des richtigen relativen Anteils als richtig zu werten ist.
Toleranzintervalle: [338 000; 507 000] bzw. [4 %; 6 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [€ 13.200; € 13.325]

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [58 %; 62 %]
– Ein Punkt für einen richtig eingezeichneten Verlauf einer möglichen Lorenz-Kurve L^*, wobei der Funktionswert an der Stelle 90 % kleiner als 42 % sein muss und die Funktion monoton steigend sein muss.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,62; 0,63]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für einen korrekten Vergleich und eine (sinngemäß) richtige Deutung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Kondensator*

Aufgabennummer: 2_042	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.1, FA 1.5, AN 4.3	

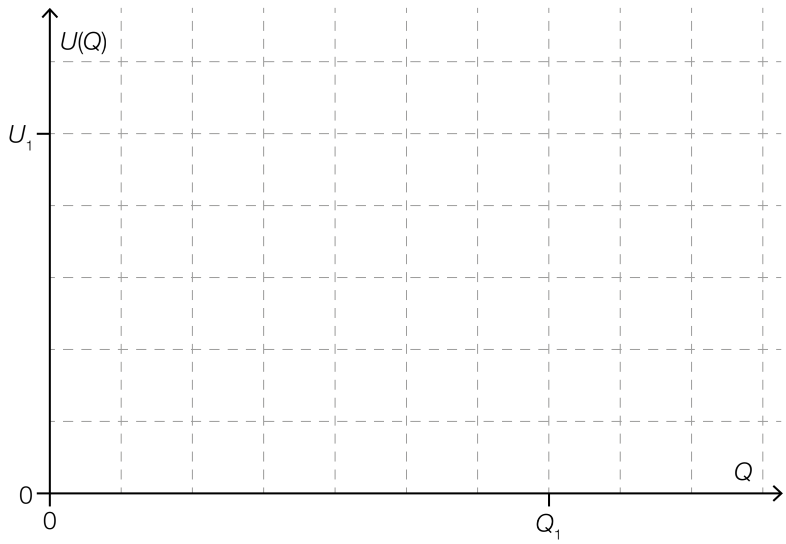
Ein Kondensator ist ein elektrisches Bauelement, mit dem elektrische Ladung und die daraus resultierende elektrische Energie gespeichert werden kann.
Eine einfache Form des Kondensators ist der sogenannte *Plattenkondensator*. Er besteht aus zwei einander gegenüberliegenden elektrisch leitfähigen Flächen, die als *Kondensatorplatten* bezeichnet werden.

Das Verhältnis zwischen der gespeicherten Ladung Q und der an die Kondensatorplatten angelegten (Gleich-)Spannung U wird als Kapazität C bezeichnet.

Es gilt $C = \frac{Q}{U}$, wobei C in der Einheit Farad angegeben wird.

Aufgabenstellung:

a) Ein Kondensator mit einer bestimmten Kapazität C wird bis zur Ladungsmenge Q_1 aufgeladen, die gemessene Spannung $U(Q_1)$ hat dann den Wert U_1.
Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung die Spannung U beim Ladevorgang am Kondensator in Abhängigkeit von der Ladung Q!



Die in diesem Kondensator gespeicherte Energie W kann mithilfe der Formel $W = \int_0^{Q_1} U(Q)\,\mathrm{d}Q$ berechnet werden.
Geben Sie eine Formel für die gespeicherte Energie W in Abhängigkeit von U_1 und C an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

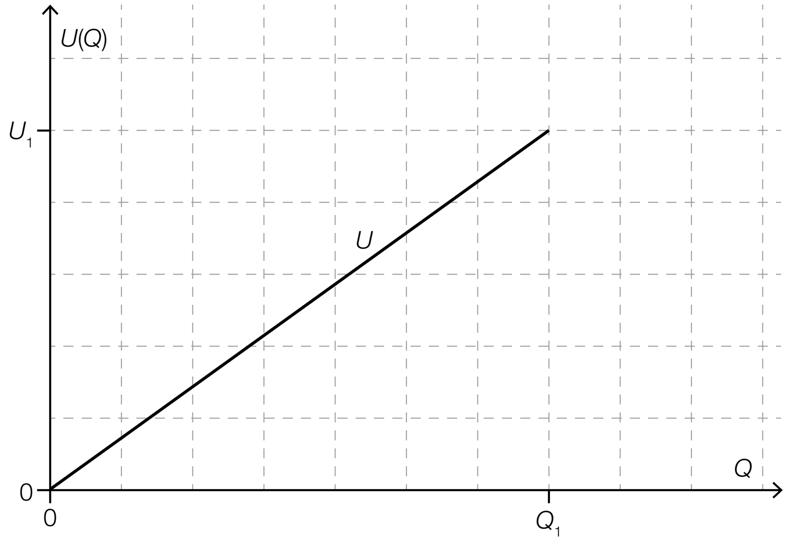
b) Bei einem Ladevorgang kann die Spannung zwischen den Kondensatorplatten als Funktion U in Abhängigkeit von der Zeit t durch $U(t) = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ beschrieben werden. Dabei ist $U^* > 0$ die an den Kondensator angelegte Spannung und $\tau > 0$ eine für den Ladevorgang charakteristische Konstante. Der Ladevorgang beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Zeit, nach der die Spannung $U(t)$ zwischen den Kondensatorplatten 99 % der angelegten Spannung U^* beträgt, wird als *Ladezeit* bezeichnet.
Bestimmen Sie die Ladezeit eines Kondensators in Abhängigkeit von τ!

Geben Sie eine Formel für die momentane Änderungsrate der Spannung zwischen den Kondensatorplatten in Abhängigkeit von t an und zeigen Sie mithilfe dieser Formel, dass die Spannung während des Ladevorgangs ständig steigt!

Lösungserwartung

a)



$$W = \int_0^{Q_1} U(Q)\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{2} \cdot U_1 \cdot Q_1 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_1^2$$

b) Mögliche Vorgehensweise:

$$0{,}99 \cdot U^* = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$0{,}01 = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ladezeit: $t = -\tau \cdot \ln(0{,}01)$ bzw. $t = \tau \cdot \ln(100)$

Mögliche Vorgehensweise:

$$U'(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot U^*}{\tau}$$

Es gilt: $U^* > 0$, $\tau > 0$, $e^{-\frac{t}{\tau}} > 0 \quad \Rightarrow \quad U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.
Da $U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, ist U während des Ladevorgangs streng monoton steigend.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine richtige Skizze.
– Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen der Lösung sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine richtige Formel und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Wings for Life World Run*

Aufgabennummer: 2_048	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 5.3, AN 1.1, AN 4.3, WS 1.1

Der *Wings for Life World Run* ist ein in vielen Ländern zur gleichen Zeit stattfindender Volkslauf. Eine Besonderheit dieses Laufs ist, dass keine vorgegebene Distanz zurückgelegt werden muss.

Es starten alle Läufer/innen weltweit gleichzeitig um 11:00 UTC (koordinierte Weltzeit). Vom jeweiligen Startpunkt startet 30 Minuten später ein Auto, das sogenannte *Catcher-Car*, und fährt die Strecke ab. Dabei erhöht sich die Geschwindigkeit des Autos nach einem vorgegebenen Zeitplan. Für jede teilnehmende Person endet der Lauf, wenn sie vom Catcher-Car überholt wird. Das Ergebnis für eine teilnehmende Person ist die Länge derjenigen Strecke, die diese Person bis zum Zeitpunkt des Überholens durch das Catcher-Car zurückgelegt hat.

Für die Geschwindigkeiten des Catcher-Cars wurden bis zum Jahr 2018 folgende Werte vorgegeben (diese dienen modellhaft als Grundlage für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenstellungen):

Uhrzeit	Geschwindigkeit
von 11:30 bis 12:30	15 km/h
von 12:30 bis 13:30	16 km/h
von 13:30 bis 14:30	17 km/h
von 14:30 bis 15:30	20 km/h
von 15:30 bis 16:30	20 km/h
ab 16:30	35 km/h

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Eine Person läuft mit konstanter Geschwindigkeit, bis sie vom Catcher-Car überholt wird. Diese Person wird während der 15-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.
Die Laufzeit t der Person hängt von der Geschwindigkeit v der Person ab.

Geben Sie einen Term an, mit dem t bei Kenntnis von v berechnet werden kann (mit t in h und v in km/h)!

$t =$ ____

Im Jahr 2016 betrug die (konstante) Geschwindigkeit einer Person bei diesem Lauf 9 km/h. Ein Jahr später war ihre (konstante) Geschwindigkeit bei diesem Lauf um 10 % höher.

Geben Sie an, um wie viel Prozent sich dadurch die Streckenlänge erhöhte, die diese Person zurücklegte, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde!

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. ______________ %.

b) Eine bestimmte gut trainierte Person läuft während der ersten Stunde mit einer konstanten Geschwindigkeit und benötigt dabei pro Kilometer 5 Minuten. Anschließend wird sie langsamer. Ab diesem Zeitpunkt (also für $t \geq 1$) kann ihre Geschwindigkeit mithilfe der Funktion v in Abhängigkeit von der gelaufenen Zeit modelliert werden. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ gilt:

$v(t) = 12 \cdot 0{,}7^{t-1}$ mit t in h und $v(t)$ in km/h

Deuten Sie den Ausdruck $12 + \int_1^b v(t)\,\mathrm{d}t$ mit $b \geq 1$ im gegebenen Kontext!

Berechnen Sie die Uhrzeit, zu der das Catcher-Car diese Person überholt!

Uhrzeit: __ __ : __ __ UTC

c) Eine Gruppe von Läuferinnen und Läufern wird während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt. Juri schließt aus dieser Information, dass diese Gruppe nicht weniger als 40 km und nicht mehr als 88 km zurückgelegt hat, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde. Leo meint zu dieser Behauptung: „Deine Aussage ist wahr, aber ich könnte ein kleineres Intervall nennen, das ebenso zutrifft.“

Geben Sie an, ob die Behauptung von Leo stimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

In Wien legte 2017 die schnellste Teilnehmerin eine Strecke von 51,72 km zurück, bis sie vom Catcher-Car überholt wurde.

Berechnen Sie ihre durchschnittliche Geschwindigkeit $\overline{v}$!

$\overline{v}$ = ____ km/h

Lösungserwartung

a) möglicher Term:

$v \cdot t = 15 \cdot (t - 0{,}5) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7{,}5}{15 - v}$

mögliche Vorgehensweise:

$s = v \cdot t$

$s = v \cdot \frac{7{,}5}{15 - v}$

$v = 9$ km/h: $s = 11{,}25$ km

$v = 9{,}9$ km/h: $s \approx 14{,}559$ km

$\frac{14{,}559}{11{,}25} \approx 1{,}294$

Die zurückgelegte Streckenlänge erhöhte sich dadurch um ca. 29,4 %.

b) mögliche Deutung:

Der Ausdruck beschreibt die Streckenlänge, die die Person bis zum Zeitpunkt $t = b$ zurücklegt.

mögliche Vorgehensweise:

$12 + \int_1^b v(t)\,dt = 15 + 16 \cdot (b - 1{,}5) \quad \Rightarrow \quad b \approx 1{,}878$

Die Laufzeit der Person bis zum Zeitpunkt des Überholens beträgt ca. 1 h 53 min.
Uhrzeit: 12:53 UTC

c) Die Behauptung von Leo stimmt.

mögliche Begründung:

Das Catcher-Car legt bis zum Beginn der 20-km/h-Phase 48 km zurück, daher muss der Läufer zumindest 48 km zurückgelegt haben. Das Catcher-Car legt innerhalb der 20-km/h-Phase weitere 40 km zurück, bevor es die 35-km/h-Phase startet. Daher legt der Läufer höchstens 88 km zurück, wenn er in dieser Phase überholt wird. Somit ist es Leo möglich, ein kleineres Intervall anzugeben. (Das kleinstmögliche Intervall beträgt [48 km; 88 km].)

Die Teilnehmerin wurde während der 20-km/h-Phase des Catcher-Cars überholt.

$t = 3{,}5 + \frac{3{,}72}{20} = 3{,}686$ h

$\bar{v} = \frac{51{,}72}{3{,}686} \approx 14{,}03$ km/h

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [29 %; 30 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für eine richtige Deutung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch 12:52 UTC als richtig zu werten ist.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Behauptung von Leo stimmt, und eine richtige Begründung. Die Begründung ist ausreichend, wenn aus ihr klar hervorgeht, dass die Breite des Intervalls durch Vergrößerung der linken Intervallgrenze verringert werden kann, die Angabe eines konkreten Intervalls ist dafür nicht erforderlich.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [13,5; 14,5]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Bremsvorgang*

Aufgabennummer: 2_051	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.2, AN 1.1, AN 3.2, AN 4.3	

Der Bremsweg s_B ist die Länge derjenigen Strecke, die ein Fahrzeug ab dem Wirksamwerden der Bremsen bis zum Stillstand zurücklegt. Entscheidend für den Bremsweg sind die Fahrgeschwindigkeit v_0 des Fahrzeugs zu Beginn des Bremsvorgangs und die Bremsverzögerung b. Der Bremsweg s_B kann mit der Formel $s_B = \frac{v_0^2}{2 \cdot b}$ berechnet werden (v_0 in m/s, b in m/s², s_B in m).

Der Anhalteweg s_A berücksichtigt zusätzlich zum Bremsweg den während der Reaktionszeit t_R zurückgelegten Weg. Dieser sogenannte *Reaktionsweg* s_R kann mit der Formel $s_R = v_0 \cdot t_R$ berechnet werden (v_0 in m/s, t_R in s, s_R in m).

Der Anhalteweg s_A ist gleich der Summe aus Reaktionsweg s_R und Bremsweg s_B.

Aufgabenstellung:

a) 1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Fahrgeschwindigkeit v_0 in Abhängigkeit vom Bremsweg s_B und von der Bremsverzögerung b auf.

$v_0 =$ ____

2) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Der Reaktionsweg s_R ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Bremsweg s_B ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Bremsweg s_B ist indirekt proportional zur Bremsverzögerung b.	☐
Der Anhalteweg s_A ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☐
Der Anhalteweg s_A ist direkt proportional zur Reaktionszeit t_R.	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

b) Die oft in Fahrschulen verwendeten Formeln für die näherungsweise Berechnung des Reaktions- und des Bremswegs (jeweils in m) lauten:

$s_R = \frac{v_0}{10} \cdot 3$ und $s_B = \left(\frac{v_0}{10}\right)^2$ mit v_0 in km/h und s_R bzw. s_B in m

1) Zeigen Sie anhand geeigneter Umformungen, dass die für die näherungsweise Berechnung des Reaktionswegs verwendete Formel für eine Reaktionszeit von etwa einer Sekunde annähernd die gleichen Ergebnisse wie die Formel für s_R aus der Einleitung liefert.

2) Berechnen Sie, welcher Wert für die Bremsverzögerung bei der Näherungsformel für den Bremsweg angenommen wird.

c) Es kann eine Bremsverzögerung b von 8 m/s² bei trockener Fahrbahn, von 6 m/s² bei nasser Fahrbahn und von höchstens 4 m/s² bei Schneefahrbahn angenommen werden.

1) Geben Sie denjenigen Bruchteil an, um den bei gleicher Fahrgeschwindigkeit der Bremsweg bei nasser Fahrbahn länger als bei trockener Fahrbahn ist.

Ein Fahrzeug fährt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 20$ m/s. Der Anhalteweg ist bei Schneefahrbahn länger als bei trockener Fahrbahn.

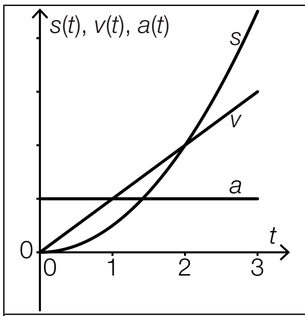
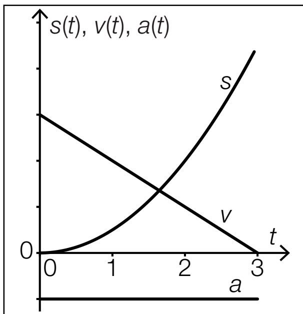
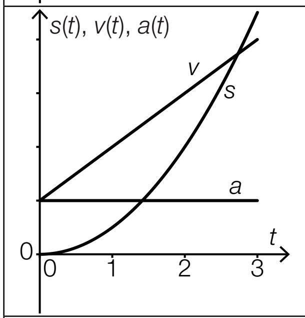
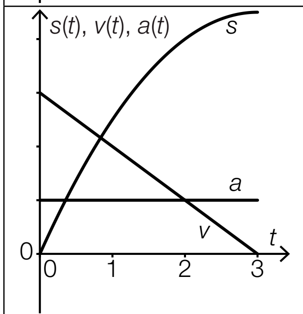
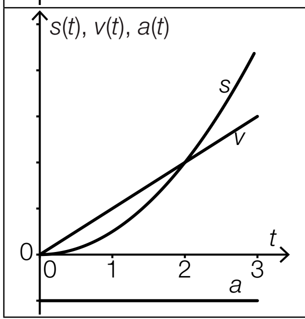
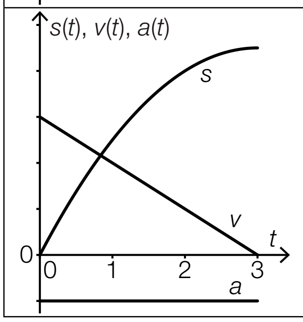
2) Ermitteln Sie unter der Annahme $t_R = 1$ s für diese beiden Fahrbahnzustände den Mindestwert für die absolute Zunahme des Anhaltewegs.

d) Das Wirksamwerden der Bremsen eines Fahrzeugs beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.
Die Geschwindigkeit $v(t)$ des Fahrzeugs kann für das Zeitintervall [0; 3] durch die Funktion v modelliert werden, die Beschleunigung $a(t)$ durch die Funktion a und der in diesem Zeitintervall zurückgelegte Weg $s(t)$ durch die Funktion s ($v(t)$ in m/s, $a(t)$ in m/s^2, $s(t)$ in m, t in s).

1) Interpretieren Sie die Bedeutung des bestimmten Integrals $\int_0^3 v(t)\mathrm{d}t$ im gegebenen Kontext.

Jede der sechs nachstehenden Abbildungen zeigt – jeweils im Zeitintervall [0; 3] – den Graphen einer Beschleunigungsfunktion a, den Graphen einer Geschwindigkeitsfunktion v und den Graphen einer Wegfunktion s.

2) Kreuzen Sie diejenige Abbildung an, die drei zusammengehörige Graphen eines drei Sekunden dauernden Bremsvorgangs zeigt.

	☐		☐
	☐		☐
	☐		☐

Lösungserwartung

a1) $v_0 = \sqrt{2 \cdot b \cdot s_B}$

a2)

Der Reaktionsweg s_R ist direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit v_0.	☒
Der Bremsweg s_B ist indirekt proportional zur Bremsverzögerung b.	☒

b1) mögliche Umformungen:

$s_R = v_0 \cdot t_R$

Für v_0 in m/s und $t_R = 1$ Sekunde gilt: $s_R = v_0$

Für v_0 in km/h und $t_R = 1$ Sekunde gilt: $s_R = \frac{v_0}{3,6} = v_0 \cdot 0,278... \approx v_0 \cdot 0,3 = \frac{v_0}{10} \cdot 3$

Daher liefern diese beiden Formeln annähernd die gleichen Ergebnisse.

b2) mögliche Vorgehensweise:

$s_B = \frac{v_0{}^2}{2 \cdot b}$ mit v_0 in m/s $\Rightarrow$ $s_B = \frac{v_0{}^2}{2 \cdot b} \cdot \frac{1}{3,6^2} = \frac{v_0{}^2}{25,92 \cdot b}$ mit v_0 in km/h,

$\frac{v_0{}^2}{25,92 \cdot b} = \frac{v_0{}^2}{100}$ $\Rightarrow$ $b \approx 3,9$ m/s^2

Bei der Näherungsformel wird eine Bremsverzögerung von ca. 3,9 m/s² angenommen.

c1) $\frac{\frac{v_0{}^2}{2 \cdot 6}}{\frac{v_0{}^2}{2 \cdot 8}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ Bei nasser Fahrbahn ist der Bremsweg um $\frac{1}{3}$ länger als der Bremsweg bei trockener Fahrbahn.

c2) mögliche Vorgehensweise:

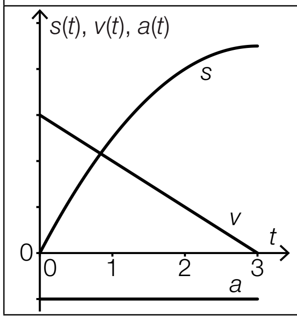
Anhalteweg bei trockener Fahrbahn: $s_A = 20 \cdot 1 + \frac{20^2}{2 \cdot 8} = 45$ m

Mindestwert für den Anhalteweg bei Schneefahrbahn: $s_A = 20 \cdot 1 + \frac{20^2}{2 \cdot 4} = 70$ m

Der Anhalteweg nimmt (bei $v_0 = 20$ m/s und $t_R = 1$ s) bei Schneefahrbahn um mindestens 25 m zu.

d1) Das bestimmte Integral $\int_0^3 v(t)\,\mathrm{d}t$ beschreibt den zurückgelegten Weg (in Metern) im Zeitintervall [0; 3].

d2)

	☒

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die beiden laut Lösungserwartung richtigen Aussagen angekreuzt sind.

b1) Ein Punkt für die Angabe geeigneter Umformungen.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s^2" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,8 m/s^2; 4 m/s^2]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

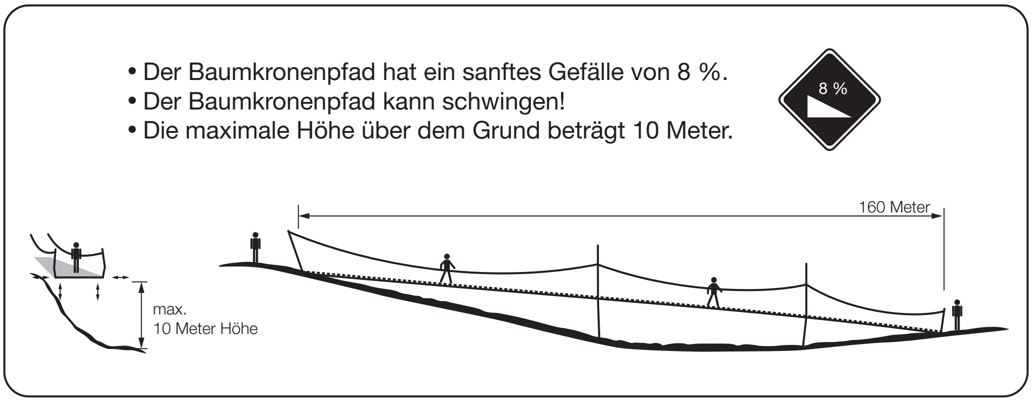
d1) Ein Punkt für eine (sinngemäß) richtige Interpretation.
d2) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Abbildung angekreuzt ist.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Baumkronenpfad

Aufgabennummer: 2_076	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 5.1, FA 5.3	

Der *Baumkronenpfad* ist eine Brückenstrecke durch einen Teil des Schönbrunner Tiergartens.



a) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen:
„Der Baumkronenpfad hat ein sanftes Gefälle von 8 %."

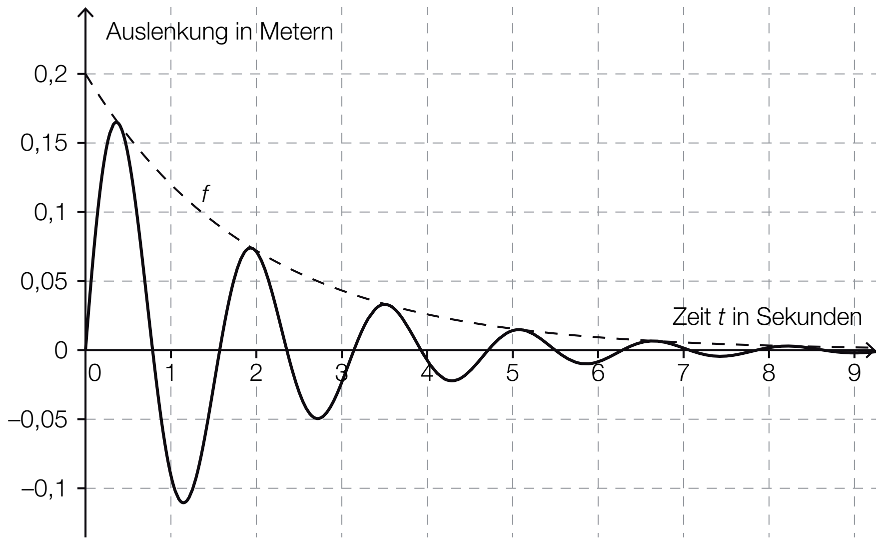
Dabei wird der Baumkronenpfad vereinfacht als geradlinig angenommen. Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.

1) Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen Startpunkt und Endpunkt.

2) Berechnen Sie den Neigungswinkel des Baumkronenpfads.

b) Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Der Baumkronenpfad kann schwingen!“

In der nachstehenden Grafik ist das Auf-und-ab-Schwingen des Baumkronenpfads an einer bestimmten Stelle dargestellt.



In der obigen Grafik ist die sogenannte „Einhüllende“ strichliert eingezeichnet. Es handelt sich dabei um eine Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^t$.

1) Lesen Sie aus der Grafik den Parameter c ab.

2) Begründen Sie mathematisch, warum für den Parameter a dieser Funktion f gilt: $0 < a < 1$.

Lösungserwartung

a1) Höhenunterschied in Metern: $160 \cdot 0{,}08 = 12{,}8$

a2) $\tan(\alpha) = 0{,}08 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 4{,}57...°$

Auch $\alpha = -4{,}57...°$ *ist als richtig zu werten.*
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

b1) $c = f(0) = 0{,}2$

b2) Da die gegebene Exponentialfunktion streng monoton fallend ist, gilt für den Parameter a:
$0 < a < 1$.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

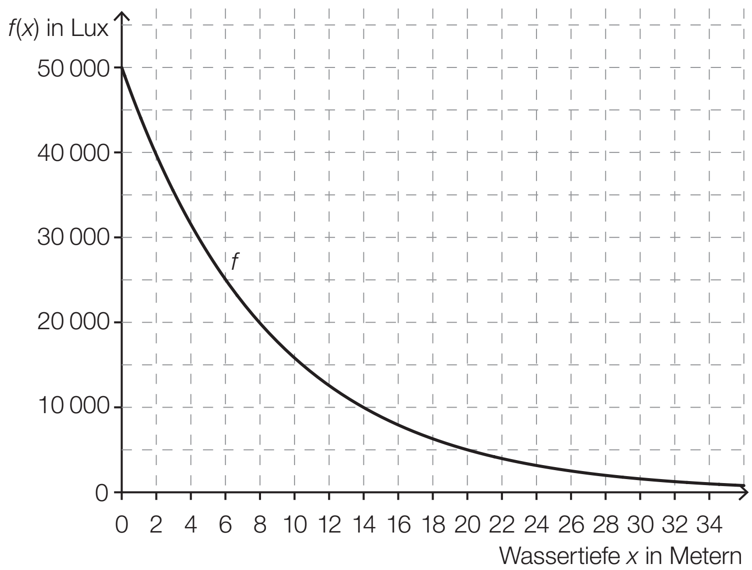
Unter Wasser

Aufgabennummer: 2_079	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.4, FA 5.1	

a) Direkt unter der Wasseroberfläche beträgt der Druck 1 Bar. Der Druck nimmt mit zunehmender Wassertiefe gleichmäßig zu, und zwar um 1 Bar je 10 Meter Wassertiefe.

1) Berechnen Sie, in welcher Wassertiefe ein Druck von 3,9 Bar herrscht.

b) Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden. Der Graph von f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f.

c) Durch eine bestimmte Tauchermaske werden alle Gegenstände unter Wasser um ein Drittel größer wahrgenommen, als sie tatsächlich sind.

1) Ermitteln Sie, um wie viel Prozent die tatsächliche Größe kleiner als die wahrgenommene Größe ist.

Lösungserwartung

a1) $3{,}9 = 1 + 0{,}1 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = 29$

In einer Wassertiefe von 29 Metern herrscht ein Druck von 3,9 Bar.

b1) In einer Tiefe von 20 Metern beträgt die Beleuchtungsstärke 5 000 Lux.

Toleranzintervall: [19,5; 20,5]

b2) $f(x) = a \cdot b^x$

$a = 50\,000$

$5\,000 = 50\,000 \cdot b^{20} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[20]{0{,}1} = 0{,}8912... \approx 0{,}891$

$f(x) = 50\,000 \cdot 0{,}891^x$

Geringfügige Abweichungen aufgrund der Verwendung anderer Punkte sind zulässig.

c1) tatsächliche Größe: x

wahrgenommene Größe: $w = \frac{4}{3} \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{4} \cdot w$

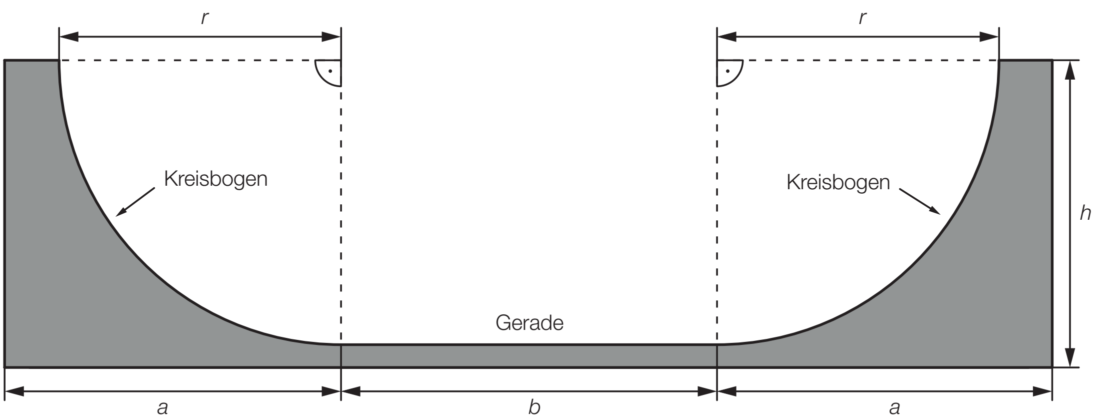
Die tatsächliche Größe ist um 25 % kleiner als die wahrgenommene Größe.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Skatepark

Aufgabennummer: 2_082	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3	

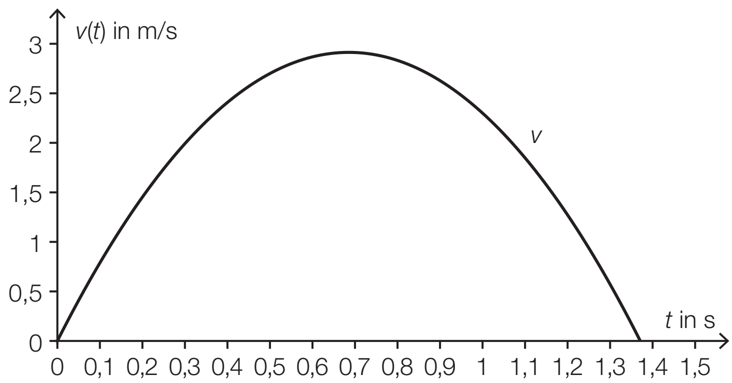
a) Folgende Grafik zeigt den Entwurf einer Halfpipe im Querschnitt:



1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts A der grauen Fläche (Querschnittsfläche) aus a, b, h und r.

$A =$ ______________________________

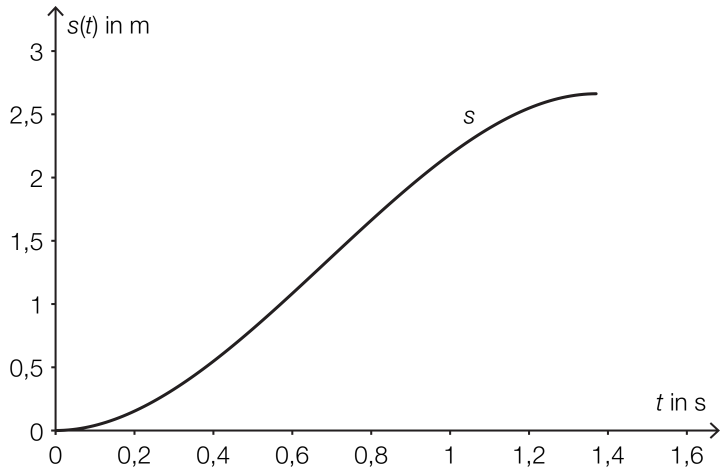
b) Die Geschwindigkeit einer Skaterin in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion v beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung denjenigen Weg, den die Skaterin zwischen $t = 0{,}5$ s und $t = 1$ s zurücklegt.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung von $v'(0{,}3)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) Der zurückgelegte Weg eines Skaters in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich näherungsweise mithilfe der Funktion s beschreiben. Der Graph dieser Funktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.

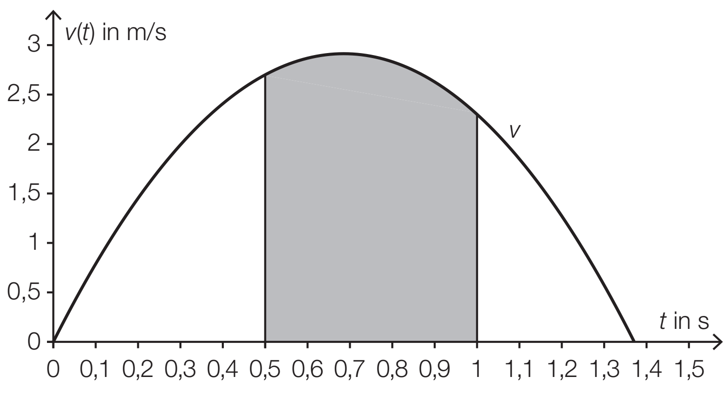


1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit zwischen $t = 0{,}6$ s und $t = 1{,}2$ s.

Lösungserwartung

a1) $A = (2 \cdot a + b) \cdot h - b \cdot r - \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

b1)



b2) $v'(0{,}3)$ ist die Beschleunigung (in m/s²) der Skaterin zum Zeitpunkt $t = 0{,}3$ s.

c1) $\overline{v} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 2,5 m/s.
Toleranzintervall für $\overline{v}$: [2,1; 2,9]

Teilchenbeschleuniger

Aufgabennummer: 2_084	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, WS 3.2, WS 3.3	

Am Forschungsinstitut CERN wird mithilfe moderner Teilchenbeschleuniger physikalische Grundlagenforschung betrieben. In einem Teilchenbeschleuniger werden elektrisch geladene Teilchen auf hohe Geschwindigkeiten beschleunigt.

a) Die Teilchen bewegen sich in einem ringförmigen Tunnel nahezu mit Lichtgeschwindigkeit. Sie machen dabei in einer Sekunde a Umläufe und legen in dieser Zeit rund $3 \cdot 10^8$ m zurück.

1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Länge u eines Umlaufs in Kilometern.

$u =$ ____

b) Wenn Teilchen im Teilchenbeschleuniger kollidieren, können neue Teilchen entstehen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kollision ein Teilchen eines bestimmten Typs entsteht, beträgt 3,4 %.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E wird mit $P(E) = \binom{500}{2} \cdot 0{,}034^2 \cdot (1 - 0{,}034)^{498}$ berechnet.

1) Beschreiben Sie im gegebenen Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit so berechnet wird.

2) Berechnen Sie, wie viele dieser Teilchen im Mittel entstehen, wenn 1 000 Kollisionen stattfinden.

c) Im Zentrum eines Atoms befindet sich der Atomkern. Vereinfacht können sowohl der Atomkern als auch das gesamte Atom als kugelförmig angenommen werden.
In einer Broschüre wird beschrieben, wie klein ein Atomkern im Vergleich zum gesamten Atom ist: „Hätte ein Atomkern 1 cm Durchmesser, so wäre der Durchmesser des gesamten Atoms 100 m."

1) Berechnen Sie den Durchmesser eines Atoms, wenn der Durchmesser des Atomkerns 10^{-14} m beträgt.

Lösungserwartung

a1) $u = \frac{3 \cdot 10^8}{a \cdot 10^3}$

b1) Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei 500 Kollisionen genau 2 Teilchen dieses Typs entstehen.

b2) $1\,000 \cdot 0{,}034 = 34$

Bei 1 000 Kollisionen entstehen im Mittel 34 Teilchen dieses Typs.

c1) $\frac{100}{0{,}01} = \frac{d}{10^{-14}} \Rightarrow d = 10^{-10}$

Der Durchmesser des Atoms beträgt 10^{-10} m.

Gold

Aufgabennummer: 2_090	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1	

Das Edelmetall Gold gilt als besonders wertvoll, weil es selten vorkommt, leicht zu Schmuck verarbeitet werden kann und sehr beständig ist.

a) Der *World Gold Council*, eine globale Lobby-Organisation der Goldminenindustrie, schätzt die bis zum Jahr 2012 weltweit geförderte Goldmenge auf rund $1{,}713 \cdot 10^8$ Kilogramm (kg).
Gold hat eine Dichte von 19,3 Gramm pro Kubikzentimeter (g/cm³). Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.

Stellen Sie sich vor, dass die gesamte weltweit geförderte Goldmenge in einen Würfel gegossen wird.

1) Berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels in Metern.

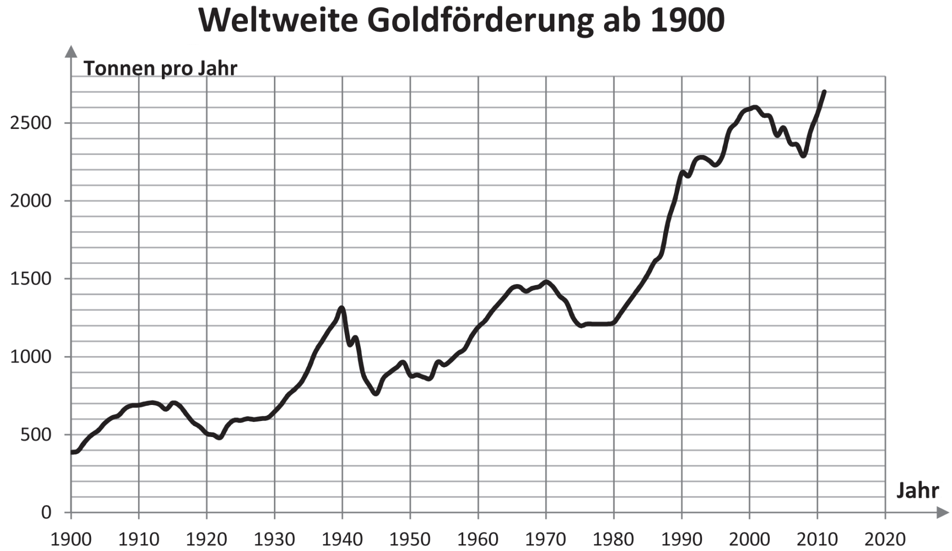
b) Gold kommt in der Natur auch in der Form von Nuggets (Goldklumpen) vor. Es wird in der Einheit *Feinunze* (oz. tr.) gehandelt, die einer Masse von 31,1035 Gramm (g) reinen Goldes entspricht.

Gesucht ist der Wert W eines Nuggets in Euro, wenn folgende Größen bekannt sind:

m ... Masse des Nuggets in Gramm (g)
p ... Preis in Euro für eine Feinunze Gold

1) Erstellen Sie eine Formel für W.

c) Die nachstehende Grafik zeigt die weltweite jährliche Förderung von Gold ab dem Jahr 1900 in Tonnen.



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Goldfoerderung.png [29.08.2013] (adaptiert).

1) Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, in welchem Jahrzehnt die weltweite Förderung absolut am stärksten gestiegen ist.

d) In einer Zeitung wird folgende Analyse veröffentlicht: „Der Wert der Ein-Unzen-Krugerrand-Goldmünze ist im Jahr 2010 um 20 % gestiegen. Im Jahr 2011 stieg der Wert nochmals um 10 %. Also ist der Wert der Münze in diesen beiden Jahren insgesamt um 30 % gestiegen.“

1) Begründen Sie, warum diese Aussage über die Wertentwicklung nicht richtig ist.

Lösungserwartung

a1) Kantenlänge des Würfels: $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{1{,}713 \cdot 10^{11}\ \text{g}}{19{,}3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 2\,070{,}4...\ \text{cm}$

Der Würfel hat eine Kantenlänge von rund 20,7 Metern.

b1) $W = \frac{m \cdot p}{31{,}1035}$

c1) Die weltweite jährliche Förderung ist zwischen 1980 und 1990 absolut am stärksten gestiegen.

d1) Die angegebenen Prozentsätze dürfen nicht addiert werden, weil sie sich nicht auf denselben Grundwert beziehen.
Der Wert der Goldmünze ist um den Faktor $1{,}2 \cdot 1{,}1 = 1{,}32$ gestiegen, also um 32 %.

Solarthermie-Anlagen*

Aufgabennummer: 2_074	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 5.1, AN 4.3	

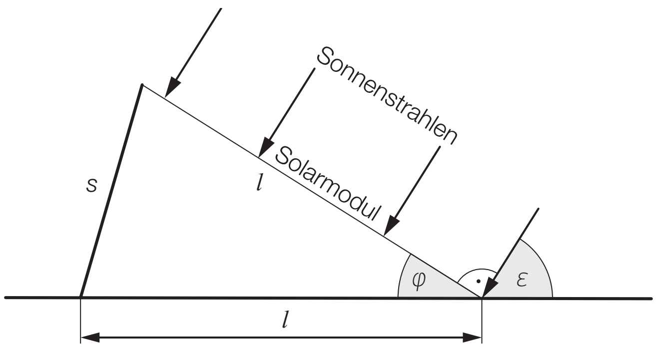
Bei Solarthermie-Anlagen wird die Sonnenstrahlung von sogenannten *Solarmodulen* in Wärme umgewandelt. Diese Wärme kann beispielsweise zur Warmwassererzeugung oder zur Heizung von Gebäuden verwendet werden.

Aufgabenstellung:

a) Ein Solarmodul einer Solarthermie-Anlage mit der Länge l schließt mit dem waagrechten Erdboden den Winkel φ ein. Dieser Winkel φ wird durch eine Stütze mit variabler Länge s so verändert, dass das Solarmodul mit den Sonnenstrahlen einen rechten Winkel einschließt.

Die Sonnenstrahlen treffen unter dem Winkel ε auf den Erdboden auf.

Die Situation ist in der nachstehenden Abbildung modellhaft dargestellt.



1) Geben Sie eine Formel an, mit der s unter Verwendung von l und ε berechnet werden kann.

$s =$ ____________________

Das oben abgebildete Solarmodul hat die Länge $l = 1\,666$ mm. Bei diesem Solarmodul nimmt der Winkel ε im Laufe eines bestimmten Tages Werte von 14° bis 65° an.

2) Geben Sie den maximalen Wert von s an.

maximaler Wert von s: ____________________ mm

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

b) Die Leistung einer bestimmten Solarthermie-Anlage an einem wolkenfreien Tag wird durch die Funktion P modelliert. Dabei gilt:

$$P(t) = 0{,}0136 \cdot a^3 \cdot t^4 - 0{,}272 \cdot a^2 \cdot t^3 + 1{,}36 \cdot a \cdot t^2$$

t ... Zeit in h, die seit dem Sonnenaufgang ($t = 0$) vergangen ist
$P(t)$ ... Leistung in kW zur Zeit t
a ... Parameter

Beim Sonnenaufgang und beim Sonnenuntergang beträgt die Leistung der Solarthermie-Anlage 0 kW. Zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang nimmt die Funktion P positive Werte an.

1) Ermitteln Sie für diese Solarthermie-Anlage den Wert des Parameters a für einen bestimmten wolkenfreien Tag, an dem die Sonne um 7:08 Uhr aufgeht und um 18:38 Uhr untergeht.

Die Arbeit, die von der Solarthermie-Anlage zwischen den zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 verrichtet wird, ist $\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Berechnen Sie die an diesem Tag von der Solarthermie-Anlage verrichtete Arbeit (in kWh).

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $s = 2 \cdot l \cdot \sin\left(\frac{90° - \varepsilon}{2}\right)$

a2) $2 \cdot 1\,666 \cdot \sin\left(\frac{90° - 14°}{2}\right) = 2\,051{,}3... \approx 2\,051$

maximaler Wert von s: ca. 2051 mm

b) Lösungserwartung:

b1) Mit $P(11{,}5) = 0$ erhält man den Parameter $a = \frac{20}{23}$.

b2) $\int_0^{11{,}5} P(t)\,\mathrm{d}t = 59{,}9... \approx 60$

Die an diesem Tag von der Solarthermie-Anlage verrichtete Arbeit beträgt ca. 60 kWh.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „kWh“ nicht angegeben sein muss.

CO2 und Klimaschutz*

Aufgabennummer: 2_102	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

In den letzten Jahrzehnten hat der CO_2-Gehalt in der Erdatmosphäre unter anderem durch den Straßenverkehr zugenommen.

Aufgabenstellung:

a) Für jeden PKW mit Benzinantrieb wird angenommen, dass pro Liter verbrauchten Benzins 2,32 kg CO_2 ausgestoßen werden.

PKW *A* fährt eine Strecke von *s* km mit einem durchschnittlichen Benzinverbrauch von 7,9 Litern pro 100 km.

Um dessen CO_2-Ausstoß auszugleichen, sollen *b* Bäume gepflanzt werden. Dabei nimmt man an, dass jeder dieser Bäume in seiner gesamten Lebenszeit 500 kg CO_2 aufnimmt.

1) Stellen Sie unter Verwendung von *s* eine Formel zur Berechnung der Anzahl *b* der zu pflanzenden Bäume auf.

$b =$ ____

PKW *B* legt eine Strecke von 15 000 km zurück. Um dessen CO_2-Ausstoß auszugleichen, werden 5 Bäume gepflanzt.

2) Berechnen Sie den durchschnittlichen Benzinverbrauch (in Litern pro 100 km) von PKW *B* auf dieser Strecke.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

b) Neben CO_2 verstärken auch andere Gase die Klimaerwärmung. Die Emission von diesen Gasen wird in sogenannte *CO_2-Äquivalente* umgerechnet.

Die nachstehende Tabelle gibt für einige Staaten der EU Auskunft über die jeweilige Einwohnerzahl (in Millionen) im Jahr 2015 und die zugehörigen CO_2-Äquivalente (in Tonnen pro Person).

	Einwohnerzahl in Millionen	CO_2-Äquivalente in Tonnen pro Person
Belgien	11,2	11,9
Frankreich	66,4	6,8
Italien	60,8	7,0
Luxemburg	0,6	18,5
Niederlande	16,9	12,3

Datenquellen: https://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php?title=Population_and_population_change_statistics/de&oldid=320539 [24.07.2020],
https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Länder_nach_Treibhausgas-Emissionen [24.07.2020].

1) Berechnen Sie die durchschnittlichen CO_2-Äquivalente $\overline{e}$ (in Tonnen pro Person) für den gesamten in der obigen Tabelle angeführten Teil der EU.

$\overline{e}$ = ____ Tonnen pro Person

Lukas sind nur die in der obigen Tabelle angeführten Werte der CO_2-Äquivalente der einzelnen Staaten bekannt, nicht aber die jeweils zugehörige Einwohnerzahl.
Er berechnet das arithmetische Mittel $\overline{x}$ der CO_2-Äquivalente: $\overline{x} = 11{,}3$.

2) Erklären Sie ohne Verwendung des berechneten Wertes von $\overline{e}$, warum $\overline{x}$ größer als $\overline{e}$ sein muss.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $b = \frac{7{,}9 \cdot 2{,}32 \cdot s}{100 \cdot 500}$

a2) $5 = \frac{x \cdot 2{,}32 \cdot 15\,000}{100 \cdot 500}$

$\Rightarrow \quad x = 7{,}18...$

durchschnittlicher Benzinverbrauch: rund 7,18 Liter pro 100 km

b) **Lösungserwartung:**

b1) $\overline{e} = 7{,}8...$ Tonnen pro Person

b2) Das arithmetische Mittel $\overline{x}$ ist größer, weil die für die einzelnen Staaten angegebenen Werte der CO_2-Äquivalente für Staaten mit einer geringeren Einwohnerzahl größer sind als für jene mit einer höheren Einwohnerzahl.

oder:

Wenn man die jeweilige Einwohnerzahl der einzelnen Staaten beim Übergang vom ungewichteten zum gewichteten arithmetischen Mittel berücksichtigt, erhöht sich das Gewicht jedes Staates mit einem Wert der CO_2-Äquivalente kleiner als $\overline{x}$ und verringert sich das Gewicht jedes Staates mit einem Wert der CO_2-Äquivalente größer als $\overline{x}$.

Lösungsschlüssel

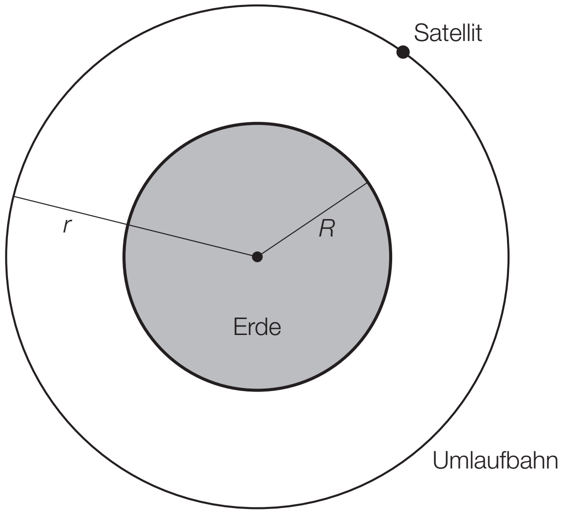
a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des durchschnittlichen Benzinverbrauchs.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen.
b2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

Satelliten und ihre Umlaufbahnen*

Aufgabennummer: 2_107	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Ein Satellit bewegt sich auf einer annähernd kreisförmigen Umlaufbahn mit dem Radius r um die Erde. Die Erde wird als kugelförmig mit dem Radius R angenommen.
Dieses Modell ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) Ein bestimmter Satellit bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 7\,500$ m/s auf seiner Umlaufbahn. Der Zusammenhang zwischen seiner Geschwindigkeit und dem Radius seiner Umlaufbahn wird durch die nachstehende Gleichung angegeben.

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

v ... Geschwindigkeit des Satelliten in m/s
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ ... allgemeine Gravitationskonstante in $\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$
$M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ ... Masse der Erde in kg
r ... Radius der Umlaufbahn des Satelliten in m

1) Berechnen Sie den Radius r der Umlaufbahn dieses Satelliten.

r = ________________________________ m

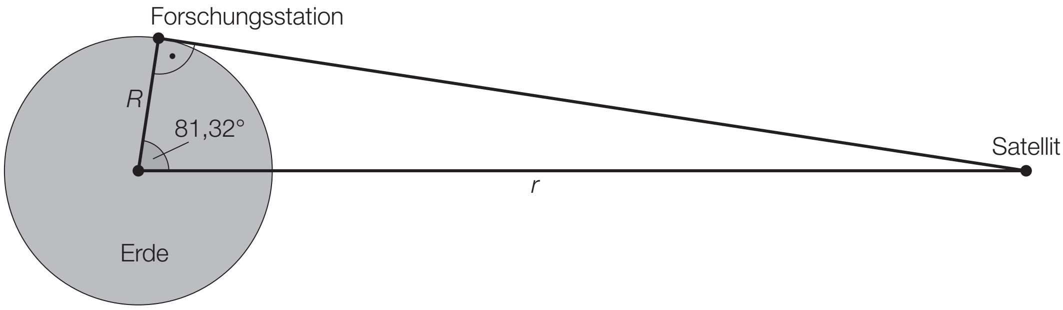
2) Berechnen Sie die Zeit (in s), die dieser Satellit für einen Umlauf um die Erde benötigt.

t = ________________________________ s

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

b) Die Satellitenschüssel einer Forschungsstation wird auf einen bestimmten Satelliten ausgerichtet.

In der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist diese Situation dargestellt.



Der Erdradius R wird mit $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ m angenommen.

1) Berechnen Sie den Radius r der Umlaufbahn dieses Satelliten.

r = ______________________________ m

Die Geschwindigkeit von Funksignalen wird mit $3 \cdot 10^8$ m/s angenommen.

2) Berechnen Sie die Zeit (in s), die ein Funksignal für seinen Weg von der Forschungsstation zu diesem Satelliten benötigt. Geben Sie das Ergebnis mit 3 Nachkommastellen an.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $7\,500 = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{r}}$

$r = 7\,079\,093{,}3...$ m

a2) $2 \cdot r \cdot \pi = 7\,500 \cdot t$

$t = 5\,930{,}5...$ s

b) **Lösungserwartung:**

b1) $\cos(81{,}32°) = \frac{6{,}37 \cdot 10^6}{r}$

$r = 42\,208\,977{,}5...$ m

b2) Entfernung Forschungsstation – Satellit: $\sqrt{r^2 - R^2} = 41\,725\,542{,}4...$ m

$\frac{41\,725\,542{,}4...}{300\,000\,000} = 0{,}1390...$

Das Funksignal benötigt für seinen Weg von der Forschungsstation zum Satelliten rund 0,139 s.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von r.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Zeit.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von r.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Zeit auf 3 Nachkommastellen.

Müsliriegel*

Aufgabennummer: 2_100	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.2, AN 1.1, WS 3.1, WS 2.3, WS 3.2, WS 3.3	

Ein neuer Müsliriegel steht vor der Markteinführung. Der Hersteller dieses Müsliriegels produziert 100 000 Stück davon.

Auf allen Verpackungen der Müsliriegel wird die Möglichkeit von Sofortgewinnen angekündigt. Die jeweilige Höhe des Sofortgewinns kann man nach dem Öffnen der Verpackung auf deren Innenseite ablesen. Der Hersteller des Müsliriegels gibt an:

Es werden

- 9 000 Sofortgewinne zu je € 2
- 900 Sofortgewinne zu je € 5
- 100 Sofortgewinne zu je € 65

ausgezahlt.

Alle produzierten Müsliriegel werden an Geschäfte geliefert. Die Verteilung der Müsliriegel erfolgt nach dem Zufallsprinzip.

Aufgabenstellung:

a) Unter Berücksichtigung aller Produktionskosten kostet jeder der 100 000 Müsliriegel in der Produktion durchschnittlich € 1.

Der Verkaufspreis eines Müsliriegels soll so festgelegt werden, dass für den Hersteller ein Gewinn von mindestens € 80.000 erzielt wird, wenn nach dem Verkauf aller Müsliriegel alle Sofortgewinne ausgezahlt werden müssen.
Alle Müsliriegel haben den gleichen Verkaufspreis.

1) Ermitteln Sie den unter diesen Voraussetzungen kleinstmöglichen Verkaufspreis p des Müsliriegels.

2) Geben Sie an, um wie viel Prozent der kleinstmögliche Verkaufspreis p gesenkt werden kann, wenn man die Müsliriegel ohne Gewinnspiel verkauft und der Gewinn trotzdem mindestens € 80.000 ausmachen soll.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

b) Die Zufallsvariable X beschreibt die Höhe des ausgezahlten Sofortgewinns pro gekauften Müsliriegel.

1) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Ein Kunde kauft 4 Müsliriegel.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Kunde mindestens einen Sofortgewinn erzielt.

c) Aus Erfahrung weiß man, dass 95 % der Müsliriegel eine vorgegebene Mindestmasse haben.

Eine Zufallsstichprobe von 1 000 Müsliriegeln wird ausgewählt. Die binomialverteilte Zufallsvariable Y beschreibt dabei die Anzahl der Müsliriegel in dieser Zufallsstichprobe, die die vorgegebene Mindestmasse haben.

1) Ermitteln Sie die Standardabweichung $\sigma(Y)$ der Zufallsvariablen Y.

$\sigma(Y)$ = ____

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Kontext.

$P(Y \geq 933) \approx 0{,}99$

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$G(x)$ ... Gewinn bei einer Produktion von x Müsliriegeln
$G(100\,000) = p \cdot 100\,000 - 100\,000 - (9\,000 \cdot 2 + 900 \cdot 5 + 100 \cdot 65)$
$G(100\,000) = 80\,000 \quad \Rightarrow \quad p = € \, 2{,}09$

a2) $p_1 \cdot 100\,000 - 100\,000 = 80\,000 \quad \Rightarrow \quad p_1 = € \, 1{,}80$

$\frac{0{,}29}{2{,}09} = 0{,}1387... \approx 13{,}9\,\%$

b) **Lösungserwartung:**

b1) $E(X) = 0{,}09 \cdot 2 + 0{,}009 \cdot 5 + 0{,}001 \cdot 65$
$E(X) = € \, 0{,}29$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$$1 - \frac{90\,000}{100\,000} \cdot \frac{89\,999}{99\,999} \cdot \frac{89\,998}{99\,998} \cdot \frac{89\,997}{99\,997} = 0{,}3439...$$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $\sigma(Y) = \sqrt{1\,000 \cdot 0{,}95 \cdot (1 - 0{,}95)} = 6{,}892...$

c2) mögliche Interpretation:

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 933 Müsliriegel die vorgegebene Mindestmasse haben, beträgt ca. 99 %.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€“ nicht angegeben sein muss.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die näherungsweise Berechnung mit $1 - 0{,}9^4$ ebenfalls als richtig zu werten ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
c2) Ein Punkt für eine richtige Interpretation..

Biathlon

Biathlon ist eine Wintersportart, die Skilanglauf und Schießen kombiniert.

Bei einem bestimmten Wettbewerb müssen drei Runden zu je 2 500 m absolviert werden.
Dabei gilt:

- Nach der ersten und nach der zweiten absolvierten Runde findet jeweils ein Schießen statt. Bei jedem Schießen werden fünf Schüsse abgegeben.
- Für jeden Fehlschuss muss eine 150 m lange Strafrunde absolviert werden, wodurch es zu einem Zeitverlust kommt.

Quelle: https://www.sport1.de/wintersport/biathlon/2018/11/biathlon-im-ueberblick-regeln-disziplinen-wissenswertes [15.04.2021].

Aufgabenstellung:

a) Lisa absolviert die drei Runden mit folgenden durchschnittlichen Geschwindigkeiten (v_1, v_2, v_3 in m/s):

- v_1 für die erste Runde
- v_2 für die zweite Runde
- v_3 für die dritte Runde

Für das Schießen benötigt Lisa jeweils die Zeitdauer t^* (t^* in s).
Nach der ersten absolvierten Runde macht sie beim Schießen keinen Fehler.
Nach der zweiten absolvierten Runde macht sie beim Schießen genau 2 Fehler.
Die 2 Strafrunden absolviert sie mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von v_S (v_S in m/s).

Unter der Laufzeit b (b in s) versteht man diejenige Zeit, die Lisa insgesamt für die absolvierten Runden inklusive Strafrunden und für das Schießen benötigt.

1) Stellen Sie mithilfe von v_1, v_2, v_3, t^* und v_S eine Formel zur Berechnung von b auf.

b = ____ *[0/1 P.]*

b) Die Geschwindigkeit von Hanna in der ersten Runde kann modellhaft durch die Funktion $v: [0; 440] \to \mathbb{R}, t \mapsto v(t)$ beschrieben werden (t in s, $v(t)$ in m/s).

1) Interpretieren Sie $\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t$ mit $T \in (0\text{ s}; 440\text{ s}]$ im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

Es gibt genau zwei Zeitpunkte $t_1, t_2 \in (0\text{ s}; 440\text{ s})$ mit $t_1 < t_2$, für die gilt:
$v'(t_1) = 0$ und $v''(t_1) < 0$
$v'(t_2) = 0$ und $v''(t_2) < 0$

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Zeitpunkte t_1 und t_2 sind ___①___ der Funktion v und der Wert von $\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$ entspricht dabei der ___②___ im Zeitintervall $[t_1; t_2]$. *[0/½/1 P.]*

①	
lokale Minimumstellen	☐
lokale Maximumstellen	☐
Wendestellen	☐

②	
durchschnittlichen Geschwindigkeit	☐
Länge der zurückgelegten Strecke	☐
durchschnittlichen Beschleunigung	☐

c) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer von Daria beim Schießen an und wird als binomialverteilt angenommen. Bei jedem der 5 Schüsse ist p die Trefferwahrscheinlichkeit.

1) Stellen Sie unter Verwendung von p eine Formel zur Berechnung der nachstehenden Wahrscheinlichkeit auf.

$P(X \geq 4) =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $b = \frac{2\,500}{v_1} + \frac{2\,500}{v_2} + \frac{2\,500}{v_3} + 2 \cdot t^* + \frac{300}{v_S}$

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

b1) Der Ausdruck beschreibt die durchschnittliche Geschwindigkeit im Zeitintervall $[0; T]$.

b2)

①	
lokale Maximumstellen	☒

②	
durchschnittlichen Beschleunigung	☒

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

c1) $P(X \geq 4) = 5 \cdot p^4 \cdot (1 - p) + p^5$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.

Vornamen in Österreich*

Aufgabennummer: 2_047	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.3, AG 2.5, WS 2.3, WS 3.2, WS 3.4	

Seit Jahrzehnten erhebt die Statistik Austria, das statistische Amt der Republik Österreich, die Vornamen, die Eltern ihren Kindern geben. Dabei betrachtet das Amt nur den ersten Vornamen (falls ein Kind mehrere Vornamen hat). Außerdem werden gewisse gleichlautende oder von der gleichen Herkunft stammende Vornamen wie etwa *Sophie*, *Sofie* und *Sofia* zu einem Vornamen zusammengefasst.

Seit vielen Jahren zählen *Anna* und *Lukas* zu den beliebtesten Vornamen. Von den im Jahr 2015 geborenen Kindern (40 777 Mädchen, 43 604 Buben) erhielten 2 144 Mädchen den Vornamen *Anna* und 1 511 Buben den Vornamen *Lukas*.

Aufgabenstellung:

a) Für eine statistische Erhebung werden 30 Mädchen und 30 Buben aus dem Geburtenjahrgang 2015 nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe mindestens ein Mädchen Anna heißt!

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Stichprobe mindestens ein Mädchen Anna und mindestens ein Bub Lukas heißt!

b) Im Jahr 1995 betrug der relative Anteil der zehn beliebtesten Vornamen für Buben 37,07 %. Im Jahr 2005 lag er bei 24,28 %. Im Jahr 2015 betrug er 20,91 %.

Diese Entwicklung des relativen Anteils der zehn beliebtesten Vornamen für Buben wird mit einer quadratischen Funktion f modelliert mit $f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Dabei gibt t die Anzahl der Jahre ab 1995 an, es gilt also $f(0) = 0{,}3707$.

Bestimmen Sie die Werte von a, b und c und geben Sie eine Funktionsgleichung von f an!

In welchem Jahr unterschreitet der relative Anteil der zehn beliebtesten Vornamen für Buben in diesem Modell zum ersten Mal ein Drittel?
Geben Sie die entsprechende Jahreszahl an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 08. Mai 2019

c) Die Zufallsvariable X modelliert die Anzahl der im Jahr 2015 in Oberösterreich geborenen Mädchen, die den Vornamen *Anna* erhielten. Diese wird binomialverteilt mit den Parametern $n = 7041$ und $p = 0{,}0526$ angenommen.

Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ dieser Zufallsvariablen X!

$\mu \approx$ ______________________________

$\sigma \approx$ ______________________________

Tatsächlich wurde für Mädchen der Vorname *Anna* im Jahr 2015 in allen neun Bundesländern am häufigsten gewählt, wobei der prozentuelle Anteil in Oberösterreich am größten war. In Oberösterreich wurden 7041 Mädchen im Jahr 2015 geboren. Davon erhielten 494 den Vornamen *Anna*.

Es gilt $494 - \mu = c \cdot \sigma$ für ein $c \in \mathbb{R}^+$.
Berechnen Sie c und deuten Sie den Wert von c im gegebenen Kontext!

Lösungserwartung

a) mögliche Vorgehensweise:

Zufallsvariable X ... Anzahl der Mädchen mit dem Vornamen *Anna*

Aufgrund der großen Grundgesamtheit kann die Zufallsvariable X als binomialverteilt angenähert werden.

$n = 30$

$p = \frac{2\,144}{40\,777} \approx 0{,}0526$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(1 - \frac{2\,144}{40\,777}\right)^{30} \approx 0{,}80217$

(Ergebnis bei Verwendung der hypergeometrischen Verteilung: ≈0,80229)

mögliche Vorgehensweise:

$\left(1 - \left(1 - \frac{2\,144}{40\,777}\right)^{30}\right) \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1\,511}{43\,604}\right)^{30}\right) \approx 0{,}52370$

(Ergebnis bei Verwendung der hypergeometrischen Verteilung: ≈0,52388)

b) mögliche Vorgehensweise:

$f(0) = 0{,}3707 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}3707$

$f(10) = 0{,}2428 \quad \Rightarrow \quad 100 \cdot a + 10 \cdot b + 0{,}3707 = 0{,}2428$

$f(20) = 0{,}2091 \quad \Rightarrow \quad 400 \cdot a + 20 \cdot b + 0{,}3707 = 0{,}2091$

$a = 0{,}000471$

$b = -0{,}0175$

$f(t) = 0{,}000471 \cdot t^2 - 0{,}0175 \cdot t + 0{,}3707$

mögliche Vorgehensweise:

$f(t) < \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 2{,}274 < t < 34{,}88$

also $t > 2{,}274$

Bei dieser Modellierung unterschreitet der relative Anteil der zehn beliebtesten Bubennamen zum ersten Mal im Jahr 1998 ein Drittel.

c) $\mu \approx 370{,}4$

$\sigma \approx 18{,}7$

$c = \frac{494 - \mu}{\sigma} \approx 6{,}6$

mögliche Deutung:

In Oberösterreich weicht der prozentuelle Anteil der im Jahr 2015 geborenen Mädchen, die den Vornamen *Anna* erhielten, mehr als 6 Standardabweichungen vom Erwartungswert μ ab. Damit weicht dieser Anteil signifikant von μ ab.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,80; 0,81]
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,52; 0,53]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
Toleranzintervall für a: [0,0004; 0,0005]
Toleranzintervall für b: [–0,02; –0,01]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Angabe der Jahreszahl je nach Rundung der Koeffizienten a und b variieren kann.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervalle: [370; 371] bzw. [18; 19]
– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Deutung.

Vergnügungspark

Aufgabennummer: 2_088	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.3, AG 4.1, FA 4.4, AN 4.2

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region.

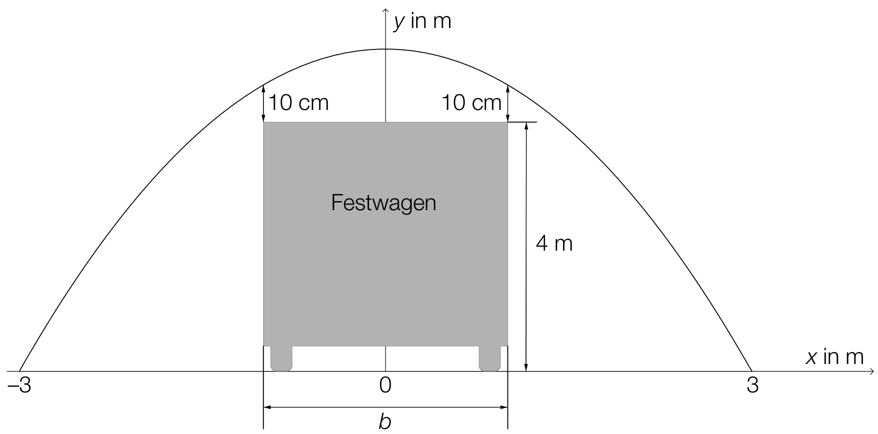
a) Beim Eingang zum Vergnügungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$y = 9 - x^2$

x, y ... Koordinaten in Metern (m)

Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.

Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden. Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).

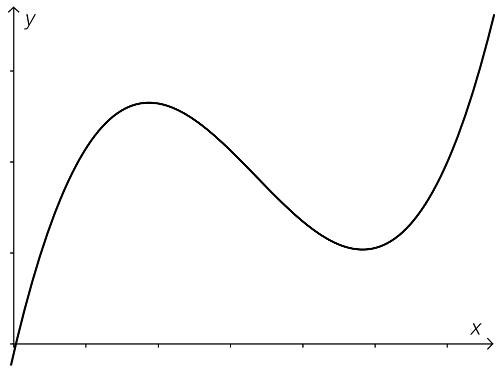


1) Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf.

Vor der Parade wird der Torbogen mit einer Folie verschlossen.

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt der dazu benötigten Folie.

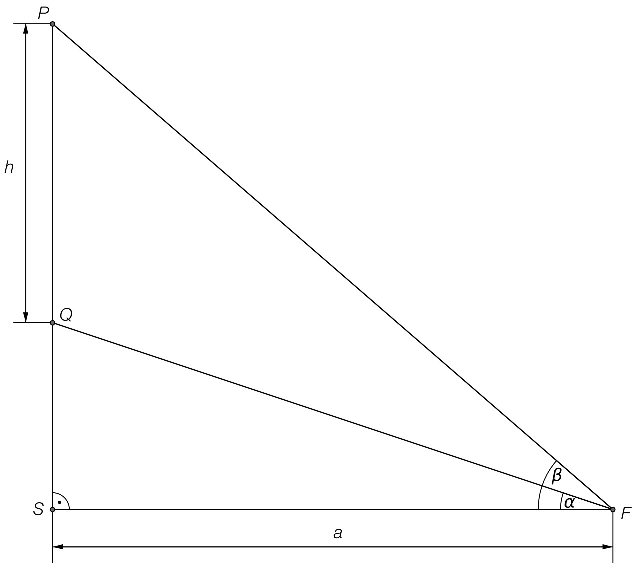
b) Eine der Hauptattraktionen ist die Hochschaubahn. Ein Teilstück kann durch die Polynomfunktion modelliert werden, deren Graph in der folgenden Abbildung zu sehen ist:



1) Erklären Sie, welchen Grad diese Polynomfunktion mindestens haben muss.

c) Im Vergnügungspark gibt es ein Kino.

Fiona sitzt *a* Meter von der Leinwand entfernt (Punkt *F*). Der Höhenwinkel zum unteren Ende der Leinwand (Punkt *Q*) wird mit α bezeichnet, der Höhenwinkel zum oberen Ende der Leinwand (Punkt *P*) wird mit β bezeichnet.



1) Erstellen Sie eine Formel für die Berechnung der Höhe *h* der Leinwand aus *a*, α und β.

h = ______________________________

Lösungserwartung

a1) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213\ldots$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

a2) $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m^2.

b1) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c1) rechtwinkeliges Dreieck *FPS*: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck *FQS*: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Altenpflege

Aufgabennummer: 2_073	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3	

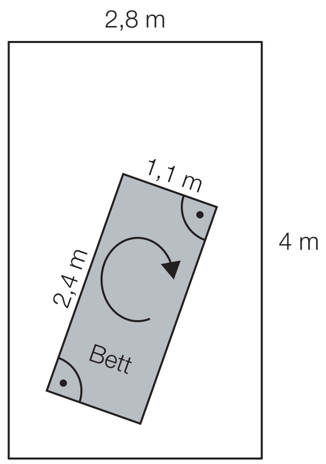
a) Katharina und Georg arbeiten als Pflegekräfte in einem Heim. Sie bekommen das gleiche monatliche Grundgehalt. Im Februar lag in diesem Heim ein besonderer Arbeitsbedarf vor. Georg leistete 14 Überstunden, Katharina leistete 46 Überstunden. Ihr jeweiliges Gesamtentgelt setzt sich aus dem Grundgehalt und der Abgeltung für die geleisteten Überstunden zusammen. Jede Überstunde wird dabei gleich abgegolten.

Das Gesamtentgelt von Georg betrug im Februar € 2.617, jenes von Katharina betrug € 3.433.

1) Ermitteln Sie das Grundgehalt und die Abgeltung für eine Überstunde.

b) Der Aufzug eines Pflegeheims hat eine rechteckige Grundfläche mit einer Länge von 4 m und einer Breite von 2,8 m. Ein Pflegebett fährt auf beweglichen Rollen und hat die Außenmaße 2,4 m × 1,1 m (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).

Aufzug-Innenraum von oben gesehen



1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Aufzug breit genug ist, damit das Bett – wie oben skizziert – um 180° gedreht werden kann.

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr durch mobile Dienste im Rahmen der Altenpflege in Oberösterreich sowie deren prozentuellen Anstieg jeweils im Vergleich zur Anzahl 2 Jahre davor.

Jahr	Anzahl der Hausbesuche pro Jahr	prozentueller Anstieg (gerundet)
1994	498 086	
1996	589 168	18,3 %
1998	802 146	36,1 %
2000	1 017 793	26,9 %
2002	1 176 665	15,6 %
2004	1 360 543	15,6 %

Der prozentuelle Anstieg der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr betrug sowohl von 2000 auf 2002 als auch von 2002 auf 2004 jeweils rund 15,6 %.

1) Erklären Sie in Worten, warum sich die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr von 2000 auf 2002 von jener von 2002 auf 2004 unterscheidet, obwohl die prozentuellen Anstiege in den jeweiligen Zeitintervallen gleich sind.
2) Interpretieren Sie das Ergebnis der Berechnung $\frac{1\,360\,543 - 498\,086}{2004 - 1994} \approx 86\,246$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a1) x ... Grundgehalt in €
y ... Abgeltung für eine Überstunde in €

$x + 14 \cdot y = 2617$
$x + 46 \cdot y = 3433$

$x = 2260$, $y = 25{,}50$

Das Grundgehalt beträgt € 2.260, die Abgeltung für eine Überstunde € 25,50.

b1) Länge der Diagonalen des Bettes d:
$d = \sqrt{1{,}1^2 + 2{,}4^2} = 2{,}640...$

Die Länge der Diagonalen beträgt rund 2,64 m. Da die Diagonale kürzer als die Liftbreite ist, kann das Bett im Lift um 180° gedreht werden.

c1) Die absolute Änderung der Anzahl der Hausbesuche pro Jahr unterscheidet sich, da verschiedene Grundwerte für die Berechnung der prozentuellen Anstiege herangezogen werden.

c2) Die Anzahl der Hausbesuche pro Jahr ist im Zeitintervall von 1994 bis 2004 durchschnittlich um rund 86246 pro Jahr gestiegen.

Elektromobilität*

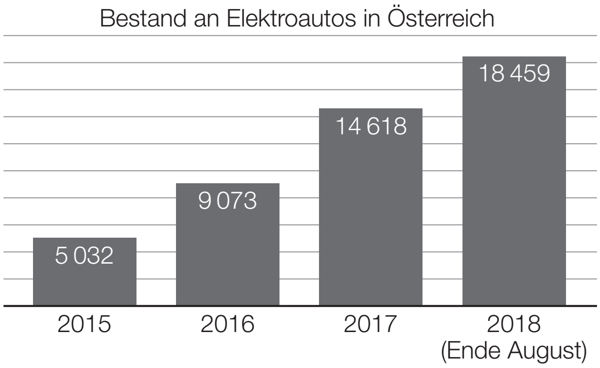
Aufgabennummer: 2_099	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.5, FA 1.4, FA 2.1, FA 2.2, FA 3.4, AN 1.4	

Der Bestand an Elektroautos nahm in Österreich in den letzten Jahren zu. Die Gründe dafür liegen unter anderem an technischen Verbesserungen, wie zum Beispiel den steigenden Batteriekapazitäten und kürzeren Ladezeiten.
Unter *Batteriekapazität* versteht man die in der Batterie des Elektroautos maximal speicherbare Energie E (in Kilowattstunden, kWh). Diese Energie wird während des Fahrens in eine andere Energieform umgewandelt und beim Ladevorgang wieder der Batterie zugeführt.
Unter *Ladezeit* versteht man diejenige Zeit, die für das vollständige Laden einer (annähernd) leeren Batterie benötigt wird.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

Aufgabenstellung:

a) Die nachstehende Grafik zeigt den Bestand an Elektroautos in Österreich für den Zeitraum vom 31. Dezember 2015 bis 31. August 2018. Für die Jahre 2015 bis 2017 wird der Bestand jeweils am Ende des Jahres dargestellt, für das Jahr 2018 der Bestand Ende August.



Datenquelle: Statistik Austria, https://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/verkehr/strasse/kraftfahrzeuge_-_bestand/index.html [23.03.2020].

Die Differenzengleichung $B_{n+1} = B_n \cdot a + b$ beschreibt die Entwicklung des Bestands an Elektroautos in Österreich ausgehend vom Jahr 2015 für die Jahre 2016 und 2017. Dabei gilt:

- B_0 ist der Bestand am Ende des Jahres 2015.
- B_1 ist der Bestand am Ende des Jahres 2016.
- B_2 ist der Bestand am Ende des Jahres 2017.

1) Geben Sie a und b an.

a = ____________________

b = ____________________

Damit die angegebene Differenzengleichung auch für das Ende des Jahres 2018 zutrifft, hätte der Bestand an Elektroautos im Rest des Jahres 2018 noch um eine bestimmte Anzahl erhöht werden müssen.

2) Berechnen Sie diese Anzahl.

b) Die Batteriekapazität (in kWh) ist das Produkt von Ladeleistung (in kW) und Ladezeit (in h). Um beispielsweise eine (annähernd) leere Batterie mit einer Batteriekapazität von 22 kWh mit einer Ladeleistung von 11 kW zu laden, benötigt man eine Ladezeit von 2 h.

Die Funktion f beschreibt die Ladezeit $f(P)$ einer Batterie mit einer Batteriekapazität von 22 kWh in Abhängigkeit von der Ladeleistung P (P in kW, $f(P)$ in h).

1) Geben Sie $f(P)$ an.

$f(P) =$ ____

Die typische Ladeleistung einer privaten Ladestation liegt im Leistungsintervall [2,3 kW; 3,7 kW].

2) Geben Sie für eine Batterie mit einer Batteriekapazität von 22 kWh dasjenige Zeitintervall der Ladezeit an, das diesem Leistungsintervall entspricht.

c) Für die Fahrt eines Elektroautos auf einer bestimmten Teststrecke wird modellhaft angenommen:

- Die gesamte Teststrecke wird mit einer konstanten Geschwindigkeit durchfahren.
- Es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen dem Energiebedarf dieses Elektroautos und der jeweiligen konstanten Geschwindigkeit.

Dieses Elektroauto hat bei einer konstanten Geschwindigkeit von 70 km/h einen Energiebedarf von 12,9 kWh für das Durchfahren dieser Teststrecke.
Bei einer konstanten Geschwindigkeit von 110 km/h hat es einen Energiebedarf von 20,9 kWh für das Durchfahren dieser Teststrecke.

Die Funktion E beschreibt den Energiebedarf $E(v)$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v mit $50 \leq v \leq 130$ (v in km/h, $E(v)$ in kWh).

1) Geben Sie $E(v)$ an.

$E(v) =$ ____

Die Batterie dieses Elektroautos hat eine Batteriekapazität von 41 kWh und ist vor dem Durchfahren der Teststrecke vollständig geladen. Nach dem Durchfahren der Teststrecke sind in der Batterie noch 30,22 kWh gespeichert.

2) Ermitteln Sie die (konstante) Geschwindigkeit v_1, mit der die Teststrecke durchfahren worden ist.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $a = 1{,}37...$
$b = 2\,168{,}1...$

a2) mögliche Vorgehensweise:

$B_3 = 14\,618 \cdot 1{,}37... + 2\,168{,}1... = 22\,226{,}7...$
$22\,226{,}7... - 18\,459 = 3\,767{,}7...$

Der Bestand an Elektroautos hätte im Jahr 2018 noch um ca. 3 768 Elektroautos erhöht werden müssen, damit die angegebene Differenzengleichung auch für das Jahr 2018 zutreffend wäre.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $f(P) = \frac{22}{P}$

b2) Zeitintervall: [5,94... h; 9,56... h]

c) **Lösungserwartung:**

c1) $E(v) = 0{,}2 \cdot v - 1{,}1$

c2) $E(v_1) = 41 - 30{,}22 = 10{,}78 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 59{,}4$ km/h

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für ein richtiges Intervall, wobei die Einheit „h" nicht angegeben sein muss.

c1) Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „km/h" nicht angegeben sein muss.

Maturaball*

Aufgabennummer: 2_105	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Aufgabenstellung:

a) Für einen Maturaball werden Karten im Vorverkauf und an der Abendkassa angeboten. Im Vorverkauf kostet jede Karte € 20. An der Abendkassa kostet jede Karte um 10 % mehr.

Insgesamt wurden 640 Karten um einen Gesamtpreis von € 13.240 verkauft.

Es werden folgende Bezeichnungen gewählt:

x ... Anzahl der im Vorverkauf verkauften Karten
y ... Anzahl der an der Abendkassa verkauften Karten

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung von x und y.

b) Zur Unterhaltung wird das Spiel *Glücksrad* angeboten. Die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, beträgt bei jedem Spiel konstant und unabhängig voneinander 25 %.

Katja spielt dieses Spiel 3-mal.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Katja dabei genau 2-mal gewinnt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

c) Weiters wird das Spiel *Entenspiel* angeboten.
Von insgesamt 50 Badeenten sind 5 an ihrer Unterseite markiert.

Bei diesem Spiel wählt eine teilnehmende Person 2 der 50 Badeenten zufällig und ohne Zurücklegen aus. Jede markierte Badeente, die dabei ausgewählt wird, führt zu einem Gewinn.

Die Zufallsvariable X gibt dabei an, wie viele der beiden ausgewählten Badeenten markiert sind. Die Wahrscheinlichkeit für ein in diesem Sachzusammenhang mögliches Ereignis wird mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet.

$$P(X = \boxed{}) = \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49}$$

1) Tragen Sie die fehlende Zahl im dafür vorgesehenen Kästchen ein.

Martin behauptet: „Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt."

2) Begründen Sie, warum Martins Behauptung falsch ist.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) I: $20 \cdot x + 22 \cdot y = 13240$
II: $x + y = 640$

b) **Lösungserwartung:**

b1) X ... Anzahl der Gewinne
X ist binomialverteilt mit $n = 3$, $p = 0{,}25$.
$P(X = 2) = 3 \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75 = 0{,}140625$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $P(X = \boxed{1}) = \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49}$

c2) Martins Behauptung ist falsch, weil die Wahrscheinlichkeit, dass eine markierte Badeente ausgewählt wird, nicht konstant bleibt.

oder:

Martins Behauptung ist falsch, weil es sich beim gegebenen Sachzusammenhang um ein Ziehen ohne Zurücklegen handelt.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Erstellen des Gleichungssystems mit zwei Gleichungen, ein halber Punkt für nur eine richtige Gleichung.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Zahl.
c2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

Überlagerung von Schwingungen*

Aufgabennummer: 2_038	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.1, FA 6.2, FA 6.3, FA 6.4, AN 4.2	

Ein Ton in der Musik kann im einfachsten Fall durch eine Sinusfunktion s mit $s(t) = a \cdot \sin(b \cdot t)$ für $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Bei einer derartigen Sinusschwingung wird der maximale Funktionswert als Amplitude bezeichnet. Die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde wird als Frequenz f bezeichnet und in Hertz (Hz) angegeben.
Für die Frequenz f gilt: $f = \frac{1}{T}$ (mit T in Sekunden), wobei T die (kleinste) Periodenlänge der jeweiligen Sinusschwingung ist ($T \in \mathbb{R}^+$).

Drei bestimmte Töne werden mithilfe der nachstehenden Funktionen h_1, h_2 und h_3 beschrieben.
Die Zeit t ($t \geq 0$) wird dabei in Millisekunden (ms) gemessen.

$h_1(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$
$h_2(t) = \sin(2{,}5 \cdot \pi \cdot t)$
$h_3(t) = \sin(3 \cdot \pi \cdot t)$

Die Überlagerung mehrerer Töne bezeichnet man als Klang.
Die Funktion h mit $h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$ beschreibt einen Klang.

Der Schalldruck eines Tons ist zeitabhängig und kann durch die Funktion p mit $p(t) = \overline{p} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschrieben werden. Dabei sind $\overline{p}$ und ω Konstanten.
Der Schalldruck wird in der Einheit Pascal (Pa) angegeben.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie für einen Ton, der mithilfe der Funktion g mit $g(t) = \sin(c \cdot \pi \cdot t)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ und t in ms beschrieben wird, eine Formel für die Periodenlänge T (in ms) in Abhängigkeit von c an!

Der Effektivwert p_{eff} des Schalldrucks einer Sinusschwingung mit der Periodenlänge T (in ms) kann mit der Formel $p_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t)\,dt}$ berechnet werden.

Berechnen Sie den Effektivwert des Schalldrucks eines Tons, wenn $\overline{p} = 1$ und $\omega = 2 \cdot \pi$ gilt!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

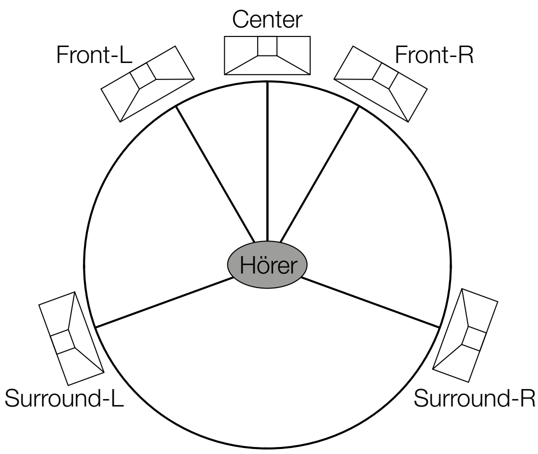
b) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die (kleinste) Periodenlänge T (in ms) der Funktion h an!

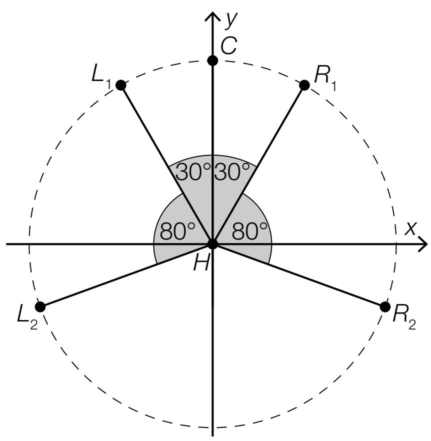
Geben Sie die Frequenz f der Funktion h in Hertz an!

c) Geben Sie (z. B. unter Zuhilfenahme eines geeigneten Graphen) die Amplitude der Funktion h und denjenigen Zeitpunkt $t \geq 0$ (in ms) an, zu dem die Amplitude erstmals erreicht wird!

Begründen Sie, warum die Amplitude von h nicht gleich der Summe der drei Amplituden der Funktionen h_1, h_2 und h_3 ist!

d) Für ein angenehmes Raumklangerlebnis (z. B. in einem Heimkino) ist es günstig, wenn die fünf Lautsprecher eines Fünf-Kanal-Tonsystems wie in nachstehender linker Skizze dargestellt angeordnet sind (Ansicht von oben). Vereinfacht kann die Anordnung wie in nachstehender rechter Skizze in einem kartesischen Koordinatensystem (Einheit in Metern) dargestellt werden:





Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/5.1 [23.04.2018] (adaptiert).

Jeder der fünf Lautsprecher (C, L_1, L_2, R_1, R_2) ist in diesem Fall 2 m vom Hörer (H) entfernt. Der Punkt H liegt im Koordinatenursprung.

Geben Sie die kartesischen Koordinaten von R_1 an!

Geben Sie die Entfernung zwischen L_2 und R_2 an!

Lösungserwartung

a) $T = \frac{2 \cdot \pi}{c \cdot \pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{c}$

Mögliche Vorgehensweise:

$T = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$

$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{1}\int_0^1 \sin^2(2\pi \cdot t)\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p_{\text{eff}} \approx 0{,}71 \text{ Pa}$

b) $T = 4$ ms

Frequenz von h: $\frac{1}{0{,}004} = 250$ Hz

c) Amplitude von h: ca. 2,9 nach ca. 0,2 ms

Mögliche Begründung:

Die Amplitude von h ist nicht gleich der Summe der Amplituden von h_1, h_2 und h_3, da die drei Funktionen ihre maximalen Funktionswerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreichen.

d) $R_1 = (1\,|\,\sqrt{3})$

Mögliche Vorgehensweise:

$x(R_1) = 2 \cdot \cos(60°) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$y(R_1) = 2 \cdot \sin(60°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Mögliche Vorgehensweise:

Entfernung zwischen L_2 und $R_2 = 2 \cdot x(R_2) = 2 \cdot 2 \cdot \cos(20°) \approx 3{,}76$ m

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Berechnung des richtigen Effektivwerts des Schalldrucks, wobei die Einheit „Pa" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,7 Pa; 0,71 Pa]

b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Periodenlänge von *h*, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [3,9 ms; 4,1 ms]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Amplitude und den richtigen Zeitpunkt, wobei die Einheit „ms" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervalle: [2,85; 2,95] bzw. [0,19 ms; 0,21 ms]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung.

d) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von R_1.
Toleranzintervall für die y-Koordinate: [1,7; 1,75]
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Lösung.
Toleranzintervall: [3,7 m; 3,8 m]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Standseilbahnen

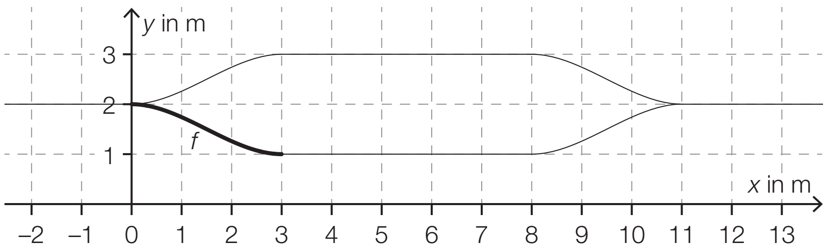
Aufgabennummer: 2_080	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 1.8, FA 4.3	

Die Wägen von Standseilbahnen fahren auf Schienen und können große Steigungen bewältigen.

a) Eine bestimmte Standseilbahn hat eine konstante Steigung von 40 %.

1) Berechnen Sie, welchen Höhenunterschied ein Wagen dieser Bahn überwindet, wenn er von der Talstation bis zur Bergstation eine Fahrstrecke von 180 m zurücklegt.

b) Bei den meisten Standseilbahnen gibt es in der Mitte der Strecke eine Ausweichstelle, bei der der talwärts fahrende Wagen dem bergwärts fahrenden Wagen ausweichen kann.
In der nachstehenden Abbildung ist eine solche Ausweichstelle modellhaft dargestellt.



Der Funktionsgraph von *f* schließt an den Stellen 0 und 3 knickfrei an die eingezeichneten Geradenstücke an. „Knickfrei" bedeutet, dass die Funktionen an denjenigen Stellen, an denen ihre Graphen aneinander anschließen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

Für die Funktion *f* gilt:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

x, $f(x)$ … Koordinaten in m

Die Koeffizienten a, b, c und d können mithilfe eines linearen Gleichungssystems berechnet werden. Der Ansatz für zwei der benötigten Gleichungen lautet:

$27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{}$

$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{}$

1) Vervollständigen Sie mithilfe der obigen Abbildung die beiden Gleichungen, indem Sie jeweils die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen schreiben.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert des Koeffizienten d ab.

c) Der Umsatz des Weltmarktführers im Seilbahnbau betrug im Geschäftsjahr 2015/16 rund 834 Millionen Euro und lag somit um 5,04 % über dem Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15.

1) Berechnen Sie den Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 in Millionen Euro.

Lösungserwartung

a1) $\tan(\alpha) = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 21{,}801...°$
Höhenunterschied $h = 180 \cdot \sin(\alpha) = 66{,}850...$

Der Wagen überwindet einen Höhenunterschied von rund 66,85 m.

b1) $27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = \boxed{1}$
$27 \cdot a + 6 \cdot b + c = \boxed{0}$

b2) $d = 2$

c1) $\frac{834}{1{,}0504} = 793{,}9...$

Der Umsatz im Geschäftsjahr 2014/15 betrug rund 794 Millionen Euro.
Die Angabe des Zusatzes „Millionen Euro" ist nicht erforderlich.

Baumhaus

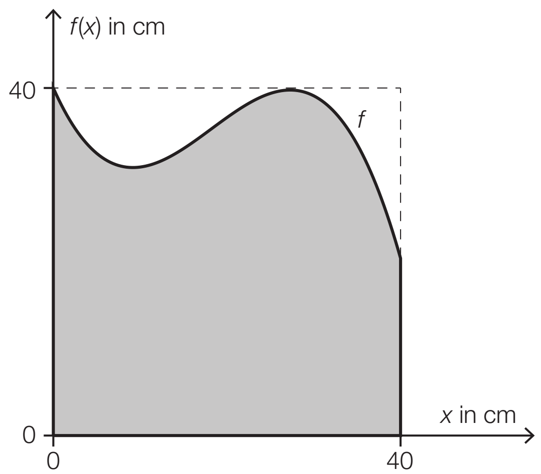
Aufgabennummer: 2_095	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AG 4.2, FA 6.4, AN 4.2	

Eine Familie plant, ein Baumhaus aus Holz zu errichten. Der Baum dafür steht in einem horizontalen Teil des Gartens.

a) Eine 3,2 m lange Leiter wird angelehnt und reicht dann vom Boden genau bis zum Einstieg ins Baumhaus in einer Höhe von 2,8 m.

1) Berechnen Sie denjenigen Winkel, unter dem die Leiter gegenüber dem horizontalen Boden geneigt ist.

b) Die Fenster des Baumhauses sollen eine spezielle Form haben (siehe grau markierte Fläche in der nachstehenden Abbildung).



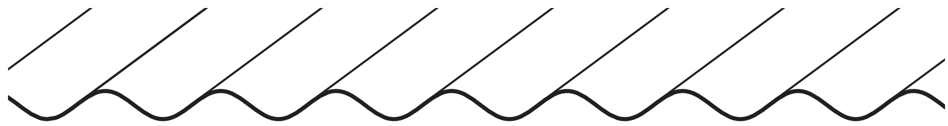
Die obere Begrenzungslinie des Fensters kann näherungsweise durch den Graphen der Funktion *f* beschrieben werden.

$f(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}164 \cdot x^2 - 2{,}25 \cdot x + 40$ mit $0 \leq x \leq 40$

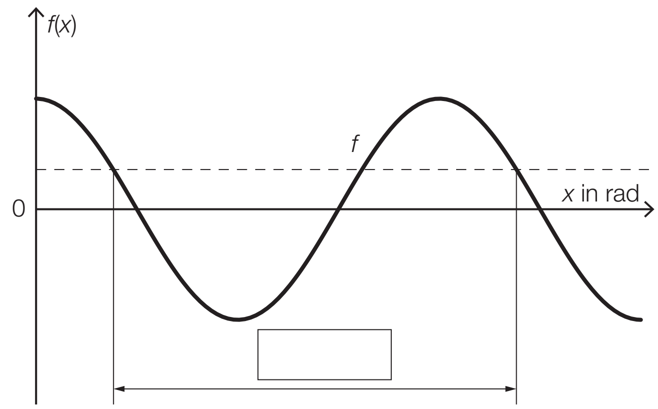
x, $f(x)$ ... Koordinaten in cm

1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Fensterfläche in der dargestellten Form kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm ist.

c) Das Baumhaus wird mit gewellten Kunststoffplatten überdacht.

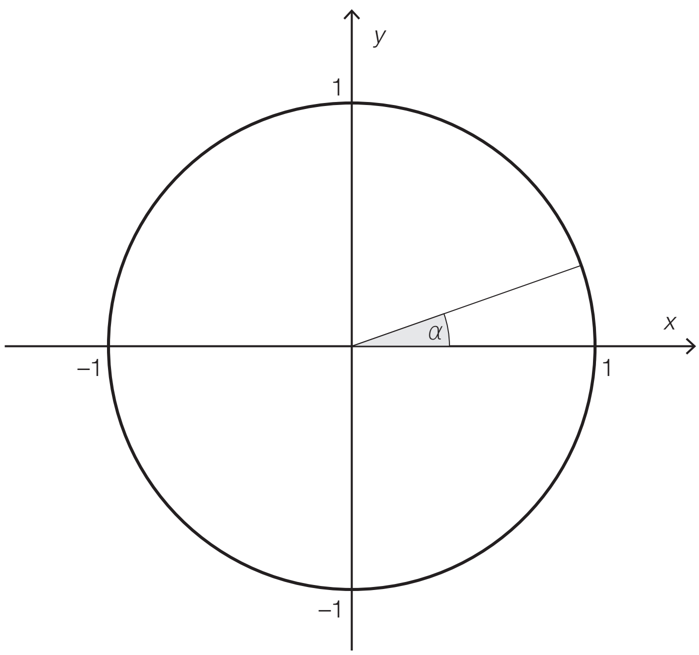


Dem Querschnitt liegt der Graph der Funktion f mit $f(x) = \cos(x)$ zugrunde. Dieser ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Tragen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

In der nachstehenden Abbildung ist ein Winkel α im Einheitskreis dargestellt.



2) Zeichnen Sie im obigen Einheitskreis denjenigen Winkel β ein, für den gilt: $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ mit $\beta \neq \alpha$ und $0° \leq \beta \leq 360°$.

Lösungserwartung

a1) $\arcsin\left(\frac{2,8}{3,2}\right) = 61,0...°$

Der Winkel beträgt rund 61°.

b1) Flächeninhalt zwischen den Achsen und dem Graphen der Funktion in cm²:

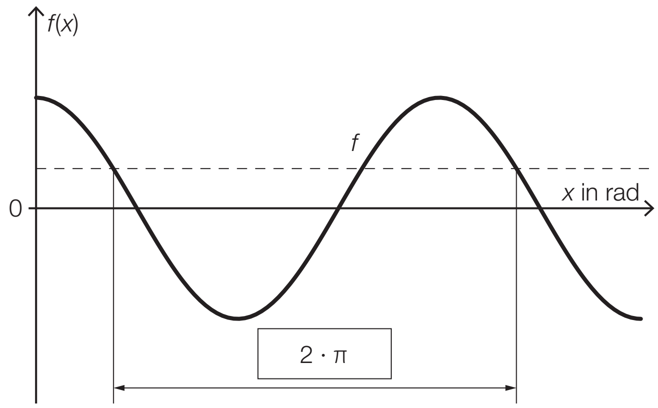
$\int_0^{40} f(x)\,\mathrm{d}x = 1\,378,66...$

Flächeninhalt des Quadrats in cm²: $A = 1\,600$

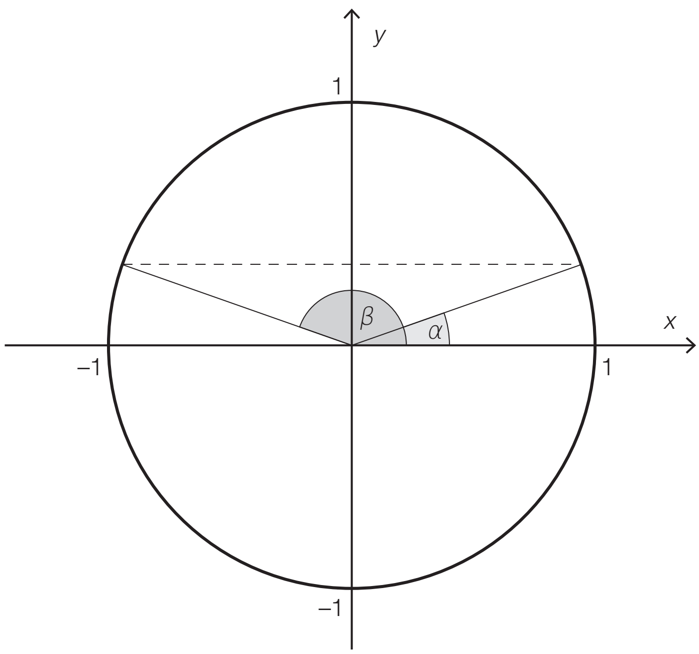
prozentueller Unterschied: $\frac{1\,378,66... - 1\,600}{1\,600} = -0,1383...$

Die Fensterfläche ist um rund 13,8 % kleiner als die Fensterfläche eines quadratischen Fensters mit der Seitenlänge 40 cm.

c1)



c2)



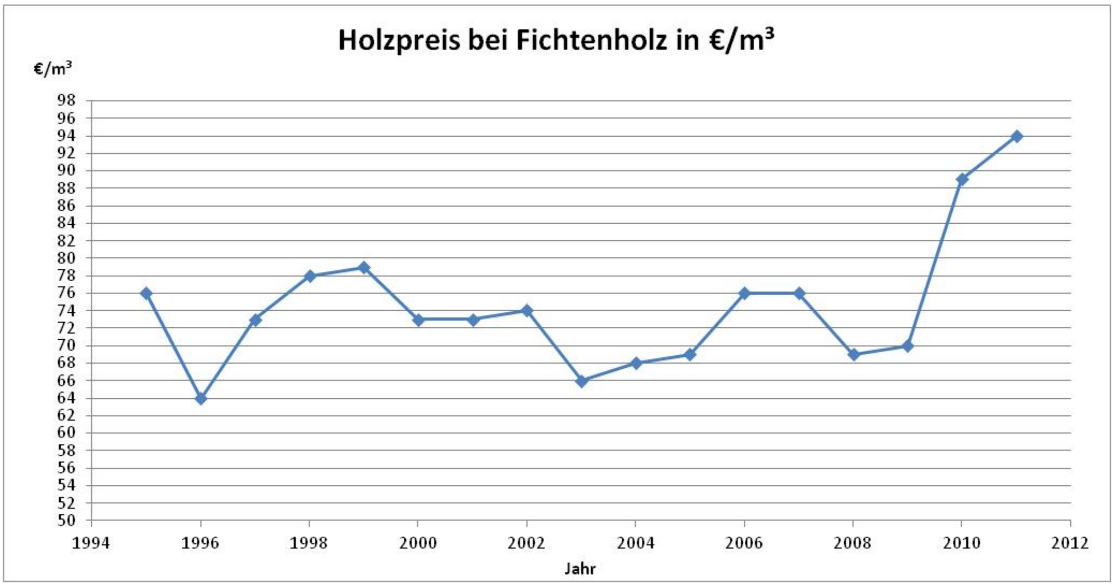
Waldbewirtschaftung

Aufgabennummer: 2_027	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 4.1, FA 4.3, FA 5.1, FA 5.6, AN 1.1, AN 1.4, WS 1.3	

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie erforderlich

Der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes in Österreich beträgt 350 m³ pro Hektar Waldfläche. Pro Jahr ist mit einem durchschnittlichen Zuwachs von 3,3 % zu rechnen. Bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung, wie sie in Österreich vorgeschrieben ist, soll der Holzbestand des Waldes gleich bleiben oder leicht zunehmen.

Der nachstehenden Grafik kann die Entwicklung des Holzpreises bei Fichtenholz im Zeitraum von 1995 bis 2011 entnommen werden.



Datenquelle: http://bfw.ac.at/db/bfwcms2.web?dok=9430 [21.06.2016].

Aufgabenstellung:

a) Bestimmen Sie das maximale Holzvolumen (in m³/ha), das bei einer <u>nachhaltigen Bewirtschaftung</u> pro Jahr geschlägert werden darf!

Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Holzbestand eines durchschnittlichen Fichtenwaldes innerhalb von 10 Jahren zunimmt, unter der Annahme, dass keinerlei Schlägerungen vorgenommen werden, alle anderen genannten Rahmenbedingungen jedoch unverändert bleiben!

b) Der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes wird in einem Zeitraum von 15 Jahren jährlich jeweils am Ende des Jahres (nachdem der jährliche Zuwachs abgeschlossen ist) um 10 m³ pro Hektar (also um 200 m³) verringert.

Ermitteln Sie den Holzbestand des Fichtenwaldes nach Ablauf von 15 Jahren!

Geben Sie an, ob bei dieser Art der Bewirtschaftung der Holzbestand des Fichtenwaldes trotz Schlägerung exponentiell zunimmt, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

c) Ermitteln Sie für den Zeitraum 2003 bis 2011 die empirische Standardabweichung des Holzpreises entsprechend der Formel $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$!

Dabei werden mit x_i die Beobachtungswerte und mit $\bar{x}$ das arithmetische Mittel der Beobachtungswerte bezeichnet. Lesen Sie die dazu notwendigen Daten aus der Grafik ab!

Begründen Sie anhand der Grafik, warum die empirische Standardabweichung des Holzpreises für den Zeitraum 1998 bis 2004 kleiner ist als die empirische Standardabweichung für den Zeitraum 2005 bis 2011!

d) Die Entwicklung des Holzpreises soll für den Zeitraum von 2009 bis 2011 durch eine Funktion P mit $P(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ modelliert werden. Der Holzpreis $P(t)$ wird in €/m³ angegeben, die Zeitrechnung beginnt mit dem Jahr 2009 und erfolgt in der Einheit „Jahre“.

Führen Sie die Modellierung auf Basis der Daten für die Jahre 2009, 2010 und 2011 durch und begründen Sie, warum der Parameter *a* negativ sein muss!

Ermitteln Sie eine Prognose für den in der Grafik nicht angegebenen Holzpreis für das Jahr 2012 mithilfe dieser Modellfunktion!

e) Bestimmen Sie für den Zeitraum von 1995 bis 2011 die absoluten Holzpreisänderungen aufeinanderfolgender Jahre!

Geben Sie dasjenige Intervall [Jahr 1; Jahr 2] an, in dem sich der Holzpreis prozentuell am stärksten ändert!

Möglicher Lösungsweg

a) $350 \cdot 0{,}033 = 11{,}55$
Jährlich dürfen bei einer nachhaltigen Bewirtschaftung maximal 11,55 m³/ha Holz geschlägert werden.

$1{,}033^{10} \approx 1{,}384$
Unter der Annahme, dass keine Schlägerungen erfolgen, nimmt der Holzbestand innerhalb von zehn Jahren um ca. 38,4 % zu.

b)

Jahr	Holzbestand in m³
0	7 000
1	7 031
2	7 063,023
3	7 096,102759
4	7 130,27415
5	7 165,573197
6	7 202,037112
7	7 239,704337
8	7 278,61458
9	7 318,808861
10	7 360,329554
11	7 403,220429
12	7 447,526703
13	7 493,295085
14	7 540,573822
15	**7 589,412759**

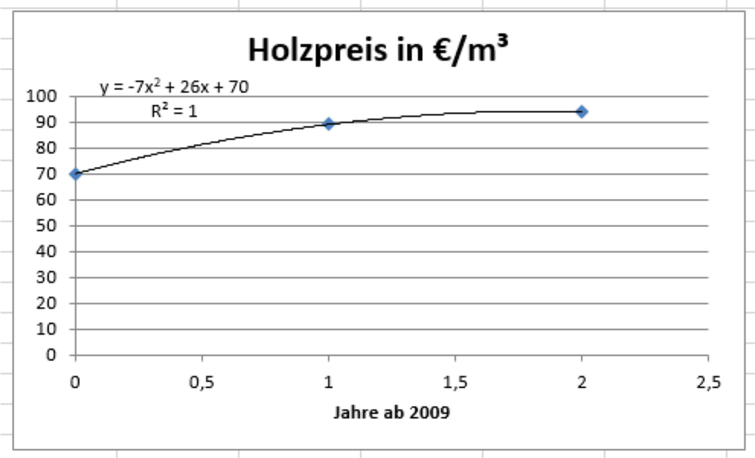
Wenn der Holzbestand eines 20 ha großen Fichtenwaldes jährlich jeweils am Ende des Jahres um 10 m³ pro Hektar verringert wird, beträgt er nach Ablauf von 15 Jahren ca. 7 589,41 m³.

Bei dieser Art der Bewirtschaftung nimmt der Holzbestand nicht exponentiell zu, da das jährliche prozentuelle Wachstum nicht konstant ist.

c) Die empirische Standardabweichung beträgt ca. 9,91 €/m³.

Im Zeitraum von 1998 bis 2004 ist die empirische Standardabweichung des Holzpreises kleiner als im Zeitraum von 2005 bis 2011, da die Schwankungen der Werte des Holzpreises im Zeitraum von 1998 bis 2004 geringer sind.

d) $P(t) = -7 \cdot t^2 + 26 \cdot t + 70$



Der Wert des Parameters *a* muss negativ sein, weil der Graph der Modellfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Prognosewert für das Jahr 2012:
$P(3) = 85$ €/m³

e)

Jahr	Holzpreis in €/m³	absolute Änderungen	prozentuelle Änderungen
1995	76		
1996	64	–12	–15,79
1997	73	9	14,06
1998	78	5	6,85
1999	79	1	1,28
2000	73	–6	–7,59
2001	73	0	0
2002	74	1	1,37
2003	66	–8	–10,81
2004	68	2	3,03
2005	69	1	1,47
2006	76	7	10,14
2007	76	0	0
2008	69	–7	–9,21
2009	70	1	1,45
2010	89	19	**27,14**
2011	94	5	5,62

Im Zeitraum [2009; 2010] ändert sich der Holzpreis prozentuell am stärksten.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zuverlässigkeit eines Systems*

Aufgabennummer: 2_045	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, AN 1.1, AN 3.3, WS 2.3	

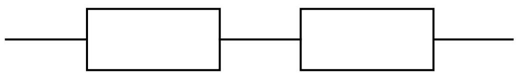
Ein System ist im Folgenden eine Maschine, die aus mehreren Bauteilen besteht. Jedes Bauteil dieses Systems kann mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit korrekt funktionieren oder ausfallen. Wenn einzelne Bauteile eines Systems ausfallen, hängt es von der Bauart des Systems ab, ob das gesamte System weiter funktioniert oder ob es ausfällt.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Bauteils* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. Das gilt jeweils für eine bestimmte Zeitdauer und unter bestimmten Bedingungen.

Unter der *Zuverlässigkeit eines Systems* versteht man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System korrekt funktioniert, also nicht ausfällt. (Es wird modellhaft angenommen, dass Ausfälle von Bauteilen voneinander unabhängig sind.) Die entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit heißt Ausfallwahrscheinlichkeit.

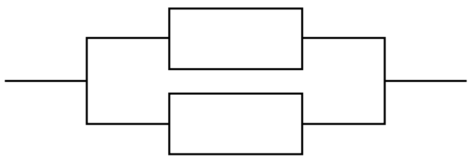
Man unterscheidet zwei einfache Typen von Systemen:

- Seriensysteme:



Ein Seriensystem funktioniert genau dann, wenn alle Bauteile funktionieren.

- Parallelsysteme:

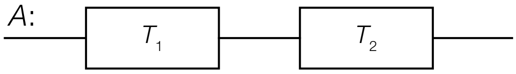


Ein Parallelsystem funktioniert genau dann, wenn mindestens ein Bauteil funktioniert.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist das System A:



Das Bauteil T_1 hat die Zuverlässigkeit p_1 und das Bauteil T_2 hat die Zuverlässigkeit p_2.

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems A als Funktion z_A von p_1 und p_2.

Geben Sie $z_A(p_1, p_2)$ an!

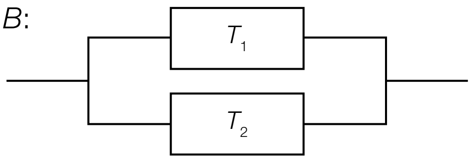
$z_A(p_1, p_2) =$ ______________________________

Bei einem anderen System gleicher Bauart haben die Bauteile jeweils die gleiche Zuverlässigkeit $p_1 = p_2 = 0{,}7$. Die Ausfallwahrscheinlichkeit dieses Systems soll auf ein Viertel der aktuellen Ausfallwahrscheinlichkeit gesenkt werden.

Geben Sie an, welchen Wert die Zuverlässigkeit p_{neu} (für jedes der beiden Bauteile) annehmen muss!

$p_{neu} =$ ______________________________

b) Gegeben ist das System B:



Die beiden Bauteile T_1 und T_2 haben jeweils die gleiche Zuverlässigkeit p.

Betrachten Sie die Zuverlässigkeit des Systems B als Funktion z_B von p.

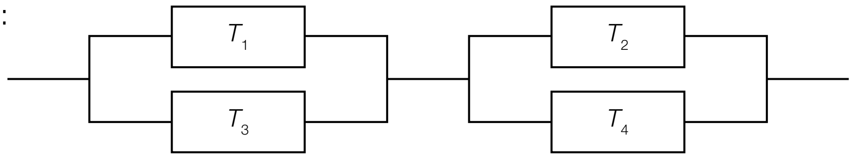
Geben Sie $z_B(p)$ an!

$z_B(p) =$ ______________________________

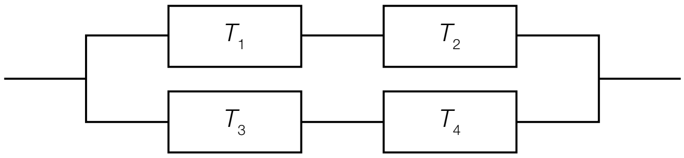
Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion z_B auf dem Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend ist!

c) Gegeben sind die Systeme C und D:

System C:



System D:



Jedes der Bauteile T_1, T_2, T_3 und T_4 hat die gleiche Zuverlässigkeit p.

Die Zuverlässigkeit z_C des Systems C ist eine Funktion von p und wird durch die Funktionsgleichung $z_C(p) = p^4 - 4 \cdot p^3 + 4 \cdot p^2$ beschrieben.

Ermitteln Sie den Quotienten $\frac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)}$ und interpretieren Sie diesen Wert für das System C!

Die Zuverlässigkeit z_D des Systems D ist eine Funktion von p.

Begründen Sie, warum $z_C(p) > z_D(p)$ für alle $p \in (0; 1)$ gilt!
Verwenden Sie dazu entweder eine Funktionsgleichung von z_D oder begründen Sie anhand der Bauart der Systeme C und D.

Lösungserwartung

a) $z_A(p_1, p_2) = p_1 \cdot p_2$

möglicher Vorgehensweise:

$1 - p_{neu}^2 = \frac{1 - 0{,}7^2}{4}$

$p_{neu} = \sqrt{0{,}8725} \approx 0{,}934$

b) $z_B(p) = 1 - (1 - p)^2$

mögliche Vorgehensweisen:

Der Funktionsterm $1 - (1 - p)^2 = -(p - 1)^2 + 1$ ist dahingehend zu deuten, dass die durch $f(x) = x^2$ beschriebene Grundparabel durch Einsetzen von $x = (p - 1)$ um eine Einheit nach rechts verschoben wird, wegen des Minus vor der Klammer an der horizontalen Achse gespiegelt und durch die Addition von 1 um eine Einheit nach oben geschoben wird.
Damit liegt der Scheitelpunkt bei $(1|1)$ und z_B ist im Intervall $(0; 1)$ streng monoton steigend.

oder:

$z_B'(p) = 2 \cdot (1 - p) > 0$ für alle $p \in (0; 1)$

oder:

$z_B = 1 - (1 - p)^2$
$(1 - p)$ ist für $p \in (0; 1)$ positiv und streng monoton fallend, daher auch $(1 - p)^2$.
Damit ist $1 - (1 - p)^2$ für $p \in (0; 1)$ streng monoton steigend.

c) $\dfrac{1 - z_C(0{,}9)}{1 - z_C(0{,}8)} \approx 0{,}254$

mögliche Interpretation:
Bei Erhöhung der Zuverlässigkeit der Bauteile von 0,8 auf 0,9 sinkt die Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems auf etwa ein Viertel des ursprünglichen Wertes.

mögliche Begründungen:

$z_D(p) = 2 \cdot p^2 \cdot (1 - p^2) + p^4$
$z_D(p) = 2 \cdot p^2 - p^4$

Der Graph der Funktion z_C verläuft für alle $p \in (0; 1)$ oberhalb des Graphen der Funktion z_D.

oder:

Bei allen Kombinationen, bei denen System *D* funktioniert, funktioniert auch System *C*. Außerdem funktioniert System *C* auch dann, wenn nur T_1 und T_4 bzw. nur T_2 und T_3 funktionieren.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen richtigen Term für z_A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,93; 0,94] bzw. [93 %; 94 %]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für einen richtigen Term. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für einen richtigen Nachweis. Andere richtige Nachweise (z. B. grafische Nachweise) sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für den richtigen Wert des Quotienten und eine richtige Interpretation.
Toleranzintervall: [0,25; 0,26] bzw. [25 %; 26 %]
– Ein Punkt für eine richtige Begründung.

Fibonacci-Zahlen und der Goldene Schnitt*

Aufgabennummer: 2_053	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.3, AN 1.1, AN 1.4	

Die sogenannten *Fibonacci-Zahlen* werden für $n \in \mathbb{N}$ und $n > 2$ durch die Differenzengleichung $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ mit den Startwerten $f(1) = 1$ und $f(2) = 1$ definiert.

Das Verhältnis $f(n) : f(n-1)$ nähert sich für große Werte von n dem *Goldenen Schnitt* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ an.

Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie dasjenige n an, für das das Verhältnis $f(n) : f(n-1)$ erstmals auf zwei Nachkommastellen mit dem Goldenen Schnitt ϕ übereinstimmt.

Für Fibonacci-Zahlen gilt für $k \in \mathbb{N}$ und $k > 2$ folgende Gleichung:
$f(n+k) = f(n-1) \cdot f(k) + f(n) \cdot f(k+1)$

2) Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung für $n = 3$ und $k = 5$.

b) Eine Möglichkeit zur näherungsweisen Bestimmung von Fibonacci-Zahlen durch einen einfachen expliziten Ausdruck ist die Approximation $f(n) \approx g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ mit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Die Zahl 832 040 ist eine Fibonacci-Zahl, das heißt, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = 832\,040$ bzw. $g(n) \approx 832\,040$.

1) Bestimmen Sie dieses n.

Eine exakte explizite Möglichkeit zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen $f(n)$ ist die Formel von Moivre/Binet:
$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x_1^{\,n} - x_2^{\,n})$
Dabei sind $x_1 = \phi$ und x_2 die Lösungen der Gleichung $x^2 + a \cdot x - 1 = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$.

2) Berechnen Sie a und x_2.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

a1) mögliche Vorgehensweise:

$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

n	$f(n)$	$f(n) : f(n-1)$
1	1	–
2	1	1
3	2	2
4	3	1,5
5	5	1,666…
6	8	1,6
7	13	1,625
8	21	1,615…

Für $n = 8$ stimmt das Verhältnis $f(n) : f(n-1)$ erstmals auf zwei Nachkommastellen mit ϕ überein.

a2) mögliche Vorgehensweise:

$n = 3,\ k = 5 \quad \Rightarrow \quad f(8) = f(2) \cdot f(5) + f(3) \cdot f(6)$

$21 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8$

$21 = 21$ w. A.

b1) mögliche Vorgehensweise:

$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n \approx 832\,040 \quad \Rightarrow \quad n = 30$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + a \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -1$

Lösen der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$ und $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ $(\approx -0{,}618)$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
b2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für x_2: [–0,62; –0,60]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Section-Control

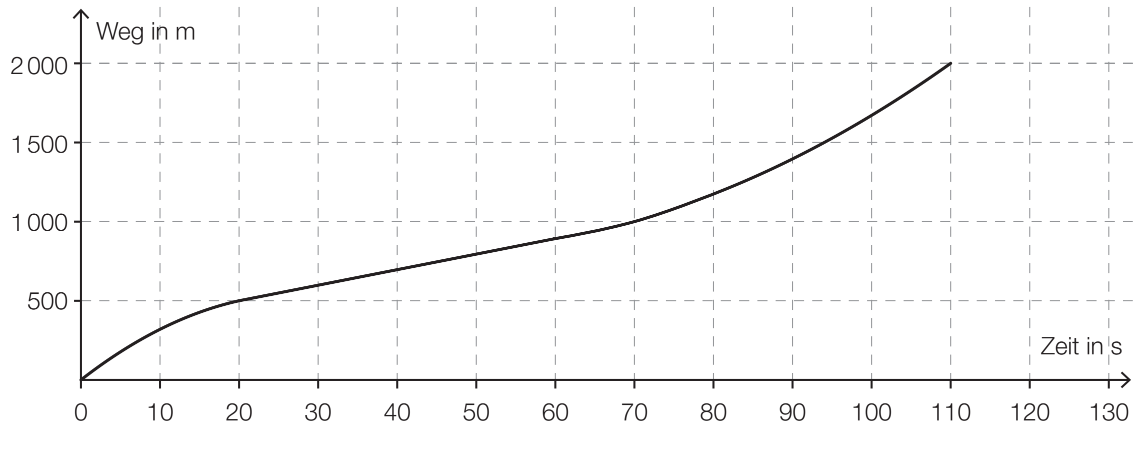
Aufgabennummer: 2_086	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 1.1, AN 1.3	

Section-Control bezeichnet ein System zur Überwachung der Einhaltung von Tempolimits im Straßenverkehr. Dabei wird nicht die Geschwindigkeit an einem bestimmten Punkt gemessen, sondern die mittlere Geschwindigkeit über eine längere Strecke ermittelt.

a) In einem 6 km langen Baustellenbereich wird eine Section-Control errichtet.
Es gilt eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 60 km/h.
Jemand behauptet: „Wenn ich die zulässige Höchstgeschwindigkeit im gesamten Baustellenbereich um 10 % überschreite, dann verkürzt sich meine Fahrzeit im Baustellenbereich um 10 %.“

1) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

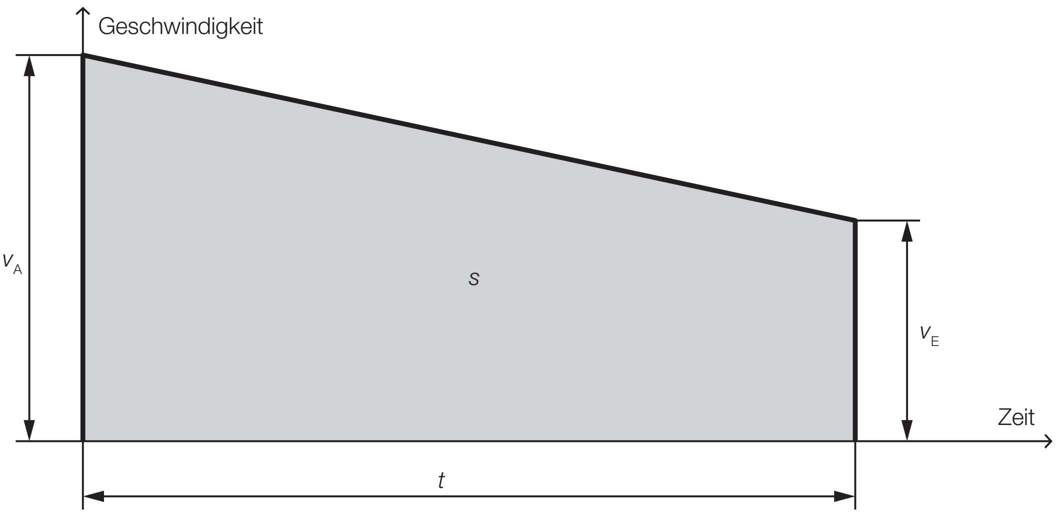
b) Im nachstehenden Weg-Zeit-Diagramm ist die Fahrt eines Fahrzeugs in einem überprüften Bereich dargestellt.



1) Ermitteln Sie die mittlere Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf der ersten Weghälfte.

2) Argumentieren Sie, dass die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte kleiner als die mittlere Geschwindigkeit auf der zweiten Weghälfte ist.

c) Ein Fahrzeug fährt durch einen Bereich, der durch eine Section-Control überwacht wird. Seine Geschwindigkeit nimmt auf diesem Streckenabschnitt linear ab.



Die Endgeschwindigkeit v_E, die Fahrzeit t und der zurückgelegte Weg s sind bekannt.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit v_A des Fahrzeugs.

v_A = ____

Lösungserwartung

a1) $s = 6$ km

$v_1 = 60$ km/h: $t_1 = \frac{s}{v_1} = 0{,}1$ h

$v_2 = 66$ km/h: $t_2 = \frac{s}{v_2} = 0{,}\overline{09}$ h

90 % von 0,1 h sind exakt 0,09 h. Das ist weniger als t_2.

b1) $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1\,000 \text{ m}}{70 \text{ s}} = 14{,}285\ldots \text{ m/s} \approx 14{,}29 \text{ m/s}$

b2) Die Fahrzeit für die erste Weghälfte beträgt 70 Sekunden. Die Fahrzeit für die zweite Weghälfte beträgt nur 40 Sekunden. Daher ist die mittlere Geschwindigkeit auf der ersten Weghälfte geringer.

c1) Der Flächeninhalt des Trapezes entspricht dem zurückgelegten Weg: $s = \frac{v_A + v_E}{2} \cdot t$.

$v_A = 2 \cdot \frac{s}{t} - v_E$

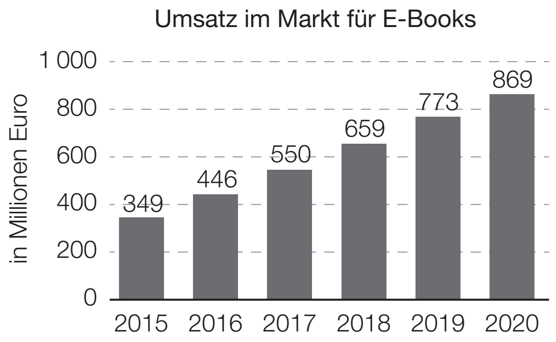
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

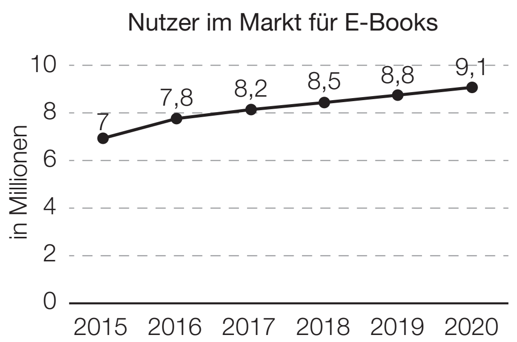
E-Book*

Aufgabennummer: 2_060	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.3, FA 2.1, FA 5.2, WS 2.2, WS 3.2	

Ein Buch in digitaler Form wird als *E-Book* (von engl. *electronic book*) bezeichnet.

Die beiden folgenden auf Deutschland bezogenen Grafiken stellen Schätzwerte für die Entwicklung des Markts für E-Books dar:





Quelle: http://www.e-book-news.de/20-prozent-wachstum-pro-jahr-statista-sieht-deutschen-e-book-markt-im-aufwind/ [19.06.2019] (adaptiert).

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie für den geschätzten Umsatz pro Nutzer in Deutschland die absolute und die relative Änderung für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

absolute Änderung: € ____

relative Änderung: ____

2) Berechnen Sie den Differenzenquotienten des geschätzten Umsatzes pro Nutzer in Deutschland für den Zeitraum von 2015 bis 2020.

b) Die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wird in der oben angeführten Quelle wie folgt beschrieben:

„20 Prozent Wachstum pro Jahr"

1) Geben Sie an, wie die Umsatzschätzung $U(2017)$ für das Jahr 2017 hätte lauten müssen, wenn der Umsatz ausgehend vom Schätzwert von 2015 tatsächlich jährlich um 20 % zugenommen hätte.

$U(2017)$ = ____ Millionen Euro

Jemand beschreibt die geschätzte Steigerung des Umsatzes im Markt für E-Books von 349 Millionen Euro im Jahr 2015 auf 869 Millionen Euro im Jahr 2020 wie folgt:

„a Millionen Euro Wachstum pro Jahr"

2) Berechnen Sie a.

c) Im Jahr 2015 betrug die Einwohnerzahl von Deutschland ungefähr 82,18 Millionen, jene von Österreich ungefähr 8,58 Millionen. Jemand stellt sich die folgende Frage: „Wie groß ist die Anzahl der Personen aus Österreich, die im Jahr 2015 schon E-Book-Nutzer waren?“

1) Beantworten Sie diese Frage unter der Annahme, dass Österreich im Jahr 2015 den gleichen (geschätzten) Anteil an E-Book-Nutzern wie Deutschland hatte.

Anzahl: ____ Personen

Im Jahr 2020 werden 500 Personen aus Österreich zufällig ausgewählt.
Die als binomialverteilt angenommene Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Personen aus dieser Auswahl an, die E-Book-Nutzer sind. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person E-Book-Nutzer ist, mit 12 % angenommen.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 50 E-Book-Nutzer in dieser Auswahl sind.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) Umsatz pro Nutzer 2015: rund € 49,86
Umsatz pro Nutzer 2020: rund € 95,49

absolute Änderung: € 45,63
relative Änderung: 0,9155

a2) Differenzenquotient für das Intervall [2015; 2020]: rund € 9,13 pro Jahr

b) Lösungserwartung:

b1) $U(2017) = U(2015) \cdot 1{,}2^2$
$U(2017) = 502{,}56$ Millionen Euro

b2) $a = \frac{869 - 349}{5} = 104$

c) Lösungserwartung:

c1) mögliche Vorgehensweise:
$8{,}58 \cdot \frac{7}{82{,}18} = 0{,}7308347... \approx 0{,}730835$
Anzahl: 730 835 Personen

c2) mögliche Vorgehensweise:
$n = 500;\ p = 0{,}12$
$P(X \geq 50) = 0{,}9287... \approx 0{,}929$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte. Andere Schreibweisen der Lösungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die absolute Änderung: [44; 47]
Toleranzintervall für die relative Änderung: [0,88; 0,95]

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [8,90; 9,40]

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [502 Millionen Euro; 503 Millionen Euro]

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [720 000; 780 000]

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,90; 0,95]

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Benzinverbrauch*

Aufgabennummer: 2_075	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 2.1, AN 1.1, AN 3.3	

Der Benzinverbrauch eines bestimmten Kleinwagens kann in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit modellhaft durch die Funktion B beschrieben werden.

$B(v) = 0{,}000483 \cdot v^2 - 0{,}0326 \cdot v + 2{,}1714 + \frac{66}{v}$ mit $20 < v < 150$

v ... Geschwindigkeit in km/h
$B(v)$ ... Benzinverbrauch in Litern pro 100 km (L/100 km) bei der Geschwindigkeit v

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h höher als bei einer Geschwindigkeit von 70 km/h ist.

______________________________ %

Der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 40 km/h ist um 25 % geringer als der Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit v_1 mit $20 < v_1 < 40$.

2) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v_1.

v_1 = ______________________________ km/h

b) Für hohe Geschwindigkeiten soll die Funktion B durch eine lineare Funktion f mit $f(v) = k \cdot v + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ angenähert werden, sodass gilt:
$f(100) = B(100)$
$f(130) = B(130)$

1) $\boxed{\text{A}}$ Ermitteln Sie einen Funktionsterm der Funktion f.

$f(v)$ = ______________________________

Diese Näherung kann verwendet werden, wenn die Abweichung zwischen den Funktionswerten von f und B höchstens 0,3 L/100 km beträgt.

2) Geben Sie das größtmögliche Intervall für die Geschwindigkeit an, in dem die Funktion f als Näherung verwendet werden kann.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

c) 1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion B diejenige Geschwindigkeit v_{min}, bei der der Benzinverbrauch am geringsten ist, sowie den zugehörigen Benzinverbrauch B_{min}.

v_{min} = ____________________ km/h

B_{min} = ____________________ L/100 km

Der Benzinverbrauch hängt auch vom Reifendruck ab.
Die Funktion g beschreibt den Benzinverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck.
Dabei gilt: $g(v) = 1{,}02 \cdot B(v)$

2) Berechnen Sie mithilfe der Funktion g, bei welchen beiden Geschwindigkeiten der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{min} ist.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $\frac{B(90) - B(70)}{B(70)} = 0{,}2138... \approx 21{,}4\ \%$

a2) $B(v_1) \cdot 0{,}75 = B(40)$

$v_1 = 24{,}24...$ km/h

b) Lösungserwartung:

b1) mögliche Vorgehensweise:
$f(100) = B(100) = 4{,}40...$
$f(130) = B(130) = 6{,}60...$
$f(v) = 0{,}0734... \cdot v - 2{,}9399...$

b2) mögliche Vorgehensweise:
$D(v) = B(v) - f(v)$
$D(v) = 0{,}3$
$(v_1 = -10{,}94...)$
$v_2 = 87{,}08...$
$v_3 = 143{,}34...$

Da die Funktion D an der Stelle $v = 114{,}91...$ km/h eine Minimumstelle mit dem Funktionswert $-0{,}1 > -0{,}3$ hat, erhält man das Intervall [87,1 km/h; 143,3 km/h].

c) Lösungserwartung:

c1) $v_{min} = 55{,}73...$ km/h
$B_{min} = 3{,}03...$ L/100 km

c2) $g(v) = B_{min} + 2$
$v_1 = 20{,}41...$ km/h
$v_2 = 108{,}67...$ km/h

Bei Geschwindigkeiten von ca. 20,4 km/h und ca. 108,7 km/h ist der Benzinverbrauch bei einem etwas zu niedrigen Reifendruck um 2 L/100 km höher als B_{min}.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm. Äquivalente Funktionsterme sind als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für das richtige Intervall, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

c1) Ein Punkt für die beiden richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die beiden richtigen Geschwindigkeiten, wobei die Einheit „km/h“ nicht angeführt sein muss.

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Abkühlungsprozesse

Aufgabennummer: 2_032	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AN 1.3, AN 2.1, AN 4.3, FA 1.5, FA 1.6, FA 1.7

Wird eine Tasse mit heißem Kaffee am Frühstückstisch abgestellt, kühlt der Kaffee anfangs rasch ab, bleibt aber relativ lange warm.

Die Temperatur einer Flüssigkeit während des Abkühlens kann nach dem Newton'schen Abkühlungsgesetz durch eine Funktion der Form $t \mapsto T_U + (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t}$ beschrieben werden. Dabei gibt T_0 die Anfangstemperatur der Flüssigkeit (in °C) zum Zeitpunkt $t = 0$ an, T_U ist die konstante Umgebungstemperatur (in °C) und $k \in \mathbb{R}^+$ (in s^{-1}) ist eine von den Eigenschaften der Flüssigkeit und des Gefäßes abhängige Konstante.

Ein zu untersuchender Abkühlungsprozess wird durch eine Funktion T der obigen Form beschrieben. Dabei beträgt die Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C und die Umgebungstemperatur $T_U = 20$ °C. Die Abkühlungskonstante hat den Wert $k = 0{,}002$. Die Zeit t wird in Sekunden gemessen, die Temperatur $T(t)$ in °C.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten der Funktion T im Intervall [0 s; 300 s] und interpretieren Sie den berechneten Wert im Hinblick auf den beschriebenen Abkühlungsprozess!

Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von T für große Werte von t und interpretieren Sie den Verlauf im gegebenen Kontext!

b) Der Wert $T'(t)$ kann als „Abkühlungsgeschwindigkeit" der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t gedeutet werden.

Geben Sie für den zu untersuchenden Abkühlungsprozess eine Funktionsgleichung für T' an!
Geben Sie weiters denjenigen Zeitpunkt an, zu dem der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit am größten ist!

Der Graph von T' und die t-Achse schließen im Intervall [0 s; 600 s] eine Fläche von ca. 49 Flächeneinheiten ein.
Interpretieren Sie diesen Wert unter Verwendung der entsprechenden Einheit im gegebenen Kontext!

c) Eine zweite Flüssigkeit in einem anderen Gefäß hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von 95 °C. Nach einer Minute ist die Temperatur auf 83,4 °C gesunken, die Umgebungstemperatur beträgt $T_U = 20$ °C. Die Funktion T_2 beschreibt den Abkühlungsprozess dieser Flüssigkeit.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Abkühlungskonstante k_2 für diesen Abkühlungsprozess berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Wert!

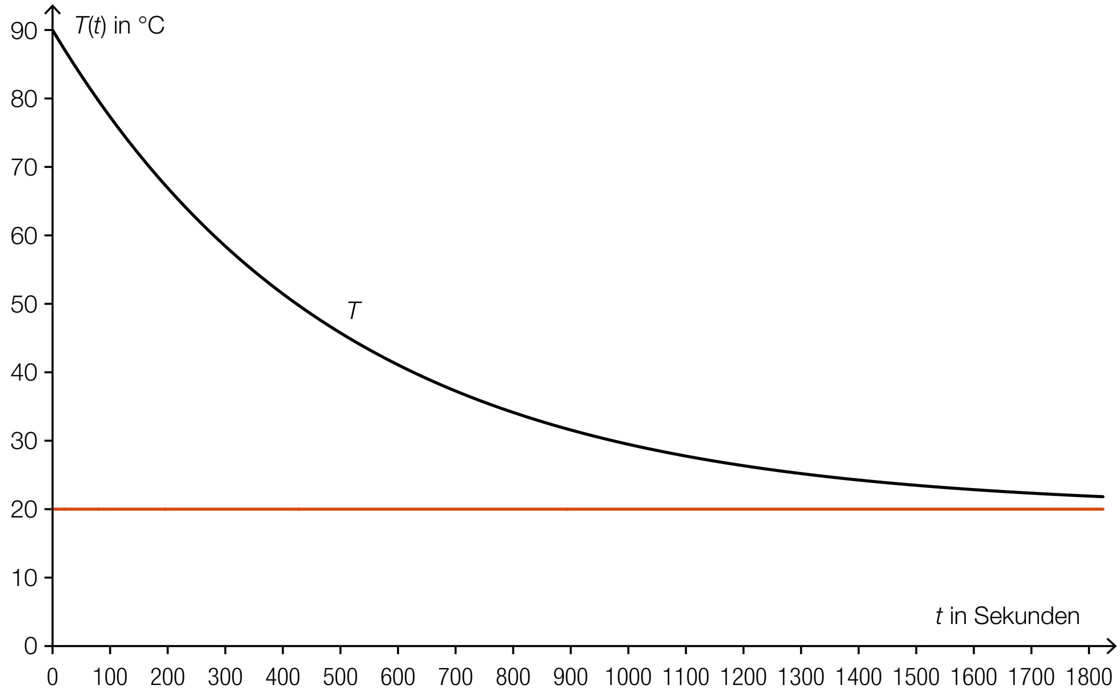
Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Graphen der Funktionen T und T_2 und interpretieren Sie die Koordinaten des Schnittpunkts im gegebenen Kontext!

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{T(300) - T(0)}{300} \approx -0{,}1053$

In den ersten fünf Minuten kühlt die Flüssigkeit durchschnittlich um ca. 0,1 °C pro Sekunde ab.

Der Graph von T nähert sich im Laufe der Zeit der Umgebungstemperatur (20 °C) an.



b) $T'(t) = -0{,}14 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t}$

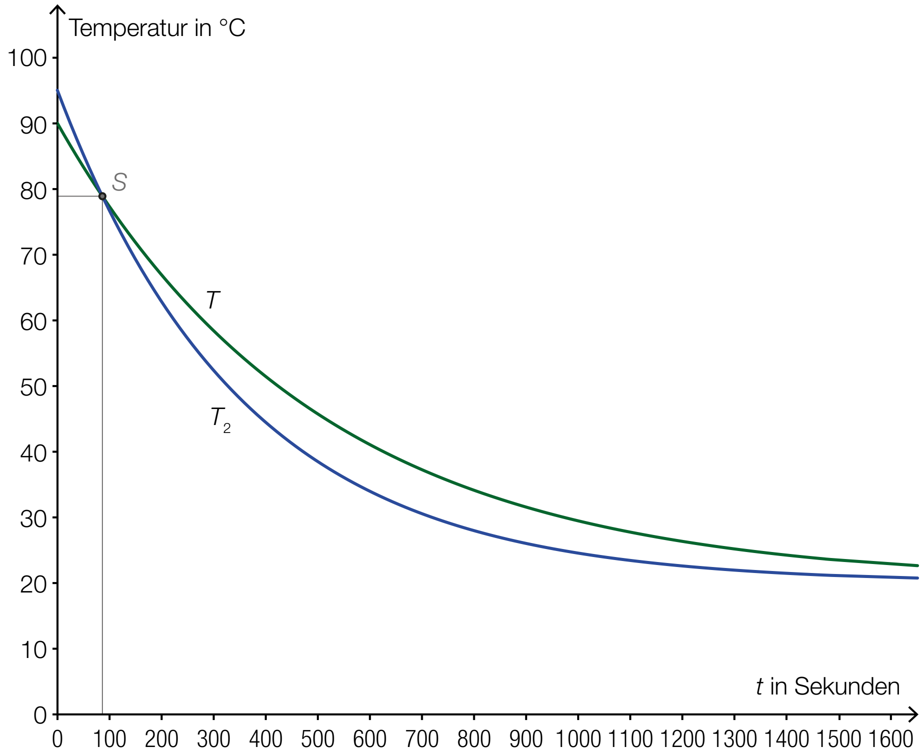
Der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 0$ am größten.

Die Flüssigkeit kühlt in den ersten zehn Minuten insgesamt um ca. 49 °C ab.

c) $T_2(t) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot t} \Rightarrow$

$T_2(60) = 20 + 75 \cdot e^{-k_2 \cdot 60} = 83{,}4$

$k_2 \approx 0{,}0028\ \text{s}^{-1}$



Schnittpunkt: $S \approx (86{,}2 \mid 78{,}9)$
Nach ca. 86,2 Sekunden haben beide Flüssigkeiten eine Temperatur von ca. 78,9 °C.

Saturn-V-Rakete

Aufgabennummer: 2_025	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenzen: AG 2.1, FA 2.1, FA 4.3, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.3

☐ keine Hilfsmittel erforderlich	☐ gewohnte Hilfsmittel möglich	☒ besondere Technologie erforderlich

Eine Mehrstufenrakete besteht aus mehreren, oft übereinander montierten „Raketenstufen". Jede Raketenstufe ist eine separate Rakete mit Treibstoffvorrat und Raketentriebwerk. Leere Treibstofftanks und nicht mehr benötigte Triebwerke werden abgeworfen. Auf diese Weise werden höhere Geschwindigkeiten und somit höhere Umlaufbahnen als mit einstufigen Raketen erreicht.
Die Familie der Saturn-Raketen gehört zu den leistungsstärksten Trägersystemen der Raumfahrt, die jemals gebaut wurden. Sie wurden im Rahmen des Apollo-Programms für die US-amerikanische Raumfahrtbehörde NASA entwickelt. Die Saturn V ist die größte jemals gebaute Rakete. Mithilfe dieser dreistufigen Rakete konnten in den Jahren 1969 bis 1972 insgesamt 12 Personen auf den Mond gebracht werden. 1973 beförderte eine Saturn V die US-amerikanische Raumstation Skylab in eine Erdumlaufbahn in 435 km Höhe.
Eine Saturn V hatte die Startmasse $m_0 = 2{,}9 \cdot 10^6$ kg. Innerhalb von 160 s nach dem Start wurden die $2{,}24 \cdot 10^6$ kg Treibstoff der ersten Stufe gleichmäßig verbrannt. Diese ersten 160 s werden als Brenndauer der ersten Stufe bezeichnet. Die Geschwindigkeit $v(t)$ (in m/s) einer Saturn V kann t Sekunden nach dem Start während der Brenndauer der ersten Stufe näherungsweise durch die Funktion v mit

$$v(t) = 0{,}0000000283 \cdot t^5 - 0{,}00000734 \cdot t^4 + 0{,}000872 \cdot t^3 - 0{,}00275 \cdot t^2 + 2{,}27 \cdot t$$

beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

a) Berechnen Sie die Beschleunigung einer Saturn V beim Start und am Ende der Brenndauer der ersten Stufe!

Geben Sie an, ob die Beschleunigung der Rakete nach der halben Brenndauer der ersten Stufe kleiner oder größer als die mittlere Beschleunigung (= mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit) während der ersten 160 Sekunden des Flugs ist! Begründen Sie Ihre Antwort anhand des Graphen der Geschwindigkeitsfunktion!

b) Berechnen Sie die Länge des Weges, den eine Saturn V 160 s nach dem Start zurückgelegt hat!

Begründen Sie, warum in dieser Aufgabenstellung der zurückgelegte Weg nicht mit der Formel „Weg = Geschwindigkeit mal Zeit" berechnet werden kann!

c) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt t_1, für den gilt: $v(t_1) = \frac{v(0) + v(160)}{2}$.
Interpretieren Sie t_1 und $v(t_1)$ im gegebenen Kontext!

d) Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Treibstoffmasse m_T (in Tonnen) der Saturn V von der Flugzeit t während der Brenndauer der ersten Stufe durch eine Funktionsgleichung!

Geben Sie die prozentuelle Abnahme der Gesamtmasse einer Saturn V für diesen Zeitraum an!

e) Nach dem Gravitationsgesetz wirkt auf eine im Abstand r vom Erdmittelpunkt befindliche Masse m die Gravitationskraft $F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$, wobei G die Gravitationskonstante und M die Masse der Erde ist.

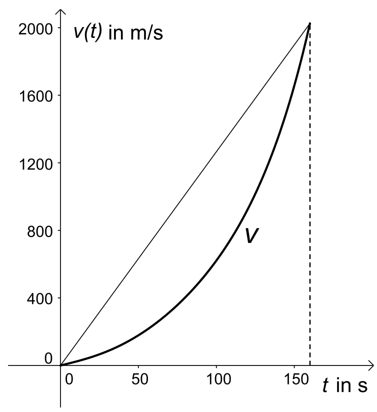
Deuten Sie das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ im Hinblick auf die Beförderung der Raumstation Skylab in die Erdumlaufbahn und beschreiben Sie, welche Werte dabei für die Grenzen r_1 und r_2 einzusetzen sind!

Begründen Sie anhand der Formel für die Gravitationskraft, um welchen Faktor sich das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ ändert, wenn ein Objekt mit einem Zehntel der Masse von Skylab in eine Umlaufbahn derselben Höhe gebracht wird!

Möglicher Lösungsweg

a) $a(0) = v'(0) = 2{,}27\ \text{m/s}^2$
$a(160) = v'(160) = 40{,}83\ \text{m/s}^2$

Bestimmt man die zur Sekante parallele Tangente, so liegt die Stelle des zugehörigen Berührpunktes rechts von $t = 80$. Aus der Linkskrümmung der Funktion v folgt daher, dass die Beschleunigung nach 80 Sekunden kleiner als die mittlere Beschleunigung im Intervall [0 s; 160 s] ist.



Weitere mögliche Begründung:
Die mittlere Beschleunigung (= Steigung der Sekante) in [0; 160] ist größer als die Momentanbeschleunigung (= Steigung der Tangente) bei $t = 80$.

b) $s(160) = \int_0^{160} v(t)\,\mathrm{d}t \approx 93\,371$

zurückgelegter Weg nach 160 s: 93 371 m

$s = v \cdot t$ gilt nur bei konstanter Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit der Saturn V ändert sich allerdings mit der Zeit.

c) $v(0) = 0$ m/s; $v(160) \approx 2\,022$ m/s
$v(t_1) = 1\,011 \ \Rightarrow\ t_1 \approx 125$ s

Die Geschwindigkeit ist nach 125 s halb so groß wie nach 160 s.

d) $m_T(t) = 2\,240 - 14 \cdot t$
$\frac{2{,}24}{2{,}9} \approx 0{,}77$
Die Gesamtmasse hat um 77 % abgenommen.

e) Das Ergebnis gibt die Arbeit an, die nötig ist, um die Raumstation Skylab in die entsprechende Erdumlaufbahn zu bringen.
r_1 ist der Erdradius, r_2 ist die Summe aus Erdradius und Höhe der Umlaufbahn.

Die Gravitationskraft und somit auch die Arbeit sind direkt proportional zur Masse des Objekts. Die erforderliche Arbeit ist daher nur ein Zehntel des Vergleichswertes.

Lösungsschlüssel

a) Ein Punkt für die richtige Berechnung der beiden Beschleunigungswerte.
Toleranzintervall für $a(0)$: [2,2 m/s²; 2,3 m/s²]
Toleranzintervall für $a(160)$: [40 m/s²; 42 m/s²]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

b) Ein Punkt für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges.
Toleranzintervall: [93 000 m; 94 000 m]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Begründung laut Lösungserwartung.

c) Ein Punkt für die richtige Berechnung des Zeitpunkts t_1.
Toleranzintervall: [124 s; 126 s]
Ein Punkt für eine sinngemäß richtige Deutung der beiden Werte laut Lösungserwartung.

d) Ein Punkt für die Angabe einer richtigen Funktionsgleichung.
Äquivalente Schreibweisen sind als richtig zu werten.
Ein Punkt für die Angabe des richtigen Prozentsatzes.
Toleranzintervall: [77 %; 78 %]

e) Ein Punkt für die richtige Deutung des bestimmten Integrals und die richtige Beschreibung der Werte der beiden Grenzen.
Ein Punkt für eine richtige Begründung, um welchen Faktor sich das Ergebnis ändert.
Die direkte Proportionalität zwischen Masse und Gravitationskraft muss dabei sinngemäß erwähnt werden.

Kettenlinie

Aufgabennummer: 2_030	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.5, AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, FA 1.5, FA 1.7, FA 3.2	

Hängt man ein Seil (oder beispielsweise eine Kette) an zwei Punkten auf, so kann der Verlauf des Seils unter bestimmten Bedingungen durch eine Funktion der Form $x \mapsto \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ modelliert werden.
Der Wert der Konstanten a hängt dabei von der Seillänge und vom Abstand der beiden Aufhängepunkte ab.
Der vertikale Abstand zwischen dem tiefsten Punkt des Seils und seinen Aufhängepunkten wird als Durchhang bezeichnet.
Ein bestimmtes Seil kann modellhaft durch eine Funktion f der obigen Form mit $a = 4$ beschrieben werden (x und $f(x)$ in Metern). Die beiden Aufhängepunkte P_1 und P_2 befinden sich in gleicher Höhe und ihr Abstand beträgt $d = 6$ m.

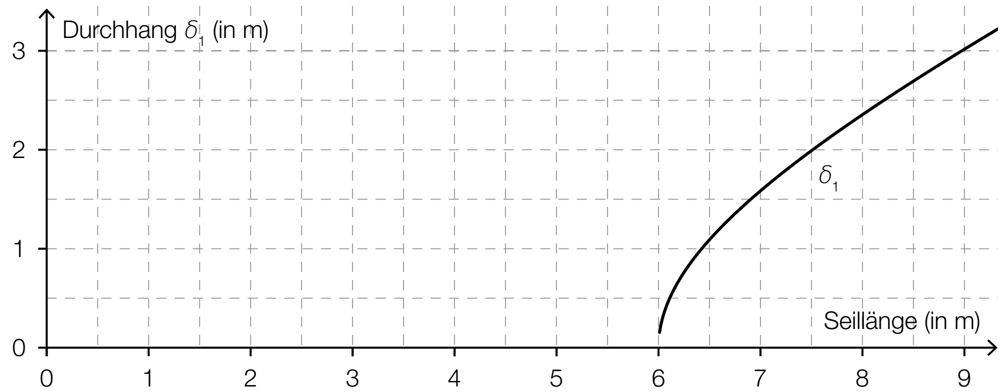
Aufgabenstellung:

a) Geben Sie eine Gleichung an, mit der die Stelle mit dem maximalen Durchhang des durch f beschriebenen Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diese Stelle!

Geben Sie eine Funktionsgleichung f_1 an, mit der ein Seil modelliert werden kann, welches an jeweils 1 m tieferen Aufhängepunkten montiert ist und denselben Durchhang wie das durch f beschriebene Seil aufweist!

b) Geben Sie eine Gleichung an, mit der der Durchhang δ des durch f modellierten Seils berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Durchhang!

Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion δ_1, der die Abhängigkeit des Durchhangs von der Länge des Seils zwischen den Aufhängepunkten P_1 und P_2 beschreibt.



Geben Sie mithilfe der oben dargestellten Abbildung die Länge des in der Einleitung beschriebenen Seils an! Ermitteln Sie weiters, um wie viele Meter der Durchhang zunimmt, wenn das Seil durch ein zwei Meter längeres Seil (gleicher Beschaffenheit) ersetzt wird, das an denselben Aufhängepunkten montiert ist!

c) Der Graph der Funktion f kann durch den Graphen einer quadratischen Funktion g mit $g(x) = b \cdot x^2 + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}^+$ angenähert werden. Der Graph von g verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f.

Geben Sie alle Gleichungen an, die für die Berechnung von b und c notwendig sind, und ermitteln Sie die Werte dieser Parameter!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der größte vertikale Abstand von f und g zwischen den beiden Aufhängepunkten berechnet werden kann!

d) Der Graph der Funktion f kann auch durch den Graphen einer Polynomfunktion h vierten Grades angenähert werden. Für den Graphen von h gelten folgende Bedingungen:
Er verläuft durch die Aufhängepunkte P_1 und P_2 und den Tiefpunkt des Graphen von f und hat in den beiden Aufhängepunkten dieselbe Steigung wie der Graph von f.

Drücken Sie <u>alle</u> gegebenen Bedingungen mithilfe von Gleichungen aus!

Ermitteln Sie anhand dieser Gleichungen eine Funktionsgleichung von h!

Möglicher Lösungsweg

a) $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} - e^{-\frac{x}{4}}\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

$f_1(x) = f(x) - 1 = \frac{4}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right) - 1$

b) $\delta = f(3) - f(0)$
$\delta \approx 1{,}2$ m

Die Seillänge beträgt ca. 6,6 m.
$\delta_1(8{,}6) \approx 2{,}8 \;\Rightarrow\;$ Der Durchhang nimmt um ca. 1,6 m zu.

c) $g(0) = 4 = c$

$g(3) = f(3) \approx 5{,}18 = 9 \cdot b + 4 \;\Rightarrow\; b \approx 0{,}13$

größter vertikaler Abstand:
$(g(x) - f(x))' = 0$

d) $h(-3) = f(-3)$
$h(0) = f(0)$
$h(3) = f(3)$
$h'(-3) = f'(-3)$
$h'(3) = f'(3)$

$h(x) \approx 0{,}0007 \cdot x^4 + 0{,}125 \cdot x^2 + 4$

Angebot und Nachfrage*

Aufgabennummer: 2_056	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.6, AN 1.3, AN 3.3	

Ein Aufeinandertreffen von Anbietern und Nachfragern wird in der Wirtschaftswissenschaft als *Markt* bezeichnet. Gibt es auf einem Markt genau einen Anbieter für eine Ware, so ist dieser in der Lage, den Preis der Ware zu bestimmen, wobei die nachgefragte und damit absetzbare Menge der Ware vom Preis abhängt. Um bei gewissen Problemstellungen mit der Kosten-, Erlös- und/oder Gewinnfunktion arbeiten zu können, wird häufig der Preis als sogenannte Preisfunktion der Nachfrage p_N in Abhängigkeit von der nachgefragten Menge x der Ware angegeben.

Die nachstehenden Aufgaben sind für die Preisfunktion der Nachfrage p_N mit $p_N(x) = 36 - x^2$ zu bearbeiten. Dabei wird x in Mengeneinheiten (ME) und $p_N(x)$ in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME) angegeben.

Aufgabenstellung:

a) Alle $x \in \mathbb{R}_0^+$, für die $p_N(x) \geq 0$ gilt, liegen im Intervall $[x_0; x_n]$.

1) Ermitteln Sie die mittlere Änderungsrate der Funktion p_N in diesem Intervall $[x_0; x_n]$ und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf den Verkaufspreis.

2) Zeigen Sie mithilfe der Differenzialrechnung, dass für alle x_1, x_2 mit $x_1 < x_2$ aus dem Intervall $(x_0; x_n)$ die Ungleichung $p_N(x_1) > p_N(x_2)$ gilt.

b) Der Erlös durch die verkaufte Menge der Ware wird durch die Funktion E mit $E(x) = x \cdot p_N(x)$ beschrieben. Der Grenzerlös $E'(x)$ bei einer bestimmten Absatzmenge x beschreibt näherungsweise die Änderung des Erlöses bezogen auf eine zusätzlich abgesetzte Mengeneinheit.

1) Ermitteln Sie diejenige Menge x_E, bei der der Erlös maximal ist.

2) Begründen Sie, warum der Grenzerlös für jede verkaufte Menge x mit $0 < x < x_E$ positiv ist.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

c) Gibt es auf einem Markt viele Anbieter einer Ware, dann werden diese in der Regel bei steigendem Preis auch eine größere Menge der Ware anbieten. Dieser Zusammenhang kann als Preisfunktion des Angebots p_A in Abhängigkeit von der angebotenen Menge x beschrieben werden (mit x in ME und $p_A(x)$ in GE/ME).
Diejenige Menge der Ware, bei der der Preis für die angebotene Menge und der Preis für die nachgefragte Menge gleich groß sind, nennt man Gleichgewichtsmenge x_G. Den zugehörigen Preis nennt man Gleichgewichtspreis.

1) Ermitteln Sie für die gegebene Funktion p_N und die Funktion p_A mit $p_A(x) = 4 \cdot x + 4$ die Gleichgewichtsmenge x_G und den zugehörigen Gleichgewichtspreis.

Für eine Ware wird ein Preis p_M festgelegt, der um 2 GE/ME größer als der ermittelte Gleichgewichtspreis ist.

2) Bestimmen Sie die angebotene und die nachgefragte Menge für diesen Preis p_M und vergleichen Sie die Ergebnisse im Hinblick auf die verkaufte Menge der Ware.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

Lösungserwartung

a1) Intervall: $x_0 = 0$ ME, $x_n = 6$ ME $\Rightarrow$ [0 ME; 6 ME]

mittlere Änderungsrate: $\dfrac{p_N(6) - p_N(0)}{6 - 0} = \dfrac{0 - 36}{6} = -6$

mögliche Deutung:

Pro zusätzlicher Mengeneinheit, die verkauft werden soll, nimmt der Verkaufspreis im Intervall [0; 6] durchschnittlich um 6 GE/ME ab.

a2) mögliche Vorgehensweise:

Die angegebene Ungleichung besagt, dass die Funktion p_N im angegebenen Definitionsbereich streng monoton fallend ist. Das ist sicher dann der Fall, wenn $p_N'(x)$ negativ (oder für einzelne Stellen null) für alle $x \in (0; 6)$ ist.
Überprüfung: $p_N'(x) = -2 \cdot x$ und es gilt: $-2 \cdot x < 0$ für alle $x \in (0; 6)$

b1) $E(x) = x \cdot p_N(x) = -x^3 + 36 \cdot x$

$E'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 \cdot x^2 + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{12} \quad (x_2 = -\sqrt{12}) \quad \Rightarrow \quad x_E \approx 3{,}46$ ME

b2) mögliche Begründung:

Die Funktion E' ist eine nach unten offene Parabel, die an der Stelle $x = 0$ den Funktionswert $E'(0) = 36$ hat und an der Stelle $x_E = \sqrt{12}$ eine Nullstelle hat. Also sind sämtliche Funktionswerte von E' (und damit der Grenzerlös für jede verkaufte Menge x) im Intervall $(0; x_E)$ positiv.

c1) $p_A(x) = p_N(x) \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot x + 4 = -x^2 + 36 \quad \Rightarrow \quad x_G = 4$ ME
Gleichgewichtspreis $= p_A(4) = p_N(4) = 20$

Bei der Gleichgewichtsmenge von $x_G = 4$ ME beträgt der zugehörige Gleichgewichtspreis 20 GE/ME.

c2) $p_M = 22$ GE/ME

angebotene Menge: $22 = 4 \cdot x + 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4{,}5$ ME
nachgefragte Menge: $22 = -x^2 + 36 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt{14} \quad (x_2 = -\sqrt{14}) \quad \Rightarrow \quad x \approx 3{,}74$ ME

möglicher Vergleich:

Die nachgefragte Menge ist kleiner als die angebotene Menge, d. h., die Ware wird nicht zur Gänze verkauft.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Deutung.
a2) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis mithilfe der Differenzialrechnung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME“ nicht angeführt sein muss. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
b2) Ein Punkt für eine richtige Begründung. Andere richtige Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte, wobei die entsprechenden Einheiten nicht angeführt sein müssen. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
c2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte, wobei die entsprechenden Einheiten nicht angeführt sein müssen, und für einen richtigen Vergleich. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Fallschirmsprung*

Aufgabennummer: 2_061	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, AN 1.1, AN 1.3, AN 4.3	

Bei einem Fallschirmsprung aus einer Höhe von 4000 m über Grund wird 30 s nach dem Absprung der Fallschirm geöffnet.

Für $t \in [0; 30]$ gibt die Funktion v_1 mit $v_1(t) = 56 - 56 \cdot e^{-\frac{t}{4}}$ (unter Berücksichtigung des Luftwiderstands) die Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers zum Zeitpunkt t an (t in s nach dem Absprung, $v_1(t)$ in m/s).

Für $t \geq 30$ gibt die Funktion v_2 mit $v_2(t) = \frac{51}{(t-29)^2} + 5 - 56 \cdot e^{-7,5}$ die Fallgeschwindigkeit des Fallschirmspringers zum Zeitpunkt t bis zum Zeitpunkt der Landung an (t in s nach dem Absprung, $v_2(t)$ in m/s).

Modellhaft wird angenommen, dass der Fallschirmsprung lotrecht ist.

Aufgabenstellung:

a) 1) Deuten Sie $w = \frac{v_1(10) - v_1(5)}{10 - 5}$ im gegebenen Kontext.

Für ein $t_1 \in [0; 30]$ gilt: $v_1'(t_1) = w$.

2) Deuten Sie t_1 im gegebenen Kontext.

b) 1) Berechnen Sie mithilfe der Funktion v_1, in welcher Höhe der Fallschirm geöffnet wird.

2) Berechnen Sie die Zeitdauer des gesamten Fallschirmsprungs vom Absprung bis zur Landung.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

c) Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands hätte der Fallschirmspringer eine Anfangsgeschwindigkeit von 0 m/s und im Zeitintervall [0; 30] eine konstante Beschleunigung von 9,81 m/s². Die Fallgeschwindigkeit 9 s nach dem Absprung beträgt dann v^*.

1) Berechnen Sie, um wie viel $v_1(9)$ kleiner ist als v^*.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent 9 s nach dem Absprung die Beschleunigung des Fallschirmspringers geringer ist als bei einem Sprung ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Deutungen:

Im Zeitintervall [5; 10] nimmt die Fallgeschwindigkeit (in m/s) des Fallschirmspringers pro Sekunde durchschnittlich um w zu.

oder:

Die mittlere Beschleunigung des Fallschirmspringers im Zeitintervall [5; 10] beträgt w (in m/s²).

a2) mögliche Deutung:

Zum Zeitpunkt t_1 ist die Momentanbeschleunigung genauso hoch wie die mittlere Beschleunigung im Zeitintervall [5; 10].

b) **Lösungserwartung:**

b1) $4000 - \int_0^{30} v_1(t)\,\mathrm{d}t = 2543{,}8\ldots \approx 2544$

Der Fallschirm wird in einer Höhe von ca. 2544 m geöffnet.

b2) $\int_{30}^{x} v_2(t)\,\mathrm{d}t = 2543{,}8\ldots$

$x = 531{,}7\ldots \approx 532$

Die Zeitdauer des gesamten Fallschirmsprungs beträgt ca. 532 s.

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:

$9{,}81 \cdot 9 - v_1(9) = 38{,}192\ldots \approx 38{,}19$

$v_1(9)$ ist um ca. 38,19 m/s kleiner als v^*.

c2) mögliche Vorgehensweise:

$\frac{9{,}81 - v_1'(9)}{9{,}81} = 0{,}84958\ldots \approx 0{,}8496$

Die Beschleunigung unter Berücksichtigung des Luftwiderstands ist um ca. 84,96 % geringer als jene ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine richtige Deutung.
a2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m“ nicht angegeben sein muss.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s“ nicht angegeben sein muss.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s“ nicht angegeben sein muss.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

Wachstum einer Pflanze

Aufgabennummer: 2_004	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Das Wachstum einer Pflanze wurde über einen Zeitraum von 17 Wochen beobachtet und ihre Höhe gemessen. Die Höhe dieser Pflanze kann in Abhängigkeit von der Zeit t durch eine Funktion h mit $h(t) = \frac{1}{24} \cdot (-t^3 + 27 \cdot t^2 + 120)$ modelliert werden (t in Wochen seit Beobachtungsbeginn, $h(t)$ in cm).

Aufgabenstellung:

a) 1) Interpretieren Sie $\frac{h(13) - h(9)}{4} = 9{,}47\ldots$ im gegebenen Sachzusammenhang.

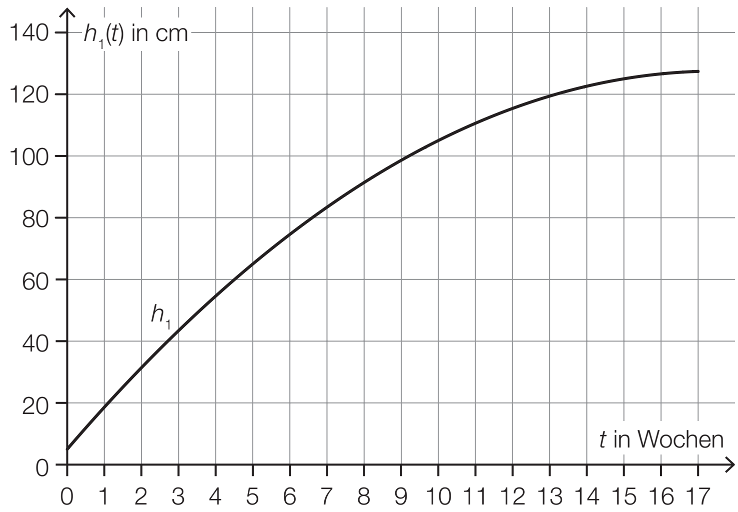
2) Interpretieren Sie $h'(9)$ unter Angabe des konkreten Wertes im gegebenen Sachzusammenhang.

b) 1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Funktion h im Beobachtungszeitraum kein lokales Maximum hat.

c) Für ein schnelleres Wachstum wird die Pflanze gedüngt. Zwei Wochen später erreicht sie ihr stärkstes Wachstum.

1) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Pflanze gedüngt wurde.

d) Im selben Zeitraum wurde das Wachstum einer anderen Pflanze beobachtet und modelliert. Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der entsprechenden Funktion h_1.



1) Interpretieren Sie das Krümmungsverhalten von h_1 im Intervall [0; 17] im Hinblick auf das Wachstum dieser Pflanze.

Lösungserwartung

a1) Die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze im Zeitintervall [9; 13] beträgt durchschnittlich 9,47… cm pro Woche.

a2) $h'(9) = 10{,}125$
Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze zum Zeitpunkt $t = 9$ beträgt rund 10,1 cm pro Woche.

b1) $h'(t) = 0$
$t_1 = 0$, $t_2 = 18$
An der Stelle $t_1 = 0$ hat die Funktion ein lokales Minimum. Die Stelle $t_2 = 18$ befindet sich außerhalb des Beobachtungszeitraums. D. h., die Funktion hat im Beobachtungszeitraum kein lokales Maximum.

c1) Zeitpunkt des stärksten Wachstums: $h''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 9$
Die Pflanze wurde zum Zeitpunkt $t = 7$ gedüngt.

d1) Die Wachstumsgeschwindigkeit dieser Pflanze nimmt im Beobachtungszeitraum ab, d. h., sie wächst immer langsamer.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe des richtigen Wertes.

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Zeitpunkts.

d1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

Wachstumsprozesse*

Aufgabennummer: 2_062	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 2.5, FA 1.7, FA 5.2, FA 5.5, AN 1.4	

Im Folgenden werden Wachstumsmodelle betrachtet.

Die nachstehende Differenzengleichung beschreibt ein Wachstum.

$N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$

N_t ... Bestand zum Zeitpunkt t
r ... Wachstumskonstante, $r \in \mathbb{R}^+$
S ... (obere) Kapazitätsgrenze

Aufgabenstellung:

a) Auf einem Kreuzfahrtschiff mit 2 000 Passagieren erkranken ab dem Zeitpunkt $t = 0$, zu dem noch kein Passagier erkrankt ist, jeden Tag 5 % der noch nicht erkrankten Passagiere. Dabei ist N_t die Anzahl der erkrankten Passagiere zum Zeitpunkt t mit t in Tagen.

1) Geben Sie eine Differenzengleichung für N_{t+1} an.

2) Ermitteln Sie, nach wie vielen Tagen erstmals mehr als 25 % der Passagiere erkrankt sind.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

b) Die Differenzengleichung $N_{t+1} - N_t = r \cdot (S - N_t)$ lässt sich in der Form $N_{t+1} = a \cdot N_t + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ darstellen.

1) Drücken Sie r und S durch a und b aus.

r = ____

S = ____

Zur Entwicklung eines neuen Impfstoffs wird das Wachstum einer Bakterienkultur in einer Petrischale untersucht.

In der nachstehenden Tabelle ist der Inhalt N_t (in cm²) derjenigen Fläche angeführt, die von der Bakterienkultur zum Zeitpunkt t (in h) bedeckt wird.

t in h	N_t in cm²
0	5,00
1	9,80
2	14,41

2) Ermitteln Sie a und b mithilfe der in der obigen Tabelle angegebenen Werte.

c) Ein Pharmaunternehmen bringt einen neuen Impfstoff auf den Markt. In der ersten Woche nach der Markteinführung haben bereits 15 000 Personen den Impfstoff gekauft.

Die Anzahl $f(t)$ derjenigen Personen, die den Impfstoff innerhalb von t Wochen nach der Markteinführung gekauft haben, lässt sich modellhaft durch die Funktion f mit $f(t) = 1\,000\,000 \cdot (1 - e^{-k \cdot t})$ beschreiben ($k \in \mathbb{R}^+$).

1) Berechnen Sie k.

2) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt t_0, zu dem erstmals 500 000 Personen diesen Impfstoff gekauft haben.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $N_{t+1} - N_t = 0{,}05 \cdot (2\,000 - N_t)$ mit $N_0 = 0$

a2) mögliche Vorgehensweise:

$N_{t+1} = N_t + 0{,}05 \cdot (2\,000 - N_t) = 0{,}95 \cdot N_t + 100$

$\Rightarrow$ Für $N_0 = 0$ ist $N_6 > 500$.

Nach 6 Tagen sind erstmals mehr als 25 % der Passagiere erkrankt.

b) Lösungserwartung:

b1) $N_{t+1} = (1 - r) \cdot N_t + r \cdot S \quad \Rightarrow \quad a = 1 - r$ und $b = r \cdot S$

$r = 1 - a$

$S = \frac{b}{r} = \frac{b}{1 - a}$

b2) mögliche Vorgehensweise:

I: $9{,}8 = 5 \cdot a + b$

II: $14{,}41 = 9{,}8 \cdot a + b$

$a = 0{,}960... \approx 0{,}96$ und $b = 4{,}997... \approx 5{,}00$

c) Lösungserwartung:

c1) $15\,000 = 1\,000\,000 \cdot (1 - e^{-k \cdot 1}) \quad \Rightarrow \quad k = 0{,}01511... \quad \Rightarrow \quad k \approx 0{,}0151$ pro Woche

c2) $500\,000 = 1\,000\,000 \cdot (1 - e^{-k \cdot t_0}) \quad \Rightarrow \quad t_0 = 45{,}8... \quad \Rightarrow \quad t_0 \approx 46$ Wochen

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine richtige Differenzengleichung, wobei „$N_0 = 0$“ nicht angegeben sein muss. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [5; 6]

b1) Ein Punkt für die beiden richtigen Lösungen. Andere Schreibweisen der Lösungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „pro Woche“ nicht angegeben sein muss.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Woche“ nicht angegeben sein muss.
(Die Lösung kann je nach Rundung von k von der angegebenen Lösung abweichen.)

Hopfen*

Aufgabennummer: 2_034	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.2, AN 3.2, AN 3.3, FA 1.5, FA 1.7, FA 2.2	

Hopfen ist eine schnell wachsende Kletterpflanze. Die Modellfunktion $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{k \cdot t}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}^-$ gibt näherungsweise die Pflanzenhöhe einer bestimmten Hopfensorte zum Zeitpunkt t an, wobei $h(t)$ in Metern und t in Wochen angegeben wird.

In der nachstehenden Tabelle sind die gemessenen Höhen einer Hopfenpflanze ab Anfang April ($t = 0$) zusammengefasst.

Zeit (in Wochen)	0	2	4	6	8	10	12
Höhe (in m)	0,6	1,2	2,3	4,2	5,9	7,0	7,6

Anhand dieser Messwerte wurden für die Modellfunktion h die Parameterwerte $a = 8$, $b = 15$ und $k = -0{,}46$ ermittelt.

Aufgabenstellung:

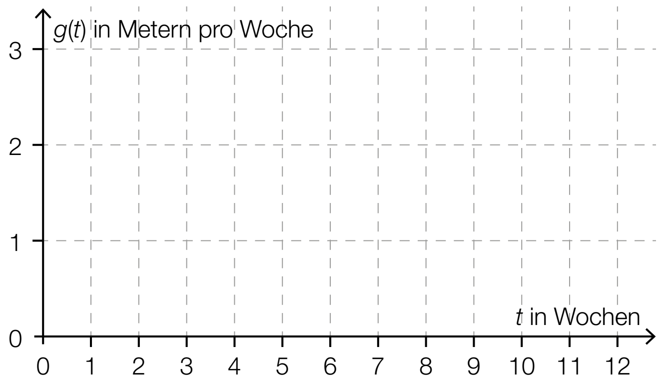
a) Geben Sie unter Verwendung der Modellfunktion h einen Ausdruck an, mit dem berechnet werden kann, um wie viele Meter die Hopfenpflanze im Zeitintervall $[0; t_1]$ gewachsen ist!

Berechnen Sie unter Verwendung der Modellfunktion h mithilfe Ihres Ausdrucks, wie viele Meter die Pflanze in den ersten 10 Wochen gewachsen ist, und geben Sie die prozentuelle Abweichung vom tatsächlich gemessenen Wert an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

b) Wird das Wachstum der Pflanze mithilfe der Funktion h modelliert, gibt es einen Zeitpunkt t_2, zu dem sie am schnellsten wächst. Geben Sie eine Gleichung an, mit der dieser Zeitpunkt berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Berechnen Sie die zugehörige maximale Wachstumsgeschwindigkeit und skizzieren Sie im nachstehenden Koordinatensystem unter Berücksichtigung des von Ihnen ermittelten Maximums den Verlauf des Graphen derjenigen Funktion g, die basierend auf der Modellfunktion h die Wachstumsgeschwindigkeit der Hopfenpflanze in Abhängigkeit von t beschreibt!



c) Ermitteln Sie eine lineare Funktion h_1, deren Werte bei $t = 0$ und $t = 12$ mit den gemessenen Höhen aus der angegebenen Tabelle übereinstimmen, und interpretieren Sie die Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Kontext!

$h_1(t) =$ ____________________

Begründen Sie anhand des Verlaufs der Graphen von h und h_1, warum es mindestens zwei Zeitpunkte gibt, in denen die Wachstumsgeschwindigkeit der Pflanze denselben Wert hat wie die Steigung von h_1!

d) Für größer werdende t nähert sich $h(t)$ einem Wert an, der als h_{max} bezeichnet wird. Weisen Sie anhand der gegebenen Funktionsgleichung der Modellfunktion h rechnerisch nach, dass der Parameter k (mit $k < 0$) keinen Einfluss auf h_{max} hat, und geben Sie h_{max} an!

Günstige Witterungsverhältnisse können dazu führen, dass die Hopfenpflanze schneller und höher wächst, d. h., dass sie sich früher einem größeren Wert von h_{max} annähert. Geben Sie für ein derartiges Pflanzenwachstum an, wie a und k verändert werden müssen!

Lösungserwartung

a) möglicher Ausdruck: $h(t_1) - h(0)$

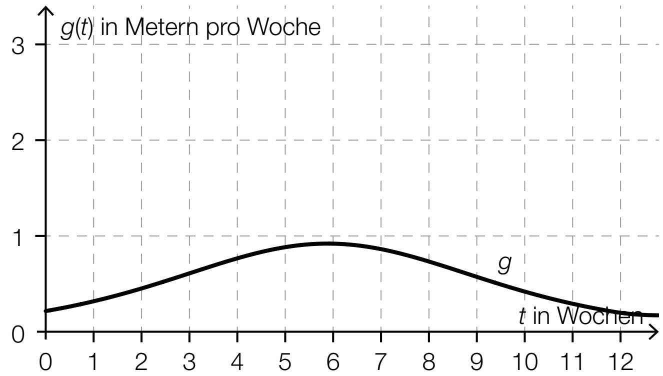
$h(10) - h(0) \approx 6{,}45$
Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.
Die mit der Modellfunktion h berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall [0; 10] ist um ca. 0,8 % größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m).

b) Mögliche Gleichung:

$h''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2$

$t_2 \approx 5{,}9$ Wochen

$h'(t_2) \approx 0{,}92$
Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche.



c) Mögliche Funktionsgleichung von h_1:

$h_1(t) = 0{,}58\dot{3} \cdot t + 0{,}6$

Mögliche Interpretation:

Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche.

Mögliche Begründung:

Die Steigung von h ist anfangs kleiner als jene von h_1, dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

d) Möglicher Nachweis:

Für alle $k < 0$ gilt: $\lim\limits_{t \to \infty} e^{k \cdot t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t \to \infty} h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot 0} = a$, also ist h_{max} unabhängig von k.

$h_{max} = a$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss a vergrößert und k verkleinert werden.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für einen korrekten Ausdruck. Andere korrekte Ausdrücke sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die Angabe des richtigen Wertes und der richtigen prozentuellen Abweichung.
Toleranzintervall für den Wert: [6,4 m; 6,5 m]

b) – Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die Angabe des richtigen Zeitpunkts, wobei die Einheit „Wochen" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [5,4 Wochen; 6,3 Wochen]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Meter pro Woche" nicht angeführt sein muss, und eine korrekte Skizze des Graphen von g.
Toleranzintervall: [0,90 Meter pro Woche; 1 Meter pro Woche]

c) – Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung und eine korrekte Interpretation unter Verwendung korrekter Einheiten. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
Toleranzintervall für die Steigung: [0,58; 0,59]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

d) – Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis und die richtige Lösung. Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung der Veränderung der beiden Werte von a und k.

Quadratische Funktion*

Aufgabennummer: 2_037	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.5, FA 1.5, AN 3.2, AN 3.3	

Der Graph einer Polynomfunktion f zweiten Grades schneidet die positive senkrechte Achse im Punkt $A = (0|y_A)$ und hat mit der positiven x-Achse den Punkt $B = (x_B|0)$ gemeinsam, wobei B ein Extrempunkt von f ist.
Die Funktion f ist von der Form $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie an, ob c größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Geben Sie an, ob b größer als null, gleich null oder kleiner als null sein muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

b) Gegeben ist folgende Aussage: „Der Punkt B ist ein Schnittpunkt der Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f'." Geben Sie an, ob diese Aussage wahr oder falsch ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Es gibt für alle Werte von b genau eine Stelle x_t mit folgender Eigenschaft: An der Stelle x_t haben f und f' die gleiche Steigung. Geben Sie diese Stelle x_t in Abhängigkeit von b an!

c) Geben Sie an, welcher Zusammenhang zwischen b und c bestehen muss, damit die Extremstelle x_B von f auch Nullstelle von f ist!

Geben Sie die Koeffizienten b und c der Funktion f in Abhängigkeit von x_B an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

Lösungserwartung

a) $c > 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt $A = (0|y_A)$ liegt auf der positiven senkrechten Achse, daher ist $y_A = f(0) > 0$. Da $c = f(0)$ ist, muss $c > 0$ sein.

oder:

Der Parameter c legt fest, in welchem Punkt der Graph von f die senkrechte Achse schneidet. Da dieser Schnittpunkt auf der positiven senkrechten Achse liegt, muss $c > 0$ gelten.

$b < 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt B ist ein Extrempunkt von f. Da B auf der positiven x-Achse liegt, muss seine x-Koordinate x_B positiv sein. Die Extremstelle $x_E = x_B$ der Funktion f ergibt sich aus dem Ansatz: $f'(x_E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E = -2 \cdot b$.
Wegen $x_E = -2 \cdot b > 0$ muss $b < 0$ gelten.

oder:

Da aus $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b$ folgt, dass $f'(0) = b$ ist, und da f für $(-\infty; x_E)$ mit $x_E > 0$ streng monoton fallend ist, folgt $f'(0) < 0$ und somit gilt: $f'(0) = b < 0$.

oder:

Angenommen, es würde $b \geq 0$ gelten. Wegen $c > 0$ ergibt sich: $\frac{1}{4} \cdot x^2 + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit würde für alle $x > 0$ auch $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ gelten. Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass ein Berührpunkt mit der positiven x-Achse existiert. Folglich muss $b < 0$ gelten.

b) Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:
Da $B = (x_B|0)$ ein Extrempunkt von f ist, gilt $f'(x_B) = 0$. Weil auch $f(x_B) = 0$ ist, ist der Punkt B ein Schnittpunkt der Graphen von f und f'.

oder:

An einer Stelle, wo die Funktion f eine Extremstelle hat, weist f' eine Nullstelle auf. Da die Extremstelle von f im gegebenen Fall eine Nullstelle ist, haben f und f' die gleiche Nullstelle und somit im Punkt B einen Schnittpunkt.

Mögliche Vorgehensweise:
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad$ Die Steigung der Ableitungsfunktion f' ist $\frac{1}{2}$.

$f'(x_t) = \frac{1}{2} \cdot x_t + b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_t = 1 - 2 \cdot b$

c) Mögliche Vorgehensweise:
Wenn die Extremstelle von f auch Nullstelle von f ist, hat die Gleichung
$\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ genau eine Lösung.
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot c}}{0{,}5} \quad \Rightarrow \quad c = b^2$

Mögliche Vorgehensweise:
$f'(x_B) = \frac{1}{2} \cdot x_B + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-x_B}{2}$
Aus $c = b^2$ folgt: $c = \frac{x_B^2}{4}$.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe von $c > 0$ und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die Angabe von $b < 0$ und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage wahr ist, und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

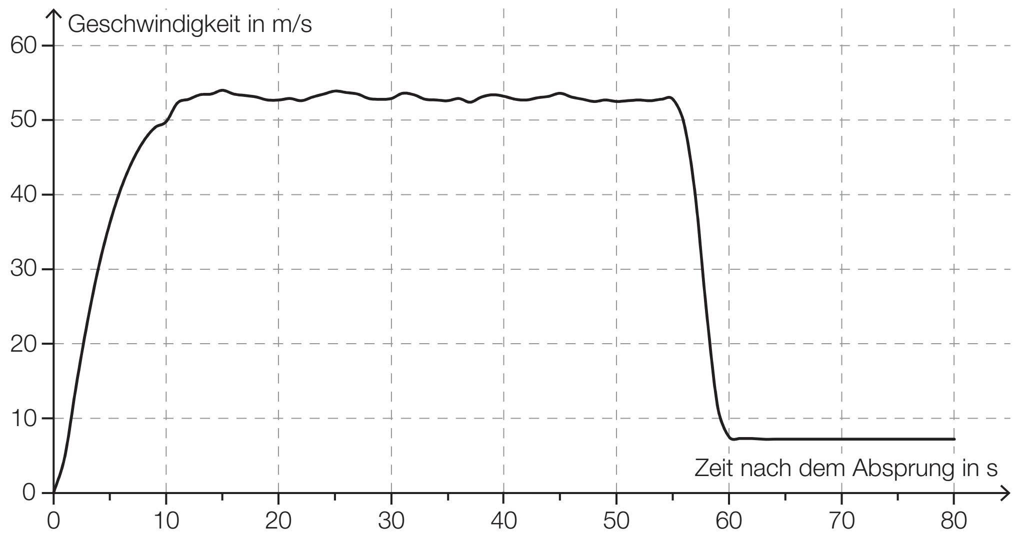
c) – Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen b und c. Andere korrekte Zusammenhänge sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die korrekte Angabe der Koeffizienten b und c in Abhängigkeit von x_B.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Fallschirmsprung

Aufgabennummer: 2_072	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.1, AN 3.3, AN 4.2, AN 4.3	

Bei einem Fallschirmsprung wurde der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers aufgezeichnet. Im nachstehenden Diagramm wird diese Geschwindigkeit für die ersten 80 Sekunden nach dem Absprung veranschaulicht.



a) In den ersten Sekunden nach dem Absprung gilt für den Fallschirmspringer annähernd das Fallgesetz:

$s(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2$

t ... Zeit nach dem Absprung in s
$s(t)$ ... Fallstrecke zur Zeit t in m
g ... Erdbeschleunigung, g = 9,81 m/s^2

1) Berechnen Sie mithilfe des Fallgesetzes die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers 1,5 Sekunden nach dem Absprung.

b) 55 Sekunden nach dem Absprung zieht der Fallschirmspringer die Reißleine, der Fallschirm öffnet sich.

1) Schätzen Sie den Flächeninhalt zwischen der Geschwindigkeitskurve und der Zeitachse im Intervall [0 s; 55 s] ab.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

c) Der Höhenmesser des Fallschirmspringers zeigt 60 Sekunden nach dem Absprung eine Meereshöhe von 1 300 Metern an. Ab dieser Meereshöhe sinkt der Fallschirmspringer jeweils 100 Meter in 14 Sekunden.
Dabei soll die Meereshöhe des Fallschirmspringers (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) durch eine Funktion h beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h. Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt 60 Sekunden nach dem Absprung.

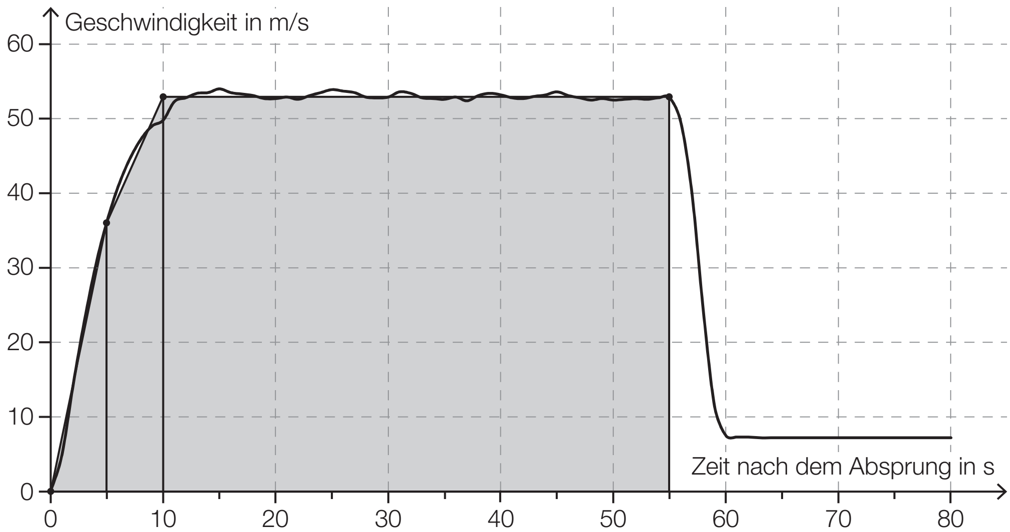
Lösungserwartung

a1) $s'(t) = v(t) = g \cdot t$

$v(1{,}5) = 9{,}81 \cdot 1{,}5 = 14{,}715$

Gemäß dem Fallgesetz beträgt die Geschwindigkeit 1,5 Sekunden nach dem Absprung rund 14,72 m/s.

b1) Näherungsweises Ermitteln des Flächeninhalts durch Dreiecke und Vierecke:



$A \approx \frac{36 \cdot 5}{2} + \frac{(53 + 36) \cdot 5}{2} + 53 \cdot 45 = 2\,697{,}5$

Toleranzintervall: [2 400; 2 900]

b2) Der Flächeninhalt entspricht der Fallstrecke in den ersten 55 Sekunden in Metern.

c1) $h(t) = 1\,300 - \frac{100}{14} \cdot t$

t ... Zeit in s

$h(t)$ ... Meereshöhe des Fallschirmspringers zur Zeit t in m

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Einsatz von Antibiotika*

Aufgabennummer: 2_057	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.4, FA 3.4, AN 1.1, AN 1.3, AN 3.3	

Die Entwicklung einer Bakterienpopulation kann durch die Zufuhr von Antibiotika beeinflusst werden, was letztlich durch die Giftwirkung von Antibiotika zum Aussterben der Bakterienpopulation führen soll.

In bestimmten Fällen kann diese Entwicklung näherungsweise durch eine Funktion $B: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ beschrieben werden:

$B(t) = b \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2}$ mit $b, c, k \in \mathbb{R}^+$

t ... Zeit in Stunden
$B(t)$ ... Anzahl der Bakterien in Millionen zum Zeitpunkt t
b ... Anzahl der Bakterien in Millionen zum Zeitpunkt $t = 0$
k ... Konstante
c ... Parameter für die Giftwirkung

Aufgabenstellung:

a) Die Funktion B hat genau eine positive Extremstelle t_1.

1) Bestimmen Sie t_1 in Abhängigkeit von k und c.

2) Geben Sie an, welche Auswirkungen eine Vergrößerung von c bei gegebenem k auf die Lage der Extremstelle t_1 der Funktion B hat.

b) Die Funktion $B_1: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $B_1(t) = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$ beschreibt die Anzahl der Bakterien einer bestimmten Bakterienpopulation in Millionen in Abhängigkeit von der Zeit t.

Zum Zeitpunkt $t_2 \neq 0$ erreicht die Bakterienpopulation ihre ursprüngliche Anzahl von 20 Millionen.

1) Geben Sie t_2 an.

2) Deuten Sie $B_1'(t_2)$ im vorliegenden Kontext unter Verwendung der entsprechenden Einheit.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

c) Die Funktion B_2: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $B_2(t) = 5 \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$ beschreibt die Anzahl der Bakterien einer anderen Bakterienpopulation in Millionen, die zum Zeitpunkt $t = 4$ ihr Maximum aufweist.

1) Bestimmen Sie denjenigen Zeitpunkt t_3, zu dem die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation stattfindet.

2) Geben Sie an, wie viel Prozent der maximalen Anzahl an Bakterien zum Zeitpunkt t_3 noch vorhanden sind.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$B'(t) = b \cdot (k - c \cdot t) \cdot e^{k \cdot t - \frac{c}{2} \cdot t^2}$

$B'(t_1) = 0$

$k - c \cdot t_1 = 0$

$t_1 = \frac{k}{c}$

a2) mögliche Beschreibung:

Die Extremstelle t_1 wird zu einem früheren Zeitpunkt erreicht.

b) **Lösungserwartung:**

b1) mögliche Vorgehensweise:

$20 = 20 \cdot e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$

$1 = e^{2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2}$

$0 = 2 \cdot t - 0{,}45 \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 4{,}\dot{4}$ h

b2) mögliche Deutung:

$B_1'(t_2)$ gibt die (momentane) Abnahmegeschwindigkeit in Bakterien pro Stunde zum Zeitpunkt t_2 an.

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:

$B_2''(t) = 5 \cdot (t^2 - 8 \cdot t + 15) \cdot e^{4 \cdot t - \frac{t^2}{2}}$

$t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 3;\ t_2 = 5$

Es gilt:

$B_2'(3) > 0$

und

$B_2'(5) < 0$

(und $B_2'''(5) \neq 0$)

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ findet die stärkste Abnahme der Bakterienpopulation statt.

c2) $\frac{B_2(5)}{B_2(4)} = 0{,}60653... \approx 0{,}6065$

Zum Zeitpunkt $t_3 = 5$ sind noch ca. 60,65 % der maximalen Anzahl an Bakterien vorhanden.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [4,4 h; 4,5 h]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für eine richtige Deutung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „h" nicht angeführt sein muss.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: [0,60; 0,61]

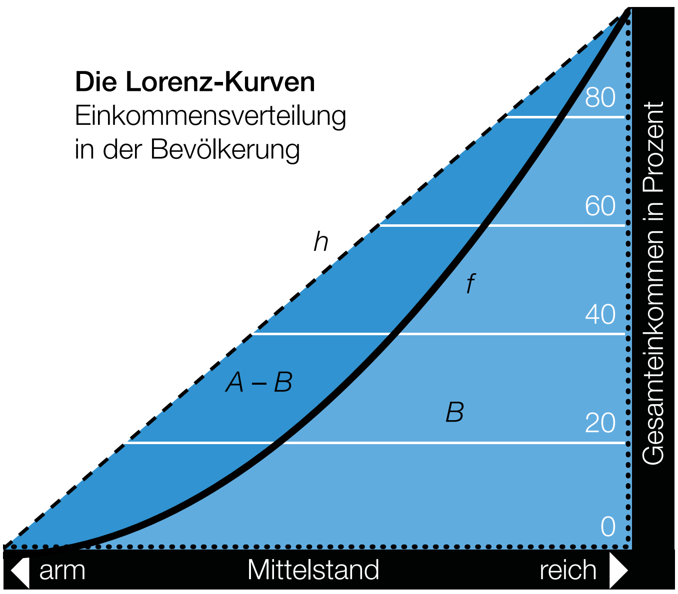
BMB
Bundesministerium
für Bildung

Einkommensverteilung

Aufgabennummer: 2_031	Prüfungsteil: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenzen: AG 2.4, AN 4.2, AN 4.3, FA 1.4, FA 1.7, FA 3.2, FA 4.1, FA 5.6, WS 1.1, WS 1.2	

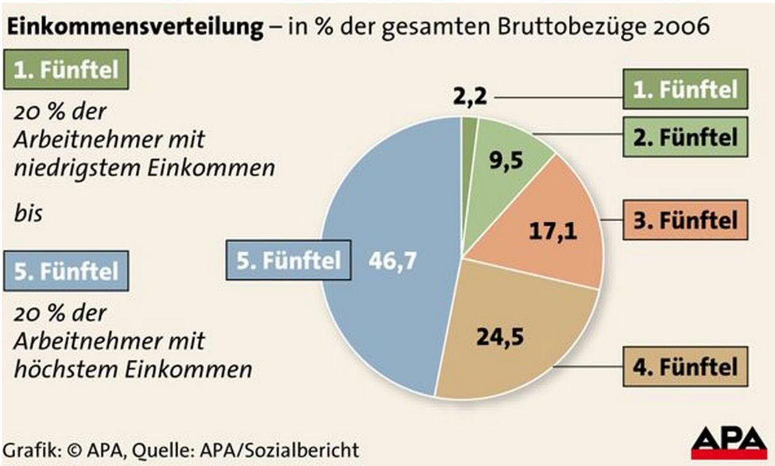
Der Statistiker Max Lorenz beschrieb bereits im Jahr 1905 statistische Verteilungen mithilfe der nach ihm benannten Lorenz-Kurve. Eine Lorenz-Kurve f kann z. B. zur Beschreibung der Einkommensverteilung in einem Staat herangezogen werden. Je ausgeprägter ihr „Bauch" ist, desto größer ist der Einkommensunterschied zwischen niedrigem und hohem Einkommen. Die Lorenz-Kurve der Einkommensverteilung eines Staates, in dem alle Personen bis auf eine Person nichts verdienen und diese eine Person alles bekommt, wird in der nachstehenden Grafik durch die punktierten Linien (Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks) dargestellt. Das andere Extrem ist ein Staat, in dem alle Personen gleich viel verdienen. In diesem Fall wird die Lorenz-Kurve zu einer Geraden h, welche durch die strichlierte Linie dargestellt ist. Zwischen den beiden Extremen verläuft die Lorenz-Kurve f eines Staates.

Jeder Punkt $P = (x \mid f(x))$ auf der Kurve f steht für folgende Aussage: „Die einkommensschwächsten x % aller Haushalte beziehen $f(x)$ % des Gesamteinkommens."



Der Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks wird mit A bezeichnet. Der Graph der Lorenz-Kurve f schließt mit den beiden Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks eine Fläche mit Inhalt B ein. Setzt man den Inhalt der Fläche zwischen der Lorenz-Kurve f und der Geraden h mit der Dreiecksfläche A in Bezug, erhält man den Gini-Ungleichheitskoeffizienten $GUK = \frac{A - B}{A}$, eine Zahl zwischen null und eins. Je kleiner der GUK ist, desto gleichmäßiger ist das Gesamteinkommen auf die Bevölkerung verteilt.

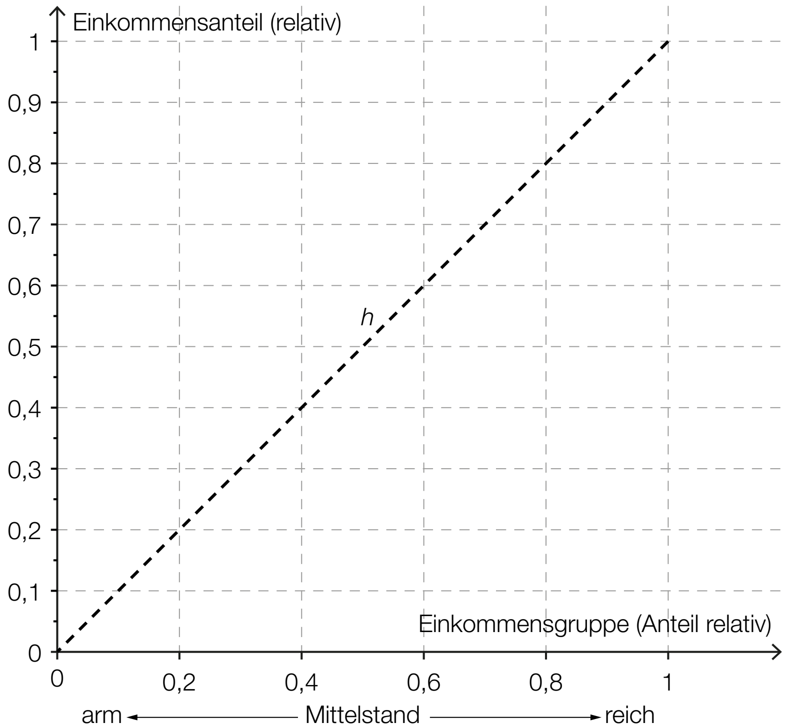
In der nachstehenden Grafik ist die Einkommensverteilung in Österreich in Prozent der gesamten Bruttobezüge im Jahre 2006 dargestellt. Daraus ist z. B. abzulesen, dass jene 20 % der Bevölkerung mit den niedrigsten Bruttoeinkommen nur 2,2 % des Gesamtbruttoeinkommens erhalten haben.



Quelle: http://diepresse.com/home/wirtschaft/economist/446997/Sozialbericht_Einkommen-in-Oesterreich-ungleicher-verteilt [04.05.2017].

Aufgabenstellung:

a) Zeichnen Sie die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung der Bruttobezüge in Österreich im Jahr 2006 in der nachstehenden Grafik als Streckenzug ein!



Berechnen Sie mithilfe des eingezeichneten Streckenzuges den GUK für die Bruttobezüge in Österreich für das Jahr 2006!

b) Die Verteilung der Bruttoeinkommen in Österreich im Jahre 2006 soll durch eine Polynomfunktion p so modelliert werden, dass alle Daten, die aus dem Kreisdiagramm aus der Einleitung abgelesen werden können, mit Funktionswerten dieser Polynomfunktion übereinstimmen.

Begründen Sie, welchen Grad die Polynomfunktion p bei konkreter Berechnung (maximal) hat!

Begründen Sie, warum eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ nicht für die Modellierung einer Lorenz-Kurve geeignet ist!

c) Um politische Maßnahmen abschätzen zu können, werden verschiedene Szenarien entworfen. So soll beispielsweise für die Bruttoeinkommen langfristig eine Lorenz-Kurve angestrebt werden, die durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}245 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2 + 0{,}155 \cdot x$ beschrieben werden kann.

Geben Sie eine Gleichung an, mit der der GUK für die angestrebte Einkommensverteilung berechnet werden kann, und ermitteln Sie diesen GUK!

Geben Sie mithilfe konkreter Zahlenwerte an, wie sich in diesem Fall die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" und die Einkommensverteilung der „20 % der Arbeitnehmer/innen mit den höchsten Bruttoeinkommen" im Vergleich zu den Bruttobezügen im Jahr 2006 in Österreich ändern würden!

d) Für das Jahr 2007 kann die Einkommensverteilung für Österreich mit einem GUK von 0,26 beschrieben werden.

Datenquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_L%C3%A4nder_nach_Einkommensverteilung [04.05.2017].

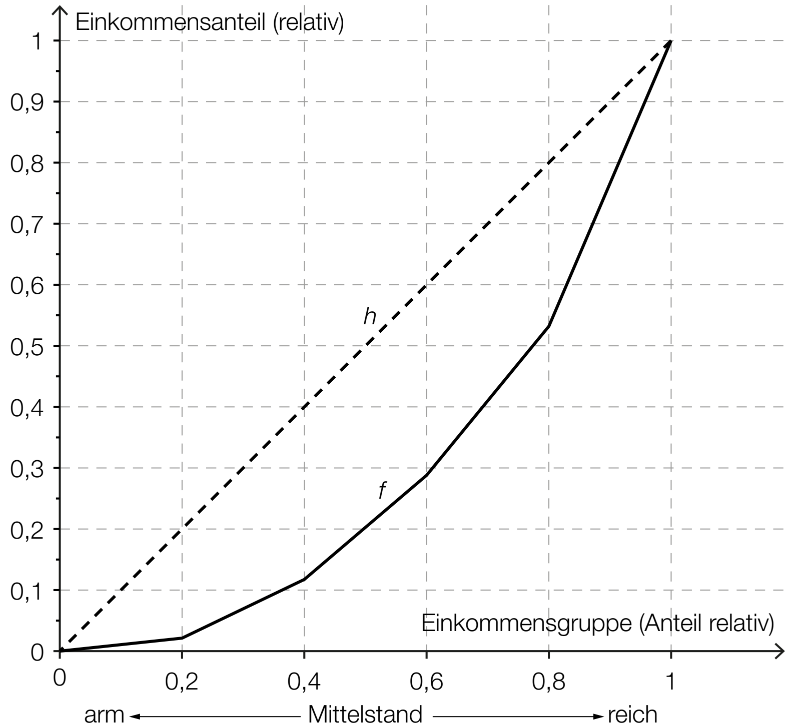
Angenommen, die Lorenz-Kurve für die Einkommensverteilung kann für ein bestimmtes Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, durch eine Potenzfunktion h mit $h(x) = a \cdot x^z + b$ mit $a, b, z \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

Geben Sie an, welche Werte die Parameter a und b haben müssen, und begründen Sie Ihre Wahl!

Geben Sie eine Ungleichung an, die für das Jahr 2007 einen Zusammenhang zwischen dem GUK von Österreich und dem GUK von demjenigen Land, das eine ausgeglichenere Einkommensverteilung als Österreich aufweisen soll, beschreibt! Ermitteln Sie für diesen Fall einen möglichen Wert für den Exponenten z mit $z > 1$!

Möglicher Lösungsweg

a)



Der Inhalt der Fläche zwischen dem Polygonzug *f* und der Strecke *h* beträgt 0,208 Flächeneinheiten (die Ermittlung des Flächeninhalts zwischen der waagrechten Achse und dem Streckenzug kann z. B. aus zwei Dreiecksflächen und drei Trapezflächen erfolgen).

$\Rightarrow\ GUK = \dfrac{0{,}208}{0{,}5} = 0{,}416$

b) Aus den Daten des Kreisdiagramms ergeben sich (für die Argumente $x = 0$, $x = 0{,}2$, $x = 0{,}4$, $x = 0{,}6$, $x = 0{,}8$, $x = 1$) sechs Funktionswerte von p und somit sechs „Bedingungen" für die Koeffizienten der Funktionsgleichung. Eine Polynomfunktion fünften Grades hat sechs Koeffizienten und ist daher geeignet.
(Anmerkung: Bei „besonderer" Lage der Punkte kann auch ein Grad kleiner als fünf ausreichend sein.)

Jede Lorenz-Kurve verläuft durch den Punkt (0|0). Da eine Exponentialfunktion e mit $e(x) = a \cdot b^x$ ($a, b \in \mathbb{R}^+$) nicht durch den Koordinatenursprung verläuft, ist sie nicht für die Modellierung geeignet.

c) $GUK = \frac{0{,}5 - \int_0^1 \left(0{,}245x^3 + 0{,}6x^2 + 0{,}155x\right) \mathrm{d}x}{0{,}5} = 0{,}3225$

$g(0{,}2) \approx 0{,}057$
$g(0{,}8) \approx 0{,}633$

Der Einkommensanteil der „20 % mit den niedrigsten Bruttoeinkommen" würde (um ca. 3,5 Prozentpunkte) von 2,2 % auf ca. 5,7 % steigen.

Der Einkommensanteil der „20 % mit den höchsten Bruttoeinkommen" würde (um ca. 10 Prozentpunkte) von 46,7 % auf 36,7 % sinken.

d) $b = 0$, da der Graph durch den Punkt $(0|0)$ verlaufen muss
$a = 1$, da der Graph durch den Punkt $(1|1)$ verlaufen muss

$\frac{0{,}5 - \int_0^1 x^z \, \mathrm{d}x}{0{,}5} < 0{,}26$

$z \in \left(1; \frac{63}{37}\right)$

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_033	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.3, AN 1.3, AN 4.2, AN 4.3, FA 4.3	

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f mit der Funktionsgleichung
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$, wobei die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ sind.

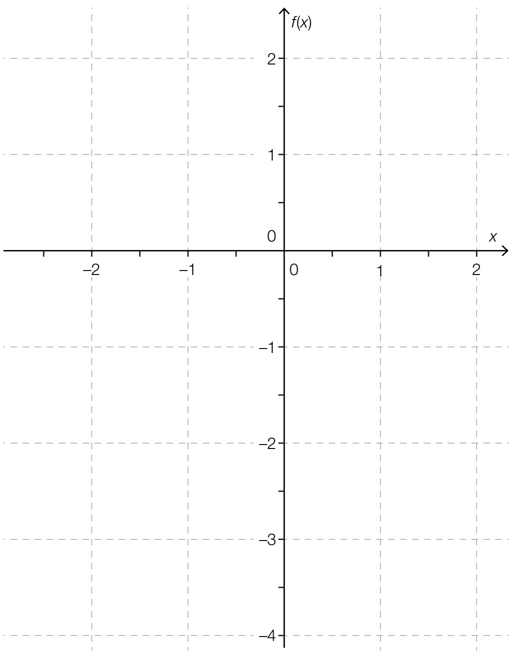
Aufgabenstellung:

a) Begründen Sie, warum die Funktion f genau drei verschiedene reelle Nullstellen hat, wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben!

Die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ entspricht dem Wert des Koeffizienten b. Begründen Sie, warum diese Aussage wahr ist!

b) Geben Sie eine Beziehung zwischen den Koeffizienten a und b an, sodass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt!

Begründen Sie, warum aus der Annahme $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ folgt, dass f eine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$ hat, und skizzieren Sie einen möglichen Graphen einer solchen Funktion f im nachstehenden Koordinatensystem!



* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Lösungserwartung

a) Mögliche Begründung:

Berechnung der Nullstellen: $a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$
Eine Nullstelle ist daher $x_1 = 0$.

Berechnung weiterer Nullstellen: $a \cdot x^2 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{b}{a}$

Wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt: $-\frac{b}{a} > 0$.
Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion f hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x entspricht dem Wert $f'(x)$.
$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \quad \Rightarrow \quad f'(0) = b$

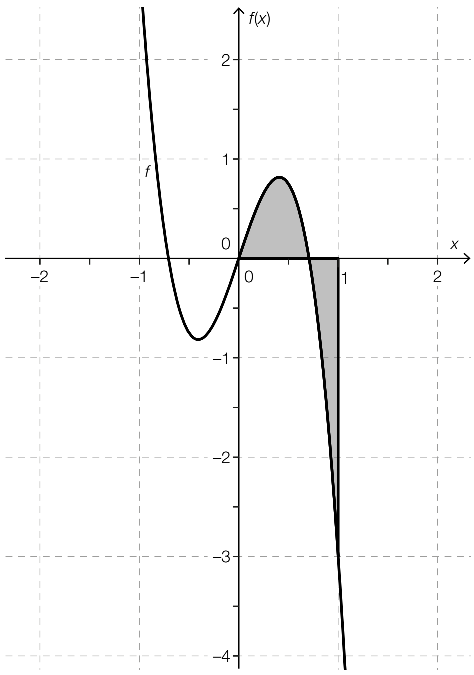
b) Mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x)\,\mathrm{d}x = \left(a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \cdot b$$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von f und von der x-Achse begrenzt werden. Hätte f keine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$, dann würde der Graph von f in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der x-Achse (mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0; 1)$) oder zur Gänze unterhalb der x-Achse (mit $f(x) < 0$ für alle $x \in (0; 1)$) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von f im Intervall $(0; 1)$ entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Möglicher Graph von f:



Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für eine korrekte Beziehung zwischen a und b.
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung und eine Skizze eines möglichen Graphen von f. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Ozonmessungen*

Aufgabennummer: 2_064	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.2, FA 3.4, FA 4.3, AN 4.3	

Das Gas Ozon hat Auswirkungen auf unsere Gesundheit. Aus diesem Grund werden in Messstationen und mithilfe von Wetterballons die jeweiligen Ozonkonzentrationen in unterschiedlichen Atmosphärenschichten gemessen.

Aufgabenstellung:

a) Auf der Hohen Warte in Wien befindet sich in 220 m Seehöhe eine Wetterstation. Hier wird für eine Messreihe ein Wetterballon mit einem Ozonmessgerät gestartet. Das Ozonmessgerät beginnt mit seinen Aufzeichnungen, wenn der Wetterballon eine Seehöhe von 2 km erreicht hat.

Nehmen Sie an, dass der Wetterballon (mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 m/s) lotrecht in die Höhe steigt und dabei gleichmäßig mit 0,125 m/s^2 beschleunigt, bis er zu einem Zeitpunkt t_1 eine Geschwindigkeit von 6 m/s erreicht. Die Zeit wird dabei in Sekunden und die Seehöhe in Metern gemessen.

1) Ermitteln Sie die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1.

Ab dem Zeitpunkt t_1 steigt der Wetterballon mit der konstanten Geschwindigkeit von 6 m/s lotrecht weiter.

2) Ermitteln Sie, wie viele Sekunden nach dem Start das Messgerät mit seinen Aufzeichnungen beginnt.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

b) Ein Wetterballon hat bei einem Luftdruck von 1013,25 hPa ein Volumen von 6,3 m^3. Durch die Abnahme des Luftdrucks während des Aufstiegs dehnt sich der Wetterballon immer weiter aus und wird näherungsweise kugelförmig. Bei einem Durchmesser von d Metern zerplatzt er.

Der Luftdruck kann in Abhängigkeit von der Seehöhe h durch eine Funktion p modelliert werden. Dabei ordnet die Funktion p der Seehöhe h den Luftdruck $p(h)$ zu.

Es gilt: $p(h) = 1013{,}25 \cdot \left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}$ mit h in m, $p(h)$ in hPa

Gehen Sie davon aus, dass der Luftdruck $p(h)$ und das Volumen $V(h)$ des Wetterballons indirekt proportional zueinander sind. Dabei ist $V(h)$ das Volumen des Wetterballons in der Seehöhe h.

1) Drücken Sie das Volumen $V(h)$ durch die Seehöhe h aus.

   $V(h) =$ ______________________________ mit h in m, $V(h)$ in m^3

Der Wetterballon zerplatzt in einer Seehöhe von $h = 27\,873{,}6$ m.

2) Berechnen Sie den Durchmesser d des Wetterballons in Metern, bei dem dieser zerplatzt.

c) Das sogenannte *Gesamtozon* ist ein Maß für die Dicke der Ozonschicht und wird in sogenannten *Dobson-Einheiten* (DU) angegeben.

Die von einem Wetterballon aufgezeichneten Messdaten können modellhaft durch eine quadratische Funktion f beschrieben werden. Dabei ordnet f der Höhe h die Gesamtozondichte $f(h)$ zu (h in km, $f(h)$ in DU/km).

Der höchste Wert von 36 DU/km wird in einer Seehöhe von 22 km gemessen. In einer Seehöhe von 37 km beträgt der gemessene Wert 1 DU/km.

1) Ermitteln Sie $f(h)$.

$f(h) =$ ______________________________

In der Erdatmosphäre entspricht 1 DU einer 0,01 mm dicken Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche. Die Dicke derjenigen Schicht reinen Ozons an der Erdoberfläche, die dem Gesamtozon zwischen 7 km und 37 km Seehöhe entspricht, ist $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h$.

2) Berechnen Sie die Dicke dieser Schicht.

Dicke dieser Schicht: ______________________________ mm

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) mögliche Vorgehensweise:

$v(t) = 0{,}125 \cdot t$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit des Wetterballons in m/s zum Zeitpunkt t

$v(t_1) = 6 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{6}{0{,}125} = 48$

$\int_0^{48} v(t)\,\mathrm{d}t = 144$

Die Höhe des Wetterballons über der Wetterstation zum Zeitpunkt t_1 beträgt 144 m.

a2) mögliche Vorgehensweise:

verbleibende senkrechte Strecke bis zum Start der Messung:
$2\,000 - 220 - 144 = 1\,636$

$\frac{1\,636}{6} + 48 = 320{,}\dot{6}$

Das Messgerät beginnt seine Aufzeichnungen ca. 321 s nach dem Start.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $V(h) = \frac{6{,}3}{\left(1 - \frac{0{,}0065 \cdot h}{288{,}15}\right)^{5{,}255}}$ mit h in m, $V(h)$ in m³

b2) mögliche Vorgehensweise:

$V(27\,873{,}6) = 1\,150{,}351...$

$\frac{4 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \pi}{3} = 1\,150{,}351... \quad \Rightarrow \quad d = 13{,}0... \approx 13$

Der Durchmesser des Wetterballons, bei dem dieser zerplatzt, beträgt ca. 13 m.

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:

$f(h) = a \cdot h^2 + b \cdot h + c$
$f(37) = 1$
$f(22) = 36$
$f'(22) = 0$
$f(h) = -\frac{7}{45} \cdot h^2 + \frac{308}{45} \cdot h - \frac{1\,768}{45}$

c2) $\int_7^{37} f(h)\,\mathrm{d}h = 730$

$730 \cdot 0{,}01 = 7{,}3$

Dicke dieser Schicht: 7,3 mm

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angegeben sein muss.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „s" nicht angegeben sein muss.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angegeben sein muss.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm*

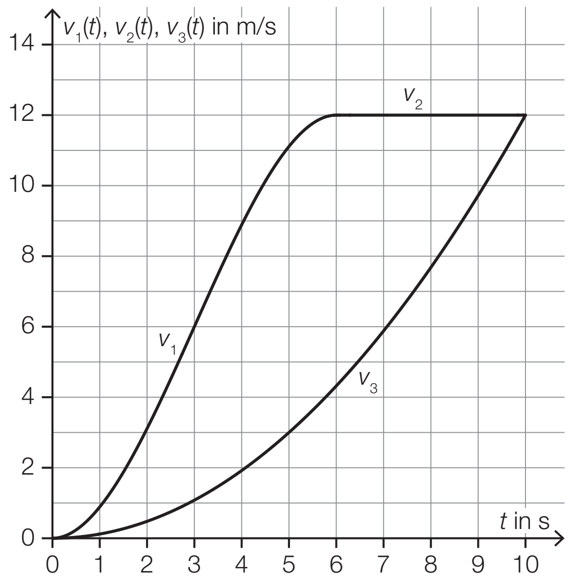
Aufgabennummer: 2_103	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Die Geschwindigkeiten von 2 PKWs (PKW *A* und PKW *B*) werden als Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit modelliert. Im unten stehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm sind die zugehörigen Graphen dargestellt. Die Zeit *t* wird in Sekunden angegeben, die Geschwindigkeiten werden in m/s angegeben.

PKW *A* und PKW *B* starten zum Zeitpunkt $t = 0$ aus dem Stillstand. Sie haben beide zum Zeitpunkt $t = 10$ eine Geschwindigkeit von 12 m/s.

PKW *A* bewegt sich für $t \in [0; 6]$ mit der Geschwindigkeit $v_1(t)$ und für $t \in [6; 10]$ mit der konstanten Geschwindigkeit $v_2(t)$.

PKW *B* bewegt sich für $t \in [0; 10]$ mit der Geschwindigkeit $v_3(t) = 0{,}12 \cdot t^2$.



Aufgabenstellung:

a) Im Zeitintervall [0; 6] legt PKW *A* eine Strecke von 36 m zurück.
Im Zeitintervall $[0; t_1]$ mit $6 \leq t_1 \leq 10$ legt PKW *A* eine Strecke mit der Länge *d* zurück (*d* in m).

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

1) Geben Sie d in Abhängigkeit von t_1 an.

d = ____

Im Zeitintervall [0; 10] legt PKW A eine längere Strecke als PKW B zurück.

2) Berechnen Sie, um wie viele Meter diese Strecke länger ist.

b) Für PKW A gilt:

- Zum Zeitpunkt $t = 6$ beträgt die Geschwindigkeit 12 m/s.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Beschleunigung 0 m/s².
- Zum Zeitpunkt $t = 3$ hat die Beschleunigung ihren maximalen Wert.

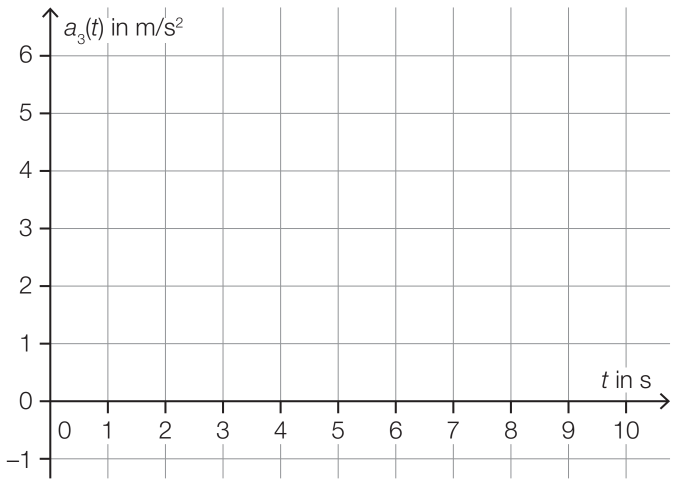
Für die Funktion $v_1: [0; 6] \to \mathbb{R}$ gilt:

$v_1(t) = p \cdot t^3 + q \cdot t^2 + r \cdot t$ für alle $t \in [0; 6]$ mit $p, q, r \in \mathbb{R}$

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen auf, mit dem die Koeffizienten p, q und r berechnet werden können.

c) Die Beschleunigung von PKW B wird im Zeitintervall [0; 10] durch die Funktion a_3 in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben (t in s, $a_3(t)$ in m/s²).

1) Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der Beschleunigungsfunktion a_3 ein.



Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $d = 36 + \int_6^{t_1} v_2(t)\,\mathrm{d}t$

oder:

$d = 36 + 12 \cdot (t_1 - 6)$

a2) $36 + 12 \cdot 4 - \int_0^{10} 0{,}12 \cdot t^2\,\mathrm{d}t = 44$

Die Strecke ist um 44 m länger.

b) **Lösungserwartung:**

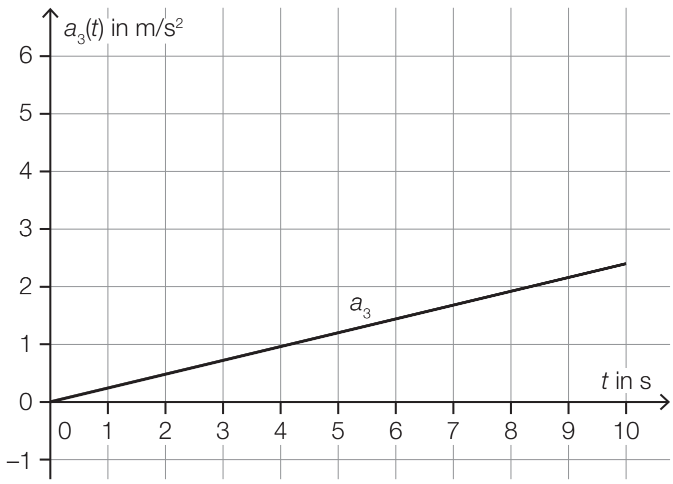
I: $v_1(6) = 12$
II: $v_1'(0) = 0$
III: $v_1''(3) = 0$

oder:

I: $216 \cdot p + 36 \cdot q + 6 \cdot r = 12$
II: $r = 0$
III: $18 \cdot p + 2 \cdot q = 0$

c) **Lösungserwartung:**

c1)



Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen Formel.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems mit drei Gleichungen, ein halber Punkt für nur zwei richtige Gleichungen.

c1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.

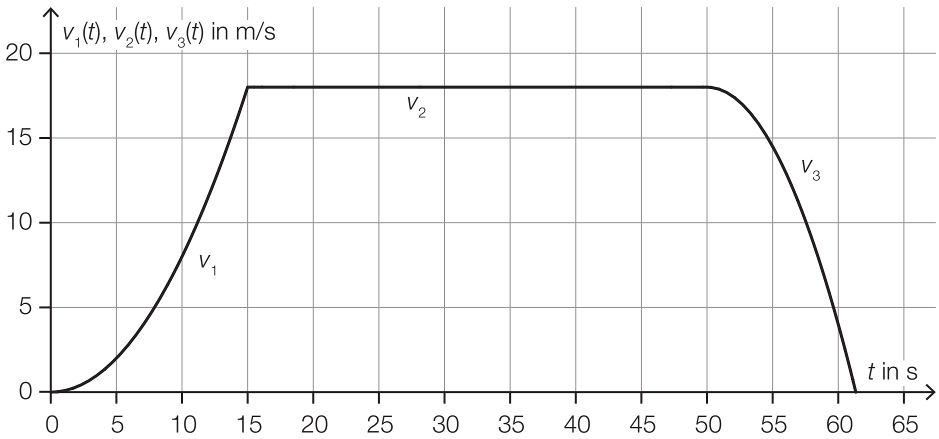
Wiener U-Bahn

Aufgabennummer: 2_018	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die Wiener U-Bahn-Linie U2 verkehrt zwischen den Stationen *Karlsplatz* und *Seestadt* und überquert dabei die Donau. Zwischen den beiden Stationen *Donaumarina* und *Donaustadtbrücke* verläuft die Strecke nahezu geradlinig und die U-Bahn benötigt für diese rund eine Minute.
Die Geschwindigkeit einer U-Bahn zwischen diesen beiden Stationen lässt sich modellhaft durch drei (abschnittsweise definierte) Funktionen beschreiben.

- $v_1(t) = 0{,}08 \cdot t^2$ [0; 15)
- $v_2(t) = 18$ [15; 50)
- $v_3(t) = -0{,}14 \cdot (t - 50)^2 + 18$ [50; 61,34]

Die Zeit t ist dabei in Sekunden, die Geschwindigkeit v in m/s angegeben. Die Graphen dieser Funktionen sind im nachstehenden Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie die Länge derjenigen Strecke, die die U-Bahn im Zeitintervall [15; 50] zurücklegt.

Die Funktion v_3 modelliert den Bremsweg.

2) Erklären Sie, wie eine Änderung des Wertes –0,14 auf –0,2 den Bremsvorgang beeinflusst.

b) 1) Berechnen Sie die mittlere Beschleunigung der U-Bahn vom Losfahren bis zum Erreichen der Höchstgeschwindigkeit.

2) Erklären Sie, warum der Verlauf des Graphen im Intervall [14; 16] meist nicht der Realität entspricht.

Lösungserwartung

a1) $35 \cdot 18 = 630$

Im Zeitintervall [15; 50] legt die U-Bahn 630 m zurück.

a2) Der Bremsvorgang würde „stärker“ erfolgen, die U-Bahn würde also schneller zum Stillstand kommen.

b1) $\frac{v_1(15) - v_1(0)}{15 - 0} = \frac{18}{15} = 1,2$

Die mittlere Beschleunigung beträgt 1,2 m/s^2.

b2) Der Knick beim Übergang von v_1 auf v_2 bewirkt, dass die Fahrgäste einen starken „Ruck“ (eine sprunghafte Änderung der Beschleunigung) verspüren, der meist nicht der Realität entspricht.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Länge.
a2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der mittleren Beschleunigung.
b2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

Fahrradtour

Aufgabenstellung:

a) Bettina macht eine 2-stündige Fahrradtour. Ihre Geschwindigkeit kann dabei näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden.

$v(t) = -0{,}08 \cdot t^2 + 16 \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq 2$

t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn der Fahrradtour
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in km/h

1) Berechnen Sie die Zeitdauer, die Bettina für die ersten 10 km dieser Fahrradtour benötigt. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 1$. Geben Sie auch die zugehörige Einheit an. *[0/½/1 P.]*

b) Der empfohlene Reifendruck eines Fahrradreifens sinkt mit zunehmender Breite des Reifens. Für einen empfohlenen Reifendruck von 2 bar bis 9 bar kann der empfohlene Reifendruck näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden.

$p(x) = 19{,}1 \cdot e^{-0{,}0376 \cdot x}$

x ... Breite des Reifens in mm
$p(x)$ ... empfohlener Reifendruck bei der Breite x in bar

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall für die Breite des Reifens, für das sich ein empfohlener Reifendruck von 2 bar bis 9 bar ergibt. *[0/1 P.]*

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung unter Angabe der zugehörigen Einheiten im gegebenen Sachzusammenhang.
$p(30) - p(20) \approx -2{,}8$ *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\int_0^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t = 10$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$t_1 = 0{,}62...$
Bettina benötigt für die ersten 10 km rund 0,6 h.

a2) $a(t) = v'(t) = -0{,}16 \cdot t$
$v'(1) = -0{,}16$

Die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt $-0{,}16$ km/h².

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Zeitdauer.
a2) Ein halber Punkt für das richtige Berechnen der Beschleunigung, ein halber Punkt für das Angeben der richtigen Einheit.

b1) $p(x) = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 20{,}0...$
$p(x) = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 60{,}0...$

größtmögliches Intervall: [20,0...; 60,0...]

b2) Der für einen 30 mm breiten Reifen empfohlene Reifendruck ist um rund 2,8 bar geringer als der für einen 20 mm breiten Reifen empfohlene Reifendruck.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des größtmöglichen Intervalls.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe der zugehörigen Einheiten im gegebenen Sachzusammenhang.

Algenteppich*

Aufgabennummer: 2_046	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.5, FA 5.1, AN 1.3, AN 1.4	

Auf der Oberfläche eines 800 m^2 großen Teichs befindet sich ein Algenteppich, der immer weiter wächst. Fünf Wochen lang werden jeweils am Ende der Woche die Flächeninhalte des Algenteppichs gemessen. Die Messwerte sind in der nachstehenden Tabelle aufgelistet. Zu Beginn der Beobachtung bedeckt der Algenteppich 4 m^2.

t (in Wochen)	0	1	2	3	4	5
$A(t)$ (Flächeninhalt des Algenteppichs nach t Wochen in m^2)	4	7	12,25	21,44	37,52	65,65

Das Algenwachstum kann mathematisch unterschiedlich modelliert werden.

Aufgabenstellung:

a) In den ersten fünf Wochen kann der Flächeninhalt $A(t)$ des Algenteppichs näherungsweise durch eine Exponentialfunktion A beschrieben werden, weil der Algenteppich nur einen kleinen Teil des Teichs bedeckt ($A(t)$ in m^2, t in Wochen).

Ermitteln Sie, um welchen Prozentsatz sich der Flächeninhalt des Algenteppichs wöchentlich vergrößert, und geben Sie eine Funktionsgleichung für A an!

$A(t) =$ ____

Am Ende der fünften Woche sollen nach erfolgter Messung 30 m^2 Algen geerntet werden. Das soll regelmäßig im Abstand von jeweils einer Woche wiederholt werden.

Ermitteln Sie, wie oft dieser Vorgang unter der Voraussetzung, dass sich der Flächeninhalt des Algenteppichs zwischen den Erntevorgängen weiterhin um den gleichen Prozentsatz vergrößert, durchgeführt werden kann!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

b) Berechnen Sie die durchschnittliche wöchentliche Änderung (in m^2 pro Woche) des Flächeninhalts des Algenteppichs vom Ende der zweiten Woche bis zum Ende der vierten Woche des Beobachtungszeitraums!

Die bisher verwendete Exponentialfunktion beschreibt das Algenwachstum bei größerer bedeckter Fläche nur ungenau, weil sich in Abhängigkeit von der Größe des Teichs das Algenwachstum irgendwann verlangsamen wird. Ein realistischeres Modell berücksichtigt auch diesen Aspekt.
In Abhängigkeit vom Flächeninhalt A des Algenteppichs kann die Wachstumsgeschwindigkeit durch die Funktion w mit $w(A) = k \cdot A \cdot (800 - A)$ modelliert werden. Dabei wird A in m^2 angegeben; $k \in \mathbb{R}^+$ ist der sogenannte Wachstumsparameter, der unter anderem von der Algenart abhängt.

Ermitteln Sie denjenigen Flächeninhalt A_1 des Algenteppichs, bei dem die Wachstumsgeschwindigkeit am größten ist!

A_1 = ______________________________ m^2

c) Der Beobachtungszeitraum wird über die in der Einleitung beschriebenen fünf Wochen hinaus verlängert. Der Flächeninhalt des Algenteppichs t Wochen nach Beobachtungsbeginn wird mithilfe einer Funktion A_2 mit $A_2(t) = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-800 \cdot k \cdot t}}$ modelliert ($A_2(t)$ in m^2, t in Wochen).

Geben Sie den Wert des Parameters $k \in \mathbb{R}^+$ mithilfe des in der Tabelle angegebenen Messwerts zum Zeitpunkt $t = 5$ an!

Zu welchem Zeitpunkt bedeckt der Algenteppich erstmals 90 % der Oberfläche, wenn dieses Modell zugrunde liegt?
Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

Lösungserwartung

a) Die Fläche des Algenteppichs vergrößert sich jede Woche um ca. 75 %.
$A(t) = 4 \cdot 1{,}75^t$

mögliche Vorgehensweise:

$A(6) = (A(5) - 30) \cdot 1{,}75 \approx 62{,}39$
$A(7) = (A(6) - 30) \cdot 1{,}75 \approx 56{,}68$
$A(8) = (A(7) - 30) \cdot 1{,}75 \approx 46{,}69$
$A(9) = (A(8) - 30) \cdot 1{,}75 \approx 29{,}21$

Die geplante Menge kann viermal geerntet werden.

b) mögliche Vorgehensweise:

$\frac{37{,}52 - 12{,}25}{2} \approx 12{,}64$

Die durchschnittliche wöchentliche Änderung beträgt in diesem Zeitraum ca. 12,64 m²/Woche.

mögliche Vorgehensweise:

$w'(A) = k \cdot (800 - A) - k \cdot A$
$800 \cdot k - 2 \cdot k \cdot A_1 = 0$

$A_1 = 400 \text{ m}^2$

c) mögliche Vorgehensweise:

$65{,}65 = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-800 \cdot 5 \cdot k}}$
$k \approx 0{,}00072 \text{ m}^{-2}/\text{Woche}$

mögliche Vorgehensweise:

$720 = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-800 \cdot 0{,}00072 \cdot t}}$
$t \approx 13$

Nach ca. 13 Wochen sind erstmals 90 % der Oberfläche des Teichs mit Algen bedeckt.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen (z. B.: $A(t) = 4 \cdot e^{0,5596 \cdot t}$) sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m^2/Woche“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [12; 13]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m^{-2}/Woche“ nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,0007; 0,0008]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die Angabe des richtigen Zeitpunkts. Auch die Angabe „in der 14. Woche“ ist als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Fußballspielen im Park

Aufgabennummer: 2_081	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, FA 4.3, AN 3.3	

Roland und Julia spielen im Park Fußball. Roland legt den Ball auf die horizontale Wiese, nimmt Anlauf und schießt.

Die Flugbahn des Balles kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion h beschrieben werden. Dabei wird der Ball als punktförmig angenommen.

$h(x) = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$ mit $x \geq 0$

x … horizontale Entfernung des Balles von der Abschussstelle in Metern (m)
$h(x)$ … Höhe des Balles über dem Boden an der Stelle x in m

a) 1) Ermitteln Sie den für diesen Sachzusammenhang größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich für die Funktion h.

2) Berechnen Sie den höchsten Punkt der Flugbahn.

b) Julia fängt den Ball aus einer Höhe von 1,80 m.

1) Ermitteln Sie die beiden horizontalen Entfernungen von der Abschussstelle, an denen Julia sich dabei befinden kann.

c) Roland überlegt, ob er bei diesem Schuss den Ball über ein 2,8 m hohes Klettergerüst, das in direkter Schussrichtung 10 m von der Abschussstelle entfernt steht, schießen könnte.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Schuss tatsächlich über das Klettergerüst fliegen kann.

Lösungserwartung

a1) $0 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$
$0 = x^2 \cdot (-0{,}003 \cdot x + 0{,}057) \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
$-0{,}003 \cdot x + 0{,}057 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 19$

$D = [0; 19]$

a2) $h'(x) = 0$
$x \cdot (-0{,}009 \cdot x + 0{,}114) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$
$-0{,}009 \cdot x + 0{,}114 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 12{,}66... \approx 12{,}7$
$h(x_2) = 3{,}04\ldots \approx 3{,}0$

In einer horizontalen Entfernung von rund 12,7 m zur Abschussstelle erreicht der Ball seine größte Höhe von rund 3,0 m.
Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Maximumstelle handelt, und eine Überprüfung der Ränder des Definitionsbereichs sind nicht erforderlich.

b1) $1{,}80 = -0{,}003 \cdot x^3 + 0{,}057 \cdot x^2$

$(x_1 = -5)$
$x_2 = 7{,}10\ldots \approx 7{,}1$
$x_3 = 16{,}89\ldots \approx 16{,}9$

Julia kann sich in einer Entfernung von etwa 7,1 m oder von etwa 16,9 m von der Abschussstelle befinden.

c1) $h(10) = 2{,}7$

Da $h(10)$ kleiner als 2,8 m ist, kann der Ball nicht über das Klettergerüst fliegen.

Zehnkampf

Aufgabennummer: 2_FT003	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Beim Zehnkampf der Männer in der Leichtathletik erhält jeder Athlet in jeder der zehn Disziplinen Punkte, die jeweils nach einer eigenen Formel berechnet werden.
Für den Weitsprung gilt:

$P = 0{,}14354 \cdot (x - 220)^{1{,}4}$

x … Sprungweite in cm
P … Punkte

Für die Punktevergabe wird P nach der Berechnung auf Ganze gerundet.

Aufgabenstellung:

a) Der Weltrekord im Zehnkampf wurde vom Franzosen Kevin Mayer 2018 aufgestellt und liegt bei 9126 Punkten. Seine Weitsprungleistung betrug 780 cm.

1) Berechnen Sie, wie viele Punkte Kevin Mayer mehr erhalten hätte, wenn er die Weltrekordweite von 895 cm gesprungen wäre.

2) Geben Sie an, welche Sprungweite ein Athlet übertreffen muss, um Punkte zu bekommen.

Die Sprungweite muss größer als ______________________________ cm sein.

b) Steigt die Sprungweite um 115 cm, so ist der durchschnittliche Punktezuwachs nicht für jeden Ausgangswert gleich.

1) Weisen Sie diese Aussage für die beiden Intervalle [500 cm; 615 cm] und [780 cm; 895 cm] rechnerisch nach.

Steigt die Sprungweite um den gleichen Wert, so ist der Punktezuwachs umso höher, je größer die Sprungweite ist, von der man ausgeht.

2) Begründen Sie diese Aussage.

c) Bei einem Zehnkampf sind 3 Sprünge erlaubt. Der weiteste fehlerfreie Sprung wird gewertet. Erfahrungsgemäß ist 1 von 20 Sprüngen ein Fehlversuch, weil er nicht korrekt durchgeführt wird.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet bei einem Zehnkampf keinen Fehlversuch im Weitsprung hat.

Lösungserwartung

a1) $0{,}14354 \cdot (780 - 220)^{1{,}4} = 1\,010{,}2\ldots \approx 1\,010$
$0{,}14354 \cdot (895 - 220)^{1{,}4} = 1\,312{,}1\ldots \approx 1\,312$

Kevin Mayer hätte 302 Punkte mehr erzielt.

a2) Die Sprungweite muss größer als 220 cm sein.

b1) Intervall [500 cm; 615 cm]: $\frac{620 - 383}{615 - 500} = 2{,}06\ldots$

Intervall [780 cm; 895 cm]: $\frac{1\,312 - 1\,010}{895 - 780} = 2{,}62\ldots$

b2) *P* kann als Funktion in Abhängigkeit von der Sprungweite *x* modelliert werden. Diese verläuft streng monoton wachsend und linksgekrümmt (positiv gekrümmt). Dadurch ist der Punktezuwachs umso höher, je größer die Sprungweite ist, von der man ausgeht.

c1) $\left(\frac{19}{20}\right)^3 = 0{,}8573\ldots \approx 85{,}7\ \%$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
a2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.
b2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Polynomfunktion dritten Grades*

Aufgabennummer: 2_041	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 1.2, FA 1.5, FA 4.3, AN 2.1, AN 3.3, AN 4.3	

Gegeben ist eine Polynomfunktion dritten Grades f_t mit $f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + t \cdot x$. Für den Parameter t gilt: $t \in \mathbb{R}$ und $t \neq 0$.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie die lokalen Extremstellen von f_t in Abhängigkeit von t an!

An der Stelle $x = t$ gelten für die Funktion f_t die Gleichungen $f_t(t) = 0$, $f_t'(t) = 0$ und $f_t''(t) = 2$.
Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f_t bei $x = t$!

b) Geben Sie diejenige Stelle x_0 in Abhängigkeit von t an, an der sich das Krümmungsverhalten von f_t ändert!

Weisen Sie rechnerisch nach, dass das Krümmungsverhalten des Graphen von f_t an der Stelle $x = 0$ unabhängig von der Wahl des Parameters t ist!

c) Die Funktion A beschreibt in Abhängigkeit von t mit $t > 0$ den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die vom Graphen der Funktion f_t und von der x-Achse im Intervall $[0; t]$ begrenzt wird. Die Funktion $A: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $t \mapsto A(t)$, ist eine Polynomfunktion.

Geben Sie den Funktionsterm und den Grad von A an!

Geben Sie das Verhältnis $A(t) : A(2 \cdot t)$ an!

d) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f_{-1}(x) = f_1(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt!

Erläutern Sie, wie der Graph der Funktion f_{-1} aus dem Graphen der Funktion f_1 hervorgeht!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

Lösungserwartung

a) Mögliche Vorgehensweise:

$f_t'(x) = \frac{3}{t} \cdot x^2 - 4 \cdot x + t$

$3 \cdot x^2 - 4 \cdot t \cdot x + t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{t}{3};\, x_2 = t$

Mögliche Beschreibung:

An der Stelle $x = t$ hat f_t eine Nullstelle und ein lokales Minimum.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(x) = \frac{6}{t} \cdot x - 4$

$f_t''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{2}{3} \cdot t$

Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(0) = \frac{6}{t} \cdot 0 - 4 = -4$

Die zweite Ableitungsfunktion hat an der Stelle $x = 0$ den Wert -4 und ist somit unabhängig vom Parameter t.

c) Mögliche Vorgehensweise:

$A(t) = \int_0^t f_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t^3}{4} - \frac{2 \cdot t^3}{3} + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$

Die Funktion A ist eine Funktion dritten Grades.

$A(t) : A(2 \cdot t) = 1 : 8$

d) Mögliche Vorgehensweise:

$f_{-1}(x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x$

$f_1(-x) = (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x \quad \Rightarrow \quad f_{-1}(x) = f_1(-x)$

Mögliche Erläuterung:

Wird der Graph der Funktion f_1 an der senkrechten Achse gespiegelt, so erhält man den Graphen der Funktion f_{-1}.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

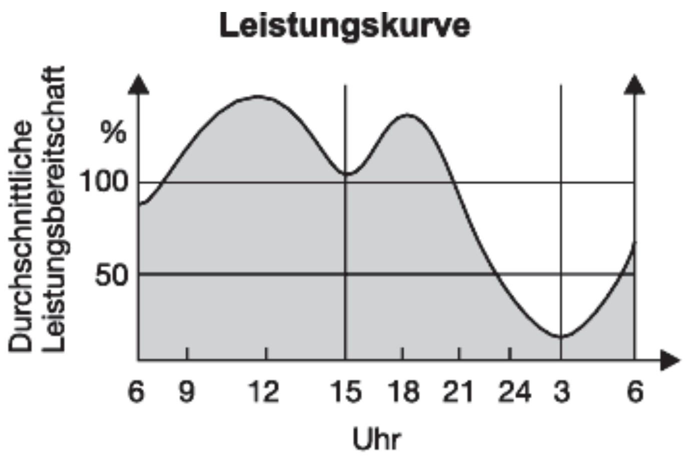
c) – Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm und die Angabe des richtigen Grades von A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für ein richtiges Verhältnis.

d) – Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.
– Ein Punkt für eine korrekte Erläuterung.

Leistungskurve

Aufgabennummer: 2_094	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.5, AN 1.3, AN 2.1	

Die *Leistungskurve*, auch *Arbeitskurve* genannt, ist die Darstellung der Arbeitsleistung einer Arbeitnehmerin/eines Arbeitnehmers in Abhängigkeit von der Tageszeit unter Berücksichtigung seiner Durchschnittsleistung (100 Prozent). Auf einer Webseite findet man folgende Grafik:



Quelle: http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/85252/leistungskurve-v9.html [30.05.2014].

a) 1) Lesen Sie ab, in welchen Zeitintervallen die Leistungsbereitschaft abnimmt.

b) Um 9 Uhr beträgt die Leistungsbereitschaft einer Arbeitnehmerin 110 %. Um 12 Uhr beträgt sie 140 %. Im Zeitintervall von 12 Uhr bis 14 Uhr beträgt die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft –12 % pro Stunde.

1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Leistungsbereitschaft im Zeitintervall von 9 Uhr bis 12 Uhr.

2) Berechnen Sie die Leistungsbereitschaft um 14 Uhr.

c) Die Leistungsbereitschaft eines Arbeitnehmers kann im Zeitintervall von 0 Uhr bis 6 Uhr durch die Funktion f beschrieben werden. Dabei gilt:

$$f(t) = \frac{10}{3} \cdot t^2 - 20 \cdot t + 40$$

t ... Zeit in Stunden, $0 \leq t \leq 6$
$f(t)$ ... Leistungsbereitschaft zur Zeit t in Prozent

1) Berechnen Sie die 1. Ableitung der Leistungsbereitschaft um 2:30 Uhr.

Lösungserwartung

a1) Eine Abnahme der Leistungsbereitschaft liegt im Zeitintervall von ca. 12 Uhr bis ca. 15 Uhr sowie im Zeitintervall von ca. 18 Uhr bis ca. 3 Uhr vor.

Toleranzintervall: $\pm 0{,}5\ h$

b1) mittlere Änderungsrate: $\frac{140 - 110}{12 - 9} = 10 \rightarrow +\ 10\ \%$ pro Stunde

b2) Leistungsbereitschaft um 14 Uhr: $140 - 2 \cdot 12 = 116 \rightarrow 116\ \%$

c1) $f'(t) = \frac{20}{3} \cdot t - 20$

$f'(2{,}5) = -\frac{10}{3} \approx -3{,}33$

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Erderwärmung*

Aufgabennummer: 2_098	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.5, FA 2.2, FA 5.2, AN 1.3, AN 3.3

Unter *globaler Mitteltemperatur* versteht man die über die gesamte Erdoberfläche gemittelte Temperatur in einem bestimmten Zeitraum unter bestimmten Bedingungen.

Die Entwicklung der globalen Mitteltemperatur kann mithilfe von Klimamodellen prognostiziert werden.

Nachstehend sind für einzelne Jahre die globalen Mitteltemperaturen angeführt.

Jahr	1900	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980
globale Mitteltemperatur (in °C)	13,80	13,87	13,89	14,01	13,90	14,02	13,94	14,16

Jahr	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
globale Mitteltemperatur (in °C)	14,03	14,37	14,37	14,31	14,51	14,55	14,72

Die Funktion T beschreibt modellhaft die globale Mitteltemperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Jahren ab dem Jahr 1900, $T(t)$ in °C). Es gilt:

$T(t) = a \cdot e^{0{,}008 \cdot t} - 0{,}03 \cdot t + 11{,}1 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^+$

Aufgabenstellung:

a) Bei einem bestimmten Klimamodell wird $a = 2{,}7$ angenommen.
Die Funktion T hat an der Stelle $t = t_0$ eine lokale Extremstelle.

1) Ermitteln Sie t_0.

2) Begründen Sie mathematisch, warum gemäß diesem Modell die globale Mitteltemperatur ab der Stelle t_0 immer schneller ansteigt.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert), Maturatermin: 12. Jänner 2021

b) Verschiedene Studien nehmen an, dass die globale Mitteltemperatur im Jahr 2100 im Vergleich zur globalen Mitteltemperatur im Jahr 2000 (also 14,31 °C) um mindestens 1,5 °C, aber um höchstens 4,5 °C höher sein wird.

1) Weisen Sie nach, dass die Funktion T mit $a = 2{,}7$ diese Studien mit der Annahme für das Jahr 2100 bestätigt.

2) Geben Sie den kleinstmöglichen Wert a_{min} und den größtmöglichen Wert a_{max} so an, dass die Funktion T diese Studien bestätigt.

a_{min} = ____________________

a_{max} = ____________________

c) Bei der UN-Klimakonferenz in Paris im Jahr 2015 wurde eine neue internationale Klimaschutz-Vereinbarung getroffen, die die Begrenzung der Zunahme der globalen Mitteltemperatur vorsieht. Demnach dürfte die globale Mitteltemperatur im Jahr 2100 höchstens 15,3 °C betragen.

Um diese Klimaschutz-Vereinbarung zu erfüllen, darf ab dem Jahr 2015 die mittlere Änderungsrate der globalen Mitteltemperatur höchstens einen bestimmten Wert k betragen (k in °C pro Jahr).

1) Ermitteln Sie k.

Es wird angenommen, dass die globale Mitteltemperatur ab dem Jahr 2015 linear zunimmt und die mittlere Änderungsrate der globalen Mitteltemperatur tatsächlich k entspricht.

2) Geben Sie unter dieser Annahme eine Gleichung derjenigen linearen Funktion M an, die die jährliche globale Mitteltemperatur (in °C) t Jahre nach 2015 modellhaft beschreibt.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $T'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 41{,}06...$
$(T''(t_0) > 0)$

a2) mögliche Begründung:
Die globale Mitteltemperatur steigt ab t_0 immer schneller an, weil für alle $t > t_0$ der Graph von T linksgekrümmt ist.

b) **Lösungserwartung:**

b1) mögliche Vorgehensweise:
$T(200) = 18{,}473... \approx 18{,}47$
$14{,}31 + 1{,}5 \leq 18{,}47 \leq 14{,}31 + 4{,}5$
Die Funktion T mit $a = 2{,}7$ bestätigt diese Studien.

b2) Zunahme um 1,5 °C: $T(200) = 15{,}81$
Zunahme um 4,5 °C: $T(200) = 18{,}81$
$a_{min} = 2{,}162...$
$a_{max} = 2{,}768...$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $k = \dfrac{15{,}3 - 14{,}72}{2100 - 2015} = 0{,}00682...$
$k \approx 0{,}0068$ °C/Jahr

c2) $M(t) = 0{,}0068 \cdot t + 14{,}72$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei ein Nachweis, dass t_0 eine lokale Minimumstelle ist, nicht erbracht werden muss.
a2) Ein Punkt für eine richtige Begründung.

b1) Ein Punkt für einen richtigen Nachweis.
b2) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „°C/Jahr" nicht angegeben sein muss.
c2) Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

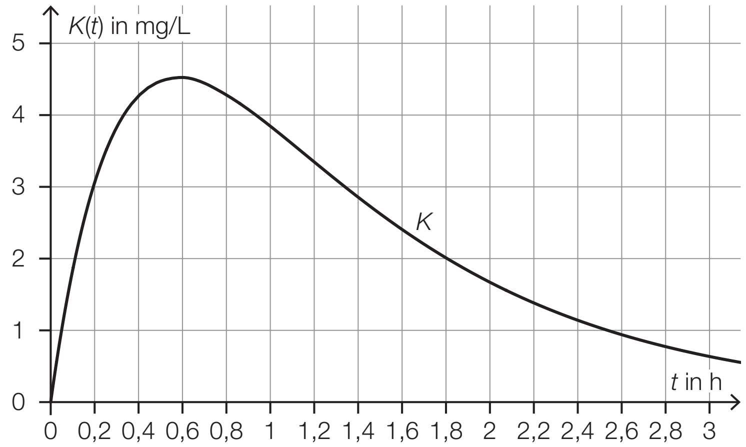
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Koffein*

Aufgabennummer: 2_101	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Aufgabenstellung:

a) Lea trinkt eine Tasse Kaffee. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion K dargestellt, die modellhaft die Konzentration $K(t)$ von Koffein in Leas Blut in Abhängigkeit von der Zeit t nach dem Trinken des Kaffees beschreibt (t in h, $K(t)$ in mg/L).



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung, wie viele Minuten nach dem Trinken des Kaffees die maximale Konzentration von Koffein im Blut auftritt.

______________________ min

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die Funktion K hat im Intervall (0; 0,8) _____①_____ und in diesem Intervall ändert sich das Vorzeichen der _____②_____.

①	
eine Wendestelle	☐
eine Extremstelle	☐
eine Nullstelle	☐

②	
Krümmung	☐
Steigung	☐
Funktionswerte	☐

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

b) Die Löslichkeit von Koffein in Wasser gibt an, wie viel Gramm Koffein pro Liter (g/L) maximal gelöst werden können. Die Löslichkeit ist temperaturabhängig. Sie lässt sich näherungsweise durch die Funktion f beschreiben.

$f(T) = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T}$ mit $0 \leq T \leq 90$

T … Temperatur in °C
$f(T)$ … Löslichkeit von Koffein in Wasser bei der Temperatur T in g/L

Jemand behauptet:
„Bei einem Anstieg der Temperatur um 10 °C nimmt die Löslichkeit von Koffein in Wasser etwa auf das 1,65-Fache zu."

1) Überprüfen Sie rechnerisch, ob diese Behauptung richtig ist.

Folgende Gleichung wird aufgestellt:
$2 \cdot 6{,}42 = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T}$

2) Interpretieren Sie die Lösung dieser Gleichung im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) 36 min

a2)

①	
eine Extremstelle	☒

②	
Steigung	☒

b) **Lösungserwartung:**

b1) $f(T+10) = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot (T+10)} = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T} \cdot e^{0{,}05 \cdot 10} = 6{,}42 \cdot e^{0{,}05 \cdot T} \cdot 1{,}648... = f(T) \cdot 1{,}648...$

$\Rightarrow$ Die Behauptung ist richtig.

b2) Die Lösung der Gleichung ist die Temperaturerhöhung, bei der sich die Löslichkeit von Koffein in Wasser jeweils verdoppelt („Verdoppelungstemperatur").

oder:

Die Lösung der Gleichung ist diejenige Temperatur, bei der die Löslichkeit von Koffein in Wasser doppelt so hoch ist wie bei einer Temperatur von 0 °C.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Wertes.
Toleranzintervall: [33 min; 39 min]

a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile, ein halber Punkt, wenn nur ein richtiger Satzteil angekreuzt ist.

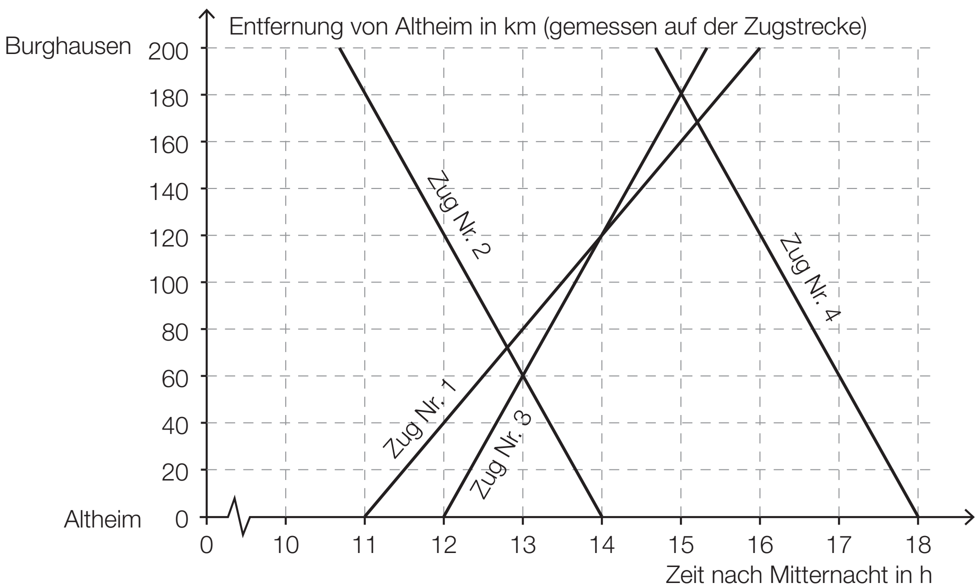
b1) Ein Punkt für das richtige rechnerische Überprüfen. Auch ein Nachweis mit konkreten Zahlen ist als richtig zu werten.

b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

Eisenbahn

Aufgabennummer: 2_069	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.6, FA 1.7, FA 2.2, FA 2.3	

In der nachstehenden Abbildung ist ein sogenannter Bildfahrplan für Züge zwischen Altheim und Burghausen dargestellt. Die Züge fahren dabei – vereinfacht betrachtet – mit konstanter Geschwindigkeit.



a) Zug Nr. 3 fährt um 12:00 Uhr in Altheim ab.
Zug Nr. 4 fährt um 14:40 Uhr in Burghausen ab.
Auf der Fahrt zu ihren Zielbahnhöfen begegnen die beiden Züge einander.

1) Lesen Sie aus dem obigen Bildfahrplan ab, wann und wie weit von Burghausen entfernt die beiden Züge einander begegnen.

b) 1) Argumentieren Sie, dass die Züge Nr. 2 und Nr. 4 mit der gleichen Geschwindigkeit fahren.

c) Die Fahrt eines Zuges Nr. 5 wird durch die Funktion s beschrieben. Es gilt:

$s(t) = -80 \cdot t + 1\,160$

t ... Zeit nach Mitternacht in h
$s(t)$ ... Entfernung von Altheim zur Zeit t in km

1) Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der Zug Nr. 5 in Burghausen abfährt.

d) Eine Eisenbahnstrecke hat eine Länge von 200 km. Nach einer Sanierung der Gleise können die Züge mit einer um 10 km/h höheren Geschwindigkeit fahren. Die Fahrzeit wird dadurch um eine halbe Stunde vermindert.
Zur Verdeutlichung sind die Angaben in der nachstehenden Tabelle dargestellt.
t ist dabei die Fahrzeit vor der Sanierung in Stunden.

	Streckenlänge in km	Geschwindigkeit in km/h	Fahrzeit in h
nach der Sanierung	200	$\left(\frac{200}{t} + 10\right)$	$\left(t - \frac{1}{2}\right)$

1) Berechnen Sie t.

Lösungserwartung

a1) Die beiden Züge begegnen einander um 15:00 Uhr, 20 km von Burghausen entfernt.

b1) Die beiden Züge benötigen für die Strecke Burghausen – Altheim gleich lang, sie fahren also mit der gleichen Geschwindigkeit.

oder:

Die zugehörigen Geraden im Bildfahrplan haben die gleiche Steigung.

c1) $s(t) = 200$

oder:

$-80 \cdot t + 1\,160 = 200$

$t = \frac{200 - 1\,160}{-80} = 12$

Zug Nr. 5 fährt um 12 Uhr in Burghausen ab.

d1) $200 = \left(\frac{200}{t} + 10\right) \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)$

$t_1 = 3{,}422...$
$(t_2 = -2{,}922...)$
Die Fahrzeit vor der Sanierung betrug etwa 3,42 h.

Gewinnfunktion

Aufgabennummer: 2_009	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

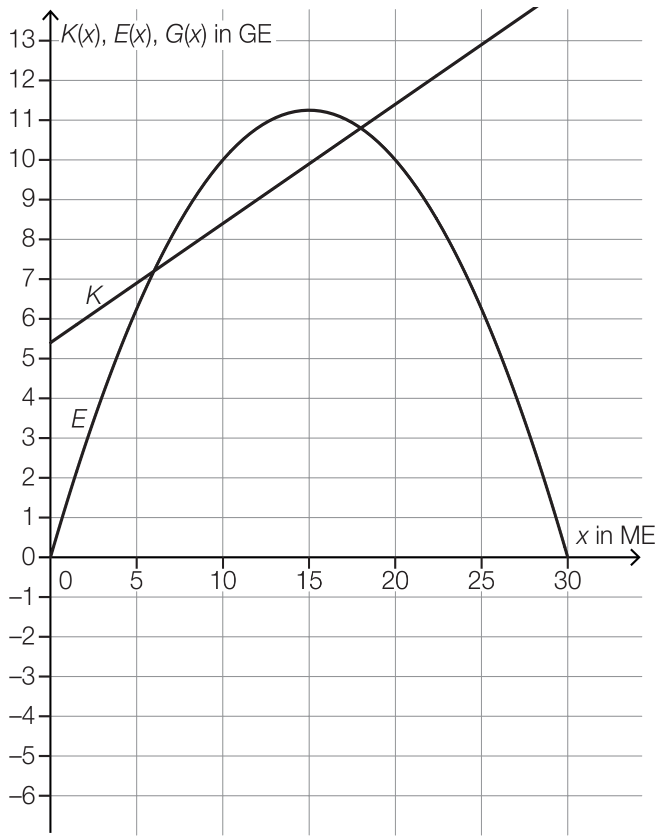
In einem bestimmten Unternehmen werden die Entwicklungen der Kosten K und des Erlöses E in Abhängigkeit von der produzierten Menge x eines bestimmten Produkts beobachtet.
Die Erlösfunktion E mit $E(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x$ und die Kostenfunktion K mit $K(x) = 0{,}3 \cdot x + 5{,}4$ beschreiben modellhaft diese Entwicklungen (x in Mengeneinheiten ME und $E(x)$, $K(x)$ in Geldeinheiten GE). Alle produzierten Mengeneinheiten werden vom Unternehmen verkauft.

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionsgraphen von E und K.

2) Interpretieren Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte im Hinblick auf den Gewinn des Unternehmens.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die Graphen der Erlösfunktion E und der Kostenfunktion K.



1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion G ein.

2) Lesen Sie aus der obigen Abbildung ab, wie hoch der Gewinn bei maximalem Erlös ist.

Gewinn bei maximalem Erlös: rund ________________________ GE

c) 1) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn, wenn 13 ME produziert und verkauft werden.

Die Gewinnzone entspricht dem Abstand zwischen den beiden Nullstellen der Gewinnfunktion.

2) Argumentieren Sie, dass eine Senkung der Fixkosten eine breitere Gewinnzone bewirkt.

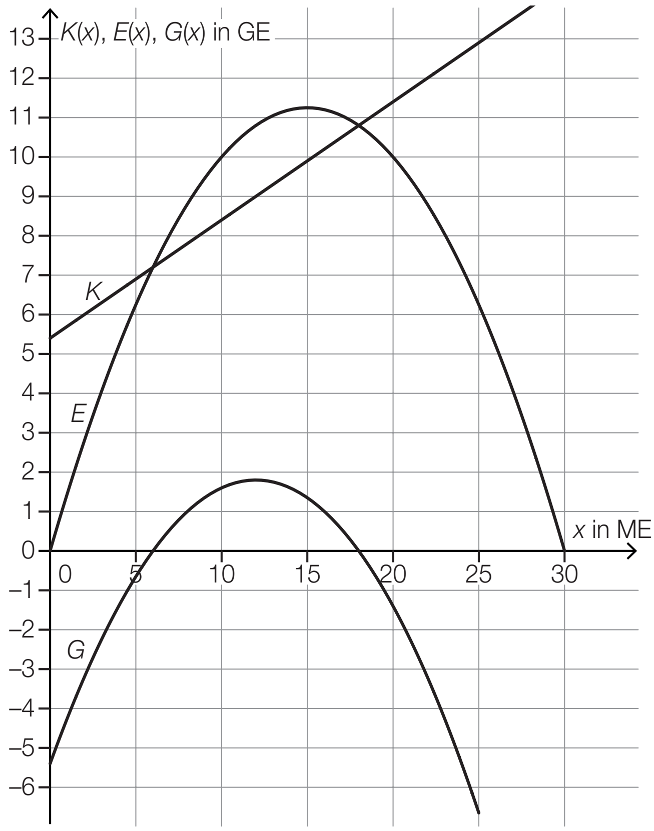
3) Erklären Sie, warum eine Veränderung der Fixkosten keine Auswirkung auf diejenige Stückzahl hat, bei der der höchste Gewinn erzielt wird.

Lösungserwartung

a1) $E(x) = K(x)$
$\Rightarrow \quad S_1 = (6\,|\,7{,}2),\ S_2 = (18\,|\,10{,}8)$

a2) Bei 6 ME und einem Erlös von 7,2 GE bzw. bei 18 ME und einem Erlös von 10,8 GE macht dieses Unternehmen keinen Gewinn.

b1)



b2) Gewinn bei maximalem Erlös: rund 1,3 GE

c1) $G(13) = 1{,}75$ GE

c2) Eine Senkung der Fixkosten bewirkt einen höheren Gewinn für jede Stückzahl. Dadurch verschiebt sich die Gewinnfunktion senkrecht „nach oben“, was einen größeren Abstand der Nullstellen und damit eine breitere Gewinnzone zur Folge hat.

c3) Eine Veränderung der Fixkosten bewirkt eine senkrechte Verschiebung der Gewinnfunktion. Dies verändert jedoch nicht die Stelle, an der der Gewinn maximal ist.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Koordinaten.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

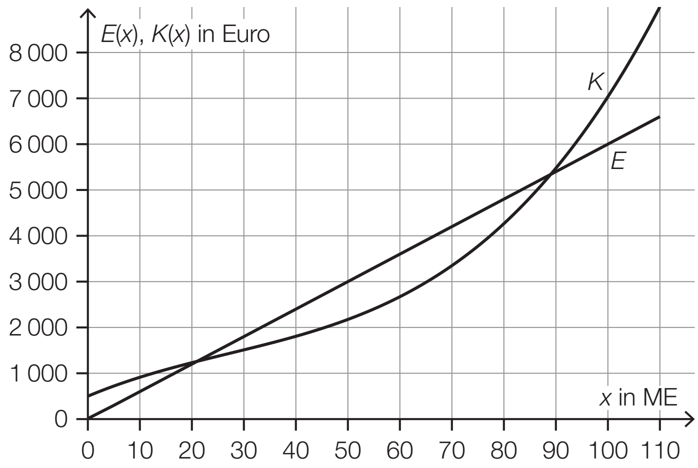
b1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.
b2) Ein Punkt ffür das richtige Ablesen.
Toleranzintervall: [1,2; 1,5]

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
c2) Ein Punkt für das richtige Argumentieren.
c3) Ein Punkt für das richtige Erklären.

Produktionskosten

Aufgabennummer: 2_016	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die unten stehende Abbildung zeigt die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E eines bestimmten Betriebes. Mit x wird die Anzahl der produzierten und verkauften Mengeneinheiten (ME) pro Tag eines bestimmten Produkts bezeichnet. Pro Tag können höchstens 110 ME produziert werden.



Aufgabenstellung:

a) 1) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung den Gewinnbereich.

2) Erklären Sie anhand der Funktionsgraphen, warum sich durch eine Senkung des Verkaufspreises der Gewinnbereich verkleinert.

b) 1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Fixkosten und den Verkaufspreis pro ME ab.

Fixkosten: __________ Euro

Verkaufspreis pro ME: __________ Euro

Der Verkaufspreis wird um 25 % verringert.

2) Berechnen Sie den Erlös für 110 ME.

c) Zwei der nachstehenden Aussagen treffen auf die in der obigen Abbildung dargestellten Produktionskosten zu.

1) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

$K''(10) > K''(70)$	☐
$K''(60) > 0$	☐
Der Kostenzuwachs ist bei $x = 80$ maximal.	☐
Für alle $x \in [0; 110]$ gilt: $K'(x) > 0$.	☐
Es gilt: $K'(50) > K'(90)$.	☐

d) 1) Ermitteln Sie anhand der obigen Abbildung diejenige Produktionsmenge x_1, für die $K'(x_1) = E'(x_1)$ gilt.

x_1 = ____ ME

2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der erzielte Gewinn bei dieser Produktionsmenge x_1 am höchsten ist.

Lösungserwartung

a1) Gewinnbereich: [21; 89]

a2) Eine Senkung des Verkaufspreises bewirkt eine geringere Steigung des Graphen der Erlösfunktion. Dadurch schieben sich die Grenzen des Gewinnbereichs näher zusammen.

b1) Fixkosten: 500 Euro
Verkaufspreis pro ME: 60 Euro

b2) $110 \cdot 60 \cdot \frac{3}{4} = 4950$
Der Erlös für 110 ME beträgt 4.950 Euro.

c1)

$K''(60) > 0$	☒
Für alle $x \in [0; 110]$ gilt: $K'(x) > 0$.	☒

d1) $x_1 = 63$ ME

d2) An der gesuchten Stelle muss gelten: $G'(x_1) = 0$.
Aus $G(x) = E(x) - K(x)$ folgt $G'(x) = E'(x) - K'(x)$.
Da $E'(x_1) = K'(x_1)$, folgt $G'(x_1) = 0$.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln des Gewinnbereichs, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.
Toleranzintervall untere Grenze: [20; 22]
Toleranzintervall obere Grenze: [88; 90]

a2) Ein Punkt für das richtige Erklären.

b1) Ein Punkt für das Ablesen der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.
Toleranzintervall Fixkosten: [400; 600]
Toleranzintervall Verkaufspreis pro ME: [55; 65]

b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erlöses.

c1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.

d1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Produktionsmenge.
Toleranzintervall: [60; 66]

d2) Ein Punkt für das richtige rechnerische Nachweisen.

Erfassen der Geschwindigkeit

Aufgabennummer: 2_077	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, AN 3.2, AN 3.3	

Auf einer Teststrecke werden Messungen durchgeführt.

a) Die Teststrecke beginnt bei einem Stoppschild. Die Messergebnisse für ein Auto auf dieser Strecke sind in folgender Tabelle angegeben:

	am Stoppschild	Messung 1	Messung 2
Zeit t in min	0	1	2,5
zurückgelegter Weg $s_1(t)$ in km	0	1	3

Der zurückgelegte Weg soll in Abhängigkeit von der Zeit t im Zeitintervall [0; 2,5] durch eine Polynomfunktion s_1 mit $s_1(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben werden.

1) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion s_1.

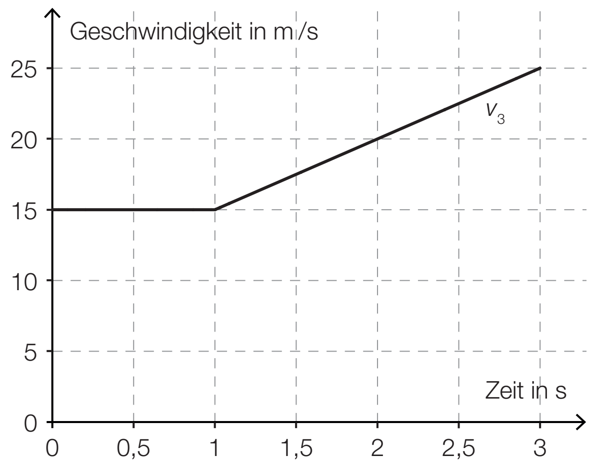
b) Der zurückgelegte Weg eines anderen Autos kann näherungsweise durch die Funktion s_2 beschrieben werden:

$s_2(t) = -\frac{1}{3} \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + \frac{1}{3} \cdot t$ mit $0 \leq t \leq 3$

t ... Zeit in min
$s_2(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in km

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob die Geschwindigkeit dieses Autos zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls null ist.
2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit t_0 die Beschleunigung des Autos im angegebenen Zeitintervall null ist.

c) Die Geschwindigkeit eines anderen Autos kann im Zeitintervall [0; 3] näherungsweise durch die Funktion v_3 beschrieben werden. Der Graph dieser Funktion v_3 ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Weg-Zeit-Funktion s_3 im Zeitintervall [1; 3] mit $s_3(1) = 15$.

Lösungserwartung

a1) $s_1(0) = 0$
$s_1(1) = 1$
$s_1(2{,}5) = 3$

oder:

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$3 = a \cdot 2{,}5^2 + b \cdot 2{,}5 + c$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{15}$
$b = \frac{13}{15}$
$c = 0$

b1) $v_2(t) = s_2'(t) = -t^2 + 4 \cdot t + \frac{1}{3}$
$v_2(0) = \frac{1}{3} \neq 0$
Das Auto hatte zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls eine Geschwindigkeit ungleich 0.

b2) $a_2(t) = s_2''(t) = -2 \cdot t + 4$

$a_2(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2$

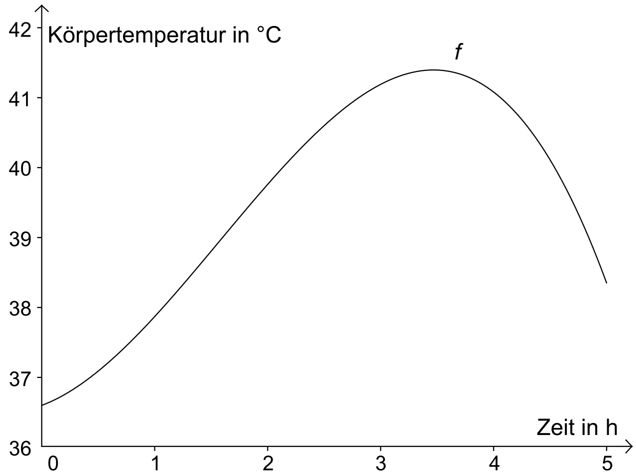
c1) $v_3(t) = 5 \cdot t + 10$ mit $1 \leq t \leq 3$
Integrieren ergibt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + C$
Wegen $s_3(1) = 15$ gilt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + \frac{5}{2}$ mit $1 \leq t \leq 3$
t ... Zeit in s
$s_3(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ganzkörperhyperthermie

Aufgabennummer: 2_092	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, FA 4.4, AN 3.3, AN 4.2	

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber). Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.



Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$

t ... Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$
$f(t)$ ... Körpertemperatur zur Zeit t in °C

a) 1) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur 37 °C beträgt.

b) 1) Dokumentieren Sie, wie die maximale Körpertemperatur im angegebenen Zeitintervall mithilfe der Differenzialrechnung berechnet werden kann.

2) Begründen Sie, warum der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades höchstens 2 Extrempunkte haben kann.

c) Die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ während der 5 Stunden andauernden Behandlung soll ermittelt werden.

Die mittlere Körpertemperatur in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist:

$$\overline{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur $\overline{f}$ im Zeitintervall [0; 5].

Lösungserwartung

a1) $-0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6 = 37$

$t = 0{,}429... \Rightarrow t \approx 0{,}43$ h

b1) Dazu muss das Maximum der Funktion f ermittelt werden: Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung f'. Dann berechnet man die Funktionswerte an diesen Stellen und den Randstellen. Die größte dieser Zahlen ist der maximale Funktionswert.

b2) Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann der Graph der Polynomfunktion 3. Grades nur höchstens 2 Extrempunkte haben.

c1) $\overline{f} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 39{,}55... \approx 39{,}6$

Die mittlere Körpertemperatur beträgt rund 39,6 °C.

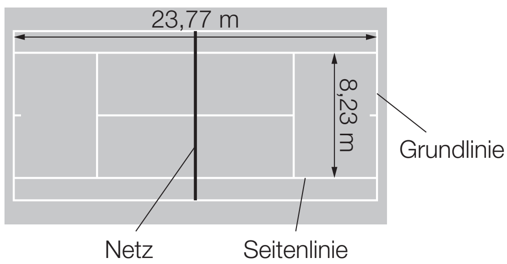
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Tennis*

Aufgabennummer: 2_058	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.7, FA 4.3, WS 1.1	

Tennis ist ein Rückschlagspiel zwischen zwei oder vier Personen, bei dem ein Tennisball über ein Netz geschlagen werden muss. Das Spielfeld ist rechteckig und wird durch ein Netz in zwei Hälften geteilt (siehe Abbildung 1). Für ein Spiel zwischen zwei Personen ist der Platz 23,77 m lang und 8,23 m breit. Das Spielfeld wird durch die Grundlinien und die Seitenlinien begrenzt. Das Netz weist eine maximale Höhe von 1,07 m auf.

Abbildung 1:



Aufgabenstellung:

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -0{,}0007 \cdot x^3 + 0{,}005 \cdot x^2 + 0{,}2 \cdot x + 0{,}4$ beschreibt eine Bahnkurve eines Tennisballs bis zu derjenigen Stelle, an der der Tennisball erstmals den Boden berührt. Dabei gibt x die waagrechte Entfernung des Tennisballs vom Abschlagpunkt und $f(x)$ die Flughöhe des Tennisballs über dem Boden an (x und $f(x)$ in m). Die Flugbahn des Tennisballs startet zwischen den Seitenlinien an der Grundlinie und die Ebene, in der die Flugbahn liegt, verläuft parallel zur Seitenlinie des Tennisfelds.

1) Geben Sie an, in welcher waagrechten Entfernung vom Abschlagpunkt der Tennisball seine maximale Höhe erreicht.

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ____________________ m

2) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Tennisball im gegnerischen Spielfeld oder hinter der Grundlinie landet.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

b) Fällt ein Tennisball lotrecht (ohne Drehung) auf den Boden, so springt er wieder lotrecht zurück. Der Restitutionskoeffizient r ist ein Maß für die Sprungfähigkeit des Tennisballs.

Es gilt: $r = \frac{v_2}{v_1}$, wobei v_1 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs vor und v_2 der Betrag der Geschwindigkeit des Tennisballs nach dem Aufprall ist.

Die Differenz der vertikalen Geschwindigkeiten unmittelbar vor und nach dem Aufprall ist aufgrund der unterschiedlichen Bewegungsrichtungen des Tennisballs definiert durch: $\Delta v = v_2 - (-v_1)$.

1) Geben Sie Δv in Abhängigkeit von v_1 und r an.

$\Delta v =$ ______________________________

Ein Tennisball trifft mit der Geschwindigkeit $v_1 = 4{,}4$ m/s lotrecht auf dem Boden auf. Der Restitutionskoeffizient beträgt für diesen Tennisball $r = 0{,}6$. Die Kontaktzeit mit dem Boden beträgt 0,01 s.

2) Berechnen Sie die durchschnittliche Beschleunigung a (in m/s²) des Tennisballs in vertikaler Richtung beim Aufprall (während der Kontaktzeit).

$a =$ ______________________________ m/s²

c) Bei einem Fünf-Satz-Tennismatch gewinnt ein Spieler, sobald er drei Sätze gewonnen hat. Für einen Satzgewinn müssen in der Regel sechs Games gewonnen werden, wobei es für jedes gewonnene Game einen Punkt gibt.

Für unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p für ein gewonnenes Game wurden die daraus resultierenden Wahrscheinlichkeiten m für einen Matchgewinn bei einem Fünf-Satz-Match ermittelt. In der nachstehenden Tabelle sind diese Wahrscheinlichkeiten angeführt.

p	m
0,5	0,5
0,51	0,6302
0,55	0,9512
0,6	0,9995
0,7	1,000

Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Game gewinnt, ist um 2 Prozentpunkte höher als die Wahrscheinlichkeit, dass sein Gegenspieler B ein Game gewinnt.

1) Geben Sie an, um wie viel Prozentpunkte die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Fünf-Satz-Match gewinnt, höher ist als jene für seinen Gegenspieler B.

Gegenüber einem anderen, schwächeren Gegenspieler C hat Spieler A einen Vorteil von 10 Prozentpunkten, ein Game zu gewinnen.

2) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Fünf-Satz-Match gegen Gegenspieler C gewinnt, um 50,94 Prozent höher ist als bei einem Fünf-Satz-Match gegen B.

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = 0$

$-0{,}0021 \cdot x^2 + 0{,}01 \cdot x + 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 12{,}42... \quad (x_2 = -7{,}66...)$

waagrechte Entfernung vom Abschlagpunkt: ca. 12,4 m

a2) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 21{,}597... \quad (x_2 = -2{,}15..., x_3 = -12{,}30...)$

Die einzige positive Nullstelle von f ist $x_1 \approx 21{,}6$.

Da das Spielfeld 23,77 m lang ist, landet der Tennisball im gegnerischen Spielfeld.

b) Lösungserwartung:

b1) $\Delta v = r \cdot v_1 + v_1$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$\Delta v = v_1 \cdot (1 + r) = 4{,}4 \cdot (1 + 0{,}6) = 7{,}04$

$a = 7{,}04 : 0{,}01 = 704$

$a = 704 \text{ m/s}^2$

c) Lösungserwartung:

c1) $0{,}6302 - 0{,}3698 = 0{,}2604$

Diese Wahrscheinlichkeit ist um ca. 26 Prozentpunkte höher.

c2) Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Fünf-Satz-Match gegen Spieler C gewinnt: 0,9512

Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A ein Fünf-Satz-Match gegen Spieler B gewinnt: 0,6302

$\frac{0{,}9512}{0{,}6302} = 1{,}50936... \approx 1{,}5094$

$\Rightarrow$ 0,9512 ist um ca. 50,94 Prozent höher als 0,6302.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [12,4 m; 12,5 m]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

a2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für a: [700 m/s^2; 710 m/s^2]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [26; 26,1]

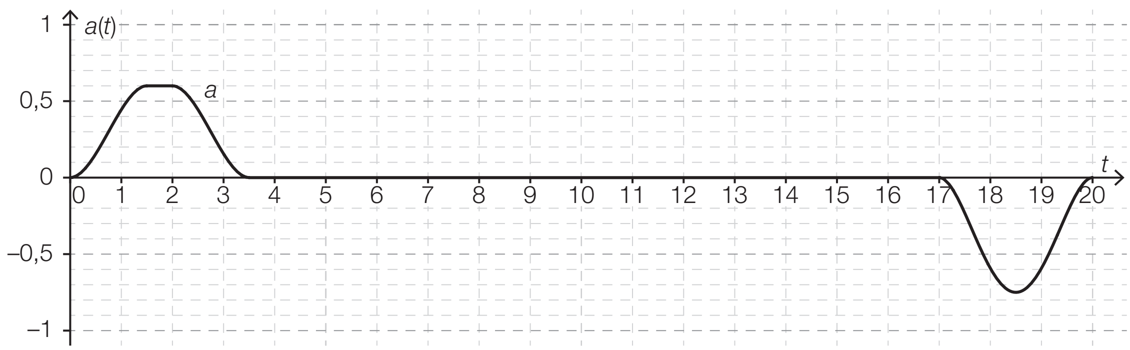
c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufzugsfahrt*

Aufgabennummer: 2_059	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, AN 1.3, AN 4.3	

Die Geschwindigkeiten von Personenaufzügen können sich je nach Bauart und Gebäudehöhe sehr stark unterscheiden.

Die nachstehende Abbildung zeigt das Zeit-Beschleunigung-Diagramm für eine 20 s dauernde Aufzugsfahrt. Zu Beginn und am Ende der Fahrt steht der Aufzug still. Die Zeit t wird in Sekunden, die Beschleunigung $a(t)$ in m/s² angegeben. Die Beschleunigungswerte wurden mithilfe eines Sensors ermittelt und der Verlauf der Beschleunigung wurde mit einer differenzierbaren Funktion a modelliert.



Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie für jeden im Folgenden genannten Abschnitt der dargestellten Aufzugsfahrt das entsprechende Zeitintervall an.

Aufzug bremst ab: ___________________________

Aufzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit: ___________________________

Kim behauptet, dass die Geschwindigkeit des Aufzugs im Zeitintervall [1,5 s; 2 s] konstant bleibt.

2) Geben Sie an, ob Kim recht hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 14. Jänner 2020

b) 1) Ermitteln Sie anhand der gegebenen Abbildung näherungsweise die Höchstgeschwindigkeit v_{max} während der dargestellten Aufzugsfahrt.

Der Graph der Funktion a schließt mit der t-Achse in den Zeitintervallen [0; 3,5] und [17; 20] jeweils ein Flächenstück ein.

2) Begründen Sie, warum im gegebenen Kontext die Inhalte dieser beiden Flächenstücke gleich groß sein müssen.

c) Ein Produzent von Aufzugsanlagen plant die Herstellung eines neuen Aufzugs.
Die Beschleunigung dieses Aufzugs wird in den ersten 3 Sekunden durch die differenzierbare Funktion $a_1: [0; 3] \to \mathbb{R}$ mit

$$a_1(t) = \begin{cases} 0{,}6 \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t) & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0{,}6 & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 0{,}6 \cdot (t - 3)^2 \cdot (2 \cdot t - 3) & \text{für } 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

beschrieben (t in s, $a_1(t)$ in m/s²).

1) Berechnen Sie die Geschwindigkeitszunahme dieses Aufzugs im Zeitintervall [0; 3].

Für den Verlauf der Fahrt müssen bestimmte Bedingungen für die Beschleunigung eingehalten werden. Der sogenannte *Ruck*, die momentane Änderungsrate der Beschleunigung, soll bei einer Fahrt mit einem Aufzug Werte zwischen -1 m/s³ und 1 m/s³ annehmen.

2) Überprüfen Sie, ob dieser Aufzug bei $t = 1$ die angeführten Bedingungen für den Ruck einhält.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) Aufzug bremst ab: [17 s; 20 s]

Aufzug fährt mit konstanter Geschwindigkeit: [3,5 s; 17 s]

a2) Kim hat nicht recht, da die Beschleunigung in diesem Zeitintervall konstant und positiv ist und somit die Geschwindigkeit gleichmäßig (linear) zunimmt.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $\frac{3{,}5 + 0{,}5}{2} \cdot 0{,}6 = 1{,}2 \quad \Rightarrow \quad v_{max} \approx 1{,}2$ m/s

b2) Die Inhalte der beiden Flächenstücke müssen gleich groß sein, da die Geschwindigkeitszunahme während der Beschleunigungsphase gleich groß wie die Geschwindigkeitsabnahme während des Abbremsvorgangs sein muss.

c) **Lösungserwartung:**

c1) $\int_0^1 0{,}6 \cdot t^2 \cdot (3 - 2 \cdot t)\,dt + \int_1^2 0{,}6\,dt + \int_2^3 0{,}6 \cdot (t - 3)^2 \cdot (2 \cdot t - 3)\,dt = 1{,}2$

Im Zeitintervall [0; 3] beträgt die Geschwindigkeitszunahme 1,2 m/s.

c2) mögliche Vorgehensweise:

$a_1'(t) = 0$ für alle $t \in [1; 2) \quad \Rightarrow \quad a_1'(1) = 0$

Zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt die momentane Änderungsrate der Beschleunigung 0 m/s³. Die angeführten Bedingungen sind bei $t = 1$ eingehalten.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Zeitintervalle.
Abweichungen von bis zu ±0,3 s bei den Intervallgrenzen sind als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für eine richtige Beschreibung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [1 m/s; 1,4 m/s]
b2) Ein Punkt für eine richtige Begründung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [1,1; 1,3]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
c2) Ein Punkt für einen richtigen rechnerischen Nachweis.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

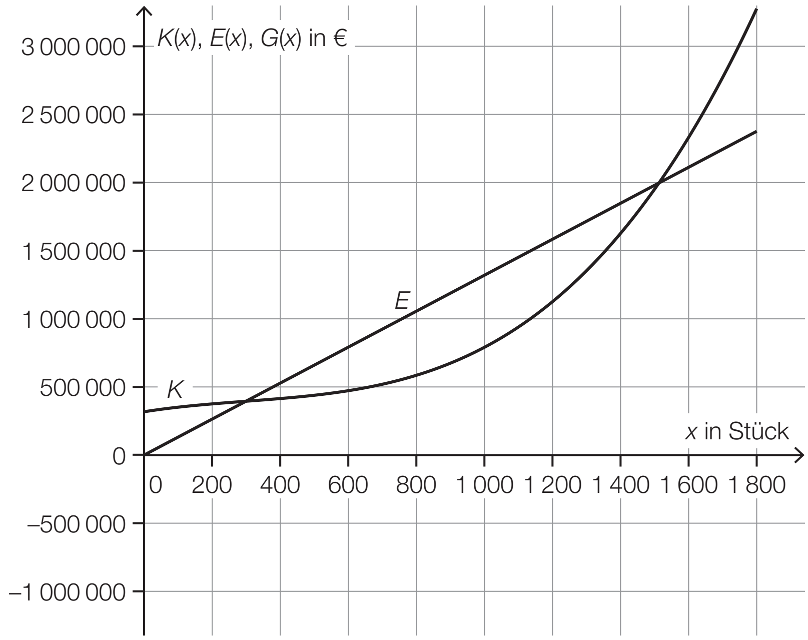
Erlös und Gewinn

Aufgabennummer: 2_011	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Ein bestimmter Betrieb produziert hochwertige Kameras. Die Produktionskosten K können in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x durch die nachstehende Funktionsgleichung modellhaft beschrieben werden.

$K(x) = 0{,}00077 \cdot x^3 - 0{,}693 \cdot x^2 + 396 \cdot x + 317\,900$

Es können monatlich maximal 1 800 Kameras produziert werden und es wird angenommen, dass alle produzierten Kameras auch verkauft werden.
Die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E sind in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) 1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Gewinnfunktion G ein.

2) Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Um den Break-even-Point bei einer geringeren Stückzahl zu erreichen, muss der Stückpreis ___①___ und der Gewinnbereich wird ___②___.

①	
kleiner werden	☐
größer werden	☐
gleich bleiben	☐

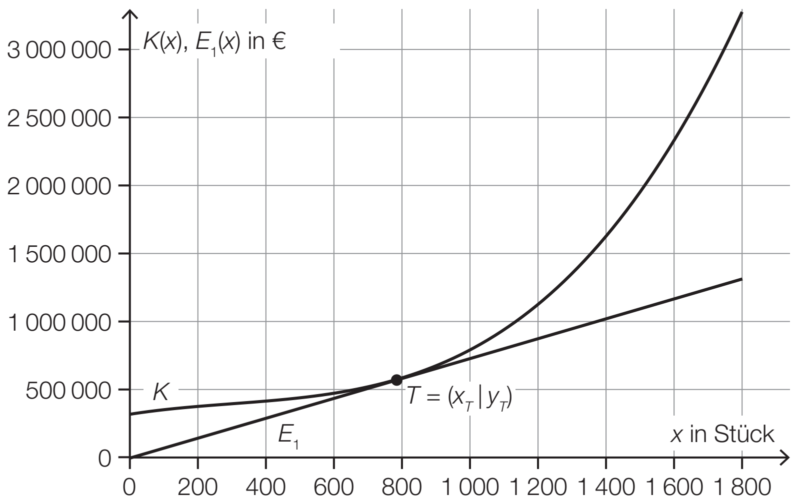
②	
kleiner	☐
größer	☐
nicht verändert	☐

b) Der Verkaufspreis einer Kamera soll € 1.320 betragen.

1) Stellen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G auf.

2) Berechnen Sie diejenige Stückzahl, bei der der Gewinn maximal wird.

c) In der nachstehenden Abbildung wurde die Erlösfunktion so geändert, dass die Graphen der Kostenfunktion K und der Erlösfunktion E_1 einander im Punkt T berühren.



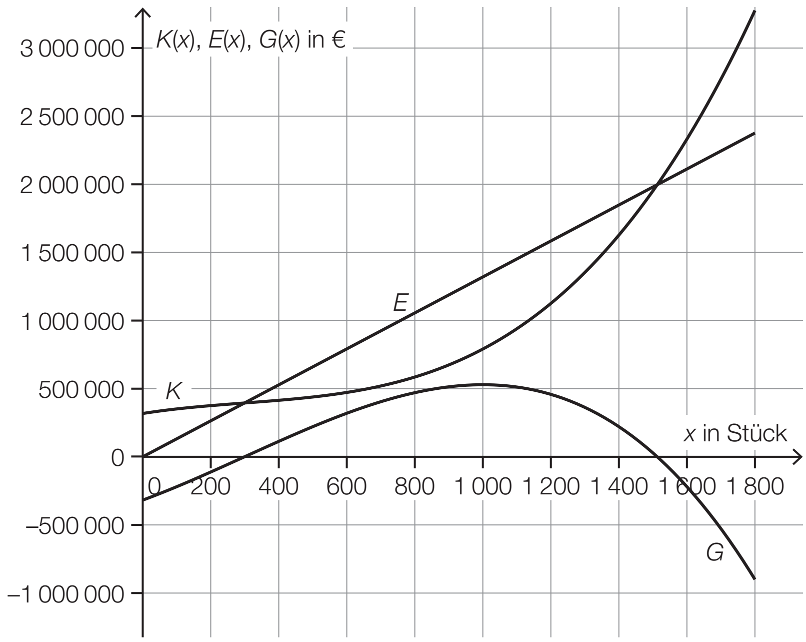
1) Interpretieren Sie die Koordinaten des Punktes T im Hinblick auf den Gewinn.

2) Stellen Sie die geänderte Erlösfunktion E_1 mithilfe der Koordinaten des Punktes T auf.

$E_1(x) =$ ______________________________

Lösungserwartung

a1)



a2)

①	
größer werden	☒

②	
größer	☒

b1) $G(x) = 1\,320 \cdot x - (0{,}00077 \cdot x^3 - 0{,}693 \cdot x^2 + 396 \cdot x + 317\,900)$
$G(x) = -0{,}00077 \cdot x^3 + 0{,}693 \cdot x^2 + 924 \cdot x - 317\,900$

b2) $G'(x) = 0$
$x_1 = 1\,000 \quad (x_2 = -400)$
Der maximale Gewinn wird bei einer Stückzahl von 1 000 erreicht.

c1) Bei einer Produktionsmenge von x_T Stück wird kostendeckend produziert. Kosten und Erlös betragen je € y_T. Es ist nicht möglich, mit Gewinn zu produzieren.

c2) $E_1(x) = \frac{y_T}{x_T} \cdot x$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Einzeichnen des Graphen.
a2) Ein Punkt für das Ankreuzen der beiden richtigen Satzteile.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Stückzahl.

c1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Erlösfunktion.

Kostenfunktion

Aufgabennummer: 2_012	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Bei einem bestimmten Unternehmen werden die Produktionskosten untersucht. Im ersten Jahr gilt modellhaft für dieses Unternehmen:

$K(x) = 0{,}01 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 350 \cdot x + 20\,000$

x … Produktionsmenge in ME ($x \in \mathbb{R}_0^+$)
$K(x)$ … Produktionskosten in GE

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie, um wie viel sich die Grenzkosten bei einem Produktionsumfang von $x = 50$ ME vom tatsächlichen Zuwachs der Kosten (das heißt bei Erhöhung des Produktionsumfangs von 50 ME auf 51 ME) bei diesem Unternehmen unterscheidet.

Für $K(x)$ gilt die Aussage: „Die Grenzkosten sind stets positiv."

2) Begründen Sie, warum diese Aussage richtig ist.

b) Für die Festlegung des Produktionsplans ist es erforderlich, die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME in Abhängigkeit von der Produktionsmenge zu kennen. Die Stückkostenfunktion gibt die durchschnittlichen Kosten pro erzeugter ME an.

1) Stellen Sie die Stückkostenfunktion $\overline{K}(x)$ dieses Unternehmens auf.

2) Berechnen Sie, bei welcher Produktionsmenge die durchschnittlichen Stückkosten für dieses Unternehmen am geringsten sind.

c) Im zweiten Jahr können die Produktionskosten dieses Unternehmens durch eine Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + 100 \cdot x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, x \in \mathbb{R}_0^+$ modellhaft beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie alle Werte für a so, dass ein progressiver Verlauf der Produktionskosten vorliegt.

Für diese Produktionskosten gilt:

- Die Fixkosten der Produktion betragen 15 000 GE.
- Die Produktionskosten für 100 ME betragen 30 000 GE.

2) Bestimmen Sie die Werte von a und c.

$a =$ ________________________

$c =$ ________________________

Lösungserwartung

a1) $K'(50) = 125$
$K(51) - K(50) = 123{,}51$
Unterschied: 1,49 GE

a2) $K(x)$ ist im angegebenen Bereich monoton steigend, deshalb ist $K'(x)$ stets positiv.

b1) $\overline{K}(x) = 0{,}01 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 350 + \frac{20\,000}{x}$

b2) $\overline{K}'(x) = 0$
$\Rightarrow \quad x = 180{,}64\ldots$

Bei einer Produktion von rund 181 ME sind die durchschnittlichen Stückkosten am geringsten.

c1) $a > 0$

c2) $a = 0{,}5$
$c = 15\,000$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Unterschieds.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Stückkostenfunktion.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Produktionsmenge.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Werte.
c2) Ein Punkt für das Bestimmen der beiden richtigen Werte.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Höhe der Schneedecke

Aufgabennummer: 2_FT001	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die Höhe einer Schneedecke nimmt aufgrund von Witterungseinflüssen mit der Zeit ab. Bei gleichbleibender Temperatur kann die Höhe einer Schneedecke bis zur vollständigen Schneeschmelze durch die Funktion h modellhaft beschrieben werden. Dabei gilt:

$h(t) = h_0 - a \cdot t^2$ mit $a > 0$, $t \geq 0$

t … Zeit in Tagen seit Beginn der Messung
h_0 … Höhe der Schneedecke zu Beginn der Messung in cm
$h(t)$ … Höhe der Schneedecke nach t Tagen in cm

Aufgabenstellung:

a) Eine 20 cm hohe Schneedecke ist nach einem halben Tag nur mehr 18 cm hoch.

1) Berechnen Sie, wie viele Tage nach Beginn der Messung die Schneedecke vollständig geschmolzen ist.

2) Beschreiben Sie, wie sich eine Erhöhung des Parameters a auf $h(t)$ auswirkt.

b) In einem Alpendorf gilt für die Höhe der Schneedecke in einem bestimmten Zeitraum $h_0 = 40$ und $a = 5$.

1) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Höhe der Schneedecke in diesem Alpendorf innerhalb der ersten beiden Tage nach Beginn der Messung.

2) Interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

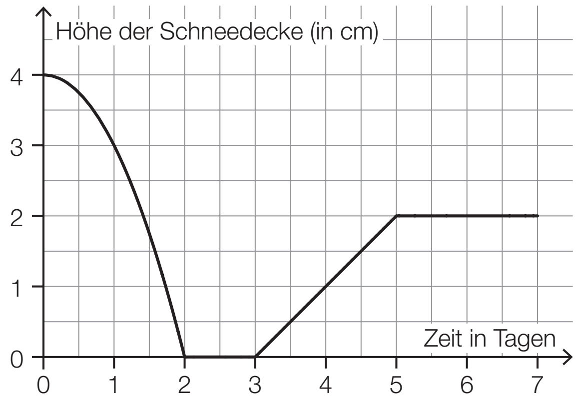
Die Berechnung der Höhe der Schneedecke ist nur in einem bestimmten Zeitintervall sinnvoll.

3) Ergänzen Sie die obere Intervallgrenze für dieses Zeitintervall.

Zeitintervall: [0; __________]

4) Interpretieren Sie $h'(0,5)$ im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe des konkreten Wertes.

c) Nachstehend ist modellhaft die Entwicklung der Höhe der Schneedecke in Zentimetern innerhalb einer Woche in einer bestimmten Stadt abgebildet.



Gerhard behauptet, dass es sich beim Verlauf der Höhe der Schneedecke nicht um den Graphen einer Funktion handelt.

1) Begründen Sie, warum seine Behauptung <u>nicht</u> richtig ist.

Der Graph kann im Intervall [3; 5] durch eine Funktion f mit $f(t) = k \cdot t + d$ beschrieben werden.

2) Geben Sie k und d an.

k = ____

d = ____

3) Beschreiben Sie unter Angabe konkreter Werte die Entwicklung der Höhe der Schneedecke im Intervall [3; 7].

Lösungserwartung

a1) $18 = 20 - a \cdot 0{,}5^2 \quad \Rightarrow \quad a = 8$
$20 - 8 \cdot t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1{,}58\ldots$ Tage

a2) Eine Erhöhung des Parameters a bewirkt, dass die Höhe der Schneedecke schneller abnimmt.

b1) $h(t) = 40 - 5 \cdot t^2$
$\frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{20 - 40}{2} = -10$
Die mittlere Änderungsrate innerhalb der ersten beiden Tage beträgt –10 cm pro Tag.

b2) In den ersten beiden Tagen nimmt die Höhe der Schneedecke durchschnittlich um 10 cm pro Tag ab.

b3) Zeitintervall: $[0; \sqrt{8}]$

b4) $h'(0{,}5) = -5$
Zum Zeitpunkt $t = 0{,}5$ nimmt die Höhe der Schneedecke um 5 cm pro Tag ab.

c1) Der Graph beschreibt den Graphen einer Funktion, da jedem Zeitpunkt t eindeutig eine Schneehöhe $h(t)$ zugeordnet wird.

c2) $k = 1$
$d = -3$

c3) Im Zeitintervall [3; 5] nimmt die Höhe der Schneedecke von 0 cm auf 2 cm zu. Diese Höhe bleibt im Zeitintervall [5; 7] konstant.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
a2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben.

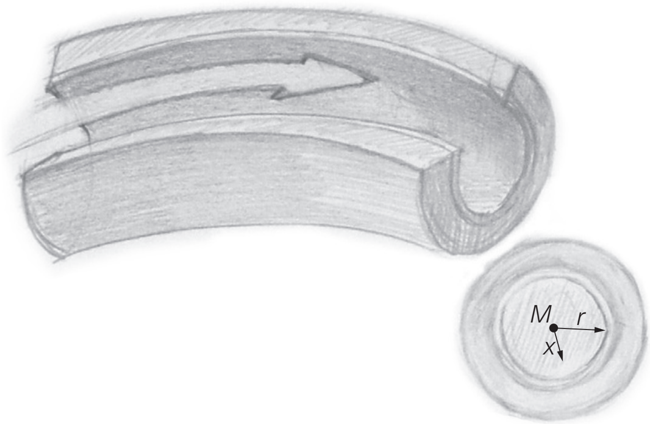
b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
b3) Ein Punkt für das richtige Ergänzen.
b4) Ein Punkt für das richtige Interpretieren unter Angabe des richtigen Wertes.

c1) Ein Punkt für das richtige Erklären.
c2) Ein Punkt für das richtige Angeben der beiden Werte, ein halber Punkt für nur eine richtige Angabe.
c3) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Entwicklung.

Blutgefäß

Aufgabennummer: 2_FT002	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Ein Blutgefäß kann wie in der nachstehenden schematischen Darstellung mit kreisförmiger Querschnittsfläche angenommen werden.



Bildquelle: http://www.gefaesschirurgie-klinik.de/patienteninformationen/arterienverkalkung.php [05.06.2013] (adaptiert).

Die Funktion v mit $v(x) = v_m \cdot \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$ beschreibt modellhaft den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v des Blutteilchens und seinem Abstand x zum Mittelpunkt M der Querschnittsfläche des Blutgefäßes.

Dabei gilt:

M … Mittelpunkt der Querschnittsfläche des Blutgefäßes
r … Innenradius der Querschnittsfläche des Blutgefäßes (in mm)
v_m … maximale Geschwindigkeit des Blutteilchens in M (in cm/s)
x … Abstand des Blutteilchens von M (in mm)
$v(x)$ … Geschwindigkeit des Blutteilchens bei x (in cm/s)

Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für v an.

$D = [$__________ ; __________$)$

b) Bei einem bestimmten Abstand x_1 des Blutteilchens von M beträgt seine Geschwindigkeit 75 % von v_m.

1) Berechnen Sie x_1.

c) 1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für $x(v)$ auf.

$x(v) =$ ________________________________ mit $v \in (0; v_m]$

2) Berechnen Sie in Abhängigkeit von r denjenigen Abstand vom Mittelpunkt des Blutgefäßes, bei dem die Geschwindigkeit des Blutteilchens auf die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit abnimmt.

d) 1) Geben Sie die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit v beim Abstand x an.

2) Beschreiben Sie die Bedeutung des Vorzeichens der momentanen Änderungsrate von $v(x)$ im gegebenen Sachzusammenhang.

Lösungserwartung

a1) $D = [0; r)$

b1) $\frac{3}{4} \cdot v_m = v_m \cdot \left(1 - \frac{x_1^2}{r^2}\right) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{r}{2}$

c1) $x(v) = r \cdot \sqrt{1 - \frac{v}{v_m}}$ mit $v \in (0; v_m]$

c2) $x\left(\frac{v_m}{2}\right) = \frac{r \cdot \sqrt{2}}{2}$

d1) $v'(x) = -v_m \cdot \frac{2 \cdot x}{r^2}$

d2) Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Geschwindigkeit des Blutteilchens bei steigendem Abstand vom Mittelpunkt abnimmt.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Definitionsbereichs.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung.
c2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

d1) Ein Punkt für das Angeben der richtigen momentanen Änderungsrate.
d2) Ein Punkt für das richtige Beschreiben der Bedeutung des Vorzeichens.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Temperaturveränderungen*

Aufgabennummer: 2_106	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Der Vorgang des Abkühlens bzw. Erwärmens eines Getränks kann durch Funktionen modelliert werden. Dabei wird der Zeit t in Minuten die Temperatur des Getränks in °C zugeordnet.

Aufgabenstellung:

a) Das Abkühlen von Tee in einer Teekanne kann durch die Funktion g mit $g(t) = 70 \cdot e^{-0{,}045 \cdot t} + 18$ beschrieben werden.

Zum Zeitpunkt t^* ist die Temperatur des Tees auf 37 °C abgekühlt.

1) Berechnen Sie t^*.

t^* = ____ min

2) Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate von g im Intervall [10 min; 12 min]. Interpretieren Sie das Ergebnis unter Angabe der zugehörigen Einheit im gegebenen Sachzusammenhang.

b) Ein bestimmter gekühlter Wein in einem Weinglas hat eine Anfangstemperatur von $T_0 = 5$ °C. Die Umgebungstemperatur beträgt konstant $U = 25$ °C.
Die Temperatur des Weines wird in regelmäßigen Abständen gemessen. Zum Zeitpunkt t hat sie den Wert T_t.

Pro Minute nimmt die Temperatur des Weines um 8 % der Differenz zwischen der Umgebungstemperatur U und der zum Zeitpunkt t gemessenen Temperatur des Weines T_t zu. Die Temperatur des Weines steigt dabei auf den Wert T_{t+1}.

1) Ergänzen Sie die nachstehende Differenzengleichung für diesen Erwärmungsvorgang.

$T_{t+1} = T_t +$ ____ mit $T_0 = 5$

2) Berechnen Sie die Temperatur des Weines zum Zeitpunkt $t = 3$ min.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $37 = 70 \cdot e^{-0{,}045 \cdot t^*} + 18$

$t^* = 28{,}9\ldots$ min

a2) $\dfrac{g(12) - g(10)}{12 - 10} = -1{,}92\ldots$

Die Temperatur des Tees sinkt im Intervall [10 min; 12 min] durchschnittlich um rund 1,9 °C/min.

b) Lösungserwartung:

b1) $T_{t+1} = T_t + 0{,}08 \cdot (25 - T_t)$

b2) $T_1 = 5 + 0{,}08 \cdot (25 - 5) = 6{,}6$

$T_2 = 6{,}6 + 0{,}08 \cdot (25 - 6{,}6) = 8{,}072$

$T_3 = 8{,}072 + 0{,}08 \cdot (25 - 8{,}072) = 9{,}42624$

$T_3 = 9{,}4\ldots$ °C

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von t^*.

a2) Ein halber Punkt für das richtige Berechnen der mittleren Änderungsrate, ein halber Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der zugehörigen Einheit.

b1) Ein Punkt für das richtige Ergänzen der Differenzengleichung.

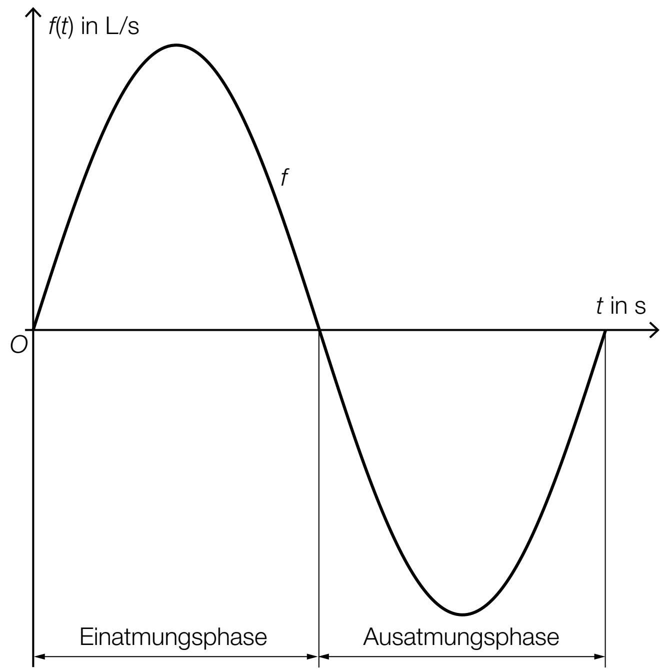
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Temperatur zum Zeitpunkt $t = 3$ min.

Atemstromstärke

Unter *Atemstromstärke* versteht man die pro Zeiteinheit ein- bzw. ausgeatmete Luftmenge. Sie wird modellhaft durch die Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben (t in s, $f(t)$ in L/s).

Für die Atemstromstärke von Mathias gilt modellhaft:
$f(t) = 0{,}5 \cdot \sin(1{,}25 \cdot t)$

Ein Atemzyklus besteht aus einer vollständigen Einatmungsphase und einer vollständigen Ausatmungsphase. Die Beobachtung beginnt bei $t = 0$.
In der nachstehenden Abbildung ist ein Atemzyklus dargestellt.



Aufgabenstellung:

a) In der Ausatmungsphase des betrachteten Atemzyklus von Mathias hat die Funktion f an der Stelle t_1 eine Extremstelle.

1) Ermitteln Sie t_1 (in s).

t_1 = ____________________________ s *[0/1 P.]*

Im betrachteten Atemzyklus gibt t_2 mit $t_2 > 0$ denjenigen Zeitpunkt an, zu dem das Luftvolumen in der Lunge von Mathias erstmals nach Beginn des Atemzyklus minimal ist.

2) Ermitteln Sie t_2 (in s).

t_2 = ____________________________ s *[0/1 P.]*

b) Zu Beginn einer Einatmungsphase befinden sich 3,5 Liter Luft in der Lunge von Mathias.

1) Interpretieren Sie die nachstehende Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

$\int_0^{2,5} f(t)\,\mathrm{d}t + 3{,}5 \approx 4{,}29$ *[0/1 P.]*

Die Funktion V beschreibt das Volumen $V(t)$ der eingeatmeten Luft von Mathias während einer Einatmungsphase in Abhängigkeit von der Zeit t (Beginn der Einatmungsphase bei $t = 0$ und $V(0) = 0$, t in s, $V(t)$ in L).

2) Ergänzen Sie die beiden fehlenden Zahlen in der nachstehenden Funktionsgleichung von V.

$V(t) = -0{,}4 \cdot \cos($ ____________________ $\cdot t) +$ ____________________ *[0/½/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $t_1 = \frac{6 \cdot \pi}{5} = 3{,}76...$

$t_1 = 3{,}76...$ s

a2) $t_2 = \frac{8 \cdot \pi}{5} = 5{,}02...$

$t_2 = 5{,}02...$ s

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_1.
a2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln von t_2.

b1) 2,5 s nach Beginn der Einatmungsphase befinden sich rund 4,29 Liter Luft in der Lunge von Mathias.

b2) $V(t) = -0{,}4 \cdot \cos(1{,}25 \cdot t) + 0{,}4$

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das Ergänzen der beiden richtigen Zahlen, ein halber Punkt für nur eine richtige Zahl.

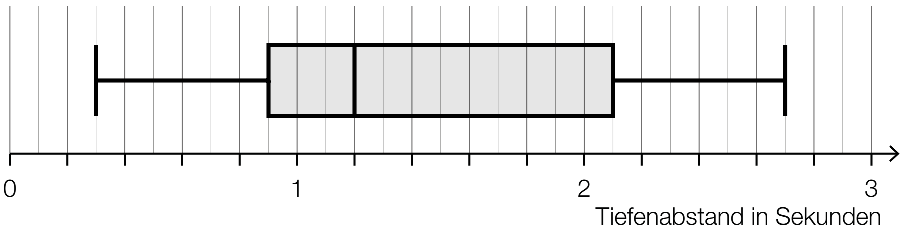
Abstandsmessung*

Aufgabennummer: 2_035	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, FA 2.1, WS 1.1, WS 1.3, WS 1.4, WS 3.2	

Im Rahmen der polizeilichen Kontrollmaßnahmen des öffentlichen Verkehrs werden Abstandsmessungen vorgenommen. Im Folgenden beschreibt der Begriff *Abstand* eine Streckenlänge und der Begriff *Tiefenabstand* eine Zeitspanne.

Beträgt der Abstand zwischen dem hinteren Ende des voranfahrenden Fahrzeugs und dem vorderen Ende des nachfahrenden Fahrzeugs Δs Meter, so versteht man unter dem Tiefenabstand diejenige Zeit t in Sekunden, in der das nachfahrende Fahrzeug die Strecke der Länge Δs zurücklegt.

Nachstehend sind Tiefenabstände, die im Rahmen einer Schwerpunktkontrolle von 1 000 Fahrzeugen ermittelt wurden, in einem Kastenschaubild (Boxplot) dargestellt. Alle kontrollierten Fahrzeuge waren mit einer Geschwindigkeit von ca. 130 km/h unterwegs.



Aufgabenstellung:

a) Geben Sie das erste Quartil q_1 und das dritte Quartil q_3 der Tiefenabstände an und deuten Sie den Bereich von q_1 bis q_3 im gegebenen Kontext!

Nach den Erfahrungswerten eines österreichischen Autofahrerclubs halten ungefähr drei Viertel der Kraftfahrer/innen bei einer mittleren Fahrgeschwindigkeit von ca. 130 km/h einen Abstand von mindestens 30 Metern zum voranfahrenden Fahrzeug ein. Geben Sie an, ob die im Kastenschaubild dargestellten Daten in etwa diese Erfahrungswerte bestätigen oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

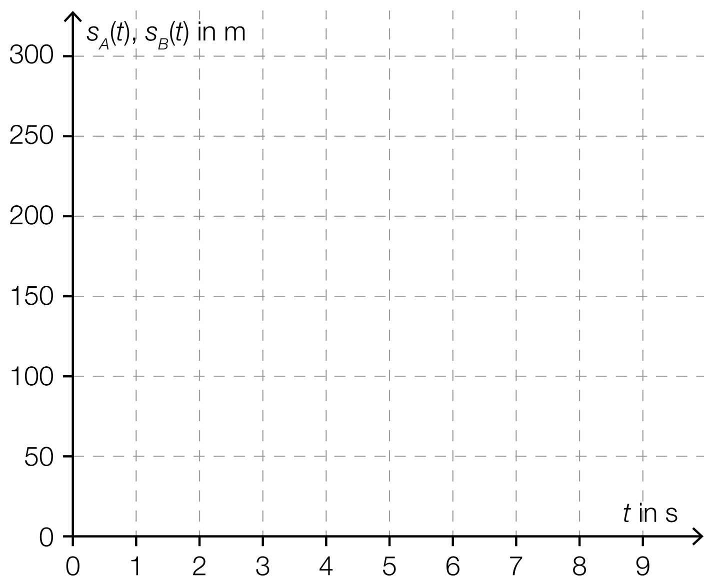
b) Einer üblichen Faustregel zufolge wird auf Autobahnen generell ein Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden empfohlen. Jemand behauptet, dass aus dem dargestellten Kastenschaubild ablesbar ist, dass mindestens 20 % der Kraftfahrer/innen diesen Tiefenabstand eingehalten haben. Geben Sie einen größeren Prozentsatz an, der aus dem Kastenschaubild mit Sicherheit abgelesen werden kann, und begründen Sie Ihre Wahl!

Nehmen Sie den von Ihnen ermittelten Prozentsatz als Wahrscheinlichkeit an, dass der empfohlene Tiefenabstand eingehalten wird.
Geben Sie an, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei zehn zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Messungen dieser Schwerpunktkontrolle zumindest sechs Mal der empfohlene Tiefenabstand von mindestens zwei Sekunden eingehalten wurde!

c) Bei einer anderen Abstandsmessung wird ein kontrolliertes Fahrzeug auf den letzten 300 Metern vor der Messung zusätzlich gefilmt, damit die Messung nicht verfälscht wird, wenn sich ein anderes Fahrzeug vor das kontrollierte Fahrzeug drängt.

Fahrzeug *A* fährt während des Messvorgangs mit konstanter Geschwindigkeit und benötigt für die gefilmten 300 Meter eine Zeit von neun Sekunden. Stellen Sie den zurückgelegten Weg $s_A(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t im unten stehenden Zeit-Weg-Diagramm dar ($s_A(t)$ in Metern, t in Sekunden) und geben Sie an, mit welcher Geschwindigkeit in km/h das Fahrzeug unterwegs ist!

Ein Fahrzeug *B* legt die 300 Meter ebenfalls in neun Sekunden zurück, verringert dabei aber kontinuierlich seine Geschwindigkeit. Skizzieren Sie ausgehend vom Ursprung einen möglichen Graphen der entsprechenden Zeit-Weg-Funktion s_B in das unten stehende Zeit-Weg-Diagramm!



Lösungserwartung

a) $q_1 = 0{,}9$
$q_3 = 2{,}1$
Etwa die Hälfte der kontrollierten Fahrzeuge halten einen Tiefenabstand von mindestens 0,9 Sekunden und höchstens 2,1 Sekunden ein.

Die im Kastenschaubild dargestellten Daten bestätigen in etwa diese Erfahrungswerte.

Mögliche Begründung:

130 km/h = $36{,}\dot{1}$ m/s
$36{,}\dot{1}$ m/s · 0,9 s = 32,5 m $\Rightarrow$ Mindestens drei Viertel der Kraftfahrer/innen halten einen Abstand von 30 m und mehr ein.

b) ein möglicher größerer Prozentsatz: 25 %

Mögliche Begründung:

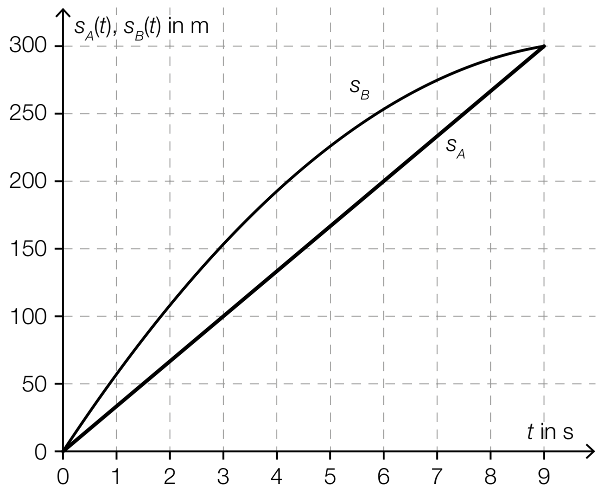
Der Tiefenabstand von zwei Sekunden liegt zwischen dem Median und dem dritten Quartil.

Mögliche Vorgehensweise:

Zufallsvariable X = Anzahl der Kraftfahrlenker/innen, die den empfohlenen Mindestabstand eingehalten haben

$p = 0{,}25$ ... Wahrscheinlichkeit, dass der empfohlene Mindestabstand eingehalten wurde
$n = 10$ ... Anzahl der ausgewählten Messungen
$P(X \geq 6) \approx 0{,}0197$

c) Fahrzeug A fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.



Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
– Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) – Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Wertes und eine korrekte Begründung.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall: (20 %; 25 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung für den von der Kandidatin/vom Kandidaten gewählten Wert richtig sein muss. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Darstellung von s_A.
– Ein Punkt für eine korrekte Skizze eines möglichen Graphen von s_B.

Kugelstoßen

Aufgabennummer: 2_070	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AG 4.1, FA 2.1, FA 4.3	

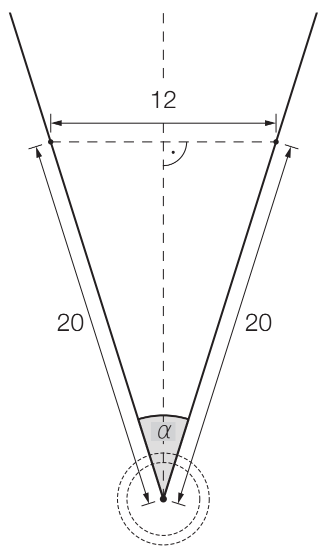
**Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen.
Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden.**

a) Im Jahr 1948 wurde bei den Männern ein neuer Weltrekord mit der Weite 17,68 m aufgestellt.

Eine Faustregel besagt, dass sich seit 1948 der Weltrekord bei den Männern alle 2,5 Jahre um 34 cm verbessert hat. Die Weltrekordweite (in Metern) soll gemäß dieser Faustregel in Abhängigkeit von der Zeit *t* (in Jahren) durch eine lineare Funktion *f* beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion *f*. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1948.

b) Der Aufschlagbereich ist in der nachstehenden Abbildung in der Ansicht von oben dargestellt (alle Angaben in Metern).



1) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung markierten Winkel α.

c) Die Bahnkurve einer gestoßenen Kugel lässt sich näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion h beschreiben:

$h(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2$ mit $x \geq 0$

x ... horizontale Entfernung der Kugel von der Abstoßstelle in m
$h(x)$ ... Höhe der Kugel über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung von der Abstoßstelle die Kugel auf dem Boden aufschlägt.

d) Für die bei den Männern verwendeten Kugeln gelten folgende Vorgaben:

- Die Masse beträgt 7 257 g.
- Der Durchmesser der Kugel liegt zwischen 11 cm und 13 cm.

Eine Messing-Eisen-Legierung hat eine Dichte von 8,2 g/cm³.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ϱ, also $m = V \cdot \varrho$.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob man aus dieser Messing-Eisen-Legierung eine Kugel herstellen kann, die diese Vorgaben erfüllt.

Lösungserwartung

a1) Steigung k der linearen Funktion f: $k = \frac{0,34}{2,5} = 0,136$

$f(t) = 0,136 \cdot t + 17,68$

t ... Zeit in Jahren
$f(t)$ ... Weltrekordweite zur Zeit t in m

b1) $\alpha = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{6}{20}\right) = 34,915...° \approx 34,92°$

c1) $h(x) = 0$

oder:

$-0,05 \cdot x^2 + 0,75 \cdot x + 2 = 0$

$x_1 = 17,310...$
$(x_2 = -2,310...)$
Die Kugel schlägt in einer horizontalen Entfernung von rund 17,31 m auf dem Boden auf.

d1) $7\,257 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \cdot 8,2$

$r = \sqrt[3]{\frac{7\,257 \cdot 3}{8,2 \cdot 4 \cdot \pi}} = 5,95...$

$d = 2 \cdot r = 11,91...$
Der Durchmesser einer derartigen Kugel beträgt rund 11,9 cm und liegt im angegebenen Bereich.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Exponentialfunktion und lineare Funktion*

Aufgabennummer: 2_049	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 2.3, AN 1.3, AN 3.3, AN 4.2, AN 4.3	

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$.

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist eine lineare Funktion $g_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_1(x) = k \cdot x + 2$ und $k \in \mathbb{R}$.

Geben Sie alle $k \in \mathbb{R}$ an, für die die Graphen von f und g_1 einander in genau zwei Punkten schneiden!

Für ein solches k beschreibt die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = g_1(x) - f(x)$ die Differenz von g_1 und f. Für eine Stelle x_0 zwischen den beiden Schnittpunkten der Graphen gilt die Beziehung $h'(x_0) = 0$.

Bestimmen Sie x_0 in Abhängigkeit von k!

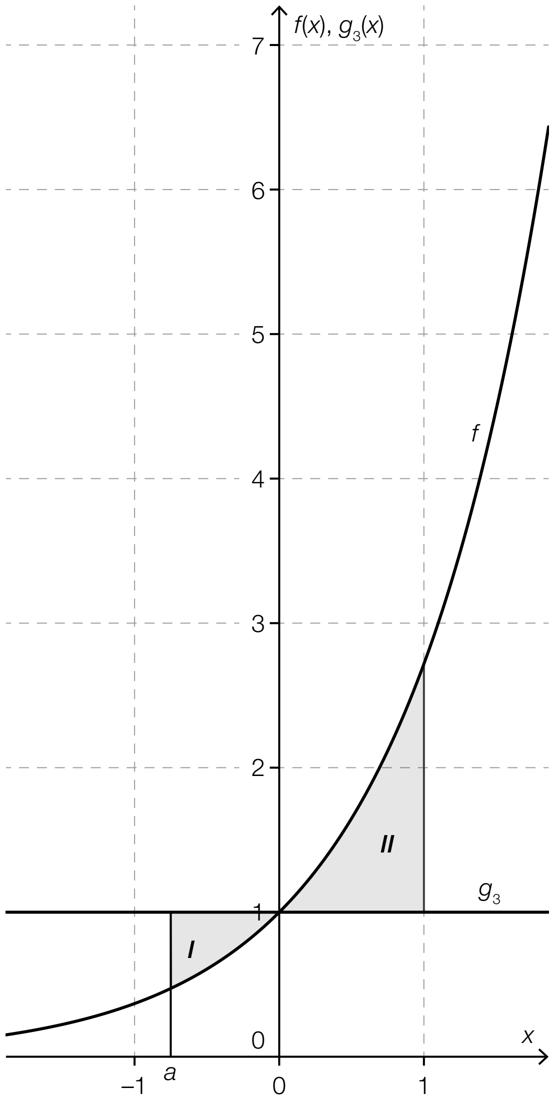
b) Der Graph einer linearen Funktion $g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_2(x) = 4 \cdot x + d$ und $d \in \mathbb{R}$ ist eine Tangente an den Graphen von f.

Geben Sie die Koordinaten des Berührpunkts B der beiden Graphen an!

Geben Sie den Wert von d an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

c) Gegeben ist die Funktion $g_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g_3(x) = 1$.
Die von den beiden Graphen von g_3 und f im Intervall $[a; 0]$ (mit $a \in \mathbb{R}$ und $a < 0$) eingeschlossene Fläche ***I*** hat den Flächeninhalt A_1. Die von den beiden Graphen von f und g_3 im Intervall $[0; 1]$ eingeschlossene Fläche ***II*** hat den Flächeninhalt A_2.



Berechnen Sie den Flächeninhalt A_2!

Drücken Sie das bestimmte Integral $\int_a^1 (f(x) - g_3(x))\,dx$ durch die Flächeninhalte A_1 und A_2 aus!

Lösungserwartung

a) $k \in \mathbb{R}^+$

mögliche Vorgehensweise:

$h(x) = g_1(x) - f(x) = k \cdot x + 2 - e^x$
$h'(x) = k - e^x$
$h'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad k - e^{x_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \ln(k)$

b) mögliche Vorgehensweise:

$B = (x_B \,|\, f(x_B))$
$f'(x_B) = 4$
$e^{x_B} = 4 \quad \Rightarrow \quad x_B = \ln(4)$
$f(x_B) = e^{\ln(4)} = 4$
$B = (\ln(4) \,|\, 4)$

$4 = 4 \cdot \ln(4) + d \quad \Rightarrow \quad d = 4 - 4 \cdot \ln(4) \approx -1{,}545$

c) $A_3 = \int_0^1 (e^x - 1)\,\mathrm{d}x = e - 2$

$\int_a^1 (f(x) - g_3(x))\,\mathrm{d}x = A_2 - A_1$

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Koordinaten.
Toleranzintervall für x_B: [1,3; 1,4]
Toleranzintervall für $f(x_B)$: [3,6; 4,1]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für d: [–2,0; –1,1]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) – Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei bereits die Angabe $\int_0^1 (e^x - 1)\,dx$ als richtig zu werten ist.
Toleranzintervall: [0,70; 0,72]
– Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

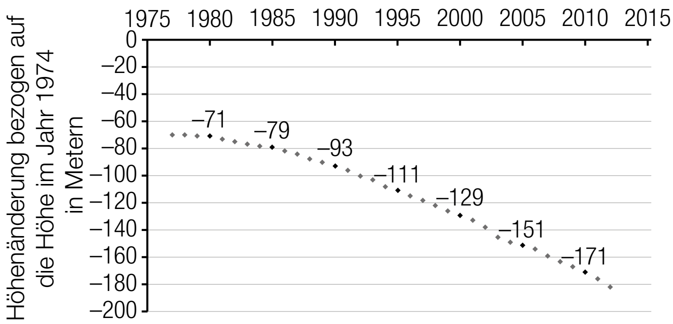
Pasterze*

Aufgabennummer: 2_055	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 2.2, FA 2.5, WS 1.1	

Die Pasterze ist der größte Gletscher Österreichs. Sie befindet sich im Großglockner-Massiv.

Aufgabenstellung:

a) Im nachstehenden Diagramm ist die Höhenänderung der Pasterze in Metern jeweils bezogen auf die Höhe im Jahr 1947 dargestellt.



Datenquelle: http://geographie.uni-graz.at/de/pasterze/messergebnisse/ [23.08.2014].

Auf Basis der Daten für die Höhenänderung der Pasterze für die Jahre 1995 und 2010 soll mithilfe eines linearen Modells eine Prognose für das Jahr 2020 erstellt werden.

1) Bestimmen Sie, um wie viele Meter die Höhe der Pasterze nach diesem Modell im Jahr 2020 geringer als im Jahr 1947 ist.

In einem Werbeprospekt soll der Rückgang der Höhe der Pasterze durch ein lineares Modell dargestellt werden.

2) Geben Sie an, welcher der im oben angeführten Diagramm dargestellten Fünfjahreszeiträume [1980; 1985], [1985; 1990], … , [2005; 2010] für die Zukunft die geringste Höhenänderung prognostiziert.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

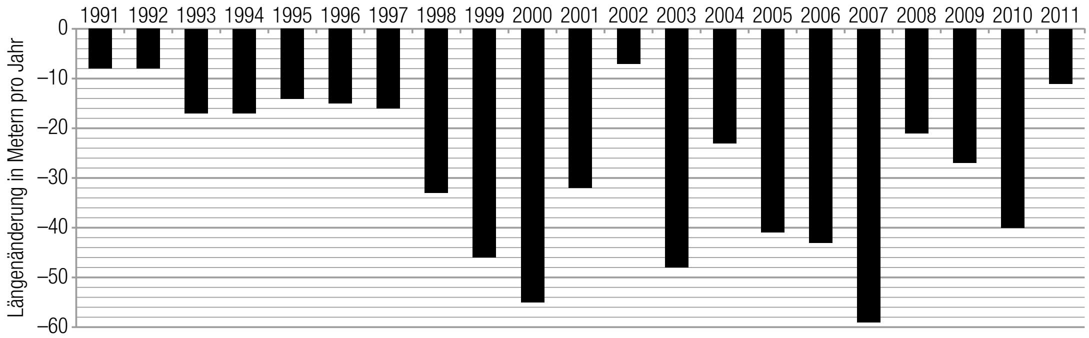
b) Die Fläche der Pasterze, die im Jahr 1856 rund 30 km^2 ausgemacht hat, ging bis zum Jahr 2006 auf ca. die Hälfte zurück. Das Eisvolumen der Pasterze betrug im Jahr 2006 ca. 1,7 km^3.
Eine mögliche Vorgehensweise für die Berechnung eines Näherungswerts für das Eisvolumen der Pasterze im Jahr 1856 ist, davon auszugehen, dass die Ausdehnung des Eises in allen drei Raumrichtungen um den gleichen Faktor abnimmt. Diese vereinfachende Annahme bedeutet, dass der Gletscher im Jahr 2006 eine maßstäbliche Verkleinerung des Gletschers aus dem Jahr 1856 ist.

1) Geben Sie an, welcher Näherungswert sich für das Eisvolumen (in km^3) der Pasterze im Jahr 1856 bei dieser Vorgehensweise ergibt.

Bei 0 °C schmilzt Eis zu Wasser. Mit diesem Phasenübergang geht eine Verminderung des Volumens um 8,2 % einher. Dieser Phasenübergang kann auch umgekehrt betrachtet werden, also dass bei 0 °C Wasser zu Eis gefriert.

2) Geben Sie an, welche relative Änderung des Volumens mit diesem Phasenübergang (Wasser zu Eis) einhergeht.

c) Im Zeitraum von 1991 bis 2011 wurde eine Abnahme der Länge der Pasterze festgestellt. Im nachstehenden Diagramm ist die jeweils jährliche Veränderung der Länge der Pasterze in Metern pro Jahr im Zeitraum von 1991 bis 2011 dargestellt.



Datenquelle: http://geographie.uni-graz.at/de/pasterze/messergebnisse/laengenaenderung/ [01.09.2014].

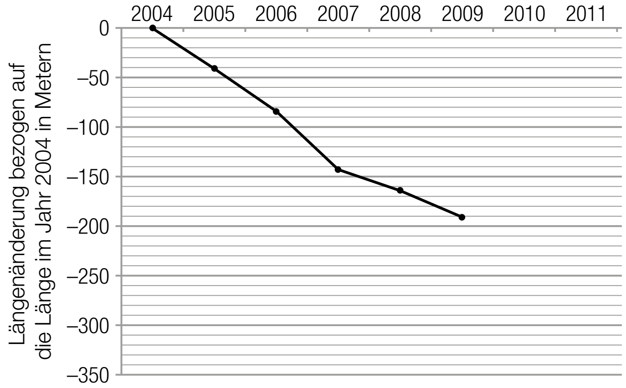
1) Ergänzen Sie die Textlücken im folgenden Satz durch Ankreuzen des jeweils richtigen Satzteils so, dass eine korrekte Aussage entsteht.

Im Zeitraum von 1993 bis 1997 ______①______, weil die Längenänderung pro Jahr ______②______.

①	
bleibt die Länge der Pasterze annähernd unverändert	☐
nimmt die Länge der Pasterze annähernd linear ab	☐
nimmt die Länge der Pasterze zwischendurch zu	☐

②	
in allen fünf Jahren einen negativen Wert annimmt	☐
im Jahr 1995 geringer als im Jahr 1994 ist	☐
in diesem Zeitraum annähernd konstant ist	☐

Im nachstehenden Diagramm ist die Längenänderung der Pasterze in Metern jeweils bezogen auf die Länge im Jahr 2004 für die Jahre 2004 bis 2009 dargestellt.



2) Ergänzen Sie im obigen Diagramm die Werte für die Jahre 2010 und 2011.

Lösungserwartung

a1) mögliche Vorgehensweise:

Wert 1995: –111 m
Wert 2010: –171 m
daher: durchschnittlicher Rückgang von 4 m pro Jahr

$171 + 4 \cdot 10 = 211$
Im Jahr 2020 wird die Höhe der Pasterze nach diesem Modell um 211 m geringer als im Jahr 1947 sein.

a2) Der Zeitraum [1980; 1985] prognostiziert für die Zukunft die geringste Höhenänderung.

b1) mögliche Vorgehensweise:

Fläche der Pasterze 1856 : Fläche der Pasterze 2006 = 2 : 1
Daraus ergibt sich ein Verhältnis der Längen $\sqrt{2} : 1$ bzw. der Volumina $(\sqrt{2})^3 : 1 \approx 2{,}828 : 1$.

$2{,}828 \cdot 1{,}7 \approx 4{,}81\ \text{km}^3$

Das Eisvolumen der Pasterze im Jahr 1856 betrug dieser vereinfachten Annahme nach ca. $4{,}81\ \text{km}^3$.

b2) Phasenübergang von Eis zu Wasser (bei 0 °C): Verminderung des Volumens um 8,2 %

Phasenübergang von Wasser zu Eis (bei 0 °C):
$V_{Wasser} = 0{,}918 \cdot V_{Eis} \Rightarrow V_{Eis} \approx 1{,}089 \cdot V_{Wasser}$

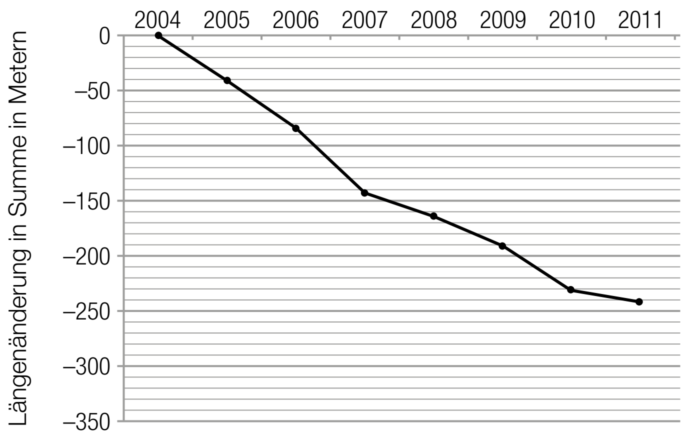
Das heißt, der Phasenübergang von Wasser zu Eis geht mit einer Vergrößerung des Volumens um ca. 8,9 % einher.

c1)

①	
nimmt die Länge der Pasterze annähernd linear ab	☒

②	
in diesem Zeitraum annähernd konstant ist	☒

c2)



Längenänderung der Pasterze bezogen auf ihre Länge im Jahr 2004

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m" nicht angeführt sein muss.
a2) Ein Ausgleichspunkt für das richtige Intervall.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „km^3" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [4,7 km^3; 5,0 km^3]
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [8,7 %; 9,0 %] bzw. [0,087; 0,090]

c1) Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn für jede der beiden Lücken ausschließlich der laut Lösungserwartung richtige Satzteil angekreuzt ist.
c2) Ein Punkt für die Ergänzung der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für den Wert bei 2010: [–240; –220]
Toleranzintervall für den Wert bei 2011: [–260; –230]

Hurrikans – tropische Wirbelstürme

Die *Saffir-Simpson-Hurrikan-Skala* teilt Hurrikans anhand ihrer Windgeschwindigkeit in fünf Kategorien – von Kategorie 1 (schwach) bis Kategorie 5 (verwüstend) – ein.

Aufgabenstellung:

a) Den einzelnen Hurrikan-Kategorien dieser Skala sind unterschiedliche Schadenspotenziale zugeordnet, die den verursachten Schaden beschreiben:

Hurrikan-Kategorie	1	2	3	4	5
Schadenspotenzial	1	10	50	250	500

Datenquelle: Pielke Jr., Roger A. und Christopher W. Landsea: Normalized Hurricane Damages in the United States: 1925–95. In: *Weather and Forecasting* 13(3) (1998), S. 621–631.

1) Weisen Sie unter Verwendung der Werte aus der Tabelle nach, dass der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial nicht linear und auch nicht exponentiell ist. *[0/½/1 P.]*

b) Im 45-jährigen Zeitraum von 1972 bis 2016 traten 110 *Große Hurrikans* auf (das sind Hurrikans, die auf der Saffir-Simpson-Hurrikan-Skala in eine der Kategorien 3, 4 und 5 fallen).

Für den Zeitraum von 1972 bis 2016 wird die Anzahl aller Hurrikans pro Jahr untersucht.

$\bar{x}$ ... arithmetisches Mittel der Anzahl aller Hurrikans pro Jahr
h ... relativer Anteil der Großen Hurrikans an der Gesamtzahl aller Hurrikans von 1972 bis 2016

1) Stellen Sie unter Verwendung von $\bar{x}$ eine Formel zur Berechnung von h auf.

$h =$ ______________________________ *[0/1 P.]*

Die nachstehende Tabelle gibt einen Überblick über die Anzahl aller Hurrikans pro Jahr für den Zeitraum von 1972 bis 2016.

Anzahl aller Hurrikans pro Jahr	Anzahl der Jahre
0 bis 2	2
3 bis 5	20
6 bis 8	14
9 bis 11	7
12 bis 14	1
15 bis 17	1

Datenquelle: Landsea, Christopher W., Gabriel A. Vecchi et al.: Impact of Duration Thresholds on Atlantic Tropical Cyclone Counts. In: *Journal of Climate* 23(10) (2010), S. 2508–2519.

Eine exakte Berechnung des arithmetischen Mittels $\bar{x}$ der Anzahl aller Hurrikans pro Jahr ist anhand der in der obigen Tabelle zusammengefassten Daten nicht möglich. Mithilfe der Klassenmitten aus der linken Spalte kann jedoch ein Näherungswert für $\bar{x}$ berechnet werden. Dabei wird z. B. für „9 bis 11" als Klassenmitte der Wert 10 verwendet.

2) Berechnen Sie diesen Näherungswert für $\bar{x}$.

Näherungswert für $\bar{x}$: ______________________________ *[0/1 P.]*

c) Windgeschwindigkeiten werden oft in Kilometern pro Stunde (km/h) oder Knoten (kn) angegeben.
Es gilt:
1 kn = 1,852 km/h

Zwischen der Windgeschwindigkeit v (in km/h) und der Windgeschwindigkeit v_k (in kn) besteht ein direkt proportionaler Zusammenhang.

1) Stellen Sie eine Gleichung auf, die diesen Zusammenhang beschreibt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) S_i ... Schadenspotenzial bei der Hurrikan-Kategorie i
$S_2 = S_1 + 9,\ S_3 = S_2 + 40$
Die absolute Änderung des Schadenspotenzials für zwei aufeinanderfolgende Kategorien ist nicht konstant.
Der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial ist nicht linear.

$S_2 = S_1 \cdot 10,\ S_3 = S_2 \cdot 5$
Die relative Änderung des Schadenspotenzials für zwei aufeinanderfolgende Kategorien ist nicht konstant.
Der Zusammenhang zwischen der Hurrikan-Kategorie und dem Schadenspotenzial ist nicht exponentiell.

a1) Ein Punkt für das richtige Nachweisen bei beiden Zusammenhängen, ein halber Punkt bei nur einem richtig nachgewiesenen Zusammenhang.

b1) $h = \frac{110}{45 \cdot \bar{x}}$

b2) Näherungswert für $\bar{x}$: $\frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot 20 + 7 \cdot 14 + 10 \cdot 7 + 13 \cdot 1 + 16 \cdot 1}{45} = 6{,}2$

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Formel.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Näherungswerts für $\bar{x}$.

c1) $v = 1{,}852 \cdot v_k$

oder:

$v_k = 0{,}539... \cdot v$

c1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

Speichermedien*

Aufgabennummer: 2_108	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

In den letzten Jahrzehnten wurden verschiedene Speichermedien, wie zum Beispiel Speicherkarten, USB-Sticks oder DVDs, für die Sicherung von Daten verwendet.

Aufgabenstellung:

a) Die Speicherkapazität eines Speichermediums kann unter anderem in Kilobyte, Megabyte bzw. Gigabyte angegeben werden. Die Vorsilben *Kilo*-, *Mega*-, *Giga*- werden dabei wie folgt verwendet:
1 Megabyte = 1 024 Kilobyte
1 Gigabyte = 1 024 Megabyte

Eine bestimmte Speicherkarte mit einer Speicherkapazität von 16 Gigabyte wird zum Speichern von Fotos verwendet. Modellhaft wird angenommen, dass alle gespeicherten Fotos den gleichen Bedarf an Speicherplatz haben.
Die Funktion $N: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ordnet dem Bedarf an Speicherplatz F für ein Foto die größtmögliche Anzahl $N(F)$ der auf dieser Speicherkarte speicherbaren Fotos zu (F in Kilobyte).

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von N auf.

$N(F) =$ ____

b) Michael hat 4 USB-Sticks mit den Bezeichnungen A, B, C und D.

- Auf USB-Stick A speichert er alle seine Fotos ab.
- Auf den 3 anderen USB-Sticks, B, C und D, speichert er zur Sicherung jeweils genau ein Drittel seiner Fotos so ab, dass jedes Foto zusätzlich auf genau 1 dieser 3 USB-Sticks gespeichert ist.

Für jeden der 4 USB-Sticks ist (jeweils unabhängig voneinander) die Wahrscheinlichkeit 75 %, dass er 5 Jahre lang funktionstüchtig bleibt.

Es wird vereinfacht angenommen, dass ein USB-Stick entweder vollständig funktionstüchtig ist oder gar nicht funktioniert.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nach 5 Jahren noch jedes von Michaels Fotos auf mindestens 1 USB-Stick verfügbar ist.

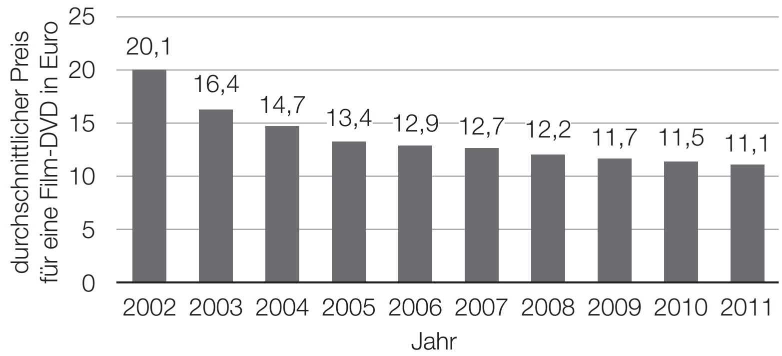
* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 17. September 2021

Michael stellt nach 5 Jahren fest, dass USB-Stick A nicht mehr funktionstüchtig ist.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zumindest 2 der 3 USB-Sticks B, C und D funktionstüchtig sind.

c) Ein beliebtes Speichermedium für Filme ist die DVD.

Seit Anfang des 21. Jahrhunderts hat der durchschnittliche Preis für Film-DVDs abgenommen, wie das nachstehende Diagramm zeigt.



Datenquelle: https://www.mkdiscpress.de/ratgeber/chronik-der-speichermedien/ [20.11.2019].

Der durchschnittliche Preis für eine Film-DVD wird durch die Funktion P in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert.

$P(t) = a \cdot b^t + 11$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2002
$P(t)$ ... durchschnittlicher Preis für eine Film-DVD zur Zeit t in Euro

1) Ermitteln Sie a und b so, dass P für die Jahre 2002 und 2011 den durchschnittlichen Preis für eine Film-DVD im jeweiligen Jahr laut obigem Diagramm ergibt.

a = ____

b = ____

Lösungserwartung

a) Lösungserwartung:

a1) $N(F) = \frac{16 \cdot 1\,024 \cdot 1\,024}{F} = \frac{16\,777\,216}{F}$

b) Lösungserwartung:

b1) $0{,}75 + 0{,}25 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}855...$

b2) $0{,}75^3 + 3 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}843...$

c) Lösungserwartung:

c1) $P(0) = 20{,}1 \quad \Rightarrow \quad a + 11 = 20{,}1$
$P(9) = 11{,}1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b^9 + 11 = 11{,}1$
$a = 9{,}1$
$b = \sqrt[9]{\frac{0{,}1}{9{,}1}} = 0{,}60579...$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von N, wobei auch jeder Hinweis auf das Abrunden von $N(F)$ auf die nächstkleinere ganze Zahl als richtig zu werten ist.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Körper mit rechteckigen Querschnittsflächen*

Aufgabennummer: 2_050	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, FA 2.1, FA 4.1, FA 4.3, AN 1.3, AN 4.3	

Die nachstehenden Abbildungen 1 und 2 stellen einen Körper mit ebenen Seitenflächen im Schrägriss bzw. eine Schnittfläche dar.

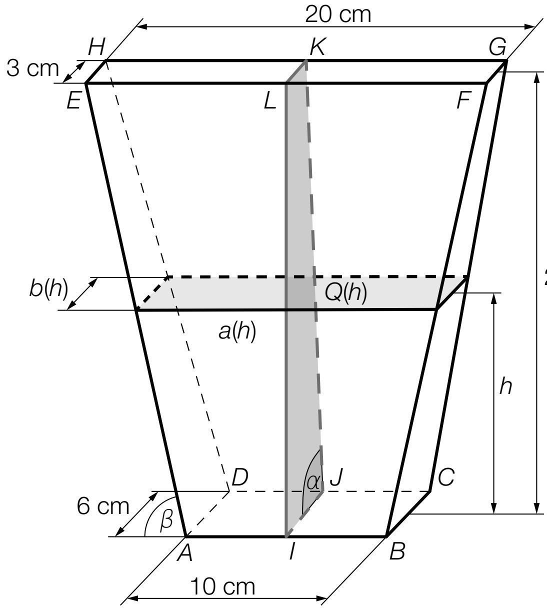


Abbildung 1: Schrägriss des Körpers

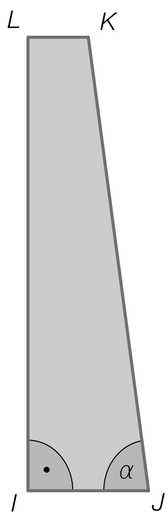


Abbildung 2: Schnittfläche *IJKL*

Die vordere Seitenfläche *ABFE* steht normal auf die horizontale Grundfläche *ABCD* und auf die horizontale Deckfläche *EFGH*, während die hintere Seitenfläche *DCGH* zur Grundfläche unter dem Winkel α ($0° < \alpha < 90°$) geneigt ist.

Die beiden Seitenflächen *ADHE* und *BCGF* weisen gegenüber der Grundfläche den gleichen Neigungswinkel β (mit $\beta \approx 76°$) auf.

Die horizontalen Querschnittsflächen des Körpers sind in jeder Höhe rechteckig. Die Längen $a(h)$ und die Breiten $b(h)$ dieser Rechtecke ändern sich linear in Abhängigkeit von der Höhe h. Die Grundfläche hat eine Länge von 10 cm und eine Breite von 6 cm, die Deckfläche hat eine Länge von 20 cm und eine Breite von 3 cm. Die Höhe des Körpers beträgt 20 cm.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 8. Mai 2019

Aufgabenstellung:

a) Die Funktion $Q: [0; 20] \to \mathbb{R}$ beschreibt die Größe der Querschnittsfläche $Q(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h (mit $Q(h)$ in cm², h in cm).

Es gilt: $Q(h) = s \cdot h^2 + 1{,}5 \cdot h + t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Werte von s und t!

Berechnen Sie das Volumen des Körpers und geben Sie das Ergebnis inklusive Einheit an!

b) Die lokale Änderungsrate der Breite $b(h)$ nimmt für jedes $h \in [0; 20]$ einen konstanten Wert $c \in \mathbb{R}$ an.

Berechnen Sie c!

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen c und α mithilfe einer Gleichung!

c) Die Funktion a beschreibt die Länge $a(h)$ in der Höhe h mit $a(h)$ und h in cm.

Geben Sie eine Funktionsgleichung von a an!

Ändert man den Winkel β auf 45° und lässt die Länge der Grundlinie AB und die Körperhöhe unverändert, so erhält man eine neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1, bei der die Funktion a_1 mit $a_1(h) = 2 \cdot h + 10$ die Länge $a_1(h)$ in der Höhe h beschreibt ($a_1(h)$ und h in cm).

Geben Sie das Verhältnis $\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h : \int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h$ an und interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf die neue vordere Seitenfläche ABF_1E_1 und die ursprüngliche vordere Seitenfläche $ABFE$!

Lösungserwartung

a) mögliche Vorgehensweise:

$Q(0) = 60 \quad \Rightarrow \quad t = 60$

$Q(20) = 60 \quad \Rightarrow \quad 60 = 400 \cdot s + 90 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{3}{40}$

$$V = \int_0^{20} Q(h)\,\mathrm{d}h = -\frac{1}{40} \cdot 20^3 + 0{,}75 \cdot 20^2 + 60 \cdot 20 = 1\,300 \text{ cm}^3$$

b) $c = \frac{3-6}{20} = -\frac{3}{20}$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{c}$

c) mögliche Vorgehensweise:

$a(h) = \frac{a(20) - a(0)}{20} \cdot h + a(0)$

$a(h) = \frac{1}{2} \cdot h + 10$

mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^{20} (2 \cdot h + 10)\,\mathrm{d}h = 600$$

$$\int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h = \int_0^{20} \left(\frac{1}{2} \cdot h + 10\right)\mathrm{d}h = 300$$

$$\int_0^{20} a_1(h)\,\mathrm{d}h : \int_0^{20} a(h)\,\mathrm{d}h = 600 : 300 = 2 : 1$$

Das Verhältnis des Flächeninhalts der neuen Seitenwand ABF_1E_1 zum Flächeninhalt der ursprünglichen Seitenwand $ABFE$ ist 2 : 1.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
Toleranzintervall für s: [–0,08; –0,07]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung unter Angabe einer richtigen Einheit.
Toleranzintervall: [1 280 cm^3; 1 320 cm^3]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [–0,2; –0,1]
– Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.

c) – Ein Punkt für eine richtige Gleichung. Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine richtige Interpretation.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Kostenfunktion*

Aufgabennummer: 2_052	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.6, FA 4.1, FA 4.3, AN 3.3	

Ein Hersteller interessiert sich für die monatlich anfallenden Kosten bei der Produktion eines bestimmten Produkts. Die Produktionskosten für dieses Produkt lassen sich in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x (in Mengeneinheiten, ME) durch eine Polynomfunktion dritten Grades K mit $K(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^3 - 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 0{,}2405 \cdot x + 42$ modellieren ($K(x)$ in Geldeinheiten, GE).

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie für dieses Produkt den durchschnittlichen Kostenanstieg pro zusätzlich produzierter Mengeneinheit im Intervall [100 ME; 200 ME].

2) Ermitteln Sie, ab welcher Produktionsmenge die Grenzkosten steigen.

b) Die Produktionsmenge x_{opt}, für die die Stückkostenfunktion $\overline{K}$ mit $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x}$ minimal ist, heißt Betriebsoptimum zur Kostenfunktion K.

1) Ermitteln Sie das Betriebsoptimum x_{opt}.

Der Hersteller berechnet die Produktionskosten für die Produktionsmenge x_{opt}. Dabei stellt er fest, dass diese Kosten 65 % seines für die Produktion dieses Produkts verfügbaren Kapitals ausmachen.

2) Berechnen Sie das dem Hersteller für die Produktion dieses Produkts zur Verfügung stehende Kapital.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

c) Für den Verkaufspreis p kann der Erlös in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x durch eine lineare Funktion E mit $E(x) = p \cdot x$ beschrieben werden ($E(x)$ in GE, x in ME, p in GE/ME). Dabei wird vorausgesetzt, dass gleich viele Mengeneinheiten verkauft wie produziert werden.

1) Bestimmen Sie p so, dass der maximale Gewinn bei einem Verkauf von 600 ME erzielt wird.

Die maximal mögliche Produktionsmenge beträgt 650 ME.

2) Bestimmen Sie den Gewinnbereich (also denjenigen Produktionsbereich, in dem der Hersteller Gewinn erzielt).

d) Für ein weiteres Produkt dieses Herstellers sind in der nachstehenden Tabelle die Produktionskosten (in GE) für verschiedene Produktionsmengen (in ME) dargestellt.

Produktionsmenge (in ME)	50	100	250		500
Produktionskosten (in GE)	197	253	308	380	700

Diese Produktionskosten können durch eine Polynomfunktion dritten Grades K_1 mit $K_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ modelliert werden.

1) Bestimmen Sie die Werte von a, b, c und d.

2) Berechnen Sie die in der obigen Tabelle fehlende Produktionsmenge.

Lösungserwartung

a1) $\frac{K(200) - K(100)}{200 - 100} = \frac{66,5 - 59,35}{100} = 0,0715$ GE/ME

a2) mögliche Vorgehensweise:

$K''(x) = 4,8 \cdot 10^{-6} \cdot x - 1,5 \cdot 10^{-3}$

$K''(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 312,5$ ME

Ab der Produktionsmenge von 312,5 ME steigen die Grenzkosten.

b1) mögliche Vorgehensweise:

$\overline{K}(x) = 8 \cdot 10^{-7} \cdot x^2 - 7,5 \cdot 10^{-4} \cdot x + 0,2405 + \frac{42}{x}$

$\overline{K}'(x) = 16 \cdot 10^{-7} \cdot x - 7,5 \cdot 10^{-4} - \frac{42}{x^2}$

$\overline{K}'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{opt} \approx 554,2$ ME

($\overline{K}''(x) > 0 \quad \Rightarrow$ Es liegt ein Minimum vor.)

b2) mögliche Vorgehensweise:

$K(554,2) \approx 81,1$ GE $\quad \Rightarrow \quad 81,1 : 0,65 \approx 125$

Dem Hersteller stehen für die Produktion dieses Produkts ca. 125 GE zur Verfügung.

c1) mögliche Vorgehensweise:

$G(x) = E(x) - K(x)$

$G'(x) = p - K'(x)$

$G'(600) = p - K'(600) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 0,2045$ GE/ME

c2) mögliche Vorgehensweise:

$G(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 335 \quad (x_2 \approx 799, \quad x_3 \approx -196)$

Gewinnbereich: [335 ME; 650 ME]

d1) $a \approx 1,5 \cdot 10^{-5}$

$b \approx -9,8 \cdot 10^{-3}$

$c \approx 2,324$

$d \approx 103$

d2) $K_1(x) = 380 \quad \Rightarrow \quad x \approx 365$ ME

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,05 GE/ME; 0,10 GE/ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [312 ME; 313 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss und eine Überprüfung, dass es sich um ein Minimum handelt, nicht durchgeführt werden muss.
Toleranzintervall: [554 ME; 555 ME]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [120 GE; 130 GE]

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „GE/ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall: [0,20; 0,21]

c2) Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Gewinnbereichs, wobei die Einheit „ME" nicht angeführt sein muss.
Toleranzintervall für x_1: [325; 345]

d1) Ein Punkt für die richtigen Werte von a, b, c und d.
Toleranzintervall für a: $[1 \cdot 10^{-5}; 2 \cdot 10^{-5}]$
Toleranzintervall für b: $[-1 \cdot 10^{-2}; -9 \cdot 10^{-3}]$
Toleranzintervall für c: [2; 2,5]
Toleranzintervall für d: [100; 105]

d2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung je nach Rundung der Koeffizienten a, b, c und d variieren kann.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Wachstum von Holzbeständen

Aufgabennummer: 2_089	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 5.1, FA 5.2	

a) Bauer Waldner weiß, dass sich der Holzbestand seines Waldes um ca. 2,7 % pro Jahr bezogen auf das jeweilige Vorjahr vermehrt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Holzbestand 36 000 m³.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für diejenige Funktion f auf, die den Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren angibt.

b) Der Holzbestand eines anderen Waldes kann näherungsweise mithilfe der Funktion g beschrieben werden:

$g(t) = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

t ... Zeit in Jahren
$g(t)$ ... Holzbestand zum Zeitpunkt t in Kubikmetern (m³)

Wenn der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist, wird so viel geschlägert, dass wieder der Holzbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegt.

Für den Verkauf dieses geschlägerten Holzes betragen die Einnahmen € 96.000.

1) Berechnen Sie den durchschnittlichen Verkaufspreis für 1 m³ Holz.
2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Holzbestand auf 33 000 m³ angewachsen ist.

c) Ein Student behauptet: „Um die relative Änderung r des Holzbestandes von einem Zeitpunkt t_1 bis zu einem späteren Zeitpunkt t_2 zu berechnen, subtrahiere ich vom Holzbestand zum Zeitpunkt t_2 den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 und dividiere die Differenz durch den Holzbestand zum Zeitpunkt t_1."

1) Übersetzen Sie die Rechenanleitung des Studenten in eine Formel.

Lösungserwartung

a1) $f(t) = 36\,000 \cdot 1{,}027^t$

t … Zeit in Jahren
$f(t)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t in m³

b1) Verkauft wurden 1 200 m³, daher betrug der durchschnittliche Preis pro Kubikmeter € 80.

b2) $33\,000 = 31\,800 \cdot 1{,}025^t$

$$t = \frac{\ln(33\,000) - \ln(31\,800)}{\ln(1{,}025)} = 1{,}50\ldots$$

Nach etwa 1,5 Jahren beträgt der Holzbestand 33 000 m³.

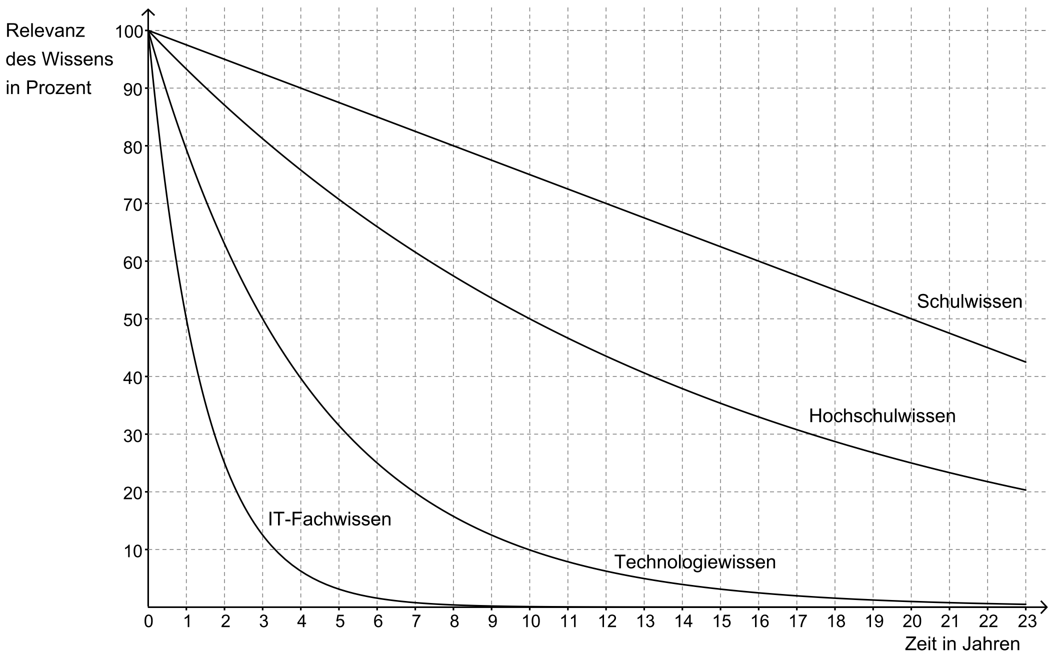
c1) $r = \frac{h(t_2) - h(t_1)}{h(t_1)}$

r … relative Änderung
t_1, t_2 … Zeitpunkte
$h(t_1)$, $h(t_2)$ … Holzbestand zum Zeitpunkt t_1 bzw. t_2

Halbwertszeit des Wissens

Aufgabennummer: 2_093	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 5.1, FA 5.2	

Das zu einem bestimmten Zeitpunkt erworbene Wissen verliert im Laufe der Zeit aufgrund gesellschaftlicher Veränderungen, technologischer Neuerungen etc. an Aktualität und Gültigkeit („Relevanz"). Die nachstehende Abbildung beschreibt die Abnahme der Relevanz des Wissens in verschiedenen Fachbereichen. Für jedes Jahr wird angegeben, wie viel Prozent des ursprünglichen Wissens noch relevant sind.



a) Man geht davon aus, dass die Relevanz des beruflichen Fachwissens exponentiell abfällt und eine Halbwertszeit von 5 Jahren hat.

1) Zeichnen Sie in die Abbildung der Angabe den Verlauf der Relevanz des beruflichen Fachwissens im Intervall [0; 15] ein.

b) Die Relevanz von Technologiewissen nimmt mit einer Halbwertszeit von 3 Jahren exponentiell ab.

1) Stellen Sie diejenige Exponentialfunktion auf, die die Relevanz des Technologiewissens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

c) Die Relevanz des Hochschulwissens lässt sich durch folgende Funktion N beschreiben:

$N(t) = 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot t}$

t ... Zeit in Jahren
$N(t)$ ... Relevanz des Hochschulwissens zur Zeit t in % des anfänglichen Hochschulwissens

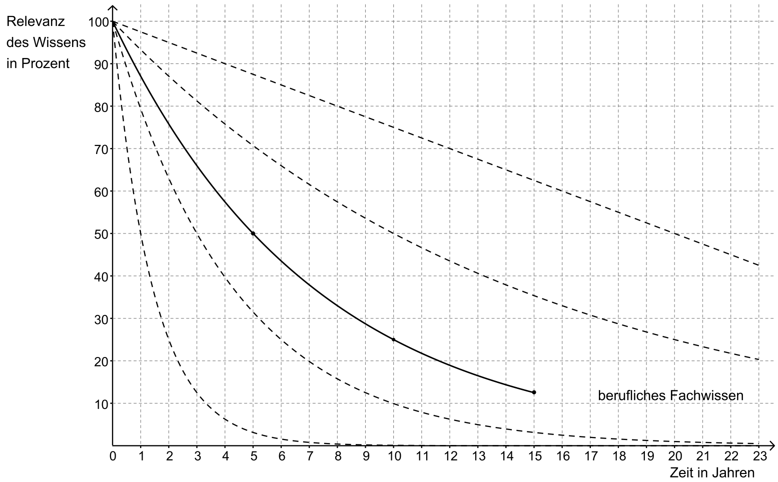
1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Relevanz des Hochschulwissens nach 7 Jahren bereits abgenommen hat.

d) Die Relevanz des Schulwissens kann in den ersten Jahrzehnten durch eine lineare Funktion beschrieben werden.

1) Lesen Sie aus der Abbildung in der Angabe die Steigung dieser linearen Funktion ab.

Lösungserwartung

a1)



Die Werte nach 5, 10 bzw. 15 Jahren müssen klar als 50 %, 25 % bzw. 12,5 % erkennbar sein.

b1) Aufstellen der Exponentialfunktion:

$T(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$

t ... Zeit in Jahren
$T(t)$ ... Relevanz des Technologiewissens zur Zeit t in Prozent der anfänglichen Relevanz des Wissens

c1) $100 - N(7) = 100 - 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 7} = 38{,}4... \approx 38$

Die Relevanz des Hochschulwissens hat um rund 38 % abgenommen.

d1) $k = -\frac{5}{2}$

Baumwachstum

Aufgabennummer: 2_010	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Die nachstehende Tabelle enthält Messwerte des Umfangs eines bestimmten Baumstamms in Abhängigkeit von seinem Alter.

Alter t (in Jahren)	25	50	75	100
Umfang u (in Metern)	0,462	1,256	2,465	3,370

Dieser Zusammenhang kann durch eine Wachstumsfunktion u modelliert werden, wobei der Wert $u(t)$ den Umfang zum Zeitpunkt t angibt.

Aufgabenstellung:

a) Für die ersten 50 Jahre soll die Zunahme des Umfangs mit einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot b^t$ in Abhängigkeit von der Zeit t modelliert werden.

1) Geben Sie a und b so an, dass f mit den in der obigen Tabelle angegebenen Werten für ein Alter von 25 und 50 Jahren übereinstimmt.

a = ______________________________

b = ______________________________

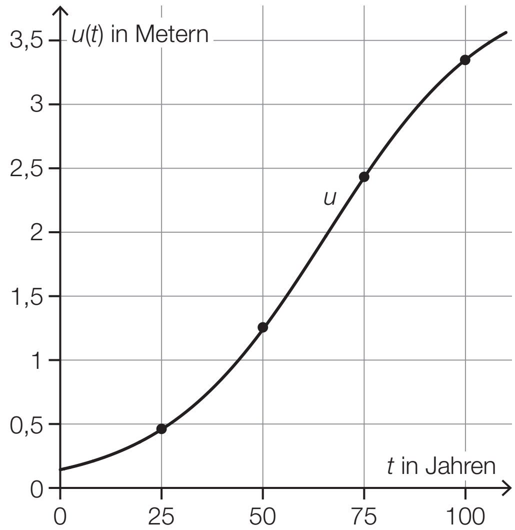
2) Begründen Sie rechnerisch, warum dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht angemessen ist.

b) 1) Interpretieren Sie den Differenzenquotient von u im Zeitraum von 50 bis 75 Jahren unter Angabe des konkreten Wertes im gegebenen Sachzusammenhang.

Es gilt: $u'(50) = 0{,}043$.

2) Interpretieren Sie diesen Wert im gegebenen Sachzusammenhang.

c) In der nachstehenden Abbildung sind die Messwerte und der Graph der Wachstumsfunktion u veranschaulicht.



1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung denjenigen Zeitpunkt t_0 ab, zu dem der Umfang des Baumes am schnellsten zugenommen hat.

t_0 = ____ Jahre

2) Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der dieser Zeitpunkt rechnerisch ermittelt werden kann, wenn die Wachstumsfunktion u bekannt ist.

d) Für die Wachstumsfunktion u gilt: $u(t) = \frac{3{,}95}{1 + 26{,}65 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}}$.
Der Umfang des Baumstamms nähert sich entsprechend dieser Wachstumsfunktion einem bestimmten Wert u_{max}.

1) Geben Sie u_{max} an.

u_{max} = ____ Meter

Lösungserwartung

a1) $0{,}462 = a \cdot b^{25}$
$1{,}256 = a \cdot b^{50}$

$\Rightarrow \quad a = 0{,}1699\ldots$
$b = 1{,}0408\ldots$

a2) $f(75) = 0{,}1699\ldots \cdot 1{,}0408\ldots^{75} = 3{,}4145\ldots$

Der Funktionswert weicht stark vom Wert in der Tabelle ab. Aus diesem Grund ist dieses Modell für die darauffolgenden 25 Jahre nicht angemessen.

b1) $\frac{u(75) - u(50)}{75 - 50} = \frac{2{,}465 - 1{,}256}{25} = 0{,}048\ldots$
Die durchschnittliche Zunahme zwischen 50 und 75 Jahren beträgt rund 0,05 m pro Jahr.

b2) Die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 50$ beträgt 0,043 m pro Jahr.

c1) $t_0 = 65$ Jahre

c2) $u''(t) = 0$

d1) $u_{max} = 3{,}95$ Meter

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

c1) Ein Punkt für das richtige Ablesen.
Toleranzintervall: [55; 75]
c2) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung.

d1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Wertes.

Sonnenaufgang

Aufgabennummer: 2_066	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 3.3, FA 5.1, FA 5.3	

a) Während der Morgendämmerung wird es kontinuierlich heller. Die Beleuchtungsstärke bei klarem Himmel kann an einem bestimmten Ort in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch folgende Exponentialfunktion E beschrieben werden:

$E(t) = 80 \cdot a^t$ mit $-60 \leq t \leq 30$

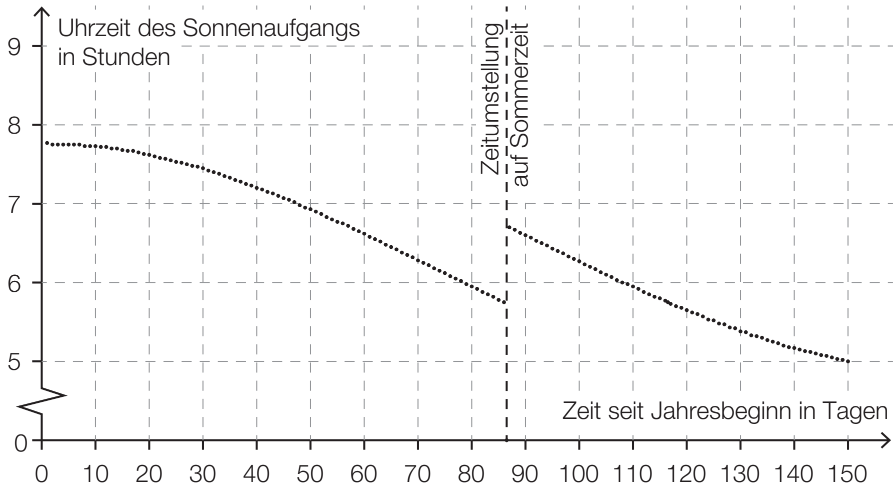
t ... Zeit in min, wobei $t = 0$ der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs ist
$E(t)$ ... Beleuchtungsstärke zur Zeit t in Lux
a ... Parameter

1) Interpretieren Sie die Zahl 80 in der Funktionsgleichung von E im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Beleuchtungsstärke verdoppelt sich alle 5 min.

2) Berechnen Sie den Parameter a.

b) In der nachstehenden Grafik ist die jeweilige Uhrzeit des Sonnenaufgangs in Wien für die ersten 150 Tage eines Jahres dargestellt.



1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Grafik, wie viele Tage nach der Zeitumstellung der Sonnenaufgang erstmals zu einer früheren Uhrzeit als unmittelbar vor der Zeitumstellung stattfindet.

Im Zeitintervall [0; 40] kann die Uhrzeit des Sonnenaufgangs näherungsweise durch eine quadratische Funktion f modelliert werden.

$f(t) = a \cdot t^2 + c$

t … Zeit seit Jahresbeginn in Tagen
$f(t)$ … Uhrzeit des Sonnenaufgangs am Tag t in Stunden

2) Argumentieren Sie anhand der obigen Grafik, dass der Parameter a dabei negativ sein muss.

Lösungserwartung

a1) Die Beleuchtungsstärke bei Sonnenaufgang beträgt 80 Lux.

a2) $a^5 = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[5]{2} = 1{,}148...$

b1) 31 Tage
Toleranzintervall: [26 Tage; 34 Tage]

b2) Die Datenpunkte im Zeitintervall [0; 40] können durch eine nach unten offene (negativ gekrümmte) Parabel angenähert werden. Daher ist der Parameter *a* der zugehörigen quadratischen Funktion negativ.

Weltbevölkerung

In der nachstehenden Tabelle ist für bestimmte Kalenderjahre die Schätzung der Weltbevölkerung (jeweils zur Jahresmitte) angegeben.

Kalenderjahr	Weltbevölkerung in Milliarden
1850	1,260
1900	1,650
1950	2,536
1960	3,030
1970	3,700
1990	5,327
2000	6,140
2010	6,957
2020	7,790

Datenquellen: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1694/umfrage/entwicklung-der-weltbevoelkerungszahl/, https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bevoelkerung/internationale_uebersich/036446.html [17.05.2020].

Aufgabenstellung:

a) Im Zeitraum von 1850 bis 1950 hat sich die Weltbevölkerung annähernd verdoppelt.
Nehmen Sie für diesen Zeitraum an, dass die Weltbevölkerung jährlich um den gleichen Prozentsatz gewachsen ist.

1) Berechnen Sie diesen Prozentsatz. *[0/1 P.]*

b) Ab 1970 kann die Entwicklung der Weltbevölkerung näherungsweise durch eine lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Werte für die Weltbevölkerung der Kalenderjahre 1970 und 2000 eine Funktionsgleichung von f in Abhängigkeit von der Zeit t auf (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1970, $f(t)$ in Milliarden). *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der mithilfe von f ermittelte Wert für das Kalenderjahr 2020 vom in der obigen Tabelle angegebenen Wert abweicht. *[0/1 P.]*

c) In einem anderen Modell wird die Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1970 durch die Funktion g modelliert.

$g(t) = 3{,}7 \cdot e^{-0{,}0001 \cdot t^2 + 0{,}02 \cdot t}$

t ... Zeit ab 1970 in Jahren
$g(t)$ ... Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden

Gemäß diesem Modell wird die Weltbevölkerung zunächst zunehmen und in weiterer Folge abnehmen.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion g das Maximum der Weltbevölkerung und das Kalenderjahr, in dem dies gemäß dem Modell eintreten soll.

Maximum der Weltbevölkerung: rund ____________________ Milliarden

Kalenderjahr: ____________________ *[0/½/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $\sqrt[100]{\frac{2{,}536}{1{,}260}} = 1{,}00701...$

oder:

$\sqrt[100]{2} = 1{,}00695...$

Prozentsatz: rund 0,70 %

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Prozentsatzes.

b1) $f(t) = k \cdot t + d$

$k = \frac{6{,}140 - 3{,}700}{30} = 0{,}081\dot{3}$

$d = f(0) = 3{,}700$

$f(t) = 0{,}081\dot{3} \cdot t + 3{,}700$

b2) $f(50) = 7{,}7\dot{6}$

$\frac{7{,}7\dot{6} - 7{,}790}{7{,}790} = -0{,}0029...$

Abweichung: rund –0,3 %

b1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung von *f*.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Abweichung in %. Auch die Angabe von 0,3 % ist richtig.

c1) Maximum der Weltbevölkerung: rund 10,1 Milliarden

Kalenderjahr: 2070

c1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Tee*

Aufgabennummer: 2_097	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.4, FA 1.7, FA 2.1, FA 5.2, FA 5.3, FA 5.6	

Tee ist weltweit eines der meistkonsumierten Getränke.

Aufgabenstellung:

a) Modellhaft wird angenommen, dass der Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich jedes Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr um den gleichen Prozentsatz steigt.

Unter dieser Annahme gibt die Funktion f den jährlichen Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich ab 2016 in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Jahren, $f(t)$ in Litern).

1) Geben Sie an, um welchen Funktionstyp es sich bei f handelt.

Der jährliche Pro-Kopf-Verbrauch von Tee lag in Österreich im Jahr 2016 bei 33 L. Der Anteil des Tees, der in Österreich im Jahr 2016 mittels Teebeuteln zubereitet wurde, beträgt 95 %.

Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Der Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich steigt seit dem Jahr 2016 jedes Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr um 2 %.
- Der Anteil des Tees, der in Österreich jedes Jahr mittels Teebeuteln zubereitet wird, bleibt gleich.

2) Geben Sie an, wie viele Liter Tee im Jahr 2026 unter den oben angeführten Annahmen pro Kopf in Österreich mittels Teebeuteln zubereitet werden.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 12. Jänner 2021

b) Der weltweit größte Teeproduzent ist China. Die nachstehende Tabelle gibt die Menge des in China produzierten Tees in Millionen Tonnen für einige Jahre im Zeitraum von 2011 bis 2017 an.

Jahr	2011	2013	2015	2017
Menge des in China produzierten Tees in Millionen Tonnen	1,55	1,85	2,23	2,55

Quelle: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/29847/umfrage/produktion-von-tee-nach-erzeugerlaendern-seit-2006/ [28.08.2018].

Die Menge des in China produzierten Tees soll in Abhängigkeit von der Zeit t ab dem Jahr 2011 näherungsweise durch eine lineare Funktion g beschrieben werden (t in Jahren ab dem Jahr 2011, $g(t)$ in Millionen Tonnen).

1) Geben Sie unter Verwendung der Daten aus den Jahren 2011 und 2017 eine Funktionsgleichung für g an.

   $g(t) =$ ____

In den Jahren 2013 und 2015 gibt es jeweils eine Abweichung zwischen den Funktionswerten von g und den Werten aus der obigen Tabelle.

2) Geben Sie an, in welchem der Jahre 2013 und 2015 der Betrag der absoluten Abweichung zwischen dem Funktionswert von g und dem zugehörigen Wert aus der obigen Tabelle größer ist. Ermitteln Sie für das angegebene Jahr ebenso den Betrag der absoluten Abweichung.

   Jahr: ______________________

   Betrag der absoluten Abweichung: ______________________ Millionen Tonnen

c) Heißer Tee kühlt bei niedrigerer Umgebungstemperatur ab.

Die Temperatur $T(t)$ des Tees t Minuten nach Beginn des Abkühlungsprozesses kann bei einer Anfangstemperatur T_0 und einer konstanten Umgebungstemperatur T_U durch die nachstehende Funktionsgleichung näherungsweise beschrieben werden.

$T(t) = (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ (t in Minuten, T_U in °C, T_0 in °C, $T(t)$ in °C)

Eine Tasse mit Tee mit der Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C wird in einen Raum mit einer konstanten Umgebungstemperatur von $T_U = 20$ °C gestellt. Der Tee ist nach 10 Minuten auf eine Temperatur von 65 °C abgekühlt.

1) Ermitteln Sie k.

Nehmen Sie an, dass der ermittelte Wert von k sowohl für den Abkühlungsprozess eines Tees mit einer Anfangstemperatur von 90 °C als auch für den Abkühlungsprozess eines anderen Tees mit einer Anfangstemperatur von 70 °C gilt.

2) Geben Sie an, bei welcher Umgebungstemperatur T_U beide Tees in der gleichen Zeit auf die Hälfte des Wertes ihrer jeweiligen Anfangstemperatur (in °C) abkühlen.

T_U = ____ °C

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) Exponentialfunktion

a2) $33 \cdot 1{,}02^{10} \cdot 0{,}95 = 38{,}21...$
In Österreich werden im Jahr 2026 pro Kopf ca. 38,2 L Tee mittels Teebeuteln zubereitet.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $g(0) = 1{,}55$, $g(6) = 2{,}55$
$g(t) = \frac{1}{6} \cdot t + 1{,}55$

b2) Jahr: 2013
Betrag der absoluten Abweichung: $0{,}0\dot{3}$ Millionen Tonnen

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Vorgehensweise:
$65 = 70 \cdot e^{-k \cdot 10} + 20$
$k = \frac{\ln\left(\frac{45}{70}\right)}{-10} = 0{,}0441...$
$k \approx 0{,}044 \text{ min}^{-1}$

c2) mögliche Vorgehensweise:
$45 = (90 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$
$35 = (70 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$
$\Rightarrow \quad \frac{45 - T_U}{90 - T_U} = \frac{35 - T_U}{70 - T_U}$
$\Rightarrow \quad T_U = 0\ °C$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Funktionstyps.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „L" nicht angegeben sein muss.

b1) Ein Punkt für eine richtige Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Jahres und der richtigen Lösung.

c1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „min^{-1}" nicht angegeben sein muss.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Lachsbestand*

Aufgabennummer: 2_039

Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.4, FA 1.6, AN 3.3, WS 1.1

Der kanadische Wissenschaftler W. E. Ricker untersuchte die Nachkommenanzahl von Fischen in Flüssen Nordamerikas in Abhängigkeit von der Anzahl der Fische der Elterngeneration. Er veröffentlichte 1954 das nach ihm benannte Ricker-Modell.
Der zu erwartende Bestand $R(n)$ einer Nachfolgegeneration kann näherungsweise anhand der sogenannten Reproduktionsfunktion R mit $R(n) = a \cdot n \cdot e^{-b \cdot n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ aus dem Bestand n der jeweiligen Elterngeneration ermittelt werden.
Lachse kehren spätestens vier Jahre nach dem Schlüpfen aus dem Meer an ihren „Geburtsort" zurück, um dort zu laichen, d.h., die Fischeier abzulegen. Nach dem Laichen stirbt der Großteil der Lachse.
Ricker untersuchte unter anderem die Rotlachspopulation im Skeena River in Kanada. Die nachstehende Tabelle gibt die dortigen Lachsbestände in den Jahren von 1908 bis 1923 an, wobei die angeführten Bestände Mittelwerte der beobachteten Bestände jeweils vier aufeinanderfolgender Jahre sind.

Zeitraum	beobachteter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1908–31.12.1911	1 098
01.01.1912–31.12.1915	740
01.01.1916–31.12.1919	714
01.01.1920–31.12.1923	615

Datenquelle: http://jmahaffy.sdsu.edu/courses/s00/math121/lectures/product_rule/product.html [01.02.2018] (adaptiert).

Anhand dieser Daten für den Lachsbestand im Skeena River wurden für die Reproduktionsfunktion R die Parameterwerte $a = 1{,}535$ und $b = 0{,}000783$ ermittelt ($R(n)$ und n in tausend Lachsen).

Aufgabenstellung:

a) Ermitteln Sie für die Lachspopulation im Skeena River für $n > 0$ mithilfe der Reproduktionsfunktion die Lösung n_0 der Gleichung $R(n) = n$ in tausend Lachsen!

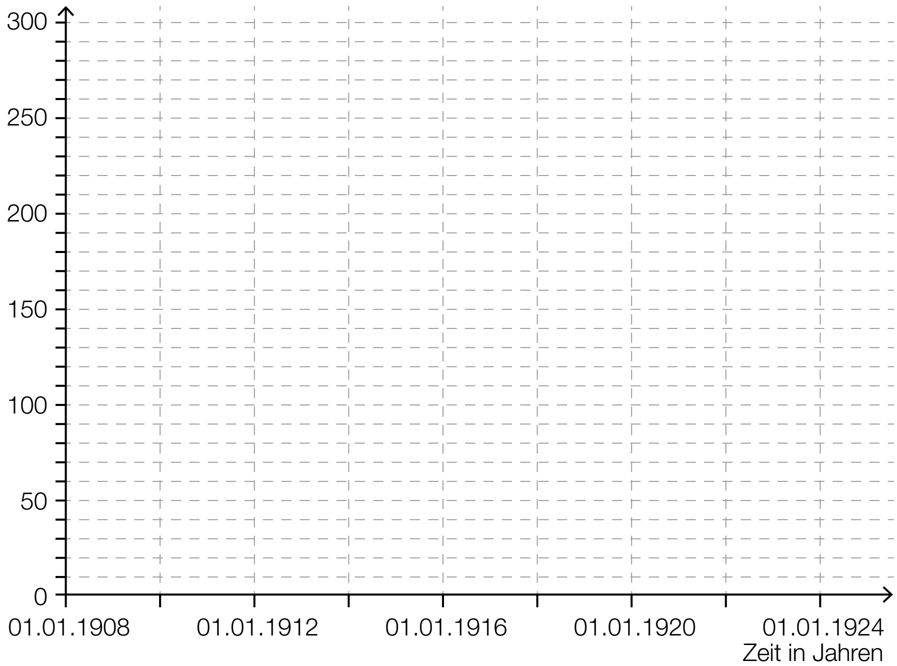
Interpretieren Sie n_0 im gegebenen Kontext!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extrempunkts $E = (n_E | R(n_E))$ der Reproduktionsfunktion R in Abhängigkeit von a und b und zeigen Sie, dass n_E für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ eine Stelle eines lokalen Maximums ist!

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a der Bestand $R(n_E)$ der Nachfolgegeneration stets größer als der vorherige Bestand n_E ist!

c) Stellen Sie die Daten der obigen Tabelle der beobachteten Lachsbestände (in tausend Lachsen) durch ein Histogramm dar, wobei die absoluten Häufigkeiten als Flächeninhalte von Rechtecken abgebildet werden sollen!



Das von Ricker entwickelte Modell zählt zu den Standardmodellen zur Beschreibung von Populationsentwicklungen. Dennoch können die mithilfe der Reproduktionsfunktion berechneten Werte mehr oder weniger stark von den beobachteten Werten abweichen.

Nehmen Sie den beobachteten durchschnittlichen Lachsbestand von 1 098 (im Zeitraum von 1908 bis 1911) als Ausgangswert, berechnen Sie damit für die jeweils vierjährigen Zeiträume von 1912 bis 1923 die laut Reproduktionsfunktion zu erwartenden durchschnittlichen Lachsbestände im Skeena River und tragen Sie die Werte in die nachstehende Tabelle ein!

Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912 – 31.12.1915	
01.01.1916 – 31.12.1919	
01.01.1920 – 31.12.1923	

Lösungserwartung

a) $n_0 \approx 547$

Mögliche Interpretation:

Im gegebenen Kontext gibt n_0 denjenigen Lachsbestand an, bei dem die Anzahl der Lachse der Nachfolgegeneration unverändert bleibt.

b) Mögliche Vorgehensweise:

$R'(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad n_E = \frac{1}{b}$

$R\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b \cdot e}$

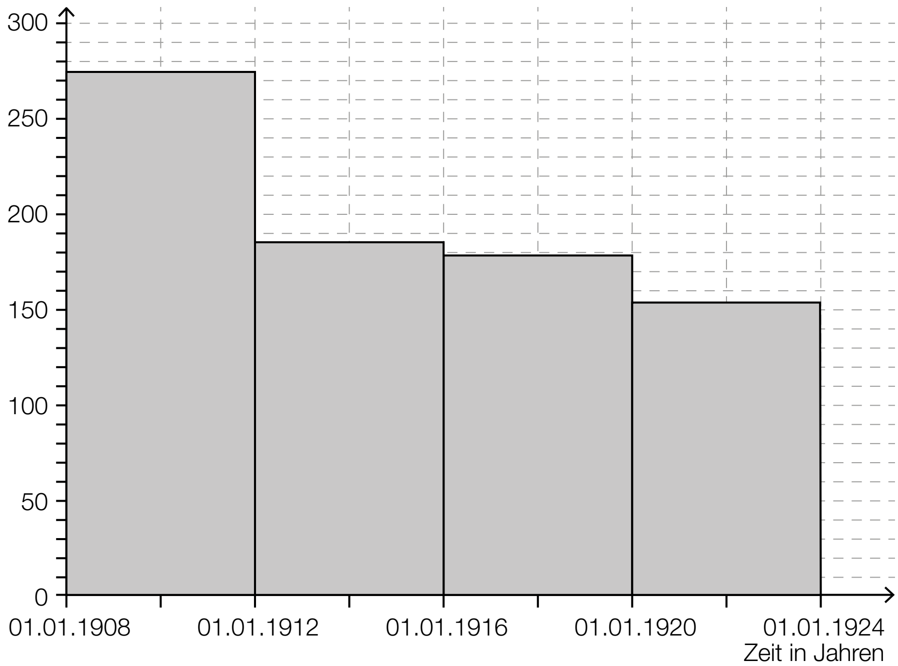
$\Rightarrow \quad E = \left(\frac{1}{b} \middle| \frac{a}{b \cdot e}\right)$

Möglicher Nachweis:

$R''\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{a \cdot b}{e} < 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad$ Maximumstelle

$\frac{a}{b \cdot e} > \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a > e$

c)



Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	713
01.01.1916–31.12.1919	626
01.01.1920–31.12.1923	589

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für den Lachsbestand: [547; 548]
– Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

b) – Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von E und einen korrekten Nachweis.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) – Ein Punkt für ein korrektes Histogramm.
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte in der Tabelle.

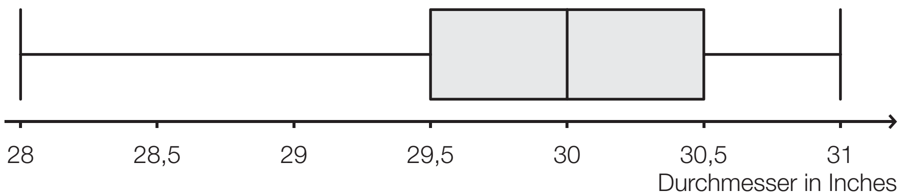
Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Riesenpizza

Aufgabennummer: 2_085	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 3.3, WS 1.1, WS 1.2	

In den USA wird die Größe einer Pizza durch ihren Durchmesser (in Inches) angegeben. Im Folgenden werden Pizzen immer als kreisrund angenommen.

a) Bei 30-Inch-Pizzen verschiedener Lieferanten wurde der tatsächliche Durchmesser bestimmt. Die Messergebnisse sind im folgenden Boxplot zusammengefasst:



1) Lesen Sie die Spannweite ab.

Der Interquartilsabstand ist die Differenz von 3. und 1. Quartil.

In der Fachliteratur wird ein Wert oft als „Ausreißer nach oben" bezeichnet, wenn dieser Wert weiter als das 1,5-Fache des Interquartilsabstands rechts vom 3. Quartil liegt. Solche Ausreißer sind im obigen Boxplot nicht berücksichtigt.

2) Geben Sie an, ab welchem Durchmesser eine Pizza als „Ausreißer nach oben" bezeichnet wird.

b) 1) Zeigen Sie allgemein, dass der Flächeninhalt einer (kreisrunden) Pizza vervierfacht wird, wenn ihr Durchmesser verdoppelt wird.

c) Für eine bestimmte Pizzasorte wird der Preis pro Flächeneinheit in Abhängigkeit vom Durchmesser modellhaft durch folgende quadratische Funktion P beschrieben:

$P(d) = 0{,}0003 \cdot d^2 - 0{,}015 \cdot d + 0{,}2619$ mit $8 \leq d \leq 30$

d ... Durchmesser der Pizza in Inches
$P(d)$ ... Preis pro Flächeneinheit einer Pizza mit Durchmesser d in US-Dollar

1) Ermitteln Sie, für welchen Durchmesser der Preis pro Flächeneinheit am niedrigsten ist.

Lösungserwartung

a1) Spannweite: 3 Inch

a2) Interquartilsabstand: 30,5 – 29,5 = 1
3. Quartil: 30,5
$30{,}5 + 1{,}5 \cdot 1 = 32$
Eine Pizza wird ab einem Durchmesser von mehr als 32 Inch als „Ausreißer nach oben" bezeichnet.

b1) Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser d: $A_d = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$
Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser $2d$: $A_{2d} = \frac{4d^2}{4} \cdot \pi = d^2 \cdot \pi = 4 \cdot A_d$

Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.

c1) $P'(d) = 0{,}0006 \cdot d - 0{,}015$
$P'(d) = 0 \;\Rightarrow\; d = 25$

Die Pizza mit dem niedrigsten Preis pro Flächeneinheit hat einen Durchmesser von 25 Inch.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Tennis

Aufgabennummer: 2_087	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, FA 1.5, WS 1.1	

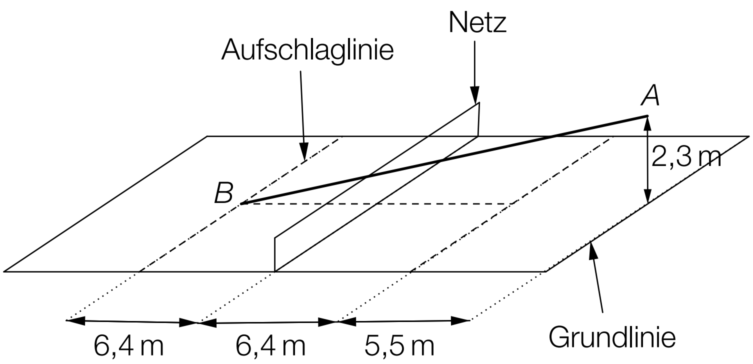
Im Rahmen der Nachwuchsförderung wurden die Leistungen der Teilnehmer eines Tennisturniers genauer beobachtet.

a) Für die Auswertung der Daten der Aufschlaggeschwindigkeit der Teilnehmer wurde der nachstehende Boxplot erstellt.

1) Lesen Sie diejenige Aufschlaggeschwindigkeit ab, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde.

2) Lesen Sie den Quartilsabstand ab.

b) Ein Spieler trifft beim Aufschlag den Ball in einer Höhe von 2,3 m im Punkt A genau über der Mitte der Grundlinie. Er visiert den Punkt B (Mitte der Aufschlaglinie) an. Um nicht ins Netz zu gehen, muss der Ball das Netz in einer Höhe von mindestens 1 Meter (über dem Boden) überqueren.
Die Flugbahn des Tennisballs beim Aufschlag kann modellhaft mittels einer Gerade beschrieben werden.



1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Aufschlag über das Netz geht.

c) Mithilfe einer Videoanalyse wird ein Grundlinienschlag modelliert.
Die Flugbahn zwischen dem Abschlagpunkt und dem Punkt, in dem der Ball auf dem Boden aufkommt, kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x + \frac{21}{50} \quad \text{mit} \quad x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung zum Abschlagpunkt in Metern (m)
$f(x)$ ... Höhe des Balles an der Stelle x über dem Boden in m

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der obigen Zahl $\frac{21}{50}$ für die Flugbahn.

Lösungserwartung

a1) Aufschlaggeschwindigkeit, die von 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde:
120 km/h

a2) Quartilsabstand: 30 km/h

b1) Argumentation mit ähnlichen Dreiecken:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots\text{ m} \approx 0{,}8\text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

Eine Argumentation mit einer linearen Funktion oder mit Steigungswinkeln ist ebenfalls möglich.

c1) Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

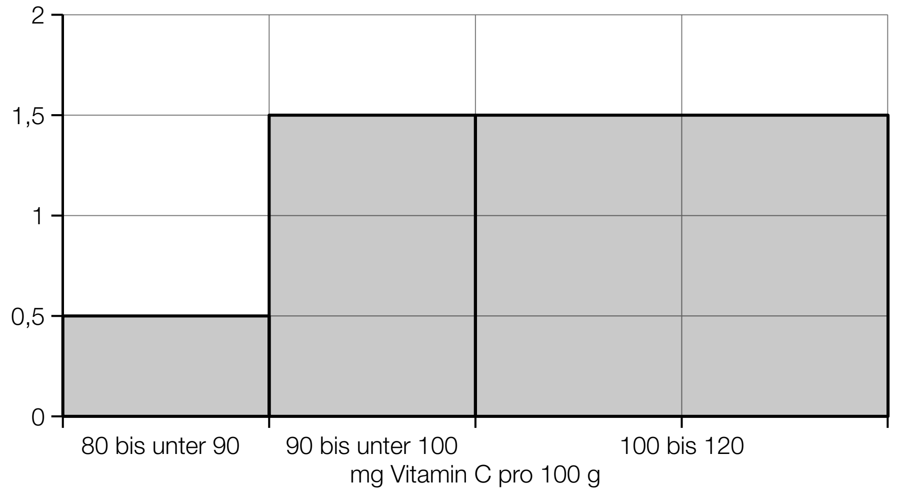
Vitamin C

Vitamin C erfüllt viele wichtige Aufgaben im menschlichen Körper.

Aufgabenstellung:

a) Brokkoli enthält durchschnittlich 100 mg Vitamin C pro 100 g.

Bei einem Gemüsegroßhändler wird eine Zufallsstichprobe von 50 Portionen frischem Brokkoli entnommen und für jede Portion der Vitamin-C-Gehalt pro 100 g gemessen.
Der Flächeninhalt eines Rechtecks im nachstehenden Histogramm entspricht der absoluten Häufigkeit der Portionen dieser Stichprobe im jeweiligen Bereich.



1) Ermitteln Sie die Anzahl der Portionen in der Zufallsstichprobe, die 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g aufweisen. *[0/1 P.]*

Von der Zufallsstichprobe werden 3 Portionen ohne Zurücklegen entnommen.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 dieser Portionen 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g aufweisen. *[0/1 P.]*

b) Ein Getränkehersteller möchte Fruchtsaft so in Flaschen abfüllen, dass jede Flasche 100 mg Vitamin C enthält.

Es stehen zur Verfügung:

- Birnensaft mit 20 mg Vitamin C pro 100 ml
- Orangensaft mit 35 mg Vitamin C pro 100 ml
- Mischungen aus diesen beiden Säften

Emine behauptet, dass der Vitamin-C-Gehalt von 100 mg bei Flaschen mit einem Fassungsvermögen von 250 ml nicht erreicht werden kann.

1) Begründen Sie, warum Emines Behauptung richtig ist. *[0/1 P.]*

Die zur Verfügung stehenden Fruchtsäfte werden so gemischt, dass 350 ml Saft genau 100 mg Vitamin C enthalten.

2) Ermitteln Sie, wie viele Milliliter Birnensaft mit wie vielen Millilitern Orangensaft dafür gemischt werden müssen. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $20 \cdot 1{,}5 = 30$

30 Portionen weisen 100 mg bis 120 mg Vitamin C pro 100 g auf.

a2) $1 - \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{28}{48} = 0{,}7928...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 79,3 %.

a1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Anzahl.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) 250 ml Orangensaft enthalten nur 87,5 mg Vitamin C und somit weniger als 100 mg.

b2) x ... Menge an Birnensaft in einer Flasche in ml
y ... Menge an Orangensaft in einer Flasche in ml

$\text{I: } 0{,}2 \cdot x + 0{,}35 \cdot y = 100$
$\text{II: } x + y = 350$

$x = 150$
$y = 200$

Es müssen 150 ml Birnensaft mit 200 ml Orangensaft gemischt werden.

b1) Ein Punkt für das richtige Begründen.
b2) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der beiden Werte.

Mathematikwettbewerb

Aufgabennummer: 2_091	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 1.1, WS 1.2, WS 1.3	

Eine Schülergruppe hat an einem Mathematikwettbewerb teilgenommen.

a) Die 12 Burschen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

32; 38; 40; 52; 53; 54; 56; 60; 61; 64; 66; 84

Nun sollen die Ergebnisse übersichtlich dargestellt werden. Dazu wird die folgende Klasseneinteilung verwendet:

A	30 bis 39
B	40 bis 49
C	50 bis 59
D	60 bis 69
E	70 bis 79
F	80 bis 89

1) Erstellen Sie ein Säulen- oder Balkendiagramm, in welchem die Häufigkeiten der jeweiligen Klassen A bis F dargestellt sind.

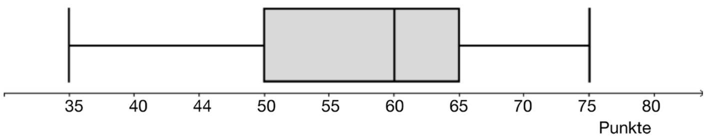
b) Das arithmetische Mittel und der Median für die Punktezahlen der Burschen betragen 55 Punkte.
Die 12 Mädchen der Schülergruppe haben folgende Punktezahlen erreicht:

37; 38; 44; 53; 54; 57; 59; 60; 61; 62; 63; 65

Die Mädchen behaupten, dass sie sowohl beim arithmetischen Mittel als auch beim Median eine größere Punktezahl als die Burschen erreicht haben.

1) Überprüfen Sie nachvollziehbar, ob diese Behauptung richtig ist.

c) Die Punkteverteilung einer anderen Schülergruppe ist in dem nachstehenden Boxplot dargestellt.

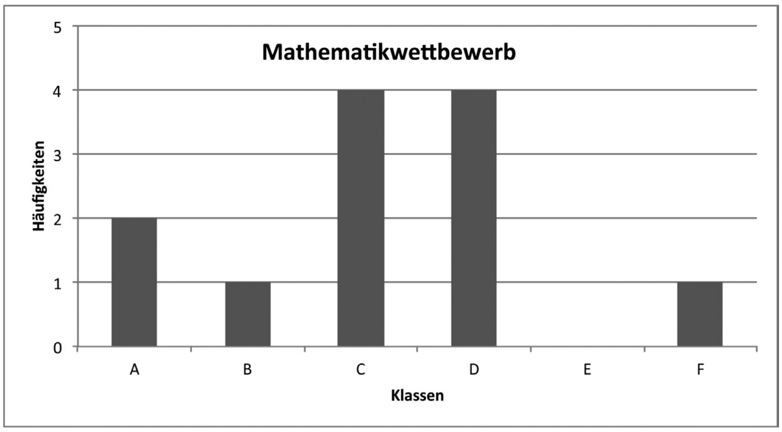


1) Lesen Sie ab, wie viel Prozent der Schüler/innen mindestens 50 Punkte erreicht haben.

2) Ermitteln Sie die Spannweite der Punktezahlen.

Lösungserwartung

a1)



b1) Punktezahlen der Mädchen:
– arithmetisches Mittel: 54,4 Punkte
– Median: 58 Punkte

Die Behauptung ist also falsch.

c1) Die Punktezahl 50 ist das 1. Quartil. Das heißt: Mindestens 75 % der Schüler/innen haben mindestens 50 Punkte erreicht.

c2) Spannweite: 75 – 35 = 40.
Die Spannweite beträgt 40 Punkte.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Bevölkerungswachstum in Afrika*

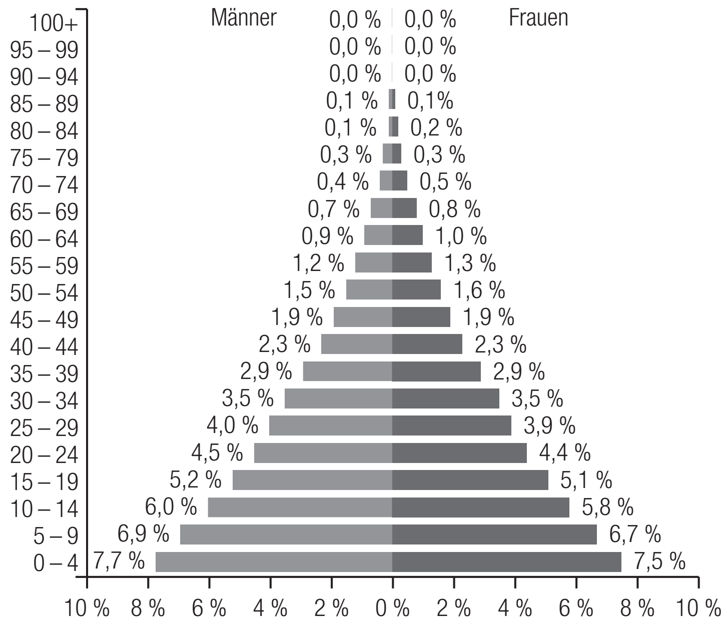
Aufgabennummer: 2_083	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 5.1, FA 5.5, AN 1.1, AN 1.3, WS 1.1, WS 1.3	

Afrika hatte Ende 2018 eine Bevölkerung von ca. 1,3 Milliarden Menschen und verzeichnet derzeit das stärkste Bevölkerungswachstum aller Kontinente.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 16. September 2020

Aufgabenstellung:

a) Die nachstehende Abbildung zeigt die Alterspyramide der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018.
Der Alterspyramide ist z. B. zu entnehmen, dass im Kalenderjahr 2018 galt: 4,5 % der afrikanischen Bevölkerung sind Männer mit einem Lebensalter von 20 bis 24 Jahren und 4,4 % der afrikanischen Bevölkerung sind Frauen mit einem Lebensalter von 20 bis 24 Jahren. Unter *Lebensalter* versteht man die Anzahl vollendeter Lebensjahre.



Datenquelle: https://www.populationpyramid.net/de/afrika/2018 [10.05.2019].

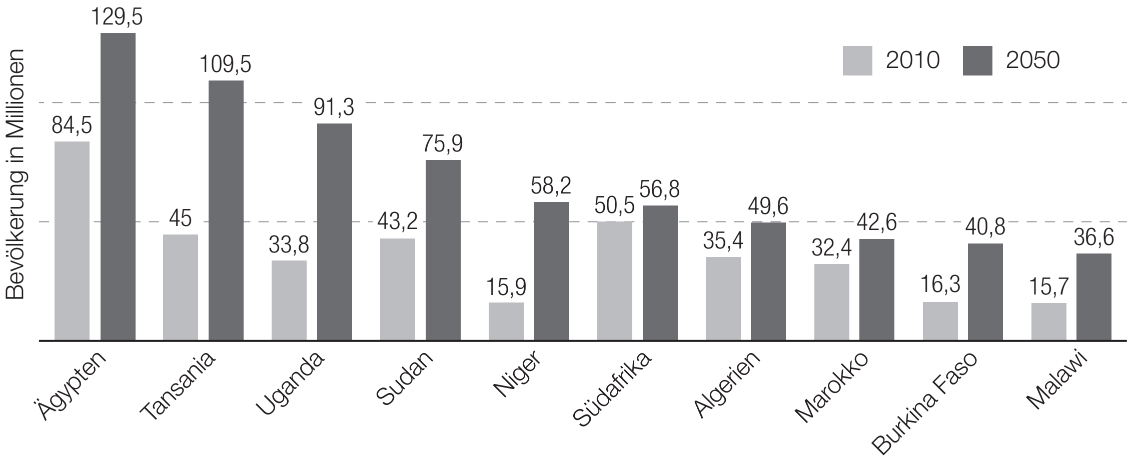
Nehmen Sie modellhaft an, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten.

1) Bestimmen Sie anhand der Alterspyramide den Median *m* des Lebensalters der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018.

m = ____ Jahre

2) Geben Sie die Anzahl an Afrikanerinnen und Afrikanern an, die im Kalenderjahr 2018 jünger als *m* Jahre waren.

b) Die nachstehende Abbildung zeigt die prognostizierte Bevölkerungsentwicklung (Angaben in Millionen) im Zeitraum von 2010 bis 2050 in ausgewählten afrikanischen Ländern.



Datenquelle: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/159204/umfrage/prognose-zur-bevoelkerungsentwicklung-in-afrika-bis-2050/ [10.05.2019].

1) Geben Sie von den zehn angeführten Ländern dasjenige Land an, das laut Prognose im Zeitraum von 2010 bis 2050 am stärksten zum absoluten Bevölkerungswachstum in Afrika beitragen wird.

2) Geben Sie von den zehn angeführten Ländern dasjenige Land an, in dem laut Prognose im Zeitraum von 2010 bis 2050 das stärkste relative Bevölkerungswachstum erfolgt.

c) Die nachstehende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung in Nigeria im Zeitraum von 1980 bis 2010.

Kalenderjahr	1980	1990	2000	2010
Bevölkerungszahl in Millionen	73,5	95,3	122,4	158,6

1) Zeigen Sie anhand der Tabelle, dass die Bevölkerungszahl im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd exponentiell zugenommen hat.

Nehmen Sie an, dass die Bevölkerungszahl von Nigeria weiterhin in dieser Art exponentiell wachsen wird.

2) Geben Sie unter Verwendung der Daten aus den beiden Kalenderjahren 2000 und 2010 an, in welchem Kalenderjahr die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen wird.

d) Die nachstehende Tabelle zeigt, wie sich die durchschnittliche Lebenserwartung der afrikanischen Bevölkerung seit 1953 entwickelt hat.

Kalenderjahr	durchschnittliche Lebenserwartung in Jahren
1953	37,5
1958	40,0
1963	42,3
1968	44,4
1973	46,6
1978	48,7
1983	50,5
1988	51,7
1993	51,7
1998	52,3
2003	53,7
2008	57,0
2013	60,2
2018	62,4

1) Berechnen Sie die mittlere jährliche Zunahme k der durchschnittlichen Lebenserwartung im Zeitraum von 1953 bis 2018.

Es wird angenommen, dass die durchschnittliche Lebenserwartung in Afrika nach dem Kalenderjahr 2018 konstant pro Jahr um den berechneten Wert k zunimmt.
Im Kalenderjahr 2018 betrug die durchschnittliche Lebenserwartung in Europa 78,5 Jahre.

2) Geben Sie an, in welchem Kalenderjahr die durchschnittliche Lebenserwartung in Afrika unter dieser Annahme den Wert für Europa im Kalenderjahr 2018 erreichen würde.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $m = 19$ Jahre

a2) Aufgrund der Annahme, dass in jeder Altersklasse die einzelnen Lebensalter gleich häufig auftreten, sind 4,16 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Männer im Alter von 15 bis 18 Jahren und 4,08 % der afrikanischen Bevölkerung im Kalenderjahr 2018 Frauen im Alter von 15 bis 18 Jahren.
$7{,}7\,\% + 7{,}5\,\% + 6{,}9\,\% + 6{,}7\,\% + 6{,}0\,\% + 5{,}8\,\% + 4{,}16\,\% + 4{,}08\,\% = 48{,}84\,\%$
$1{,}3 \cdot 10^9 \cdot 0{,}4884 = 6{,}3492 \cdot 10^8 \approx$ 635 Millionen Menschen

b) **Lösungserwartung:**

b1) Tansania

b2) Niger

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Begründungen:

Die (mittleren) jährlichen Wachstumsraten sind im Zeitraum von 1980 bis 2010 annähernd konstant:
1980 bis 1990: ca. 2,6 %
1990 bis 2000: ca. 2,5 %
2000 bis 2010: ca. 2,6 %

oder:

Die prozentuellen Wachstumsraten sind in den 10-Jahres-Zeiträumen von 1980 bis 2010 annähernd konstant:
1980 bis 1990: ca. 30 %
1990 bis 2000: ca. 28 %
2000 bis 2010: ca. 30 %

oder:

Die gegebenen Daten können gut mit einer Exponentialfunktion N mit der Gleichung $N(t) = N_0 \cdot 1{,}026^t$ beschrieben werden. Die Funktionswerte weichen nur geringfügig von den Tabellenwerten ab.

c2) $360 = 122{,}4 \cdot 1{,}0262...^t \quad \Rightarrow \quad t = 41{,}6... \approx 42$

Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2042 die Bevölkerungszahl Nigerias erstmals mehr als 360 Millionen betragen.

d) **Lösungserwartung:**

d1) $k = \frac{62{,}4 - 37{,}5}{65} = 0{,}3830\ldots \quad \Rightarrow \quad k \approx 0{,}383$ Lebensjahre pro Kalenderjahr

d2) $62{,}4 + t \cdot 0{,}3830\ldots = 78{,}5$
$t = 42{,}028\ldots \approx 42{,}03$

Unter dieser Annahme wird im Kalenderjahr 2060 in Afrika die durchschnittliche Lebenserwartung den Wert 78,5 Jahre erreichen.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.
b2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Landes.

c1) Ein Punkt für eine richtige Begründung.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei auch das Kalenderjahr 2041 als richtig zu werten ist.

d1) Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Lebensjahre pro Kalenderjahr" nicht angegeben sein muss.
d2) Ein Punkt für die Angabe des richtigen Kalenderjahrs, wobei auch die Kalenderjahre 2058, 2059 und 2061 als richtig zu werten sind.

Schularbeiten

Aufgabennummer: 2_005	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Professor Huber hat in der Oberstufe pro Semester jeweils 2 Schularbeiten geplant. Verpasst eine Schülerin / ein Schüler eine Schularbeit, so muss sie/er diese nachholen.
Auf Basis seiner langjährigen Erfahrung hat Professor Huber die unten stehende Tabelle erstellt. Dabei beschreibt $h(n)$ die relative Häufigkeit, dass bei einer Schularbeit insgesamt n Schüler/innen fehlen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	> 7
$h(n)$	0,15	0,15	0,2	0,3	0,1	0,05	0,03	0,02	0

Aufgabenstellung:

a) 1) Berechnen Sie, wie viele fehlende Schüler/innen Professor Huber bei jeder Schularbeit zu erwarten hat.

Lisa behauptet: „Aus dem Durchschnittswert kann man schließen, dass bei jeder Schularbeit mindestens eine Schülerin oder ein Schüler fehlt."

2) Begründen Sie, warum Lisas Behauptung falsch ist.

b) Die von Professor Huber berechneten relativen Häufigkeiten werden modellhaft als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1) Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

Im Durchschnitt fehlt bei drei von vier Schularbeiten im Jahr mindestens eine Schülerin oder ein Schüler.	☐
Im Durchschnitt sind bei einer von vier Schularbeiten pro Jahr alle Schüler/innen anwesend.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Schularbeit niemand fehlt, ist gleich hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin oder ein Schüler fehlt.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Schüler/innen bei einer Schularbeit fehlen, ist höher als die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Schüler/innen fehlen.	☐
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Schularbeit mindestens eine Schülerin oder ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	☐

In einer bestimmten Klasse werden bei Professor Huber 4 Schularbeiten geschrieben. Es wird modellhaft angenommen, dass Schüler/innen zufällig und unabhängig voneinander fehlen. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Schularbeiten, bei denen mindestens eine Schülerin oder ein Schüler fehlt.

2) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeitsverteilung für X berechnet werden kann.

$P(X = k) =$ ______________________________

mit $k \in \{$ ______________________________ $\}$

Lösungserwartung

a1) $0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}03 + 7 \cdot 0{,}02 = 2{,}42$
Professor Huber hat bei jeder Schularbeit 2,42 fehlende Schüler/innen zu erwarten.

a2) Da der Durchschnittswert keine konkrete Aussage über einzelne Schularbeiten erlaubt, ist Lisas Behauptung falsch.

b1)

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Schularbeit niemand fehlt, ist gleich hoch wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schülerin oder ein Schüler fehlt.	☒
Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Schularbeit mindestens eine Schülerin oder ein Schüler fehlt, beträgt 85 %.	☒

b2) $P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot 0{,}85^k \cdot 0{,}15^{4-k}$
mit $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Anzahl.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Ankreuzen.
b2) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Terms und der richtigen Werte von k, ein halber Punkt für nur eine richtige Angabe.

Roulette*

Aufgabennummer: 2_040	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 2.3, WS 3.1, WS 3.2	

Roulette ist ein Glücksspiel, bei dem mittels einer Kugel eine natürliche Zahl aus dem Zahlenbereich von 0 bis 36 zufällig ausgewählt wird, wobei jede der 37 Zahlen bei jedem der voneinander unabhängigen Spieldurchgänge mit derselben Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird. Das Spielfeld mit der Zahl Null ist grün gefärbt, die Hälfte der restlichen Zahlenfelder ist rot, die andere Hälfte schwarz gefärbt.
Die nachstehende Tabelle zeigt eine Auswahl von Setzmöglichkeiten und die im Erfolgsfall ausbezahlten Gewinne. „35-facher Gewinn" bedeutet zum Beispiel, dass bei einem gewonnenen Spiel der Einsatz und zusätzlich der 35-fache Einsatz (also insgesamt der 36-fache Einsatz) ausbezahlt wird.

Einzelzahl (von 0 bis 36)	35-facher Gewinn
Rot/Schwarz	1-facher Gewinn
Ungerade/Gerade (ohne Null)	1-facher Gewinn

Eine der bekanntesten Spielstrategien ist das Martingale-System. Man setzt dabei stets auf dieselbe „einfache Chance" (z. B. auf „Rot" oder „Gerade"). Falls man verliert, verdoppelt man den Einsatz im darauffolgenden Spiel. Sollte man auch dieses Spiel verlieren, verdoppelt man den Einsatz noch einmal für das nächstfolgende Spiel und setzt diese Strategie von Spiel zu Spiel fort. Sobald man ein Spiel gewinnt, endet diese Spielserie, und man hat mit dieser Strategie den Einsatz des ersten Spiels dieser Spielserie (Starteinsatz) als Gewinn erzielt.

Aufgabenstellung:

a) Die Zufallsvariable X beschreibt, wie oft die Kugel bei 80 Spielen auf eine bestimmte Zahl fällt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel bei 80 Spielen mindestens viermal auf eine bestimmte Zahl fällt!

Ein Spieler möchte seine Gewinnchancen erhöhen und handelt wie folgt: Er notiert während einer Serie von z. B. 37 Spielen, auf welche Zahlen die Kugel fällt. Weiters geht er davon aus, dass die Kugel in den nachfolgenden Spielen auf die dabei nicht notierten Zahlen fällt, und setzt auf diese Zahlen.

Geben Sie an, ob der Spieler mit dieser Strategie die Gewinnchancen erhöhen kann, und begründen Sie Ihre Antwort!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2018

b) Eine Spielerin wendet das Martingale-System an und setzt immer auf „Rot“. Die Spielserie endet, sobald die Spielerin gewinnt bzw. wenn der vom Casino festgelegte Höchsteinsatz von € 10.000 keine weitere Verdoppelung des Spieleinsatzes mehr erlaubt.

Die nachstehende Tabelle zeigt, wie schnell die Einsätze ausgehend von einem Starteinsatz von € 10 bei einer Martingale-Spielserie im Falle einer „Pechsträhne“ ansteigen können.

Spielrunde	Einsatz in €
1	10
2	20
3	40
4	80
5	160
6	320
7	640
8	1 280
9	2 560
10	5 120

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Spielerin bei dieser Martingale-Spielserie alle zehn Spiele verliert!

Zeigen Sie durch die Berechnung des Erwartungswerts für den Gewinn, dass trotz der sehr geringen Wahrscheinlichkeit, zehn aufeinanderfolgende Spiele zu verlieren, das beschriebene Martingale-System ungünstig für die Spielerin ist!

Lösungserwartung

a) $P(X \geq 4) \approx 0{,}171$

Da die Spieldurchgänge voneinander unabhängig sind und somit die Ergebnisse der vorherigen Spielrunden keine Auswirkungen auf die nachfolgenden Spielrunden haben, kann der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht beeinflussen.

b) $\left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx 0{,}00128$

Mögliche Vorgehensweise:

Bei zehn aufeinanderfolgenden verlorenen Spielrunden beträgt der Verlust € 10.230.
Endet die Spielserie mit einem Gewinn, so beträgt dieser € 10.
Erwartungswert für einen Gewinn: $(1 - 0{,}00128) \cdot 10 - 0{,}00128 \cdot 10\,230 \approx -3{,}11$
Ein negativer Erwartungswert zeigt, dass dieses Spiel langfristig gesehen für die Spielerin ungünstig ist.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall für $P(X \geq 4)$: [0,1; 0,2] bzw. [10 %; 20 %]
– Ein Punkt für die Angabe, dass der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht erhöhen kann, und eine korrekte Begründung.

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,0012; 0,0013]
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Gewitter

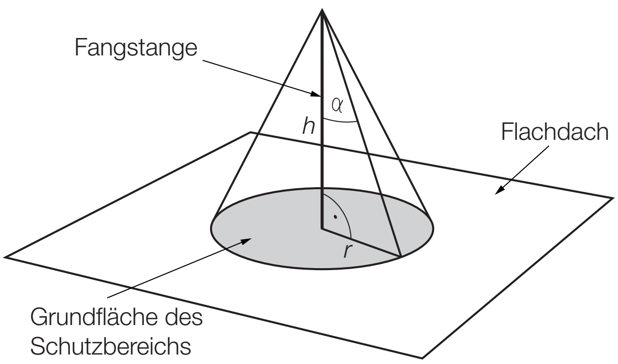
Aufgabennummer: 2_065	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 4.1, AN 4.3, WS 2.3	

a) In drei verschiedenen Städten – *A*, *B* und *C* – werden am Nachmittag laut Wetterprognose unabhängig voneinander mit folgenden Wahrscheinlichkeiten Gewitter auftreten:

Stadt	*A*	*B*	*C*
Wahrscheinlichkeit für ein Gewitter	50 %	80 %	80 %

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftreten wird.

b) Um Gebäude vor Blitzeinschlägen zu schützen, werden Blitzableiter verwendet. Dabei wird eine Metallstange, die sogenannte *Fangstange*, auf dem Gebäude senkrecht montiert. Der höchste Punkt einer solchen Fangstange kann als Spitze eines drehkegelförmigen Schutzbereichs angesehen werden. Alle Objekte, die sich vollständig innerhalb dieses Schutzbereichs befinden, sind vor direkten Blitzeinschlägen geschützt.



h … Höhe der Fangstange
α … Schutzwinkel
r … Radius der Grundfläche des Schutzbereichs

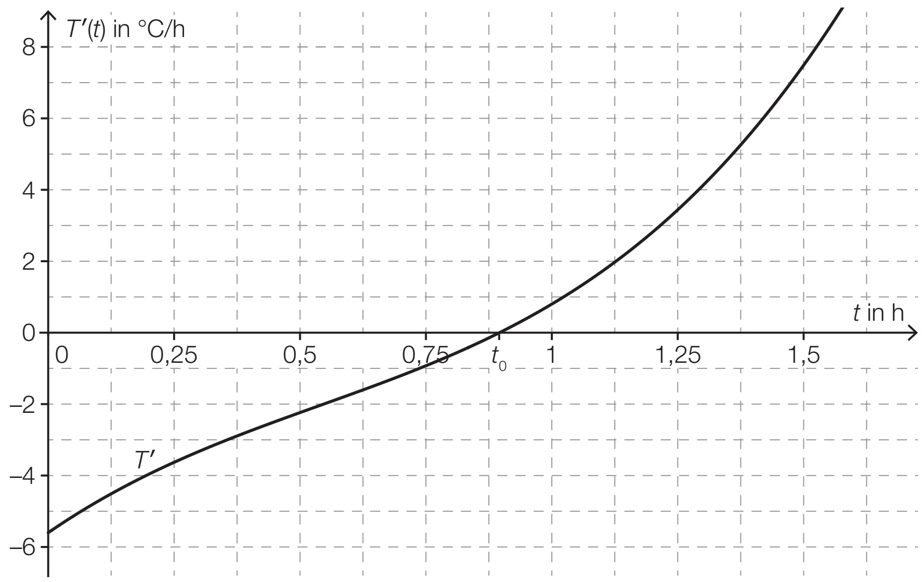
1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Radius r aus α und h.

r = ____

Auf einem Flachdach ist eine 2 m hohe Fangstange senkrecht montiert. 3 m vom Fußpunkt der Fangstange entfernt steht eine 1,2 m hohe Antenne senkrecht auf dem Flachdach. Der Schutzwinkel beträgt 77°.

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob sich diese Antenne vollständig innerhalb des Schutzbereichs befindet.

c) Während eines Nachmittags, an dem es ein Gewitter gab, wurde die Veränderung der Temperatur ermittelt. Die Funktion T' beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe nachstehende Abbildung).



t … Zeit seit Beginn der Messung in h
$T'(t)$ … momentane Änderungsrate der Temperatur zur Zeit t in °C/h

Die absolute Temperaturänderung in einem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ kann durch das Integral $\int_{t_1}^{t_2} T'(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet werden.

1) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5].

Lösungserwartung

a1) $1 - 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,68$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer der drei Städte kein Gewitter auftritt, beträgt 68 %.

b1) $r = h \cdot \tan(\alpha)$

b2) $\frac{3}{\tan(77°)} = 0,69...$

$2 - 0,69... = 1,30...$

In einer Entfernung von 3 m von der Fangstange hat der Schutzbereich eine Höhe von rund 1,3 m.
Die 1,2 m hohe Antenne befindet sich daher zur Gänze im Schutzbereich.

Auch eine Überprüfung mithilfe einer exakten Zeichnung ist als richtig zu werten.

c1) Die dem Integral $\int_{1,25}^{1,5} T'(t)\,dt$ entsprechende Fläche wird von rund 10,5 Kästchen mit einem Flächeninhalt von jeweils 0,125 überdeckt.
Gesamtflächeninhalt: $10,5 \cdot 0,125 \approx 1,3$

Die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall [1,25; 1,5] beträgt rund 1,3 °C.
Toleranzintervall: [1,2 °C; 1,45 °C]

Münzen

Aufgabennummer: 2_067	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 1.7, WS 2.3, WS 3.2	

Susi und Markus spielen mit fairen Münzen. Beim Werfen einer fairen Münze treten die beiden Ereignisse „Kopf" und „Zahl" jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

a) Susi hat eine Schachtel mit 3 Ein-Euro-Münzen und 5 Zwei-Euro-Münzen.
Markus hat eine Schachtel mit 2 Ein-Euro-Münzen und 3 Zwei-Euro-Münzen.
Beide ziehen aus ihrer Schachtel zufällig jeweils 1 Münze.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass durch die beiden Ziehungen ein Gesamtwert von € 3 erzielt wird.

b) Markus will eine Zwei-Euro-Münze 10-mal werfen.
Susi stellt die Frage: „Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten wir mindestens 3-mal ‚Zahl'?"

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen mindestens 3-mal „Zahl" geworfen wird.

c) Susi und Markus beschäftigen sich mit der Wahrscheinlichkeit, mit der „Zahl" beim wiederholten Werfen einer Münze auftritt. Dabei stoßen sie auf folgende Gleichung:

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}5^n = 0{,}9375$

X ... Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis „Zahl"

1) Berechnen Sie n.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes n in diesem Zusammenhang.

Lösungserwartung

a1) $P(S = 1 \text{ und } M = 2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}$

$P(S = 2 \text{ und } M = 1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5}$

Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist die gesuchte Lösung:

$\frac{9}{40} + \frac{10}{40} = \frac{19}{40} = 47{,}5\ \%$

b1) Berechnung der Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialverteilung: $n = 10$ und $p = 0{,}5$

$P(X \geq 3) = 0{,}9453... \approx 94{,}5\ \%$

c1) $n = \frac{\ln(0{,}0625)}{\ln(0{,}5)} = 4$

c2) Der Wert n gibt an, wie oft man die Münze werfen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 93,75 % mindestens 1-mal „Zahl“ geworfen wird.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Buntes Spielzeug

Aufgabennummer: 2_078	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

Grundkompetenz: WS 1.3, WS 2.3

Spielzeugteile werden von einer Maschine in den Farben Rot, Gelb und Blau eingefärbt.

a) Die 3 zur Produktion notwendigen Farbdüsen arbeiten (unabhängig voneinander) jeweils mit unterschiedlicher Qualität. Die Farbe Rot wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 96,8 %, die Farbe Gelb mit einer Wahrscheinlichkeit von 98,3 % und die Farbe Blau mit einer Wahrscheinlichkeit von 97,2 % so auf die Teile aufgetragen, dass diese die Qualitätskontrolle bestehen.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau die Qualitätskontrolle besteht.

2) Beschreiben Sie ein Ereignis E im gegebenen Sachzusammenhang für ein zweifärbiges Spielzeugteil, dessen Wahrscheinlichkeit durch $P(E) = 1 - (0{,}968 \cdot 0{,}983)$ berechnet wird.

b) Die einfärbigen Spielzeugteile einer Produktion werden vermessen und ihre jeweiligen Längen werden tabellarisch erfasst.

rote Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
4,5	20
5,6	10
6,0	20
6,5	15
25,3	5

gelbe Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
5,5	25
10,0	7
14,5	13

blaue Spielzeugteile	
Länge in cm	Anzahl
7,0	70

1) Ermitteln Sie den Median der Längen der gelben Spielzeugteile.

2) Zeigen Sie, dass das arithmetische Mittel der Längen der blauen Spielzeugteile gleich groß ist wie das arithmetische Mittel der Längen der roten Spielzeugteile.

Lösungserwartung

a1) E ... zweifärbiger Spielzeugteil in den Farben Rot und Blau besteht die Kontrolle

$P(E) = 0{,}968 \cdot 0{,}972 = 0{,}9408...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 94,1 %.

a2) E steht in diesem Sachzusammenhang für das Ereignis, dass ein zweifärbiges Spielzeugteil in den Farben Rot und Gelb die Kontrolle nicht besteht.

b1) Median der Längen der gelben Spielzeugteile: $\tilde{x} = 5{,}5$ cm

b2) $\bar{x}_{\text{rot}} = \dfrac{20 \cdot 4{,}5\text{ cm} + 10 \cdot 5{,}6\text{ cm} + 20 \cdot 6{,}0\text{ cm} + 15 \cdot 6{,}5\text{ cm} + 5 \cdot 25{,}3\text{ cm}}{70} = 7{,}0\text{ cm}$

$\bar{x}_{\text{blau}} = 7{,}0$ cm

Quiz mit Spielbrett*

Aufgabennummer: 2_063	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, AN 3.3, WS 2.3, WS 3.1, WS 3.2, WS 4.1	

Bei einem Quiz werden hintereinander mehrere Fragen gestellt, die jeweils mit „ja“ oder „nein“ beantwortet werden. Auf einem Spielbrett steht eine Spielfigur zu Beginn eines jeden Spieldurchgangs auf dem Feld mit der Zahl 0. Bei jeder richtigen Antwort wird diese Spielfigur um ein Feld nach rechts, bei jeder falschen Antwort um ein Feld nach links gezogen. Die Felder des Spielbretts sind mit ganzen Zahlen in aufsteigender Reihenfolge beschriftet (siehe nachstehende Abbildung). Das Spielbrett kann auf beiden Seiten beliebig verlängert werden.

Spielbrett

---	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	---

Maria und Tom spielen dieses Quiz. Tom befragt Maria.

Aufgabenstellung:

a) Bei einem Spieldurchgang ist das Quiz zu Ende, wenn die Spielfigur auf dem Feld mit der Zahl 2 zu stehen kommt.

Mit A wird das Ereignis bezeichnet, dass die Spielfigur nach höchstens 4 Fragen auf dem Feld mit der Zahl 2 steht.

Maria beantwortet jede Frage unabhängig von den anderen Fragen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit p richtig.

1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ in Abhängigkeit von p an.

$P(A)$ = ____

Wird p erhöht, so vergrößert sich die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

2) Geben Sie dasjenige $p \in [0; 1]$ an, bei dem die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ am stärksten wächst (also die lokale Änderungsrate von $P(A)$ am größten ist).

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 28. Mai 2020

b) Bei einem anderen Spieldurchgang werden Maria genau 100 Fragen gestellt. Sie beantwortet dabei jede Frage unabhängig von den anderen Fragen mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 richtig. Die Zufallsvariable Y gibt die Zahl desjenigen Feldes an, auf dem die Spielfigur nach der Beantwortung der 100 Fragen steht.

1) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(Y)$.

$E(Y) =$ ____

Die Zufallsvariable Y wird durch eine normalverteilte Zufallsvariable Z angenähert. Dabei gilt: $E(Y) = E(Z)$ und die Standardabweichung σ von Z ist 8.

2) Ermitteln Sie das um den Erwartungswert $E(Z)$ symmetrische Intervall $[z_1; z_2]$, für das $P(z_1 \leq Z \leq z_2) = 95{,}4\ \%$ gilt.

c) Bei einem anderen Spieldurchgang beantwortet Maria alle Fragen durch Raten. Sie beantwortet somit jede Frage unabhängig von den anderen Fragen mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 richtig.
Für jede gerade Anzahl n an Fragen mit $n \geq 2$ gilt:

$$M(n) = \binom{n}{\frac{n}{2}} \cdot 0{,}5^n$$

1) Interpretieren Sie $M(n)$ im gegebenen Kontext.

Für jede gerade Anzahl n an Fragen mit $n \geq 10$ kann $M(n)$ durch $\widetilde{M}(n) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}}$ näherungsweise berechnet werden.
Für jedes gerade $n \geq 10$ gibt es ein n^*, sodass gilt: $\widetilde{M}(n^*) = \frac{1}{2} \cdot \widetilde{M}(n)$.

2) Bestimmen Sie n^* in Abhängigkeit von n.

$n^* =$ ____

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) $P(A) = p^2 + 2 \cdot p^3 \cdot (1 - p)$

a2) mögliche Vorgehensweise:

$f(p) = p^2 + 2 \cdot p^3 \cdot (1 - p)$

$f'(p) = 2 \cdot p + 6 \cdot p^2 - 8 \cdot p^3$

$f''(p) = 2 + 12 \cdot p - 24 \cdot p^2$

$f''(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 0{,}6318... \approx 0{,}632 \quad (p_2 = -0{,}1318...)$

$(f'''(0{,}6318...) \neq 0)$

Bei $p \approx 0{,}632$ wächst die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ am stärksten.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $E(Y) = 100 \cdot 0{,}8 - 100 \cdot 0{,}2 = 60$

b2) mögliche Vorgehensweise:

$E(Z) = 60$

$\sigma = 8$

Es gilt: $P(E(Z) - 2 \cdot \sigma \leq Z \leq E(Z) + 2 \cdot \sigma) \approx 0{,}954 \quad \Rightarrow \quad z_1 \approx 44, z_2 \approx 76 \quad \Rightarrow \quad [44; 76]$

c) **Lösungserwartung:**

c1) mögliche Interpretation:

$M(n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass Maria genau die Hälfte der Fragen richtig beantwortet.

oder:

$M(n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Spielfigur nach n Fragen auf dem Feld mit der Zahl 0 steht.

c2) $\widetilde{M}(n^*) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}}$

$\sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n^*}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}} \quad \Rightarrow \quad n^* = 4 \cdot n$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung.
b2) Ein Punkt für ein richtiges Intervall, wobei die Angabe der beiden richtigen Werte ohne Intervallschreibweise als richtig zu werten ist.
Toleranzintervall für z_1: [44; 45]
Toleranzintervall für z_2: [75; 76]

c1) Ein Punkt für eine richtige Interpretation.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Sicherheitskontrolle*

Aufgabennummer: 2_096	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 2.3, WS 3.1, WS 3.2, FA 1.5, AN 4.3	

Beim Einlass in ein bestimmtes Stadion findet bei einer Veranstaltung eine maximal dreistufige Sicherheitskontrolle bei Personen statt, um mitgeführte Gegenstände zu kontrollieren und unzulässige Gegenstände zu erfassen. Liefert die erste Stufe dieser Sicherheitskontrolle kein eindeutiges Ergebnis, dann wird die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle durchgeführt. Liegt dann noch immer kein eindeutiges Ergebnis vor, kommt die dritte Stufe der Sicherheitskontrolle zum Einsatz.

Die erste und die zweite Stufe der Sicherheitskontrolle dauern jeweils 15 s, die dritte Stufe dauert 300 s. Ein eindeutiges Ergebnis liefert dabei die erste Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 %, die zweite Stufe mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.

Aufgabenstellung:

a) Die Zufallsvariable X beschreibt die Dauer d (in s) der Sicherheitskontrolle bei einer Person. Wartezeiten, die eventuell auftreten können, werden nicht berücksichtigt.

1) Ergänzen Sie in der nachstehenden Tabelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X.

d			
$P(X = d)$			

2) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

b) Der Wert p gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person einen unzulässigen Gegenstand mit sich führt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen beide einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen, beträgt 10 %.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 10 zufällig und unabhängig voneinander ausgewählten Personen mindestens 5 Personen einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen.

* ehemalige Klausuraufgabe (adaptiert), Maturatermin: 16. September 2020

c) Die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion kann mithilfe der Funktion A mit $A(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $0 \leq t \leq 90$ in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden, wobei zum Zeitpunkt $t = 0$ der Einlass ins Stadion beginnt (t in Minuten, $A(t)$ in Personen pro Minute).

Zu Beginn des Einlasses ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion gleich 0.
45 min nach Beginn des Einlasses ist die momentane Änderungsrate der Anzahl der Personen im Stadion maximal. Zu diesem Zeitpunkt beträgt sie 15 Personen pro Minute.

1) Berechnen Sie die Werte von a, b und c.

2) Geben Sie die Anzahl der Personen an, die insgesamt bis zum Zeitpunkt $t = 90$ ins Stadion gekommen sind.

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1)

d	15	30	330
$P(X = d)$	0,9	$0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06$	$0{,}1 \cdot 0{,}4 = 0{,}04$

a2) $E(X) = 15 \cdot 0{,}9 + 30 \cdot 0{,}06 + 330 \cdot 0{,}04 = 28{,}5$

b) **Lösungserwartung:**

b1) $p^2 = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}31622... \approx 0{,}3162$

b2) Y ... Anzahl der Personen, die einen unzulässigen Gegenstand mit sich führen
Y ist binomialverteilt mit $n = 10$, $p = 0{,}31622...$
$P(Y \geq 5) = 0{,}1794... \approx 0{,}179$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $A(0) = 0,\ A(45) = 15,\ A'(45) = 0$

$a = -\frac{1}{135},\ b = \frac{2}{3},\ c = 0$

c2) $\int_0^{90} A(t)\,\mathrm{d}t = 900$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für die Ergänzung der richtigen Werte in der Tabelle.
a2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

b1) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.
b2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen der Lösung sind ebenfalls als richtig zu werten.

c1) Ein Punkt für die Angabe der drei richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für die richtige Lösung.

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Würfelspiel*

Aufgabennummer: 2_104	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒

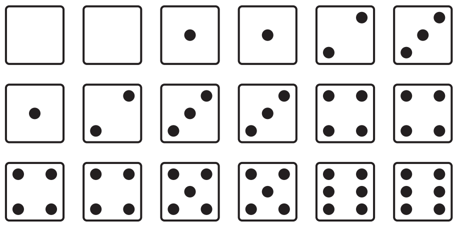
Bei einem Würfelspiel werden verschiedene Würfel mit jeweils 6 Seitenflächen verwendet. Bei allen verwendeten Würfeln tritt bei jedem Wurf jede Seitenfläche mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wie jede der anderen Seitenflächen auf. Die Ergebnisse verschiedener Würfe sind voneinander unabhängig.

Es werden die 3 Würfeltypen *A*, *B* und *C* verwendet. In der nachstehenden Abbildung sind deren Seitenflächen dargestellt.

Seitenflächen von Typ *A*

Seitenflächen von Typ *B*

Seitenflächen von Typ *C*



Aufgabenstellung:

a) Ein Spieler würfelt 1-mal gleichzeitig mit einem Würfel vom Typ *B* und einem Würfel vom Typ *C*.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der gewürfelten Augenzahlen 8 beträgt.

b) Die Zufallsvariable X_A bzw. X_B bzw. X_C gibt die Augenzahl beim Wurf eines Würfels vom Typ *A* bzw. *B* bzw. *C* an. Eine dieser drei Zufallsvariablen hat einen ganzzahligen Erwartungswert.

1) Geben Sie diesen ganzzahligen Erwartungswert an.

Die beiden anderen Zufallsvariablen haben die gleiche Standardabweichung.

2) Berechnen Sie diese Standardabweichung.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 21. Mai 2021

c) Mit einem Würfel vom Typ *C* wird *n*-mal gewürfelt. Die Zufallsvariable Y_n gibt an, bei wie vielen von diesen *n* Würfen mit einem Würfel vom Typ *C* eine ungerade Augenzahl auftritt ($n \in \mathbb{N}$). Mit μ_n wird der Erwartungswert und mit σ_n die Standardabweichung von Y_n bezeichnet.

1) Geben Sie μ_n und σ_n in Abhängigkeit von *n* an.

μ_n = ______________________________

σ_n = ______________________________

Lösungserwartung

a) **Lösungserwartung:**

a1) Kombinationen der Augenzahlen: „2 und 6“ oder „3 und 5“ oder „4 und 4“

$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18} = 0{,}2\dot{7}$

a2) $36 + 12 \cdot 4 - \int_0^{10} 0{,}12 \cdot t^2 \, \mathrm{d}t = 44$

Die Strecke ist um 44 m länger.

b) **Lösungserwartung:**

b1) $E(X_C) = 5$

b2) $\sigma(X_A) = \sigma(X_B) = 1{,}067...$

c) **Lösungserwartung:**

c1) $\mu_n = n \cdot \frac{1}{3}$

$\sigma_n = \sqrt{n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen.

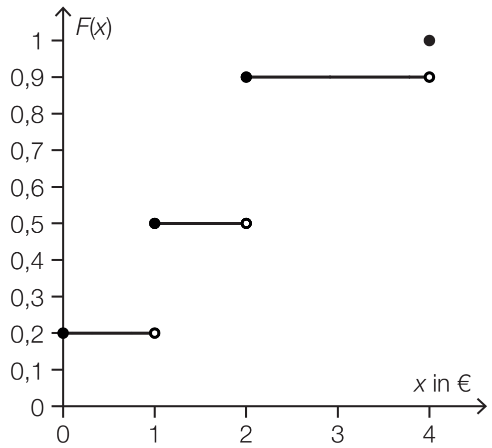
b1) Ein Punkt für das Angeben des richtigen Erwartungswerts.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Standardabweichung.

c1) Ein Punkt für das Angeben der beiden richtigen Werte, ein halber Punkt für nur einen richtigen Wert.

Glücksrad

Aufgabennummer: 2_007	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Bei einem Glücksspiel werden nach dem Drehen eines Glücksrads € 0, € 1, € 2 oder € 4 ausbezahlt. Jedes Mal, bevor das Rad gedreht wird, ist eine Spielgebühr von e € zu bezahlen.
Die Zufallsvariable X gibt die Höhe des ausbezahlten Betrags an.
Nachstehend ist der Graph der Verteilungsfunktion F in Abhängigkeit vom ausbezahlten Betrag x (in €) mit $F(x) = P(X \leq x)$ angegeben.



Aufgabenstellung:

a) 1) Tragen Sie die entsprechenden Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in die nachstehende Tabelle ein.

ausbezahlter Betrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$				

2) Begründen Sie, warum jede Verteilungsfunktion monoton steigend ist und warum das Maximum jeder Verteilungsfunktion 1 sein muss.

b) 1) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

2) Interpretieren Sie den Erwartungswert von X für den Spielbetreiber in Bezug auf die Spielgebühr e.

c) Die Zufallsvariable Y gibt die Höhe des (tatsächlichen) Gewinns aus der Sicht der Spielerin / des Spielers an.

Gewinn y in €				
$P(Y = y)$				

1) Tragen Sie die Werte für den Gewinn y in Abhängigkeit von der Spielgebühr e in die obige Tabelle ein.

2) Tragen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y in Abhängigkeit von e in die obige Tabelle ein.

Lösungserwartung

a1)

ausbezahlter Betrag x in €	0	1	2	4
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,4	0,1

a2) Die Verteilungsfunktion entsteht durch Summenbildung der Einzelwahrscheinlichkeiten. Da diese stets größer oder gleich 0 sind, ist jede Verteilungsfunktion monoton steigend. Da die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten einer Verteilungsfunktion 1 ist, muss ihr Maximum ebenfalls 1 sein.

b1) $E(X) = 0 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$

b2) Der Mindestbetrag der Spielgebühr e muss mehr als € 1,50 betragen, um langfristig Gewinn zu machen.

c1 und c2)

Gewinn y in €	$0 - e$	$1 - e$	$2 - e$	$4 - e$
$P(Y = y)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Werte.
a2) Ein Punkt für das richtige Begründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Wertes.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

c1) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Werte.
c2) Ein Punkt für das Eintragen der richtigen Werte.

Kino*

Aufgabennummer: 2_054	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 3.2, WS 4.1	

Ein Kino hat drei Säle. Im ersten Saal sind 185 Sitzplätze, im zweiten Saal 94 und im dritten Saal 76.

Neue Filme starten üblicherweise an einem Donnerstag. Der Kinobetreiber nimmt modellhaft an, dass an so einem Donnerstag bei einer Vorstellung eines neuen Films in allen drei Sälen jeder einzelne Sitzplatz mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % belegt ist.

Aufgabenstellung:

a) Es sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 355$ und $p = 0{,}95$.

1) Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $1 - P(X < 350)$ im gegebenen Kontext.

Zum Schulschluss mietet eine Schule alle drei Säle für denselben Film zur selben Beginnzeit. Alle Sitzplätze werden vergeben, jede Besucherin/jeder Besucher bekommt ein Ticket für einen bestimmten Sitzplatz in einem der drei Säle. Alle Tickets haben zusätzlich zur Platznummer noch eine fortlaufende, jeweils unterschiedliche Losnummer. Unmittelbar vor der Vorstellung werden zwei Losnummern ausgelost. Die beiden Personen, die die entsprechenden Tickets besitzen, erhalten jeweils eine große Portion Popcorn.

2) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass diese beiden Personen Tickets für denselben Saal haben.

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 20. September 2019

b) Der Betreiber des Kinos möchte wissen, wie zufrieden seine Kundschaft mit dem gebotenen Service (Buffet, Sauberkeit etc.) ist. Bei einer Umfrage geben von 628 Besucherinnen und Besuchern 515 Besucher/innen an, dass sie mit dem gebotenen Service im Kino insgesamt zufrieden sind.

1) Bestimmen Sie auf Basis dieser Befragung ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den relativen Anteil aller Besucher/innen dieses Kinos, die mit dem gebotenen Service insgesamt zufrieden sind.

Bei einer zweiten Befragung werden viermal so viele Personen befragt, wobei der relative Anteil der mit dem gebotenen Service insgesamt zufriedenen Besucher/innen wieder genauso groß wie bei der ersten Befragung ist.

2) Geben Sie an, wie sich diese Vergrößerung der Stichprobe konkret auf die Breite des aus der ersten Befragung ermittelten symmetrischen 95-%-Konfidenzintervalls auswirkt.

Lösungserwartung

a1) mögliche Beschreibung:

Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Vorstellung eines neuen Films (in allen drei Sälen zusammen) mindestens 350 Sitzplätze belegt sind.

a2) Anzahl der Sitzplätze insgesamt: 355

$$P = \frac{185}{355} \cdot \frac{184}{354} + \frac{94}{355} \cdot \frac{93}{354} + \frac{76}{355} \cdot \frac{75}{354} \approx 0{,}3858 = 38{,}58\ \%$$

b1) mögliche Vorgehensweise:

$n = 628$, $h = \frac{515}{628} \approx 0{,}82$

$$0{,}82 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}82 \cdot 0{,}18}{628}} \approx 0{,}82 \pm 0{,}03 \quad \Rightarrow \quad [0{,}79;\ 0{,}85]$$

b2) mögliche Interpretation:

Eine Erhöhung der Anzahl der Befragten auf das Vierfache führt (bei gleichem relativem Anteil h) zu einer Halbierung der Breite des Konfidenzintervalls.

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung des Terms im gegebenen Kontext.

a2) Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b1) Ein Punkt für ein richtiges Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,76; 0,80]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,83; 0,86]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

b2) Ein Punkt für die Angabe der richtigen Auswirkung auf die Breite.

Lieblingsfarbe

Aufgabennummer: 2_068	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: WS 1.2, WS 2.1, WS 3.2	

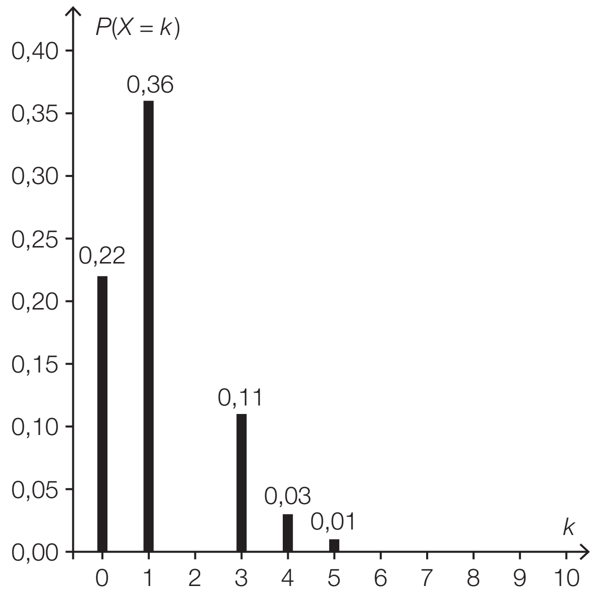
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Rosa als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 13 %.
25 zufällig ausgewählte Personen werden nach ihrer Lieblingsfarbe gefragt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 der 25 Personen Rosa als Lieblingsfarbe nennen.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person Orange als Lieblingsfarbe nennt, beträgt 7 %.
Unter n befragten Personen soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 1 Person sein, die Orange als Lieblingsfarbe nennt.

1) Berechnen Sie die Anzahl n derjenigen Personen, die dafür mindestens befragt werden müssen.

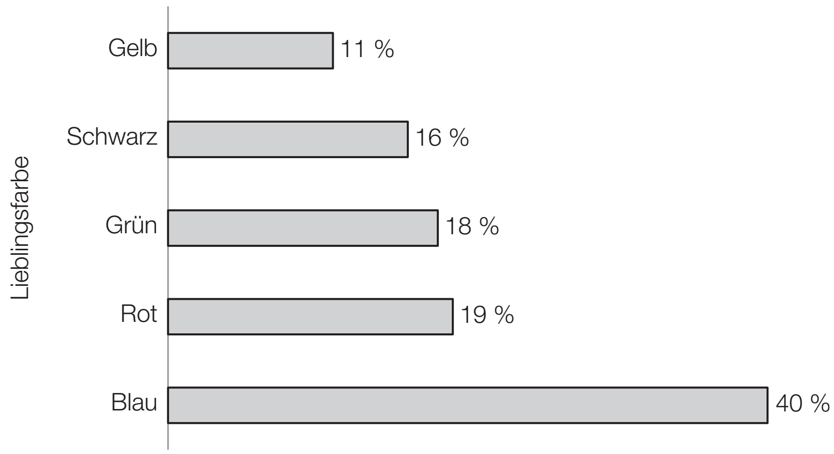
c) Die binomialverteilte Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl derjenigen Personen unter 10 Befragten, die Lila als Lieblingsfarbe nennen. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion dieser Zufallsvariablen ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 10 Befragten maximal 3 Befragte Lila als Lieblingsfarbe nennen, beträgt 96 %.

1) Zeichnen Sie in der obigen Abbildung die fehlende Säule für $P(X = 2)$ ein.

d) Die Schüler/innen einer Schule wurden nach ihren Lieblingsfarben gefragt. In der nachstehenden Abbildung ist dargestellt, wie viel Prozent der Befragten die jeweilige Farbe als Lieblingsfarbe genannt haben.



1) Beschreiben Sie, woran man erkennen kann, dass man auch mehr als eine Lieblingsfarbe nennen durfte.

Lösungserwartung

a1) X … Anzahl derjenigen Personen, die Rosa als Lieblingsfarbe nennen

Binomialverteilung mit $n = 25$ und $p = 0{,}13$:
$P(X = 3) = 0{,}2360\ldots$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 23,6 % nennen genau 3 der 25 befragten Personen Rosa als Lieblingsfarbe.

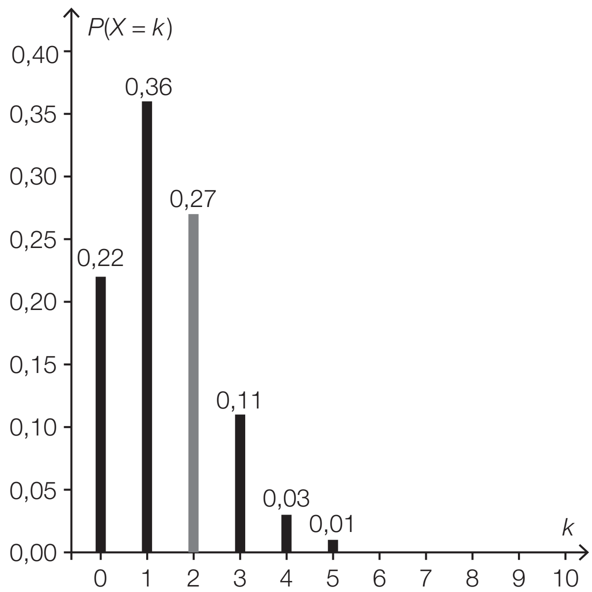
b1) X … Anzahl derjenigen Personen, die Orange als Lieblingsfarbe nennen

Binomialverteilung mit $p = 0{,}07$:
$P(X \geq 1) = 0{,}9$
$1 - P(X = 0) = 0{,}9$
$1 - 0{,}93^n = 0{,}9$

$n = 31{,}7\ldots$

Es müssen mindestens 32 Personen befragt werden.

c1) $P(X = 2) = 0{,}96 - (0{,}22 + 0{,}36 + 0{,}11) = 0{,}27$



Toleranzintervall für die Höhe der Säule: [0,25; 0,30]

Es ist nicht erforderlich, den Wert von P(X = 2) anzugeben.

d1) Addiert man die Prozentsätze für alle Lieblingsfarben, so erhält man ein Ergebnis, das größer als 100 % ist.

Pauschalreisen

Aufgabennummer: 2_071	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AG 2.1, WS 3.2	

Ein Reisebüro vermittelt Plätze für Pauschalreisen nach Kroatien.

a) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Alle 100 zur Verfügung stehenden Plätze werden vermittelt.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 4 der vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen werden.

2) Beschreiben Sie ein mögliches Ereignis *E* im gegebenen Sachzusammenhang, dessen Wahrscheinlichkeit folgendermaßen berechnet werden kann:
$\binom{100}{5} \cdot 0{,}05^5 \cdot 0{,}95^{95}$

b) Es wird angenommen, dass die vermittelten Plätze unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht in Anspruch genommen werden. Es werden 102 Plätze vermittelt, obwohl nur 100 Plätze zur Verfügung stehen.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Plätze unter diesen Voraussetzungen nicht ausreicht.

c) Pro Reisetermin stehen jeweils 100 Plätze zur Verfügung.
Für jeden gebuchten Platz erzielt das Reisebüro einen Gewinn von a Euro.
Für jeden nicht gebuchten Platz macht das Reisebüro einen Verlust von 120 Euro.
Den Gesamtgewinn erhält man, indem man vom Gewinn für alle gebuchten Plätze den Verlust für alle nicht gebuchten Plätze abzieht.

Bei einem bestimmten Reisetermin werden nur x Plätze gebucht. Der Gesamtgewinn für diesen Termin beträgt G Euro.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus a und G.

$x =$ ____________________________________

Lösungserwartung

a1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 100$ und $p = 0{,}05$

$P(X \leq 4) = 0{,}4359...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 43,6 %.

a2) Es werden 5 der 100 vermittelten Plätze nicht in Anspruch genommen.

b1) X ... Anzahl der nicht in Anspruch genommenen Plätze

Binomialverteilung mit $n = 102$ und $p = 0{,}05$

$P(X \leq 1) = 0{,}0340...$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt rund 3,4 %.

c1) $G = x \cdot a - (100 - x) \cdot 120 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{G + 12\,000}{a + 120}$

Auslastung von Flügen

Für Fluggesellschaften ist eine hohe Auslastung ihrer Flüge wichtig.

Aufgabenstellung:

a) Häufig werden bei Flügen nicht alle verkauften Tickets in Anspruch genommen. Daher werden üblicherweise mehr Tickets verkauft, als Plätze zur Verfügung stehen.
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person (unabhängig von den anderen Personen) ihr Ticket in Anspruch nimmt, beträgt 90 %.
Für einen bestimmten Flug werden 6 % mehr Tickets verkauft, als Plätze zur Verfügung stehen.

Es stehen m Plätze zur Verfügung.
Es werden n Tickets verkauft.
Bei n verkauften Tickets beträgt der Erwartungswert für die in Anspruch genommenen Tickets 477.

1) Berechnen Sie n und m.

n = ____

m = ____ *[0/1 P.]*

Folgendes Ereignis E wird betrachtet:
E ... „für mindestens 1 Person, die ihr Ticket in Anspruch nehmen möchte, steht kein Platz zur Verfügung“

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E)$. *[0/1 P.]*

b) Für einen bestimmten Flug eines voll besetzten Flugzeugs kann der Zusammenhang zwischen der Flugdistanz s und dem Treibstoffverbrauch $V(s)$ näherungsweise durch die Funktion $V\colon [2\,000; 10\,000] \to \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

$$V(s) = 4 + \left(\frac{s}{128\,000} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{s}{1\,000} \cdot e^{-\frac{s}{4\,000}} \quad \text{mit} \quad 2\,000 \leq s \leq 10\,000$$

s ... Flugdistanz in km
$V(s)$ ... Treibstoffverbrauch bei der Flugdistanz s in Litern pro Fluggast pro 100 km

1) Ermitteln Sie die Flugdistanz d (in km), bei der der Treibstoffverbrauch am geringsten ist. *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Menge an Treibstoff (in L), die dieses Flugzeug für die Flugdistanz d benötigt, wenn es mit 271 Fluggästen voll besetzt ist. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $n = \frac{477}{0{,}9} = 530$

$m = \frac{530}{1{,}06} = 500$

a2) X ... Anzahl der Personen, die ihr Ticket in Anspruch nehmen
Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 530$ und $p = 0{,}9$.

$P(X \geq 501) = 0{,}00012...$

a1) Ein Punkt für das richtige Berechnen von n und m.
a2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

b1) $V'(d) = 0$
$d = 3\,507{,}5...$ km
$(V''(3\,507{,}5...) > 0)$

b2) $V(3\,507{,}5...) = 3{,}67...$
$3{,}67... \cdot 271 \cdot 35{,}0... = 34\,934{,}1...$

Die benötigte Menge an Treibstoff beträgt rund 34 934 L.

b1) Ein Punkt für das richtige Ermitteln der Flugdistanz d.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der benötigten Menge an Treibstoff.

Krankenstände

Die durchschnittliche Dauer der Krankenstände von Angestellten in einem bestimmten Betrieb ist in den letzten Jahren gesunken.

Aufgabenstellung:

a) In der nachstehenden Tabelle ist für das Jahr 2000 und für das Jahr 2015 jeweils die durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Tagen angegeben.

Jahr	durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Tagen
2000	12,6
2015	9,9

Mithilfe dieser Daten soll eine lineare Funktion K erstellt werden, die die durchschnittliche Dauer der Krankenstände in Abhängigkeit von der Zeit t ab dem Jahr 2000 beschreibt.

1) Stellen Sie eine Gleichung der linearen Funktion K auf. *[0/1 P.]*

$K(t) =$ ____________________

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2000
$K(t)$ ... durchschnittliche Dauer der Krankenstände zur Zeit t in Tagen

Es wird folgende Berechnung durchgeführt:

$$\frac{9{,}9 - 12{,}6}{12{,}6} \approx -0{,}214$$

2) Interpretieren Sie das Ergebnis dieser Berechnung im gegebenen Sachzusammenhang. *[0/1 P.]*

b) Aus langjähriger Erfahrung ist bekannt, dass im Winter der Angestellte A mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % und der Angestellte B mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 % erkrankt.

Dabei wird modellhaft angenommen, dass alle Erkrankungen unabhängig voneinander erfolgen.

1) Beschreiben Sie ein im gegebenen Sachzusammenhang mögliches Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem nachstehenden Ausdruck berechnet wird.

$P(E) = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}7$ *[0/1 P.]*

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Angestellte A in höchstens 1 von 5 Wintern erkrankt. *[0/1 P.]*

Möglicher Lösungsweg

a1) $K(t) = -0{,}18 \cdot t + 12{,}6$

a2) Die durchschnittliche Dauer der Krankenstände hat im Zeitraum von 2000 bis 2015 um rund 21,4 % abgenommen.

a1) Ein Punkt für das richtige Aufstellen der Gleichung der Funktion *K*.
a2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren im gegebenen Sachzusammenhang.

b1) *E* ... „mindestens 1 der beiden Angestellten erkrankt in einem Winter"

b2) *X* ... Anzahl der Winter mit Erkrankungen des Angestellten *A*
X ist binomialverteilt mit $n = 5$, $p = 0{,}2$.

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}8^5 + 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}73728$

b1) Ein Punkt für das richtige Beschreiben von *E* im gegebenen Sachzusammenhang.
b2) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.

Aufnahmetest

Aufgabennummer: 2_002	Typ 1 ☐ Typ 2 ☒ technologiefrei ☐

Bei einem Aufnahmetest werden 10 Multiple-Choice-Fragen gestellt. Für jede Frage sind 4 Antwortmöglichkeiten angegeben, wobei nur eine davon richtig ist.
Kandidat K nimmt an diesem Aufnahmetest teil. Er kreuzt alle Antworten zufällig und unabhängig voneinander an.

Aufgabenstellung:

a) 1) Geben Sie zwei Gründe an, warum die Anzahl der richtig beantworteten Fragen unter den vorliegenden Annahmen binomialverteilt ist.

b) Beantwortet man mindestens 7 Fragen richtig, so gilt der Aufnahmetest als bestanden. Beantwortet man alle 10 Fragen richtig, so erhält man zusätzlich ein Leistungsstipendium.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat K nicht aufgenommen wird.

2) Interpretieren Sie die Wahrscheinlichkeit $0{,}25^{10}$ im gegebenen Sachzusammenhang.

c) 1) Berechnen Sie den Erwartungswert der von Kandidat K zufällig richtig beantworteten Fragen.

Lösungserwartung

a1) Die Anzahl der richtig beantworteten Fragen ist unter den vorliegenden Annahmen binomialverteilt, weil:

- es nur die beiden Ausgänge „richtig beantwortet“ und „falsch beantwortet“ gibt,
- das Experiment unabhängig mit $n = 10$ Mal wiederholt wird,
- die Erfolgswahrscheinlichkeit dabei konstant bleibt.

b1) $1 - P(X \geq 7) = 1 - 0{,}0035\ldots = 0{,}9964\ldots$

b2) $0{,}25^{10}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass Kandidat K ein Leistungsstipendium erhält.

c1) $10 \cdot 0{,}25 = 2{,}5$

Lösungsschlüssel

a1) Ein Punkt für das Angeben von zwei richtigen Gründen.

b1) Ein Punkt für das richtige Berechnen der Wahrscheinlichkeit.
b2) Ein Punkt für das richtige Interpretieren.

c1) Ein Punkt für das richtige Berechnen des Erwartungswerts.

Bitcoin*

Aufgabennummer: 2_036	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: AN 1.1, AN 1.3, FA 1.4, WS 1.1, WS 4.1	

Bitcoin (Währungskürzel: BTC) ist eine digitale Kunstwährung. Der Marktwert des Bitcoin ergibt sich aufgrund von Angebot und Nachfrage.

Nutzer/innen des Bitcoin werden in dieser Aufgabe als Bitcoin-User bezeichnet.

Die nachstehende Abbildung zeigt den Bitcoin-Euro-Kurs vom 11. März 2015 bis zum 11. März 2016. Die linke Skala zeigt dabei den absoluten Wert eines Bitcoins in Euro, die rechte Skala zeigt die Veränderung in Prozent bezogen auf den 11. März 2015.

Datenquelle: http://www.finanzen.net/devisen/bitcoin-euro-kurs [11.03.2017] (adaptiert).

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 9. Mai 2018

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie an, in welchem der Monate von April 2015 bis Dezember 2015 der Bitcoin-Euro-Kurs jeweils vom Monatsanfang bis zum Monatsende absolut am stärksten gefallen ist, und geben Sie diesen Kursverlust in Euro an!

Monat: ________________

Kursverlust: ________________

Es sei K_1 der Bitcoin-Euro-Kurs zum Beginn des betreffenden Monats, K_2 der Bitcoin-Euro-Kurs am Ende des betreffenden Monats sowie AT die Anzahl der Tage des betreffenden Monats.

Berechnen Sie den ungefähren Wert des Ausdrucks $\frac{K_2 - K_1}{AT}$ und interpretieren Sie das Ergebnis im gegebenen Kontext!

b) Anfang Jänner 2016 waren ca. 15 Millionen Bitcoins im Umlauf. Die t Jahre nach dem Jahr 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins ist annähernd $f(t) = 21 \cdot 10^6 - 21 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}18 \cdot t}$. Damit ist $f(0)$ die zu Anfang Jänner 2009 im Umlauf befindliche Menge an Bitcoins.

Bestimmen und interpretieren Sie die relative (prozentuelle) Änderung der im Umlauf befindlichen Menge an Bitcoins im Zeitintervall [7; 8]!

Geben Sie eine Gleichung an, mit der derjenige Zeitpunkt berechnet werden kann, ab dem nur mehr eine Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden kann, und ermitteln Sie diesen Zeitpunkt!

c) Eine Untersuchung der Demografie von Bitcoin-Usern hat ergeben, dass weltweit 88 % der Bitcoin-User männlich sind.
Es soll festgestellt werden, wie hoch dieser Prozentsatz in Österreich ist. Dazu wird eine große Anzahl an Personen befragt. Diese Befragung ergibt, dass 171 der befragten Personen Bitcoin-User sind, und von diesen 171 Personen sind 138 männlich.

Geben Sie aufgrund dieser Daten ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil der männlichen Bitcoin-User unter allen Bitcoin-Usern in Österreich an!

Geben Sie an, welches Konfidenzniveau zur Berechnung eines solchen Intervalls mindestens angenommen werden muss, damit der weltweit ermittelte Anteil von 88 % in diesem Intervall enthalten ist!

Lösungserwartung

a) Monat: August

Kursverlust: ≈ € 55

$\frac{K_2 - K_1}{AT} \approx -1{,}8$

Mögliche Interpretation:

Im August 2015 betrug die durchschnittliche Kursänderung pro Tag ca. € –1,8.

oder:

Im August 2015 betrug der durchschnittliche Kursverlust pro Tag ca. € 1,8.

b) $\frac{f(8) - f(7)}{f(7)} \approx 0{,}065$

Mögliche Interpretation:
Die Anzahl der im Umlauf befindlichen Bitcoins nimmt im Zeitraum von Anfang Jänner 2016 bis Anfang Jänner 2017 um ca. 6,5 % zu.

Mögliche Gleichung:
$f(t) = 20 \cdot 10^6$

Lösung der Gleichung: $t \approx 17$
Ungefähr Anfang Jänner 2026 kann nur mehr 1 Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden.

c) $n = 171 \qquad h \approx 0{,}807$

$0{,}807 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}807 \cdot (1 - 0{,}807)}{171}} \approx 0{,}807 \pm 0{,}059 \quad \Rightarrow \quad [0{,}748; 0{,}866]$

Mögliche Vorgehensweise:
$0{,}880 - \frac{138}{171} \approx 0{,}073$
$0{,}073 \leq z \cdot \sqrt{\frac{0{,}807 \cdot (1 - 0{,}807)}{171}} \quad \Rightarrow \quad z \geq 2{,}418$
$2 \cdot \Phi(2{,}418) - 1 \approx 0{,}984$

Das Konfidenzniveau muss mindestens 98,4 % betragen.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die Angabe des richtigen Monats sowie des korrekten Wertes für den Kursverlust. Toleranzintervall: [€ 50; € 70]
– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.
Toleranzintervall: [–2,3; –1,5] bzw. [1,5; 2,3]

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.
Toleranzintervall: [0,06; 0,07] bzw. [6 %; 7 %]
– Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Andere korrekte Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall [16; 17] bzw. [2025; 2026]

c) – Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,74; 0,75]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,86; 0,87]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [0,98; 0,99] bzw. [98 %; 99 %]

Wahlhochrechnung*

Aufgabennummer: 2_044	Aufgabentyp: Typ 1 ☐ Typ 2 ☒
Grundkompetenz: FA 2.2, FA 2.3, WS 1.1, WS 1.3, WS 4.1	

Es gibt unterschiedliche mathematische Methoden, um auf das Wahlverhalten von Wählerinnen und Wählern bei bevorstehenden Wahlen zu schließen. Eine gängige Methode ist die Erhebung und Auswertung der Daten einer Stichprobe. In einem anderen Verfahren werden sogenannte *Regressionsgeraden* ermittelt, mit deren Hilfe eine relativ genaue Hochrechnung möglich ist. Zur Bestimmung dieser Regressionsgeraden benötigt man die Ergebnisse einer sogenannten *Vergleichswahl*, die idealerweise zeitnah erfolgte.

Die 4 150 Wahlberechtigten eines bestimmten Ortes mit fünf Wahlbezirken konnten sich bei einer Bürgermeisterwahl zwischen den Kandidaten A und B entscheiden. Alle Wahlberechtigten gaben ihre Stimme ab und es gab keine ungültigen Stimmen. Nach der Auszählung der Stimmen von vier der fünf Wahlbezirke liegt folgendes Zwischenergebnis vor:

Tabelle 1: Bürgermeisterwahl

	1. Wahlbezirk	2. Wahlbezirk	3. Wahlbezirk	4. Wahlbezirk	5. Wahlbezirk
Kandidat A	443	400	462	343	nicht gezählt
Kandidat B	332	499	466	227	nicht gezählt
Wahlberechtigte	775	899	928	570	978

Der relative Stimmenanteil für Kandidat A für die ersten vier Wahlbezirke bei dieser Bürgermeisterwahl wird mit h bezeichnet.

Aufgabenstellung:

a) Geben Sie an, wie viele Stimmen für Kandidat A im 5. Wahlbezirk zu erwarten sind, wenn man h als Schätzwert für den relativen Stimmenanteil für diesen Kandidaten in diesem Wahlbezirk verwendet!

Im 4. Wahlbezirk weicht das Ergebnis für Kandidat A am stärksten von h ab.
Geben Sie diese Abweichung in Prozentpunkten an!

* ehemalige Klausuraufgabe, Maturatermin: 15. Jänner 2019

b) Die nachstehende Tabelle zeigt das Ergebnis einer Vergleichswahl.

Tabelle 2: Vergleichswahl

	1. Wahlbezirk	2. Wahlbezirk	3. Wahlbezirk	4. Wahlbezirk	5. Wahlbezirk	gesamt
Kandidat *A*	390	416	409	383	478	2 076
Kandidat *B*	385	483	519	187	500	2 074
Wahlberechtigte	775	899	928	570	978	4 150

Die Variable x sei die Anzahl der Stimmen für Kandidat A bei der Vergleichswahl, die Variable y die Anzahl der Stimmen für Kandidat A bei der Bürgermeisterwahl. Damit erhält man für den Kandidaten A für die Ergebnisse aus dem 1., 2., 3. und 4. Wahlbezirk vier Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die Regressionsgerade g: $y = 1{,}5462 \cdot x - 205{,}71$ verläuft nun durch diese „Punktwolke" so, dass ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Variablen x und y gut beschrieben wird.

Berechnen Sie mithilfe der Regressionsgeraden g die erwartete Anzahl an Stimmen bei der Bürgermeisterwahl für den Kandidaten A im 5. Wahlbezirk!

Interpretieren Sie den Wert der Steigung der Regressionsgeraden g im gegebenen Kontext!

c) Bei einer österreichweiten Wahl kann ein Kandidat C gewählt werden. Aus einer vorhergehenden Wahl ist bekannt, dass der Stimmenanteil h für Kandidat A bei der Bürgermeisterwahl in den Wahlbezirken 1 bis 4 repräsentativ für den Stimmenanteil für Kandidat C bei der österreichweiten Wahl ist.
Ermitteln Sie anhand des Stimmenanteils h ein symmetrisches 95-%-Konfidenzintervall für den unbekannten Stimmenanteil für Kandidat C!

Nach Auszählung aller Stimmen bei der österreichweiten Wahl hat der Kandidat C 61 % der Stimmen erhalten. Damit liegt dieser Stimmenanteil außerhalb des davor ermittelten symmetrischen 95-%-Konfidenzintervalls.

Hätte man als Konfidenzniveau 90 % gewählt, so hätte man ein Konfidenzintervall mit einer anderen Breite erhalten.
Geben Sie an, ob der tatsächliche Stimmenanteil für Kandidat C in diesem Konfidenzintervall enthalten wäre, und begründen Sie Ihre Entscheidung!

Lösungserwartung

a) $\frac{1648}{3172} \approx 0{,}52$

Für Kandidat A sind ca. 52 % von 978 Stimmen, also ca. 509 Stimmen, zu erwarten.

relativer Stimmenanteil für Kandidat A im 4. Wahlbezirk: $\frac{343}{570} \approx 0{,}6$

Der relative Stimmenanteil weicht im 4. Wahlbezirk um ca. 8 Prozentpunkte von h ab.

b) $1{,}5462 \cdot 478 - 205{,}71 \approx 533$

Bei der Hochrechnung mithilfe der Regressionsgeraden g erhält Kandidat A im 5. Wahlbezirk ca. 533 Stimmen bei der Bürgermeisterwahl.

Mögliche Interpretation:

Der Wert der Steigung von g gibt an, dass Kandidat A pro zusätzlicher Stimme bei der Vergleichswahl ca. 1,55 Stimmen mehr bei der Bürgermeisterwahl erwarten kann.

c) $0{,}52 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}52 \cdot 0{,}48}{3172}} \approx 0{,}52 \pm 0{,}017 \quad \Rightarrow \quad [0{,}503; 0{,}537]$

Ein symmetrisches 90-%-Konfidenzintervall hat bei gleicher Stichprobengröße sowie gleichem Stichprobenanteil und der Verwendung derselben Berechnungsmethode eine geringere Breite als das symmetrische 95-%-Konfidenzintervall, daher wäre das Ergebnis auch nicht im symmetrischen 90-%-Konfidenzintervall enthalten.

Lösungsschlüssel

a) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [500; 510]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [8; 9]

b) – Ein Punkt für die richtige Lösung.
Toleranzintervall: [530 Stimmen; 540 Stimmen]
– Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

c) – Ein Punkt für ein richtiges Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,500; 0,503]
Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,536; 0,540]
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für eine richtige Entscheidung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.