Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

21. September 2015

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 9)

Korrekturheft

BM|BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im Erlass mit der Geschäftszahl BMBF-17.200/0166-II/2014 des Bundesministeriums für Bildung und Frauen.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A* (**KA**) umfasst die unabhängig[1] erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B* (**KB**) umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufe 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche" eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen" wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend" (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin / des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag der Prüferin / des Prüfers zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

43–48 Punkte	Sehr gut
37–42 Punkte	Gut
31–36 Punkte	Befriedigend
20–30 Punkte	Genügend
0–19 Punkte	Nicht genügend

[1] Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur **ein möglicher** Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.

2. Der Lösungsschlüssel ist **verbindlich** anzuwenden unter Beachtung folgender Vorgangsweisen:

   a. Grundsätzlich sind Punkte nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung als vollständig erfüllt zu erkennen ist.

   b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.

   c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin / vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.

   d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin / vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.

   e. Werden von der Kandidatin / vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.

   f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin / des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.

   g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.

   h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.

   i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

3. Sind Sie sich als Korrektor/in über die Punktevergabe nicht schlüssig, können Sie eine Korrekturanfrage an das BIFIE (via Telefon-Hotline oder Online-Helpdesk) stellen.

Aufgabe 1

Vergnügungspark

Möglicher Lösungsweg

a) $4{,}1 = 9 - x^2$
$x^2 = 4{,}9$
$x = \pm 2{,}213...$

Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

$\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\mathrm{d}x = 36$

Der Flächeninhalt der benötigten Folie beträgt 36 m².

b) Diese Polynomfunktion hat im dargestellten Intervall 2 lokale Extremstellen. Somit muss die 1. Ableitung dieser Funktion 2 Nullstellen haben, also mindestens eine Polynomfunktion 2. Grades sein. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Eine Gerade parallel zur x-Achse hat 3 Schnittpunkte mit dem Graphen der Funktion. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

oder:

Der Graph ist keine Gerade und keine Parabel. Somit muss die gegebene Polynomfunktion mindestens Grad 3 haben.

c) rechtwinkeliges Dreieck FPS: $\tan(\beta) = \frac{\overline{SP}}{a} \Rightarrow \overline{SP} = a \cdot \tan(\beta)$

rechtwinkeliges Dreieck FQS: $\tan(\alpha) = \frac{\overline{SQ}}{a} \Rightarrow \overline{SQ} = a \cdot \tan(\alpha)$

$h = \overline{SP} - \overline{SQ}$
$h = a \cdot \tan(\beta) - a \cdot \tan(\alpha) = a \cdot (\tan(\beta) - \tan(\alpha))$

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Breite b (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Flächeninhalts (KA)
b) 1 × D: für eine richtige Argumentation (KA)
c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel (KA)

Aufgabe 2

Luftdruck – Höhenformel

Möglicher Lösungsweg

a) $p(0) = p_0 \cdot e^{-\frac{0}{7\,991}} = p_0 \cdot 1 = p_0$

$\frac{p_0}{2} = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7\,991}}$

$h = 7\,991 \cdot \ln(2) = 5\,538{,}9\ldots$

Bei einer Seehöhe von rund 5 539 m beträgt der Luftdruck genau die Hälfte von p_0.

b) $f(h) = 1\,013 - \frac{1}{10} \cdot h$

c) Modellierung durch eine lineare Funktion g mit $g(x) = a \cdot x + b$:
$1\,040 = a \cdot 990 + b$
$930 = a \cdot 1\,980 + b$

$g(x) = -\frac{1}{9} \cdot x + 1\,150$

$g(1\,300) = \frac{9\,050}{9} \approx 1\,006$

Der Luftdruck in einer Höhe von 1 300 m über dem Meeresspiegel beträgt rund 1 006 hPa.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für einen richtigen Nachweis (KA)
1 × A: für den richtigen Lösungsansatz zur Berechnung (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Seehöhe (KB)
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktion (KA)
c) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (z. B. mithilfe einer linearen Funktion bzw. ähnlicher Dreiecke) (KA)
1 × B: für die richtige Bestimmung des Luftdrucks (KB)

Aufgabe 3

Produktion von Rucksäcken

Möglicher Lösungsweg

a) Es wird die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis berechnet, dass ein zufällig kontrollierter Rucksack Nahtfehler, aber keine der beiden anderen Fehlerarten aufweist.

b) $P(\text{„mindestens 1 Fehler“}) = 1 - P(\text{„kein Fehler“}) = 1 - 0{,}98 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 = 0{,}0589... \approx 5{,}9\ \%$

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Rucksack mindestens 1 dieser 3 Fehler aufweist, muss bei der Verwendung der Gegenwahrscheinlichkeit nur 1 Ereignis, nämlich das Ereignis, dass kein Fehler auftritt, betrachtet werden.
Bei einer direkten Berechnung müssten die Wahrscheinlichkeiten für eine Vielzahl von Ereignissen berechnet und addiert werden.

c) Berechnung mittels Binomialverteilung: $n = 100$ und $p = 0{,}03$
$P(X < 3) = 0{,}41977... \approx 41{,}98\ \%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Angabe des Ereignisses (es muss auch klar erkennbar sein, dass die beiden anderen Fehlerarten nicht auftreten) (KA)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
1 × D: für die richtige Erklärung zur Gegenwahrscheinlichkeit (KB)
c) 1 × A: für das Erkennen des richtigen Wahrscheinlichkeitsmodells (Binomialverteilung) (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KB)

Aufgabe 4

Tennis

Möglicher Lösungsweg

a) Aufschlaggeschwindigkeit, die von (mindestens) 25 % der Teilnehmer nicht übertroffen wurde: 120 km/h

Quartilsabstand: 30 km/h

b) ähnliche Dreiecke:

$$\frac{2{,}3}{6{,}4 + 6{,}4 + 5{,}5} = \frac{h}{6{,}4}$$

$h = 0{,}80\ldots \text{ m} \approx 0{,}8 \text{ m}$

Der Ball ist beim Netz in einer Höhe von rund 0,8 m.
Somit geht der Ball ins Netz.

c) $f'(0) = \frac{2}{5}$

$\arctan\left(\frac{2}{5}\right) = 21{,}801\ldots° \approx 21{,}80°$

Der Ball befindet sich im Abschlagpunkt in einer Höhe von $\frac{21}{50}$ Metern.

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Aufschlaggeschwindigkeit (KA)
1 × C2: für das richtige Ablesen des Quartilsabstands (KA)
b) 1 × D: für die richtige Überprüfung (KA)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation der Zahl $\frac{21}{50}$ (KA)

Aufgabe 5

Leistung einer Solaranlage

Möglicher Lösungsweg

a) $P'(6) = 0$

$0 = \frac{7}{162} \cdot 6^3 - \frac{7}{9} \cdot 6^2 + 2 \cdot a \cdot 6$

$a = \frac{14}{9}$

b) $\int_0^{12} (0{,}007 \cdot t^4 - 0{,}165 \cdot t^3 + 0{,}972 \cdot t^2 + 1{,}221)\,\mathrm{d}t = 67{,}5288$

Die Solaranlage liefert an diesem Tag rund 67,53 kWh Energie.

c) An der Wendestelle x_0 einer Funktion f gilt stets: $f''(x_0) = 0$.
Die 2. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine lineare Funktion, die genau 1 Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat. Daher hat die Polynomfunktion 3. Grades genau 1 Wendestelle.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung des Koeffizienten *a* (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Koeffizienten *a* (KB)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Integrals (KA)
c) 1 × D: für eine richtige Begründung (KB)

Aufgabe 6 (Teil B)

Segeln

Möglicher Lösungsweg

a) $\overline{BP} = \sqrt{3{,}3^2 + 2{,}7^2 - 2 \cdot 3{,}3 \cdot 2{,}7 \cdot \cos(63°)} = 3{,}176\ldots \approx 3{,}18$

Die Entfernung zwischen der Boje B und dem Punkt P beträgt rund 3,18 NM.

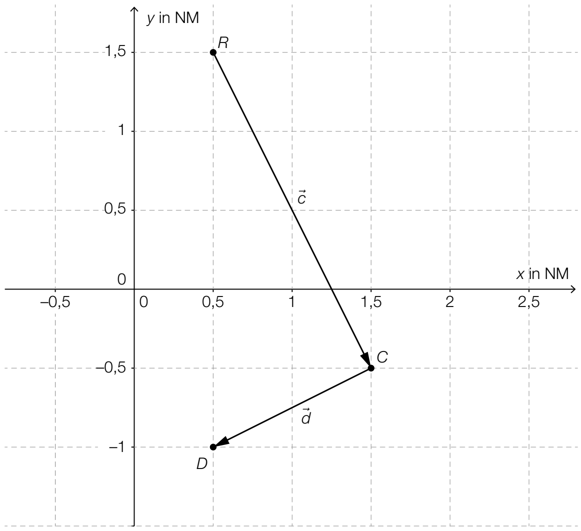
$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BP} = 9{,}176\ldots$ NM

$t = \dfrac{9{,}176\ldots}{6{,}8} = 1{,}349\ldots \approx 1{,}35$

Die Umrundung dauert etwa 1,35 Stunden.

Sinussatz: $\dfrac{\overline{PA}}{\sin(\beta)} = \dfrac{\overline{BP}}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \overline{BP} = \dfrac{\overline{PA} \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$



$\vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = 0$

Die beiden Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ stehen normal aufeinander.

c) $A = \frac{4 \cdot F_V}{1{,}225 \cdot v_W^2} = \frac{4 \cdot 153}{1{,}225 \cdot 5^2} = 19{,}9\ldots \approx 20$

Die Segelfläche muss dazu rund 20 m² betragen.

Eine Verdoppelung der Windgeschwindigkeit führt zu einer Vervierfachung der Vortriebskraft.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Entfernung $\overline{BP}$ (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Dauer dieser Umrundung (KB)
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel (KB)

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen der Koordinaten (KA)
1 × A: für das richtige Einzeichnen der Boje D (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Skalarprodukts (KB)
1 × C2: für die richtige geometrische Interpretation des Skalarprodukts (KB)

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Segelfläche (KA)
1 × C: für die richtige Beschreibung (KA)

Aufgabe 7 (Teil B)

Schwangerschaft

Möglicher Lösungsweg

a) Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden mittels Technologieeinsatz:
$y = 1{,}36 \cdot x - 10{,}42$

Gemäß dem Modell nimmt die Scheitel-Steiß-Länge durchschnittlich rund 1,36 cm pro Woche zu.

b) $m(25) = 638{,}3\ldots \approx 638$
Die Masse des Fötus zum Zeitpunkt $t = 25$ beträgt rund 638 g.

Die stärkste Massezunahme erfolgt an der Wendestelle $m''(t) = 0$.
Lösung dieser Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 35{,}26\ldots \approx 35{,}3$
Nach etwa 35,3 Wochen ist die Massezunahme am größten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Gleichung der Regressionsgeraden (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung der Regressionsgeraden (KB)

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Masse des Fötus (KA)
1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermittlung der Wendestelle) (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Zeitpunktes, an dem die Massezunahme am größten ist (In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Wendestelle die größte Massezunahme vorliegt. Eine rechnerische Überprüfung, ob an der berechneten Stelle eine Zu- oder Abnahme erfolgt, sowie eine Überprüfung der Randstellen ist daher nicht erforderlich.) (KB)

Aufgabe 8 (Teil B)

Minigolf

Möglicher Lösungsweg

a) Die Steigung der Bahn muss in den Punkten A und B null sein.

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

I. $f'(0) = 0$
II. $f'(3) = 0$
III. $f(0) = 0$
IV. $f(3) = 1{,}2$

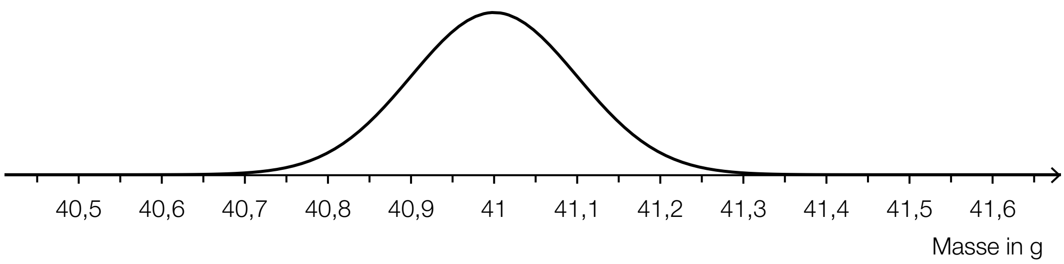
Lösen des Gleichungssystems mittels Technologieeinsatz:
$a = -\frac{4}{45}$; $b = \frac{2}{5}$; $c = 0$; $d = 0$

b) Geschwindigkeit des Balles während der ersten Sekunde: 1, 4 m/s

Die momentane Änderungsrate der Funktion v zum Zeitpunkt t_0 ist die Beschleunigung des Balles zu diesem Zeitpunkt.

Der zurückgelegte Weg entspricht dem Flächeninhalt unter dem Graphen im Intervall [0; 4,5].
Flächeninhalt des Rechtecks: $A_1 = 1{,}4 \cdot 1 = 1{,}4$
Flächeninhalt unter dem Graphen der Polynomfunktion im Intervall [1; 4,5]: $A_2 = \int_1^{4{,}5} v(t)\,\mathrm{d}t = 2{,}45$
$A = A_1 + A_2 = 3{,}85$
Der zurückgelegte Weg des Balles beträgt 3,85 m.

c) P(„Minigolfball wird aussortiert") = $1 - P(X < 41{,}25) = 0{,}0062\ldots \approx 0{,}6\ \%$



Bei einer kleineren Standardabweichung wäre die Gauß'sche Glockenkurve schmäler und höher.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für die richtige Modellbildung zur Steigung der Bahn (KA)
   1 × A2: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems (KB)
   1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten (KB)

b) 1 × C: für das richtige Ablesen der Geschwindigkeit (KA)
   1 × D: für die richtige Erklärung (KB)
   1 × A: für einen richtigen Ansatz (Aufteilen in 2 Teilflächen) (KB)
   1 × B: für die richtige Berechnung des zurückgelegten Weges (KB)

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
   1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Dichtefunktion (Glockenkurve mit Maximum an der Stelle μ und Wendepunkten an den Stellen $\mu \pm \sigma$ erkennbar) (KA)
   1 × C: für die richtige Beschreibung (KA)