Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

20. September 2016

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 9)

Korrekturheft

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Bundesinstitut
bifie

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im Erlass mit der Geschäftszahl BMBF-17.100/0006-II/2015 des Bundesministeriums für Bildung und Frauen.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A* (**KA**) umfasst die unabhängig[1] erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B* (**KB**) umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche" eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen" wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend" (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin / des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin / vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

43–48 Punkte	Sehr gut
37–42 Punkte	Gut
32–36 Punkte	Befriedigend
22–31 Punkte	Genügend
0–21 Punkte	Nicht genügend

[1] Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur **ein möglicher** Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.

2. Der Lösungsschlüssel ist **verbindlich** anzuwenden unter Beachtung folgender Vorgangsweisen:

   a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.

   b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.

   c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin / vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.

   d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin / vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.

   e. Werden von der Kandidatin / vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.

   f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin / des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.

   g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.

   h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.

   i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

3. Sind Sie sich als Korrektor/in über die Punktevergabe nicht schlüssig, können Sie eine Korrekturanfrage an das BIFIE (via Telefon-Hotline oder Online-Helpdesk) stellen.

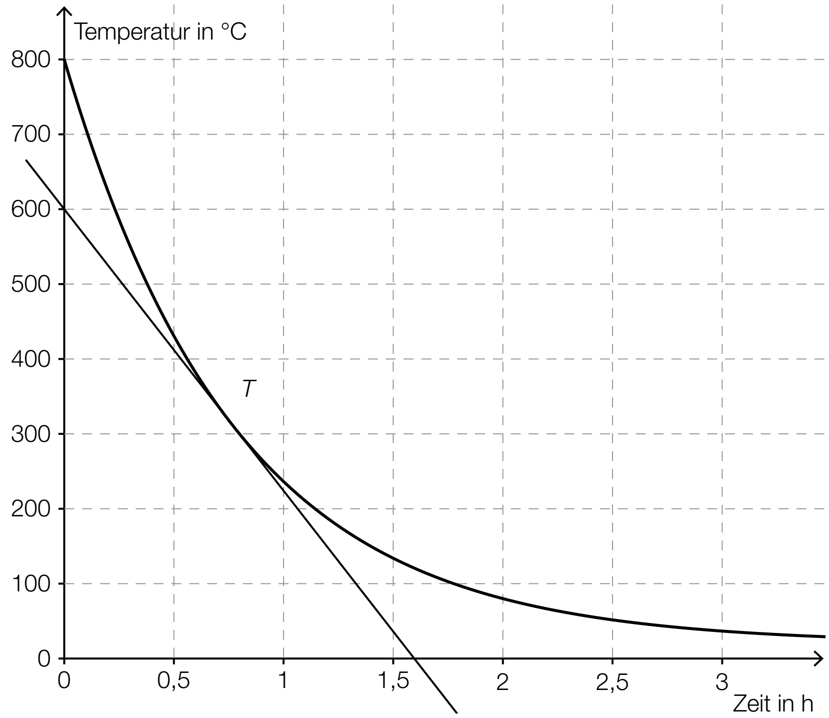
Aufgabe 1

Brennofen

Möglicher Lösungsweg

a) $80 = 20 + 780 \cdot e^{-k \cdot 2}$
Lösung mittels Technologieeinsatz: $k = \frac{1}{2} \cdot \ln(13) = 1{,}2824...$
$T(5) = 21{,}2... \approx 21$
Die Temperatur des Kruges beträgt 5 Stunden nach der Entnahme aus dem Brennofen rund 21 °C.

b)



Damit berechnet man die mittlere Änderungsrate der Temperatur im Zeitintervall [1; 3].

c) Die Kettenregel wurde nicht angewendet.
oder:
Die innere Ableitung wurde nicht berücksichtigt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Temperatur (KA)
b) 1 × A: für das richtige Skizzieren der Tangente (KA)
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
c) 1 × C: für das richtige Angeben der Ableitungsregel oder die richtige Beschreibung (KA)

Aufgabe 2

Baseball

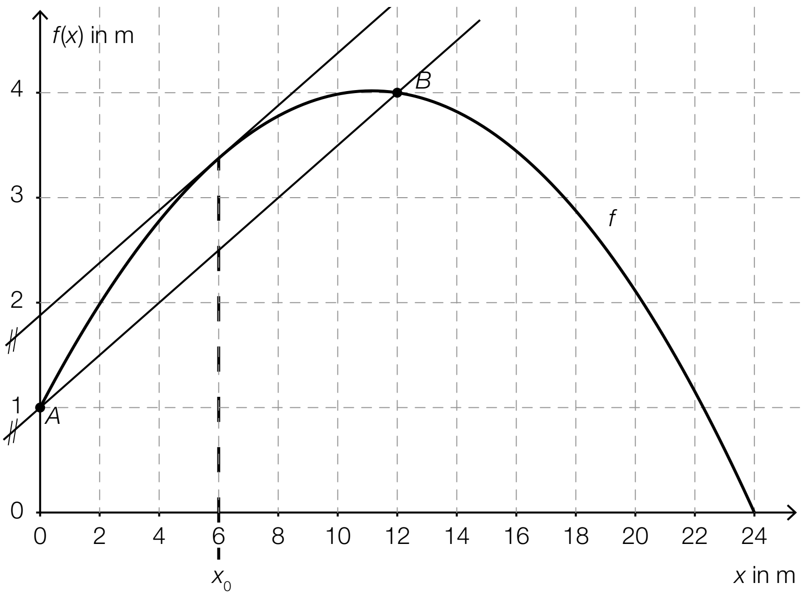
Möglicher Lösungsweg

a) Steigung k der Geraden durch die Punkte A und B:

$k = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Steigungswinkel α:

$\alpha = \arctan(k) = 14{,}036...° \approx 14{,}04°$



b) $K(x) = 6{,}4 \cdot x + 570$

$K(75) = 6{,}4 \cdot 75 + 570 = 1\,050$

$\frac{1\,050}{75} = 14$

Die T-Shirts können ab einem Verkaufspreis von € 14 pro Stück ohne Verlust verkauft werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels (KA)
1 × A: für das richtige Veranschaulichen (KB)

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der linearen Kostenfunktion K (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Verkaufspreises pro Stück (KB)

Aufgabe 3

Riesen-Pizza

Möglicher Lösungsweg

a) Spannweite: 3 Inch

Sowohl der falsche als auch der korrekte Wert liegen zwischen dem Minimum und dem ersten Quartil. Daher verändert dieser Fehler weder das Minimum noch das erste Quartil und beeinflusst den Boxplot nicht.

b) Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser d: $A_d = \frac{d^2}{4} \cdot \pi$
Flächeninhalt eines Kreises mit Durchmesser $2d$: $A_{2d} = \frac{4d^2}{4} \cdot \pi = d^2 \cdot \pi = 4 \cdot A_d$

Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.

c) $P'(d) = 0{,}0006 \cdot d - 0{,}015$
$P'(d) = 0 \;\Rightarrow\; d = 25$

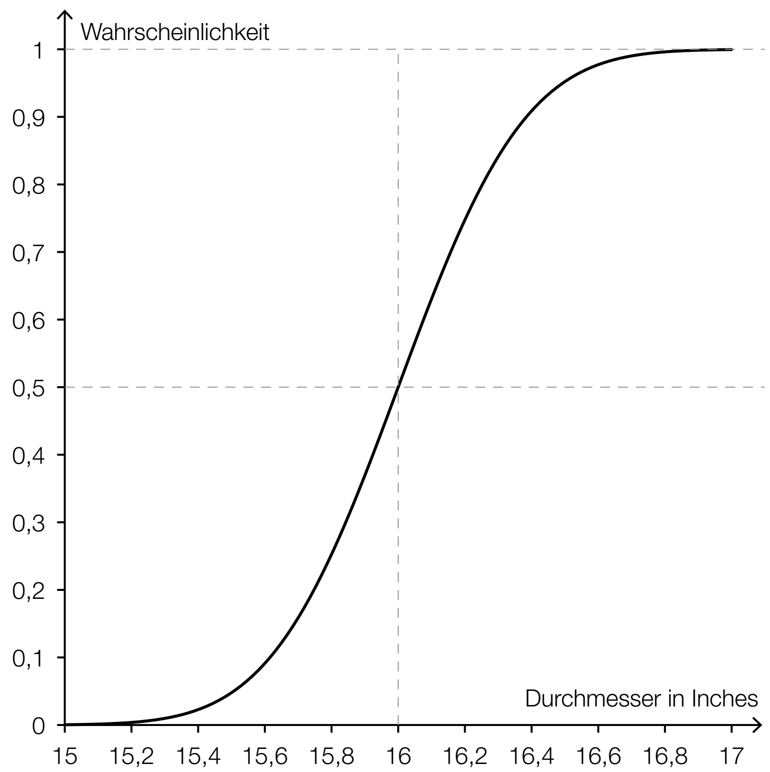
Die Pizza mit dem geringsten Preis pro Flächeneinheit hat einen Durchmesser von 25 Inch.

$P(25) = 0{,}0744$
$P(25) \cdot \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \pi = 36{,}521\ldots$

Gemäß diesem Modell kostet diese Pizza 36,52 US-Dollar.

d) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \geq 16{,}2) = 0{,}2524\ldots$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pizza einen Durchmesser von mindestens 16,2 Inch hat, beträgt rund 25,2 %.



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für das richtige Ablesen der Spannweite (KA)
1 × D: für die richtige Erklärung (KA)

b) 1 × D: für den richtigen allgemeinen Nachweis (Ein Nachweis mit konkreten Zahlenwerten für die Durchmesser ist nicht ausreichend.) (KA)

c) 1 × B1: für die richtige Bestimmung der Extremstelle (Der Nachweis, dass es sich bei der Extremstelle um eine Minimumstelle handelt, ist nicht erforderlich.) (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Preises der Pizza (KB)

d) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
1 × A: für das richtige Skizzieren des Graphen der Verteilungsfunktion (charakteristischer Funktionsverlauf und Funktionswert an der Stelle μ richtig eingezeichnet) (KA)

Aufgabe 4

Teilchenbeschleuniger

Möglicher Lösungsweg

a) $u = \frac{3 \cdot 10^8}{a \cdot 10^3}$

b) Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass bei 500 Kollisionen genau 2 Teilchen dieses Typs entstehen.

$1\,000 \cdot 0{,}034 = 34$

Bei 1 000 Kollisionen entstehen im Mittel 34 Teilchen dieses Typs.

c) $\frac{100}{0{,}01} = \frac{d}{10^{-14}} \;\Rightarrow\; d = 10^{-10}$

Der Durchmesser des Atoms beträgt 10^{-10} m.

Das Verhältnis der Durchmesser beträgt $1 : 10^4$.
Bei der Berechnung des Volumens tritt die dritte Potenz des Durchmessers auf. Das Verhältnis der Volumina beträgt daher $1 : 10^{12}$. 0,01 % entsprechen dem Verhältnis $1 : 10^4$.

oder:

rechnerisch:

$$\frac{V_{\text{Atomkern}}}{V_{\text{Atom}}} = \frac{\frac{\pi}{6} \cdot (10^{-14})^3}{\frac{\pi}{6} \cdot (10^{-10})^3} = 10^{-12}$$

Das Verhältnis der Volumina beträgt daher $1 : 10^{12}$. 0,01 % entsprechen dem Verhältnis $1 : 10^4$.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel (KB)
b) 1 × C: für die richtige Beschreibung des Ereignisses (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung des Erwartungswertes (KA)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers (KA)
   1 × D: für die richtige Begründung (Auch eine Begründung durch Nachrechnen ist als richtig zu werten.) (KB)

Aufgabe 5

Marathon

Möglicher Lösungsweg

a) Gesamtdauer in Sekunden:
$2 \cdot 3\,600 + 15 \cdot 60 + 25 = 8\,125$
$\frac{8\,125\text{ s}}{42{,}195\text{ km}} = 192{,}55\ldots\ \frac{\text{s}}{\text{km}} \Rightarrow$ 3 Minuten 12,55… Sekunden ≈ 3:13
Ihre mittlere Pace beträgt 3:13.

b) $\frac{42{,}195\text{ km}}{12\text{ km/h}} - \frac{42{,}195\text{ km}}{14\text{ km/h}} = 0{,}50\ldots\text{ h} \approx 0{,}5\text{ h}$
Max muss im Ziel rund eine halbe Stunde auf Franz warten.

c) $k = \frac{-2{,}5\text{ km/h}}{2{,}5\text{ h}} = -1\text{ km/h}^2$

Das Angeben der Einheit der Steigung ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

b ist die Laufzeit für die gesamte Marathonstrecke in Stunden.

Lösungsschlüssel

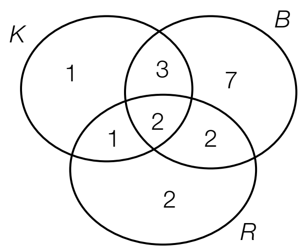
a) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren Pace in der beschriebenen Schreibweise (KA)
b) 1 × A: für einen richtigen Ansatz (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wartezeit (KB)
c) 1 × C1: für das richtige Ermitteln der Steigung (Das Angeben der Einheit der Steigung ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.) (KA)
1 × C2: für die richtige Interpretation von b im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der Einheit (KB)

Aufgabe 6 (Teil B)

Lieblingsspielformen

Möglicher Lösungsweg

a)

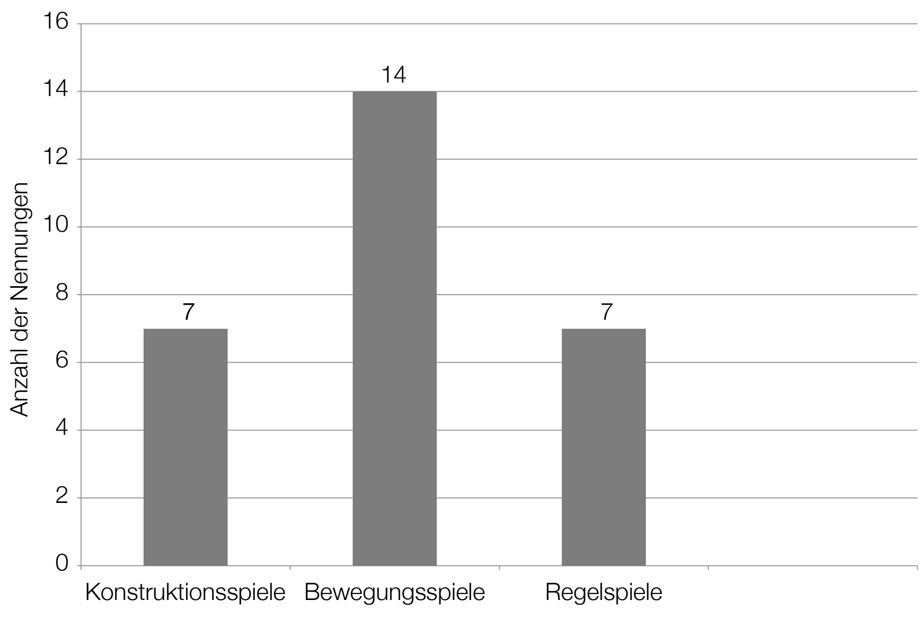


Dem Diagramm zu entnehmen: $1 + 7 + 2 = 10$.
10 Kinder haben sich für eine einzige Spielform als Lieblingsspielform entschieden.

b) $(K \cup B) \setminus (K \cap R)$

Die hervorgehobene Menge ist die Menge aller Kinder, die Bewegungsspiele oder Konstruktionsspiele als Lieblingsspielform genannt haben, ohne die Kinder, die sowohl Konstruktionsspiele als auch Regelspiele als Lieblingsspielform genannt haben.

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Ergebnisse in einem Venn-Diagramm mit den entsprechenden Anzahlen (KA)
   1 × B: für das richtige Ermitteln der Anzahl der Kinder, die sich insgesamt für eine einzige Spielform als Lieblingsspielform entschieden haben (KB)
b) 1 × A: für die richtige Angabe mithilfe der Mengensymbolik (KB)
   1 × C: für die richtige Beschreibung in Worten (KB)
c) 1 × A: für das richtige Erstellen eines Säulen- oder Balkendiagramms (KA)

Aufgabe 7 (Teil B)

Angry Birds

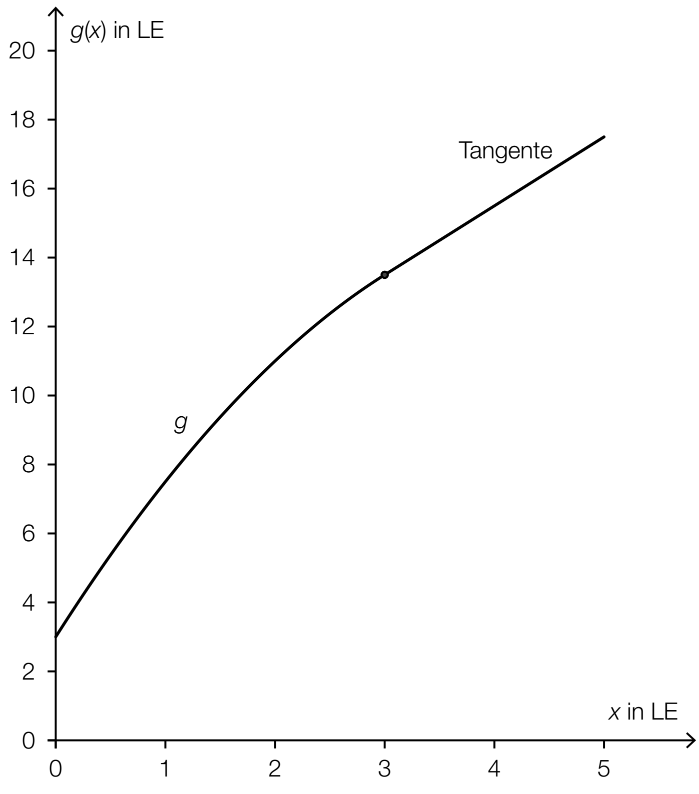
Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1 = 0$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz:
$(x_1 = -1)$
$x_2 = 10$

Der Vogel prallt in einer horizontalen Entfernung von 10 LE auf den Boden auf.

b) $g(3) = 13{,}5$
$g'(x) = -x + 5 \;\Rightarrow\; g'(3) = 2$
$13{,}5 = 2 \cdot 3 + d \;\Rightarrow\; d = 7{,}5$
Tangentengleichung: $y = 2 \cdot x + 7{,}5$



c) $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

I: $f(0) = 12$
II: $f(1) = 16$
III: $f(5) = 32$
IV: $f'(1) = 0$

d) Koordinaten des Abschusspunkts: $A = (0|8)$
Position des Schweins: $P = (5|20)$

$\sqrt{5^2 + (20 - 8)^2} = 13$

Der Abstand des Schweins vom Abschusspunkt beträgt 13 LE.

$h(5) = 18$

Der Punkt P liegt nicht auf Matildas Flugbahn.

e) Die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion beschreibt den vom Vogel zurückgelegten Weg im Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s] nach dem Abschuss.

Lösungsschlüssel

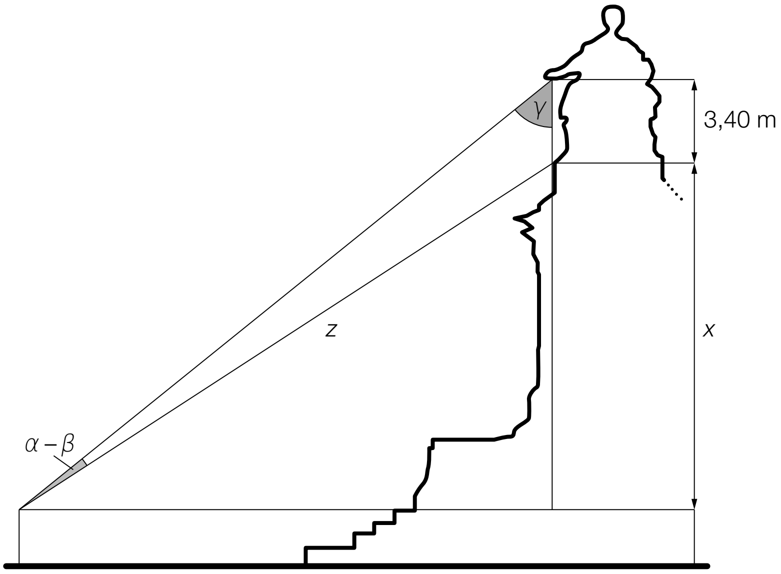
a) 1 × B: für die richtige Berechnung der horizontalen Entfernung (KA)
b) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Tangentengleichung (KA)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Flugbahn
(für $0 \leq x \leq 3$ Graph von g, für $3 \leq x \leq 5$ Tangente) (KB)
c) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte (KA)
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe der 1. Ableitung (KA)
d) 1 × B: für die richtige Berechnung des Abstands (KA)
1 × D: für die richtige Überprüfung, ob der Punkt P auf Matildas Flugbahn liegt (KA)
e) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Bedeutung der Fläche im gegebenen Sachzusammenhang unter Bezugnahme auf das Zeitintervall [1,5 s; 2,5 s] (KA)

Aufgabe 8 (Teil B)

Statuen und Skulpturen

Möglicher Lösungsweg

a)



$\gamma = 90° - \alpha = 44{,}62°$

$\alpha - \beta = 7{,}19°$

$\frac{z}{\sin(44{,}62°)} = \frac{3{,}4}{\sin(7{,}19°)}$

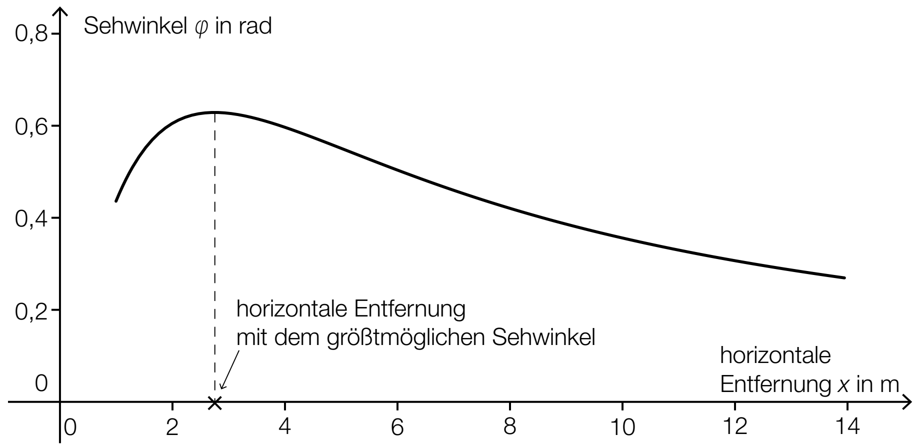
$z = 19{,}08\ \ldots$

$\sin(38{,}19°) = \frac{x}{19{,}08...}$

$x = 11{,}797\ldots$

Die Länge x beträgt rund 11,80 m.

b)



Es muss die Maximumstelle der Funktion ermittelt werden. Daher bildet man die 1. Ableitung und berechnet deren Nullstellen. Diejenige Nullstelle, die im dargestellten Bereich liegt, ist die gesuchte Extremstelle.

Dass es nur eine solche Nullstelle im dargestellten Bereich gibt, geht aus dem Graphen hervor.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für einen richtigen Lösungsansatz (z. B. mithilfe des Sinussatzes) (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung von x (KB)

b) 1 × C1: für das richtige Kennzeichnen in der Abbildung (KA)
   1 × C2: für die richtige Dokumentation der Berechnung (KB)

Aufgabe 9 (Teil B)

Blutgruppen

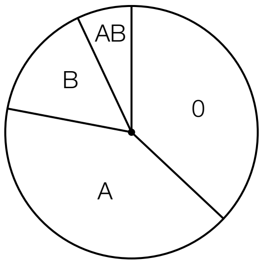
Möglicher Lösungsweg

a) Blutgruppe 0: $\frac{37}{100} \cdot 360° = 133{,}2°$

Blutgruppe A: $\frac{41}{100} \cdot 360° = 147{,}6°$

Blutgruppe B: $\frac{15}{100} \cdot 360° = 54°$

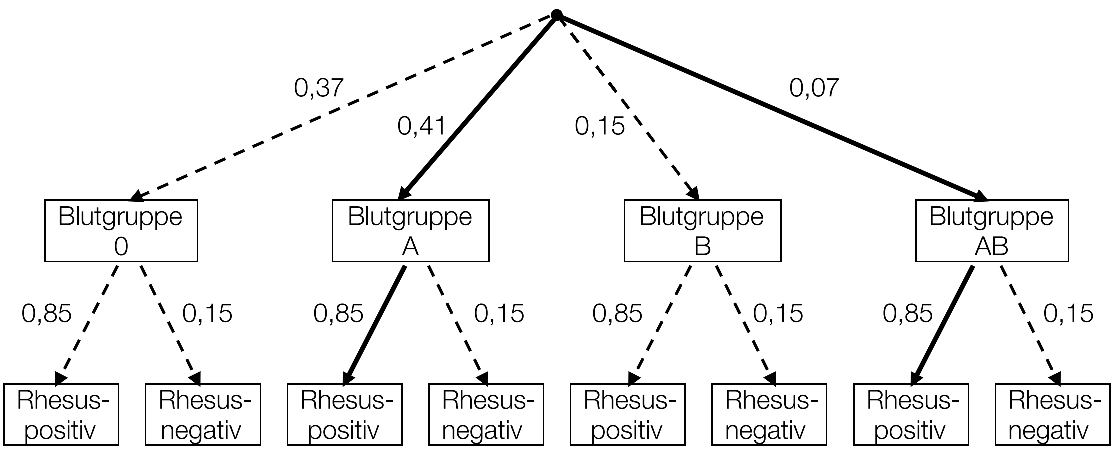
Blutgruppe AB: $360° - 133{,}2° - 147{,}6° - 54° = 25{,}2°$



b) X … Anzahl der Personen mit Blutgruppe 0
Binomialverteilung: $n = 25$, $p = 0{,}37$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 0{,}61524\ldots \approx 61{,}52\ \%$

c)



P(„Blutgruppe B Rhesus-negativ“) $= 0{,}15 \cdot 0{,}15 = 0{,}0225 = 2{,}25\ \%$

Es wird das Ereignis beschrieben, dass eine (zufällig ausgewählte) Person Blutgruppe A oder AB hat und Rhesus-positiv ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Winkel der jeweiligen Sektoren (KA)
   1 × A: für das richtige Veranschaulichen im Kreisdiagramm (KB)

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)

c) 1 × A: für das richtige Vervollständigen des Baumdiagramms (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KB)
   1 × C: für eine richtige Beschreibung (KB)