Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

15. Jänner 2019

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgabe 1

Polynomfunktion dritten Grades

a) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$f_t'(x) = \frac{3}{t} \cdot x^2 - 4 \cdot x + t$

$3 \cdot x^2 - 4 \cdot t \cdot x + t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{t}{3}; x_2 = t$

Mögliche Beschreibung:

An der Stelle $x = t$ hat f_t eine Nullstelle und ein lokales Minimum.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden richtigen Werte.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(x) = \frac{6}{t} \cdot x - 4$

$f_t''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{2}{3} \cdot t$

Mögliche Vorgehensweise:

$f_t''(0) = \frac{6}{t} \cdot 0 - 4 = -4$

Die zweite Ableitungsfunktion hat an der Stelle $x = 0$ den Wert -4 und ist somit unabhängig vom Parameter t.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$A(t) = \int_0^t f_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{t^3}{4} - \frac{2 \cdot t^3}{3} + \frac{t^3}{2} = \frac{t^3}{12}$

Die Funktion A ist eine Funktion dritten Grades.

$A(t) : A(2 \cdot t) = 1 : 8$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für einen richtigen Funktionsterm und die Angabe des richtigen Grades von A. Äquivalente Terme sind als richtig zu werten.
– Ein Punkt für ein richtiges Verhältnis.

d) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$f_{-1}(x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x$

$f_1(-x) = (-x)^3 - 2 \cdot (-x)^2 + (-x) = -x^3 - 2 \cdot x^2 - x \quad \Rightarrow \quad f_{-1}(x) = f_1(-x)$

Mögliche Erläuterung:

Wird der Graph der Funktion f_1 an der senkrechten Achse gespiegelt, so erhält man den Graphen der Funktion f_{-1}.

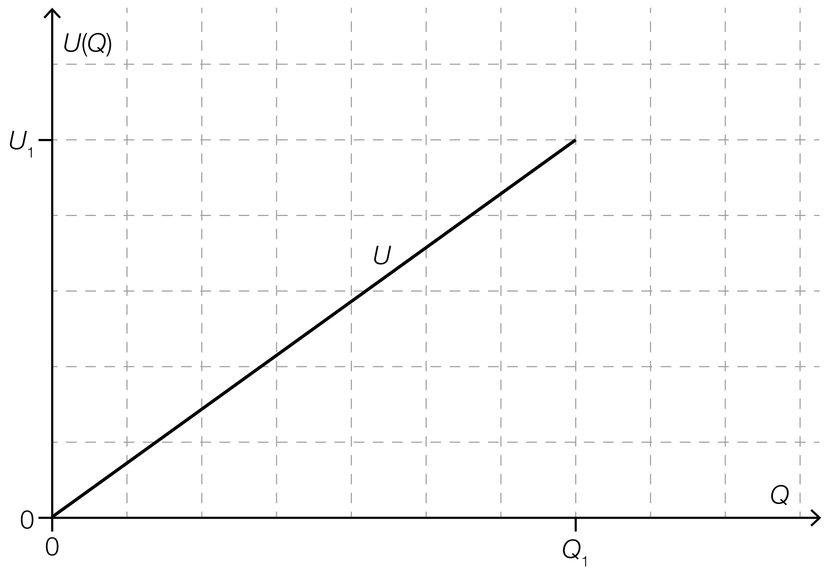
Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.
– Ein Punkt für eine korrekte Erläuterung.

Aufgabe 2

Kondensator

a) Lösungserwartung:



$$W = \int_0^{Q_1} U(Q)\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{2} \cdot U_1 \cdot Q_1 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_1^2$$

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für eine richtige Skizze.
– Ein Punkt für eine richtige Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}99 \cdot U^* = U^* \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$0{,}01 = e^{-\frac{t}{\tau}}$

Ladezeit: $t = -\tau \cdot \ln(0{,}01)$ bzw. $t = \tau \cdot \ln(100)$

Mögliche Vorgehensweise:

$U'(t) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot U^*}{\tau}$

Es gilt: $U^* > 0,\ \tau > 0,\ e^{-\frac{t}{\tau}} > 0 \quad \Rightarrow \quad U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$.
Da $U'(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, ist U während des Ladevorgangs streng monoton steigend.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen der Lösung sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für eine richtige Formel und eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Vermögensverteilung

a) Lösungserwartung:

Im Jahr 2012 hatten in Österreich ca. 422 500 Personen (laut Abbildung 1: ca. 5 % der Bevölkerung) ein Vermögen von mindestens einer Million Euro.

Mögliche Vorgehensweise:

$6086 + \frac{34731 - 6086}{4} = 13247{,}25$

Der Näherungswert für den Schwellenwert bei 25 % liegt bei ca. € 13.247.

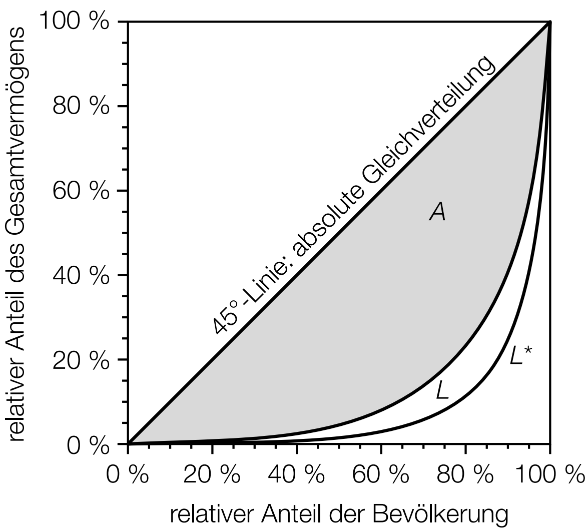
Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei auch die Angabe des richtigen relativen Anteils als richtig zu werten ist.
  Toleranzintervalle: [338 000; 507 000] bzw. [4 %; 6 %]
– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „€" nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [€ 13.200; € 13.325]

b) Lösungserwartung:

Die vermögensstärksten 10 % der österreichischen Bevölkerung besitzen ca. 60 % des Vermögens.

Möglicher Verlauf von L^*:



Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [58 %; 62 %]
– Ein Punkt für einen richtig eingezeichneten Verlauf einer möglichen Lorenz-Kurve L^*, wobei der Funktionswert an der Stelle 90 % kleiner als 42 % sein muss und die Funktion monoton steigend sein muss.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}5 - \int_0^1 L_1(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}31\dot{3}$

$\frac{0{,}31\dot{3}}{0{,}5} \approx 0{,}63$

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 hatte für das Land *S* etwa den Wert 0,63.

Der Gini-Koeffizient für das Jahr 2012 war für das Land *S* niedriger als jener für Österreich. Das bedeutet, dass in diesem Jahr das Gesamtvermögen im Land *S* gleichmäßiger auf die Bevölkerung verteilt war als in Österreich.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,62; 0,63]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für einen korrekten Vergleich und eine (sinngemäß) richtige Deutung.

Aufgabe 4

Wahlhochrechnung

a) Lösungserwartung:

$\frac{1648}{3172} \approx 0{,}52$

Für Kandidat A sind ca. 52 % von 978 Stimmen, also ca. 509 Stimmen, zu erwarten.

relativer Stimmenanteil für Kandidat A im 4. Wahlbezirk: $\frac{343}{570} \approx 0{,}6$

Der relative Stimmenanteil weicht im 4. Wahlbezirk um ca. 8 Prozentpunkte von h ab.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [500; 510]
– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [8; 9]

b) $1{,}5462 \cdot 478 - 205{,}71 \approx 533$

Bei der Hochrechnung mithilfe der Regressionsgeraden g erhält Kandidat A im 5. Wahlbezirk ca. 533 Stimmen bei der Bürgermeisterwahl.

Mögliche Interpretation:

Der Wert der Steigung von g gibt an, dass Kandidat A pro zusätzlicher Stimme bei der Vergleichswahl ca. 1,55 Stimmen mehr bei der Bürgermeisterwahl erwarten kann.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [530 Stimmen; 540 Stimmen]
– Ein Punkt für eine korrekte Interpretation.

c) $0{,}52 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}52 \cdot 0{,}48}{3172}} \approx 0{,}52 \pm 0{,}017 \Rightarrow \quad [0{,}503; 0{,}537]$

Ein symmetrisches 90-%-Konfidenzintervall hat bei gleicher Stichprobengröße sowie gleichem Stichprobenanteil und der Verwendung derselben Berechnungsmethode eine geringere Breite als das symmetrische 95-%-Konfidenzintervall, daher wäre das Ergebnis auch nicht im symmetrischen 90-%-Konfidenzintervall enthalten.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für ein richtiges Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,500; 0,503]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,536; 0,540]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
– Ein Punkt für eine richtige Entscheidung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.