Name:	
Klasse:	

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

12. Jänner 2021

Mathematik

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Hinweise zur Aufgabenbearbeitung

Sehr geehrte Kandidatin! Sehr geehrter Kandidat!

Das vorliegende Aufgabenheft enthält Teil-1-Aufgaben und Teil-2-Aufgaben (bestehend aus Teilaufgaben). Die Aufgaben bzw. Teilaufgaben sind unabhängig voneinander bearbeitbar.

Verwenden Sie für die Bearbeitung ausschließlich dieses Aufgabenheft und das Ihnen zur Verfügung gestellte Arbeitspapier. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Klasse in die dafür vorgesehenen Felder auf dem Deckblatt des Aufgabenhefts sowie Ihren Namen und die fortlaufende Seitenzahl auf jedes verwendete Blatt Arbeitspapier. Geben Sie bei der Beantwortung jeder Teilaufgabe deren Bezeichnung auf dem Arbeitspapier an.

In die Beurteilung wird alles einbezogen, was nicht durchgestrichen ist. Die Lösung muss dabei klar ersichtlich sein. Wenn die Lösung nicht klar ersichtlich ist oder verschiedene Lösungen angegeben sind, gilt die Aufgabe als nicht gelöst.

Die Verwendung der vom zuständigen Regierungsmitglied für die Klausurarbeit freigegebenen Formelsammlung für die SRP in Mathematik ist erlaubt. Weiters ist die Verwendung von elektronischen Hilfsmitteln (z. B. grafikfähiger Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) erlaubt, sofern keine Kommunikationsmöglichkeit (z. B. via Internet, Intranet, Bluetooth, Mobilfunknetzwerke etc.) gegeben ist und der Zugriff auf Eigendateien im elektronischen Hilfsmittel nicht möglich ist.

Eine Erläuterung der Antwortformate liegt im Prüfungsraum auf und kann auf Wunsch eingesehen werden.

Das Aufgabenheft und alle von Ihnen verwendeten Blätter sind abzugeben.

So ändern Sie Ihre Antwort bei Aufgaben zum Ankreuzen:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreuzen Sie dann das gewünschte Kästchen an.

Hier wurde zuerst die Antwort „5 + 5 = 9“ gewählt und dann auf „2 + 2 = 4“ geändert.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	☒
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	☐
5 + 5 = 9	■

So wählen Sie eine bereits übermalte Antwort:

1. Übermalen Sie das Kästchen mit der nicht mehr gültigen Antwort.
2. Kreisen Sie das gewünschte übermalte Kästchen ein.

Hier wurde zuerst die Antwort „2 + 2 = 4“ übermalt und dann wieder gewählt.

1 + 1 = 3	☐
2 + 2 = 4	■
3 + 3 = 5	☐
4 + 4 = 4	■
5 + 5 = 9	☐

Bewertung

Die Aufgaben im Teil 1 werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bzw. 0 Punkten, ½ oder 1 Punkt bewertet. Die zu erreichenden Punkte pro Aufgabe sind bei jeder Teil-1-Aufgabe im Aufgabenheft angeführt.
Jede Teilaufgabe im Teil 2 wird mit 0, 1 oder 2 Punkten bewertet. Die mit $\boxed{\text{A}}$ markierten Aufgabenstellungen werden mit 0 Punkten oder 1 Punkt bewertet.

Zwei Beurteilungswege

1) Wenn Sie **mindestens 16** von 28 Punkten (24 Teil-1-Punkte + 4 $\boxed{\text{A}}$-Punkte aus Teil 2) erreicht haben, gilt der folgende Beurteilungsschlüssel:

Genügend	16 – 23,5 Punkte
Befriedigend	24 – 32,5 Punkte
Gut	33 – 40,5 Punkte
Sehr gut	41 – 48 Punkte

2) Wenn Sie **weniger als 16** von 28 Punkten (24 Teil-1-Punkte + 4 $\boxed{\text{A}}$-Punkte aus Teil 2) erreicht haben, aber **insgesamt 24 Punkte oder mehr** (aus Teil-1- und Teil-2-Aufgaben) erreicht haben, dann können Sie auf diesem Weg ein „Genügend“ oder „Befriedigend“ erreichen:

Genügend	24 – 28,5 Punkte
Befriedigend	29 – 35,5 Punkte

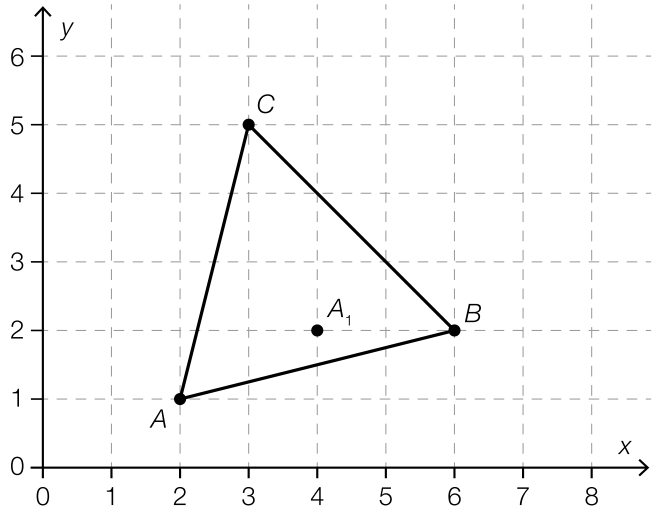
Die Arbeit wird mit „Nicht genügend“ beurteilt, wenn im Teil 1 unter Berücksichtigung der mit $\boxed{\text{A}}$ markierten Aufgabenstellungen aus Teil 2 weniger als 16 Punkte und insgesamt weniger als 24 Punkte erreicht wurden.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

Dreieck verschieben

In der nachstehenden Abbildung sind ein Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C sowie der Punkt A_1 dargestellt. Die gekennzeichneten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



Das Dreieck soll so um den Vektor $\overrightarrow{AA_1}$ verschoben werden, dass die Punkte A, B und C in die Punkte A_1, B_1 und C_1 übergehen.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C_1.

$C_1 = ($ ______ | ______ $)$

[0/½/1 Punkt]

Aufgabe 2

Lösung einer Gleichung

Nachstehend ist eine Gleichung in $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

$\sqrt{2 \cdot x - 6} = a$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie dasjenige Intervall an, das für alle Werte von $a \in \mathbb{R}_0^+$ die Lösung der gegebenen Gleichung enthält.

$(-\infty; -3]$	☐
$[3; \infty)$	☐
$[-3; 0)$	☐
$[0; 3)$	☐
$[-6; -3)$	☐
$[3; 6]$	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 3

Radfahrer

Die Schule von Alexander und die Schule von Bernhard sind durch eine 13 km lange geradlinige Straße verbunden.
An einem bestimmten Tag fahren beide von ihrer jeweiligen Schule aus mit dem Fahrrad entlang dieser Straße einander entgegen. Sie starten zu unterschiedlichen Zeitpunkten und begegnen einander *t* Stunden nach der Abfahrt von Alexander.
Bis zu ihrer Begegnung gilt:

- Alexander fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 18 km/h.
- Bernhard fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 24 km/h.

Im gegebenen Kontext wird die nachstehende Gleichung aufgestellt und gelöst.

$$18 \cdot t + 24 \cdot \left(t - \frac{1}{3}\right) = 13$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die im gegebenen Kontext unter Beachtung der obigen Gleichung und deren Lösung zutreffend sind.

Alexander fährt um 10 Minuten später ab als Bernhard.	☐
Alexander ist bis zur Begegnung mit Bernhard 30 Minuten unterwegs.	☐
Bernhard ist bis zur Begegnung mit Alexander 20 Minuten unterwegs.	☐
Alexander legt bis zur Begegnung mit Bernhard 9 km zurück.	☐
Bei ihrer Begegnung sind die beiden von Bernhards Schule weiter entfernt als von Alexanders Schule.	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 4

Quadratische Gleichung

Für $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist die quadratische Gleichung $(a \cdot x + 7)^2 = 25$ in $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Aufgabenstellung:

Geben Sie alle $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ an, für die $x = -4$ eine Lösung der gegebenen quadratischen Gleichung ist.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 5

Parameterdarstellung

Gegeben ist eine Gerade g mit der Parameterdarstellung $g\colon\ X = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

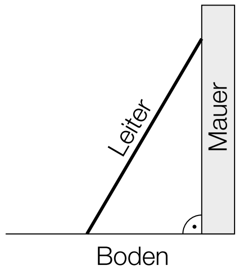
Bestimmen Sie t so, dass $X = B$ gilt.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 6

Leiter

Eine Leiter lehnt an einer senkrechten Mauer.
Die Leiter liegt in 6 m Höhe an der Mauer an und schließt mit der Mauer einen Winkel von 20° ein. Dieser Sachverhalt wird durch die nebenstehende (nicht maßstabgetreue) Abbildung veranschaulicht.



Aufgabenstellung:

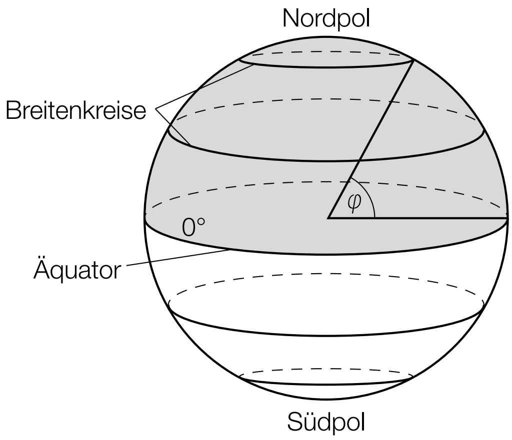
Berechnen Sie die Länge der Leiter.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 7

Geografische Breite

Die Erde hat annähernd die Gestalt einer Kugel mit dem Radius 6 370 km.
In der unten stehenden Abbildung ist die Nordhalbkugel der Erde grau markiert. Auf der Nordhalbkugel wird die geografische Breite φ vom Äquator nach Norden gemessen, wobei $0° \leq \varphi \leq 90°$ gilt.



Für den Radius r (in km) eines Breitenkreises (zur geografischen Breite φ) gilt:
$r = 6370 \cdot \cos(\varphi)$

Aufgabenstellung:

Geben Sie das kleinstmögliche Intervall W an, das alle Werte von r enthält.

$W = [$ ________ ; ________ $]$

[0/1 Punkt]

Aufgabe 8

Eigenschaften von Funktionen

Gegeben sind vier Funktionsgleichungen der reellen Funktionen f_1 bis f_4 (mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $b < 1$) und sechs Listen mit Eigenschaften von Funktionen.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Funktionsgleichungen jeweils die zugehörige Liste (aus A bis F) zu.

$f_1(x) = a \cdot b^x$	
$f_2(x) = a \cdot x + b$	
$f_3(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$	
$f_4(x) = a \cdot x^3 + b$	

A	– kein Monotoniewechsel – konstante Steigung – kein Krümmungswechsel
B	– genau eine lokale Extremstelle x_0 – symmetrisch zur Geraden $x = x_0$ – maximal zwei Nullstellen
C	– unendlich viele lokale Extremstellen – unendlich viele Wendestellen – keine Asymptote
D	– nur für $x \in [0; \infty)$ definierbar – überall rechtsgekrümmt (negativ gekrümmt) – keine lokalen Extrem- oder Wendestellen
E	– keine lokale Extremstelle – genau eine Nullstelle – genau eine Wendestelle
F	– kein Monotoniewechsel – die x-Achse ist Asymptote – kein Krümmungswechsel

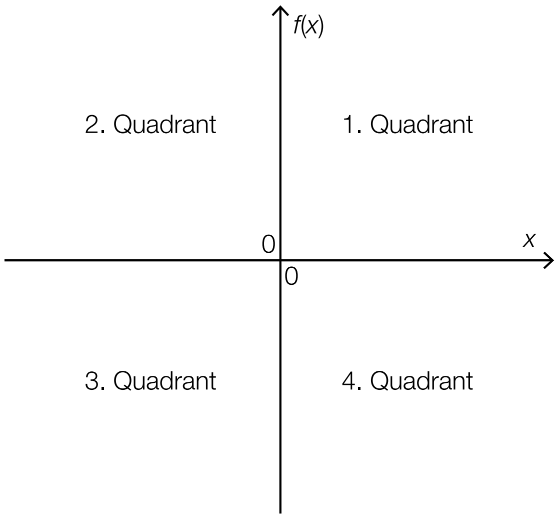
[0/½/1 Punkt]

Aufgabe 9

Verlauf des Graphen einer linearen Funktion

Gegeben ist eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k, d \in \mathbb{R}$ und $d \neq 0$.

Die Ebene wird von den beiden Koordinatenachsen in vier Quadranten unterteilt (siehe nachstehende Skizze).



Für den Graphen von f gilt:

- Er verläuft nicht durch den 1. Quadranten.
- Er verläuft durch den 2., 3. und 4. Quadranten.

Dafür müssen bestimmte Bedingungen für k und d gelten.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die Aussage mit den entsprechenden Bedingungen an.

$k < 0$ und $d < 0$	☐
$k < 0$ und $d > 0$	☐
$k > 0$ und $d < 0$	☐
$k > 0$ und $d > 0$	☐
$k = 0$ und $d < 0$	☐
$k = 0$ und $d > 0$	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 10

Polynomfunktion

Zwischen dem Grad einer Polynomfunktion und der Anzahl der reellen Nullstellen, der lokalen Extremstellen und der Wendestellen besteht ein Zusammenhang.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Jede Polynomfunktion _____①_____ hat _____②_____.

①	
4. Grades	☐
5. Grades	☐
6. Grades	☐

②	
mindestens zwei verschiedene lokale Extremstellen	☐
mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen	☐
mindestens eine Wendestelle	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 11

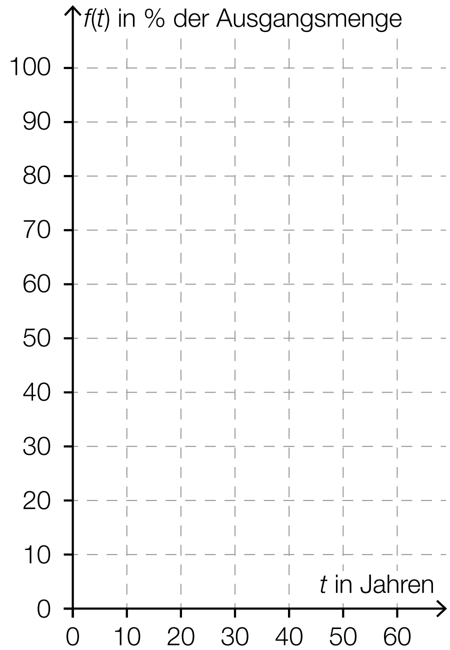
Halbwertszeit

Das radioaktive Isotop ^{137}Cs (Cäsium) hat eine Halbwertszeit von etwa 30 Jahren.

Die Funktion f gibt in Abhängigkeit von der Zeit t an, wie viel Prozent der Ausgangsmenge an ^{137}Cs noch vorhanden sind (t in Jahren, $f(t)$ in % der Ausgangsmenge).
Die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorhandene Menge an ^{137}Cs wird als *Ausgangsmenge* bezeichnet.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie im nachstehenden Koordinatensystem im Zeitintervall [0; 60] den Graphen von f ein.



[0/1 Punkt]

Aufgabe 12

Winkelfunktion

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$. Diese Funktion soll in der Form $x \mapsto a \cdot \sin(x + b)$ dargestellt werden ($a, b \in \mathbb{R}$).

Aufgabenstellung:

Geben Sie für a und b jeweils einen passenden Wert an.

$a =$ ____________________

$b =$ ____________________

[0/½/1 Punkt]

Aufgabe 13

Messung der Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers in Abhängigkeit von der Zeit t wird durch eine differenzierbare Funktion v modelliert (t in s, $v(t)$ in m/s). Die Messung der Geschwindigkeit $v(t)$ beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

Betrachtet wird der Grenzwert $\lim\limits_{t \to 3} \frac{v(t) - v(3)}{t - 3}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Aussagen an, die den betrachteten Grenzwert richtig beschreiben.

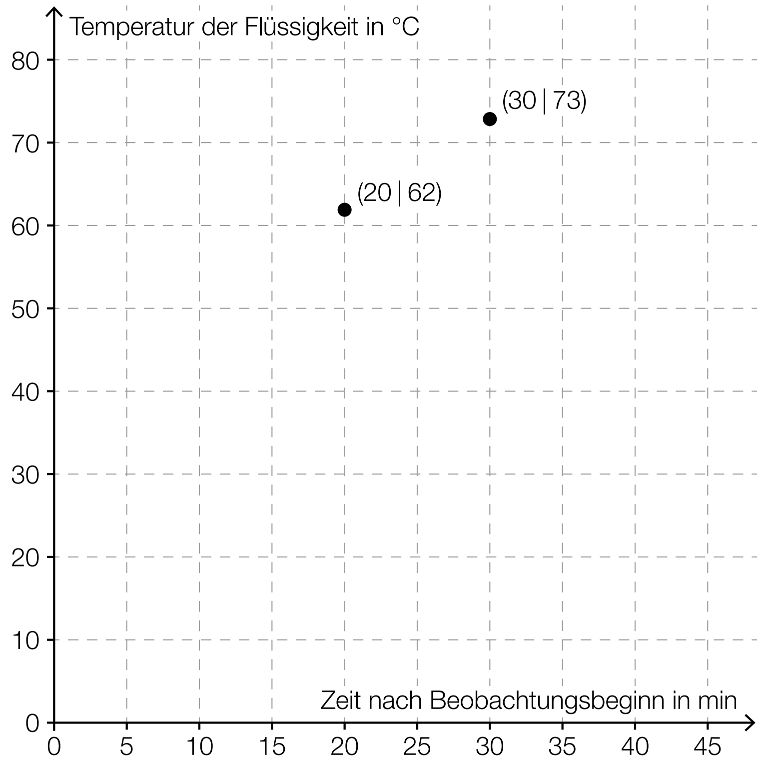
Der Grenzwert gibt die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit des Körpers 3 Sekunden nach Beginn der Messung an.	☐
Der Grenzwert gibt die durchschnittliche Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall [0; 3] an.	☐
Der Grenzwert gibt die momentane Beschleunigung des Körpers 3 Sekunden nach Beginn der Messung an.	☐
Der Grenzwert gibt die relative Änderung der Geschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall [0; 3] an.	☐
Der Grenzwert gibt den vom Körper in den ersten 3 Sekunden zurückgelegten Weg an.	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 14

Experiment

Bei einem Experiment wurde die Temperatur einer bestimmten Flüssigkeit (in °C) zu verschiedenen Zeitpunkten gemessen.
Die nachstehende Abbildung zeigt das jeweilige Messergebnis 20 min bzw. 30 min nach Beobachtungsbeginn.



Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate der Temperatur der Flüssigkeit im Zeitintervall [20 min; 30 min].

mittlere Änderungsrate: ____________________ °C/min

[0/1 Punkt]

Aufgabe 15

Wachstum einer Sonnenblume

Die Höhe einer bestimmten Sonnenblume wurde über einige Wochen jeweils zu Wochenbeginn gemessen.

Zum Messbeginn $t = 0$ hatte die Sonnenblume die Höhe $H_0 = 5$ cm.
Für jeden Zeitpunkt t (mit $0 \leq t \leq 5$) gibt H_t die Höhe der Sonnenblume an.

Die nachstehende Tabelle zeigt die (gerundeten) Messergebnisse für die Höhe der Sonnenblume für die ersten 5 Wochen.

Zeit t (in Wochen nach Messbeginn)	Höhe der Sonnenblume H_t (in cm)
1	36
2	68
3	98
4	128
5	159

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die Textlücken im nachstehenden Satz durch Ankreuzen des jeweils zutreffenden Satzteils so, dass eine richtige Aussage entsteht.

Die absolute wöchentliche Zunahme der Höhe der Sonnenblume ist ___①___; die Höhe der Sonnenblume H_t kann daher näherungsweise durch eine Differenzengleichung der Form ___②___ beschrieben werden.

①	
immer geringer als jene in der jeweils vorangegangenen Woche	☐
immer größer als jene in der jeweils vorangegangenen Woche	☐
annähernd konstant	☐

②	
$H_{t+1} = H_t \cdot (1 + k)$ mit $k \in \mathbb{R}$	☐
$H_{t+1} = H_t + k$ mit $k \in \mathbb{R}$	☐
$H_{t+1} = H_t + r \cdot (k - H_t)$ mit $k, r \in \mathbb{R}$ und $0 < r < 1$	☐

[0/½/1 Punkt]

Aufgabe 16

Stammfunktionen

Gegeben ist eine Stammfunktion F einer Polynomfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Zwei der nachstehenden Funktionen G_1 bis G_5 sind für alle $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ jedenfalls auch Stammfunktionen von f.
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Funktionen an.

$G_1 = c \cdot F$	☐
$G_2 = c + F$	☐
$G_3 = F - c$	☐
$G_4 = c - F$	☐
$G_5 = \frac{F}{c}$	☐

[0/1 Punkt]

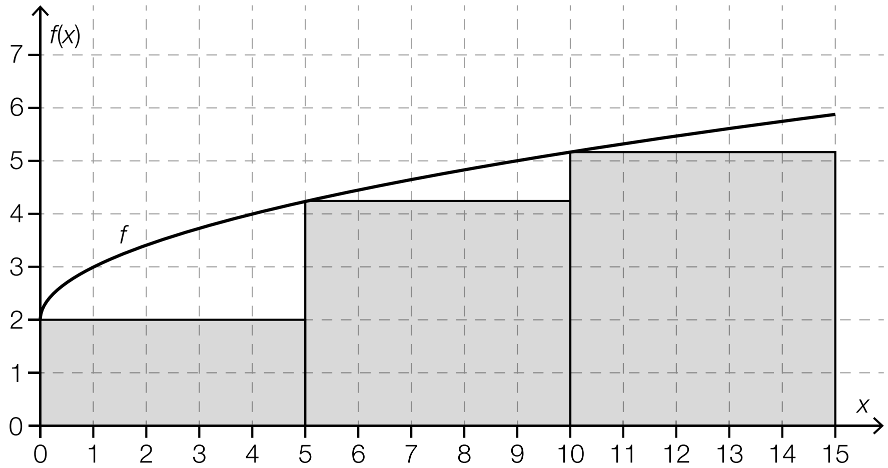
Aufgabe 17

Fläche zwischen Graph und x-Achse

Gegeben ist eine Potenzfunktion f: $[0; 15] \to \mathbb{R}^+$.
Der Inhalt A derjenigen Fläche, die vom Graphen von f, von der x-Achse und von den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 15$ begrenzt wird, kann durch den nachstehenden Ausdruck U näherungsweise berechnet werden.

$U = 5 \cdot (f(0) + f(5) + f(10))$

In der nachstehenden Abbildung sind der Graph von f und – grau markiert – die Fläche, deren Inhalt durch den Ausdruck U berechnet wird, dargestellt.



Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden Ausdrücke an, mit denen der Flächeninhalt A besser als mit dem Ausdruck U angenähert werden kann.

$5 \cdot (f(0) + f(5) + f(10) + f(15))$	☐
$2{,}5 \cdot (f(0) + f(2{,}5) + f(5) + f(7{,}5) + f(10) + f(12{,}5))$	☐
$\int_0^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$	☐
$f(0) \cdot 15$	☐
$f(15) \cdot 5$	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 18

Arbeit bei der Dehnung einer Schraubenfeder

Eine Schraubenfeder mit der Federkonstanten $k = 40$ N/m wird aus der Gleichgewichtslage $s_0 = 0$ m um $h = 0{,}08$ m gedehnt.
Die dabei verrichtete Arbeit W (in Joule) wird mithilfe des nachstehenden Ausdrucks berechnet.

$$W = \int_{s_0}^{s_0+h} k \cdot s \, \mathrm{d}s$$

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die bei der oben beschriebenen Dehnung verrichtete Arbeit.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 19

Boxplot und statistische Kennzahlen

Aus einem Boxplot (Kastenschaubild) können bestimmte statistische Kennzahlen ermittelt werden.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden statistischen Kennzahlen an, die aus einem Boxplot im Allgemeinen nicht ermittelt werden können.

Median	☐
arithmetisches Mittel	☐
Modus	☐
Spannweite	☐
Maximum	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 20

Schätzwert

Bei einem bestimmten Zufallsversuch tritt das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ auf.
Im Rahmen einer Versuchsreihe wird dieser Zufallsversuch a-mal durchgeführt ($a \in \mathbb{N}$ und $a > 1$). Dabei tritt das Ereignis E insgesamt b-mal auf ($b \in \mathbb{N}$).
Für die unbekannte Wahrscheinlichkeit $P(E)$ soll ein Schätzwert p bestimmt werden.

Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, mit der p unter Verwendung von a und b berechnet werden kann.

$p =$ ____

[0/1 Punkt]

Aufgabe 21

Wahrscheinlichkeiten

Die Zufallsvariable X kann ausschließlich die Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen.
Es gilt: $P(X = 1) = 0{,}1$ und $P(X > 1) = 0{,}6$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Aussagen an.

$P(X \leq 2) = 0{,}3$	☐
$P(X < 2) = 0{,}4$	☐
$P(X = 0) = 0$	☐
$P(X \geq 0) = 0{,}9$	☐
$P(X \geq 1) = 0{,}7$	☐

[0/1 Punkt]

Aufgabe 22

Defekte Geräte

Erfahrungsgemäß sind 2,5 % der Geräte, die von einem bestimmten Unternehmen geliefert werden, defekt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt die Anzahl der defekten Geräte in einer Zufallsstichprobe vom Umfang n an. Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = 20$.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie den Umfang n der Zufallsstichprobe.

n = ____

[0/1 Punkt]

Aufgabe 23

Schokoladefiguren

Erfahrungsgemäß ist 1 % der in einer bestimmten Schokoladefabrik produzierten Schokoladefiguren fehlerhaft.
Bei einer bestimmten Qualitätskontrolle werden 500 Schokoladefiguren zufällig ausgewählt, wobei jede Schokoladefigur – unabhängig von den anderen Schokoladefiguren – mit der gleichen Wahrscheinlichkeit (von 1 %) fehlerhaft ist.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dieser Qualitätskontrolle höchstens 2 Schokoladefiguren fehlerhaft sind.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 24

Wahlprognose

Vor einer bestimmten Wahl nahmen 500 Personen, die zufällig und unabhängig voneinander ausgewählt worden waren, an einer Umfrage teil. Von diesen Personen gaben 35 % an, dass sie Partei A wählen werden. Als Ergebnis der Umfrage wurde das um diesen relativen Anteil symmetrische γ-Konfidenzintervall [0,315; 0,385] für den unbekannten Anteil der Partei-A-Wähler/innen angegeben. Für die Berechnung dieses Konfidenzintervalls wurde eine die Binomialverteilung approximierende Normalverteilung verwendet.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie γ.

[0/1 Punkt]

Aufgabe 25 (Teil 2)

Tee

Tee ist weltweit eines der meistkonsumierten Getränke.

Aufgabenstellung:

a) Modellhaft wird angenommen, dass der Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich jedes Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr um den gleichen Prozentsatz steigt.

Unter dieser Annahme gibt die Funktion f den jährlichen Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich ab 2016 in Abhängigkeit von der Zeit t an (t in Jahren, $f(t)$ in Litern).

1) $\boxed{\text{A}}$ Geben Sie an, um welchen Funktionstyp es sich bei f handelt.

Der jährliche Pro-Kopf-Verbrauch von Tee lag in Österreich im Jahr 2016 bei 33 L. Der Anteil des Tees, der in Österreich im Jahr 2016 mittels Teebeuteln zubereitet wurde, beträgt 95 %.

Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Der Pro-Kopf-Verbrauch von Tee in Österreich steigt seit dem Jahr 2016 jedes Jahr im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr um 2 %.
- Der Anteil des Tees, der in Österreich jedes Jahr mittels Teebeuteln zubereitet wird, bleibt gleich.

2) Geben Sie an, wie viele Liter Tee im Jahr 2026 unter den oben angeführten Annahmen pro Kopf in Österreich mittels Teebeuteln zubereitet werden.

b) Der weltweit größte Teeproduzent ist China. Die nachstehende Tabelle gibt die Menge des in China produzierten Tees in Millionen Tonnen für einige Jahre im Zeitraum von 2011 bis 2017 an.

Jahr	2011	2013	2015	2017
Menge des in China produzierten Tees in Millionen Tonnen	1,55	1,85	2,23	2,55

Quelle: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/29847/umfrage/produktion-von-tee-nach-erzeugerlaendern-seit-2006/ [28.08.2018].

Die Menge des in China produzierten Tees soll in Abhängigkeit von der Zeit t ab dem Jahr 2011 näherungsweise durch eine lineare Funktion g beschrieben werden (t in Jahren ab dem Jahr 2011, $g(t)$ in Millionen Tonnen).

1) Geben Sie unter Verwendung der Daten aus den Jahren 2011 und 2017 eine Funktionsgleichung für g an.

$g(t) =$ ____

In den Jahren 2013 und 2015 gibt es jeweils eine Abweichung zwischen den Funktionswerten von g und den Werten aus der obigen Tabelle.

2) Geben Sie an, in welchem der Jahre 2013 und 2015 der Betrag der absoluten Abweichung zwischen dem Funktionswert von g und dem zugehörigen Wert aus der obigen Tabelle größer ist. Ermitteln Sie für das angegebene Jahr ebenso den Betrag der absoluten Abweichung.

Jahr: ______________________

Betrag der absoluten Abweichung: ______________________ Millionen Tonnen

c) Heißer Tee kühlt bei niedrigerer Umgebungstemperatur ab.

Die Temperatur $T(t)$ des Tees t Minuten nach Beginn des Abkühlungsprozesses kann bei einer Anfangstemperatur T_0 und einer konstanten Umgebungstemperatur T_U durch die nachstehende Funktionsgleichung näherungsweise beschrieben werden.

$T(t) = (T_0 - T_U) \cdot e^{-k \cdot t} + T_U$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ (t in Minuten, T_U in °C, T_0 in °C, $T(t)$ in °C)

Eine Tasse mit Tee mit der Anfangstemperatur $T_0 = 90$ °C wird in einen Raum mit einer konstanten Umgebungstemperatur von $T_U = 20$ °C gestellt. Der Tee ist nach 10 Minuten auf eine Temperatur von 65 °C abgekühlt.

1) Ermitteln Sie k.

Nehmen Sie an, dass der ermittelte Wert von k sowohl für den Abkühlungsprozess eines Tees mit einer Anfangstemperatur von 90 °C als auch für den Abkühlungsprozess eines anderen Tees mit einer Anfangstemperatur von 70 °C gilt.

2) Geben Sie an, bei welcher Umgebungstemperatur T_U beide Tees in der gleichen Zeit auf die Hälfte des Wertes ihrer jeweiligen Anfangstemperatur (in °C) abkühlen.

$T_U =$ ____ °C

Aufgabe 26 (Teil 2)

Erderwärmung

Unter *globaler Mitteltemperatur* versteht man die über die gesamte Erdoberfläche gemittelte Temperatur in einem bestimmten Zeitraum unter bestimmten Bedingungen.

Die Entwicklung der globalen Mitteltemperatur kann mithilfe von Klimamodellen prognostiziert werden.

Nachstehend sind für einzelne Jahre die globalen Mitteltemperaturen angeführt.

Jahr	1900	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980
globale Mitteltemperatur (in °C)	13,80	13,87	13,89	14,01	13,90	14,02	13,94	14,16

Jahr	1985	1990	1995	2000	2005	2010	2015
globale Mitteltemperatur (in °C)	14,03	14,37	14,37	14,31	14,51	14,55	14,72

Die Funktion T beschreibt modellhaft die globale Mitteltemperatur in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Jahren ab dem Jahr 1900, $T(t)$ in °C). Es gilt:

$T(t) = a \cdot e^{0{,}008 \cdot t} - 0{,}03 \cdot t + 11{,}1 \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}^+$

Aufgabenstellung:

a) Bei einem bestimmten Klimamodell wird $a = 2{,}7$ angenommen.
Die Funktion T hat an der Stelle $t = t_0$ eine lokale Extremstelle.

1) $\boxed{\text{A}}$ Ermitteln Sie t_0.

2) Begründen Sie mathematisch, warum gemäß diesem Modell die globale Mitteltemperatur ab der Stelle t_0 immer schneller ansteigt.

b) Verschiedene Studien nehmen an, dass die globale Mitteltemperatur im Jahr 2100 im Vergleich zur globalen Mitteltemperatur im Jahr 2000 (also 14,31 °C) um mindestens 1,5 °C, aber um höchstens 4,5 °C höher sein wird.

1) Weisen Sie nach, dass die Funktion T mit $a = 2{,}7$ diese Studien mit der Annahme für das Jahr 2100 bestätigt.

2) Geben Sie den kleinstmöglichen Wert a_{min} und den größtmöglichen Wert a_{max} so an, dass die Funktion T diese Studien bestätigt.

a_{min} = ____

a_{max} = ____

c) Bei der UN-Klimakonferenz in Paris im Jahr 2015 wurde eine neue internationale Klimaschutz-Vereinbarung getroffen, die die Begrenzung der Zunahme der globalen Mitteltemperatur vorsieht. Demnach dürfte die globale Mitteltemperatur im Jahr 2100 höchstens 15,3 °C betragen.

Um diese Klimaschutz-Vereinbarung zu erfüllen, darf ab dem Jahr 2015 die mittlere Änderungsrate der globalen Mitteltemperatur pro Jahr höchstens einen bestimmten Wert k betragen (k in °C pro Jahr).

1) Ermitteln Sie k.

Es wird angenommen, dass die globale Mitteltemperatur ab dem Jahr 2015 linear zunimmt und die mittlere Änderungsrate der globalen Mitteltemperatur pro Jahr tatsächlich k entspricht.

2) Geben Sie unter dieser Annahme eine Gleichung derjenigen linearen Funktion M an, die die jährliche globale Mitteltemperatur (in °C) t Jahre nach 2015 modellhaft beschreibt.

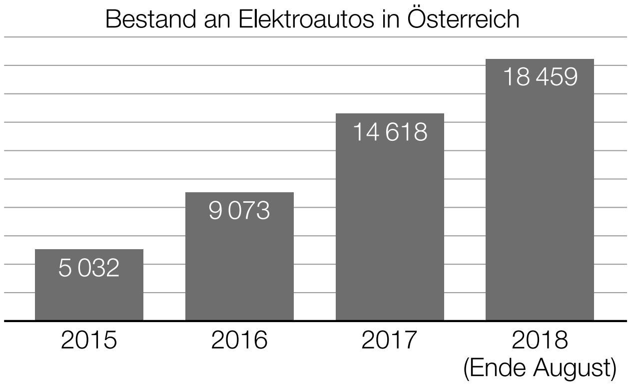
Aufgabe 27 (Teil 2)

Elektromobilität

Der Bestand an Elektroautos nahm in Österreich in den letzten Jahren zu. Die Gründe dafür liegen unter anderem an technischen Verbesserungen, wie zum Beispiel den steigenden Batteriekapazitäten und kürzeren Ladezeiten.
Unter *Batteriekapazität* versteht man die in der Batterie des Elektroautos maximal speicherbare Energie E (in Kilowattstunden, kWh). Diese Energie wird während des Fahrens in eine andere Energieform umgewandelt und beim Ladevorgang wieder der Batterie zugeführt.
Unter *Ladezeit* versteht man diejenige Zeit, die für das vollständige Laden einer (annähernd) leeren Batterie benötigt wird.

Aufgabenstellung:

a) Die nachstehende Grafik zeigt den Bestand an Elektroautos in Österreich für den Zeitraum vom 31. Dezember 2015 bis 31. August 2018. Für die Jahre 2015 bis 2017 wird der Bestand jeweils am Ende des Jahres dargestellt, für das Jahr 2018 der Bestand Ende August.



Datenquelle: Statistik Austria, https://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/verkehr/strasse/kraftfahrzeuge_-_bestand/index.html [23.03.2020].

Die Differenzengleichung $B_{n+1} = B_n \cdot a + b$ beschreibt die Entwicklung des Bestands an Elektroautos in Österreich ausgehend vom Jahr 2015 für die Jahre 2016 und 2017.
Dabei gilt:

- B_0 ist der Bestand am Ende des Jahres 2015.
- B_1 ist der Bestand am Ende des Jahres 2016.
- B_2 ist der Bestand am Ende des Jahres 2017.

1) Geben Sie a und b an.

a = ________________________________

b = ________________________________

Damit die angegebene Differenzengleichung auch für das Ende des Jahres 2018 zutrifft, hätte der Bestand an Elektroautos im Rest des Jahres 2018 noch um eine bestimmte Anzahl erhöht werden müssen.

2) Berechnen Sie diese Anzahl.

b) Die Batteriekapazität (in kWh) ist das Produkt von Ladeleistung (in kW) und Ladezeit (in h). Um beispielsweise eine (annähernd) leere Batterie mit einer Batteriekapazität von 22 kWh mit einer Ladeleistung von 11 kW zu laden, benötigt man eine Ladezeit von 2 h.

Die Funktion f beschreibt die Ladezeit $f(P)$ einer Batterie mit einer Batteriekapazität von 22 kWh in Abhängigkeit von der Ladeleistung P (P in kW, $f(P)$ in h).

1) $\boxed{\text{A}}$ Geben Sie $f(P)$ an.

$f(P) =$ ____

Die typische Ladeleistung einer privaten Ladestation liegt im Leistungsintervall [2,3 kW; 3,7 kW].

2) Geben Sie für eine Batterie mit einer Batteriekapazität von 22 kWh dasjenige Zeitintervall der Ladezeit an, das diesem Leistungsintervall entspricht.

c) Für die Fahrt eines Elektroautos auf einer bestimmten Teststrecke wird modellhaft angenommen:
- Die gesamte Teststrecke wird mit einer konstanten Geschwindigkeit durchfahren.
- Es besteht ein linearer Zusammenhang zwischen dem Energiebedarf dieses Elektroautos und der jeweiligen konstanten Geschwindigkeit.

Dieses Elektroauto hat bei einer konstanten Geschwindigkeit von 70 km/h einen Energiebedarf von 12,9 kWh für das Durchfahren dieser Teststrecke.
Bei einer konstanten Geschwindigkeit von 110 km/h hat es einen Energiebedarf von 20,9 kWh für das Durchfahren dieser Teststrecke.

Die Funktion E beschreibt den Energiebedarf $E(v)$ in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v mit $50 \leq v \leq 130$ (v in km/h, $E(v)$ in kWh).

1) Geben Sie $E(v)$ an.

$E(v) =$ ____

Die Batterie dieses Elektroautos hat eine Batteriekapazität von 41 kWh und ist vor dem Durchfahren der Teststrecke vollständig geladen. Nach dem Durchfahren der Teststrecke sind in der Batterie noch 30,22 kWh gespeichert.

2) Ermitteln Sie die (konstante) Geschwindigkeit v_1, mit der die Teststrecke durchfahren worden ist.

Aufgabe 28 (Teil 2)

Müsliriegel

Ein neuer Müsliriegel steht vor der Markteinführung. Der Hersteller dieses Müsliriegels produziert 100 000 Stück davon.

Auf allen Verpackungen der Müsliriegel wird die Möglichkeit von Sofortgewinnen angekündigt. Die jeweilige Höhe des Sofortgewinns kann man nach dem Öffnen der Verpackung auf deren Innenseite ablesen. Der Hersteller des Müsliriegels gibt an:
Es werden

- 9 000 Sofortgewinne zu je € 2
- 900 Sofortgewinne zu je € 5
- 100 Sofortgewinne zu je € 65

ausgezahlt.

Alle produzierten Müsliriegel werden an Geschäfte geliefert. Die Verteilung der Müsliriegel erfolgt nach dem Zufallsprinzip.

Aufgabenstellung:

a) Unter Berücksichtigung aller Produktionskosten kostet jeder der 100 000 Müsliriegel in der Produktion durchschnittlich € 1.

Der Verkaufspreis eines Müsliriegels soll so festgelegt werden, dass für den Hersteller ein Gewinn von mindestens € 80.000 erzielt wird, wenn nach dem Verkauf aller Müsliriegel alle Sofortgewinne ausgezahlt werden müssen.
Alle Müsliriegel haben den gleichen Verkaufspreis.

1) Ermitteln Sie den unter diesen Voraussetzungen kleinstmöglichen Verkaufspreis p des Müsliriegels.

2) Geben Sie an, um wie viel Prozent der kleinstmögliche Verkaufspreis p gesenkt werden kann, wenn man die Müsliriegel ohne Gewinnspiel verkauft und der Gewinn trotzdem mindestens € 80.000 ausmachen soll.

b) Die Zufallsvariable X beschreibt die Höhe des ausgezahlten Sofortgewinns pro gekauften Müsliriegel.

1) Ermitteln Sie den Erwartungswert $E(X)$.

Ein Kunde kauft 4 Müsliriegel.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Kunde mindestens einen Sofortgewinn erzielt.

c) Aus Erfahrung weiß man, dass 95 % der Müsliriegel eine vorgegebene Mindestmasse haben.

Eine Zufallsstichprobe von 1 000 Müsliriegeln wird ausgewählt. Die binomialverteilte Zufallsvariable Y beschreibt dabei die Anzahl der Müsliriegel in dieser Zufallsstichprobe, die die vorgegebene Mindestmasse haben.

1) $\boxed{\text{A}}$ Ermitteln Sie die Standardabweichung $\sigma(Y)$ der Zufallsvariablen Y.

$\sigma(Y) =$ ____

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung im gegebenen Kontext.

$P(Y \geq 933) \approx 0{,}99$